České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
Katedra fyziky

Asymptotické metody a jejich užití při řešení diferenciálních rovnic

Asymptotic methods with applications in solving differential equations

Bakalářská práce

Autor: **Vojtěch Kužel**

Vedoucí práce: **doc. Ing. Václav Klika, Ph.D.**

Akademický rok: 2022/2023

FAKULTA JADERNÁ A FYZIKÁLNĚ INŽENÝRSKÁ

KATEDRA FYZIKY

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2022/2023

Student:	Vojtěch Kužel
Studijní program:	Matematické inženýrství
Specializace:	Matematická fyzika
Název práce: (česky)	Asymptotické metody a jejich užití při řešení diferenciálních rovnic
Název práce: (anglicky)	Asymptotic methods with applications in solving differential equations
Jazyk práce:	Čeština

Pokyny pro vypracování:

1) Studium asymptotických metod [1,2], zejména pak metod zaměřených na lokální aproximativní řešení.

2) Seznámit se s Tikhonovým teorémem pro rigorózní užití singulární asymptotické metody [3,4].

3) Zvolit si vhodný konkrétní problém pro užití studovaných asymptotických metod. Lze doporučit studium nelineárního reakčně-difuzního problému (využívajícího Fredholmovy alternativy), např. [5], či chemické kinetiky s pomalou i rychlou časovou škálou (vedoucí na singulární perturbační problém), např. [4].

Doporučená literatura:

[1] White, R. B. (2010). Asymptotic analysis of differential equations. World Scientific.

[2] Bender, C. M., & Orszag, S. A. (2013). Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic Methods and Perturbation Theory. Springer Science & Business Media.

[3] Tikhonov, A. N. (1952). Systems of differential equations containing small parameters in the derivatives. Matematicheskii sbornik, 73(3), 575-586.

[4] Lax, C., & Walcher, S. (2020). Singular perturbations and scaling. Discrete & Continuous Dynamical Systems-B, 25(1), 1.

[5] Iron, D., & Ward, M. J. (2002). The dynamics of multispike solutions to the one-dimensional Gierer--Meinhardt model. SIAM Journal on Applied Mathematics, 62(6), 1924-1951.

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

doc. Ing. Václav Klika, Ph.D.
Katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze

Datum zadání bakalářské práce: 20.10.2022

Termín odevzdání bakalářské práce: 02.08.2023

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
-3-

....
garant studijního programu

....
vedoucí katedry

....
děkan

V Praze dne 20.10.2022

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Břehová 7
115 19 Praha 1

ČVUT
ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

PROHLÁŠENÍ

Já, níže podepsaný

Jméno a příjmení studenta:	Vojtěch Kužel
Osobní číslo:	502417
Název studijního programu (oboru):	Matematické inženýrství, Matematická fyzika

prohlašuji, že jsem bakalářskou práci s názvem:

Asymptotické metody a jejich užití při řešení diferenciálních rovnic

vypracoval samostatně a uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze dne 1. 8. 2023 ....

podpis

Poděkování:

Chtěl bych zde poděkovat především svému školiteli doc. Ing. Václavovi Klikovi, Ph.D. za pečlivost, ochotu, vstřícnost a odborné i lidské zázemí při vedení mé bakalářské práce.

Vojtěch Kužel

Název práce:

Asymptotické metody a jejich užití při řešení diferenciálních rovnic

Autor: Vojtěch Kužel

Studijní program: Matematické inženýrství

Specializace: Matematická fyzika

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: doc. Ing. Václav Klika, Ph.D., Katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

Abstrakt: Bakalářská práce se věnuje asymptotickým metodám a jejich použití při řešení diferenciálních rovnic. Práce je rozdělena na dvě kapitoly. První kapitola obsahuje teoretický úvod do asymptotických řad a dále pokračuje popisem vybraných asymptotických metod. Konkrétně se jedná o metodu dominantní rovnováhy, dále metodu získávání lokální aproximace řešení v podobě asymptotické řady a nakonec metodu aproximace řešení pomocí perturbační teorie. Druhá kapitola se zaměřuje na demonstraci užití perturbační teorie na třech konkrétních příkladech. Prvním příkladem je úloha na vlastní čísla konkrétní matice. Tato úloha je v druhém příkladě rozšířena a vyřešena pro matici obecnou. Jako třetí příklad pak vystupuje řešení homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu. Všechny tyto úlohy jsou zde detailně vyřešeny.

Klíčová slova: asymptotické metody, lokální aproximativní řešení, perturbační teorie

Title:

Asymptotic methods with applications in solving differential equations

Author: Vojtěch Kužel

Abstract: The bachelor's thesis focuses on asymptotic methods and their applications in solving differential equations. The thesis is divided into two chapters. The first chapter provides a theoretical introduction to asymptotic series and continues with a description of selected asymptotic methods. In particular, it covers the method of dominant balance, the method of obtaining a local approximate solution in the form of asymptotic series and the method of aproximation solution using perturbation theory. The second chapter demonstrates the application of perturbation theory through three specific examples. The first example is an eigenvalue problem of a particular matrix. This problem is further expanded and solved for a general matrix in the second example. The third example involves solving a homogeneous linear second-order differential equation. All these problems are thoroughly solved in detail.

Key words: asymptotic methods, local aproximate solution, perturbation theory

Obsah

Úvod **8**

1 Asymptotické metody **9**

1.1 Teorie asymptotických řad . . . 9
1.2 Dominantní rovnováha . . . 10
1.3 Lokální aproximativní řešení . . . 11
1.3.1 Normální bod . . . 12
1.3.2 Regulární singulární bod . . . 12
1.3.3 Neregulární singulární bod . . . 13
1.4 Perturbační teorie . . . 14
1.4.1 Regulární perturbační teorie . . . 14
1.4.2 Singulární perturbační teorie . . . 15

2 Užití asymptotických metod **16**

2.1 Konkrétní úloha na vlastní čísla . . . 16
2.1.1 Zadání . . . 16
2.1.2 Přechod k perturbační teorii . . . 17
2.1.3 Nultý řád . . . 17
2.1.4 První řád . . . 18
2.1.5 Vyšší řády . . . 18
2.1.6 Konkrétní výsledky . . . 18
2.2 Obecná úloha na vlastní čísla . . . 19
2.2.1 Zadání . . . 19
2.2.2 Přechod k perturbační teorii . . . 19
2.2.3 Nultý řád . . . 19
2.2.4 První řád . . . 20
2.2.5 Vlastní vektory, vyšší řády . . . 22
2.2.6 Vícenásobná vlastní čísla . . . 22
2.3 Diferenciální úloha . . . 24
2.3.1 Zadání . . . 24
2.3.2 Přechod k perturbační teorii . . . 24
2.3.3 Nultý řád . . . 25
2.3.4 První řád . . . 25
2.3.5 Vyšší řády . . . 29

Závěr **30**

Úvod

Asymptotické metody jsou velmi mocný nástroj používaný při řešení algebraických či diferenciálních rovnic. Tyto metody umožňují získání aproximativního řešení pro širokou škálu problémů, mezi které patří i mnoho analyticky neřešitelných úloh. Výhodou asymptotických metod je pak především jednoduchost jejich použití a nízká výpočetní složitost v porovnání s ostatními numerickými metodami. Své uplatnění tak nalézají zejména v případech, kdy standardní postupy selhávají nebo jsou výpočetně příliš složité.

Cílem této bakalářské práce je seznámit se s tématem asymptotických metod, zejména pak metod zaměřených na získávání lokálního aproximativního řešení. Tyto metody blíže popsat a představit možnosti jejich použití. Dalším cílem je studované metody následně použít pro řešení vybraných konkrétních problémů a demonstrovat jejich výhody.

V první části práce se nejdříve seznámíme s teorií asymptotických řad a zavedeme si potřebné definiční pojmy z asymptotické analýzy. Dále si představíme metodu dominantní rovnováhy. Ta je užitečná především při hledání aproximace řešení méně složitých algebraických a diferenciálních úloh. Jako druhou uvedeme metodu lokální aproximace řešení v podobě asymptotické řady, která se hodí zejména v případě lineárních diferenciálních rovnic. Její analogií je metoda aproximace řešení pomocí perturbační teorie. Ta nalézá uplatnění především v rovnicích obsahujících malý parametr a představuje poslední studovanou metodu. Na závěr první části bude představena problematika regulární a singulární asymptotické metody.

V druhé části přejdeme od teorie asymptotických metod k jejich použití. Zaměříme se především na perturbační teorii a s její pomocí vyřešíme úlohu na vlastní čísla matice s konkrétními hodnotami. Tuto úlohu následně zobecníme a budeme se zabývat hledáním vlastních čísel pro obecnou matici. Zde také uvedeme Fredholmův alternativní teorém a ukážeme, jakou roli hraje při hledání aproximace řešení. Na závěr zreprodukujeme postup získaný v této úloze, aplikujeme jej na obecnou lineární diferenciální rovnici druhého řádu a budeme hledat její přibližné řešení.

Kapitola 1

Asymptotické metody

V první kapitole se budeme věnovat teorii asymptotických metod pro řešení diferenciálních rovnic. Veškerá teorie uvedená v této kapitole včetně příkladů je shrnutím a kombinací poznatků z [1, 2].

1.1 Teorie asymptotických řad

Ještě než přikročíme ke konkrétním asymptotickým metodám, uveďme několik potřebných pojmů z teorie asymptotických řad, které později využijeme při hledání aproximace řešení.

Definice 1.1. *Řekneme, že funkce $f(x)$ je mnohem menší než $g(x)$, když x jde k x_0, jestliže*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Značíme $f(x) \ll g(x), x \to x_0$.

Definice 1.2. *Dále řekneme, že funkce $f(x)$ je asymptotická k $g(x)$, když x jde k x_0, jestliže*

$$f(x) - g(x) \ll g(x), x \to x_0.$$

Značíme $f(x) \sim g(x), x \to x_0$.

Definici 1.2 také můžeme s použitím Definice 1.1 ekvivalentně přepsat jako

$$f(x) \sim g(x), x \to x_0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Nyní již zadefinujeme samotnou asymptotickou řadu pomocí asymptotické posloupnosti.

Definice 1.3. *Nechť $(\phi_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost funkcí splňující pro libovolné $n \in \mathbb{Z}^+$*

$$\phi_{n+1} \ll \phi_n, x \to x_0.$$

Pak pro x jdoucí k x_0 nazveme $(\phi_n)_{n=0}^{\infty}$ asymptotická posloupnost.

Definice 1.4. *Dále nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n$ je řada, kde $(\phi_n)_{n=0}^{\infty}$ je asymptotická posloupnost. Pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n$ nazveme asymptotická řada.*

Příkladem asymptotické posloupnosti mohou být $\phi_n = (x - x_0)^n, x \to x_0$ nebo $\phi_n = x^{-n}, x \to \infty$. Je tedy zřejmé, že asymptotická řada může být z definice konvergentní, většinou se však pod tímto pojmem myslí řada divergentní. V případě $\phi_n = (x - x_0)^n$ můžeme asymptotickou řadu svázat s funkcí následujícím vztahem.

Definice 1.5. *Řekneme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je pro x jdoucí k x_0 asymptotická k funkci $y(x)$, jestliže pro libovolné $N \in \mathbb{Z}^+$ platí*

$$y(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n(x-x_0)^n \ll (x-x_0)^N.$$

Značíme $y(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, $x \to x_0$.

S použitím předchozích definic můžeme Definici 1.5 ekvivalentně přepsat ve tvaru

$$y(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, x \to x_0 \iff \forall N \in \mathbb{Z}^+, y(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n(x-x_0)^n \sim a_M(x-x_0)^M,$$

kde a_M je první nenulový koeficient po a_N. Definici 1.5 můžeme navíc rozšířit i pro neceločíselné mocniny $(x-x_0)$:

$$y(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^{\alpha n}, x \to x_0 \iff \forall N \in \mathbb{Z}^+, y(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n(x-x_0)^{\alpha n} \ll (x-x_0)^{\alpha N}.$$

Přímo z definice asymptotické řady lze jednotlivé koeficienty a_n vyjádřit jako

$$a_0 = \lim_{x\to x_0} y(x), \quad a_1 = \lim_{x\to x_0} \frac{y(x)-a_0}{(x-x_0)^\alpha}, \quad \dots \quad , \quad a_k = \lim_{x\to x_0} \frac{y(x) - \sum_{n=0}^{k-1} a_n(x-x_0)^{\alpha n}}{(x-x_0)^{\alpha k}}.$$

Jsou tedy funkcí $y(x)$ určeny jednoznačně a samotný asymptotický rozvoj funkce $y(x)$, pokud existuje, je tak jediný. Opačně tato vlastnost neplatí, neboť k $y(x)$ můžeme přidat libovolnou funkci mnohem menší než jakákoliv mocnina $(x-x_0)$ a asymptotický rozvoj se tím nezmění. Asymptotická řada tak reprezentuje třídu funkcí, které se liší o funkci mnohem menší než je jakákoliv mocnina $(x-x_0)$.

Jak bylo zmíněno výše, asymptotické řady chápeme především jako řady divergentní a hledané řešení tak pomocí asymptotické řady nemůžeme vyjádřit přesně, ale jen s určitou přesností. K uzavření teorie o asymptotických řadách tak zbývá dodat odhad chyby, které se s jejím použitím dopustíme. Ten nám dává tvrzení odvozené v [1, s. 52-53].

Tvrzení 1.6. *Nechť $y(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, $x \to x_0$. Pak pro libovolné $N \in \mathbb{Z}^+$ platí*

$$|y(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n(x-x_0)^n| \le |a_{N+1}(x-x_0)^{N+1}|.$$

Nejlepší aproximaci řešení tedy dostaneme, pokud pro zvolené x ukončíme řadu po takovém N, kdy je člen $|a_{N+1}(x-x_0)^{N+1}|$ nejmenší. Při aproximaci asymptotickou řadou se tak dopouštíme chyby, která je menší nebo rovna než první zanedbaný člen v rozvoji.

1.2 Dominantní rovnováha

Metoda dominantní rovnováhy je jednoduchý a velmi užitečný nástroj při hledání přibližného řešení diferenciálních rovnic. Metodu využijeme dále v podkapitole 1.3, uveďme proto ve zkratce schéma metody a příklad použití. Řekněme, že hledáme přibližné řešení zadané rovnice pro x jdoucí k x_0. Jako první zvolíme dominantní (nejrychleji rostoucí) členy pro $x \to x_0$ a ostatní malé členy zanedbáme. Zjednodušenou rovnici vyřešíme exaktně a pro $x \to x_0$ tak získáváme přibližné řešení původní rovnice. Volbu nejrychleji rostoucích členů můžeme provést použitím Kruskal-Newtonova diagramu popsaném v [1, s. 2-11], nebo metodou pokus-omyl, kterou nyní předvedeme na jednoduchém příkladu. Pro tento způsob výběru dominantních členů je důležité uvědomění, že v rovnici nikdy nemůže být dominantní pouze jeden člen a vždy tedy volíme dominantní členy alespoň dva. Vezměme pro ukázku rovnici

$$y''(x) + (y'(x))^2 + \frac{1}{x^3} = 0$$

a hledejme aproximaci řešení pro $x \to 0$. Volba dominantních členů může být například

$$y''(x) \sim -\frac{1}{x^3}, \;\; (y'(x))^2 \ll \frac{1}{x^3}.$$

Integrací dostáváme

$$y'(x) \sim \frac{1}{2x^2} \;\text{ a }\; y(x) \sim -\frac{1}{2x}.$$

Takové řešení však neodpovídá původnímu volbě, neboť

$$(y'(x))^2 \ll \frac{1}{x^3} \iff \frac{1}{4x^4} \ll \frac{1}{x^3},$$

ale $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{4x^4} \neq 0$. Zvolme tedy dominantní členy jako

$$(y'(x))^2 \sim -\frac{1}{x^3}, \;\; y''(x) \ll \frac{1}{x^3}.$$

Z toho dostáváme odhad řešení

$$y'(x) \sim \pm\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \;\text{ a }\; y(x) \sim \mp\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}},$$

které původní odhad již splňuje, neboť

$$y''(x) \ll \frac{1}{x^3} \iff \mp\frac{3}{2}\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}} \ll \frac{1}{x^3} \iff \lim_{x\to 0} \mp\frac{3x^3}{2x^{\frac{5}{2}}} = 0.$$

1.3 Lokální aproximativní řešení

Jako první ze zkoumaných asymptotických metod uveďme metody získávání lokálního aproximativního řešení. Takový přístup se hodí zejména v situacích, kdy je exaktní řešení daného problému příliš složité nebo dokonce neexistuje. Díky níže popsaným metodám tak získáme alespoň lokální aproximaci řešení na okolí vybraného bodu. V této podkapitole si ukážeme postup řešení pro homogenní lineární diferenciální rovnici

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1(x)y^{(1)}(x) + p_0(x)y(x) = 0. \tag{1.1}$$

Jeho zobecnění pro nelineární či nehomogenní diferenciální rovnici bychom nalezli v [2].

Lokální aproximaci můžeme hledat ve dvou podobách - jako mocninnou řadu konvergentní na nějakém poloměru konvergence, nebo jako asymptotickou řadu, která se k řešení přibližuje pouze s omezenou přesností. Podoba hledaného řešení je dána typem bodu x_0, na jehož okolí se zaměřujeme.

1.3.1 Normální bod

Bod x_0 nazveme normálním bodem (1.1), jestliže jsou všechny funkce $p_0(x), \dots, p_{n-1}(x)$ analytické na nějakém okolí bodu x_0. V takovém případě je všech n lineárně nezávislých řešení (1.1) také analytických na okolí x_0 a můžeme je vyjádřit jako Taylorův rozvoj

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{1.2}$$

jehož poloměr konvergence je alespoň tak velký, jako je vzdálenost bodu x_0 od nejbližší singularity funkcí $p_0(x), \dots, p_{n-1}(x)$. Postup řešení na okolí normálního bodu je tedy jednoduchý. Stačí předpokládat řešení ve tvaru (1.2), dosadit jej do (1.1) a ze vzniklé rovnice porovnáváním koeficientů u stejných mocnin $(x - x_0)$ vyjádřit hledané koeficienty a_n. Zpětným dosazením do (1.2) tak získáme přesné (konvergentní) řešení (1.1) na okolí bodu x_0.

1.3.2 Regulární singulární bod

Dalším typem bodu je regulární singulární bod. Bod x_0 nazveme regulární singulární bod, jestliže není bod normální a zároveň všechny funkce $(x - x_0)^n p_0(x), (x - x_0)^{n-1} p_1(x), \dots, (x - x_0) p_{n-1}(x)$ jsou na okolí x_0 analytické. Tuto podmínku můžeme ekvivalentně interpretovat tak, že pokud pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$ v (1.1) dosadíme místo $y^{(k)}(x)$ výraz $\frac{y}{(x-x_0)^k}$, pak žádný člen (1.1) nesmí být více singulární než člen s nejvyšší derivací $y(x)$. Na okolí regulárního singulárního bodu x_0 pak existuje alespoň jedno řešení ve tvaru

$$y(x) = (x - x_0)^{\alpha} A(x), \tag{1.3}$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ nazýváme indexový exponent a $A(x)$ je funkce analytická v x_0, tj. lze zapsat pomocí Taylorovy řady s poloměrem konvergence velikým alespoň jako vzdálenost x_0 od nejbližší singularity funkcí $p_0(x), \dots, p_{n-1}(x)$. Pro lineární diferenciální rovnici řádu $n \geq 2$ pak existuje druhé lineárně nezávislé řešení v jednom z následujících tvarů:

$$\begin{aligned} y(x) &= (x - x_0)^{\beta} B(x) \qquad\qquad \text{nebo} \\ y(x) &= (x - x_0)^{\alpha} A(x) \ln(x - x_0) + (x - x_0)^{\beta} B(x), \end{aligned}$$

kde $\beta \in \mathbb{R}$ a $B(x)$ je funkce analytická v x_0. Druhá možnost navíc nastává, právě když $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}$. Pro každé další lineárně nezávislé řešení pak dostáváme novou funkci analytickou v x_0 a buď nový indexový exponent, nebo další mocninu $\ln(x - x_0)$. V nejhorším případě tak může n-té řešení nabývat tvar

$$y(x) = (x - x_0)^{\gamma} \sum_{i=0}^{n-1} (\ln(x - x_0))^i A_i(x),$$

kde $A_i(x)$ jsou opět funkce analytické v x_0.

Podívejme se opět na postup řešení rovnice (1.1) na okolí regulárního singulárního bodu x_0. Jeho korektní odvození a podrobná diskuze možných situací jsou uvedeny v [2, s. 70-76]. Jelikož je $A(x)$ v (1.3) analytická v x_0, můžeme ji zde vyjádřit pomocí Taylorovy řady. Předpokládaný tvar řešení (1.3) pak můžeme přepsat jako

$$y(x) = (x - x_0)^{\alpha} A(x) = (x - x_0)^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+\alpha}. \tag{1.4}$$

Výraz napravo v (1.4) se nazývá Frobeniova řada a je zobecněním Taylorovy řady. V (1.4) se také často zavádí konvence $a_0 \neq 0$, která může být snadno splněna vhodnou volbou exponentu α. Dosazením (1.4) do (1.1) a porovnáním koeficientů u stejných mocnin $(x - x_0)$ můžeme vyjádřit exponent α a koeficienty a_n. Rovnice vzniklá porovnáním koeficientů u $(x-x_0)^{-n+\alpha}$, tj. nejnižší mocniny $(x-x_0)$, určuje exponent α a nazývá se indexová rovnice. Z ostatních mocnin $(x - x_0)$ pak dostáváme rekurzivní vztahy mezi koeficienty a_n. Koeficient a_0 bývá zpravidla neurčen a vystupuje jako libovolná konstanta. Tímto postupem nalezneme jedno, někdy i více lineárně nezávislých řešení. Další lineárně nezávislá řešení můžeme získat následovně. Indexový parametr α ponecháme zatím neurčený, vyřešíme pouze rekurzivní vztahy pro a_n a jejich výsledek dosadíme do (1.4). V souladu s (1.1) zavedeme operátor

$$Ly = y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y^{(1)} + p_0 y,$$

aplikujeme jej na (1.4) a výslednou rovnici zderivujeme podle parametru α. Teprve nyní dosadíme konkrétní α_i z řešení indexové rovnice a dostáváme tak dvě možné situace:

(i) $L\left(\frac{dy}{d\alpha}|_{\alpha_i}\right) = 0$

(ii) $L\left(\frac{dy}{d\alpha}|_{\alpha_i}\right) = f$, kde f je nenulová pravá strana.

V případě (i) je řešení (1.1) jednoduché, má totiž přímo tvar $\frac{dy}{d\alpha}|_{\alpha_i}$. V případě (ii) musíme nalézt druhé partikulární řešení $Lg = f$, které má opět podobu Frobeniovy řady $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^{n+\beta}$. Dosazením g do $Lg = f$ a porovnáním stejných mocnin $(x - x_0)$ získáme opět exponent β a koeficienty b_n. Hledané řešení (1.1) pak získáme vzájemným odečtením partikulárních řešení $\frac{dy}{d\alpha}|_{\alpha_i}$ a g. Tímto způsobem nalezneme na okolí bodu x_0 všech n lineárně nezávislých řešení.

1.3.3 Neregulární singulární bod

Posledním typem bodu je neregulární singulární bod. Takový je z definice bod, který není normální ani regulární singulární. Označme jej opět jako x_0. V případě neregulárního singulárního bodu již existence konvergentního řešení na jeho okolí zaručena není. Můžeme však nalézt lokální aproximativní řešení v podobě divergentní asymptotické řady, která na daném okolí dává velmi přesný odhad. Nalezneme nejdříve první člen asymptotického rozvoje, takzvaný vedoucí asymptotický tvar, který udává hlavní chování řešení na okolí x_0. Najdeme jej pomocí substituce

$$y(x) = e^{S(x)}. \tag{1.5}$$

Dosazením (1.5) do (1.1) získáme diferenciální rovnici pro $S(x)$, kterou vyřešíme metodou dominantní rovnováhy. Počáteční odhad můžeme dále vylepšit substitucí

$$y(x) = e^{S(x)+g(x)},$$

kterou opět dosadíme do (1.1) a najdeme dominantní rovnováhu pro $g(x)$. Takto bychom v exponentu přidávali další členy až do chvíle, kdy pro nějaký z nich nastane $h(x) \ll konst.$, tedy $\lim_{x\to x_0} h(x) = 0$ a tudíž $\lim_{x\to x_0} e^{h(x)} = 1$. V takovém případě je již vedoucí asymptotický tvar kompletní a můžeme pokračovat v hledání dalších členů asymptotického rozvoje. Ty najdeme pomocí substituce

$$y(x) = e^{S(x)+g(x)+\dots}W(x), \tag{1.6}$$

kde výraz $y = e^{S(x)+g(x)+\dots}$ obsahuje všechny získané členy až na $h(x)$. Dosazením (1.6) do (1.1) a odseparováním vedoucího tvaru $e^{S(x)+g(x)+\dots}$ získáme diferenciální rovnici pro $W(x)$, ke které nalezneme řešení v podobě mocninné řady

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^{\alpha n}. \tag{1.7}$$

V rozvoji (1.7) je podle tvaru vzniklé rovnice pro $W(x)$ zapotřebí ještě vhodně zvolit parametr $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby bylo možné porovnat jednotlivé mocniny $(x - x_0)$ mezi sebou (viz [1, s. 50]). Celočíselné mocniny totiž nemusí být vždy dostačující. Dosazením (1.7) s vhodnou volbou α do rovnice pro $W(x)$ získáme opět rekurzivní vztahy pro koeficienty a_n. Po jejich vyřešení a zpětném dosazení tak získáváme aproximaci řešení v podobě asymptotické řady

$$y(x) \sim e^{S(x)+g(x)+\dots} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{\alpha n}, x \to x_0. \tag{1.8}$$

K dosažení číselné aproximace pro konkrétní hodnoty x zbývá pouze řadu v (1.8) vhodně zkrátit podle pravidla uvedeného v Tvrzení 1.6. Konkrétní příklady ke zkrácení řady můžeme najít v [1, s. 54-61].

1.4 Perturbační teorie

Dalším způsobem, jak se přiblížit k řešení mnoha složitých úloh, mohou být metody spadající pod perturbační teorii. Ty jsou užitečné zejména v případě, obsahuje-li zadaná úloha malý parametr, označme jej jako perturbační parametr ε. V takovém případě můžeme předpokládat řešení ve tvaru perturbačního rozvoje v ε, dosadit jej do původní rovnice a nalézt koeficienty zmíněného rozvoje. Tímto způsobem převedeme velmi obtížnou úlohu na nekonečně mnoho úloh jednoduchých, které však nemusíme řešit všechny, neboť pro požadovanou přesnost stačí mnohdy napočítat pouze několik prvních členů perturbačního rozvoje.

Poznamenejme nyní, že perturbační teorie je analogií k teorii lokálního aproximativního řešení z podkapitoly 1.3. V té jsme hledali řešení diferenciálních rovnic na okolí bodu x_0 v podobě mocninných řad v $(x - x_0)$. K perturbační teorii tak můžeme přejít záměnou parametru ε za mocniny $(x - x_0)$. Připomeňme ještě, že v podkapitole 1.3 v případě normálního bodu x_0 existovalo řešení v podobě Taylorova rozvoje s nenulovým poloměrem konvergence, v případě singulárního bodu x_0 jsme pak nalezli řešení v podobě konvergentní Frobeniovy řady nebo divergentní asymptotické řady. Stejně můžeme i v perturbační teorii rozlišit dva případy.

1.4.1 Regulární perturbační teorie

Regulární perturbační teorie zahrnuje z definice problémy, jejichž perturbační rozvoj má podobu mocninné řady v ε s nenulovým poloměrem konvergence

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\varepsilon^n. \tag{1.9}$$

Po napočítání příslušných koeficientů $y_n(x)$ tak získáme přesné konvergentní řešení platné pouze pro určitý rozsah ε, ale pro všechna x. Regulární perturbační problém má navíc vlastnost, že řešení pro velmi malé ε hladce přechází v řešení úlohy pro hodnotou $\varepsilon = 0$, kterou označujeme jako neperturbovaná úloha. Řešení neperturbované úlohy je v případě regulární perturbační teorie totožné s prvním členem perturbačního rozvoje, který označujeme jako řešení nultého řádu $y_0(x)$. Jeho existence navíc obecně zaručuje existenci řešení vyšších řádů $y_n(x)$ [2, s. 321]. Nabízí se tak možnost pomocí regulární perturbační teorie řešit i úlohy, které neobsahují žádný malý parametr. V takovém případě jej můžeme do úlohy sami vložit tak, abychom pro hodnotu $\varepsilon = 0$ získali jednoduše řešitelnou úlohu. Poté najdeme perturbační rozvoj v podobě (1.9) a nakonec nastavíme hodnotu ε tak, abychom dostali nazpět původní úlohu. Regulární perturbační teorií se budeme zabývat dále v kapitole 2, kde si ukážeme podrobný postup řešení pro dvě úlohy na vlastní čísla matice a jednu diferenciální úlohu.

1.4.2 Singulární perturbační teorie

Druhým typem problému je singulární perturbační problém. Za takový se označujeme problém, jehož perturbační rozvoj má podobu mocninné řady s nulovým poloměrem konvergence, nebo v podobě mocninné řady vůbec neexistuje. V případě singulárního perturbačního problému platí, že řešení nultého řádu a řešení neperturbované úlohy jsou odlišná. Řešení neperturbované úlohy navíc mnohdy nemusí ani existovat nebo může být neúplné. Jako ukázku singulárního perturbačního problému uveďme příklady z [2, s. 325-326]:

$$\varepsilon^2 x^6 - \varepsilon x^4 - x^3 + 8 = 0 \tag{1.10}$$

$$\varepsilon y''(x) - y'(x) = 0, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 1. \tag{1.11}$$

V obou případech je zřejmé, že se jedná o singulární perturbační problémy. V (1.10) pro $\varepsilon = 0$ dostáváme rovnici

$$x^3 = 8,$$

která dává tři nezávislá řešení $x_0 = 2, 2e^{\frac{2\pi i}{3}}, 2e^{\frac{4\pi i}{3}}$. Původní rovnice však vyžaduje řešení šest a řešení neperturbované úlohy je tak neúplné. V (1.11) získáváme pro $\varepsilon = 0$ rovnici

$$y'(x) = 0,$$

která má řešení $y_0 = konst$. To však nemůže splnit okrajové podmínky $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ a řešení neperturbované úlohy tedy neexistuje a další rozvoj v podobě řady tak není možný. Toto je častý znak singulárního perturbačního problému, kdy máme malý parametr umístěný před nejvyšší mocninou či derivací. Neperturbovaná úloha v takovém případě získává odlišný charakter od úlohy původní a ztrácíme tak její řešení, případně jeho schopnost splnit okrajové podmínky. Problematika singulární perturbační teorie je velmi rozsáhlá a její zkoumání vede za hranice této práce. Na závěr tak uveďme pouze Tikhonův teorém, který dává jistý náhled na řešení problému tohoto typu [3].

Věta 1.7 (Tikhonův teorém)**.** *Mějme systém diferenciálních rovnic obsahující malý parametr* μ

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, z, t), \\ \mu \frac{dz}{dt} &= F(x, z, t) \end{aligned} \tag{1.12}$$

s počátečními podmínkami

$$x(t_0) = x_0,\ z(t_0) = z_0.$$

Systém (1.12) *přechází pro singulární limitu* $\mu = 0$ *v degenerovaný systém*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, z, t), \\ z &= \phi(x, t), \end{aligned} \tag{1.13}$$

kde $z = \phi(x, t)$ *je kořen rovnice* $F(x, z, t) = 0$*. Dále označme rovnici*

$$\frac{dz}{d\tau} = F(x, z, t) \tag{1.14}$$

jako přidružený systém, kde x *a* t *jsou brány jako parametry. Pak se pro* $\mu \to 0$ *řešení původního systému* (1.12) *blíží řešení degenerovaného systému* (1.13)*, pokud je* $z = \phi(x, t)$ *stabilní kořen přidrženého systému* (1.14).

Kapitola 2

Užití asymptotických metod

V druhé kapitole využijeme získanaých poznatků z kapitoly 1 a aplikujeme je na vybrané příklady. Konkrétně se bude jednat o použití perturbační teorie při hledání vlastních čísel matice a následné uplatnění nalezeného postupu pro řešení diferenciální úlohy.

2.1 Konkrétní úloha na vlastní čísla

Jako první začneme s úlohou na vlastní čísla konkrétní zadané matice, na které si ukážeme postup řešení za pomoci perturbační teorie a představíme si jeho výhody.

2.1.1 Zadání

Mějme zadané matice $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{R}^{20,20}$, parametr $\varepsilon \in \mathbb{R}^+, \varepsilon \ll 1$,

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 19 & 20 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 18 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 20 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

a hledejme vlastní čísla matice $(\mathbb{A} + \varepsilon\mathbb{B})$. Řešíme tedy úlohu

$$(\mathbb{A} + \varepsilon\mathbb{B})x = \lambda x, \tag{2.1}$$

kde x je vlastní vektor a λ hledané vlastní číslo. Toto je typický příklad regulárního perturbačního problému, kdy nejdříve vyřešíme jednoduchou úlohu $\mathbb{A}x = \lambda x$ a poté pomocí perturbační teorie najdeme řešení pro blízkou ale těžkou úlohu (2.1).

2.1.2 Přechod k perturbační teorii

Z teorie lineární algebry víme, že vlastní čísla jsou kořeny polynomu $\det(\mathbb{A} + \varepsilon\mathbb{B} - \lambda\mathbb{I})$. Determinant můžeme rozepsat rozvojem podle posledního řádku jako

$$\det(\mathbb{A} + \varepsilon\mathbb{B} - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 20-\lambda & 20 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 19-\lambda & 20 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 18-\lambda & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 20 \\ \varepsilon & 0 & \dots & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (20-\lambda)(19-\lambda)(18-\lambda)\dots(1-\lambda) - 20^{19}\varepsilon$$
$$= c_0 - 20^{19}\varepsilon + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + c_3\lambda^3 + \dots + c_{20}\lambda^{20},$$

kde koeficienty $c_0, c_1, \dots, c_{20}$ vznikly pouhým roznásobením výrazu $(20-\lambda)(19-\lambda)\dots(1-\lambda)$, tedy

$$c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + c_3\lambda^3 + \dots + c_{20}\lambda^{20} = (20-\lambda)(19-\lambda)\dots(1-\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}). \tag{2.2}$$

Hledání vlastních čísel tak přechází v řešení rovnice

$$c_0 - 20^{19}\varepsilon + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + c_3\lambda^3 + \dots + c_{20}\lambda^{20} = 0. \tag{2.3}$$

Nyní využijeme perturbační teorii a λ vyjádříme perturbačním rozvojem jako mocninnou řadu v ε

$$\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \varepsilon^k. \tag{2.4}$$

Dosazením (2.4) do (2.3) dostáváme

$$c_0 - 20^{19}\varepsilon + c_1\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\varepsilon^k\right) + c_2\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\varepsilon^k\right)^2 + c_3\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\varepsilon^k\right)^3 + \dots + c_{20}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\varepsilon^k\right) = 0. \tag{2.5}$$

Aby rovnost (2.5) platila pro libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, musí být koeficienty na levé straně u všech mocnin ε identicky rovny nule. Tím jsou samozřejmě myšleny koeficienty vzniklé až po roznásobení výrazu na levé straně (2.5) a poskládání všech členů u stejné mocniny ε k sobě. Pokládejme tedy postupně jednotlivé koeficienty rovno nule.

2.1.3 Nultý řád

Součet členů u ε^0 v (2.5) dává

$$c_0 + c_1\lambda_0 + c_2\lambda_0^2 + c_3\lambda_0^3 + \dots + c_{20}\lambda_0^{20} = 0, \tag{2.6}$$

což je zároveň podmínka na nulovost determinantu matice $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})$. Podmínka (2.6) je tedy splněna, právě když je λ_0 vlastním číslem matice $\mathbb{A}$. Hledání řešení nultého řádu tedy opravdu odpovídá řešení původní neperturbované úlohy. Jelikož se jedná o horní trojúhelníkovou matici, její vlastní čísla získáme snadno odečtením z diagonály. Dostáváme tak sadu aproximací nultého řádu

$$\lambda_0^{(i)} = i,\ i \in \{1, 2, \dots, 20\}. \tag{2.7}$$

Pokud označíme vlastní čísla $(\mathbb{A} + \varepsilon\mathbb{B})$ jako $\lambda^{(i)}$, pak kombinací (2.4) a (2.7) dostáváme

$$\lambda^{(i)} = i + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(i)}\varepsilon^k,\ i \in \{1, 2, \dots, 20\},$$

kde jsme přeznačili λ_k za $\lambda_k^{(i)}$, abychom rozlišili korekce stejného řádu pro různá $\lambda^{(i)}$.

2.1.4 První řád

Zvolme si nyní $i \in \{1, 2, \ldots, 20\}$ libovolné ale pevné. Pak z (2.5) po sečtení všech členů u ε^1 a opětovném přeznačení $\lambda_0 \to \lambda_0^{(i)}, \lambda_1 \to \lambda_1^{(i)}$ dostáváme

$$-20^{19} + c_1\lambda_1^{(i)} + 2c_2\lambda_0^{(i)}\lambda_1^{(i)} + 3c_3\left(\lambda_0^{(i)}\right)^2\lambda_1^{(i)} + 4c_4\left(\lambda_0^{(i)}\right)^3\lambda_1^{(i)} + \cdots + 20c_{20}\left(\lambda_0^{(i)}\right)^{19}\lambda_1^{(i)} = 0.$$

Drobnými úpravami pak získáváme korekci prvního řádu pro $\lambda^{(i)}$

$$\lambda_1^{(i)} = \frac{20^{19}}{c_1 + 2c_2\lambda_0^{(i)} + 3c_3\left(\lambda_0^{(i)}\right)^2 + \cdots + 20c_{20}\left(\lambda_0^{(i)}\right)^{19}} = \frac{20^{19}}{\sum_{k=1}^{20} kc_k\left(\lambda_0^{(i)}\right)^{k-1}}. \tag{2.8}$$

Pro libovolné $i \in \{1, 2, \ldots, 20\}$ tak můžeme vlastní číslo $\lambda^{(i)}$ psát v přiblížení prvního řádu jako

$$\lambda^{(i)} = i + \frac{20^{19}\varepsilon}{\sum_{k=1}^{20} kc_k\left(\lambda_0^{(i)}\right)^{k-1}} + O(\varepsilon^2).$$

2.1.5 Vyšší řády

Pokud bychom pro $\lambda^{(i)}$ chtěli získat korekce vyšších řádů, tj. $\lambda_2^{(i)}, \lambda_3^{(i)}, \lambda_4^{(i)}, \ldots$, postupovali bychom zcela analogicky jako v případě $\lambda_1^{(i)}$, pouze bychom z (2.5) vybírali členy u mocnin $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \ldots$, jejich součet položili rovno nule a ze vzniklých rovnic, které budou vždy lineární, vyjádřili hledané korekce. Zde se ukazuje veliká výhoda perturbační teorie, kdy místo hledání kořenů polynomu stupně 20 postupně získáváme jednotlivé korekce pouhým řešením lineárních rovnic.

2.1.6 Konkrétní výsledky

Podívejme se nyní na konkrétní výsledky pro přiblížení $\lambda^{(i)}$ do prvního řádu. Po napočítání koeficientů c_i z (2.2) a dosazení do (2.8) získáváme korekce prvního řádu

$$\begin{aligned}
\lambda_1^{(1)} &= -\lambda_1^{(20)} \approx -4,31 \cdot 10^7, & \lambda_1^{(6)} &= -\lambda_1^{(15)} \approx 5,01 \cdot 10^{11}, \\
\lambda_1^{(2)} &= -\lambda_1^{(19)} \approx 8,19 \cdot 10^8, & \lambda_1^{(7)} &= -\lambda_1^{(14)} \approx -1,17 \cdot 10^{12}, \\
\lambda_1^{(3)} &= -\lambda_1^{(18)} \approx -7,37 \cdot 10^9, & \lambda_1^{(8)} &= -\lambda_1^{(13)} \approx 2,17 \cdot 10^{12}, \\
\lambda_1^{(4)} &= -\lambda_1^{(17)} \approx 4,18 \cdot 10^{10}, & \lambda_1^{(9)} &= -\lambda_1^{(12)} \approx -3,26 \cdot 10^{12}, \\
\lambda_1^{(5)} &= -\lambda_1^{(16)} \approx -1,67 \cdot 10^{11}, & \lambda_1^{(10)} &= -\lambda_1^{(11)} \approx 3,98 \cdot 10^{12}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Hodnotu vlastního čísla $\lambda^{(i)}$ bychom pak získali jako

$$\lambda^{(i)} \approx i + \lambda_1^{(i)}\varepsilon. \tag{2.10}$$

Můžeme se nyní ptát, jaké jsou hranice nastavení parametru ε pro dosažení určité přesnosti. Je zřejmé, že tyto hranice stačí stanovit pouze vzhledem k $\lambda^{(10)}$, neboť z (2.9) vyplývá, že je z vlastních čísel na změnu ε nejcitlivější. Pro ukázku požadujme maximální odchylku získaných vlastních čísel $\lambda^{(i)}$ od původních vlastních čísel $\lambda_0^{(i)}$ do 2 %. Označme si tedy maximální přípustnou hodnotu $\lambda^{(10)}$ jako $\lambda_{max}^{(10)} = 10,2$. Pak z (2.10) a (2.9)

$$\lambda^{(10)} \approx \lambda_0^{(10)} + \lambda_1^{(10)}\varepsilon = \lambda^{(10)} \approx 10 + 3,98 \cdot 10^{12}\varepsilon$$

a z požadavku $\lambda^{(10)} \overset{!}{\leq} \lambda_{max}^{(10)}$ dostáváme po několika úpravách

$$\varepsilon \lessapprox 5 \cdot 10^{-14}.$$

Abychom tedy získali vlastní čísla s přesností do 2 %, museli bychom brát ε řádu 10^{-14} a menší, což je na poměrně velkou odchylku velmi malé číslo. Ukazuje se tedy, že v tomto případě není zvolená metoda pro přiblížení vlastním číslům velmi efektivní a výsledek tak spíše poukazuje na citlivost úlohy hledání vlastních čísel jako takové. Nicméně jako demonstrace užití perturbační teorie svůj účel úloha zcela splnila.

2.2 Obecná úloha na vlastní čísla

V podkapitole 2.1 jsme si ukázali postup řešení pro konkrétní úlohu se zadanými hodnotami. Podívejme se nyní, jak by úloha vypadala v úplné obecnosti.

2.2.1 Zadání

Mějme matice $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$ a parametr $\varepsilon \in \mathbb{R}^+, \varepsilon \ll 1$. Nechť dále $\mathbb{A}$ má vzájemně různá vlastní čísla a matice $\mathbb{A}, \mathbb{B} \sim O(1)$, tedy nejsou závislé na ε. Hledejme vlastní čísla a vektory matice $(\mathbb{A} + \varepsilon\mathbb{B})$, tj. řešme úlohu

$$(\mathbb{A} + \varepsilon\mathbb{B})x = \lambda x. \tag{2.11}$$

Princip řešení bude stejný jako v podkapitole 2.1 - předpokládejme znalost vlastních čísel matice $\mathbb{A}$, to představuje jednoduchou úlohu $\mathbb{A}x = \lambda x$. Řešení pro složitou úlohu (2.11) pak odvodíme za pomoci perturbační teorie.

2.2.2 Přechod k perturbační teorii

Jelikož se jedná o zcela obecnou úlohu, bude zapotřebí zvolit poněkud odlišný postup od podkapitoly 2.1. Zde by cesta přes determinant také vedla k cíli, výsledek by byl však poměrně složitý. Zapišme si tedy λ a x pomocí perturbačního rozvoje jako

$$\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \varepsilon^k, \; x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \varepsilon^k \tag{2.12}$$

a ihned dosaďme do (2.11). Dostáváme

$$(\mathbb{A}+\varepsilon\mathbb{B})(x_0+x_1\varepsilon+x_2\varepsilon^2+x_3\varepsilon^3+\dots) = (\lambda_0+\lambda_1\varepsilon+\lambda_2\varepsilon^2+\lambda_3\varepsilon^3+\dots)(x_0+x_1\varepsilon+x_2\varepsilon^2+x_3\varepsilon^3+\dots). \tag{2.13}$$

Na levé i pravé straně (2.13) dostáváme po roznásobení polynomy v proměnné ε. Rovnost tak nastává, právě když se koeficienty u jednotlivých mocnin ε navzájem rovnají.

2.2.3 Nultý řád

Vybráním členů s mocninou ε^0 dostáváme z (2.13) rovnici na vlastní čísla a vektory matice $\mathbb{A}$

$$\mathbb{A}x_0 = \lambda_0 x_0. \tag{2.14}$$

Za předpokladu, že vlastní čísla $\lambda_0^{(1)}, \lambda_0^{(2)}, \dots, \lambda_0^{(n)}$ a k nim příslušné vlastní vektory $x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(n)}$ známe, můžeme pokračovat v dalším přiblížení. Povšimněme si také, že vzájemně různá vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ zde hrají důležitou roli. Z tohoto předpokladu víme, že ke každému vlastnímu číslu najdeme právě jeden lineárně nezávislý vlastní vektor. Jinými slovy ke každému vlastnímu číslu máme vlastní podprostor tvořený pouze násobky příslušného vlastního vektoru. Později snadno nahlédneme, že na volbě vlastního vektoru nezáleží. Ze stejného předpokladu také vyplývá, že vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé.

2.2.4 První řád

Označme si hledaná vlastní čísla a vlastní vektory matice $(\mathbb{A} + \varepsilon\mathbb{B})$ jako $\lambda^{(i)}$ a $x^{(i)}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Abychom v rozvoji (2.12) rozlišili členy stejného řádu pro různá $\lambda^{(i)}$ a $x^{(i)}$, přeznačme pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\lambda_k \to \lambda_k^{(i)}$ a $x_k \to x_k^{(i)}$, tudíž dostaneme

$$\lambda^{(i)} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(i)} \varepsilon^k,\ x^{(i)} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k^{(i)} \varepsilon^k,\ i \in \{1, 2, \dots, n\}. \tag{2.15}$$

Zvolme si nyní $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ libovolné pevné a hledejme další členy rozvoje (2.15) stejným způsobem, tedy porovnáváním členů u stejných mocnin ε v (2.13), kde opět přeznačíme $\lambda_k \to \lambda_k^{(i)}$, $x_k \to x_k^{(i)}$. Členy u mocnin ε^1 dávají

$$\mathbb{A}x_1^{(i)} + \mathbb{B}x_0^{(i)} = \lambda_0^{(i)} x_1^{(i)} + \lambda_1^{(i)} x_0^{(i)}, \tag{2.16}$$

což můžeme ekvivalentně přepsat ve tvaru

$$\mathbb{L}^{(i)} x_1^{(i)} = (\lambda_1^{(i)}\mathbb{I} - \mathbb{B}) x_0^{(i)}, \tag{2.17}$$

kde jsme označili $\mathbb{L}^{(i)} := (\mathbb{A} - \lambda_0^{(i)}\mathbb{I})$. K vyřešení (2.17) použijeme větu funkcionální analýzy zvanou Fredholmova alternativa. Ta v maticové podobě říká následující [4].

Věta 2.1 (Fredholmova alternativa - maticový operátor)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$*. Pak platí právě jedna z následujících možností:*

(1) buď rovnice $\mathbb{A}x = b$ *má jednoznačné řešení* $x \in \mathbb{R}^n$ *pro libovolné* $b \in \mathbb{R}^m$*,*

(2) nebo existuje nenulové řešení $y \in \mathbb{R}^m$ *rovnice* $\mathbb{A}^T y = 0$*. Potom má rovnice* $\mathbb{A}x = b$ *řešení právě tehdy, když* $y^T b = 0$ *pro všechna* $y \in \mathbb{R}^m$ *taková, že* $A^T y = 0$*.*

Poznámka 2.2. Pokud se ve Větě 2.1 omezíme pouze na čtvercové matice, pak situace (1) odpovídá regulární (invertibilní) matici, naopak situace (2) nastává pro matice singulární.

Jelikož je $\lambda_0^{(i)}$ vlastním číslem $\mathbb{A}$, pak $\mathbb{L}^{(i)}$ je jistě singulární matice. Z Fredholmovy alternativy tak dostáváme, že (2.17) má řešení právě když pro libovolné y, splňující podmínku $\left(\mathbb{L}^{(i)}\right)^T y = 0$, platí

$$y^T (\lambda_1^{(i)}\mathbb{I} - \mathbb{B}) x_0^{(i)} = 0. \tag{2.18}$$

Podmínka $\left(\mathbb{L}^{(i)}\right)^T y = 0$ dává rovnici

$$\left(\mathbb{A} - \lambda_0^{(i)}\mathbb{I}\right)^T y = 0,$$

kterou ekvivalentně můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbb{A}^T y = \lambda_0^{(i)} y \qquad \text{nebo} \qquad y^T \mathbb{A} = \lambda_0^{(i)} y^T. \tag{2.19}$$

Z (2.19) je zřejmé, že y splňuje $\left(\mathbb{L}^{(i)}\right)^T y = 0$ právě když je vlastním vektorem $\mathbb{A}^T$ příslušným k vlastnímu číslu $\lambda_0^{(i)}$. To můžeme také interpretovat tak, že y je levým vlastním vektorem matice $\mathbb{A}$ příslušným k $\lambda_0^{(i)}$.

Z předpokladu prostoty vlastních čísel $\mathbb{A}$ a tedy i $\mathbb{A}^T$ má (2.19) právě jedno nezávislé řešení - vlastní vektor příslušný k $\lambda_0^{(i)}$. Označme jej $y^{(i)}$. Takzvaná podmínka řešitelnosti (2.18) tak přechází v

$$(y^{(i)})^T(\lambda_1^{(i)}\mathbb{I} - \mathbb{B})x_0^{(i)} = 0,$$

ze které po roznásobení a dalších úpravách můžeme vyjádřit $\lambda_1^{(i)}$ jako

$$\lambda_1^{(i)} = \frac{(y^{(i)})^T \mathbb{B} x_0^{(i)}}{(y^{(i)})^T x_0^{(i)}}. \tag{2.20}$$

Z tohoto výrazu je již jasné, že nezávisí na volbě vlastních vektorů $x_0^{(i)}$ a $y^{(i)}$, neboť jejich libovolný násobek můžeme díky linearitě skalárního součinu vytknout před zlomek, kde se následně pokrátí. Vyjádření $\lambda_1^{(i)}$ je tedy na jejich volbě nezávislé. Zbývá ještě ověřit, zdali je dělení výrazem $(y^{(i)})^T x_0^{(i)}$ oprávněné. K tomu využijeme následující tvrzení.

Tvrzení 2.3. *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\mathbb{A}$ má vzájemně různá vlastní čísla, $\sigma(\mathbb{A}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Dále nechť pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$ je x_i pravý vlastní vektor a y_i levý vlastní vektor příslušný k λ_i. Pak pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí $y_i^T x_i \neq 0$.*

Důkaz. Označme matici z pravých vlastních vektorů jako $\mathbb{R}$, matici z transponovaných levých vlastních vektorů jako $\mathbb{L}$ a matici s vlastními čísly na diagonále jako $\mathbb{D}$:

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbb{L} = \begin{pmatrix} y_1^T \\ y_2^T \\ \vdots \\ y_n^T \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Pak jistě platí

$$\begin{aligned} \mathbb{A}\mathbb{R} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}x_1 & \mathbb{A}x_2 & \ldots & \mathbb{A}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \ldots & \lambda_n x_n \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathbb{R}\mathbb{D}, \end{aligned}$$

$$\mathbb{L}\mathbb{A} = \begin{pmatrix} y_1^T \mathbb{A} \\ y_2^T \mathbb{A} \\ \vdots \\ y_n^T \mathbb{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1^T \\ \lambda_2 y_2^T \\ \vdots \\ \lambda_n y_n^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^T \\ y_2^T \\ \vdots \\ y_n^T \end{pmatrix} = \mathbb{D}\mathbb{L}.$$

Z toho musí platit, že

$$\begin{aligned} \mathbb{L}\mathbb{A}\mathbb{R} &= \mathbb{L}\mathbb{R}\mathbb{D} \\ \mathbb{L}\mathbb{A}\mathbb{R} &= \mathbb{D}\mathbb{L}\mathbb{R}, \end{aligned}$$

a tedy

$$\mathbb{LRD} = \mathbb{DLR}.$$

Matice $\mathbb{D}$ je však diagonální, proto musí být i matice $\mathbb{LR}$ diagonální:

$$\mathbb{LR} = \begin{pmatrix} y_1^T \\ y_2^T \\ \vdots \\ y_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^T x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y_2^T x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & y_n^T x_n \end{pmatrix}$$

Z toho vyplývá, že pro libovolné $i \in \{1, \dots, n\}$ je vektor y_i kolmý na vektory $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$. Z lineární algebry víme, že má-li matice všechna vlastní čísla vzájemně různá, pak jsou vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům lineárně nezávislé a tvoří bázi daného prostoru. V našem případě tak $\{x_1, \dots, x_n\}$ je báze $\mathbb{R}^n$. Z toho již vyplývá, že součin $y_i^T x_i \neq 0$. Pokud by totiž byl roven nule, pak by byl y_i kolmý na všechny vektory báze $\{x_1, \dots, x_n\}$ a tudíž by musel být roven nulovému vektoru. To je však v rozporu s předpokladem, že y_i je vlastní vektor matice $\mathbb{A}^T$. □

Z Tvrzení 2.3 plyne, že pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$ skalární součin $(y^{(i)})^T x_0^{(i)} \neq 0$, neboť $y^{(i)}$ a $x_0^{(i)}$ jsou levý a pravý vlastní vektor $\mathbb{A}$ příslušející k $\lambda_0^{(i)}$. Výraz pro $\lambda_1^{(i)}$ tudíž dává dobrý smysl. Z (2.15) a (2.20) tak dostáváme pro libovolné $i \in \{1, \dots, n\}$ přiblížení $\lambda^{(i)}$ v prvním řádu

$$\lambda^{(i)} = \lambda_0^{(i)} + \frac{(y^{(i)})^T \mathbb{B} x_0^{(i)}}{(y^{(i)})^T x_0^{(i)}} \varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Vraťme se nyní k výsledkům podkapitoly 2.1 pro konkrétní zadání matic $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{R}^{20,20}$. Pokud bychom k vlastním číslům $\lambda_0^{(i)} = i, i \in \{1, \dots, 20\}$ matice $\mathbb{A}$ spočítali příslušné levé a pravé vlastní vektory $y_0^{(i)}$ a $x_0^{(i)}$ a dosadili je do (2.20), získali bychom opět výsledky v podobě (2.9). Vzorce pro výpočet $\lambda_1^{(i)}$ (2.8) a (2.20) si tedy odpovídají.

2.2.5 Vlastní vektory, vyšší řády

Pokud bychom chtěli kromě vlastních hodnot $\lambda^{(i)}$ získat také vlastní vektory $x^{(i)}$, museli bychom pro $x_1^{(i)}$ vyřešit rovnici (2.17). Ta řešení z Fredholmovy alternativy má, o jeho tvaru či jednoznačnosti však Freedholmova alternativa nic neříká a musela by tak být podrobena dalšímu zkoumání.

Korekce vyšších řádů $\lambda^{(i)}$ a $x^{(i)}$ bychom získali opět z (2.13) identickým postupem, tentokrát však porovnáním členů u vyšších mocnin ε.

2.2.6 Vícenásobná vlastní čísla

V předcházejícím postupu jsme jako důležitý předpoklad měli všechna vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ vzájemně různá. Zkoumejme nyní případ, kdyby tomu tak nebylo - předpokládejme pouze rovnost algebraické a geometrické násobnosti vlastních čísel $\mathbb{A}$. Stejně jako v předchozím případě dosaďme rozvoje $\lambda^{(i)}$ a $x^{(i)}$ (2.15) do (2.11) a porovnejme koeficienty u stejných mocnin ε. Členy s mocninou ε^0 dávají opět rovnici (2.14), ze které získáváme vlastní čísla $\lambda_0^{(1)}, \lambda_0^{(2)} \dots, \lambda_0^{(m)}, m \leq n$. Pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ označme algebraickou i geometrickou násobnost $\lambda_0^{(i)}$ jako j_i. K $\lambda_0^{(i)}$ máme vlastní podprostor tvořený j_i nezávislými vektory, které všechny splňují (2.14). Označme je $z_1^{(i)}, \dots, z_{j_i}^{(i)}$. Zde dochází k odlišení od předcházejícího postupu, jelikož není jasné, který z těchto vektorů máme pro další postup použít a zdali výsledek závisí na jeho výběru. Označíme-li $x_0^{(i)} := c_1 z_1^{(i)} + c_2 z_2^{(i)} + \dots + c_{j_i} z_{j_i}^{(i)}$, pak jistě splňuje (2.14) a můžeme pokračovat v dříve stanoveném postupu. Zvolíme pevné $i \in \{1, \ldots, m\}$ a hledáme přiblížení $\lambda^{(i)}$ prvního řádu. Porovnáním členů u mocnin ε^1 v (2.13) dostáváme (2.16), což přepíšeme jako

$$\mathbb{L}^{(i)} x_1^{(i)} = (\lambda_1^{(i)} \mathbb{I} - \mathbb{B})(c_1 z_1^{(i)} + \cdots + c_{j_k} z_{j_k}^{(i)}). \tag{2.21}$$

Opět s využitím Fredholmovy alternativy hledáme y splňující podmínku $(\mathbb{L}^{(i)})^T y = 0$. Po několika triviálních úpravách dostáváme analogicky k předchozímu postupu rovnici $\mathbb{A}^T y = \lambda_0^{(i)} y$, tedy úlohu na vlastní vektory matice $\mathbb{A}^T$ příslušné vlastnímu číslu $\lambda_0^{(i)}$. Odtud získáváme j_i nezávislých vektorů, ty označíme jako $y_1^{(i)}, \ldots, y_{j_i}^{(i)}$. Pak z Fredholmovy alternativy má (2.21) řešení, právě když pro libovolné $l \in \{1, \ldots, j_i\}$ platí

$$(y_l^{(i)})^T (\lambda_1^{(i)} \mathbb{I} - \mathbb{B})(c_1 z_1^{(i)} + \cdots + c_{j_i} z_{j_i}^{(i)}) = 0. \tag{2.22}$$

Jednoduchými úpravami dostaneme (2.22) do tvaru

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(i)} (y_l^{(i)})^T \sum_{t=1}^{j_i} c_t z_t^{(i)} &= (y_l^{(i)})^T \mathbb{B} \sum_{t=1}^{j_i} c_t z_t^{(i)}, \\ \lambda_1^{(i)} \sum_{t=1}^{j_i} \left((y_l^{(i)})^T z_t^{(i)} \right) c_t &= \sum_{t=1}^{j_i} \left((y_l^{(i)})^T \mathbb{B} z_t^{(i)} \right) c_t. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Z (2.23) dostáváme pro libovolné $l \in \{1, \ldots, j_i\}$

$$\lambda_1^{(i)} = \frac{\sum_{t=1}^{j_i} \left((y_l^{(i)})^T \mathbb{B} z_t^{(i)} \right) c_t}{\sum_{t=1}^{j_i} \left((y_l^{(i)})^T z_t^{(i)} \right) c_t}. \tag{2.24}$$

Výraz ve jmenovateli je nenulový, neboť v sumě $\sum_{t=1}^{j_i} \left((y_l^{(i)})^T z_t^{(i)} \right) c_t$ z Tvrzení 2.3, které platí i v tomto obecnějším případě, zůstane vždy právě jeden nenulový člen. Z (2.24) vidíme, že řešení $\lambda_1^{(i)}$ nezávisí na volbě $y_l^{(i)}$, neboť jejich libovolný násobek se ve zlomku pokrátí. Není z něj však jasné, zdali $\lambda_1^{(i)}$ závisí na volně koeficientů $c_1, \ldots, c_{j_i}$. Přepišme proto výrazy na levé a pravé straně (2.23) jako násobení vektorů

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{j_i} \left((y_l^{(i)})^T \mathbb{B} z_t^{(i)} \right) c_t &= \left((y_l^{(i)})^T \mathbb{B} z_1^{(i)} \quad \ldots \quad (y_l^{(i)})^T \mathbb{B} z_{j_i}^{(i)} \right) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{j_i} \end{pmatrix}, \\ \sum_{t=1}^{j_i} \left((y_l^{(i)})^T z_t^{(i)} \right) c_t &= \left((y_l^{(i)})^T z_1^{(i)} \quad \ldots \quad (y_l^{(i)})^T z_{j_i}^{(i)} \right) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{j_i} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Jelikož (2.25) musí platit pro všechna $l \in \{1, \ldots, j_i\}$, můžeme podmínku na $\lambda_1^{(i)}$ zapsat ekvivalentně v maticovém tvaru

$$\mathcal{B} c = \lambda_1^{(i)} \mathcal{D} c, \tag{2.26}$$

kde $\mathcal{B}, \mathcal{D}$ jsou matice a c vektor dány předpisem

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{lk} &= (y_l^{(i)})^T \mathbb{B} z_k^{(i)}, \quad l, k \in \{1, \ldots, j_i\} \\ \mathcal{D}_{lk} &= (y_l^{(i)})^T z_k^{(i)}, \quad l, k \in \{1, \ldots, j_i\} \\ c &= \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{j_i} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jedná se o takzvanou zobecněnou úlohu na vlastní čísla, kde je vektor na pravé straně, na rozdíl od klasické úlohy, zleva přenásoben maticí odpovídající dimenze. Stejně jako (2.24) dává (2.26) pro libovolné $i \in \{1, \ldots, m\}$ j_i různých podmínek na $\lambda_1^{(i)}$. Z (2.26) je však patrné, že $\lambda_1^{(i)}$ nezávisí na volbě koeficientů $c_1, \ldots, c_{j_i}$, neboť je zobecněným vlastním číslem $\mathcal{B}$ vzhledem k $\mathcal{D}$ a můžeme jej tedy získat nezávisle na vlastních vektorech. Díky j_i podmínkám z (2.26) (resp. (2.24)) navíc dochází ke snížení či úplnému odstranění degenerace (algebraické násobnosti) vlastního čísla $\lambda^{(i)}$, která je v přiblížení nultého řádu rovna právě j_i. Při hledání korekcí vyšších řádů vlastních čísel a vektorů tak můžeme postupovat stejně jako v případě prostých vlastních čísel.

2.3 Diferenciální úloha

V této podkapitole přejdeme od řešení algebraických úloh k úloze diferenciální, na kterou aplikujeme již známý postup z podkapitoly 2.2.

2.3.1 Zadání

Mějme úlohu zadanou na intervalu $(0, l) \subset \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}^+$ s homogenní Dirichletovou okrajovou podmínkou

$$\begin{aligned} u''(x) + b(x)u(x) &= 0, \\ u(0) = u(l) &= 0, \end{aligned} \tag{2.27}$$

kde $b(x)$ je dostatečně hladká funkce v x, $x \in (0, l)$. Taková úloha je s obecnou funkcí $b(x)$ velmi těžce řešitelná. Například pro $b(x) = konst.$ existuje poměrně jednoduché řešení ve tvaru $\sum c_\alpha e^{\alpha x}$, ale $b(x)$ s lineární závislostí na x dává již mnohem složitější řešení ve tvaru speciálních Airyho funkcí. Pro $b(x)$ s vyšší závislostí na x než lineární tak můžeme očekávat řešení v ještě složitějším tvaru. Zkusme se proto zcela obecnému případu přiblížit pomocí petrurbační teorie.

2.3.2 Přechod k perturbační teorii

V rovnici (2.27) přeznačme $b(x) = \lambda + \varepsilon a(x)$, kde λ je konstanta a $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ perturbační parametr. Získáme tak úlohu

$$\begin{aligned} u''(x) + (\lambda + \varepsilon a(x))u(x) &= 0, \\ u(0) = u(l) &= 0. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Při hodnotě $\varepsilon = 0$ dostaneme opět snadno řešitelnou úlohu $u''(x) + \lambda u(x) = 0$, kde λ představuje vlastní hodnotou operátoru $-\frac{d^2}{dx^2}$. Při hodnotě $\varepsilon = 1$ naopak dostáváme původní složitou úlohu (2.27). Předpokládejme perturbační rozvoj u a λ jako

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)\varepsilon^k, \ \lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \varepsilon^k. \tag{2.29}$$

Dosazením rozvoje do (2.28) získáváme rovnici

$$u_0'' + u_1''\varepsilon + u_2''\varepsilon^2 + u_3''\varepsilon^3 + \ldots \Big(\lambda_0 + \lambda_1\varepsilon + \lambda_2\varepsilon^2 + \lambda_3\varepsilon^3 + \cdots + a\varepsilon\Big)\Big(u_0 + u_1\varepsilon + u_2\varepsilon^2 + u_3\varepsilon^3 + \ldots\Big) = 0. \tag{2.30}$$

Na levé straně po roznásobení dostáváme výraz v podobě polynomu v ε, který musí být pro libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ identicky roven nule. Koeficienty u všech jeho mocnin ε musí být proto nulové.

2.3.3 Nultý řád

Pro členy u ε^0 dostáváme z (2.30) rovnici

$$u_0'' + \lambda_0 u_0 = 0. \tag{2.31}$$

Z okrajové podmínky $u(0) = u(l) = 0$ a rozvoje (2.29) navíc získáváme

$$u(0) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(0)\varepsilon^k = 0,$$
$$u(l) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(l)\varepsilon^k = 0,$$

kde rovnost požadujeme opět pro libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Dostáváme tak podmínku na nulovost všech koeficientů $u_k(0)$ a $u_k(l), k \in \mathbb{Z}^+$. Jinými slovy všechny korekce u_k musí splňovat okrajovou Dirichletovu podmínku $u_k(0) = u_k(l) = 0$. Spolu s (2.31) tak dostáváme kompletní úlohu s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} u_0'' + \lambda_0 u_0 &= 0, \\ u_0(0) = u_0(l) &= 0. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Jedná se o takzvanou Sturm-Liouvilleovu úlohu v jedné dimenzi s operátorem $L = -\frac{d^2}{dx^2}$. Z teorie víme, že spektrum Sturm-Liouvilleova operátoru je pozitivní a můžeme tak předpokládat $\lambda_0 > 0$. Obecné řešení (2.32) pak můžeme zapsat ve tvaru

$$u_0(x) = A\sin\left(\sqrt{\lambda_0}x\right) + B\cos\left(\sqrt{\lambda_0}x\right), \quad A, B = konst.$$

Z okrajových podmínek dostáváme

$$u_0(0) = B = 0,$$
$$u_0(l) = A\sin\left(\sqrt{\lambda_0}l\right) = 0 \implies \sqrt{\lambda_0}l = k\pi, k \in \mathbb{Z}^+,$$

z čehož dostáváme nultou korekci vlastních hodnot λ

$$\lambda_0 = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, k \in \mathbb{Z}^+. \tag{2.33}$$

Nultý člen řešení u_0 pak nabývá tvar

$$u_0(x) = A\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), k \in \mathbb{Z}^+, \tag{2.34}$$

kde A je nenulová normalizační konstanta, kterou jak uvidíme později můžeme volit libovolně.

2.3.4 První řád

Zvolme nyní $k \in \mathbb{Z}^+$ libovolné pevné a hledejme další členy rozvoje. Z (2.30) porovnáním členů u ε^1 dostáváme

$$u_1'' + \lambda_0 u_1 + \lambda_1 u_0 + a u_0 = 0.$$

Definujeme-li operátor $L := -\frac{d^2}{dx^2} - \lambda_0$, pak po sérii úprav dostáváme

$$\begin{aligned} -u_1'' - \lambda_0 u_1 &= (\lambda_1 + a)u_0, \\ L u_1 &= (\lambda_1 + a)u_0. \end{aligned}$$

Spolu s Dirichletovou okrajovou podmínkou pro u_1 tak máme úlohu

$$\begin{aligned} L u_1 &= (\lambda_1 + a)u_0, \\ u_1(0) &= u_1(l) = 0. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Ještě než se podíváme na obecné řešení (2.35), rozeberme si blíže případ $k = 0$. Podle (2.33) a (2.34) pro $k = 0$ dostáváme $\lambda_0 = 0, u_0 = 0$. Úloha (2.35) tak přechází v $u_1'' = 0,\ u_1(0) = u_1(l) = 0$. Pro takovou úlohu existuje pouze triviální řešení $u_1 = 0$, což odpovídá vlastnosti Sturm-Liouvilleova operátoru $-\frac{d^2}{dx^2}$, který je prostý. Stejným způsobem bychom dostali i korekce vyšších řádů $u_2 = u_3 = \cdots = 0$. Získáváme tak pouze triviální řešení $u = 0$. V dalším postupu se proto můžeme omezit pouze na $k \in \mathbb{N}$.

Korekce vlastních čísel

Podívejme se nejprve na řešitelnost úlohy (2.35). Vezměme $L = -\frac{d^2}{dx^2} - \lambda_0$, $u \in \operatorname{Dom} L$, $v \in \operatorname{Ker} L$ a označme $Lu = f$. Pak s použitím metody per-partes jistě platí

$$\begin{aligned} \int_0^l u(Lv)\,dx &= \int_0^l u(-v'' - \lambda_0 v)\,dx = -\int_0^l uv''\,dx - \int_0^l \lambda_0 uv\,dx = -[uv']_0^l + \int_0^l u'v' - \int_0^l \lambda_0 uv\,dx \\ &= [u'v]_0^l - \int_0^l u''v\,dx - \int_0^l \lambda_0 uv\,dx = \int_0^l (-u'' - \lambda_0 u)v\,dx = \int_0^l (Lu)v\,dx, \end{aligned} \tag{2.36}$$

kde jsme využili okrajové podmínky $u(0) = u(l) = v(0) = v(l) = 0$, která dává

$$\begin{aligned} [uv']_0^l &= u(l)v'(l) - u(0)v'(0) = 0, \\ [u'v]_0^l &= u'(l)v(l) - u'(0)v(0) = 0. \end{aligned}$$

S využitím předpokladů $Lu = f, Lv = 0$ dostáváme z (2.36)

$$\int_0^l fv\,dx = \int_0^l (Lu)v\,dx = \int_0^l u(Lv)\,dx = 0,$$

tedy že pro libovolné $v \in \operatorname{Ker} L$ a pravou stranu f musí platit $\int_0^l fv\,dx = 0$. Výsledek je konkrétním případem Fredholmova alternativního teorému, který v úpravě pro diferenciální operátory říká následující [1, s. 22].

Věta 2.4 (Fredholmova alternativa - diferenciální operátor)**.** *Nechť L je diferenciální operátor n-tého řádu s n okrajovými podmínkami $B_1 = 0, B_2 = 0, \ldots, B_n = 0$. Řešme úlohu $Ly = f$ s podmínkami $B_k(y) = 0, k = 1, 2, \ldots, n$. Pak buď*

(1) existuje právě jedno jednoznačné řešení, za předpokladu, že $f(x)$ je spojitá,

(2) nebo $Ly = 0$ má alespoň jedno netriviální řešení $y = v$. Pak $Ly = f$ má řešení právě tehdy, když $(v, f) = 0$ pro všechna v splňující $Lv = 0$, kde (v, f) je skalární součin definovaný na daném prostoru.

V našem případě $n = 2$ a protože se pohybujeme na prostoru $L^2((0,l),\, dx)$, skalární součin (v, f) není nic jiného než integrál $\int_0^l v f\, dx$. Podívejme se ještě na podmínku $Lv = 0$. Ta je totožná s úlohou pro nultou korekci (2.32), neboť

$$Lv = -v'' - \lambda_0 v = 0 \iff v'' + \lambda_0 v = 0$$

a navíc $v \in \operatorname{Ker} L \subset \operatorname{Dom} L$, musí tedy splňovat okrajové podmínky $v(0) = v(l) = 0$. Můžeme tak využít již nalezeného řešení

$$v(x) = u_0(x) = A \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right). \tag{2.37}$$

Zde je dobré připomenout, že máme stále pevně zafixovanou hodnotu $k \in \mathbb{N}$ a tedy k v (2.37) nepředstavuje rozdělení na nekonečně mnoho řešení jako v (2.34), nýbrž pouze jedno řešení s onou fixní hodnotou k. Nalezli jsme netriviální řešení úlohy $Lv = 0$, tudíž ve Větě 2.4 musí platit bod (2). Rovnice (2.35) má proto řešení právě když pro libovolné v splňující $Lv = 0$ platí

$$\int_0^l v((\lambda_1 + a)u_0)\, dx = 0. \tag{2.38}$$

Z (2.38) společně s (2.37) dostáváme

$$0 = \int_0^l v((\lambda_1 + a)u_0)\, dx = \lambda_1 \int_0^l u_0^2\, dx + \int_0^l a u_0^2\, dx$$

a λ_1 můžeme vyjádřit jako

$$\lambda_1 = -\frac{\int_0^l a u_0^2\, dx}{\int_0^l u_0^2\, dx}. \tag{2.39}$$

Integrál ve jmenovateli můžeme po dosazení za $u_0(x)$ s pomocí substituce $y = \frac{k\pi x}{l}$ upravit jako

$$\begin{aligned}\int_0^l (u_0(x))^2\, dx &= \int_0^l A^2 \sin^2\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx = A^2 \frac{l}{k\pi} \int_0^{k\pi} \sin^2 y\, dy \\ &= \frac{A^2 l}{k\pi} \int_0^{k\pi} \frac{1 - \cos(2y)}{2}\, dy = \frac{A^2 l}{2k\pi}\left(\int_0^{k\pi} dy - \frac{1}{2}\int_0^{2k\pi} \cos y\, dy\right) = \frac{A^2 l}{2},\end{aligned} \tag{2.40}$$

kde jsme využili $\int_0^{k\pi} dy = k\pi$ a $\int_0^{2k\pi} \cos y\, dy = 0$. Navíc je z výpočtu patrné, že $\int_0^l u_0^2\, dx \neq 0$, neboť A je blíže neurčená (však stále nenulová) normalizace funkce u_0 a l je reálné kladné číslo. Výraz (2.39) tak má dobrý smysl. Dosazením (2.40) do (2.39) získáváme pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ finální vyjádření

$$\lambda_1 = -\frac{2}{l} \int_0^l a(x) \sin^2\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx. \tag{2.41}$$

Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ tak získáváme vlastní hodnoty λ v přiblížení prvního řádu

$$\lambda = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 - \frac{2\varepsilon}{l} \int_0^l a(x) \sin^2\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx + O(\varepsilon^2).$$

Korekce vlastních funkcí

Vezměme opět libovolné pevné $k \in \mathbb{N}$. Z Fredholmovy alternativy víme, že řešení $u_1(x)$ rovnice (2.35) pro námi nalezené λ_1 existuje. Nalezneme je pomocí metody variace konstant. Obecné homogenní řešení (bez využití okrajových podmínek) rovnice (2.35) má tvar (viz sekce 2.3.3)

$$u_1^H(x) = A\sin\left(\sqrt{\lambda_0}x\right) + B\cos\left(\sqrt{\lambda_0}x\right), \quad A, B = konst.$$

Z metody variace konstant přejdeme od $A, B = konst.$ k funkcím $A(x), B(x)$ a dosadíme za λ_0 z (2.33). Hledáme tak řešení ve tvaru

$$u_1(x) = A(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + B(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right). \tag{2.42}$$

První derivaci u_1 můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned} u_1'(x) = A'(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + \frac{k\pi}{l}A(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + B'(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) - \frac{k\pi}{l}B(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \\ = \frac{k\pi}{l}A(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) - \frac{k\pi}{l}B(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \end{aligned}$$

kde jsme v posledním kroku zavedli zjednodušující požadavek

$$A'(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + B'(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) = 0. \tag{2.43}$$

Oprávněnost jeho použití uvidíme vzápětí. Druhá derivace u_1 má tvar

$$u_1''(x) = \frac{k\pi}{l}A'(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) - \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 A(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) - \frac{k\pi}{l}B'(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) - \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 B(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right). \tag{2.44}$$

Dosazením (2.42) a (2.44) do (2.35) dostáváme

$$-\frac{k\pi}{l}A'(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + \frac{k\pi}{l}B'(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) = (\lambda_1 + a(x))u_0(x). \tag{2.45}$$

Pokud pravou stranu označíme jako $f(x) := (\lambda_1 + a(x))u_0(x)$, můžeme (2.43) a (2.45) zapsat společně jako

$$\begin{pmatrix} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) & \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \\ -\frac{k\pi}{l}\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) & \frac{k\pi}{l}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'(x) \\ B'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}. \tag{2.46}$$

Dostáváme tedy soustavu rovnic pro neznámé $A'(x), B'(x)$. Označme vzniklou matici jako $\mathbb{W}$ a spočítejme její determinant:

$$|\mathbb{W}| = \begin{vmatrix} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) & \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \\ -\frac{k\pi}{l}\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) & \frac{k\pi}{l}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \end{vmatrix} = \frac{k\pi}{l}.$$

Matice $\mathbb{W}$ je tedy regulární. Zpětně tak získáváme oprávnění k použití (2.43), neboť díky regularitě $\mathbb{W}$ je soustava (2.46) řešitelná a požadavek (2.43) tak může být splněn. Navíc můžeme (2.46) přepsat jako

$$\begin{pmatrix} A'(x) \\ B'(x) \end{pmatrix} = \mathbb{W}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} = \frac{l}{k\pi}\begin{pmatrix} \frac{k\pi}{l}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) & -\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \\ \frac{k\pi}{l}\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) & \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} = \frac{f(x)l}{k\pi}\begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \\ \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \end{pmatrix},$$

dostáváme tak vyjádření pro $A'(x), B'(x)$

$$A'(x) = -\frac{f(x)l}{k\pi}\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right),$$
$$B'(x) = \frac{f(x)l}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right).$$

Z okrajových podmínek $u_1(0) = u_1(l) = 0$ a (2.42) dostáváme

$$u_1(0) = B(0) = 0,$$
$$u_1(l) = B(l)\cos(k\pi) = 0 \implies B(l) = 0.$$

S použitím $B(0) = 0$ můžeme $B(x)$ spočítat jako

$$B(x) = \int_0^x B'(y)\,dy = \frac{l}{k\pi}\int_0^x f(y)\sin\left(\frac{k\pi y}{l}\right)dy. \tag{2.47}$$

Vyjádření (2.47) zároveň splňuje podmínku $B(l) = 0$, neboť

$$\begin{aligned}B(l) &= \frac{l}{k\pi}\int_0^l f(y)\sin\left(\frac{k\pi y}{l}\right)dy = \frac{l}{k\pi}\int_0^l(\lambda_1 + a(y))u_0(y)\sin\left(\frac{k\pi y}{l}\right)dy\\ &= \frac{lA}{k\pi}\left(\lambda_1\int_0^l \sin^2\left(\frac{k\pi y}{l}\right)dy + \int_0^l a(y)\sin^2\left(\frac{k\pi y}{l}\right)dy\right) = \frac{lA}{k\pi}\left(\lambda_1\frac{l}{2} + \int_0^l a(y)\sin^2\left(\frac{k\pi y}{l}\right)dy\right)\\ &= \frac{lA}{k\pi}\left(-\int_0^l a(y)\sin^2\left(\frac{k\pi y}{l}\right)dy + \int_0^l a(y)\sin^2\left(\frac{k\pi y}{l}\right)dy\right) = 0,\end{aligned}$$

kde jsme využili popořadě definici $f(y)$, (2.34), $\int_0^l \sin^2\left(\frac{k\pi y}{l}\right)dy = \frac{l}{2}$ a (2.41).

Protože $\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$ již splňuje okrajové podmínky sám o sobě, funkce $A(x)$ zůstává v krajích neurčená a může být zvolena libovolně. Zvolme tedy $A(l) = 0$, pak jistě platí

$$A(x) = \int_l^x A'(y)\,dy = \frac{l}{k\pi}\int_x^l f(y)\cos\left(\frac{k\pi y}{l}\right)dy.$$

Řešení u_1 tak můžeme zapsat ve finálním tvaru

$$u_1(x) = \frac{l\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)}{k\pi}\int_x^l f(y)\cos\left(\frac{k\pi y}{l}\right)dy + \frac{l\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right)}{k\pi}\int_0^x f(y)\sin\left(\frac{k\pi y}{l}\right)dy, \tag{2.48}$$

kde pouze zbývá dosadit za $f(y)$ a využít předchozích výsledků pro λ_1 a u_0. Rovnici (2.48) můžeme také kompaktněji zapsat pomocí Greenovy funkce jako

$$u_1(x) = \frac{l}{k\pi}\int_0^l G(x,y)f(y)dy, \quad G(x,y) = \begin{cases}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{k\pi y}{l}\right), & 0 < x < y < l\\ \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{k\pi y}{l}\right), & 0 < y < x < l\end{cases}.$$

Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ tak získáváme řešení úlohy (2.28) v přiblížení prvního řádu

$$u(x) = A\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + \frac{\varepsilon l}{k\pi}\int_0^l G(x,y)f(y)dy + O(\varepsilon^2).$$

2.3.5 Vyšší řády

Stejně jako v podkapitolách 2.1 a 2.2, i zde bychom získali korekce vyšších řádů pro u a λ analogickým postupem, pouze bychom v (2.30) vybírali a porovnávali členy u vyšších mocnin ε.

Závěr

Tato bakalářská práce se věnovala studiu asymptotických metod a jejich praktickému užití při řešení diferenciálních rovnic. Ze zadání bakalářské práce vyplývaly následující úkoly.

Prvním úkolem bylo studovat teorii asymptotických metod a seznámit se s konkrétními metodami, především pak s metodami hledání lokálního aproximativního řešení. V kapitole 1 byly nejdříve definovány pojmy potřebné k porozumění metodám asymptotické analýzy. Další část kapitoly již byla zaměřena na postup řešení diferenciálních rovnic za použití asymptotických metod. Tyto metody byly převzaty z [1, 2], kde jsou detailně rozebírány. Jako první byla popsána metoda dominantní rovnováhy, která byla zároveň předvedena na konkrétním příkladu. Tato metoda se ukázala užitečná především pro získávání přibližného chování řešení méně složitých rovnic. Díky tomu mohla být použita dále jako pomocná pro metodu další - aproximaci řešení asymptotickou řadou. Tato druhá metoda byla popsána pro homogenní lineární diferenciální rovnici. Případem nelineárních a nehomogenních rovnic jsme se v této práci vzhledem k jejich zvýšené obtížnosti nezabývali. Postup řešení pomocí asymptotického rozvoje jsme rozdělili na tři případy a to podle charakteru bodu, na jehož okolí bychom chtěli řešení získat. Ke každému případu byl v závislosti na charakteru daného bodu uveden očekávaný tvar řešení a postup jeho získání. Třetí a poslední popsanou metodou bylo využití perturbační teorie pro aproximaci řešení rovnic obsahujících malý parametr. Tato metoda byla podrobně předvedena na konkrétních příkladech v kapitole 2.

Druhým úkolem práce bylo nahlédnout do problematiky regulární a singulární asymptotické metody a seznámit se s Tikhonovým teorémem, který dává náhled na řešení problému singulárního typu. Tato problematika byla popsána na konci kapitoly 1.

Třetím úkolem bylo studované asymptotické metody použít k vyřešení konkrétního problému. K tomuto účelu jsme se zaměřili pouze na regulární perturbační teorii a v kapitole 2 podrobně rozebrali tři úlohy. Jako první byla rozebrána úloha na vlastní čísla matice s konkrétními hodnotami. Pro matici byly spočítány vlastní hodnoty v přiblížení prvního řádu a uveden postup pro získání řádů vyšších. Tyto hodnoty byly explicitně napočítány a byla provedena příslušná diskuze. Zde se také ukázala veliká výhoda perturbační teorie, která spočívá v rozdělení jednoho složitého problému na nekonečně mnoho jednoduchých. Ve druhé úloze jsme se vrátili k hledání vlastních čísel matice, tentokrát však v úplné obecnosti. Zde jsme nalezli postup řešení pro matici s prostými vlastními čísly využívající Fredholmův alternativní teorém a vyjádřili vlastní čísla v přiblížení prvního řádu. Opět byl uveden postup pro získání přiblížení vyšších řádů. Dále byla provedena diskuze jednoznačnosti řešení v závislosti na algebraické násobnosti jednotlivých vlastních čísel a byl odvozen postup i pro matici s vícenásobnými vlastními čísly. Jako poslední úloha byla zvolena obecná diferenciální úloha druhého řádu, kterou jsme vhodnou volbou perturbačního parametru převedli na úlohu na vlastní čísla a funkce diferenciálního operátoru. Zde jsme zopakovali postup z předcházející úlohy a opět s použitím Fredholmovy alternativy nalezli hledaná vlastní čísla a funkce v přiblížení prvního řádu. Také byl uveden postup pro získání přiblížení řádů vyšších. Ukázali jsme tak, že i velmi složitou úlohu lze pomocí perturbační teorie převést na sérii úloh jednoduchých.

V celé práci jsme tak shrnuli teorii asymptotických metod, popsali jsme vybrané konkrétní metody a nastínili způsob jejich použití. Také jsme odvodili cenné vzorce pro aproximaci vlastních čísel libovolné matice a získali aproximaci řešení uvedené diferenciální úlohy. Můžeme tedy na závěr konstatovat, že se vytyčené cíle podařilo naplnit.

Literatura

[1] White, R. B. (2010). *Asymptotic analysis of differential equations*. World Scientific.

[2] Bender, C. M., & Orszag, S. A. (1999). *Advanced mathematical methods for scientists and engineers I: Asymptotic methods and perturbation theory* (Sv. 1). Springer Science & Business Media.

[3] Tikhonov, A. N. (1952). Systems of differential equations containing small parameters in the derivatives. *Mat. Sb.(NS)*, *31*(73), 575–586.

[4] Herman, R. L. (2015). Introduction to partial differential equations. *North Carolina, NC, USA: RL Herman*.