

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta strojní
Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky



Využití
Luenbergerova pozorovatele
a redukováného pozorovatele,
Kalmanova filtru
a syntéza servosystémů
se stejnosměrným motorem

DIPLOMOVÁ PRÁCE

David Kraffer

MMXXIII

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Kraffer** Jméno: **David** Osobní číslo: **482413**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**
Studijní program: **Aplikované vědy ve strojním inženýrství**
Specializace: **Mechatronika**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Využití Luenbergerova pozorovatele a redukováného pozorovatele, Kalmanova filtru a syntéza servosystémů se stejnosměrným motorem

Název diplomové práce anglicky:

Use of Luenberger observer and reduced observer, Kalman filter and synthesis of DC motor servo systems

Pokyny pro vypracování:

1. Nastudujte problematiku Luenbergerova pozorovatele, Luenbergerova redukováného pozorovatele a Kalmanova filtru pro řízení stejnosměrných motorů s permanentními magnety.
2. Popište robustnost stability LQG regulátorů a praktickou metodu jejího zlepšení.
3. Sestavte simulační modely DC motoru a jím příslušných stavových pozorovatelů pro rekonstrukci rychlostního signálu.
4. Provedte simulační experimenty s využitím rychlostní vazby z enkodéru a rychlostní vazby rekonstruované z pozorovatelů.
5. Kriticky zhodnoťte dosažené výsledky.

Seznam doporučené literatury:

- [1] LUENBERGER, David G. (1964) 'Observing the State of a Linear System.' IEEE Transactions on Military Electronics ME-8 (April), pp. 74-80.
- [2] KÁLMÁN, Rudolf E. 'Contributions to the Theory of Optimal Control.' Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, 1960.
- [3] KWAKERNAAK, Huibert, SIVAN, Raphael. Linear Optimal Control Systems. First Edition. Wiley-Interscience, 1972.
- [4] DOYLE, John C. 'Guaranteed margins for LQG regulators.' IEEE Transactions on Automatic Control August 1978.
- [5] ATHANS, Michael, FALB, Peter L. Optimal Control. New York, St. Louis, San Francisco, Toronto, London, Sydney: McGraw-Hill, 1966.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

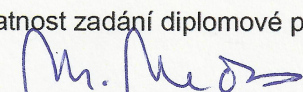
Ing. Martin Nečas, MSc., Ph.D. odbor mechaniky a mechatroniky FS


Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

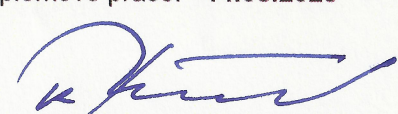
Datum zadání diplomové práce: **28.04.2023**

Termín odevzdání diplomové práce: **14.08.2023**

Platnost zadání diplomové práce: _____


Ing. Martin Nečas, MSc., Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce


prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry


doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

24.5.2023

Datum převzetí zadání




Podpis studenta

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v příloženém seznamu.

V Praze dne **14.8.2023**.

Podpis: 

Ivanovi a Evě za nezapomenutelné zážitky,
zelené ksichty & blicí pytlíky,
a
vynikající nakládané houby.

–David

Poděkování

Děkuji Ing. Martinu Nečasovi, M.Sc., Ph.D. za vedení práce.

David Kraffer

Abstrakt: Několik různých Luenbergerových pozorovatelů redukovaného i plného stavu je navrženo jako stacionární Kalmanovy filtry v servosystémech úhlové polohy pro holý stejnosměrný servomotor i pro servomotor se zátěží připojenou přes pružnou převodovku. Modely, zesílení regulátorů a pozorovatele stavu jsou založené na zavedených kvadratických metodách ve stavovém prostoru a simulovány v inženýrském prostředí The MathWorks, Inc. Schémat 32, čeština, L^AT_EX.

Klíčová slova: Luenbergerův pozorovatel, redukovaný Luenbergerův pozorovatel, Kalmanův filtr, servosystém úhlové polohy, stejnosměrný servomotor, stejnosměrný servomotor se zátěží přes pružnou převodovku.

Abstract: Assorted full-state and reduced-state Luenberger observers are designed as stationary Kalman filters for angular positioning servo systems with a naked DC servo motor and a DC servo motor coupled flexibly through a gearbox to the load of known inertia. The models, regulators and state observers involved are based on established quadratic methods in state space and simulated in the engineering environment provided by The MathWorks, Inc. Diagrams 32 in number, Czech language, L^AT_EX.

Keywords: Luenberger observer, reduced Luenberger observer, Kalman filter, angular positioning servo system, DC servo motor, DC servo motor coupled flexibly to a gearbox and load.

Obsah

Úvod	1
1 Luenbergerův pozorovatel	5
1.1 LDR – Luenbergerova dynamická rekonstrukce stavu	5
1.2 Stabilita uzavřené smyčky	8
1.3 Vztah k jiným metodologiím	10
2 Redukovaný Luenbergerův pozorovatel	13
2.1 RLDR – redukovaná Luenbergerova dynamická rekonstrukce stavu . .	13
2.2 Stabilita uzavřené smyčky	18
2.3 Vztah k jiným metodologiím	24
2.4 Vztah k LDR	27
3 Kalmanův filtr	29
4 Motor bez zátěže	31
4.1 Model rotačního pohybu	32
4.2 Model elektromagnetického obvodu	32
4.3 Stavový model	33
4.4 Základní schopnosti	37
4.4.1 Řiditelnost	37
4.4.2 Rekonstruovatelnost	37
4.5 Normalizovaný model pro návrh RLDR	37
4.5.1 RLDR jednoho stavu (RLDR2)	38
4.5.2 RLDR dvou stavů (RLDR1)	39
5 Motor se zátěží	41

5.1	Model rotačního pohybu	41
5.2	Model elektromagnetického obvodu	43
5.3	Stavový model se zátěží	43
5.4	Základní schopnosti	45
5.4.1	Řiditelnost	46
5.4.2	Rekonstruovatelnost	47
5.5	Normalizovaný model pro návrh RLDR	47
5.5.1	RLDR dvou stavů (RLDR3)	48
5.5.2	RLDR tří stavů (RLDR2)	48
5.5.3	RLDR čtyř stavů (RLDR1)	49
5.6	Volba převodového poměru	50
6	Syntéza servosystémů	53
6.1	Struktura	53
6.2	Princip vnitřního modelu	54
6.3	Servosystém v roli regulátoru	56
6.4	Konkrétní jednoduchý příklad	58
7	Simulace bez zátěže	61
7.1	Motor	62
7.2	LDR	66
7.3	RLDR1	67
7.4	RLDR2	67
7.5	Servosystém	69
8	Simulace se zátěží	73
8.1	Motor	73
8.2	LDR	76
8.3	RLDR	77
8.4	Servosystém	77
9	Fyzická realizace	83
	Závěr	87

Seznam použitých zdrojů	89
Přílohy	91
P1 Sériové spojení minimálních realizací	91
P2 Technická data motoru	91
P3 Technická data zátěže motoru	93
P4 Identifikace momentu setrvačnosti fyzicky dostupného rotoru	94

Seznam obrázků

1	Servosystém: Manuální pilotáž vs. autopilot letadla.	1
2	Rekonstrukce stavu pro nejjednodušší model motoru.	2
1.1	Luenbergerův pozorovatel.	6
1.2	LDR: příklad vývoje dynamiky chyby rekonstrukce stavu.	7
1.3	Model s Luenbergerovým pozorovatelem.	8
1.4	Zpětná vazba od stavu.	8
1.5	LDR: zpětná vazba od rekonstruovaného stavu a vliv transformace souřadnic stavového prostoru na výstup LDR a zesílení zpětné vazby.	8
1.6	Časová oblast: Dynamická zpětná vazba od výstupu.	11
1.7	Frekvenční oblast: Dynamická zpětná vazba od výstupu. Sériové spojení zesílení stavové zpětné vazby a kompenzátoru.	12
1.8	Frekvenční oblast: Dynamická zpětná vazba od výstupu.	12
2.1	Redukovaný Luenbergerův pozorovatel.	13
2.2	Nenormalizovaný tvar stavové realizace.	14
2.3	Normalizovaný tvar stavové realizace.	14
2.4	Stavová zpětná vazba.	18
2.5	Stavová zpětná vazba s pozorovatelem $\hat{\mathbf{x}}_1(t)$	19
2.6	Pozorovatel $\hat{\mathbf{x}}_1(t)$	19
2.7	Dynamická zpětná vazba od výstupu. Sériové spojení dynamického kompenzátoru a zesílení stavové zpětné vazby vzhledem ke stavovému prostoru se stavem $\left[(\hat{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{F}\mathbf{x}_2)^\top \quad \mathbf{x}_2^\top \right]^\top$	24
2.8	Dynamická zpětná vazba od výstupu. Frekvenční oblast.	26
2.9	RLDR & LDR: kombinace dynamické a konstantní zpětné vazby.	27
3.1	Systém za přítomnosti šumu.	30
4.1	Schéma stejnosměrného motoru.	31

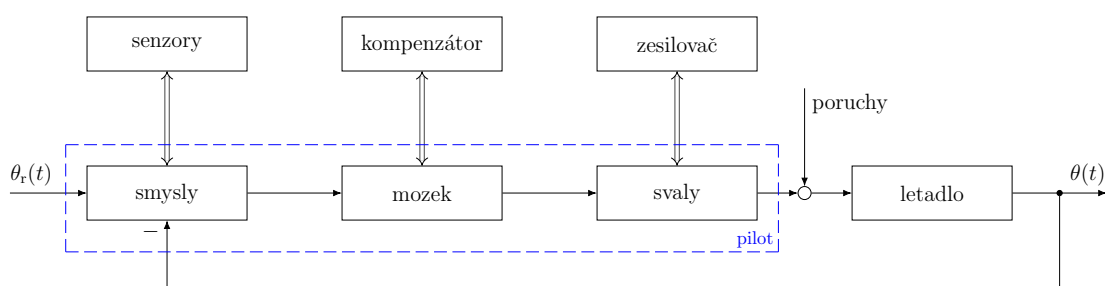
4.2	Sériové spojení submodelu Σ_ω a submodelu Σ_θ	34
4.3	Σ_ω jako zpětnovazební systém se zpětnou vazbou od stavu.	35
4.4	Σ_ω jako zpětnovazební systém se zpětnou vazbou od stavu.	35
4.5	Σ_ω jako sériové spojení mech. a elmag. subsystémů, se zpětnou vazbou $-K_e$ úměrnou velikosti elektromotorické síly.	36
4.6	Model bez zátěže: sériové spojení integrátoru a zpětnovazební smyčky se zápornou zpětnou vazbou kolem sériového spojení mech. a elmag. subsystémů.	36
5.1	Schéma stejnosměrného motoru zatíženého přes pružný převod.	41
6.1	Servosystém.	53
6.2	Servosystém se zpětnou vazbou od stavu.	57
6.3	Servosystém se zpětnou vazbou od rekonstruovaného stavu LDR.	57
6.4	Servosystém se zpětnou vazbou od rekonstruovaného stavu RLDR.	57
6.5	Servosystém pro model $\bar{\Sigma}_m$ a $\hat{\omega}(t)$ via RLDR.	58
7.1	Motor: geometrické místo pólů modelu Σ_m	63
7.2	Frekvenční odezva subsystémů modelů motoru z obr. 4.6.	64
7.3	Motor: frekvenční odezvy modelu Σ_m	65
7.4	Motor: odezva modelu Σ_m na skok vstupního napětí 12 V.	65
7.5	Motor: odezva modelu Σ_m na počáteční podmínky, odezva LDR(Σ_m) na počáteční podmínky.	66
7.6	Motor: rekonstruovaná úhlová rychlost $\omega(t)$ pro model Σ_m a různé počáteční podmínky. LDR(Σ_m) na bázi Kalmanova filtru.	66
7.7	Motor: chyba rekonstrukce úhlové rychlosti $\omega(t)$ pro model Σ_m a různé počáteční podmínky. LDR(Σ_m) na bázi Kalmanova filtru.	67
7.8	Motor: úhlová rychlost $\omega(t)$ a rekonstruovaná úhlová rychlost $\hat{\omega}(t)$, proud armaturou $i(t)$ a rekonstruovaný proud armaturou $\hat{i}(t)$ pro model $\bar{\Sigma}_m$ a různé počáteční podmínky. RLDR($\bar{\Sigma}_m$) na bázi Kalmanova filtru.	68
7.9	Motor: úhlová rychlost $\omega(t)$ a rekonstruovaná úhlová rychlost $\hat{\omega}(t)$, proud armaturou $i(t)$ a rekonstruovaný proud armaturou $\hat{i}(t)$ pro model $\bar{\Sigma}_m$ a různé počáteční podmínky. RLDR($\bar{\Sigma}_m$) na bázi Kalmanova filtru.	68
7.10	Servosystém úhlové polohy bez zátěže: model Σ_m , augment. model Σ_{ma} , stavová zpětná vazba LQR(Σ_{ma}) (integrální řízení) bez rekonstrukce stavu. Šířka pásma 24,8 rad/s pro cutoff $\epsilon = -3$ dB.	69

7.11	Bodeho diagram pro servosystém úhlové polohy bez zátěže: model Σ_m , augment. model Σ_{ma} , stavová zpětná vazba LQR(Σ_{ma}) (integrální řízení) bez rekonstrukce stavu, s rekonstrukcí stavu LDR a s rekonstrukcí stavu RLDR.	70
7.12	Servosystém úhlové polohy bez zátěže: augmentovaný model Σ_{ma} , stavová zpětná vazba LQR(Σ_{ma}) (integrální řízení) s rekonstrukcí stavu LDR(Σ_m) na bázi Kalmanova filtru. Odezva na skok úhlové polohy. .	70
7.13	Servosystém úhlové polohy bez zátěže: augmentovaný model Σ_{ma} , stavová zpětná vazba LQR(Σ_{ma}) (integrální řízení) s LDR(Σ_m) na bázi Kalmanova filtru. Odezvy na skok úhlové polohy pro variabilní parametr násobků nominální inerciální zátěže.	71
7.14	Servosystém úhlové polohy bez zátěže: augmentovaný model Σ_{ma} , stavová zpětná vazba LQR(Σ_{ma}) (integrální řízení) s LDR(Σ_m) na bázi Kalmanova filtru. Odezva na skok úhlové polohy v závislosti na variabilním parametru násobků nominální inerciální zátěže.	71
8.1	Motor se zátěží: geometrické místo pólů modelu Σ_{mz}	74
8.2	Motor se zátěží: frekvenční odezvy modelu Σ_{mz}	75
8.3	Motor se zátěží: odezva modelu Σ_{mz} na skok vstupního napětí 12 V. .	75
8.4	Motor se zátěží: odezva modelu Σ_{mz} na počáteční podmínky, odezva LDR(Σ_{mz}) na počáteční podmínky.	76
8.5	Motor se zátěží: odezva modelu Σ_{mz} na počáteční podmínky, odezva RLDR(Σ_{mz}) na počáteční podmínky.	77
8.6	Servosystém: LQR pro model Σ_{mz} s LDR aplikovaný na jednodušší model.	78
8.7	Servosystém: LQR pro model Σ_{mz} s LDR pro různý počet výstupů. .	78
8.8	Servosystém: LQR pro model Σ_{mz} s RLDR pro různý počet výstupů.	79
8.9	Servosystém: LQR pro model Σ_{mz} s variací parametrů a LDR pro různý počet výstupů.	79
8.10	Servosystém úhlové polohy se zátěží: model Σ_{mz} , augment. model Σ_{mza} , stavová zpětná vazba LQR(Σ_{mza}) (integrální řízení) bez rekonstrukce stavu. Šířka pásma 6,9 rad/s pro cutoff $\epsilon = -3$ dB.	80
8.11	Bodeho diagram pro servosystém úhlové polohy se zátěží: model Σ_{mz} , augment. model Σ_{mza} , stavová zpětná vazba LQR(Σ_{mza}) (integrální řízení) bez rekonstrukce stavu, s rekonstrukcí stavu LDR a s rekonstrukcí stavu RLDR.	80
8.12	Servosystém úhlové polohy se zátěží: augmentovaný model Σ_{mza} , stavová zpětná vazba LQR(Σ_{mza}) (integrální řízení) s rekonstrukcí stavu LDR(Σ_{mz}) na bázi Kalmanova filtru. Odezva na skok úhlové polohy. .	81

9.1	Servosystém pro model $\overline{\Sigma}_m$ a $\hat{\omega}(t)$ via RLDR, viz schéma na obr. 6.5 při rozpojení části stavové zpětné vazby pro $k_2 = k_3 = 0$ (horní) a při rozpojení části stavové zpětné vazby pro $k_1 = 0$ (dolní).	83
9.2	Fyzická realizace. Pulz vstupního napětí.	84
9.3	Fyzická realizace. Odezva motoru na vstupní napětí z obr. 9.2.	84
9.4	Fyzická realizace. Pulzy vstupního napětí.	85
9.5	Fyzická realizace. Odezva motoru na pulzy vstupního napětí z obr. 9.4.	85
9.6	Fyzická realizace. Odezva servosystému úhlového natočení hřídele motoru bez zátěže na skoky žádané polohy $\theta_r(t)$ metodou pokus–omyl.	86
9.7	Fyzická realizace. Odezva servosystému úhlového natočení hřídele motoru bez zátěže na skok polohy $\theta_r1(t)$ metodou pokus–omyl.	86
P.1	Zapojení hardware.	92
P.2	Zapojení hardware.	93
P.3	Rotor s připevněným drátem.	94
P.4	Druhý experiment: rotor s pevně připevněnou částí statoru.	95
P.5	První experiment: Torzní kmity holého rotoru.	96
P.6	Druhý experiment: Torzní kmity rotoru s pevně připojenou částí statoru.	96

Úvod

Servosystémy jsou v povědomí a využití od nepaměti. Hierarchie velení v armádě, veřejné správě, lovu mamuta i mafii jsou příklady servosystémů. Dalším příkladem servosystému je řízení motocyklu nebo manuální pilotáž letadla s pístovým motorem. Na obr. 1 je znázorněno, jak manuální pilotáž zvládá pilot a jak ho nahradí autopilot.



Obr. 1: Servosystém: Manuální pilotáž vs. autopilot letadla.

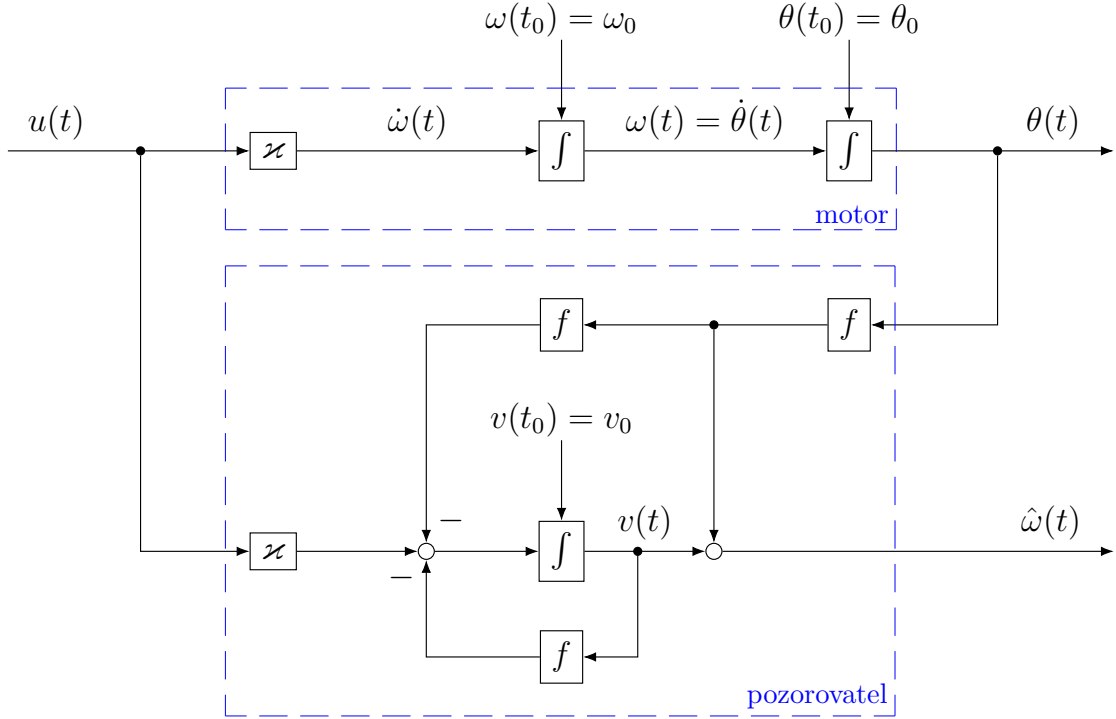
Uvažujeme letadlo, kde si pilot přeje udržovat podélný sklon letadla (pitch) na úhlové poloze $\theta_r(t) = \text{konst}$. Za tímto účelem ovládá kormidla, úhel nastavení listů vrtule a škrtící klapku plynu tak, že vnímá a vyrovnává odchylky $\theta_r(t)$ od skutečného úhlu stoupání $\theta(t)$. Totéž udělá autopilot podélného sklonu letadla.

Blok zesilovač v sobě typicky skrývá stejnosměrný servomotor, čímž se dostáváme k návrhu servosystémů úhlové polohy se stejnosměrným motorem. V této práci popíšeme některé části návrhu takových systémů za předpokladu, že mohou být založeny na stavovém popisu, úloze o regulátoru a rekonstrukci stavu.

Jednou z částí takového návrhu je pozorovatel stavu. Za podmínek, které pro tuto chvíli nebudeme rozebírat ani zavádět,¹ je asi nejjednodušší model soustavy servomotoru a pozorovatele stavu tohoto servomotoru zobrazen na obr. 2.

Tento nejjednodušší model slouží k rekonstrukci úhlové rychlosti $\omega(t)$. Rekonstruovaná úhlová rychlost je označena $\hat{\omega}(t)$. Ze zapojení je zřejmé, že $\hat{\omega}(t)$ je rekonstruována z fyzicky dostupného vstupního napětí $u(t)$ a fyzicky dostupné úhlové polohy hřídele $\theta(t)$.

¹Například se nacházíme v mezihvězdném prostoru bez tření a při sestupu na oběžnou dráhu Země se zabýváme servosystémem pro natočení naší vesmírné lodi okolo její podélné osy [1], ne servosystémem úhlové polohy hřídele elektromotoru aniž bychom nejdříve stabilizovali jeho nejjednodušší model [1], [12].



Obr. 2: Rekonstrukce stavu pro nejjednodušší model motoru.

K naladění kvality rekonstrukce slouží vhodná volba konstanty f . Základní kvalitou, kterou chceme volbou f dosáhnout, je asymptotická stabilita chyby rekonstrukce, tj. odchylky $e(t) = \omega(t) - \hat{\omega}(t)$. Další kvalitou je dynamika přechodového děje rekonstrukce, tzn. průběhu $e(t)$ od počáteční podmínky $e(t_0) = e_0$ do ustáleného stavu $e(\infty) = 0$. Kvalita rekonstrukce stavu ovlivňuje kvalitu servosystému jako celku. Nabízí se analogie s úvodními příklady, kterou omezíme na příklad letadla: Pilot ani návrhář autopilota si jistě nepřejí jako vedlejší produkt svého snažení vidět *zelené ksichty* *ě blicí pytláky*.

Jedná se o situaci, kterou formálně zkoumali matematici potom, co ji dlouho před nimi řešili inženýři. Z hlediska vnějšího popisu systému (přenosové funkce) může být zařízení, jako je znázorněno na obr. 2, realizováno pomocí tachodynamu (tachometer) nebo fyzikálně realizovatelným systémem s přenosovou funkcí

$$G(s) = \frac{s}{T_d s + 1}. \quad (1)$$

Volbou časové konstanty T_d můžeme ovlivnit kvalitu zpětné vazby, která rekonstruuje úhlovou rychlost $\omega(t)$. Volíme-li časovou konstantu malou, rekonstrukce bude rychlá, ale náchylná na poruchy, které se dají modelovat jako poruchové signály přičtené k $\theta(t)$, kde namísto $\theta(t)$ máme k dispozici $\theta(t) + d(t)$, kde $d(t)$ je neznámý poruchový signál. Volíme-li časovou konstantu T_d velkou, rekonstrukce bude pomalá, ale odfiltruje parazitické vysokofrekvenční signály. Analogie s pilotem: dobrý pilot se nesnaží přinutit letadlo, aby odchylka $\theta_r(t) - \theta(t)$ byla za každou cenu hodně malá nebo dokonce nulová.

Uvedený příklad by měl ilustrovat, že frekvenční metody návrhu řídicích systémů, které mají původ v aplikacích řízení z oblasti elektrotechniky, vhodně doplňují metody návrhu ve stavovém prostoru, které svůj původ odvozují především z aplikací

v oblasti mechaniky. Jedním z podstatných rozdílů obou hlavních metodologií, tedy frekvenčních a stavových, je absence stavové zpětné vazby ve frekvenčních metodách. Tato absence nicméně nebrání srovnávat předmětné metodologie a přeformulovávat problémy [12].

Model stejnosměrného motoru na obr. 2 včetně jeho odvození, návrhu servosystému s lineárním kvadratickým regulátorem (LQR) a pozorovatelem založeným na duálním problému k LQR, včetně simulací a odkazů na literaturu je možno najít v bakalářské práci [12]. V této práci je též zmíněno, že identický model je také možné použít pro návrh servosystému otáčení vesmírné lodi kolem podélné osy [1]. Znamená to, že pod obr. 2 si můžeme představit nejen servomotor s tachodynamem, ale i vesmírnou loď řízenou pomocí redukovaného Luenbergerova pozorovatele, který při řízeném návratu z oběžné dráhy zprostředkuje regulátoru navrženému zpětnou vazbou od stavu systému, tj. od úhlové rychlosti $\omega(t)$, rekonstruovanou úhlovou rychlost $\hat{\omega}(t)$.

Nejnepříjemnějším z nepříjemných důsledků stavové zpětné vazby implementované pomocí rekonstrukce stavu je ztráta robustnosti stability, jak ji popsal John C. Doyle (1979) v článku *Robustness with Observers* [5]. V článku dokázal, že v případě systémů s mnoha vstupy a výstupy neplatí, že by lineární kvadratické regulátory měly ve všech kanálech proklamované obdivuhodné vlastnosti -6 dB až $+\infty$ dB amplitudové bezpečnosti a $+60^\circ$ fázové bezpečnosti, jak tvrdí Michael G. Safonov a Michael Athans (1977) v článku *Gain and phase margin of multiloop LQG regulators*. Autoři jsou uznávanými odborníky z M.I.T. Electrical Engineering and Computer Science. M. G. Safonov je mj. spoluautorem Robust Control Toolbox, Natick, MA, MathWorks, a sloužil jako U.S. Navy Electronics Division Officer na letadlové lodi Franklin D. Roosevelt (CVA-42). Článek vyšel v prestižním časopise *IEEE Transactions on Automatic Control*.

Specifický technický postup pro zlepšení robustnosti pozorovatele stavu popisují John C. Doyle a Gunter Stein (1979) v *Robustness with Observers* [6]. Autoři řeší duální problém k problému, kterým je zvyšování robustnosti optimálního regulátoru. Techniku jeho řešení popsal předtím Huibert Kwakernaak (1969) v *Optimal Low-Sensitivity Linear Feedback Systems* [14].

Ve vztahu k jiným metodám návrhu řídicích systémů i jinak je dobré mít stále na paměti, že stav dynamického systému je obecně fikce, protože je to stav stavové realizace, tj. stav modelu, nikoliv nezbytně stav konkrétního fyzicky existujícího systému. Tento fakt pěkně koresponduje s konstrukcí regulátoru pomocí jiných metod než je stavová vazba přes Luenbergerův pozorovatel stavu, Luenbergerův redukovaný pozorovatel stavu nebo Kalmanův filtr.

Formální stavový popis situace na obr. 2 se skládá ze stavového popisu motoru (2–4) a stavového popisu redukováného Luenbergerova pozorovatele (5–7):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varkappa \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad (2)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \omega(t_0) \\ \theta(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} (\hat{\omega}(t) - f\theta(t)) = -f(\hat{\omega}(t) - f\theta(t)) - f^2\theta(t) + \varkappa u(t), \quad (5)$$

$$\hat{\omega}(t_0) - f\theta(t_0) = \hat{\omega}_0 - f\theta_0, \quad (6)$$

$$f \neq 0. \quad (7)$$

Za povšimnutí na obr. 2 a jeho popisu (2–7) stojí, že redukováný Luenbergerův pozorovatel má méně stavů, než má model systému (úhlového natočení motoru, vesmírné lodi, apod.) a že má přímou vazbu mezi vstupem a výstupem. Stav redukováného Luenbergerova pozorovatele je na obr. 2 označen jako $v(t) = \hat{\omega}(t) - f\theta(t)$, a má neznámou počáteční podmínku $v(t_0) = \hat{\omega}(t_0) - f\theta(t_0)$, kde $\hat{\omega}(t_0)$ neznáme, $\theta(t_0)$ neznáme a f navrhuje. Volbou $f = 0$ dojde k odpojení výstupu $y(t)$ od měření a pozorovatel zprostředkuje pouze vážený integrál vstupu $u(t)$, tzn. že se z povahou zpětnovazebního pozorovatele stane sice dynamický, ale pouze nezpětnovazební pozorovatel, který postrádá kvality získané zpětnou vazbou od výstupu systému a laděné pomocí zpětnovazebního zesílení $f \neq 0$.

Kapitola 1

Luenbergerův pozorovatel

Luenbergerův pozorovatel slouží k LDR – Luenbergerově dynamické rekonstrukci stavu modelu systému. LDR asymptoticky určuje z budoucího průběhu vstupu a výstupu všechny prvky budoucího stavu, tedy celý stavový vektor modelu systému.

1.1 LDR – Luenbergerova dynamická rekonstrukce stavu

LDR navrhujeme za účelem aproximace stavu modelu dynamického systému

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (1.2)$$

protože k tomuto stavu nemáme fyzický přístup nebo z jiných důvodů, například znalost tohoto stavu potřebujeme k návrhu kompenzace dynamiky stavovou zpětnou vazbou.

Ústřední myšlenka návrhu LDR je zajistit, aby se chyba rekonstrukce stavu asymptoticky blížila nule. Za tímto účelem volíme dynamiku LDR podle modelu (1.1–1.2) tak, aby se stal autonomním systémem model odchylky stavu od rekonstruovaného stavu.

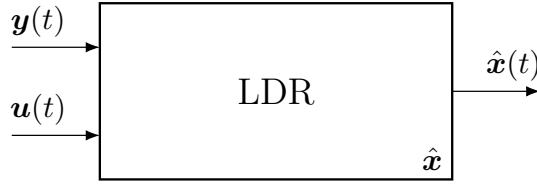
Stav modelu systému je buzen počáteční podmínkou stavu $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ a vstupem $\mathbf{u}(t)$, $t \in \langle t_0, \infty \rangle$. Stav LDR je buzen počáteční podmínkou stavu pozorovatele $\hat{\mathbf{x}}$, vstupem modelu $\mathbf{u}(t)$, $t \in \langle t_0, \infty \rangle$ a výstupem modelu $\mathbf{y}(t)$, $t \in \langle t_0, \infty \rangle$.

Použití $\mathbf{u}(t)$ a $\mathbf{y}(t)$ jako vstupů pozorovatele vychází z faktu, že chování vstupu a výstupu systému zprostředkovává informaci o stavu modelu tohoto systému, a tento stav budeme prostřednictvím LDR rekonstruovat.

Pro model (1.1)–(1.2) tedy volíme LDR ve tvaru

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + f(\mathbf{y}(t)), \quad \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_0, \quad (1.3)$$

kde $f(\mathbf{y}(t))$ je vhodná lineární funkce výstupu modelu. Tuto funkci zvolíme tak, aby se chyba rekonstrukce stavu blížila nule, tzn. **aby se odchylka mezi stavem**



Obr. 1.1: Luenbergerův pozorovatel.

modelu a stavem LDR asymptoticky blížila nule. Odchylka je definována

$$\mathbf{e}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (1.4)$$

a její dynamika je

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{B}\mathbf{u}(t) - f(\mathbf{y}(t)), \end{aligned} \quad (1.5)$$

kde jsme napřed derivovali (1.4) a následně za derivace dosadili z (1.1) a (1.3). Motivování nalezením modelu vývoje odchylky nyní v (1.5)

- i) odstraníme vliv $\mathbf{u}(t)$ na model vývoje dynamiky $\mathbf{e}(t)$ odečtením $\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ LDR (1.3) od $\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ modelu (1.1),
- ii) vytknutím \mathbf{A} vytvoříme výraz pro odchylku $\mathbf{e}(t)$.

Tímto postupem z (1.5) dostaneme

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) - f(\mathbf{y}(t)). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Nahrazením $\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}(t)$ a nahrazením $\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{e}}(t)$ získáme dynamický model vývoje chyby rekonstrukce stavu:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{e}(t) - f(\mathbf{y}(t)) \quad (1.7)$$

Lineární funkci $f(\mathbf{y}(t))$ v (1.7) volíme s ohledem na hlavní myšlenku, totiž že chceme, **aby se odchylka asymptoticky blížila nule**, a aby se nule (pro tuto chvíli) blížila nezávisle na stabilitě modelu systému (1.1–1.2), tedy i například pro $\mathbf{y}(t)$ rostoucí nade všechny meze.¹ Model dynamiky chyby rekonstrukce stavu uděláme plně autonomní tím, že místo lineární funkce $f(\mathbf{y}(t))$ uvažujeme lineární funkci $g(\mathbf{y}(t), \hat{\mathbf{x}}(t))$ a volíme

$$g(\mathbf{y}(t), \hat{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{L}(\mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)), \quad (1.8)$$

kde vytknutím \mathbf{C} dostáváme

$$g(\mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{L}\mathbf{C}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)). \quad (1.9)$$

¹Jinými slovy: V tomto stadiu úvah upíráme naši pozornost k rekonstruování stavu nezávisle na stabilitě nebo nestabilitě systému, jehož stav rekonstruujeme. Později naznačíme, proč stabilitu systému potřebujeme.

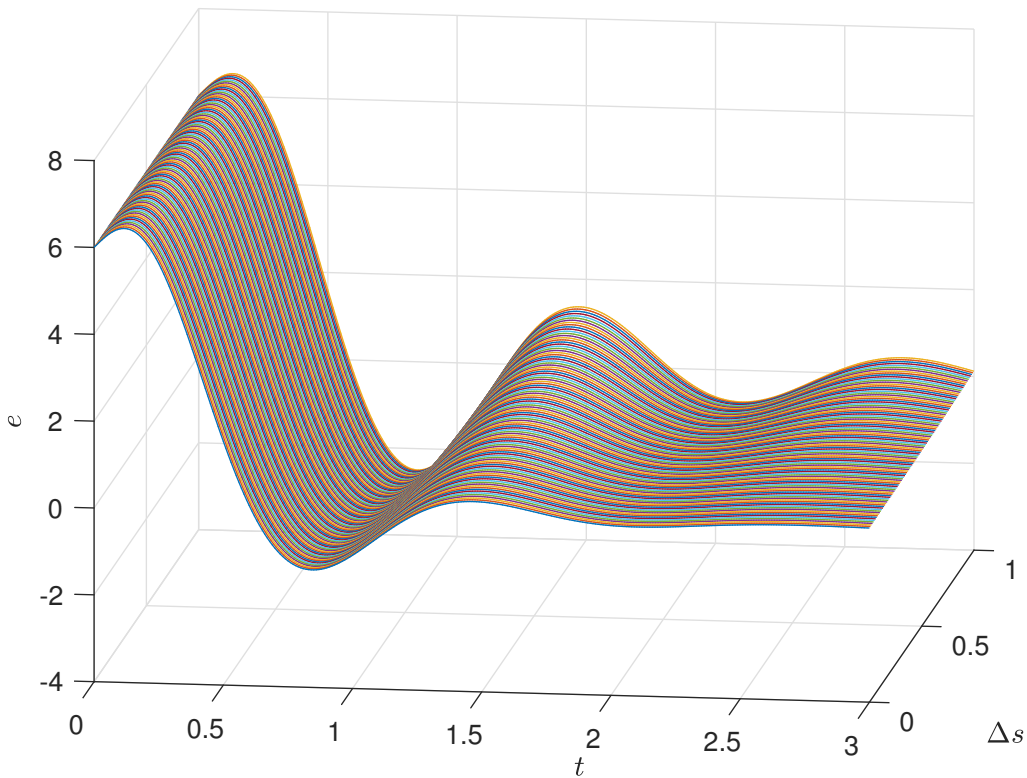
Tím se nám podařilo zavést výraz pro odchylku, tj. $\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}(t)$. Za povšimnutí stojí, že $\mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)$ je výstup modelu, kdežto $\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{y}}(t)$ můžeme interpretovat jako rekonstruovaný výstup modelu, tj. rekonstruovaný na základě rekonstruovaného stavu $\hat{\mathbf{x}}(t)$. Tento rekonstruovaný výstup však používáme jen jak je výše popsáno a do LDR patří jen implicitně.

Dynamika odchylky stavu modelu od stavu LDR, (1.4), je pak popsána autonomním systémem buzeným počáteční podmínkou $\mathbf{e}(t_0) = \mathbf{e}_0$,

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}(t), \quad \mathbf{e}(t_0) = \mathbf{x}(t_0) - \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{e}_0, \quad (1.10)$$

kde \mathbf{L} je vhodná konstantní matice, jejíž volbou můžeme volit dynamiku chyby rekonstrukce stavu. Zesílení \mathbf{L} budeme volit jako kompromis mezi rychlostí přiblížení a jeho průběhem. Nestačí, aby přiblížení proběhlo včas. Záleží, jestli proběhne včas a jaký bude jeho přechod do ustáleného stavu.

Typický příklad rychlého versus pomalého přechodového děje je na obr. 1.2.

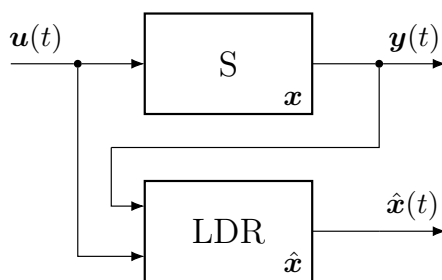


Obr. 1.2: LDR: příklad vývoje dynamiky chyby rekonstrukce stavu.

Dynamickému systému, popsanému

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)), \quad \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_0, \quad (1.11)$$

se říká Luenbergerův pozorovatel stavu a slouží k LDR – Luenbergerově dynamické rekonstrukci stavu. Model s Luenbergerovým pozorovatelem je znázorněn na obr. 1.3.

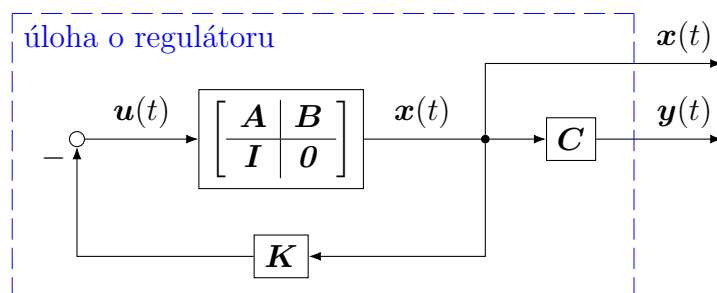


Obr. 1.3: Model s Luenbergerovým pozorovatelem.

1.2 Stabilita uzavřené smyčky

Stabilita je základní vlastnost systémů, která nás zajímá, o kterou při návrhu zpětnovazebního řídicího systému usilujeme. V této podkapitole porovnáme dynamiky uzavřených smyček, kde v prvním případě vznikne uzavřená smyčka zpětnou vazbou od stavu a ve druhém případě vznikne uzavřená smyčka zpětnou vazbou od rekonstruovaného stavu.

Máme-li stav modelu systému fyzicky k dispozici na systému, je stavová zpětná vazba znázorněna na obr. 1.4

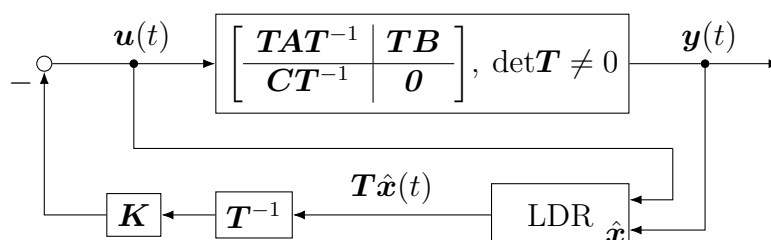


Obr. 1.4: Zpětná vazba od stavu.

a platí zákon řízení

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t). \quad (1.12)$$

Máme-li stav modelu systému k dispozici pouze zprostředkovaně, v podobě rekonstruovaného stavu, je stavová zpětná vazba od rekonstruovaného stavu znázorněna na obr. 1.5



Obr. 1.5: LDR: zpětná vazba od rekonstruovaného stavu a vliv transformace souřadnic stavového prostoru na výstup LDR a zesílení zpětné vazby.

a platí zákon řízení

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t). \quad (1.13)$$

Systém se zpětnou vazbou od rekonstruovaného stavu je popsán systémem rovnic: model dynamického systému (1.1–1.2), stavová zpětná vazba (1.13), pozorovatel stavu (1.11). Tyto rovnice jsou postupně

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.14)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (1.15)$$

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t), \quad (1.16)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)), \quad \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_0. \quad (1.17)$$

Přímým dosazením (1.16) do (1.14) a (1.17) a přímým dosazením (1.15) do (1.17) dostáváme realizaci

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{L}\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t), \quad (1.18)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t), \quad (1.19)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (1.20)$$

kterou pro přehlednost přepíšeme maticově jako

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{L}\mathbf{C} & \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_0) \\ \hat{\mathbf{x}}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \hat{\mathbf{x}}_0 \end{bmatrix}, \quad (1.21)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$

Z důvodů, které budou brzy zřejmější, transformujeme souřadnice stavového prostoru pomocí stavové transformace

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

tzn. transformujeme stavovou realizaci (1.21)–(1.22) na stavovou realizaci

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{L}\mathbf{C} & \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}, \quad (1.24)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}, \quad (1.25)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{e}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \hat{\mathbf{x}}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0 \end{bmatrix}, \quad (1.26)$$

která vychází ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_0) \\ \mathbf{e}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{e}_0 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}, \quad (1.28)$$

kde jsme použili definici chyby rekonstrukce, $\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}(t)$, tzn. odchylky (1.4) z podkapitoly 1.1.

Z realizace (1.27–1.28) plyne, že pro odstranění vlivu neurčitosti, která má podobu neznámých počátečních podmínek \mathbf{x}_0 kompenzovaného systému a neznámých počátečních podmínek \mathbf{e}_0 modelu chyby rekonstrukce stavu, je nezbytné, aby vlastní čísla kompenzovaného systému a vlastní čísla pozorovatele, tzn. LDR, byla v otevřené levé polorovině komplexní roviny. Aby totiž vlastní čísla matice systému (1.27) byla v otevřené levé polorovině komplexní roviny, musí být v levé polorovině komplexní roviny vlastní čísla $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ a vlastní čísla $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$, tzn. $\text{Re}(\lambda_i(\mathbf{A} - \mathbf{BK})) < 0$, $\text{Re}(\lambda_i(\mathbf{A} - \mathbf{LC})) < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, kde n je dimenze vektoru stavu.

Abychom mohli $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ libovolně volit pomocí vhodné volby zesílení \mathbf{K} , musí být model (1.1–1.2) říditelný.

Abychom mohli $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$ libovolně volit pomocí vhodné volby zesílení \mathbf{L} , musí být model (1.1–1.2) rekonstruovatelný.

Volíme-li matice $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ a $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$ prostřednictvím volby jejich vlastních čísel, musíme ke každému zvolenému komplexnímu vlastnímu číslu zvolit i vlastní číslo k němu komplexně sdružené, protože $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ a $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$ jsou reálné matice.

Pro lepší názornost vlivu počátečních podmínek vyjádříme analytické řešení stavové realizace (1.27–1.28) po Laplaceově transformaci. Laplaceovsky transformované řešení dostaneme přímo inverzí Laplaceova obrazu (1.27), analogií známého vzorečku pro přiřazení přenosové matice množině stavově ekvivalentních stavových realizací. Snadno ověříme, že platí

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\mathbf{y}(t)\} &= \mathbf{Y}(s) = \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{e}_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1} & (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{BK}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC})^{-1} \\ \mathbf{0} & (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{e}_0 \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{x}_0}_{\text{vliv poč. podm. modelu}} + \underbrace{\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{BK}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC})^{-1}\mathbf{e}_0}_{\text{vliv poč. podm. LDR}}
\end{aligned} \tag{1.29}$$

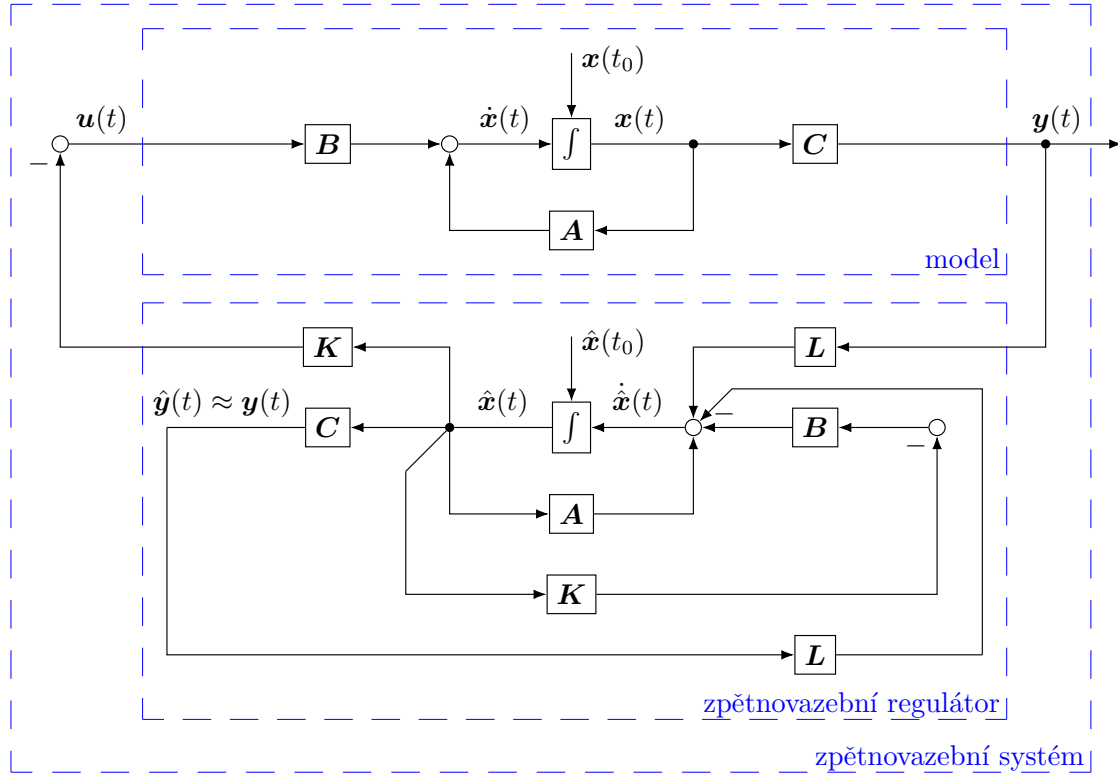
1.3 Vztah k jiným metodologiím

Pojmy jako šířka pásma, frekvence zlomu, pásmová propust, pásmová zádrž, Bodeho charakteristiky, geometrická místa pólů uzavřené smyčky, různá kritéria stability, amplitudová a fázová bezpečnost apod. pocházejí z frekvenčních metod a jejich význam jistě není a nebude jen historický. Jistě je mnoho pravdy na tom, když se říká, že člověka na Měsíc (NASA, Apollo 11, Neil A. Armstrong, Michael Collins, Edwin E. (Buzz) Aldrin Jr., červenec 1969)² dostaly frekvenční, ne stavové metody.

²Blanche Masek, matka astronauta jménem James Arthur (Jim) Lovell Jr. (1928–), člena záložní posádky Apollo 11, člena posádek Gemini 7, Gemini 12, Apollo 8, Apollo 13 a spoludržitele nepřekonaného rekordu v člověkem překonané vzdálenosti od Země (Apollo 13), má české kořeny.

Vztah k dynamické zpětné vazbě navrhované ve frekvenční oblasti je možné ilustrovat na struktuře řídicího systému, který byl původně získán ve stavovém prostoru metodou stavové zpětné vazby zapojené přes LDR – Luenbergerovu dynamickou rekonstrukci stavu.

Struktura problému regulátoru řešená zapojením stavové zpětné vazby přes LDR je v časové oblasti znázorněná na obr. 1.6



Obr. 1.6: Časová oblast: Dynamická zpětná vazba od výstupu.

Získáme ji například následujícím způsobem. Přímým dosazením (1.16) do (1.17) dostáváme

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{BK}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{L}\mathbf{y}(t) - \mathbf{LC}\hat{\mathbf{x}}(t). \quad (1.30)$$

Uspořádáme (1.30) do tvaru

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{L}\mathbf{y}(t), \quad (1.31)$$

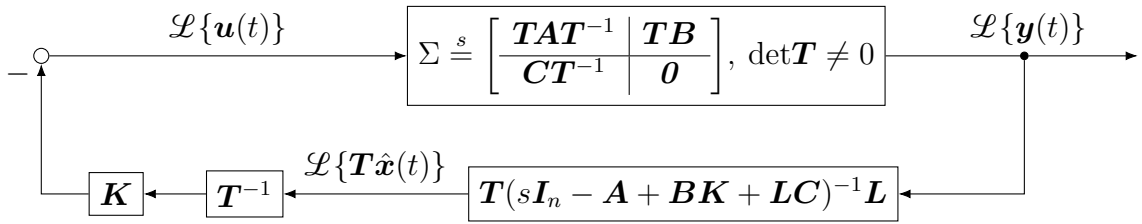
z kterého Laplaceovou transformací získáme přenosovou matici

$$\frac{\mathcal{L}\{\hat{\mathbf{x}}(t)\}}{\mathcal{L}\{\mathbf{y}(t)\}} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} + \mathbf{LC})^{-1}\mathbf{L}, \quad (1.32)$$

jejíž úloha v rámci řešeného problému je znázorněna na obr. 1.7.

Dosazením (1.32) do Laplaceova obrazu vztahu (1.16), získáme přenos stavové zpětné vazby s LDR formou přenosu zpětnovazebního regulátoru

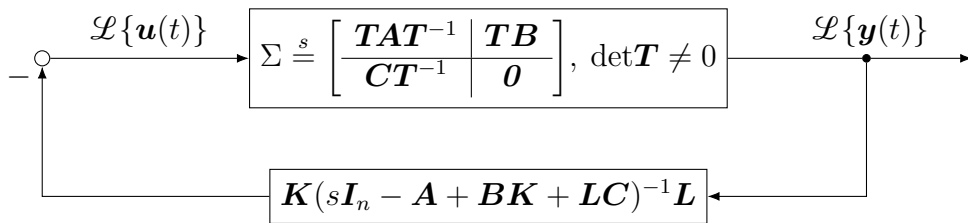
$$\frac{\mathcal{L}\{-\mathbf{u}(t)\}}{\mathcal{L}\{\mathbf{y}(t)\}} = \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} + \mathbf{LC})^{-1}\mathbf{L}. \quad (1.33)$$



Obr. 1.7: Frekvenční oblast: Dynamická zpětná vazba od výstupu. Sériové spojení zesílení stavové zpětné vazby a kompenzátoru.

Sériové spojení zesílení stavové zpětné vazby a dynamického kompenzátoru s přenosovou maticí (1.32) je znázorněno na obr. 1.7.

Výsledná přenosová matice zpětnovazebního regulátoru je znázorněna na obr. 1.8.



Obr. 1.8: Frekvenční oblast: Dynamická zpětná vazba od výstupu.

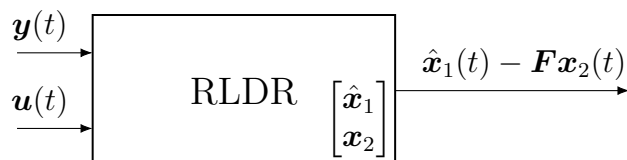
Kapitola 2

Redukovaný Luenbergerův pozorovatel

Redukovaný Luenbergerův pozorovatel slouží k RLDR – redukované Luenbergerově dynamické rekonstrukci stavu modelu systému. RLDR asymptoticky určuje z budoucího průběhu vstupu a výstupu ty prvky budoucího stavu, tedy část stavového vektoru, které nelze získat přímo z rovnice výstupu modelu.

2.1 RLDR – redukovaná Luenbergerova dynamická rekonstrukce stavu

RLDR navrhujeme za účelem rekonstrukce části stavového vektoru modelu dynamického systému. Pro návrh máme k dispozici stavový model systému, vstup systému a výstup systému, viz obr. 2.1. Disponujeme fyzickým přístupem k vstupu a výstupu,



Obr. 2.1: Redukovaný Luenbergerův pozorovatel.

ale i té části prvků stavu, která je výstupem modelu. To není předpoklad, ale fakt, který RLDR využívá.

Situaci vhodnou pro přehlednou konstrukci RLDR navodíme vhodnou transformací obecného stavového modelu, obdobnou té, která je popsána např. v [12], str. 6. Touto

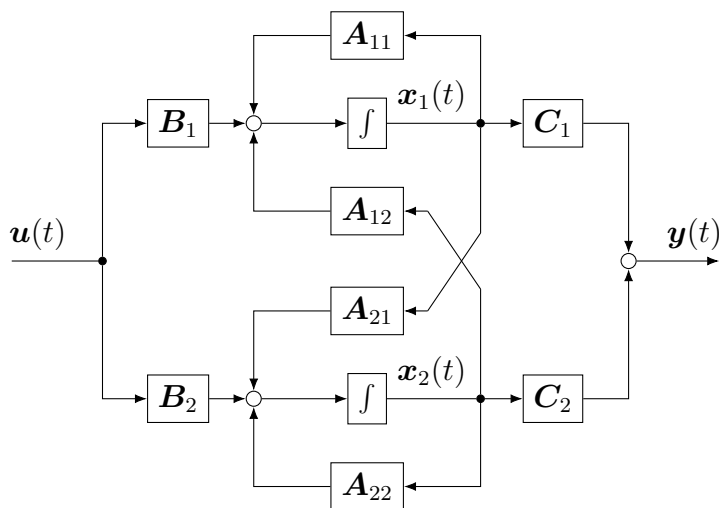
transformací převedeme stavový popis do tvaru

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t), \quad (2.1)$$

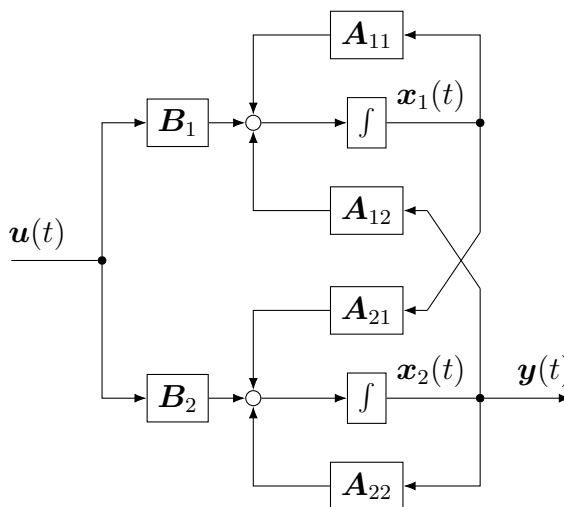
$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t_0) \\ \mathbf{x}_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{10} \\ \mathbf{x}_{20} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Stavový popis před a po transformaci je zobrazen na obr. 2.2 a na obr. 2.3. Podmatice $\mathbf{A}_{11}, \dots, \mathbf{A}_{22}$, $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ a podvektory $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)$ nereprezentují tytéž kvantify na obr. 2.2 jako na obr. 2.3.



Obr. 2.2: Nenormalizovaný tvar stavové realizace.



Obr. 2.3: Normalizovaný tvar stavové realizace.

Ústřední myšlenka návrhu RLDR je zajistit, aby se chyba rekonstrukce stavu asymptoticky blížila nule. Za tímto účelem volíme dynamiku RLDR podle modelu (2.1–2.3) tak, aby se stal autonomním systémem model odchylky předmětné části stavu od rekonstruované předmětné části stavu.

Stav modelu systému je buzen počáteční podmínkou stavu $\mathbf{x}_1(t_0) = \mathbf{x}_{10}$, počáteční podmínkou stavu $\mathbf{x}_2(t_0) = \mathbf{x}_{20}$ a vstupem $\mathbf{u}(t)$, $t \in \langle t_0, \infty \rangle$. Stav RLDR je buzen počáteční podmínkou stavu pozorovatele, vstupem modelu $\mathbf{u}(t)$, $t \in \langle t_0, \infty \rangle$ a výstupem modelu $\mathbf{y}(t)$, $t \in \langle t_0, \infty \rangle$. Později ukážeme, že stav pozorovatele je veličinou odpovídající specifické lineární kombinaci prvků stavu a proto zatím stav pozorovatele ani jeho počáteční podmínku neznačíme.

Použití $\mathbf{u}(t)$ a $\mathbf{y}(t)$ jako vstupů pozorovatele vychází z faktu, že chování vstupu a výstupu systému zprostředkovává informaci o stavu modelu tohoto systému, a část prvků stavu, respektive lineární kombinaci části prvků stavu a zbývajících, dostupných prvků stavu, budeme prostřednictvím RLDR rekonstruovat.

Dynamika vývoje $\mathbf{x}_1(t)$ je popsána první řádkou (2.1), ale podílí se na ní i druhá řádka (2.1). Z výstupní rovnice (2.2) je zřejmé, že druhá řádka (2.1) popisuje dynamiku vývoje výstupu, ale na dynamice výstupu se podílí i první řádka (2.1).

Konstrukce RLDR pro model (2.1–2.3) vychází z přeskupení, kde můžeme využít model (2.1–2.3) vzhledem k faktům zmíněným v předchozích dvou odstavcích. Model (2.1–2.3) nahlížíme jako

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} \\ \mathbf{A}_{21} \end{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x}_2(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t), \quad (2.4)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{0} \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{I} \mathbf{x}_2(t), \quad (2.5)$$

respektive jako

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} \\ \mathbf{A}_{21} \end{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{12} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}_{22} & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{0} \mathbf{x}_1(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

a snažíme se převést (2.6) na tvar, kde dynamika vývoje pozorovaného stavu $\mathbf{x}_1(t)$ není popsána redundantně ve smyslu, že není popsána nadbytečným počtem rovnic. To se podaří transformací souřadnic stavového prostoru modelu (2.1–2.3), kde

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{F} \mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

umožní pracovat s dynamickým vývojem stavu $\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{F} \mathbf{x}_2(t)$ a popis dynamiky vývoje $\mathbf{x}_2(t)$ v podobě druhé řádky vypustit, protože dynamiku vývoje $\mathbf{x}_2(t)$ jsme transformací (2.8) zohlednili v dynamice vývoje $\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{F} \mathbf{x}_2(t)$ a k $\mathbf{x}_2(t)$ máme fyzický přístup v podobě přístupu k výstupu systému.

Matice \mathbf{F} je libovolná reálná matice kompatibilních rozměrů, jejíž vhodnou volbou později zvolíme vhodnou dynamiku chyby rekonstrukce stavu. Chyba rekonstrukce

stavu je definovaná odchylkou

$$\mathbf{e}_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_1(t) - \hat{\mathbf{x}}_1(t). \quad (2.9)$$

Pro odlišení (2.1–2.3) od realizace bezprostředně sloužící k postupu návrhu RLDR zavedeme realizaci

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t), \quad (2.10)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t_0) \\ \mathbf{x}_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{10} \\ \mathbf{x}_{20} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Interpretace (2.10–2.12) je, že $\hat{\mathbf{x}}_1(t)$ je asymptotická rekonstrukce $\mathbf{x}_1(t)$ z modelu (2.1–2.3). Platí $\hat{\mathbf{x}}_{10} = \mathbf{x}_{10} \Rightarrow \hat{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{x}_1(t)$ pro $t \in \langle t_0, \infty \rangle$.

Transformace souřadnic stavového prostoru

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t), \quad (2.13)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t_0) \\ \mathbf{x}_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{10} \\ \mathbf{x}_{20} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

vede na stavový popis

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} - \mathbf{F}\mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{F} - \mathbf{F}\mathbf{A}_{21}\mathbf{F} + \mathbf{A}_{12} - \mathbf{F}\mathbf{A}_{22} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{F} + \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 - \mathbf{F}\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t), \quad (2.16)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t_0) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t_0) \\ \mathbf{x}_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{10} - \mathbf{F}\mathbf{x}_{20} \\ \mathbf{x}_{20} \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

který je možno nahlížet jako

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} - \mathbf{F}\mathbf{A}_{21} \\ \mathbf{A}_{21} \end{bmatrix} (\hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t)) + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{F} - \mathbf{F}\mathbf{A}_{21}\mathbf{F} + \mathbf{A}_{12} - \mathbf{F}\mathbf{A}_{22} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{F} + \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x}_2(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 - \mathbf{F}\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t), \quad (2.19)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_2(t). \quad (2.20)$$

kde je možné druhou řádku (2.19) vypustit, jak bylo popsáno výše.

První řádka (2.19) je hledaný model redukováného Luenbergerova pozorovatele

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t)) &= (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{F}\mathbf{A}_{21})(\hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t)) \\ &+ [\mathbf{I} \quad -\mathbf{F}] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}_2(t) + [\mathbf{I} \quad -\mathbf{F}] \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Matici dynamiky $\mathbf{A}_{11} - \mathbf{F}\mathbf{A}_{21}$ je možné libovolně volit vhodnou volbou matice \mathbf{F} , protože dvojice $(\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{21})$ je pozorovatelná. Tento fakt plyne z pozorovatelnosti dvojice

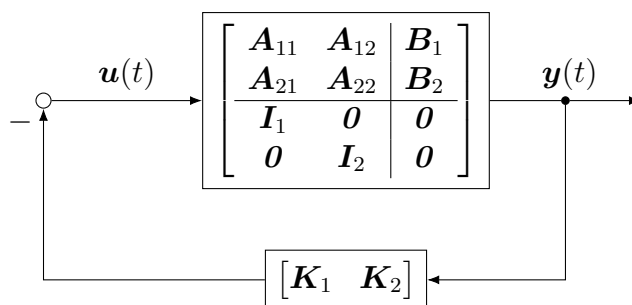
$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}] \right). \quad (2.22)$$

Volíme-li matici $\mathbf{A}_{11} - \mathbf{F}\mathbf{A}_{21}$ jako důsledek volby jejích vlastních čísel, musíme ke každému zvolenému komplexnímu vlastnímu číslu zvolit i vlastní číslo k němu komplexně sdružené, protože $\mathbf{A}_{11} - \mathbf{F}\mathbf{A}_{21}$ je reálná matice.

2.2 Stabilita uzavřené smyčky

Stabilita je základní vlastnost systémů, která nás zajímá, o kterou při návrhu zpětnovazebního řídicího systému usilujeme. V této podkapitole porovnáme dynamiky uzavřených smyček, kde v prvním případě vznikne uzavřená smyčka zpětnou vazbou od stavu a ve druhém případě vznikne uzavřená smyčka zpětnou vazbou od rekonstruovaného stavu.

Máme-li stav modelu systému fyzicky k dispozici na systému, je stavová zpětná vazba znázorněna na obr. 2.4.

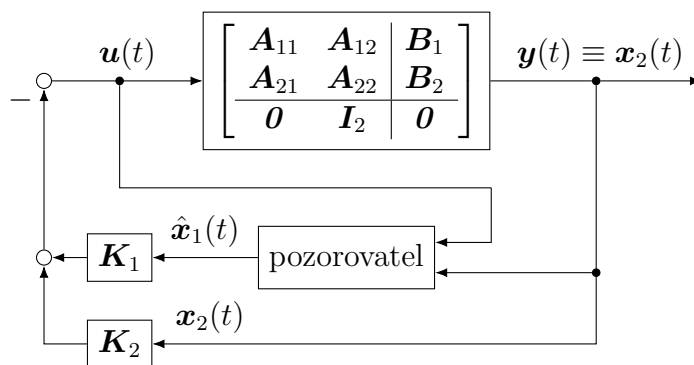


Obr. 2.4: Stavová zpětná vazba.

Pro zpětnou vazbu od stavu platí zákon řízení

$$\mathbf{u}(t) = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Máme-li stav modelu systému k dispozici pouze prostřednictvím redukováného pozorovatele, je stavová zpětná vazba znázorněna na obr. 2.5.

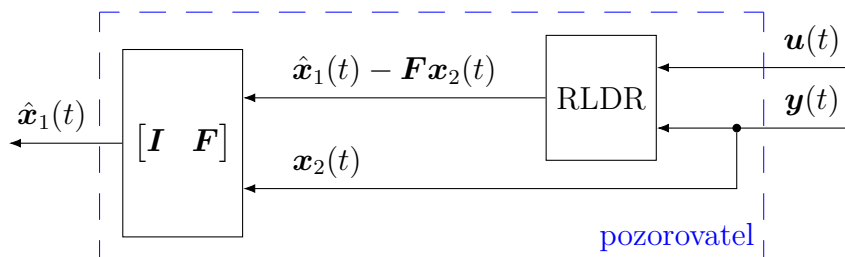


Obr. 2.5: Stavová zpětná vazba s pozorovatelem $\hat{\mathbf{x}}_1(t)$.

Pro zpětnou vazbu prostřednictvím redukovaného pozorovatele platí zákon řízení

$$\mathbf{u}(t) = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Vztah mezi blokem „pozorovatel“ na obr. 2.5 a RLDR je znázorněn na obr. 2.6 a vychází ze systému souřadnic použitého v podkapitole 2.1, kde je popsáno, že a proč je na výstupu RLDR veličina $\hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t)$, nikoli $\hat{\mathbf{x}}_1(t)$.



Obr. 2.6: Pozorovatel $\hat{\mathbf{x}}_1(t)$.

V souřadném systému RLDR je zákon řízení popsán takto:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_1\mathbf{F} + \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Systém se stavovou zpětnou vazbou přes RLDR je popsán systémem rovnic: model dynamického systému (2.1–2.3), stavová zpětná vazba (2.24), redukováný pozorovatel stavu (2.21). Tyto rovnice jsou postupně

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t), \quad (2.26)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

$$\mathbf{u}(t) = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t)) &= (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{F}\mathbf{A}_{21})(\hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t)) \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}_2(t) \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Přímým dosazením (2.28) do (2.26) a (2.29) dostáváme realizaci

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t)) &= (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{F}\mathbf{A}_{21})(\hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t)) \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}_2(t) \\ &- \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

kteřou přepíšeme do souřadnic stavového prostoru pozorovatele, tj.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t)) &= (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{F}\mathbf{A}_{21}) (\hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t)) \\ &\quad + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}_2(t) \\ &\quad - \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

abychom získali realizaci

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t)) &= (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{F}\mathbf{A}_{21}) (\hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t)) \\ &\quad + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}_2(t) \\ &\quad - \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

a uspořádáním prvků stavového vektoru dostali

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{M}_{12} & -\mathbf{B}_1\mathbf{K}_1 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{M}_{22} & -\mathbf{B}_2\mathbf{K}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{32} & \mathbf{M}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

kde matice \mathbf{M}_{12} , \mathbf{M}_{22} , \mathbf{M}_{32} a \mathbf{M}_{33} jsou definovány následujícím způsobem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{22} \\ \mathbf{M}_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{12} - \mathbf{B}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{22} - \mathbf{B}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} - \mathbf{B}_1\mathbf{K}_1 & \mathbf{A}_{12} - \mathbf{B}_1\mathbf{K}_2 \\ \mathbf{A}_{21} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}_1 & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$\mathbf{M}_{33} = \mathbf{A}_{11} - \mathbf{F}\mathbf{A}_{21} - \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{K}_1 \quad (2.43)$$

Vhodnou stavovou transformací realizace (2.40–2.41), konkrétně

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{F} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

zavedeme (2.9), tj. odchylku vektoru stavu pozorovatele od příslušné části vektoru stavu systému,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2 - (\hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2) \\ &= \mathbf{x}_1(t) - \hat{\mathbf{x}}_1(t). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Po transformaci stavu realizace (2.40–2.41) podle (2.44) dostáváme stavovou reali-

zaci systému se stavovou zpětnou vazbou přes RLDR ve tvaru autonomního systému

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{e}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1 & \mathbf{A}_{12} - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_2 & -\mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{A}_{21} - \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_1 & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_2 & -\mathbf{B}_2 \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{11} - \mathbf{F} \mathbf{A}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{e}_1(t) \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{e}_1(t) \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t_0) \\ \mathbf{x}_2(t_0) \\ \mathbf{e}_1(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{10} \\ \mathbf{x}_{20} \\ \mathbf{x}_{10} - \hat{\mathbf{x}}_{10} \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

který nám umožňuje učinit následující tvrzení.

Z realizace (2.46–2.48) plyne, že pro odstranění vlivu neurčitosti, která má podobu neznámých počátečních podmínek \mathbf{x}_{10} a \mathbf{x}_{20} kompenzovaného systému a neznámých počátečních podmínek $\mathbf{x}_{10} - \hat{\mathbf{x}}_{10}$ modelu chyby rekonstrukce stavu, je nezbytné, aby vlastní čísla kompenzovaného systému a vlastní čísla pozorovatele, tzn. RLDR, byla v otevřené levé polorovině komplexní roviny. Aby totiž vlastní čísla matice systému (2.46) byla v otevřené levé polorovině komplexní roviny, musí být v levé polorovině komplexní roviny vlastní čísla matice

$$\mathbf{A}_K = \mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1 & \mathbf{A}_{12} - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_2 \\ \mathbf{A}_{21} - \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_1 & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

a vlastní čísla matice

$$\mathbf{A}_F = \mathbf{A}_{11} - \mathbf{F} \mathbf{A}_{21}, \quad (2.50)$$

tzn. $\text{Re}(\lambda_i(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})) < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ a současně $\text{Re}(\lambda_i(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{F} \mathbf{A}_{21})) < 0$, $i = 1, 2, \dots, n - m$, kde n je dimenze vektoru stavu a m je dimenze vektoru výstupu.

Abychom mohli $\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}$ libovolně volit pomocí vhodné volby zesílení \mathbf{K} , musí být model (2.1–2.3) říditelný.

Abychom mohli $\mathbf{A}_{11} - \mathbf{F} \mathbf{A}_{21}$ libovolně volit pomocí vhodné volby zesílení \mathbf{F} , musí být model (2.1–2.3) rekonstruovatelný. Dá se ukázat, že pak bude rekonstruovatelná i dvojice $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{21}$.

Volíme-li matice $\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}$ a $\mathbf{A}_{11} - \mathbf{F} \mathbf{A}_{21}$ prostřednictvím volby jejich vlastních čísel, musíme ke každému zvolenému komplexnímu vlastnímu číslu zvolit i vlastní číslo k němu komplexně sdružené, protože $\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}$ a $\mathbf{A}_{11} - \mathbf{F} \mathbf{A}_{21}$ jsou reálné matice.

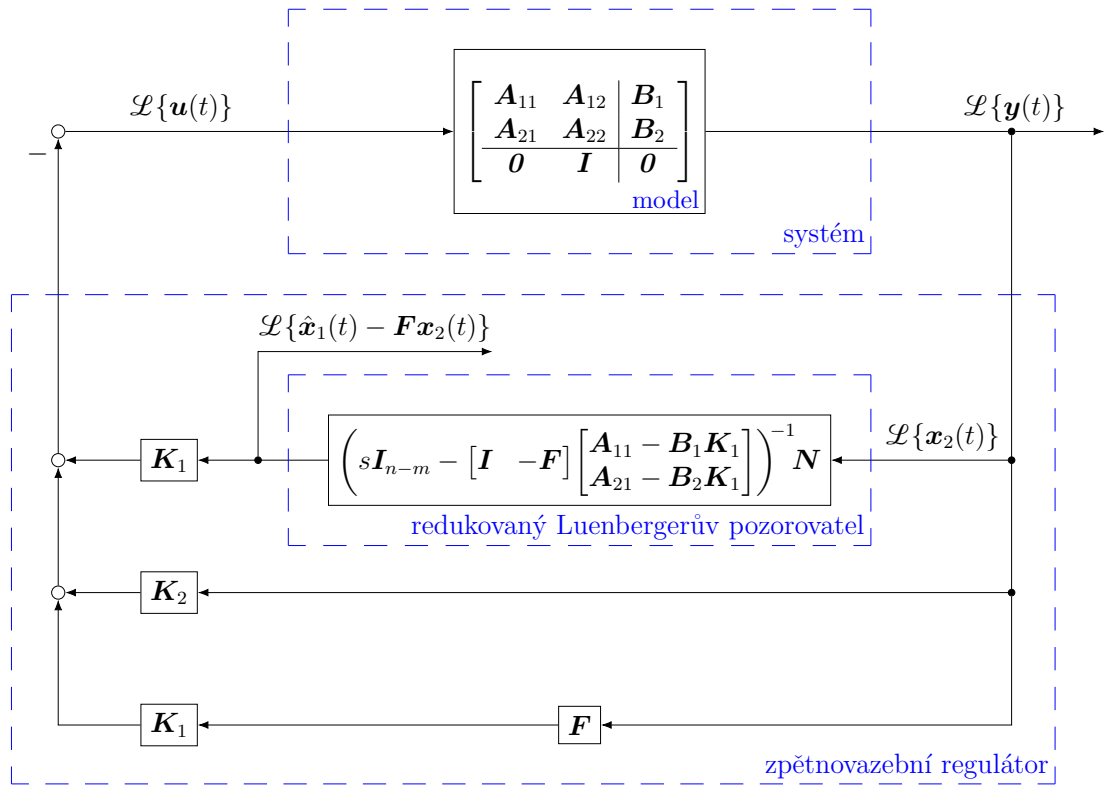
Pro lepší názornost vlivu počátečních podmínek vyjádříme analytické řešení stavové realizace (2.46–2.48) po Laplaceově transformaci. Laplaceovsky transformované řešení dostaneme přímo inverzí Laplaceova obrazu (2.46), analogií známého vzorečku pro přiřazení přenosové matice množině stavově ekvivalentních stavových realizací.

Snadno ověříme, že platí

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\mathbf{y}(t)\} &= \mathbf{Y}(s) = \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A}_K & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11} + \mathbf{FA}_{21} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{e}_{10} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_K)^{-1} & (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_K)^{-1}\mathbf{BK}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11} + \mathbf{FA}_{21})^{-1} \\ \mathbf{0} & (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11} + \mathbf{FA}_{21})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{e}_{10} \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_K)^{-1}\mathbf{x}_0}_{\text{vliv poč. podm. modelu}} + \underbrace{\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_K)^{-1}\mathbf{BK}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11} + \mathbf{FA}_{21})^{-1}\mathbf{e}_{10}}_{\text{vliv poč. podm. RLDR}} \quad (2.51)
\end{aligned}$$

2.3 Vztah k jiným metodologiím

Struktura problému regulátoru řešená v časové oblasti zapojením stavové zpětné vazby přes RLDR je ve frekvenční oblasti znázorněna na obr. 2.7.



$$\mathbf{N} = [\mathbf{I} \ -\mathbf{F}] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} - \mathbf{B}_1\mathbf{K}_1 & \mathbf{A}_{12} - \mathbf{B}_1\mathbf{K}_2 \\ \mathbf{A}_{21} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}_1 & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Obr. 2.7: Dynamická zpětná vazba od výstupu. Sériové spojení dynamického kompenzátoru a zesílení stavové zpětné vazby vzhledem ke stavovému prostoru se stavem $\begin{bmatrix} (\hat{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{F}\mathbf{x}_2)^T & \mathbf{x}_2^T \end{bmatrix}^T$.

Jedná se o případ, kdy výstup RLDR je v souřadnicovém systému s rekonstruovaným stavem $\begin{bmatrix} (\hat{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{F}\mathbf{x}_2)^T & \mathbf{x}_2^T \end{bmatrix}^T$.

Struktura řídicího systému na obr. 2.7 je vytvořena ze systému, který byl původně získán ve stavovém prostoru metodou stavové zpětné vazby zapojené přes RLDR – redukovanou Luenbergerovu dynamickou rekonstrukci stavu. Tato struktura ilustruje vztah k dynamické zpětné vazbě navrhované ve frekvenční oblasti a získá se následujícím způsobem.

Přímým dosazením (2.53) do (2.21) dostaneme vztah mezi \mathbf{x}_2 a $\hat{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{F}\mathbf{x}_2$. Nejprve si ale pro pozdější použití připravíme (2.27) a (2.28) transformací souřadnic stavového prostoru.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{x}_2(t) \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \\ &= -\mathbf{K}_1(\hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t)) - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}_2(t) \end{aligned} \quad (2.53)$$

Avizovaným dosazením (2.53) do (2.21) dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t)) &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} \\ \mathbf{A}_{21} \end{bmatrix} (\hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t)) \\ &\quad + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}_2(t) \\ &\quad - \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{K}_1(\hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t)) \\ &\quad - \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}_2(t) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Dále upravíme do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t)) &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} \\ \mathbf{A}_{21} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{K}_1 \right) (\hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t)) \\ &\quad + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}_2(t), \end{aligned} \quad (2.55)$$

z kterého Laplaceovou transformací získáme přenosovou funkci z $\mathcal{L}\{\hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t)\}$ na $\mathcal{L}\{\mathbf{x}_2(t)\}$.

$$\frac{\mathcal{L}\{\hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}_2(t)\}}{\mathcal{L}\{\mathbf{x}_2(t)\}} = \left(s\mathbf{I}_{n-m} - [\mathbf{I} \quad -\mathbf{F}] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} - \mathbf{B}_1\mathbf{K}_1 \\ \mathbf{A}_{21} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}_1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \mathbf{N}, \quad (2.56)$$

kde

$$\mathbf{N} = [\mathbf{I} \quad -\mathbf{F}] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} - \mathbf{B}_1\mathbf{K}_1 & \mathbf{A}_{12} - \mathbf{B}_1\mathbf{K}_2 \\ \mathbf{A}_{21} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}_1 & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

z které dosadíme do Laplaceova obrazu vztahu (2.53) a použijeme Laplaceův obraz (2.52), abychom tak získali přenos stavové zpětné vazby RLDR formou přenosu zpětnovazebního regulátoru

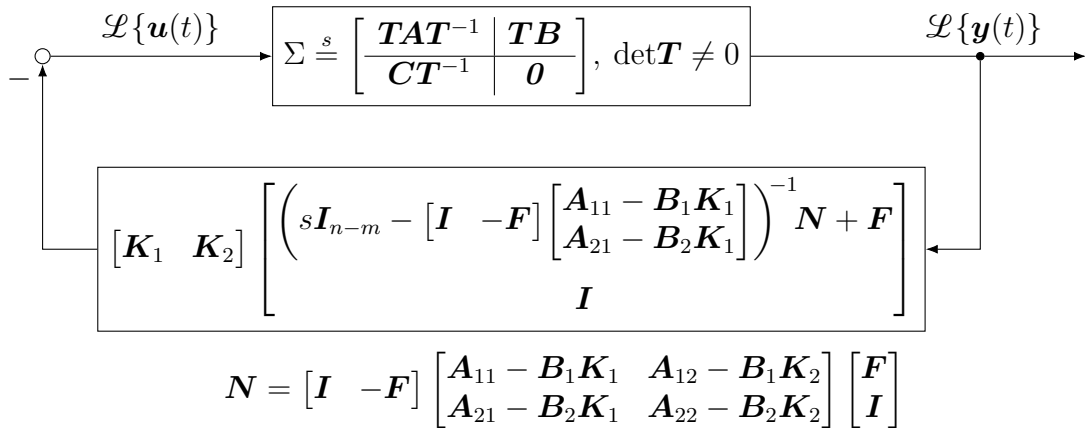
$$\frac{\mathcal{L}\{-\mathbf{u}(t)\}}{\mathcal{L}\{\mathbf{y}(t)\}} = [\mathbf{K}_1 \quad \mathbf{K}_1\mathbf{F} + \mathbf{K}_2] \begin{bmatrix} \left(s\mathbf{I}_{n-m} - [\mathbf{I} \quad -\mathbf{F}] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} - \mathbf{B}_1\mathbf{K}_1 \\ \mathbf{A}_{21} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}_1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \mathbf{N} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$= \mathbf{K}_1 \left(s\mathbf{I}_{n-m} - [\mathbf{I} \quad -\mathbf{F}] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} - \mathbf{B}_1\mathbf{K}_1 \\ \mathbf{A}_{21} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}_1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \mathbf{N} + \mathbf{K}_1\mathbf{F} + \mathbf{K}_2 \quad (2.59)$$

$$= \mathcal{L} \left\{ \left[\begin{array}{c|c} [\mathbf{I} \quad -\mathbf{F}] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} - \mathbf{B}_1\mathbf{K}_1 \\ \mathbf{A}_{21} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}_1 \end{bmatrix} & \mathbf{N} \\ \hline \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_1\mathbf{F} + \mathbf{K}_2 \end{array} \right] \right\}, \quad (2.60)$$

kde \mathbf{N} je definováno v (2.57) a (2.60) označuje Laplaceovu transformaci stavové realizace popsané čtveřicí matic s maticí přímé vazby mezi vstupem a výstupem $\mathbf{K}_1\mathbf{F} + \mathbf{K}_2$.

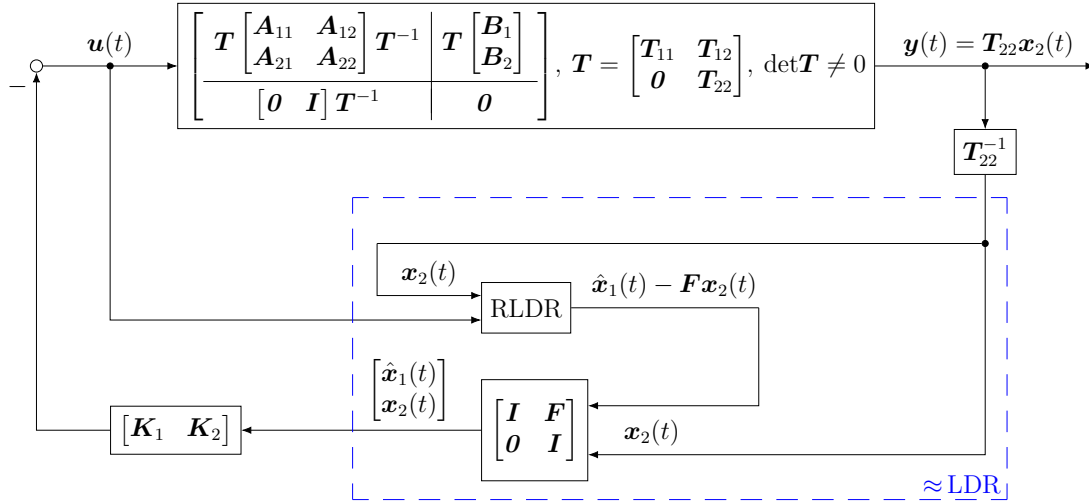
Vztah k dynamické zpětné vazbě navrhované ve frekvenční oblasti se tedy skutečně dá popsat jak je znázorněno na obr. 2.7. Kompaktnější verze obr. 2.7 je na obr. 2.8.



Obr. 2.8: Dynamická zpětná vazba od výstupu. Frekvenční oblast.

2.4 Vztah k LDR

Vztah RLDR a LDR vychází z toho, že rekonstrukce stavu pomocí RLDR se omezuje na ty prvky stavového vektoru, které nelze bezprostředně získat z okamžité hodnoty výstupu, to znamená bez jejich dynamické rekonstrukce. LDR nevyužívá možnost získat část prvků stavového vektoru nedynamicky, to znamená přímo z výstupu systému. Z tohoto pohledu je kombinaci RLDR a získání zbývajících prvků z výstupu možno považovat za LDR. Situace je znázorněna na obr. 2.9.



Obr. 2.9: RLDR & LDR: kombinace dynamické a konstantní zpětné vazby.

Normalizovaný tvar stavového modelu systému, potřebný pro návrh RLDR, není možné libovolně stavově transformovat, aby se nenarušilo rozdělení prvků vektoru stavu na dvě skupiny podle možnosti transformovat z okamžité hodnoty výstupu a nutnosti rekonstruovat dynamicky.

Stavové transformace, které neporuší výše popsané rozdělení prvků stavu normalizovaného tvaru stavového modelu

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t), \quad (2.61)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.62)$$

jsou ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

protože

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11}\hat{\mathbf{x}}_1(t) + \mathbf{T}_{12}\mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}. \quad (2.64)$$

Přizpůsobení zapojení RLDR, kde normalizovaný tvar modelu je předmětem některé takové transformace, je znázorněno na obr. 2.9.

Kapitola 3

Kalmanův filtr

Kalmanův filtr je přeformulováním problému Luenbergerova pozorovatele, případně Luenbergerova redukováného pozorovatele, pro případ volby pólů pozorovatele pomocí stavových metod kvadratické optimalizace. Nejrozšířenější a pravděpodobně nejaplikovatelnější je kvadratická optimalizace na nekonečném horizontu vedoucí na stacionární Kalmanův filtr [10].

Přínos stacionárního Kalmanova filtru v našem kontextu vychází především z otevření možnosti přeformulovat deterministickou úlohu.

V deterministickém přístupu použitým v této práci se návrh servosystému úhlové polohy řeší pomocí augmentovaného stavu převodem problému servosystému na problém regulátoru. Tomuto postupu se často říká integrální LQR. Struktura řešení je stavová zpětná vazba a předmětem řešení jsou stavová zesílení zpětné vazby. Úloha vede na autonomní systém v úloze o regulátoru, v kterém je neurčitost modelována pomocí neznámých, ale pevně daných počátečních podmínek systému, který je subjektem této stavové zpětné vazby. Tento způsob řešení je navíc možno aplikovat na duální úlohu k úloze pozorovatele a rekonstruovat stav pomocí pozorovatele. Po odeznění počátečních podmínek systému a pozorovatele se systém regulátoru se zpětnou vazbou uzavřenou přes pozorovatele dostává do klidu. *A není co řešit*, jak se říká v Čechách.

Přeformulování je založeno na modelování neurčitosti v systému zavedením nejen neznámých ale pevně daných počátečních podmínek. Neurčitost je teď modelována také a zejména přítomností šumu v modelu systému. Stavová realizace systému za přítomnosti šumu je popsána jako

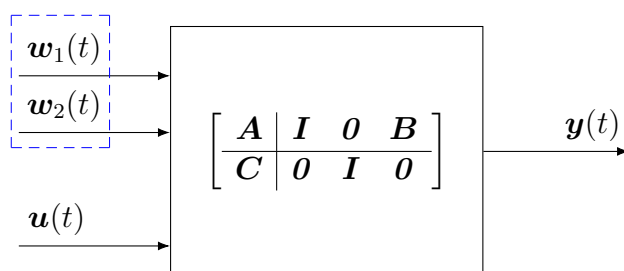
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{w}_1(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}_2(t), \quad (3.2)$$

kde $\mathbf{x}(t)$ je vektor stavu, $\mathbf{u}(t)$ je vstup, $\mathbf{y}(t)$ je výstup, $\mathbf{w}_1(t)$ je šum stavu (nemodelované poruchy ovlivňující dynamiku systému), $\mathbf{w}_2(t)$ je šum výstupu (měření) a $\mathbf{x}(t_0)$ je vektor počátečních podmínek stavu. Pro další účely budeme stavovou realizaci (3.1–3.2) označovat

$$\Sigma_w = \left[\begin{array}{c|ccc} \mathbf{A} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (3.3)$$

Situace je stavově zobrazena na obr. 3.1



Obr. 3.1: Systém za přítomnosti šumu.

Šum na vstupu a šum na výstupu jsou z hlediska zavedené nové reprezentace v duálním vztahu, stejně jako jsou v duálním vztahu úloha o regulátoru a úloha o pozorovateli stavu. Dokonce i minimalizace kritéria za účelem nalezení řešení, kterým je v případě úlohy o regulátoru stavová zpětná vazba, je analogií řešení úlohy o regulátoru buzeném pouze neznámou, ale pevně danou počáteční podmínkou deterministického modelu.

Stejně jako je to v deterministickém případě modelování neurčitosti, jsou minimalizována kritéria, a tato kritéria jsou z pohledu praktického uživatele identická s kritérii v deterministickém případě. V obou případech je praktické použití kritérií založeno na vhodné volbě váhových funkcí.

Protože z povahy šumů lze s šumy zavedené kvantity, které zde ani nebudeme jmenovat nebo popisovat, vtáhnout do váhových matic kritéria. Tímto faktem, alespoň z pohledu praktického uživatele, je přechod zpět do deterministického problému snadný a formálně se o možnosti takového přechodu dá přesvědčit, když si deterministické řešení projdeme *mutatis mutandis* se zavedenými šumy.

Na závěr této (ne)kapitoly citát ze článku otců-zakladatelů:

Protože jasných dní je většina a nejsou dny s negativními srážkami, které by kompenzovaly deštivé dny, je křivka rozložení pravděpodobnosti nesymetrická. Nejpravděpodobnější počasí určené z této křivky použitím kritéria nejmenší střední kvadratické odchylky je mrholení. Pro člověka, který zamýšlí jít na výlet, je však taková předpověď bezcenná. Zajímá ho pravděpodobnost, nebude-li pršet, protože i drobný déšť mu zkaží výlet.

H. W. Bode, C. E. Shannon (1950) [3]

Kapitola 4

Motor bez zátěže

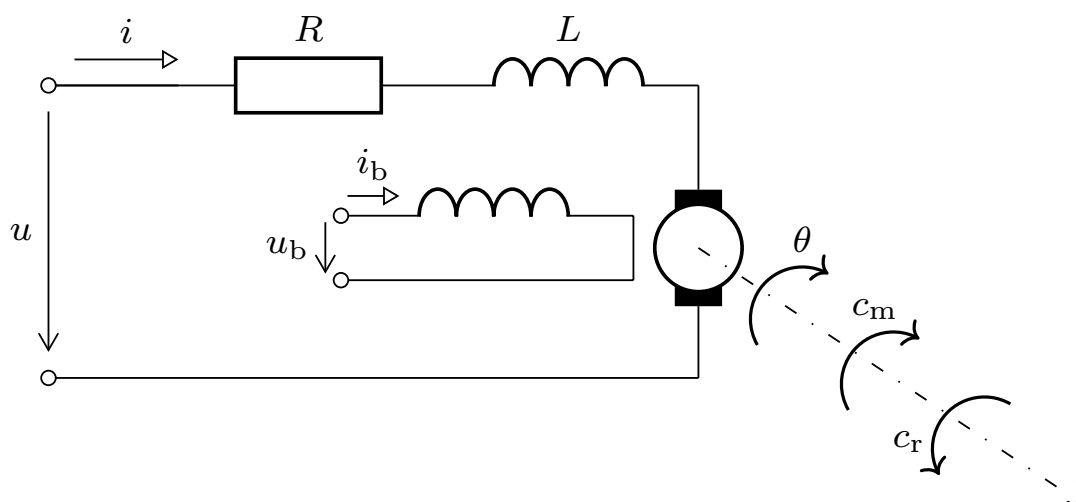
Sestavení systému linearizovaných rovnic modelu stejnosměrného motoru slouží k vytvoření stavového modelu. Model je idealizací regulačního členu servomechanismu (řídícího systému) pro sledování žádané hodnoty úhlové polohy hřídele.

Motor funguje na principu vzájemného silového působení magnetického pole a elektrického proudu procházejícího cívkou, kterou v případě elektromotoru nazýváme armaturou, kotvou, nebo vinutím rotoru.

Při odvozování modelu budeme předpokládat:

- (i) lineární závislost mezi tlumícím momentem na hřídeli a její úhlovou rychlostí;
- (ii) zanedbání vířivých proudů v pevných částech elektromagnetického obvodu;
- (iii) neuvažování reakce kotvy elektromotoru, tj. $u_b = \text{konst.}$

Schéma stejnosměrného elektromotoru je na obr. 4.1.



Obr. 4.1: Schéma stejnosměrného motoru.

4.1 Model rotačního pohybu

Otáčivý pohyb rotoru stejnosměrného elektrického motoru je obdobný otáčivému pohybu motorů. Rovnice otáčivého pohybu kotvy je tedy

$$J \frac{d}{dt} \omega(t) = c_m(t) - c_r(t), \quad (4.1)$$

kde J je moment setrvačnosti rotoru, $c_m(t)$ je moment pohybových sil a $c_r(t)$ je moment tlumících sil.

Moment pohybových sil u elektromotoru s cizím buzením závisí na magnetickém toku budícího vinutí ϕ_b a na elektrickém proudu kotvou $i(t)$

$$c_m(t) = K'_t \phi_b i(t), \quad (4.2)$$

kde K'_t je momentová konstanta elektromotoru.

Moment tlumících sil elektromotoru – obdobně jako u otáčivého pohybu motorů – závisí na viskózním tření v motoru a podle předpokladu i) má tvar

$$c_r(t) = b \frac{d}{dt} \theta(t), \quad (4.3)$$

kde b je součinitel viskózního tření elektromotoru a $\theta(t)$ je úhel natočení hřídele elektromotoru. Vztah mezi úhlovou rychlostí $\omega(t)$ a úhlem natočení je

$$\omega(t) = \frac{d}{dt} \theta(t). \quad (4.4)$$

Mechanickým koeficientem motoru označujeme konstantu

$$K_t = K'_t \phi_b. \quad (4.5)$$

Konstantní koeficienty K_t a K_e , kde K_e je elektromechanický koeficient (4.8) definovaný v podkapitole 4.2, jsou si rovny, když použijeme jednotky SI, tzn. volt, ampér, Nm, rad/s pro měření napětí, proudu, točivého momentu a úhlové rychlosti.

4.2 Model elektromagnetického obvodu

Za předpokladu, že nelineární magnetizační charakteristika elektromotoru je nahraditelná lineární, je rovnice elektrického obvodu řídicího vinutí elektromotoru ve tvaru

$$u(t) = L \frac{d}{dt} i(t) + R i(t) + e_{\text{emf}}(t), \quad (4.6)$$

kde R a L jsou odpor a indukčnost armatury (vinutí, kotvy), $u(t)$ a $i(t)$ jsou napětí na armatuře a proud armaturou a $e_{\text{emf}}(t)$ je napětí, které se nazývá elektromotorická síla. Toto napětí popisuje vztah

$$e_{\text{emf}}(t) = K_e \phi_b \frac{d}{dt} \theta(t), \quad (4.7)$$

kde K'_e je napěťová konstanta elektromotoru, ϕ_b je magnetický tok budícího vinutí a $\theta(t)$ je úhel natočení hřídele elektromotoru.

Elektromotorickým koeficientem K_e označujeme konstantu

$$K_e = K'_e \phi_b. \quad (4.8)$$

Konstantní koeficienty K_e a K_t , kde K_t je mechanický koeficient motoru (4.5) definovaný v podkapitole 4.1, jsou si rovny, když použijeme jednotky SI, tzn. volt, ampér, Nm, rad/s pro měření napětí, proudu, točivého momentu a úhlové rychlosti.

4.3 Stavový model

Rovnováha momentů z podkapitoly 4.1 a rovnováha napětí z podkapitoly 4.2 společně dávají systém rovnic modelu stejnosměrného motoru. Prostým dosazováním je to trojice rovnic

$$\frac{d}{dt}\theta(t) = \omega(t), \quad (4.9)$$

$$\frac{d}{dt}\omega(t) = \frac{1}{J}(K_t i(t) - b\omega(t)), \quad (4.10)$$

$$\frac{d}{dt}i(t) = \frac{1}{L}(u(t) - K_e \omega(t) - Ri(t)), \quad (4.11)$$

kteřé přepíšeme maticově do tvaru

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b/J & K_t/J \\ 0 & -K_e/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u(t), \quad \begin{bmatrix} \theta(t_0) \\ \omega(t_0) \\ i(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \omega_0 \\ i_0 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

$$\begin{bmatrix} \theta(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Systému rovnic (4.12–4.13) se říká stavová realizace modelu,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (4.15)$$

kde $\mathbf{x}(t)$ je vektor stavu, $\mathbf{u}(t)$ je vektor vstupu, $\mathbf{y}(t)$ je vektor výstupu a $\mathbf{x}(t_0)$ je vektor počátečních podmínek stavu.

Přenosovou matici odpovídající stavové realizaci (4.14–4.15) a jí stavově ekvivalentním realizacím značíme

$$\Sigma \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{o} \end{array} \right]. \quad (4.16)$$

Pro další vhléd do modelu motoru a do techniky návrhu servomechanismu může být užitečné, když si dynamiku rozložíme tak, jak nám to struktura realizace (4.12–4.13) dovoluje.

Začneme faktorizací na sériové spojení dvou submodelů. Jedním ze submodelů je ideální integrátor popsaný vztahem (4.4). Jeho stavová realizace je

$$\frac{d}{dt} \theta(t) = 0 \theta(t) + 1 \omega(t), \quad (4.17)$$

$$\theta(t) = 1 \theta(t) \quad (4.18)$$

a jeho přenosovou funkci budeme značit jako

$$\Sigma_{\theta} \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right]. \quad (4.19)$$

Druhým submodelem je zbývající část modelu. Tento submodel získáme využitím vzorců pro sériové spojení dvou stavových modelů, které najdeme jako standardní makro v systému MATLABTM nebo jinde, např. [13].

Stavová realizace zbývající části modelu, tzn. druhý submodel, je pak

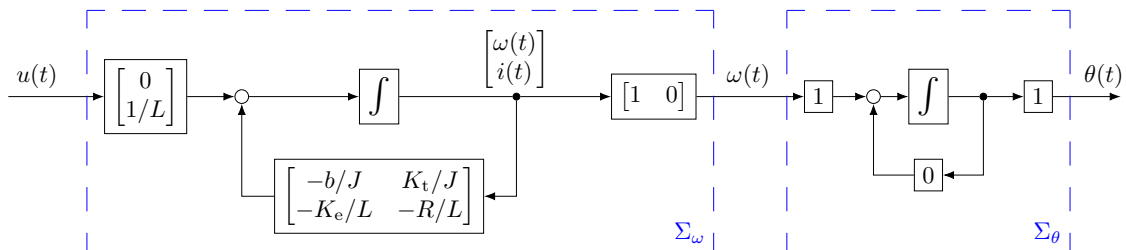
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b/J & K_t/J \\ -K_e/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u(t), \quad (4.20)$$

$$\omega(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

a její přenosovou funkci popsanou stavově budeme značit

$$\Sigma_{\omega} \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{cc|c} -b/J & K_t/J & 0 \\ -K_e/L & -R/L & 1/L \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

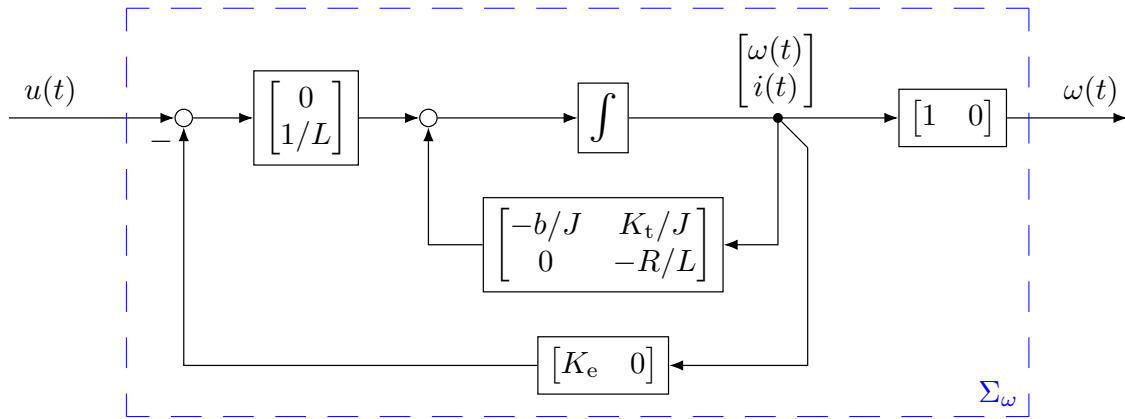
Výsledná faktorizace je znázorněná na obr. 4.2



Obr. 4.2: Sériové spojení submodelu Σ_{ω} a submodelu Σ_{θ} .

Pokračujeme dekompozicí Σ_{ω} , kde matici dynamiky modelu Σ_{ω} přepíšeme jako

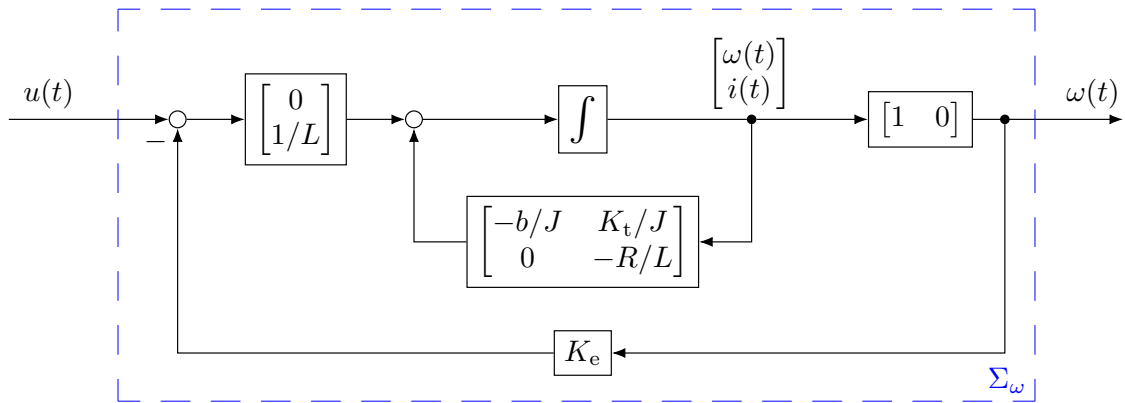
$$\begin{bmatrix} -b/J & K_t/J \\ -K_e/L & -R/L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b/J & K_t/J \\ 0 & -R/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K_e & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$



Obr. 4.3: Σ_ω jako zpětnovazební systém se zpětnou vazbou od stavu.

To nám umožní interpretovat Σ_ω jako submodel Σ'_ω obalený zpětnou vazbou od stavu, jak je znázorněno na obr. 4.3.

Pro naše účely ještě změňme zpětnou vazbu od stavu na zpětnou vazbu od výstupu. Tím přejde obr. 4.3 na obr. 4.4.



Obr. 4.4: Σ_ω jako zpětnovazební systém se zpětnou vazbou od stavu.

Rozložení matice dynamiky dokončíme faktorizací obdobnou té, kterou jsme začali. Využijeme vzorců pro sériové spojení dvou stavových modelů, které najdeme jako standardní makro v systému MATLABTM nebo jinde, např. [13].

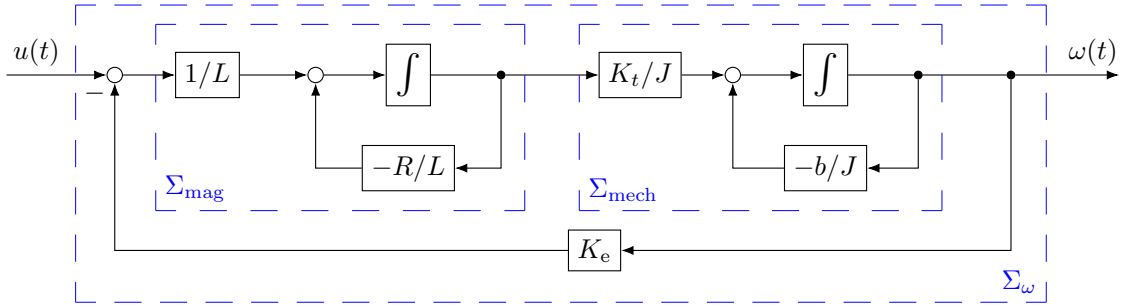
Vzorce jsou uvedeny také v Příloze jako (P.1), (P.2) a platí:

$$\Sigma_{\text{mech}}\Sigma_{\text{mag}} = \left[\begin{array}{cc|c} -b/J & K_t/J & 0 \\ 0 & -R/L & 1/L \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (4.23)$$

$$\Sigma_{\text{mech}} = \left[\begin{array}{c|c} -b/J & K_t/J \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right] \quad (4.24)$$

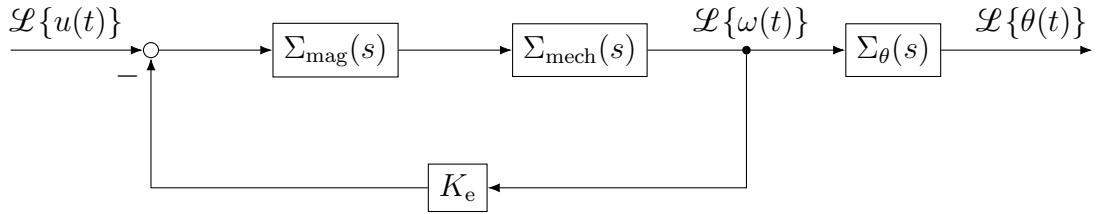
$$\Sigma_{\text{mag}} = \left[\begin{array}{c|c} -R/L & 1/L \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right] \quad (4.25)$$

Situace je znázorněna na obr. 4.5, kde Σ_{mech} a Σ_{mag} můžeme chápat jako přenosové funkce popsané stavovými realizacemi (4.24) a (4.25).



Obr. 4.5: Σ_{ω} jako sériové spojení mech. a elmag. subsystémů, se zpětnou vazbou $-K_e$ úměrnou velikosti elektromotorické síly.

Blokové schéma z obr. 4.2 je tedy možné znázornit jak je ukázáno na obr. 4.6.



Obr. 4.6: Model bez zátěže: sériové spojení integrátoru a zpětnovazební smyčky se zápornou zpětnou vazbou kolem sériového spojení mech. a elmag. subsystémů.

Přenosové funkce definované realizacemi Σ_{mag} , Σ_{mech} a Σ_{θ} jsou po řadě:

$$\Sigma_{\text{mag}} = \frac{1/L}{s + R/L} = \frac{1/R}{s L/R + 1} = \frac{1/R}{s T_{\text{mag}} + 1} \quad (4.26)$$

$$\Sigma_{\text{mech}} = \frac{K_t/J}{s + b/J} = \frac{K_t/b}{s J/b + 1} \quad (4.27)$$

Elektromagnetickou časovou konstantou T_{mag} označujeme konstantu

$$T_{\text{mag}} = \frac{L}{R}. \quad (4.28)$$

Tato konstanta je patrná i v (4.31) a má původ z popisu motoru pomocí skalární přenosové funkce v klasickém přístupu ve frekvenční oblasti [2].

Bodeho diagramy submodelů z obr. 4.5 a 4.6 jsou pro konkrétní exemplář servomotoru zobrazeny v podkapitole 7.1. Technické parametry jsou v příloze P2.

Rozdílnost frekvenčních pásem mechanické a elektrické součásti umožňuje v některých aplikacích modelovat servomotor pro servosystém úhlové polohy jako stavový model se dvěma vstupy, kde se elektrická část zahrne jako nemodelovaná dynamika do šumu na výstupu, jak je načrtnuto v kapitole 3, a tím se třístavový model

motoru převede na dvoustavový se šumem. Takový postup je v návrhu servomechanismu úhlové polohy [13], Příklad 2.1, str. 124. Jde o natočení antény v rovině, kde se v počátku roviny nachází anténa, která má neustále mířit na určený objekt. Anténa je poháněna servomotorem. Jedná se o servomechanismus úhlové polohy, kde žádanou hodnotu úhlové polohy předpokládají autoři získat snímáním úhlové polohy dalekohledu, kterým operátor servosystému míří na cíl [13].

4.4 Základní schopnosti

Základní schopnosti dynamického systému zahrnují říditelnost a rekonstruovatelnost [13], str. 55, str. 67. Bez dalšího noření do detailů se dá snadno ukázat, že stav modelu (4.12–4.13) je rekonstruovatelný a říditelný.

4.4.1 Říditelnost

$$\mathbf{P} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & \frac{K_t}{JL} \\ 0 & \frac{K_t}{JL} & \star \\ 1/L & \frac{-R}{L^2} & \star \end{array} \right] \quad (4.29)$$

kde \star značí prvky matice říditelnosti \mathbf{P} , které již není třeba počítat, protože z (4.29) je patrné, že matice říditelnosti má plnou hodnost a tudíž je stavový vektor modelu motoru (4.12–4.13) říditelný.

4.4.2 Rekonstruovatelnost

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline 0 & 1 & 0 & & & \\ \star & \star & \star & & & \\ \hline \star & \star & \star & & & \\ \star & \star & \star & & & \end{array} \right] \quad (4.30)$$

kde \star značí prvky matice rekonstruovatelnosti \mathbf{Q} , které již není třeba počítat, protože z (4.30) je patrné, že matice rekonstruovatelnosti má plnou hodnost a tudíž je stavový vektor modelu motoru (4.12–4.13) rekonstruovatelný.

4.5 Normalizovaný model pro návrh RLDR

Ve snaze o zlepšení orientace mezi množstvím stavových realizací a modelů budeme zneužívat zavedené značení přenosové funkce popsané stavovou realizací. Na základě tohoto zneužití použijeme pro odkaz na konkrétní stavovou realizaci, tj. systém rovnic stavového popisu (4.14–4.15), konvenci pro odkaz na jeho přenosovou funkci, tj. (4.16).

Model motoru ve formě stavové realizace (4.12–4.13) označíme

$$\Sigma_m \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_m & \mathbf{B}_m \\ \hline \mathbf{C}_m & \mathbf{0} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b/J & K_t/J & 0 \\ 0 & -K_e/L & -R/L & 1/L \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]. \quad (4.31)$$

K modelu (4.31) příslušný stavový vektor $\mathbf{x}(t)$ má dimenzi 3. Postupně ho tvoří tyto skalární veličiny: úhlová poloha hřídele $\theta(t)$, úhlová rychlost hřídele $\omega(t)$, elektrický proud rotorem $i(t)$.

Vstupní veličina je skalární a tvoří ji $u(t)$, napájecí napětí elektromotoru. Výstupní vektor $\mathbf{y}(t)$ má dimenzi 2. Postupně ho tvoří úhlová poloha hřídele $\theta(t)$, proud rotorem $i(t)$.

4.5.1 RLDR jednoho stavu (RLDR2)

Stavovou transformací ve formě permutace permutujeme sloupce výstupní matice. Popis (4.31) tak dostaneme do tvaru, který umožní postupné odebrání rovnic měření (rovnic výstupu stavového modelu) bez ztráty normalizovaného tvaru.

Model motoru (4.12–4.13) realizovaný jako stavový systém v normalizovaném tvaru:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b/J & K_t/J & 0 \\ -K_e/L & -R/L & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.32)$$

$$\begin{bmatrix} i(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$\begin{bmatrix} \omega(t_0) \\ i(t_0) \\ \theta(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ i_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Označení modelu motoru (4.12–4.13) realizovaného jako stavový systém v normalizovaném tvaru (4.32–4.34):

$$\bar{\bar{\Sigma}}_m = \left[\begin{array}{c|c} \bar{\bar{\mathbf{A}}}_m & \bar{\bar{\mathbf{B}}}_m \\ \hline \bar{\bar{\mathbf{C}}}_m & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (4.35)$$

Model (4.32–4.34) má tři stavy a dva výstupy. To znamená, že k němu příslušná RLDR bude popsána stavovým modelem s jedním stavem – asymptoticky rekonstruovaným stavem úhlové rychlosti $\omega(t)$, který značíme $\hat{\omega}(t)$.

Protože RLDR má v tomto specifickém případě jeden stav, odkaz je na RLDR jednoho stavu. Protože RLDR má v tomto případě vektor $\mathbf{y}(t)$ dimenze 2, je odkaz na RLDR2. Značení vzniklo historicky z důvodů organizace práce.

4.5.2 RLDR dvou stavů (RLDR1)

RLDR dvou stavů (RLDR1) vznikne z RLDR jednoho stavu (RLDR2) vynecháním měření elektrického proudu rotorem $i(t)$.

Model motoru (4.12–4.13) realizovaný jako stavový systém v normalizovaném tvaru s vynechaným měřením proudu rotorem:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b/J & K_t/J & 0 \\ -K_e/L & -R/L & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.36)$$

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$\begin{bmatrix} \omega(t_0) \\ i(t_0) \\ \theta(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ i_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Označení modelu motoru (4.12–4.13) realizovaného jako stavový systém v normalizovaném tvaru (4.32–4.34) s vynechaným měřením proudu rotorem:

$$\bar{\Sigma}_m = \left[\begin{array}{c|c} \bar{\mathbf{A}}_m & \bar{\mathbf{B}}_m \\ \hline \bar{\mathbf{C}}_m & \mathbf{o} \end{array} \right] \quad (4.39)$$

Protože RLDR má v tomto specifickém případě dva stavy, odkaz je na RLDR dvou stavů. Protože RLDR má v tomto případě vektor $y(t)$ dimenze 1, je odkaz na RLDR1. Značení vzniklo historicky z důvodů organizace práce.

Kapitola 5

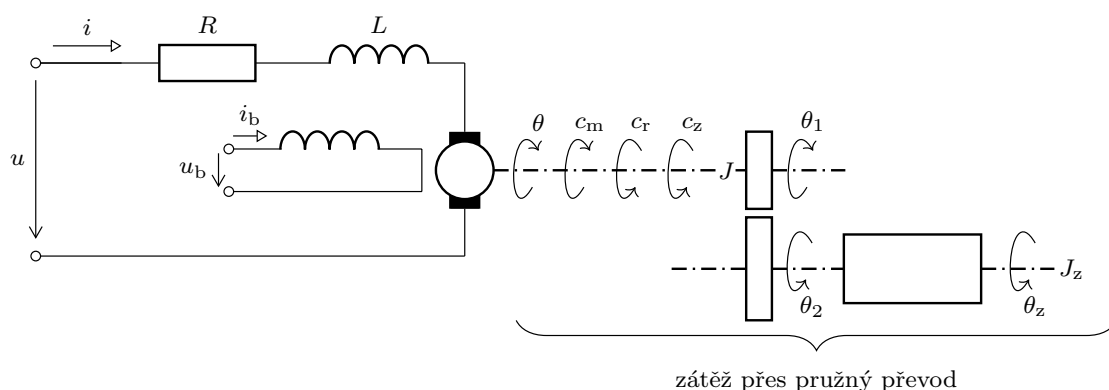
Motor se zátěží

Modifikace a doplnění rovnic Kapitoly 4 popisuje motor připojený přes pružný převod k zátěži o známém momentu setrvačnosti J_z . Model motoru se zátěží je určen pro syntézu servomechanismu úhlového polohování zátěže.

Při odvození modelu se zátěží je v modelu bez zátěže třeba zohlednit:

- (i) vliv zátěže na dynamiku motoru
- (ii) zahrnutí dynamiky zátěže do celkové dynamiky systému motor se zátěží

Schéma systému „stejnoseměrný motor se zátěží přes pružný převod“ je na obr. 5.1.



Obr. 5.1: Schéma stejnosměrného motoru zatíženého přes pružný převod.

S rozebíranou problematikou souvisí experimentální určení momentu setrvačnosti rotoru J metodou, kterou můžeme požit v případě, kdy máme rotor fyzicky k dispozici, viz P4.

5.1 Model rotačního pohybu

Interakci zátěže a motoru můžeme modelovat modifikací modelu rotačního pohybu bez zátěže: Rotor nezatíženého motoru nahradíme soustavou rotor–převod–zátěž,

kde k vlivu momentu setrvačnosti rotoru J přibývá vliv převodu a momentu setrvačnosti zátěže J_z .

Moment zátěžových sil $c_z(t)$ působí proti momentu pohybových sil $c_m(t)$. Vycházíme z podkapitoly 4.1, kde $c_m(t)$ zůstává a k momentu tlumících sil $c_r(t)$ se přidružuje moment zátěžových sil $c_z(t)$.

$$J \frac{d}{dt} \omega(t) = c_m(t) - c_r(t) - c_z(t) \quad (5.1)$$

Moment zátěžových sil se modeluje jako

$$c_z(t) = k_1 (\theta(t) - \theta_1(t)), \quad (5.2)$$

kde koeficient k_1 je torzní tuhost hřídele motor–převodovka, tj. hřídele spojujícího motor s hřídelem převodovky na jejíž opačné straně je připojena zátěž. Natočení hřídele na straně motoru měří úhel $\theta(t)$ a natočení hřídele na straně převodovky měří úhel $\theta_1(t)$.

Rovnice momentů převodovky je

$$k_p k_1 (\theta_1(t) - \theta(t)) = k_2 (\theta_z(t) - \theta_2(t)), \quad (5.3)$$

kde koeficient k_p je převod převodovky

$$k_p = \frac{\theta_1(t)}{\theta_2(t)} = \text{konst.} \quad (5.4)$$

Koeficient k_2 je torzní tuhost hřídele převodovka–zátěž, tj. hřídele spojujícího převodovku s hřídelem zátěže. Na opačné straně převodovky je připojen motor. Natočení hřídele na straně převodovky měří úhel $\theta_2(t)$ a natočení hřídele na straně zátěže měří úhel $\theta_z(t)$. Natočení hřídele na straně zátěže $\theta_z(t)$ budeme dále nazývat krátce jako natočení zátěže.

Celková dynamika systému rotor–zátěž je modelována rovnicí momentů (5.1) a rovnicí pohybujících se hmot zátěže

$$J_z \frac{d^2}{dt^2} \theta_z(t) + k_z \frac{d}{dt} \theta_z(t) + k_2 (\theta_z(t) - \theta_2(t)) = 0, \quad (5.5)$$

kde J_z je moment setrvačnosti zátěže a koeficient k_z je součinitel viskózního tření zátěže.

Model rotačního pohybu se zátěží tedy popisují rovnice

$$J \frac{d}{dt} \omega(t) = K_t i(t) - b \omega(t) - k_1 \theta(t) + k_1 \theta_1(t), \quad (5.6)$$

$$J_z \frac{d}{dt} \omega_z(t) = -k_z \omega_z(t) + k_2 \theta_2(t) - k_2 \theta_z(t), \quad (5.7)$$

kde $\omega_z(t)$ je úhlová rychlost zátěže

$$\omega_z(t) = \frac{d}{dt} \theta_z(t). \quad (5.8)$$

5.2 Model elektromagnetického obvodu

Za předpokladu, že se výrazně nezmění mechanický koeficient motoru (4.5) a že se výrazně nezmění elektromechanický koeficient (4.8), není třeba dále modifikovat materiál v podkapitole 4.2.

5.3 Stavový model se zátěží

Rovnováha momentů z podkapitoly 5.1, rovnováha napětí z podkapitoly 5.2, resp. 4.2, a rovnice pohybujících se hmot z podkapitoly 5.1 společně dávají systém rovnic modelu stejnosměrného motoru zatíženého přes pružný převod, (tj. modelu motor–pružná převodovka–zátěž).

Subsystem „motor“ je popsán rovnicemi

$$\frac{d}{dt}\theta(t) = \omega(t), \quad (5.9)$$

$$\frac{d}{dt}\omega(t) = -\frac{k_1}{J}\theta(t) + \frac{k_1}{J}\theta_1(t) - \frac{b}{J}\omega(t) + \frac{K_t}{J}i(t), \quad (5.10)$$

$$\frac{d}{dt}i(t) = -\frac{K_e}{L}\omega(t) - \frac{R}{L}i(t) + \frac{1}{L}u(t). \quad (5.11)$$

Subsystem „zátěž“ je popsán rovnicemi

$$\frac{d}{dt}\theta_z(t) = \omega_z(t), \quad (5.12)$$

$$\frac{d}{dt}\omega_z(t) = -\frac{k_z}{J_z}\omega_z(t) + \frac{k_2}{J_z}\theta_2(t) - \frac{k_2}{J_z}\theta_z(t). \quad (5.13)$$

Pomocí (5.3) a (5.4) můžeme ze systému rovnic (5.9)–(5.13) eliminovat úhly natočení hřídele převodovky $\theta_1(t)$ a $\theta_2(t)$. Snadným výpočtem z (5.3) a (5.4) dostáváme

$$\theta_1(t) = k_p\theta_2(t), \quad (5.14)$$

$$\theta_2(t) = \frac{k_1k_p}{k_2 + k_1k_p^2}\theta(t) + \frac{k_2}{k_2 + k_1k_p^2}\theta_z(t). \quad (5.15)$$

Dosazením za $\theta_1(t)$ do rovnice (5.10) a za $\theta_2(t)$ do rovnice (5.13) dostáváme

$$\frac{d}{dt}\theta(t) = \omega(t) \quad (5.16)$$

$$\frac{d}{dt}\omega(t) = \frac{k_1}{J} \left(\frac{k_1 k_p^2}{k_2 + k_1 k_p^2} - 1 \right) \theta(t) - \frac{b}{J} \omega(t) + \frac{K_t}{J} i(t) + \frac{k_1 k_2 k_p}{J(k_2 + k_1 k_p^2)} \theta_z(t) \quad (5.17)$$

$$\frac{d}{dt}i(t) = -\frac{K_e}{L} \omega(t) - \frac{R}{L} i(t) + \frac{1}{L} u(t) \quad (5.18)$$

$$\frac{d}{dt}\theta_z(t) = \omega_z(t) \quad (5.19)$$

$$\frac{d}{dt}\omega_z(t) = \frac{k_1 k_2 k_p}{J_z(k_2 + k_1 k_p^2)} \theta(t) + \frac{k_2}{J_z} \left(\frac{k_2}{k_2 + k_1 k_p^2} - 1 \right) \theta_z(t) - \frac{k_z}{J_z} \omega_z(t) \quad (5.20)$$

z kterých dostaneme stavovou realizaci

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \\ \theta_z(t) \\ \omega_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-k_2}{J k_p^2 \left(1 + \frac{k_2}{k_1 k_p^2}\right)} & -b/J & K_t/J & \frac{k_2}{J k_p \left(1 + \frac{k_2}{k_1 k_p^2}\right)} & 0 \\ 0 & -K_e/L & -R/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{J_z k_p \left(1 + \frac{k_2}{k_1 k_p^2}\right)} & 0 & 0 & \frac{-k_2}{J_z \left(1 + \frac{k_2}{k_1 k_p^2}\right)} & -k_z/J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \\ \theta_z(t) \\ \omega_z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad (5.21)$$

$$\begin{bmatrix} \theta(t) \\ i(t) \\ \theta_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \\ \theta_z(t) \\ \omega_z(t) \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

$$\begin{bmatrix} \theta(t_0) \\ \omega(t_0) \\ i(t_0) \\ \theta_z(t_0) \\ \omega_z(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \omega_0 \\ i_0 \\ \theta_{z0} \\ \omega_{z0} \end{bmatrix}, \quad (5.23)$$

kde θ_0 , ω_0 , i_0 , θ_{z0} a ω_{z0} jsou počáteční hodnoty úhlového natočení hřídele, úhlové rychlosti hřídele a elektrického proudu armaturou motoru, úhlového natočení zátěže a úhlové rychlosti zátěže.

Pro další účely budeme stavovou realizaci (5.21)–(5.23) podle konvence pro stavovou realizaci, tj.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (5.24)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (5.25)$$

kde $\mathbf{x}(t)$ je vektor stavu, $\mathbf{u}(t)$ je vstup, $\mathbf{y}(t)$ je výstup a $\mathbf{x}(t_0)$ je vektor počátečních podmínek stavu, označovat jako

$$\Sigma = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{o} \end{array} \right]. \quad (5.26)$$

Pro model motoru se zátěží přes pružný převod zavádíme značení stavové realizace

$$\Sigma_{\text{mz}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{\text{mz}} & \mathbf{B}_{\text{mz}} \\ \mathbf{C}_{\text{mz}} & \mathbf{o} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha/Jk_p^2 & -b/J & K_t/J & \alpha/Jk_p & 0 & 0 \\ 0 & -K_e/L & -R/L & 0 & 0 & 1/L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha/J_z k_p & 0 & 0 & -\alpha/J_z & -k_z/J_z & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

kde za účelem zjednodušení zápisu a zvětšení přehlednosti zavádíme konstantu

$$\alpha = \frac{k_2}{1 + \frac{k_2}{k_1 k_p^2}}. \quad (5.27)$$

Stavový vektor $\mathbf{x}(t)$ má dimenzi 5 a jeho prvky jsou:

úhlová poloha hřídele motoru $\theta(t)$

úhlová rychlost hřídele motoru $\omega(t)$

proud protékající armaturou rotoru $i(t)$

úhlová poloha zátěže $\theta_z(t)$

úhlová rychlost zátěže $\omega_z(t)$

Vstupní veličina $\mathbf{u}(t)$ je skalární a tvoří ji $u(t)$, napájecí napětí elektromotoru.

Výstupní vektor $\mathbf{y}(t)$ má dimenzi 3 a postupně ho tvoří úhlová poloha hřídele $\theta(t)$, proud rotorem $i(t)$ a úhlová poloha zátěže $\theta_z(t)$.

5.4 Základní schopnosti

Základní schopnosti dynamického systému zahrnují říditelnost a rekonstruovatelnost, např. [13], str. 55, str. 67. Bez dalšího noření do detailů se dá snadno ukázat, že stav modelu (5.21–5.23) je rekonstruovatelný a říditelný.

5.4.1 Řiditelnost

$$\mathbf{P} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^3\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^4\mathbf{B}] \quad (5.28)$$

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{cc|c|c|c} 0 & 0 & K_t/JL & & \\ 0 & K_t/JL & -(K_t b/J^2 + K_t R/JL)/L & & \\ 1/L & -R/L^2 & (R^2/L^2 - K_e K_t/JL)/L & \mathbf{P}_4 & \mathbf{P}_5 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{array} \right] \quad (5.29)$$

46

$$\mathbf{P}_4 = \left[\begin{array}{c} -(K_t b/J^2 + K_t R/JL)/L \\ \left(R(K_t b/J^2 + K_t R/JL)/L - K_t(\alpha/Jk_p^2 - b^2/J^2 + K_e K_t/JL)/J \right) / L \\ \left(K_t(K_e R/L^2 + K_e b/JL)/J - R(R^2/L^2 - K_e K_t/JL)/L \right) / L \\ 0 \\ K_t \alpha / J J_z L k_p \end{array} \right] \quad (5.30)$$

$$\mathbf{P}_5 = \left[\begin{array}{c} K_t(J^2 R^2 k_p^2 - \alpha J L^2 + J L R b k_p^2 - K_e K_t J L k_p^2 + L^2 b^2 k_p^2) / J^3 L^3 k_p^2 \\ -K_t(J^3 R^3 k_p^2 - \alpha J^2 L^2 R + J^2 L R^2 b k_p^2 - 2K_e K_t J^2 L R k_p^2 - 2\alpha J L^3 b + J L^2 R b^2 k_p^2 - 2K_e K_t J L^2 b k_p^2 + L^3 b^3 k_p^2) / J^4 L^4 k_p^2 \\ J^3 R^4 k_p^2 - 3J^2 K_e K_t L R^2 k_p^2 + J K_e^2 K_t^2 L^2 k_p^2 + \alpha J K_e K_t L^3 - 2J K_e K_t L^2 R b k_p^2 - K_e K_t L^3 b^2 k_p^2 / J^3 L^5 k_p^2 \\ K_t \alpha / J J_z L k_p \\ -K_t \alpha (J J_z R + J_z L b + J L k_z) / J^2 J_z^2 L^2 k_p \end{array} \right] \quad (5.31)$$

matice řiditelnosti \mathbf{P} má plnou hodnotu a tudíž je stavový vektor modelu motoru (5.21–5.23) řiditelný.

5.4.2 Rekonstruovatelnost

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \mathbf{CA}^3 \\ \mathbf{CA}^4 \\ \vdots \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_e/L & -R/L & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star \\ \hline \star & \star & \star & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \star & \star & \star & \star & \star \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

kde \star značí prvky matice rekonstruovatelnosti \mathbf{Q} , které již není třeba počítat, protože z (5.32) je patrné, že matice rekonstruovatelnosti má plnou hodnotu a tudíž je stavový vektor modelu motoru (5.21–5.23) rekonstruovatelný.

5.5 Normalizovaný model pro návrh RLDR

Ve snaze o zlepšení orientace mezi množstvím stavových realizací a modelů budeme zneužívat zavedené značení přenosové funkce popsané stavovou realizací. Na základě tohoto zneužití použijeme pro odkaz na konkrétní stavovou realizaci, tj. systém rovnic stavového popisu (4.14–4.15), konvenci pro odkaz na jeho přenosovou funkci, tj. (4.16).

Model ve formě stavové realizace (5.21–5.23) označíme

$$\Sigma_{\text{mz}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{\text{mz}} & \mathbf{B}_{\text{mz}} \\ \hline \mathbf{C}_{\text{mz}} & \mathbf{0} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha/Jk_p^2 & -b/J & K_t/J & \alpha/Jk_p & 0 & 0 \\ 0 & -K_e/L & -R/L & 0 & 0 & 1/L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha/J_z k_p & 0 & 0 & -\alpha/J_z & -k_z/J_z & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (5.33)$$

K modelu Σ_{mz} příslušný stavový vektor $\mathbf{x}(t)$ má dimenzi 5. Postupně ho tvoří tyto skalární veličiny: úhlová poloha hřídele $\theta(t)$, úhlová rychlost hřídele $\omega(t)$, elektrický proud rotorem $i(t)$, úhlová poloha zátěže $\theta_z(t)$, úhlová rychlost zátěže $\omega_z(t)$.

Vstupní veličina je skalární a tvoří ji $u(t)$, napájecí napětí elektromotoru. Výstupní vektor $\mathbf{y}(t)$ má dimenzi 3. Postupně ho tvoří úhlová poloha hřídele $\theta(t)$, proud rotorem $i(t)$, úhlová poloha zátěže $\theta_z(t)$.

5.5.1 RLDR dvou stavů (RLDR3)

Stavovou transformací ve formě permutace permutujeme sloupce výstupní matice. Popis (5.33) tak dostaneme do tvaru, který umožní postupné odebírání rovnic měření (rovnic výstupu stavového modelu) bez ztráty normalizovaného tvaru.

Model motoru (5.21–5.23) realizovaný jako stavový systém v normalizovaném tvaru:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega_z(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \\ \theta_z(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_z/J_z & 0 & 0 & -\alpha/J_z & \alpha/J_z k_p \\ 0 & -b/J & K_t/J & \alpha/J k_p & -\alpha/J k_p^2 \\ 0 & -K_e/L & -R/L & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_z(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \\ \theta_z(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (5.34)$$

$$\begin{bmatrix} i(t) \\ \theta_z(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_z(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \\ \theta_z(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_z(t_0) \\ \omega(t_0) \\ i(t_0) \\ \theta_z(t_0) \\ \theta(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{z0} \\ \omega_0 \\ i_0 \\ \theta_{z0} \\ \theta_0 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Označení modelu motoru (5.21–5.23) realizovaného stavovým systémem v normalizovaném tvaru (5.34–5.34):

$$\Sigma_{mz} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{mz} & \mathbf{B}_{mz} \\ \mathbf{C}_{mz} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (5.37)$$

Model (5.34–5.34) má 5 stavů a 3 výstupy. To znamená, že k němu příslušná RLDR bude popsána stavovým modelem se dvěma stavy: rekonstrukce úhlové rychlosti zátěže $\omega_z(t)$ dá rekonstruovanou úhlovou rychlost zátěže $\hat{\omega}_z(t)$, rekonstrukce úhlové rychlosti rotoru $\omega(t)$ dá rekonstruovanou úhlovou rychlost rotoru $\hat{\omega}(t)$.

Protože RLDR má v tomto specifickém případě 2 stavy, odkaz je na RLDR dvou stavů. Protože RLDR má v tomto případě vektor $y(t)$ dimenze 3, je odkaz na RLDR3. Značení vzniklo historicky z důvodů organizace práce.

5.5.2 RLDR tří stavů (RLDR2)

RLDR tří stavů (RLDR2) vznikne z RLDR dvou stavů (RLDR3) vynecháním měření elektrického proudu rotorem $i(t)$.

Model motoru (5.21–5.23) realizovaný jako stavový systém v normalizovaném tvaru s vynechaným měřením proudu rotorem:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega_z(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \\ \theta_z(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_z/J_z & 0 & 0 & -\alpha/J_z & \alpha/J_z k_p \\ 0 & -b/J & K_t/J & \alpha/J k_p & -\alpha/J k_p^2 \\ 0 & -K_e/L & -R/L & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_z(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \\ \theta_z(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (5.38)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_z(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_z(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \\ \theta_z(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_z(t_0) \\ \omega(t_0) \\ i(t_0) \\ \theta_z(t_0) \\ \theta(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{z0} \\ \omega_0 \\ i_0 \\ \theta_{z0} \\ \theta_0 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Označení modelu motoru (5.21–5.23) realizovaného stavovým systémem v normalizovaném tvaru (5.38–5.40):

$$\Sigma_{\theta\theta} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{mz} & \mathbf{B}_{mz} \\ \hline \mathbf{C}_{\theta\theta} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (5.41)$$

Protože RLDR má v tomto specifickém případě 3 stavy, odkaz je na RLDR tři stavů. Protože RLDR má v tomto případě vektor $y(t)$ dimenze 2, je odkaz na RLDR2. Značení vzniklo historicky z důvodů organizace práce.

5.5.3 RLDR čtyř stavů (RLDR1)

RLDR čtyř stavů (RLDR1) vznikne z RLDR dvou stavů (RLDR3) vynecháním měření elektrického proudu rotorem $i(t)$ a měření úhlové polohy zátěže $\omega_z(t)$.

Model motoru (5.21–5.23) realizovaný jako stavový systém v normalizovaném tvaru s vynechaným měřením proudu rotorem a vynechaným měřením úhlové polohy zátěže:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega_z(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \\ \theta_z(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_z/J_z & 0 & 0 & -\alpha/J_z & \alpha/J_z k_p \\ 0 & -b/J & K_t/J & \alpha/J k_p & -\alpha/J k_p^2 \\ 0 & -K_e/L & -R/L & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_z(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \\ \theta_z(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (5.42)$$

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_z(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \\ \theta_z(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_z(t_0) \\ \omega(t_0) \\ i(t_0) \\ \theta_z(t_0) \\ \theta(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{z0} \\ \omega_0 \\ i_0 \\ \theta_{z0} \\ \theta_0 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Označení modelu motoru (5.21–5.23) realizovaného stavovým systémem v normalizovaném tvaru (5.42–5.44):

$$\Sigma_\theta = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{mz} & \mathbf{B}_{mz} \\ \hline \mathbf{C}_\theta & \mathbf{o} \end{array} \right] \quad (5.45)$$

Protože RLDR má v tomto specifickém případě 4 stavy, odkaz je na RLDR čtyř stavů. Protože RLDR má v tomto případě vektor $y(t)$ dimenze 1, je odkaz na RLDR1. Značení vzniklo historicky z důvodů organizace práce.

5.6 Volba převodového poměru

Autory této podkapitoly jsou Jean-Charles Gille, Marc J. Pélegrin a Paul Decaulne (1956), profesori École Nationale Supérieure de l'Aéronautique, Paris [8]. Autory předmluvy k anglické verzi [8] (1959) jsou vedoucí M.I.T. Dept. Electrical Engineering a ředitel The Martin Company, dnes Lockheed Martin, na počátku Wright Martin Aircraft Corporation (Orville Wright, Glenn Luther Martin, 1916).

Problém setrvačnosti rotoru nebo optimální setrvačnosti zátěže, která má být plně přizpůsobena motoru, je příčinou mnoha chyb. Ty pocházejí do značné míry z nesprávných podmínek a předpokladů. Budeme uvažovat následující dva případy:

- (i) Zátěž se setrvačností a třením byla specifikovaná a z komerčně dostupných motorů je udělán výběr. Tím je dána setrvačnost motoru a problémem je vybrat optimální převodový poměr na základě správného kritéria.

- (ii) Bylo specifikováno samotné zatížení s tím, že motor a převody musí být navrženy. Přestože motor nelze oddělit od zátěže, je možné jej jako první přiblížení navrhnout tak, že se neberou v úvahu prvky, které mu předcházejí v dopředné dráze (které jsou s ním spjaté).

Případ nespecifikované setrvačnosti zátěže není zajímavý. Pokud je do určité míry možné upravit setrvačnost zátěže, je zřejmé, že tato setrvačnost by měla být minimální. Stejným způsobem lze ukázat, že nejlepší motor pro daný dostupný moment je ten, který má minimální setrvačnost.

Lze konstatovat, že setrvačnost je prokletím návrháře servosystémů, ať už se nachází kdekoli (pohonný prvek, převod, zátěž).

Nejprve navrhnout motor, zanedbat zatížení a poté upravit převodový poměr není přijatelné. Převodový poměr je nutné zavést do celkového systému motoru, redukce, zátěže, atd.

Nejprve budeme uvažovat velmi jednoduchý případ, ve kterém je znám moment setrvačnosti motoru J_m , jeho točivý moment C_m a moment setrvačnosti zátěže J_c . Zavedením polohy výstupního hřídele θ_r a převodového poměru α můžeme psát následující rovnice:

$$\alpha = \frac{\theta_m}{\theta_r} \quad \frac{d^2}{dt^2}\theta_r = \frac{C_m}{J_m\alpha + J_c/\alpha} \quad (5.46)$$

Zrychlení zatížení je proto maximální pro $\alpha = \sqrt{J_c/J_m}$, přičemž toto maximum je

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_r\right)_{\max} = \frac{C_m}{2\sqrt{J_m J_c}} \quad (5.47)$$

Protože takto stanovený převodový poměr redukce je nezávislý na dodávaném točivém momentu, toto přizpůsobení je platné pro jakýkoli motor bez ohledu na tvar jeho charakteristiky točivého momentu na rychlosti. To však neznamená, že pro daný moment setrvačnosti zátěže J_c bude optimální jakákoli kombinace J_m a převodového poměru α zvoleného tak, aby setrvačnost zátěže vztažená na hnací hřídel byla rovna setrvačnosti motoru. Ve skutečnosti mohou nastat dva případy:

- a) Je předpokládáno, že je stanoven moment setrvačnosti J_c . Definováním

$$\beta = \frac{J_m}{J_c} \quad (5.48)$$

můžeme psát zrychlení ve tvaru

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta_r = \frac{1}{\alpha\beta + 1/\alpha}\gamma_2, \quad (5.49)$$

kde γ_2 je úhlové zrychlení samotné zátěže poháněné motorem s momentem C_m , ($\gamma_2 = C_m/J_c$).

Skutečná akcelerace je maximální, když $\alpha = 1/\sqrt{\beta}$. Přičemž hodnota maxima je

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_r\right)_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{\beta}}\gamma_2 \quad (5.50)$$

Geometrické místo bodů maxima je úsečkou.

Tudíž platí, že čím menší je β (tj. menší setrvačnost rotoru), tím větší úhlové zrychlení.

- b) Moment setrvačnosti J_m je určen. Definováním $\beta' = J_c/J_m$ můžeme vyjádřit zrychlení výstupní hřídele jako

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta_r = \frac{1}{\alpha + \beta'/\alpha}\gamma_1, \quad (5.51)$$

kde γ_1 je zrychlení samotného motoru, když je na něj aplikován moment C_m ($\gamma_1 = C_m/J_m$). Akcelerace je maximální, když $\alpha = \sqrt{\beta'}$. Přičemž hodnota maxima je

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_r\right)_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{\beta'}}\gamma_1 \quad (5.52)$$

Geometrické místo bodů maxima tvoří hyperbola. Parabola definovaná rovnicí

$$\alpha = \sqrt{\beta'} \quad (5.53)$$

vztahuje hodnoty α k libovolné dané hodnotě β' . Čím menší je β' (tj. čím menší je setrvačnost zátěže), tím větší je zrychlení.

Závěrem lze říci, že pro obvyklý případ zátěže se specifikovaným momentem setrvačnosti J_c je třeba motor dávající maximální zrychlení zvolit tak, aby $C_m/\sqrt{J_m}$ bylo maximum. Při volbě převodového poměru je však třeba vzít v úvahu i další vlastnosti, jako je kolísání točivého momentu při nízkých otáčkách a maximální rychlost motoru. Může se stát, že takto vypočítaná optimální hodnota není proveditelná. Příkladem je servomotor autopilota pohánějícího výškové kormidlo letadla. Moment setrvačnosti ovládací plochy je brán jako 5 000 g cm². Z mnoha důvodů, zejména z důvodu bezpečnosti, je rychlost posuvu výškového kormidla omezena na 90°/s. Kromě toho je servomotor umístěn hned za ovládací plochou kvůli eliminaci nežádoucích vlivů pružnosti a vůlí řídicích tyčí. Malé místo, které je k dispozici, tak vede k malému motoru s rychlou úhlovou rychlostí. Obvykle se volí motory s maximální rychlostí 6 000 ot/min, což vede na redukční převodový poměr 400 : 1.

Je také nutno podotknout, že zvětšování momentu setrvačnosti výškového kormidla letadla kvůli dosažení „optimálního sladění“ by bylo absurdní.

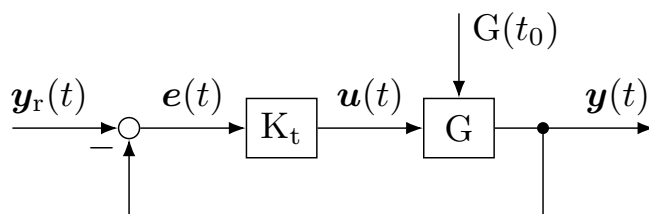
Kapitola 6

Syntéza servosystémů

Servosystém slouží k sledování žádané hodnoty výstupní veličiny. V našem případě se jedná o servosystém úhlového polohování (natočení) hřídele stejnosměrného motoru nebo úhlového polohování zátěže otáčené takovýmto motorem, připojeným k zátěži přes pružnou převodovku.

6.1 Struktura

Servosystém navrhujeme za účelem sledování žádané hodnoty výstupní veličiny. Jeho zapojení je znázorněno na obr. 6.1, kde G a K_t jsou symboly označující systém a kom-



Obr. 6.1: Servosystém.

penzátor, $\mathbf{y}_r(t)$ je vektor žádané hodnoty výstupní proměnné (žádaná hodnota), $\mathbf{u}(t)$ je vektor vstupní proměnné (vstup), $\mathbf{y}(t)$ je vektor výstupní proměnné (výstup), $\mathbf{e}(t)$ je vektor regulační odchylky (odchylka). Dimenze vstupu a výstupu budeme značit jako m a p , jak je zvykem v literatuře. Symbol $G(t_0)$ znázorňuje neznámé, ale konkrétní počáteční podmínky systému v čase $t = t_0$. V našem případě to jsou neznámé počáteční podmínky stavové realizace s LDR nebo RLDR, jak jsou znázorněny v podkapitole 1.3, např. na obr. 1.6.

Dimenze žádané hodnoty a regulační odchylky, jak je patrné z obr. 6.1, jsou totožné s dimenzí výstupu. Protože zpětná vazba v daném zapojení má zesílení rovné jednotkové matici, zapojení na obr. 6.1 se často říká regulační obvod s jednotkovou zpětnou vazbou, *Unity Feedback System*.

Praktická hodnota servosystémů je v oblasti aplikací zabývajících se problematikou řízení na větší vzdálenost a/nebo řízení, kde pro přenastavování hodnoty výstupu

pomocí uvažovaného řídicího obvodu potřebujeme vynaložit podstatně menší výkon než bychom museli vynaložit přímým řízením systému. Dokážeme si ale představit i aplikace, kde pro nastavování žádané hodnoty budeme potřebovat podstatně větší výkon, např. prostředek pro polohování mikromechanického systému lidskou rukou.

6.2 Princip vnitřního modelu

Asymptotické sledování žádané hodnoty může nastat jen když sériové spojení systému a kompenzátoru je schopno generovat výstup $\mathbf{y}(t)$ takový, aby se tento výstup $\mathbf{y}(t)$ asymptoticky blížil žádané hodnotě $\mathbf{y}_r(t)$. Regulační odchylka $\mathbf{e}(t)$ pak bude asymptoticky stabilní, $\mathbf{e}(\infty) = \mathbf{0}$. Celá odchylka $\mathbf{e}(t)$ se vrátí pokud možno co nejrychleji do nuly, tj. $\mathbf{e}(\infty) = \mathbf{0}$ s ohledem na fakt, že pro technické účely *dostatečně blízko je dostatečně dobře*, a to bez zbytečných oscilací.

Cílem aplikace principu vnitřního modelu je tedy nalézt kompenzátor K_t takový, aby regulační odchylka $\mathbf{e}(t)$ byla asymptoticky stabilní.

V literatuře se princip vyskytuje jako *Prinzip der inneren Modellierung, Internal Model Principle*. Má široké uplatnění, např. [11] str. 128, nebo [11] str. 157. Asymptotické odstranění vlivu deterministického poruchového signálu, který dokážeme modelovat, je možné interpretovat jako sledování poruchového signálu za účelem jeho asymptotického odečtení, např. [11].

Následující příklad vhodně ilustruje problematiku vnitřního modelu. Můžeme ho najít v [13], kde je i částečně vypracován. Použitý model motoru a k němu příslušný servomechanismus polohy je popsán a simulován v [12]. Příklad ukazuje, kdy není třeba zavádět tzv. integrální řízení.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varkappa \end{bmatrix} u(t), \quad (6.1)$$

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

$$\begin{bmatrix} \theta(t_0) \\ \omega(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Předpokládejme, že je třeba převést úhlovou polohu $\theta(t)$ do polohy $\theta(\infty) = \theta_{10}$.

To je možné posunutím počátku souřadnic stavového prostoru. Tímto posunutím převedeme problém servosystému na problém regulátoru.

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}(t) \\ \bar{\omega}(t) \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \theta(t) - \theta_{10} \\ \omega(t) \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

takže

$$\begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\theta}(t) + \theta_{10} \\ \bar{\omega}(t) \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Dosazením do (6.1–6.3) do stáváme

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{\theta}(t) + \theta_{10} \\ \bar{\omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}(t) + \theta_{10} \\ \bar{\omega}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varkappa \end{bmatrix} u(t), \quad (6.6)$$

$$\bar{\theta}(t) + \theta_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}(t) + \theta_{10} \\ \bar{\omega}(t) \end{bmatrix}, \quad (6.7)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}(t_0) \\ \bar{\omega}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(t_0) - \theta_{10} \\ \omega(t_0) \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{\theta}(t) \\ \bar{\omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}(t) \\ \bar{\omega}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{10} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varkappa \end{bmatrix} u(t), \quad (6.9)$$

$$\bar{\theta}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}(t) \\ \bar{\omega}(t) \end{bmatrix}, \quad (6.10)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}(t_0) \\ \bar{\omega}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0 - \theta_{10} \\ \omega_0 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{\theta}(t) \\ \bar{\omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}(t) \\ \bar{\omega}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varkappa \end{bmatrix} u(t), \quad (6.12)$$

$$\bar{\theta}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}(t) \\ \bar{\omega}(t) \end{bmatrix}, \quad (6.13)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}(t_0) \\ \bar{\omega}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0 - \theta_{10} \\ \omega_0 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Realizace (6.1–6.3) a (6.12–6.14) popisují týž problém. Regulátor pro model (6.12–6.14) dostane model (6.12–6.14) do stavu

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}(\infty) \\ \bar{\omega}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(\infty) - \theta_{10} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

To je ekvivalentní tomu, že regulátor pro model (6.1–6.3) dostane model (6.1–6.3) do stavu

$$\begin{bmatrix} \theta(\infty) \\ \omega(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\theta}(\infty) + \theta_{10} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{10} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

Z definice ale $\begin{bmatrix} \theta(\infty) \\ \omega(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{10} \\ 0 \end{bmatrix}$ není problémem regulátoru, ale problémem sledování na žádanou hodnotu $\theta_r(t) = \theta_{10}\mathbf{1}(t)$.

Ke stavové realizaci předmětného regulátoru je třeba mít přístup ke stavu, protože zákon řízení bude ve tvaru stavové zpětné vazby

$$u(t) = -k_1(\theta(t) - \theta_{10}) - k_2\omega(t), \quad (6.17)$$

kde

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

je zesílení zpětné vazby.

6.3 Servosystém v roli regulátoru

Příklad návrhu servosystému úhlové polohy (6.1–6.18) popisuje interpretaci servosystému jako regulátoru. Daná interpretace je možná díky schopnosti použitého modelu (6.1–6.3) generovat skok úhlové polohy. Protože modely v kapitolách 4 a 5, tj. třístavový model motoru a pětistavový model se zátěží připojenou k motoru pružnou převodovkou, tuto schopnost nemají, je třeba použít princip vnitřního modelu a tuto vlastnost vytvořit.

Postupem vytvoření schopnosti generovat skok úhlové polohy podle principu vnitřního modelu se rozšíří základní model způsobem ukázaným např. v práci [12]. Základní model se rozšíří (augmentuje) na augmentovaný model, který neslouží k popisu systému, ale k návrhu regulátoru. Augmentovaný model umožňuje reinterpretovat návrh servosystému jako návrh regulátoru pro augmentovaný model.

Výše uvedený postup je v literatuře a prostředí MATLABTM znám jako integrální řízení a historicky pochází z dob, kdy se řízení navrhovalo více na základě praxe a intuice než matematiky.

Na obr. 6.2–6.4 jsou hrubá bloková schémata servosystémů navrhovaných v této práci. Zesílení k_1 , k_2 na jednotlivých obrázcích nereprezentují tytéž kvantify a schémata jsou pro obecný případ, kdy není třeba integrálního řízení, protože model soustavy dokáže generovat skok úhlové polohy.

V případě integrálního řízení je třeba místo odchylky $e(t) = \theta_r(t) - \theta(t)$ před zesílení příslušné zpětné vazby zapojit integrátor $e(t)$. Ten se projeví přidáním rovnice augmentovaného stavu

$$\dot{\xi}(t) = \theta_r(t) - \theta(t), \quad (6.19)$$

$$\xi(t_0) = \xi_0 \quad (6.20)$$

k rovnicím modelu systému motoru, resp. modelu motoru se zátěží. Tím dostáváme čtyřstavový augmentovaný model pro motor a šestistavový model pro motor se zátěží připojenou k motoru pružnou převodovkou.

Interpretace je přidání integrátoru s přenosovou funkcí Σ_i , stavově popsanou

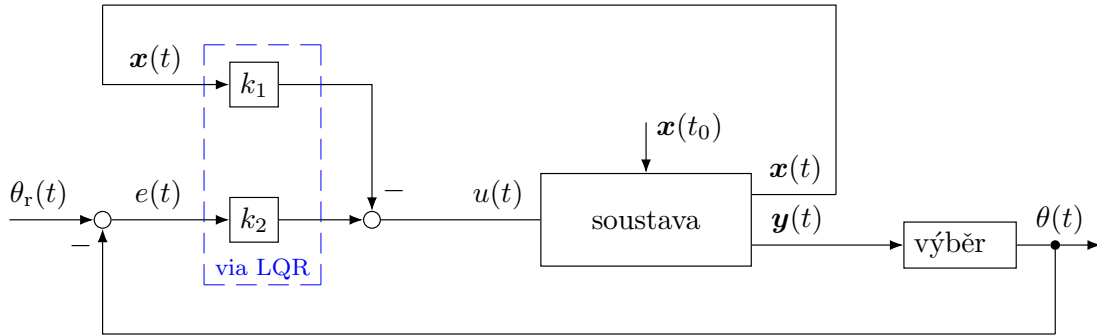
$$\dot{\xi}(t) = 0\xi(t) + e(t), \quad (6.21)$$

$$\xi(t) = 1\xi(t), \quad (6.22)$$

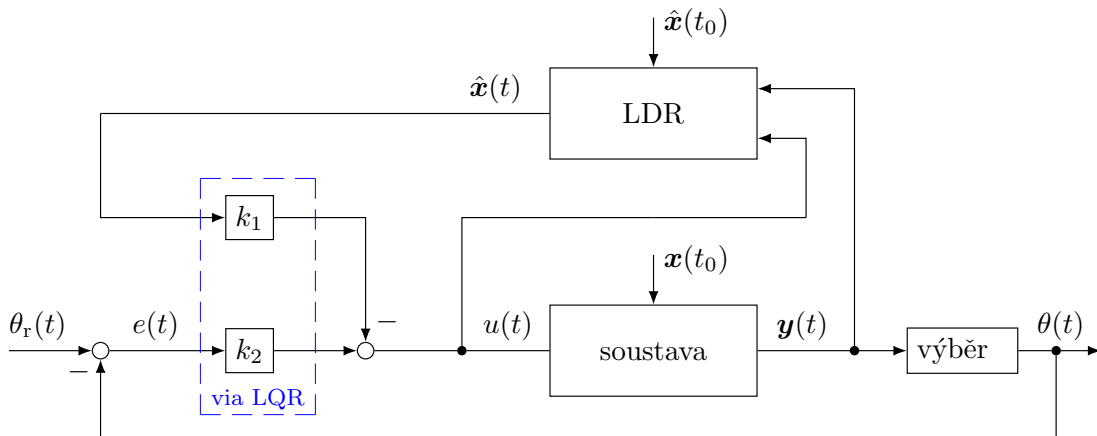
$$\xi(t_0) = \xi_0. \quad (6.23)$$

Přenosová funkce popsaná stavovou realizací (6.21–6.22) je:

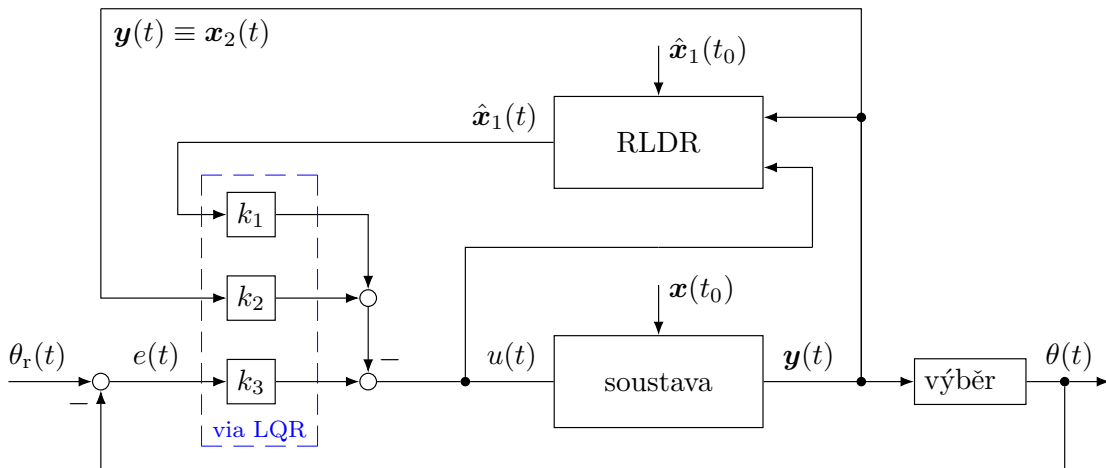
$$\Sigma_i(s) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right] = \frac{1}{s} \quad (6.24)$$



Obr. 6.2: Servosystém se zpětnou vazbou od stavu.



Obr. 6.3: Servosystém se zpětnou vazbou od rekonstruovaného stavu LDR.



Obr. 6.4: Servosystém se zpětnou vazbou od rekonstruovaného stavu RLDR.

6.4 Konkrétní jednoduchý příklad

Složitější návrhy jsou prezentovány pouze formou jejich výsledků, které jsou dokumentovány v kapitolách 7 a 8. Proč by se v technické praxi neměl servosystém navrhovat pouze pro motor, přístupně vysvětluje podkapitola 5.6, která je převzata od profesorů École Nationale Supérieure de l'Aéronautique, Paris [8].

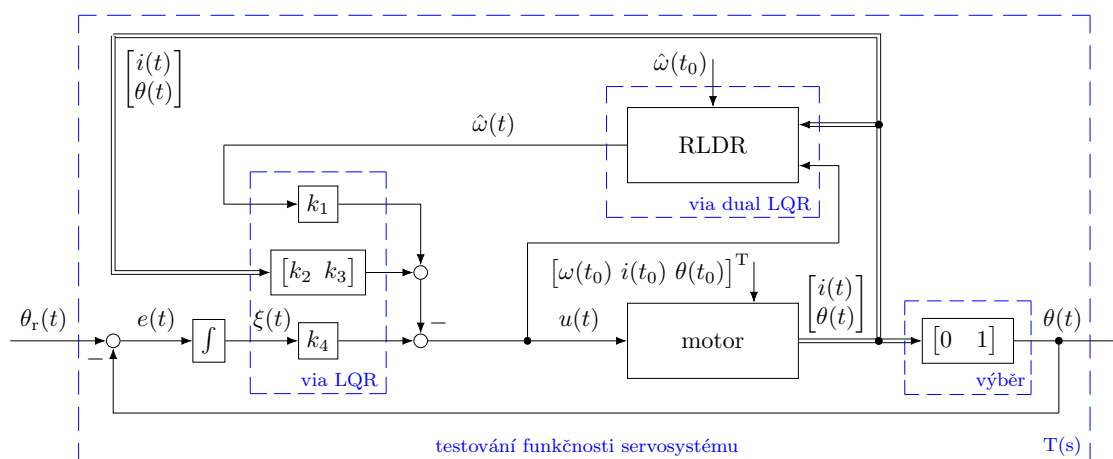
Důvody popisu návrhu servosystému pro motor a redukovaný pozorovatel úhlové rychlosti $\omega(t)$ jsou prostor, čas a peníze. Augmentovaný stavový model motoru se zátěží přes pružnou převodovku může mít šest až sedm stavů a k němu odpovídající LDR dalších pět stavů.

Konkrétní jednoduchý příklad je pro motor modelovaný stavovou realizací

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b/J & K_t/J \\ 0 & -K_e/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u(t), \quad \begin{bmatrix} \theta(t_0) \\ \omega(t_0) \\ i(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \omega_0 \\ i_0 \end{bmatrix}, \quad (6.25)$$

$$\begin{bmatrix} \theta(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \end{bmatrix}. \quad (6.26)$$

Model (6.25–6.26) je použitý pro návrh servosystému úhlové polohy $\theta(t)/\theta_r(t)$ zobrazený na obr. 6.5



Obr. 6.5: Servosystém pro model $\bar{\Sigma}_m$ a $\hat{\omega}(t)$ via RLDR.

Předmětem návrhu jsou zejména jednotlivá skalární zesílení k_1 , k_2 , k_3 , k_4 a redukovaný Luenbergerův pozorovatel (RLDR) v podobě stacionárního Kalmanova filtru.

Pro potřeby návrhu RLDR je nejprve třeba stavovou transformací permutovat prvky stavového vektoru tak, aby matice měření nabyla tvar $[0 \ I]$. Pro naše účely se na takový tvar modelu odkazujeme jako na normalizovaný model.

Normalizovaný model motoru je popsán jako

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b/J & K_t/J & 0 \\ -K_e/L & -R/L & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad (6.27)$$

$$\begin{bmatrix} i(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}, \quad (6.28)$$

$$\begin{bmatrix} \omega(t_0) \\ i(t_0) \\ \theta(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ i_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

Normalizovaný model (6.27–6.29) slouží k organizačním účelům, mj. ujasňuje, které prvky vektoru stavu získáme přímo z výstupu $y(t)$ a které je nezbytné dynamicky rekonstruovat. Dynamická rekonstrukce začíná v čase t_0 , který je i časem, kdy začínají účinkovat počáteční podmínky stavového modelu, $\omega(t_0)$, $i(t_0)$, $\theta(t_0)$, $\xi(t_0)$ a počáteční podmínka modelu redukovaného pozorovatele $\hat{\omega}(t_0)$. Všech pět počátečních podmínek neznáme.

K návrhu zesílení $\mathbf{F} = [f_1 \ f_2]$ redukovaného Luenbergerova pozorovatele využijeme stejný postup jako k návrhu zesílení k_1, k_2, k_3, k_4 . Tento postup budeme ale aplikovat na jiný systém. Tento jiný systém je dán dualitou mezi říditelností a rekonstruovatelností. Dualita mezi říditelností a rekonstruovatelností se přenáší do duality mezi návrhem regulátoru a návrhem rekonstrukce stavu a do duality mezi vlastnostmi spojenými s úlohou o regulátoru a vlastnostmi spojenými s úlohou o rekonstrukci stavu [9], [11], [13].

Augmentovaný model vznikne z normalizovaného modelu (6.27–6.29) rozšířením, tj. augmentací neboli připojením dalšího stavu. Augmentovaný model je ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \\ \theta(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b/J & K_t/J & 0 & 0 \\ -K_e/L & -R/L & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \\ \theta(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \theta_r(t), \quad (6.30)$$

$$\begin{bmatrix} i(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \\ \theta(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}. \quad (6.31)$$

Augmentovaný model nemodeluje motor, ale motor v rámci zapojení na obr. 6.5. Účelem augmentovaného systému je převést úlohu o servosystému na úlohu o regulátoru a tím umožnit, abychom úlohu o servosystému mohli řešit jako úlohu o regulátoru.

Kvalita stabilizace a přechodového děje uvnitř i vně zpětnovazebního systému na obr. 6.5 je zajištěna lineárním kvadratickým regulátorem (LQR) [11], [13].

Návrh zesílení k_1, k_2, k_3, k_4 a f_1, f_2 je možné interpretovat stochasticky, jako návrh stacionárního stochastického regulátoru a stacionárního stochastického Luenberge-rova pozorovatele – stacionárního Kalmanova filtru [10], [13]. Taková interpretace je užitečná, protože umožňuje nahlížet na servosystém jako na řídicí systém, který není buzen jen souborem počátečních podmínek a po jejich odeznění setrvává v klidu, tj. motor se přestane točit, ale jako na řídicí systém buzený souborem počátečních podmínek a stochastickým šumem [13]. Podstata návrhu se však nijak nemění a při obou interpretacích je podstata návrhu založena na vhodné volbě konstantních váhových matic v kritériu, které odráží energetické poměry v servosystému [13].

Kvalita servosystému se měří zejména šířkou pásma frekvencí, na kterých servosys-tém uspokojivě pracuje. Pro zjištění šířky pásma se použije přenosová funkce mezi vstupem a výstupem servosystému jako uzavřené regulační smyčky. Tato funkce se v literatuře značí jako $T(s)$ a je tak označena i na obr. 6.5. Informativní článek o podstatě návrhu kvalitních servosystémů napsal Gunter Stein (2003) [16] na základě své přednášky po obdržení Bode Lecture Award 1989. S udělením této prestižní ceny se totiž pojí povinnost přednášky. Protože přednáška dr. Steina byla vzpomínaná a ceněná, vyšel článek (2003) [16], který komentářem opatřil Karl Johan Åström. Bode Lecture Award je na počest otce-zakladatele metody asymptotických charak-teristik, která je známá jako Bode Diagram [2]. Hendrik Wade Bode (1905–1982) byl americký inženýr s nizozemskými kořeny. Článek [16] se zabývá mj. Černobylem (1986) a havárií přistávání prototypu SAAB JAS-39 Gripen v únoru 1989. Pozdějším vyšetřováním se ukázalo, že havárie nastala díky nestabilním oscilacím zahrnujícím satureované akční členy řízení (unstable oscillations involving actuator saturations). Zákony řízení byly přepracovány, ale v roce 1993 Gripen havaroval z podobných důvodů znovu [16].

Kapitola 7

Simulace bez zátěže

Simulace servosystémů se stejnosměrným motorem bez zátěže slouží k ilustrování některých typických kroků návrhu takových servosystémů. Model servomotoru je na jedné straně dostatečně jednoduchý, na druhé straně vhodně reprezentuje složitější modely. Návrh příslušného servosystému si ponechává některé charakteristické rysy složitějších servosystémů se složitějšími modely.

Proč by se v technické praxi neměl servosystém navrhovat pouze pro servomotor, přístupně vysvětluje závěrečná část Kapitoly 5, která je převzata z klasické knihy profesorů École Nationale Supérieure de l'Aéronautique, Paris [8].

Návrh zákona řízení používá balík programů Control System Toolbox [17]. Makro $[K, S, E] = \text{lqr}(A, B, Q, R)$ je použito pro výpočet zesílení v úloze o regulátoru, která je vhodně přeformulovanou úlohou o servosystému.

Výstupní parametry $[K, S, E] = \text{lqr}(A, B, Q, R)$ jsou $[K, S, E]$, kde K je zesílení stavové zpětné vazby, S je řešení příslušné ARE (algebraické Riccati rovnice), E jsou vlastní čísla matice systému po uzavření smyčky stavové zpětné vazby vyřešením úlohy o regulátoru.

Vstupní parametry $[K, S, E] = \text{lqr}(A, B, Q, R)$ jsou (A, B, Q, R) , kde A je matice systému a B je matice řízení ve stavové rovnici, která je součástí stavového modelu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (7.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \quad (7.2)$$

Q a R jsou váhové matice v kvadratickém kritériu

$$J(x(t_0), u(t)) = \int_{t_0}^{\infty} [\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)] dt. \quad (7.3)$$

Řešení úlohy o regulátoru spočívá v minimalizaci (7.3) vzhledem k omezující podmínce (7.1–7.2).

Ze tvaru kritéria (7.3) je vidět, že váhová matice \mathbf{Q} váží energii stavové proměnné $x(t)$ a váhová matice \mathbf{R} váží energii vstupní proměnné $u(t)$. Kritérium je tedy typově vhodné pro řešení problémů saturace akčních členů. Takové problémy v letech 1989 a 1993 vedly ke ztrátám stíhaček JAS-39 Gripen [16].

Úloha o regulátoru minimalizuje hodnotu kvadratického kritéria (7.3) vzhledem k omezení, že $\mathbf{x}(t)$ splňující (7.3) je jednoznačným řešením stavové rovnice $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$ z libovolné ale pevně dané počáteční podmínky $\mathbf{x}(t_0)$.

Simulace budeme provádět pro kartáčový stejnosměrný servomotor s permanentními magnety. Parametry tohoto motoru jsou uvedeny přílohou v tabulce P.1.

Návrh pozorovatelů stavu používá balík programů Control System Toolbox [17]. Makro $[K, S, E] = \text{lqr}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$ je použito pro výpočet zesílení v úloze o regulátoru, která je vhodně přeformulovanou úlohou o pozorovateli stavu. Alternativně je možné použít makro $[L, P, E] = \text{lqe}(\mathbf{A}, \mathbf{G}, \mathbf{C}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{N})$, které je triviální spinoff makra $[K, S, E] = \text{lqr}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$ a proto ho nebudeme popisovat.

Návrh pozorovatelů stavu provedeme pro LDR a několik variant RLDR. Pro model (4.32–4.34) navrhne RLDR2. Pro model vzniklý vynecháním jedné rovnice měření (vynechání výstupní rovnice pro modelování proudu rotorem) v modelu (4.32–4.34) navrhne RLDR1.

Universální použití $[K, S, E] = \text{lqr}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$ plyne z duality říditelnosti a rekonstruovatelnosti. Dualita mezi říditelností a rekonstruovatelností se přenáší do duality mezi návrhem regulátoru a návrhem rekonstrukce stavu a do duality mezi vlastnostmi spojenými s úlohou o regulátoru a vlastnostmi spojenými s úlohou o rekonstrukci stavu [9], [11], [13].

Implementace návrhu servosystému úhlové polohy hřídele stejnosměrného motoru i simulace tohoto systému jsou provedeny v profesionálním prostředí od korporace The MathWorks, Inc., U.S.A.

7.1 Motor

Normalizovaný model motoru je:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b/J & K_t/J & 0 \\ -K_e/L & -R/L & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad (7.4)$$

$$\begin{bmatrix} i(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}, \quad (7.5)$$

$$\begin{bmatrix} \omega(t_0) \\ i(t_0) \\ \theta(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ i_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix}. \quad (7.6)$$

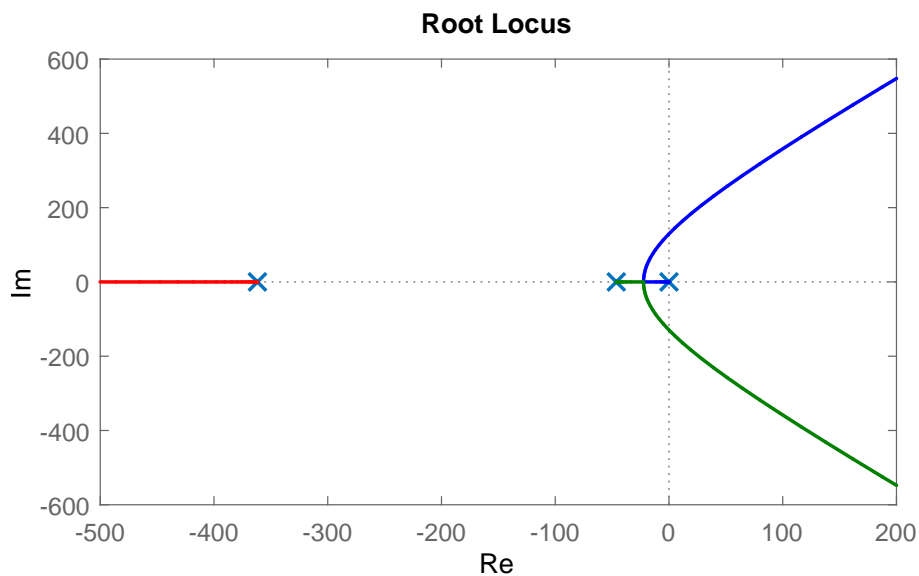
$$\Sigma_m = \left[\begin{array}{ccc|c} -b/J & K_t/J & 0 & 0 \\ -K_e/L & -R/L & 0 & 1/L \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right], \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

Augmentovaný normalizovaný model motoru je:

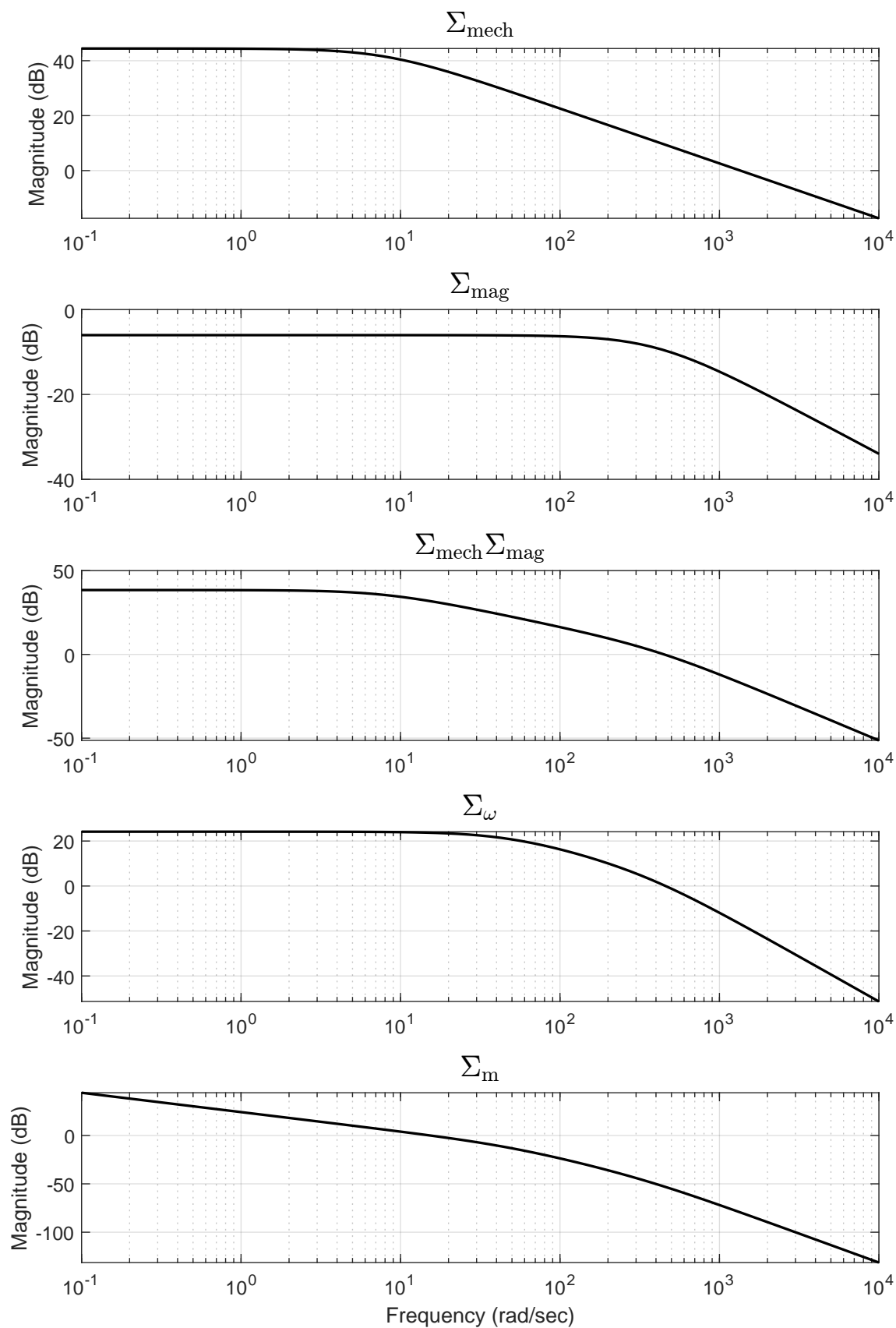
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \\ \theta(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b/J & K_t/J & 0 & 0 \\ -K_e/L & -R/L & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \\ \theta(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \theta_r(t), \quad (7.8)$$

$$\begin{bmatrix} i(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \\ \theta(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}. \quad (7.9)$$

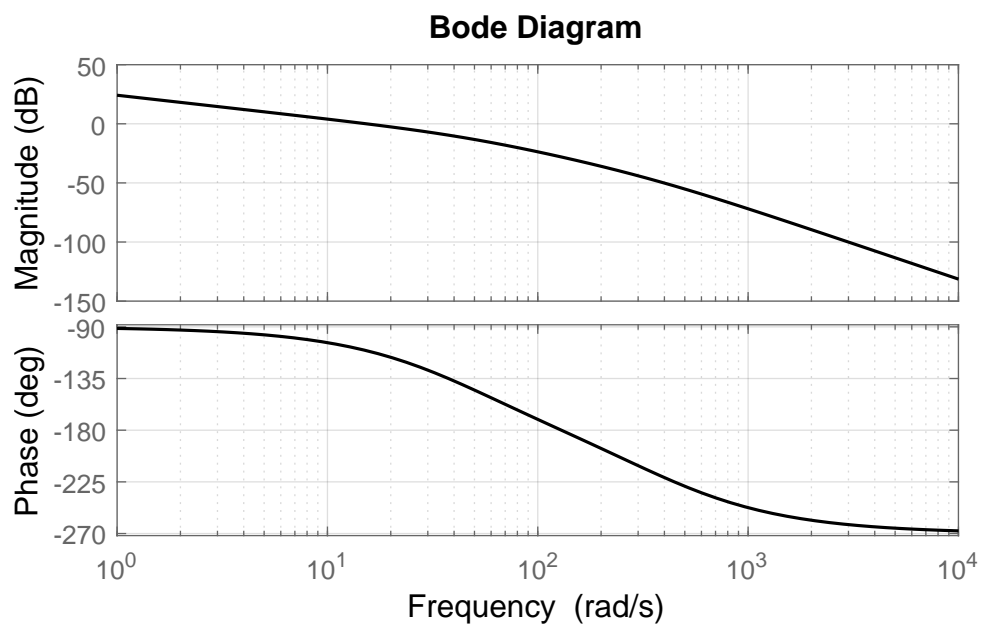
$$\Sigma_{ma} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_a & \mathbf{B}_a \\ \hline \mathbf{C}_a & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (7.10)$$



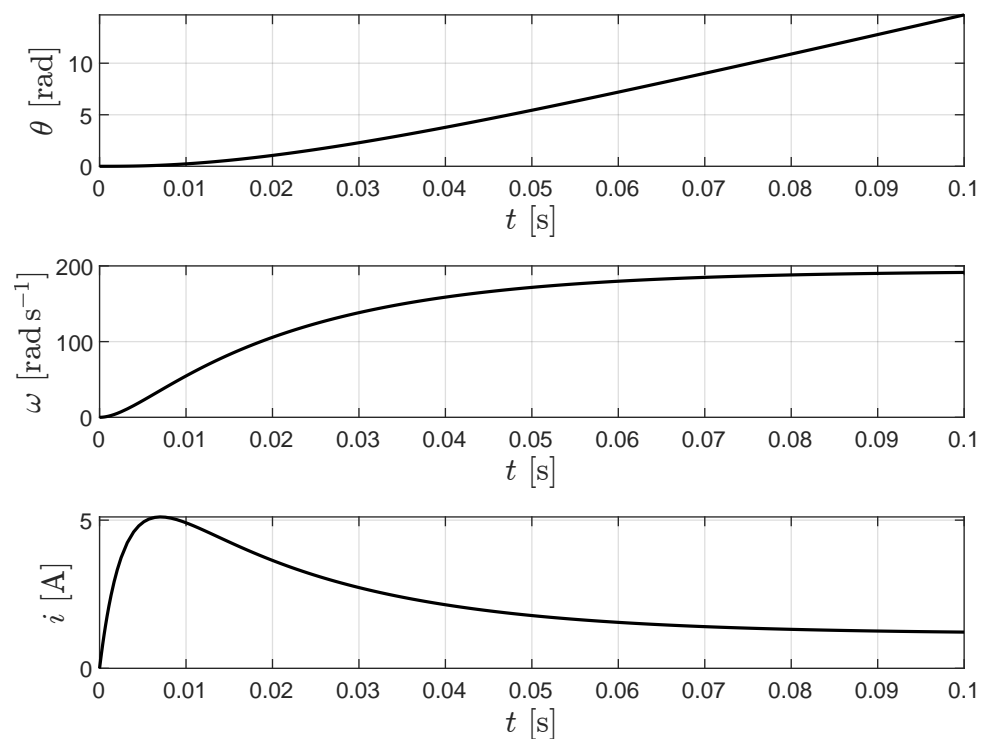
Obr. 7.1: Motor: geometrické místo pólů modelu Σ_m .



Obr. 7.2: Frekvenční odezva subsystémů modelů motoru z obr. 4.6.

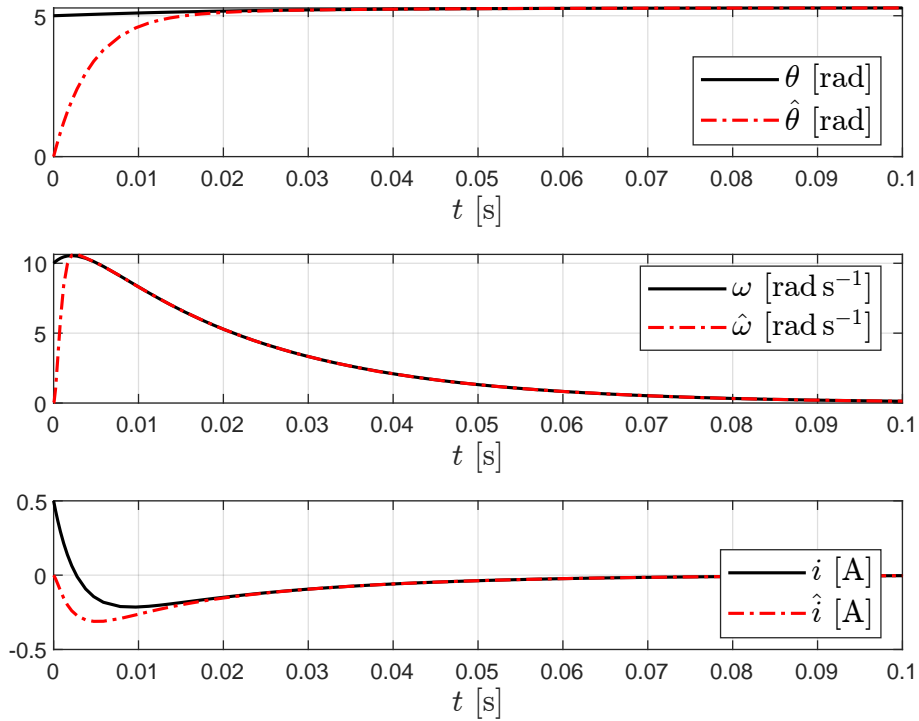


Obr. 7.3: Motor: frekvenční odezvy modelu Σ_m .

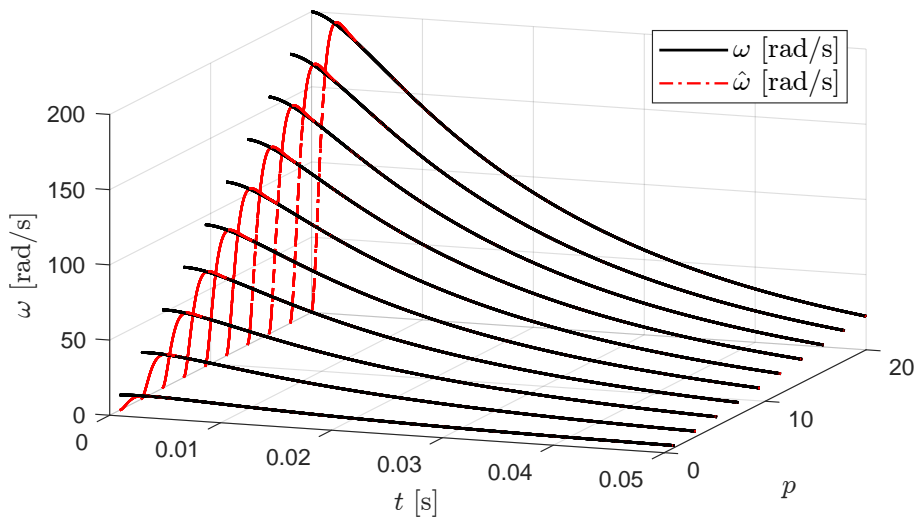


Obr. 7.4: Motor: odezva modelu Σ_m na skok vstupního napětí 12 V.

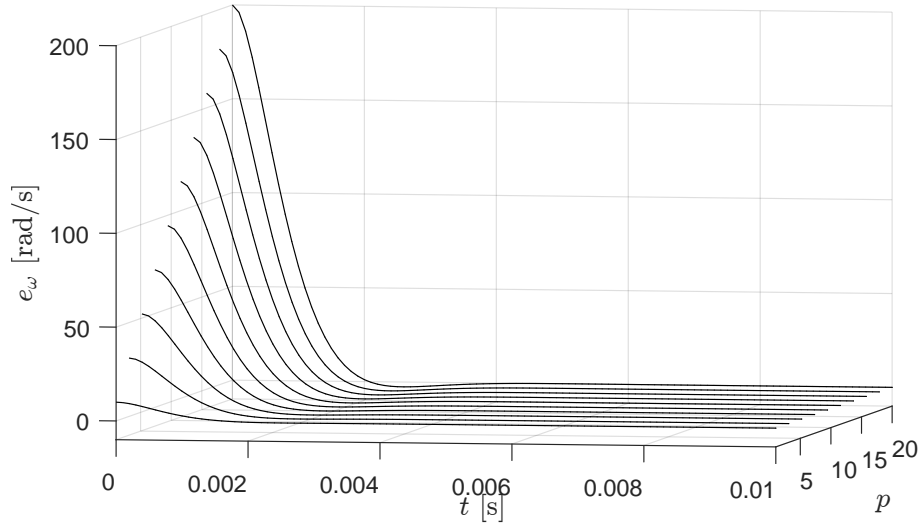
7.2 LDR



Obr. 7.5: Motor: odezva modelu Σ_m na počáteční podmínky, odezva LDR(Σ_m) na počáteční podmínky.



Obr. 7.6: Motor: rekonstruovaná úhlová rychlost $\omega(t)$ pro model Σ_m a různé počáteční podmínky. LDR(Σ_m) na bázi Kalmanova filtru.



Obr. 7.7: Motor: chyba rekonstrukce úhlové rychlosti $\omega(t)$ pro model Σ_m a různé počáteční podmínky. LDR(Σ_m) na bázi Kalmanova filtru.

7.3 RLDR1

Pro normalizovaný model motoru bez zátěže

$$\bar{\Sigma}_m = \left[\begin{array}{ccc|c} -b/J & K_t/J & 0 & 0 \\ -K_e/L & -R/L & 0 & 1/L \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right], \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

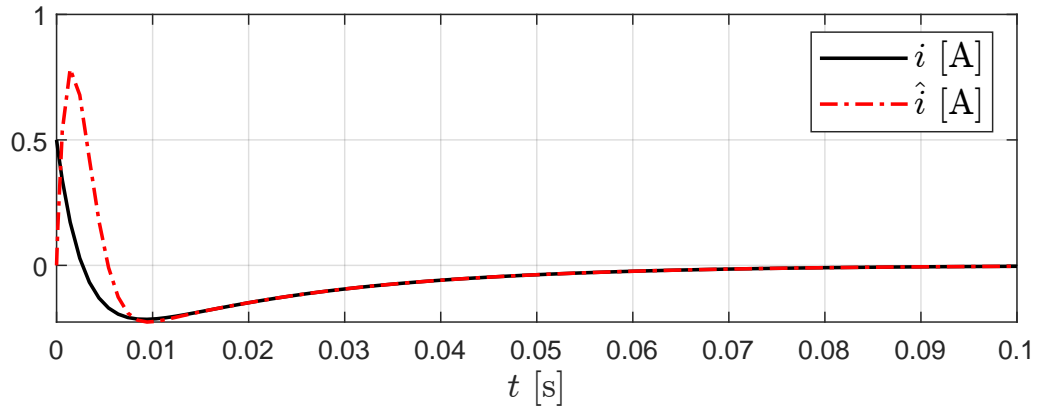
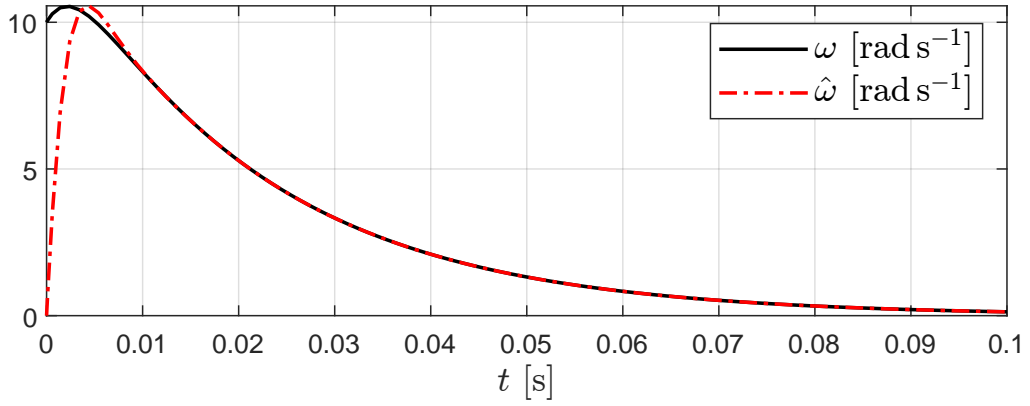
umožňuje RLDR asymptoticky rekonstruovat $\omega(t)$ a $i(t)$, úhlovou rychlost hřídele a proud kotvou. Rekonstruovaná úhlová rychlost hřídele a rekonstruovaný proud kotvou jsou $\hat{\omega}(t)$ a $\hat{i}(t)$. Průběhy $\omega(t)$, $\hat{\omega}(t)$ a $i(t)$, $\hat{i}(t)$ jsou na obr. 7.8.

7.4 RLDR2

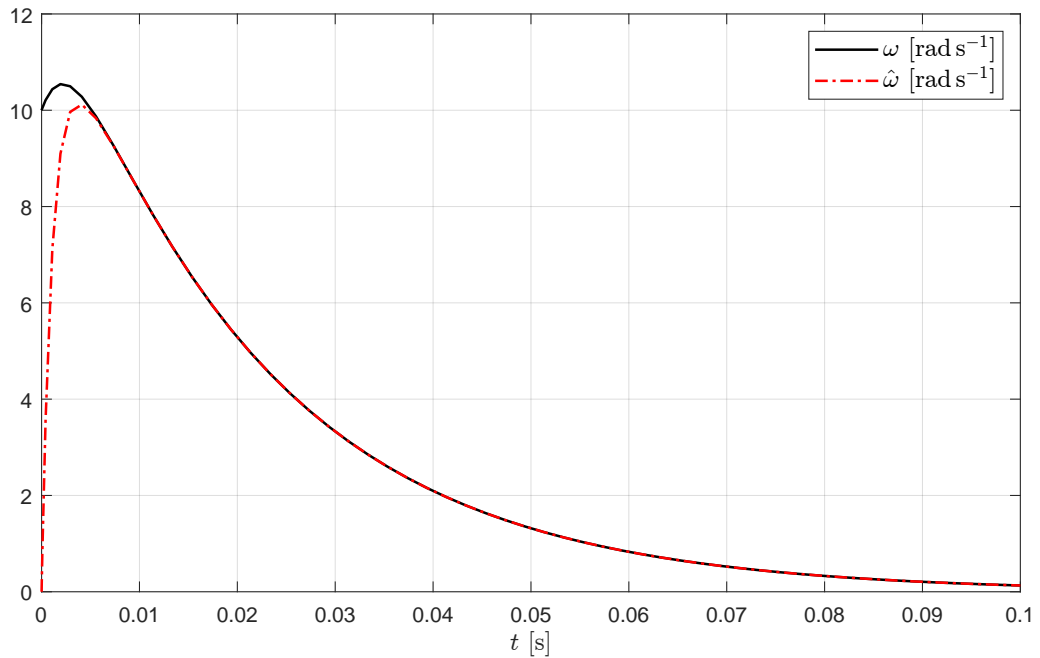
Pro normalizovaný model motoru bez zátěže

$$\bar{\bar{\Sigma}}_m = \left[\begin{array}{ccc|c} -b/J & K_t/J & 0 & 0 \\ -K_e/L & -R/L & 0 & 1/L \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right], \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

umožňuje RLDR asymptoticky rekonstruovat $\omega(t)$, úhlovou rychlost hřídele. Rekonstruovaná úhlová rychlost hřídele je $\hat{\omega}(t)$. Průběh $\omega(t)$ a $\hat{\omega}(t)$ jsou na obr. 7.9.



Obr. 7.8: Motor: úhlová rychlost $\omega(t)$ a rekonstruovaná úhlová rychlost $\hat{\omega}(t)$, proud armaturou $i(t)$ a rekonstruovaný proud armaturou $\hat{i}(t)$ pro model $\bar{\Sigma}_m$ a různé počáteční podmínky. RLDR($\bar{\Sigma}_m$) na bázi Kalmanova filtru.



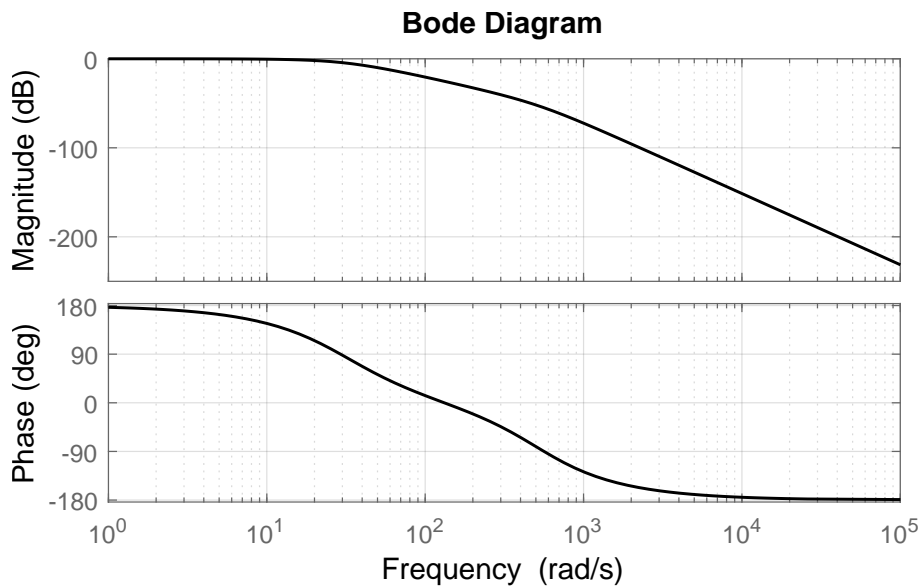
Obr. 7.9: Motor: úhlová rychlost $\omega(t)$ a rekonstruovaná úhlová rychlost $\hat{\omega}(t)$, proud armaturou $i(t)$ a rekonstruovaný proud armaturou $\hat{i}(t)$ pro model $\bar{\Sigma}_m$ a různé počáteční podmínky. RLDR($\bar{\Sigma}_m$) na bázi Kalmanova filtru.

7.5 Servosystém

Funkčnost servosystému udává zejména šířka pásma frekvencí, na kterých funguje spolehlivě. Spolehlivost servosystému se měří pomocí přenosové funkce uzavřené smyčky

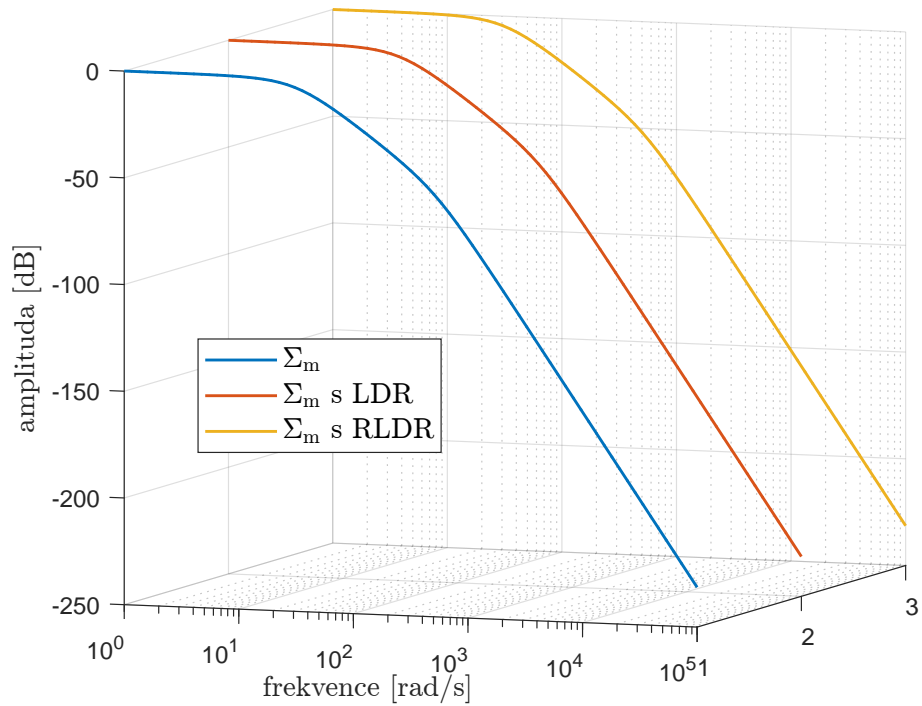
$$T(s) = \frac{\mathcal{L}\{\theta(t)\}}{\mathcal{L}\{\theta_r(t)\}}, \quad (7.13)$$

která musí mít v používaném pásmu frekvencí jednotkovou velikost, $|T(s)| = 1$. Do pásma použitelných frekvencí se z praktických důvodů počítají i ty frekvence, na kterých $|T(s)|$ realizuje odchylku do 3 dB, tj. $|T(s) - 1| \leq \epsilon$.

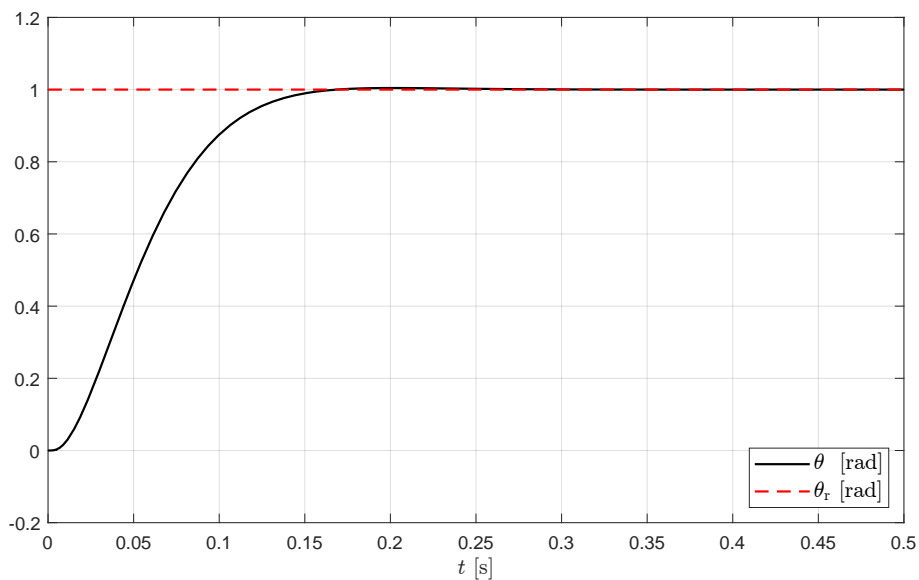


Obr. 7.10: Servosystém úhlové polohy bez zátěže: model Σ_m , augment. model Σ_{ma} , stavová zpětná vazba LQR(Σ_{ma}) (integrální řízení) bez rekonstrukce stavu.

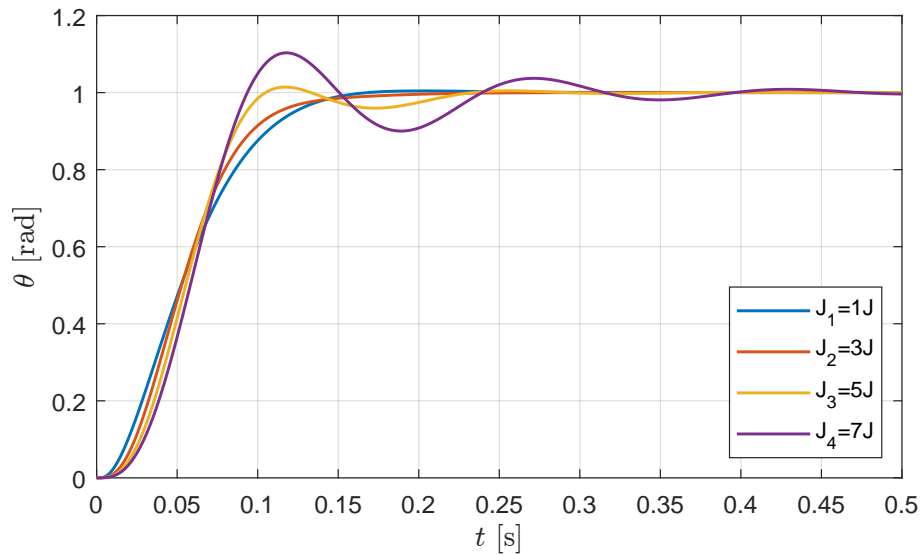
Šířka pásma 24,8 rad/s pro cutoff $\epsilon = -3$ dB.



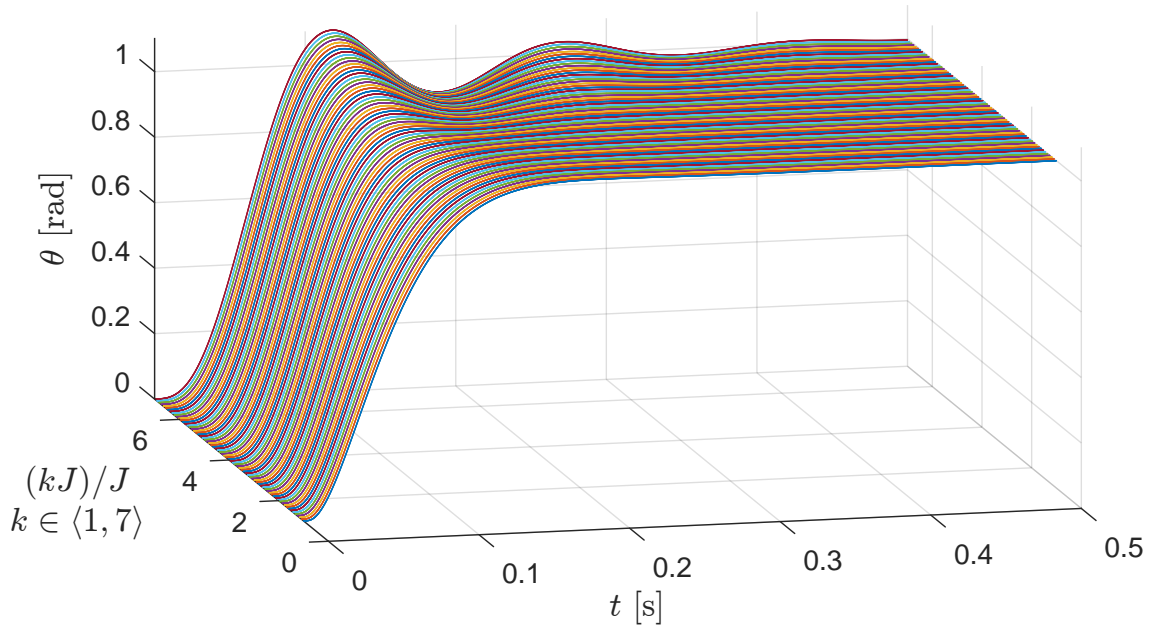
Obr. 7.11: Bodeho diagram pro servosystém úhlové polohy bez zátěže: model Σ_m , augment. model Σ_{ma} , stavová zpětná vazba LQR(Σ_{ma}) (integrální řízení) bez rekonstrukce stavu, s rekonstrukcí stavu LDR a s rekonstrukcí stavu RLDR.



Obr. 7.12: Servosystém úhlové polohy bez zátěže: augmentovaný model Σ_{ma} , stavová zpětná vazba LQR(Σ_{ma}) (integrální řízení) s rekonstrukcí stavu LDR(Σ_m) na bázi Kalmanova filtru. Odezva na skok úhlové polohy.



Obr. 7.13: Servosystém úhlové polohy bez zátěže: augmentovaný model Σ_{ma} , stavová zpětná vazba $LQR(\Sigma_{ma})$ (integrální řízení) s $LDR(\Sigma_m)$ na bázi Kalmanova filtru.
Odezvy na skok úhlové polohy pro variabilní parametr násobků nominální inerciální zátěže.



Obr. 7.14: Servosystém úhlové polohy bez zátěže: augmentovaný model Σ_{ma} , stavová zpětná vazba $LQR(\Sigma_{ma})$ (integrální řízení) s $LDR(\Sigma_m)$ na bázi Kalmanova filtru.
Odezva na skok úhlové polohy v závislosti na variabilním parametru násobků nominální inerciální zátěže.

Kapitola 8

Simulace se zátěží

Simulace se zátěží slouží k ilustrování některých typických kroků návrhu servosystémů se stejnosměrným motorem. Servosystém pro stejnosměrný motor, který je spojený se zátěží pomocí pružné převodovky, je pro technickou praxi realističtější než servosystém pro stejnosměrný motor. Servosystém se zátěží je složitější, ale dostatečně jednoduchý pro ilustraci problematiky návrhu servosystémů se stejnosměrným motorem.

Proč by se v technické praxi neměl servosystém navrhovat pouze pro motor, přístupně vysvětluje závěrečná část Kapitoly 5, která je převzata z klasické knihy od profesorů École Nationale Supérieure de l'Aéronautique, Paris [8].

Simulace budeme provádět pro kartáčový stejnosměrný servomotor s permanentními magnety. Parametry tohoto motoru jsou uvedeny přílohou v tabulce P.1 a parametry zátěže motoru v tabulce P.2.

8.1 Motor

Model motoru se zátěží

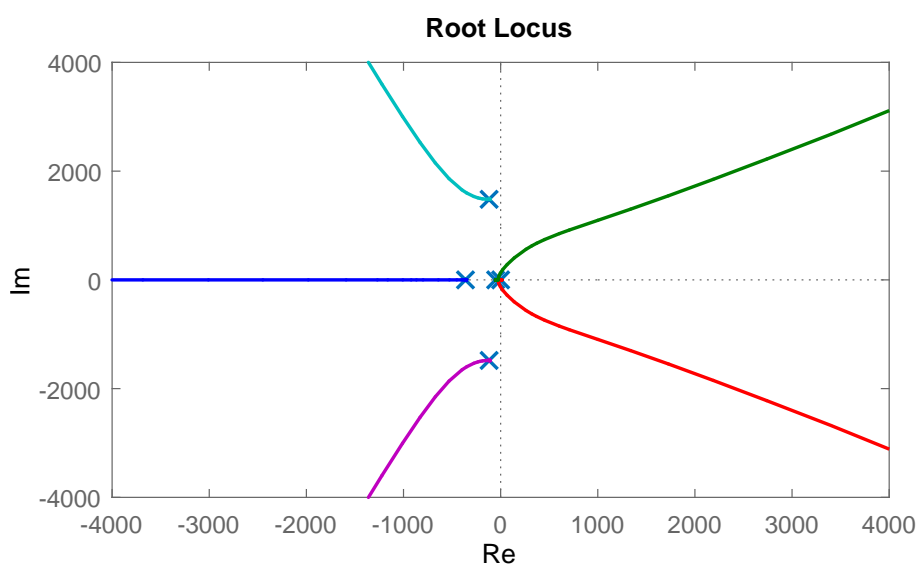
$$\Sigma_{\text{mz}} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha/Jk_p^2 & -b/J & K_t/J & \alpha/Jk_p & 0 & 0 \\ 0 & -K_e/L & -R/L & 0 & 0 & 1/L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha/J_z k_p & 0 & 0 & -\alpha/J_z & -k_z/J_z & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \\ \theta_z(t) \\ \omega_z(t) \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

Augmentovaný model k modelu Σ_{mz}

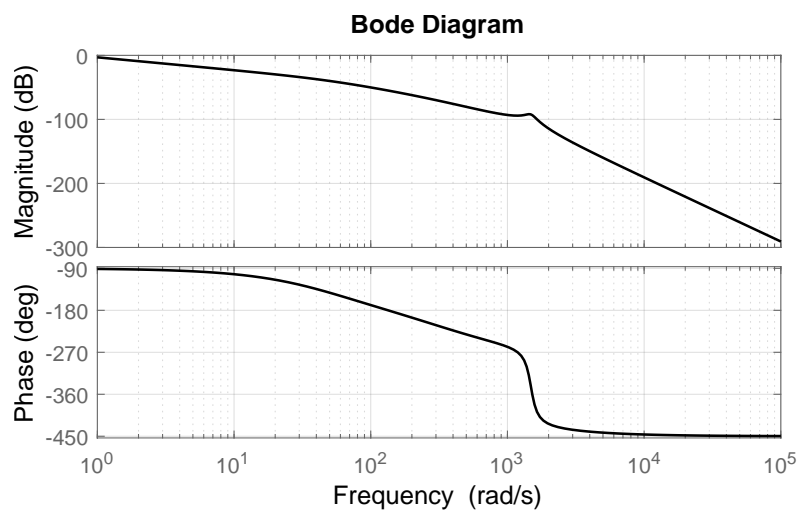
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \\ \theta_z(t) \\ \omega_z(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha/Jk_p^2 & -b/J & K_t/J & \alpha/Jk_p & 0 & 0 \\ 0 & -K_e/L & -R/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha/J_z k_p & 0 & 0 & -\alpha/J_z & -k_z/J_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \\ \theta_z(t) \\ \omega_z(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \theta_r(t), \quad (8.2)$$

$$y(t) = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i(t) \\ \theta_z(t) \\ \omega_z(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}, \quad (8.3)$$

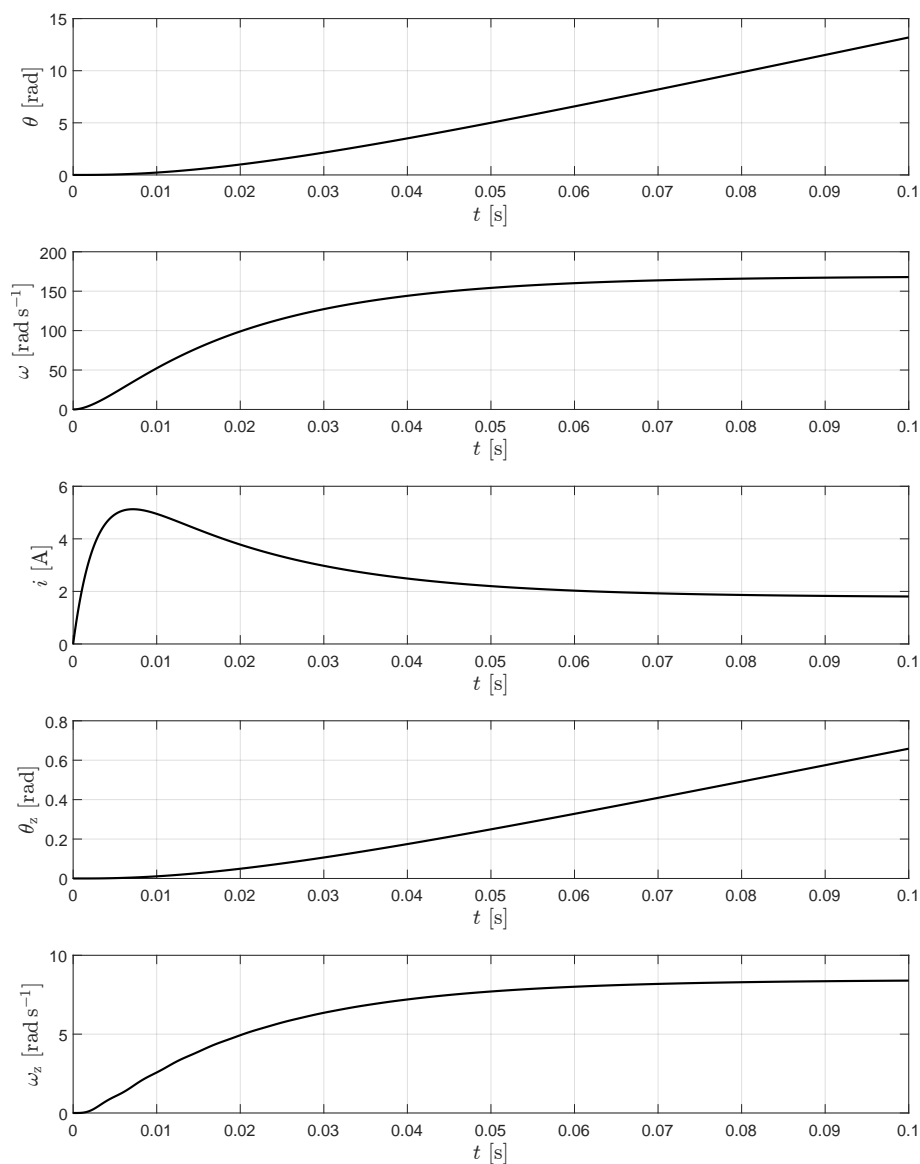
$$\Sigma_{mza} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{za} & \mathbf{B}_{za} \\ \hline \mathbf{C}_{za} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (8.4)$$



Obr. 8.1: Motor se zátěží: geometrické místo pólů modelu Σ_{mz} .

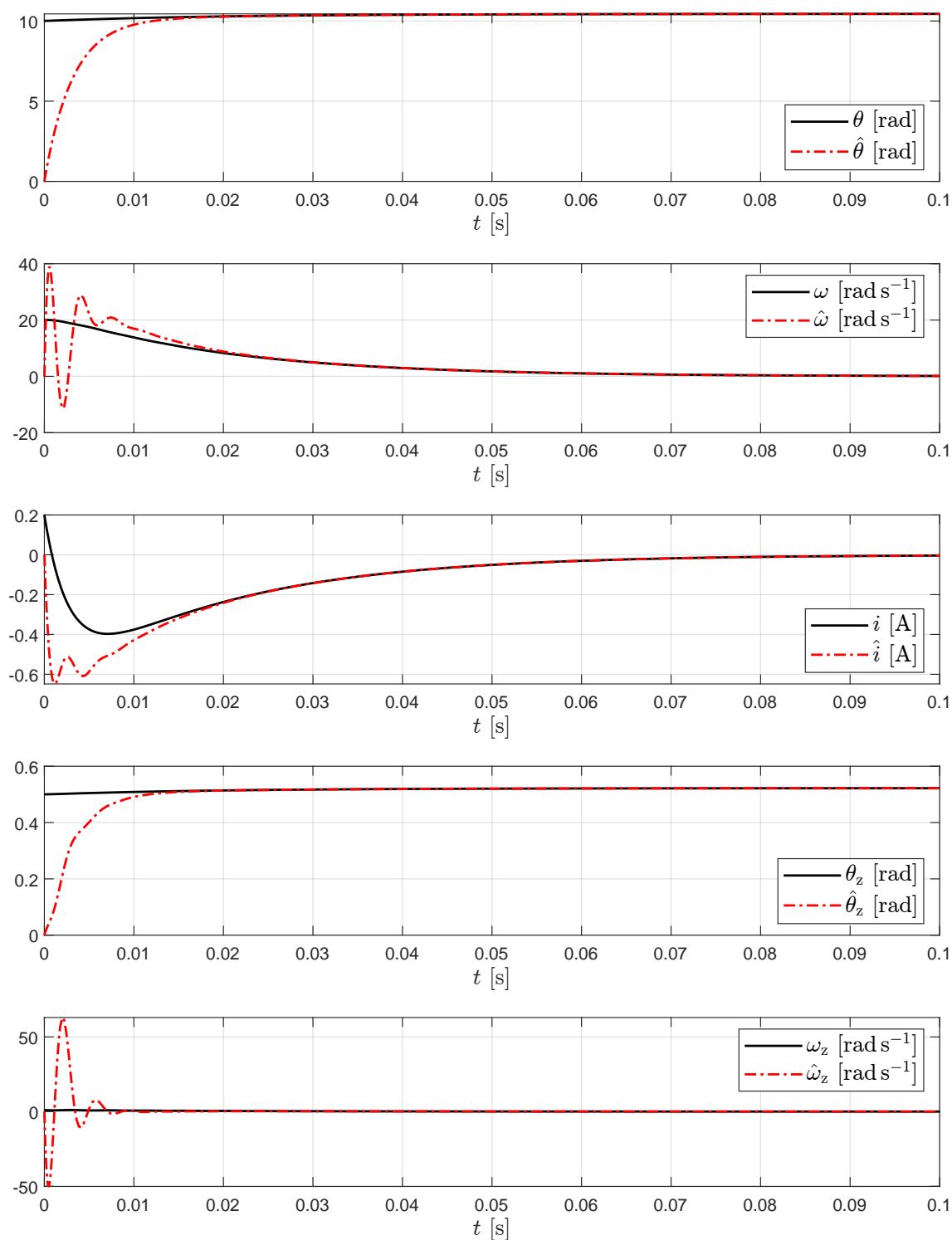


Obr. 8.2: Motor se zátěží: frekvenční odezvy modelu Σ_{mz} .



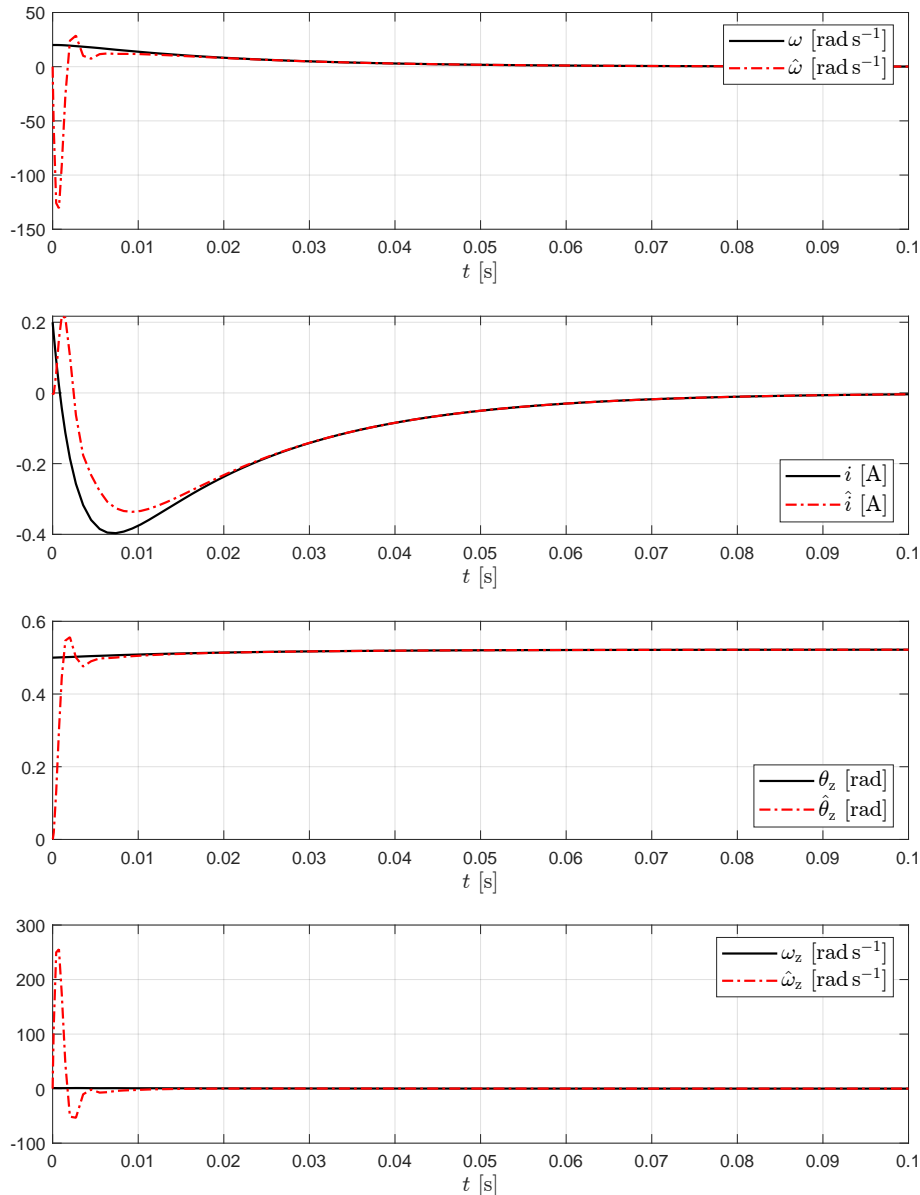
Obr. 8.3: Motor se zátěží: odezva modelu Σ_{mz} na skok vstupního napětí 12 V.

8.2 LDR



Obr. 8.4: Motor se zátěží: odezva modelu Σ_{mz} na počáteční podmínky, odezva LDR(Σ_{mz}) na počáteční podmínky.

8.3 RLDR



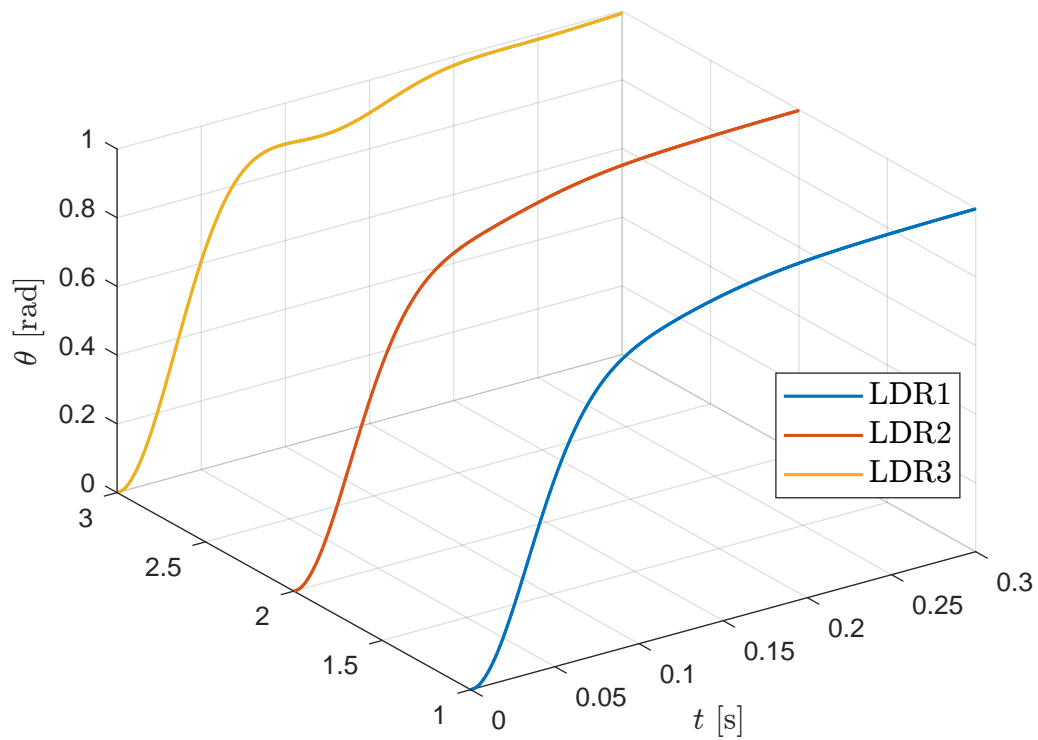
Obr. 8.5: Motor se zátěží: odezva modelu Σ_{mz} na počáteční podmínky, odezva RLDR(Σ_{mz}) na počáteční podmínky.

8.4 Servosystém

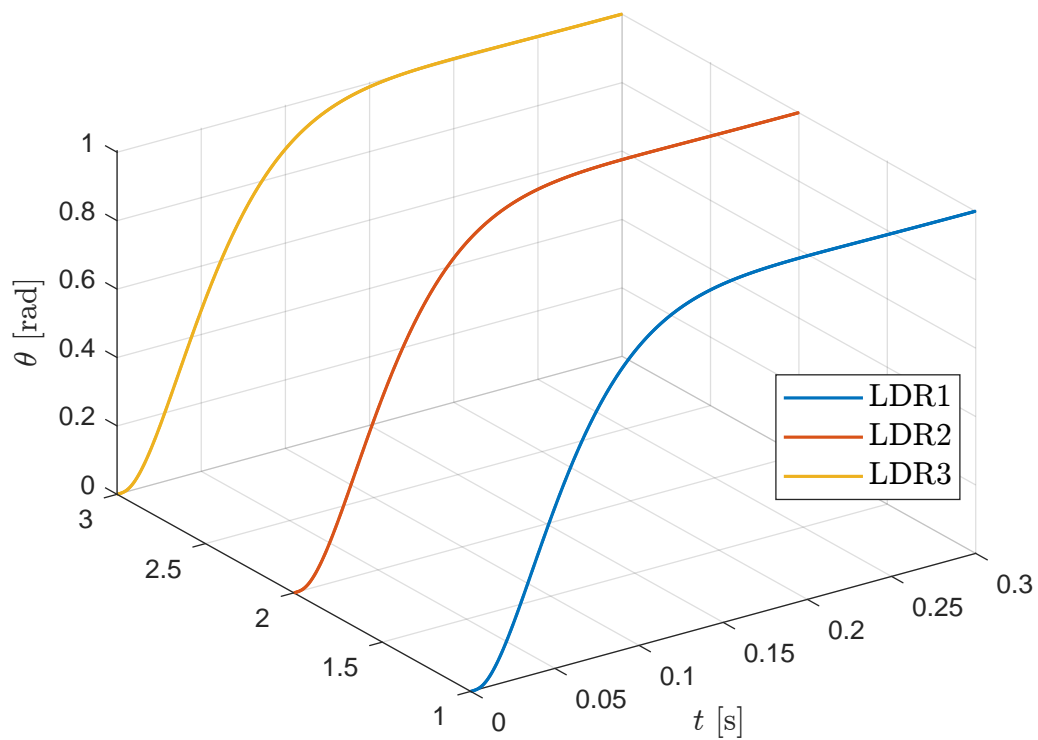
Funkčnost servosystému udává zejména šířka pásma frekvencí, na kterých funguje spolehlivě. Spolehlivost servosystému se měří pomocí přenosové funkce uzavřené smyčky

$$T(s) = \frac{\mathcal{L}\{\theta(t)\}}{\mathcal{L}\{\theta_r(t)\}}, \quad (8.5)$$

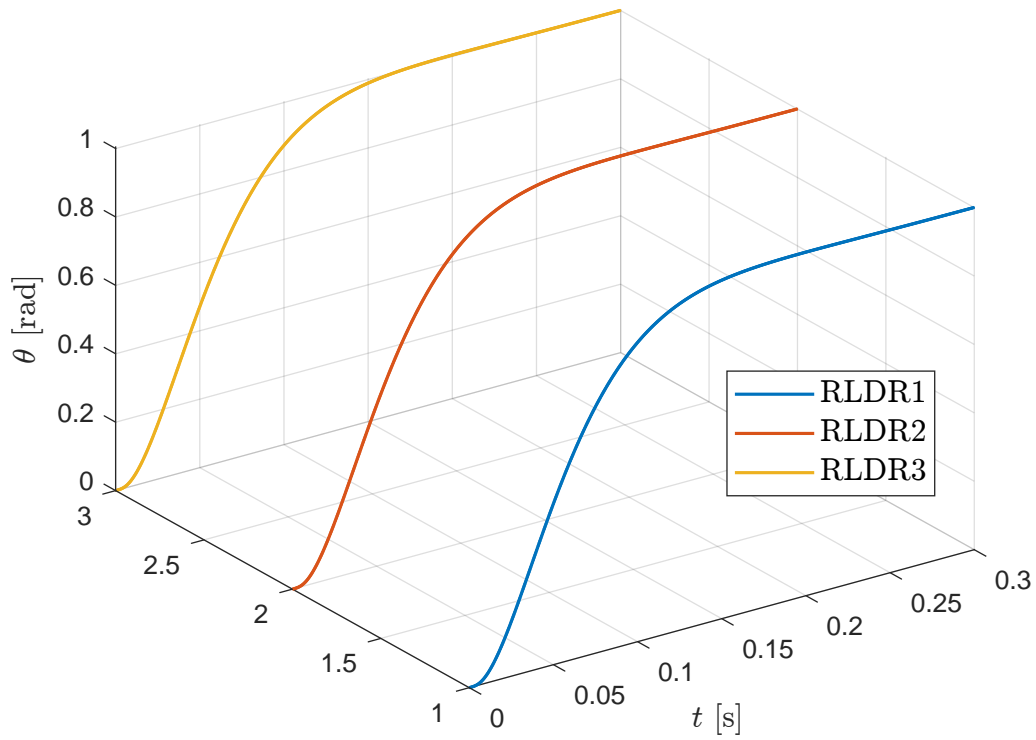
která musí mít v používaném pásmu frekvencí jednotkovou velikost, $|T(s)| = 1$. Do pásma použitelných frekvencí se z praktických důvodů počítají i ty frekvence, na kterých $|T(s)|$ realizuje odchylku do 3 dB, tj. $|T(s) - 1| \leq \epsilon$.



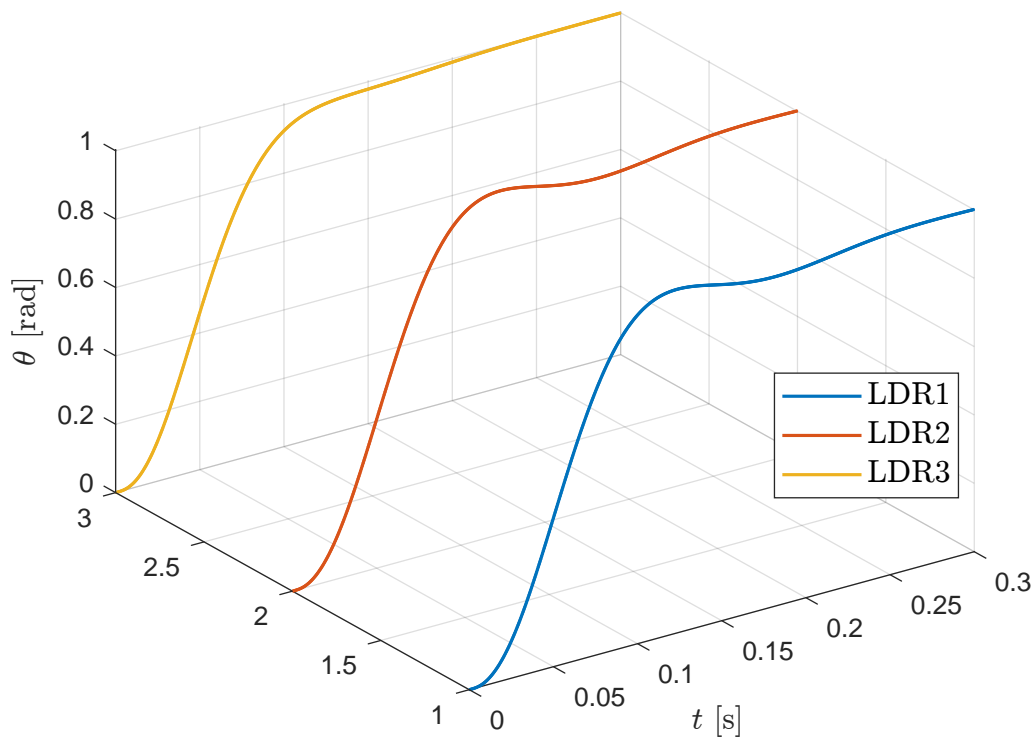
Obr. 8.6: Servosystém: LQR pro model Σ_{mz} s LDR aplikovaný na jednodušší model.



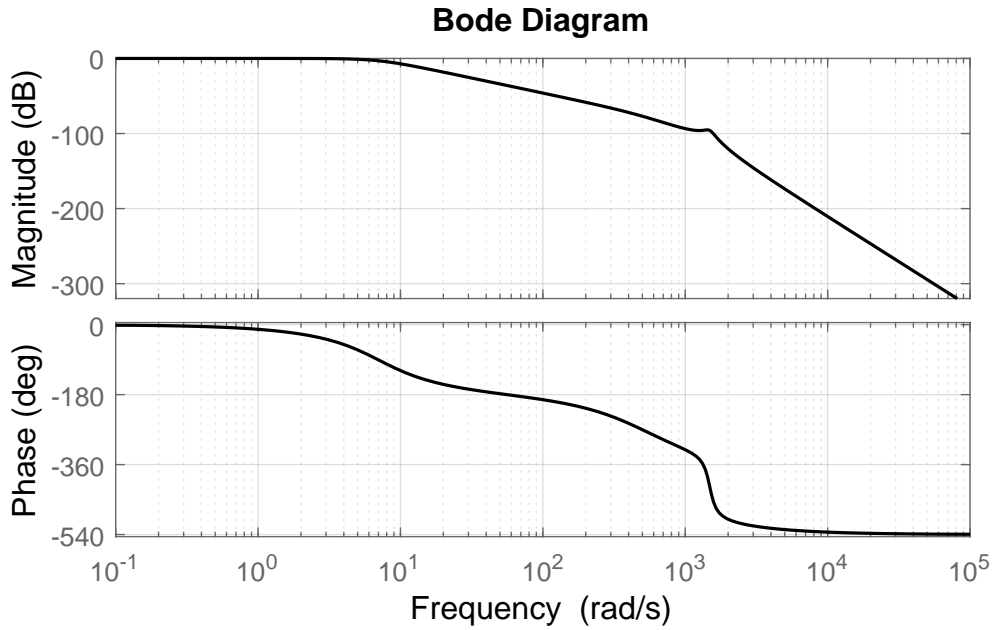
Obr. 8.7: Servosystém: LQR pro model Σ_{mz} s LDR pro různý počet výstupů.



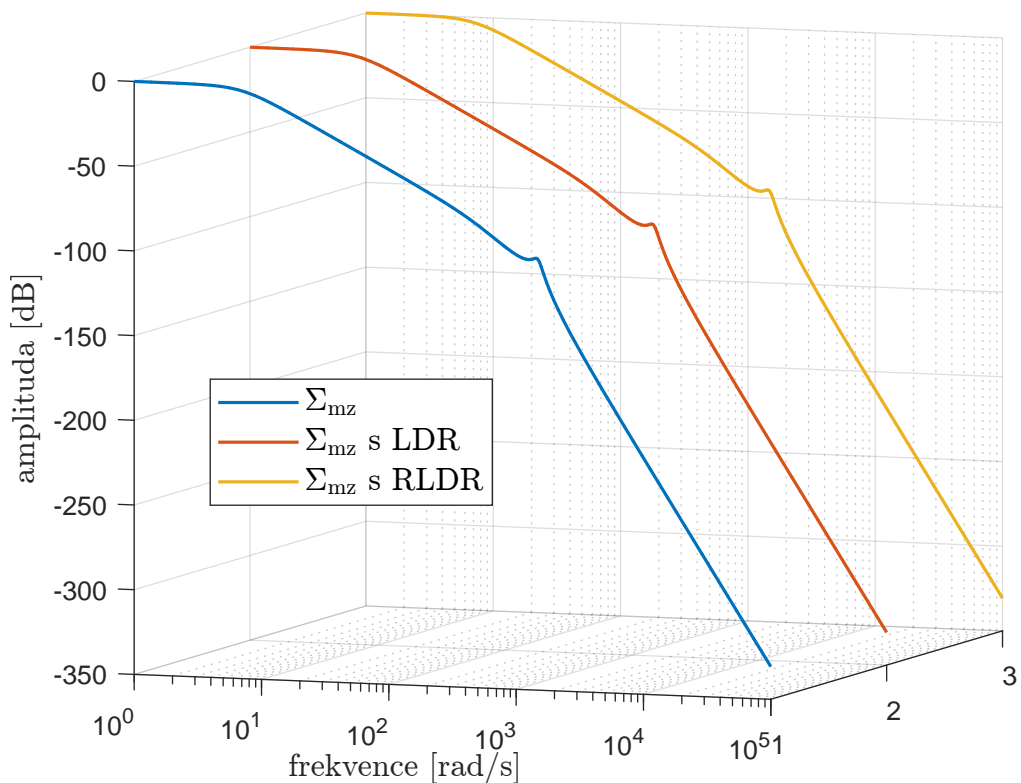
Obr. 8.8: Servosystém: LQR pro model Σ_{mz} s RLDR pro různý počet výstupů.



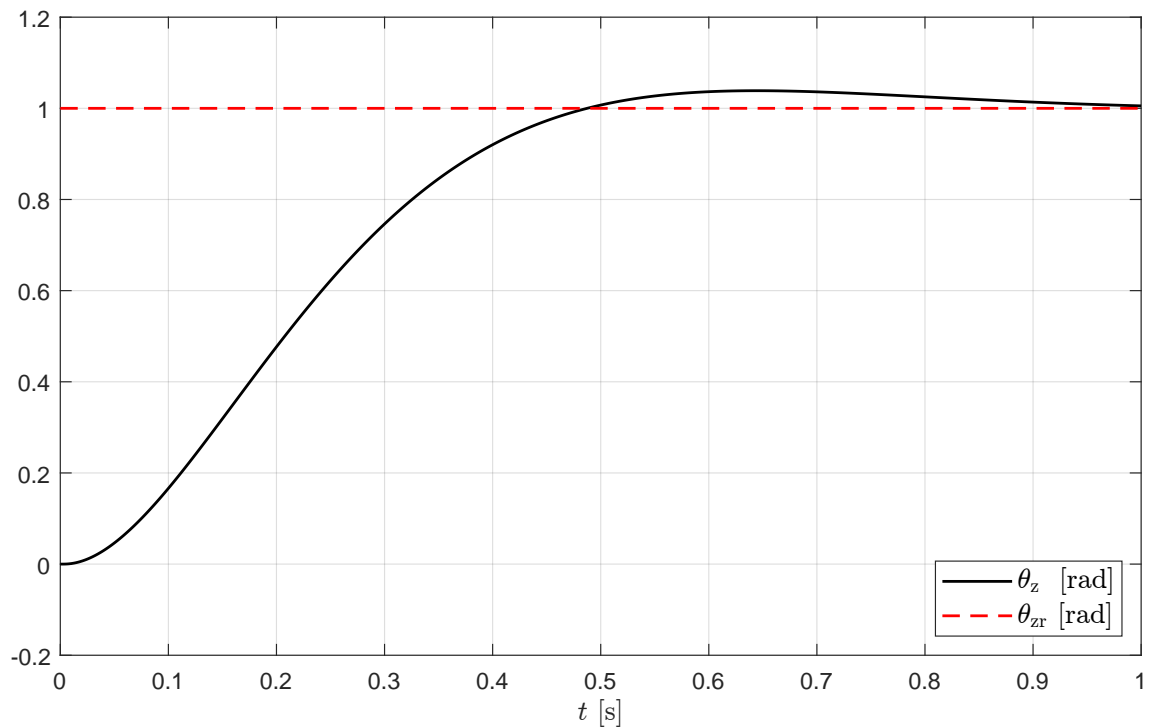
Obr. 8.9: Servosystém: LQR pro model Σ_{mz} s variací parametrů a LDR pro různý počet výstupů.



Obr. 8.10: Servosystém úhlové polohy se zátěží: model Σ_{mz} , augment. model Σ_{mza} , stavová zpětná vazba LQR(Σ_{mza}) (integrální řízení) bez rekonstrukce stavu. Šířka pásma 6,9 rad/s pro cutoff $\epsilon = -3$ dB.



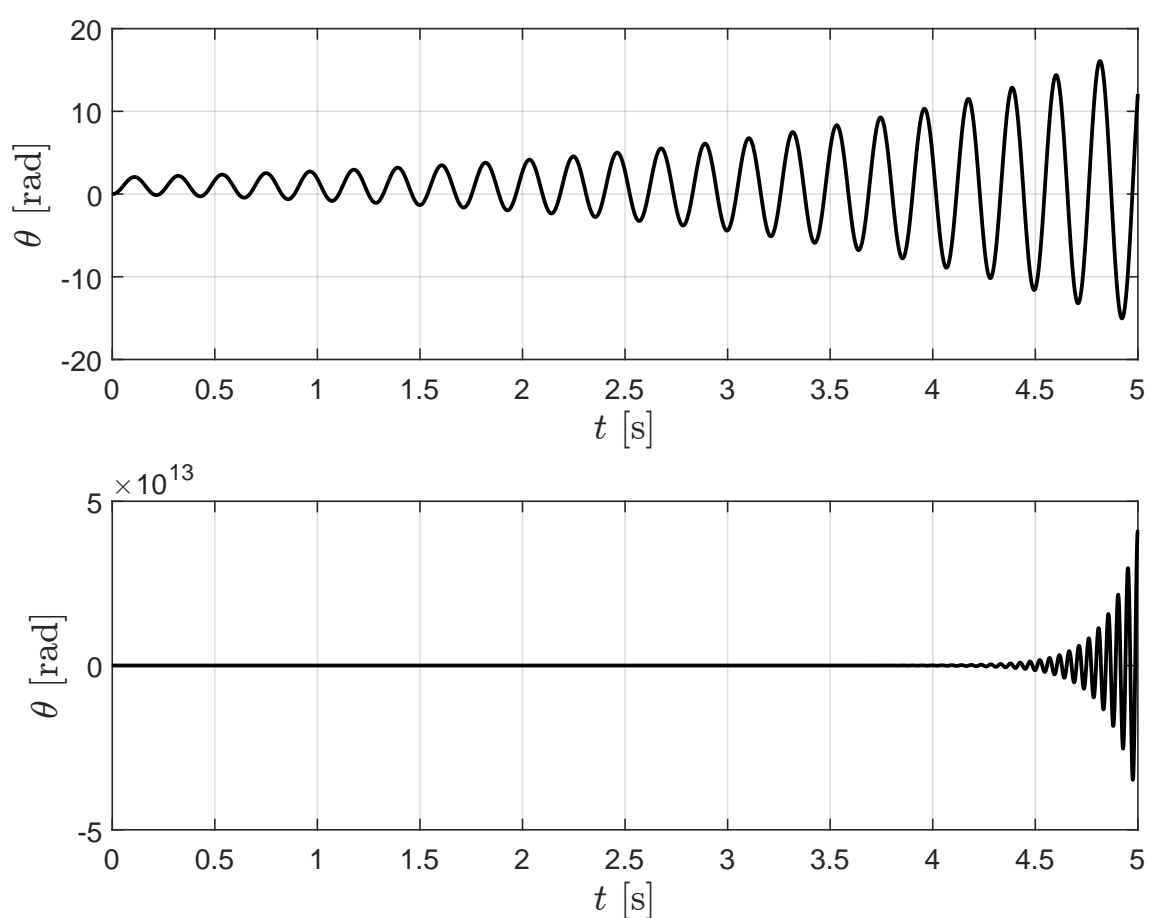
Obr. 8.11: Bodeho diagram pro servosystém úhlové polohy se zátěží: model Σ_{mz} , augment. model Σ_{mza} , stavová zpětná vazba LQR(Σ_{mza}) (integrální řízení) bez rekonstrukce stavu, s rekonstrukcí stavu LDR a s rekonstrukcí stavu RLDR.



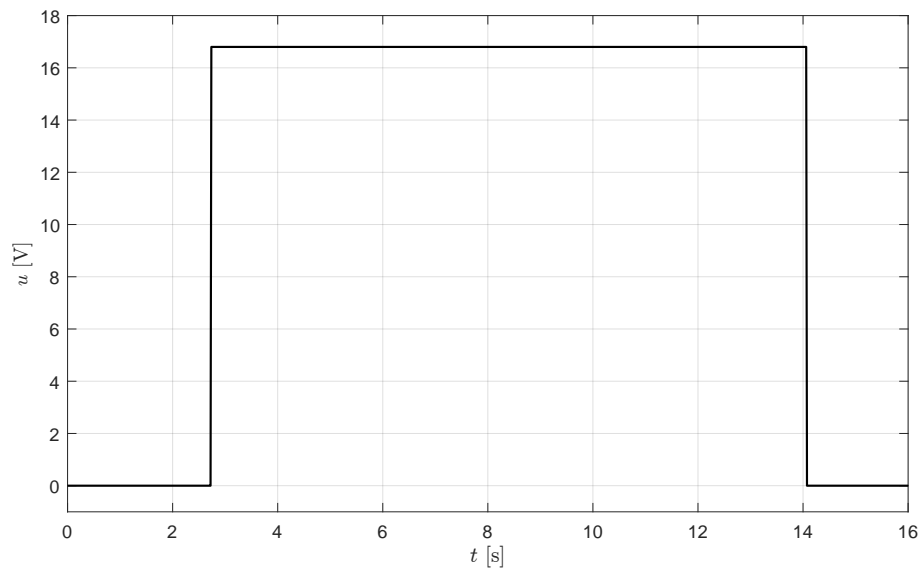
Obr. 8.12: Servosystém úhlové polohy se zátěží: augmentovaný model Σ_{mza} , stavová zpětná vazba LQR(Σ_{mza}) (integrální řízení) s rekonstrukcí stavu LDR(Σ_{mz}) na bázi Kalmanova filtru. Odezva na skok úhlové polohy.

Kapitola 9

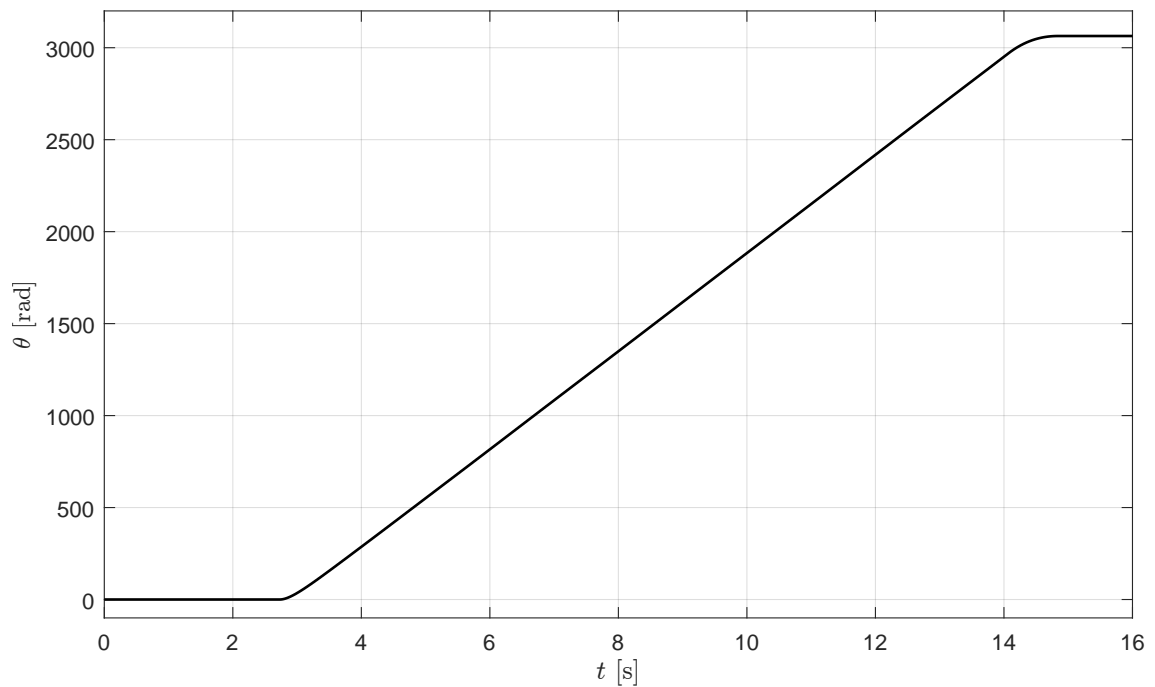
Fyzická realizace



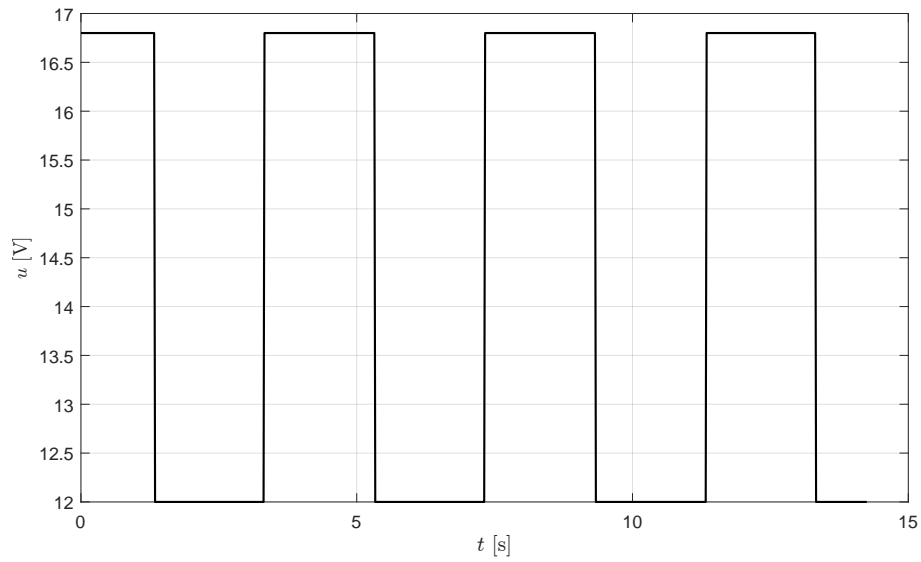
Obr. 9.1: Servosystém pro model $\bar{\Sigma}_m$ a $\hat{w}(t)$ via RLDR,
viz schéma na obr. 6.5
při rozpojení části stavové zpětné vazby pro $k_2 = k_3 = 0$ (horní)
a při rozpojení části stavové zpětné vazby pro $k_1 = 0$ (dolní).



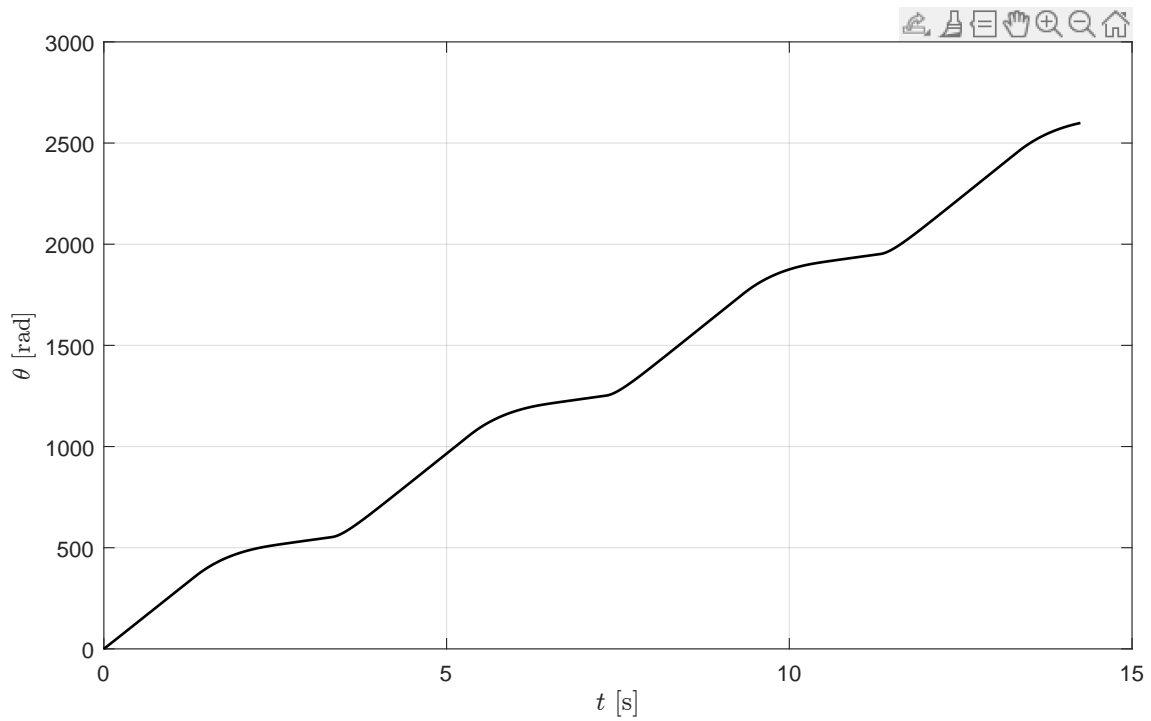
Obr. 9.2: Fyzická realizace. Pulz vstupního napětí.



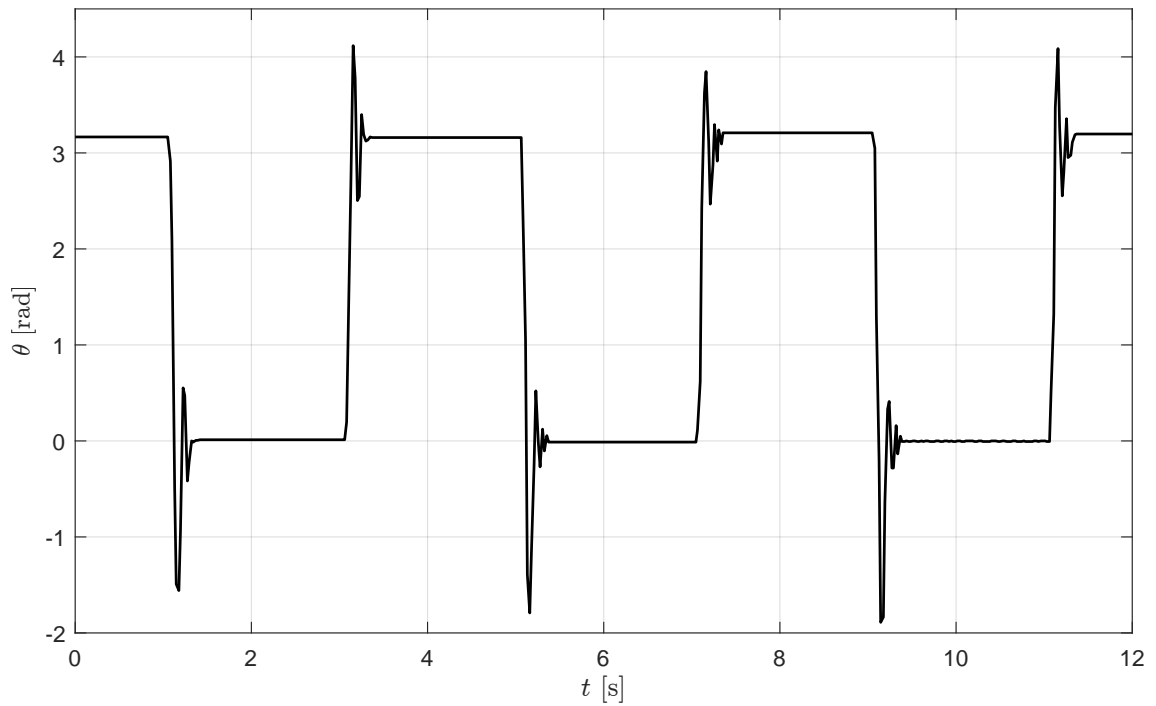
Obr. 9.3: Fyzická realizace. Odezva motoru na vstupní napětí z obr. 9.2.



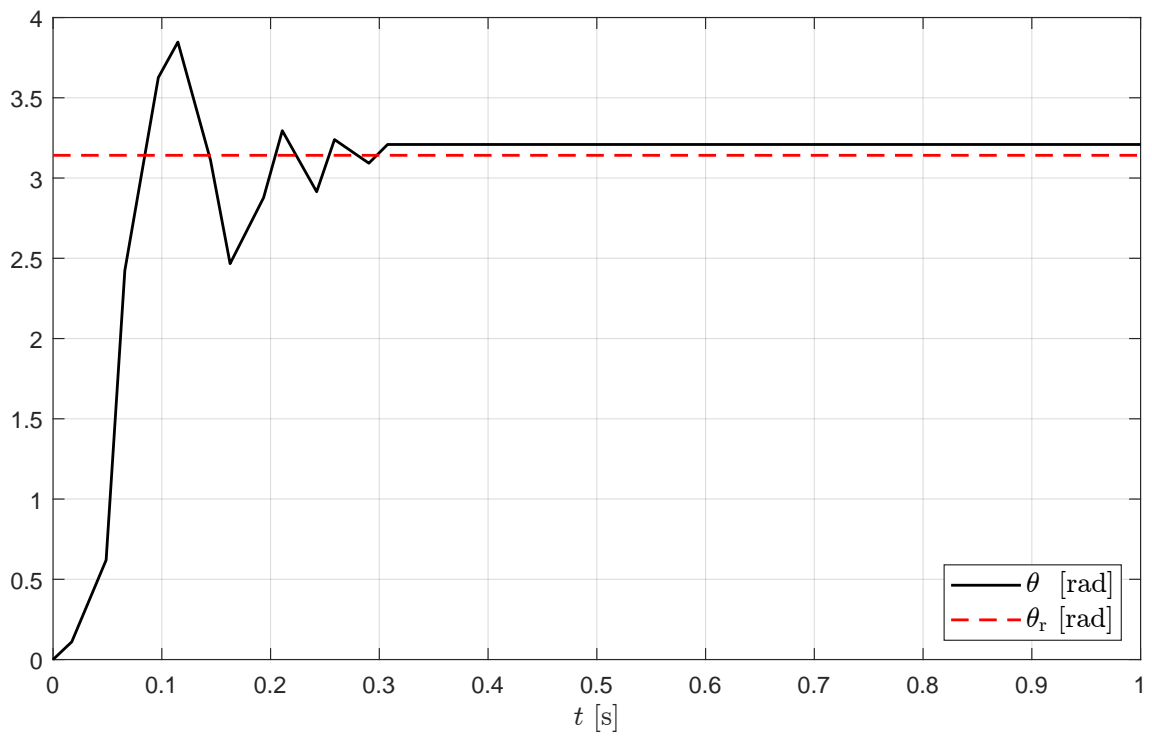
Obr. 9.4: Fyzická realizace. Pulzy vstupního napětí.



Obr. 9.5: Fyzická realizace. Odezva motoru na pulzy vstupního napětí z obr. 9.4.



Obr. 9.6: Fyzická realizace. Odezva servosystému úhlového natočení hřídele motoru bez zátěže na skoky žádané polohy $\theta_r(t)$ metodou pokus–omyl.



Obr. 9.7: Fyzická realizace. Odezva servosystému úhlového natočení hřídele motoru bez zátěže na skok polohy $\theta_{r1}(t)$ metodou pokus–omyl.

Závěr

Práce se zabývá stavovým návrhem servomechanismu úhlové polohy s rekonstrukcí stavu, kde v servomechanismu je použit stejnosměrný motor. Aplikovatelnost napříč historií a obory nejde dost dobře pokrýt prostým výčtem a některé aplikace není ani dost dobře možné vyjmenovat pro jejich duální využití. Odtud fráze: *Kdybych chtěl zaútočit, jdu nakupovat do hračkářství.*

Servomechanismus úhlové polohy je obecně polohovací. Nemusí nutně nastavovat úhlovou polohu. Převod rotačního pohybu na translační nebo jiný mechanický pohyb není technicky obtížné realizovat.

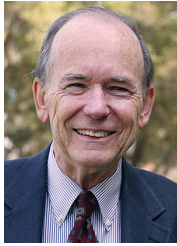
Použitím elementárních přírodních zákonů jsou odvozeny dva stavové modely se vzrůstající složitostí. První je třístavový se dvěma výstupy [12]. Druhý je na bázi prvního a je pětistavový se třemi výstupy. Modeluje motor se zátěží o známém momentu setrvačnosti, která je k motoru připojena pružnou převodovkou. Jedná se o relativně jednoduché modely, které sice nakročují od systémů s jedním vstupem a výstupem (SISO, single input single output) k systémům s mnoha vstupy a výstupy (MIMO, multiple input multiple output), ale nejsou to v pravém smyslu MIMO modely a dynamické problémy.

Techniky aplikovatelné pro MIMO jsou využity pro návrh zesílení zpětných vazeb v servosystémech pro výše popsané dva modely. Tyto techniky jsou popsány v kapitolách o Luenbergerových pozorovatelích (LDR, RLDR). Luenbergerův pozorovatel celého stavu [12] je odvozen se zřetelem na principy, které jsou pak využity pro odvození redukovaného Luenbergerova pozorovatele (RLDR). Zesílení stavových zpětných vazeb v problému regulátoru přidruženému k problému servosystému jsou provedena jako lineární kvadraticky optimální (LQR). Obdobně jsou provedena zesílení LDR a RLDR, na základě řešení duálních problémů k LDR a RLDR. V striktním smyslu se tedy jedná o stacionární stochastické filtry, známé jako Kalmanovy nebo jako Kalman-Bucyho filtry [10] podle článku *New results in linear filtering and prediction theory* (1961).

Dílčí kroky návrhu servosystému jsou provedeny pro několik různých podvariant, ale prezentovány jsou jen výsledky. Prezentace dílčích kroků je provedena na třístavovém modelu, k němu příslušnému čtyřstavovému augmentovanému modelu a jednostavovému redukovanému Luenbergerově pozorovateli. I tak je problém prezentaci vtěsnat na A4. Příslušné simulace jsou v kapitole zabývající se výsledky simulací. Jinde, v kapitole o motoru se zátěží, jsou podány základní důvody, proč se servosystém nemá navrhovat jen pro motor. Autory jsou Jean-Charles Gille, Marc J. Pélegrin a Paul Decaulne (1956), profesori École Nationale Supérieure de l'Aéronautique, Paris [8]. Autory předmluvy k anglické verzi [8] (1959) jsou vedoucí M.I.T. Dept. Electrical

Engineering a ředitel The Martin Company, dnes Lockheed Martin, genealogicky Wright Martin Aircraft Corporation (Orville Wright, Glenn Luther Martin, 1916).

Akronymy LDR a RLDR jsou v češtině, angličtině i němčině funkční:



Luenbergerova **D**ynamická **R**eonstrukce,
Luenberger **D**ynamic **R**econstruction,
Luenberger **D**ynamische **R**eonstruktion,
Redukovaná **L**uenbergerova **D**ynamická **R**eonstrukce,
Reduced **L**uenberger **D**ynamic **R**econstruction,
Reduzierte **L**uenberger **D**ynamische **R**eonstruktion,

Historicky: Luenbergerův pozorovatel, Luenberger Observer,¹ Luenberger dynamische Beobachter, динамический наблюдатель состояния.

Implementace i simulace jsou provedeny v profesionálním prostředí od korporace The MathWorks, Inc., U.S.A.

¹Professor David Gilbert Luenberger, photo courtesy Stanford University, U.S.A.

Seznam použitých zdrojů

- [1] ATHANS, Michael a FALB, Peter L. *Optimal Control*. New York, St. Louis, San Francisco, Toronto, London, Sydney: McGraw-Hill, 1966.
- [2] BODE, Hendrik W. *Network analysis and feedback amplifier design*. New Jersey: Van Nostrand, Princeton, 1945.
- [3] BODE, Hendrik W. a SHANNON, C. E. "A Simplified Derivation of Linear Least Square Smoothing and Prediction Theory." *Proceedings of the I.R.E.*, pp. 417–425, April 1950.
- [4] BRUNOVSKÝ, Pavol. *Matematická teória optimálneho riadenia*. Praha: SNTL, Nakladatelství technické literatury, 1980.
- [5] DOYLE, John C. "Guaranteed margins for LQG regulators." *IEEE Transactions on Automatic Control*, August 1978.
- [6] DOYLE, John C. a STEIN, Gunter. "Robustness with Observers." *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 24, no. 4, pp. 607–611, August 1979.
- [7] EUGENE, Ehrlich a MURPHY, Daniel. *The Art Of Technical Writing*. New York: Bantam Books, 1964.
- [8] GILLE, Jean-Charles, Marc J. PÉLEGRIN a Paul DECAULNE. *Théorie et Technique des Asservissements*. 1e éd. Paris: Dunod, 1956.
- [9] KALMAN, R. E. "Contributions to the Theory of Optimal Control." *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 1960.
- [10] KALMAN, R. E. a BUCY, R. S. "New results in linear filtering and prediction theory." *J. Basic Engineering Trans. ASME Ser. D83*, pp. 95–108, 1961.
- [11] KNOBLOCH, Hans W. a KWAKERNAAK, Huibert. *Lineare Kontrolltheorie*. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer, 1985.
- [12] KRAFFER, David. *Využití stavového pozorovatele pro rekonstrukci rychlostního signálu stejnosměrného motoru*. Praha, 2021. [cit. 10. 5. 2023]. Bakalářská práce. ČVUT v Praze. Dostupné z: <https://dspace.cvut.cz/handle/10467/97327>
- [13] KWAKERNAAK, Huibert a SIVAN, Raphael. *Linear Optimal Control Systems*. First Edition. Wiley-Interscience, 1972.
- [14] KWAKERNAAK, Huibert. "Optimal low-sensitivity linear feedback systems." *Automatica*, vol. 5, pp. 279–285, May 1969.

- [15] LUENBERGER, David G. (1964) "Observing the State of a Linear System." *IEEE Transactions on Military Electronics* ME-8 (April), pp. 74–80.
- [16] STEIN, Gunter. "Respect the unstable." *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 23, no. 4, pp. 12–25, August 2003.
- [17] The MathWorks, Inc. [online]. *Control System ToolboxTM Reference*. MATLAB. [cit. 29.5.2023] Dostupné z: https://www.mathworks.com/help/releases/R2022b/pdf_doc/control/control_ref.pdf

Přílohy

P1 Sériové spojení minimálních realizací

Pro $G_1(s)$ a $G_2(s)$ minimálně realizované jako

$$G_1 = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right], \quad G_2 = \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right] \quad (\text{P.1})$$

platí:

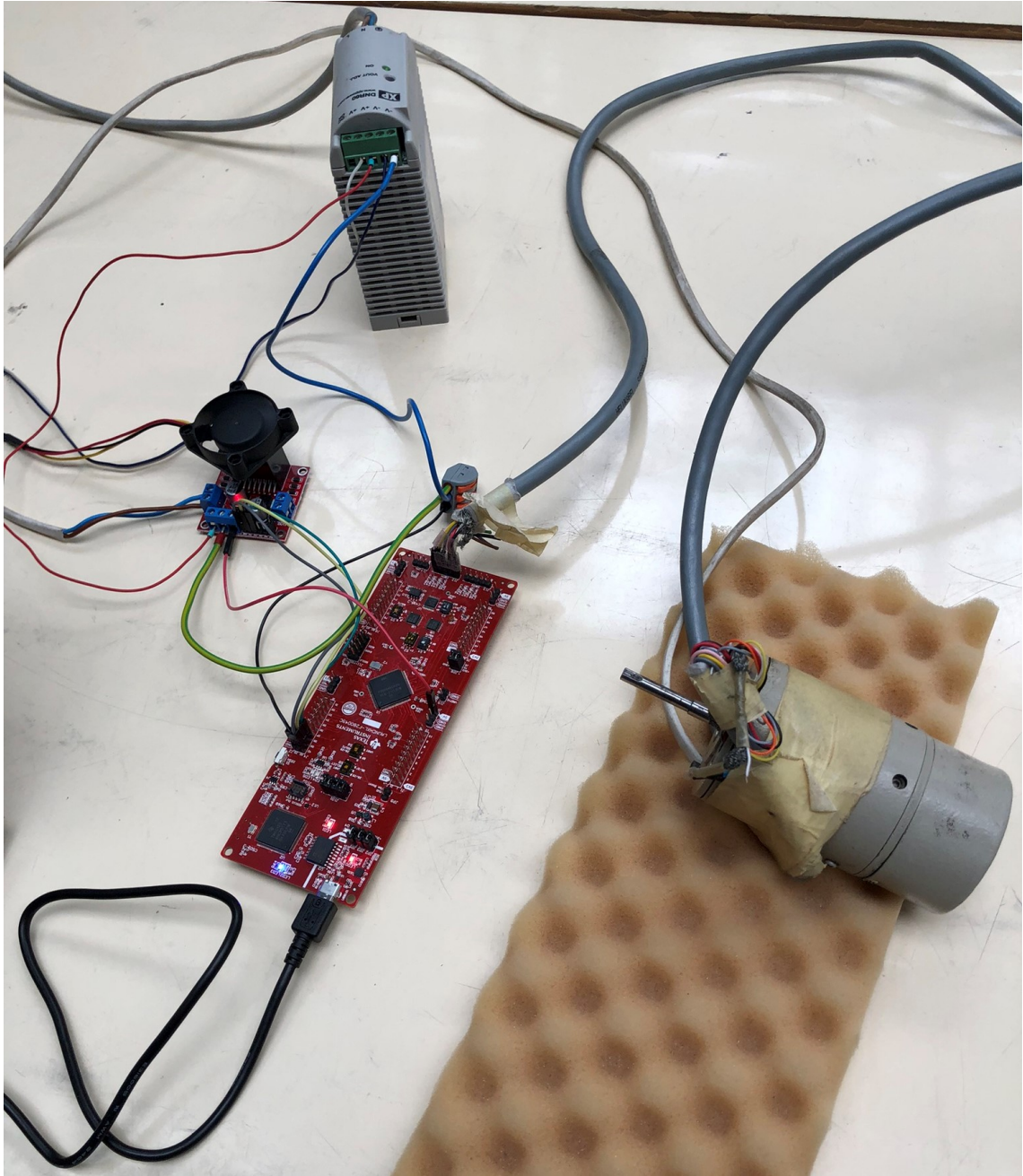
$$G_1 G_2 = \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & B_1 C_2 & B_1 D_2 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & D_1 C_2 & D_1 D_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_2 & 0 & B_2 \\ B_1 C_2 & A_1 & B_1 D_2 \\ \hline D_1 C_2 & C_1 & D_1 D_2 \end{array} \right] \quad (\text{P.2})$$

P2 Technická data motoru

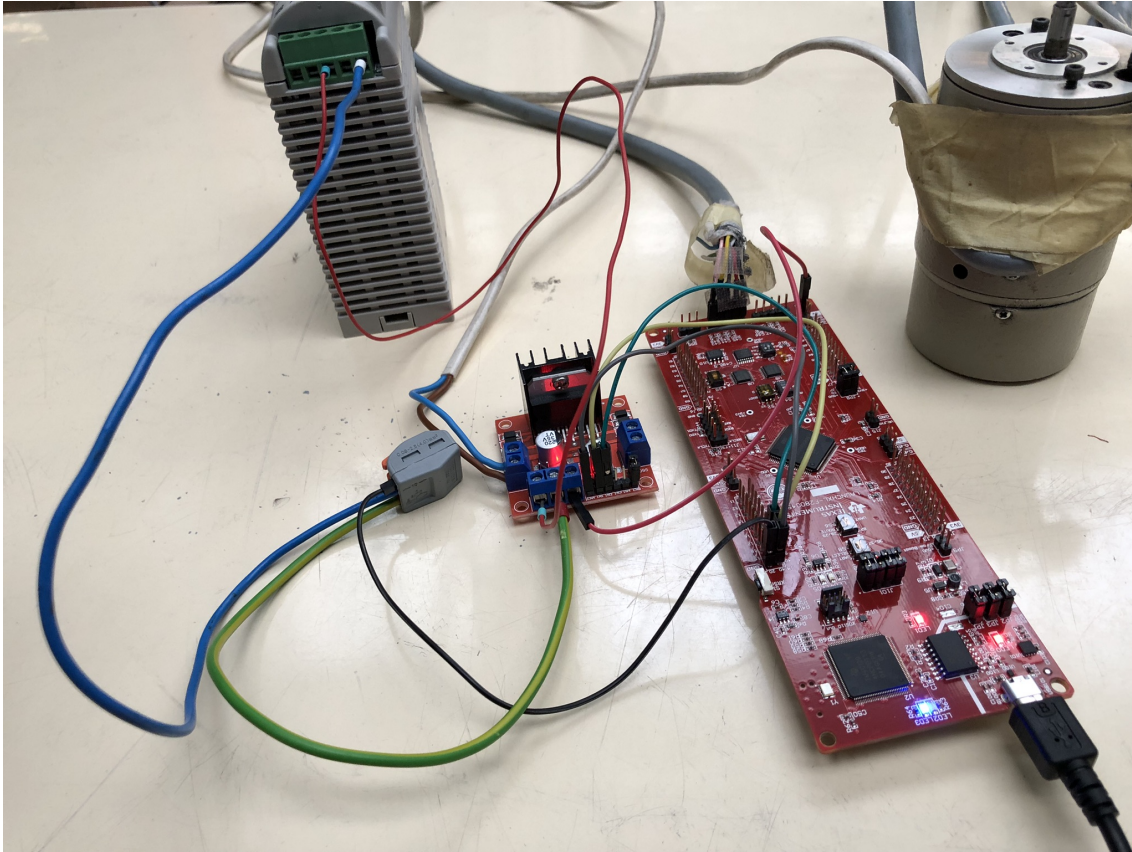
Použitý motor byl podle všeho recyklován z vyřazeného průmyslového robotu a technická dokumentace k němu chyběla. Implementaci navržených servomechanismů proto předcházela rutinní identifikace parametrů. Takto získané parametry motoru jsou specifikovány v tabulce P.1, foto motoru je na obr. P.1.

značka	hodnota	značka jednotky	název
J	$3,7 \cdot 10^{-5}$	kg m ²	moment setrvačnosti
b	$3 \cdot 10^{-4}$	N m s	součinitel viskózního tření
K_e	0,05	V s	elektromotorická konstanta
K_t	0,05	N m A ⁻¹	momentová konstanta
R	2	Ω	odpor kotvy
L	0,005	H	indukčnost kotvy

Tabulka P.1: Hodnoty parametrů DC motoru



Obr. P.1: Zapojení hardware.



Obr. P.2: Zapojení hardware.

P3 Technická data zátěže motoru

značka	hodnota	značka jednotky	název
J_z	$3,7 \cdot 10^{-4}$	kg m ²	moment setrvačnosti zátěže
k_z	0,09	N m s	součinitel viskózního tření zátěže
k_1	800	N m rad ⁻¹	torzní tuhost hřídele motor–převodovka
k_2	800	N m rad ⁻¹	torzní tuhost hřídele převodovka–zátěž
k_p	20	–	převod převodovky

Tabulka P.2: Hodnoty parametrů zátěže DC motoru

P4 Identifikace momentu setrvačnosti fyzicky dostupného rotoru

Moment setrvačnosti rotoru jsme experimentálně stanovili torzními kmity. Rotor jsme v jeho ose připevnili hřídelovou spojkou k svářečskému drátu o délce 1 m a průměru 1,6 mm, spojení je vidět na obr. P.3.



Obr. P.3: Rotor s připevněným drátem.

Rotor jsme v jeho hlavní ose zavěsili přes svařovací drát do zaaretovaného sklíčidla, obr. P.4. Tečně k rotoru byl pevně přilepen akcelerometr ADXL335. Rukou jsme točivým pohybem kolem osy mírně vychýlili rotor z rovnovážné polohy o úhel $\Delta\theta$ a nechali torzně kmitat. Tento pohyb je možné popsat rovnicí momentů $J\ddot{\theta} = -K\theta$, kde K představuje torzní tuhost závislou na geometrii a modulu pružnosti ve smyku. Rovnici momentů je možné převést do tvaru rovnice harmonického kmitání

$$\ddot{\theta} + \frac{K}{J}\theta = 0, \quad (\text{P.3})$$

to znamená

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0. \quad (\text{P.4})$$

Stanovení momentu setrvačnosti je založeno na dvou experimentech, lišících se momentem namáhání drátu, a porovnáním výsledků těchto dvou experimentů.

V prvním experimentu se točí holým rotorem, obr. P.3. V druhém experimentu se točí rotorem pevně spojeným s tělesem o známém momentu setrvačnosti. Protože část statoru má vhodný geometrický tvar a je stejnorodá, je možné určit její moment setrvačnosti jednoduchým výpočtem. Část statoru, pro účely experimentu pevně spojená s rotorem, je vidět nad spodním okrajem obr. P.4.

Zrychlení rotačního pohybu holého rotoru, jak je zaznamenal akcelerometr, je na obr. P.5. Pro výpočet jsme zvolili prvních deset kmitů.

Moment části statoru, kterou jsme v druhém experimentu pevně spojili s rotorem, je

$$J_s = \frac{1}{8} m_s (d^2 + d_s^2) = \frac{1}{8} \cdot 0,327(0,033 + 0,049) \text{ kg m}^2 = 1,43 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2, \quad (\text{P.5})$$

kde m_s je hmotnost a d_s průměr části statoru, d je průměr rotoru. Průběh kmitů je zobrazen na obr. P.6.

Pro poměr doby kmitů rotoru s připevněnou částí statoru a doby kmitů holého rotoru, zobrazených na obr. P.5, platí

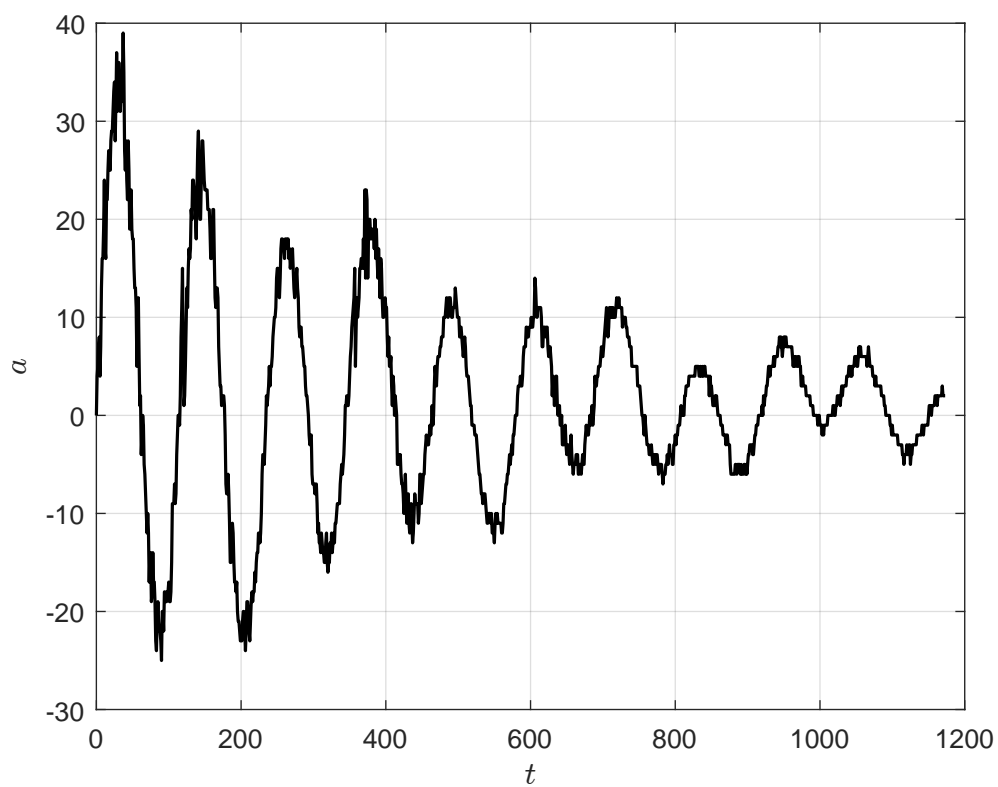
$$\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{J}{J + J_s}}, \quad (\text{P.6})$$

z čehož moment setrvačnosti rotoru vyjádříme jako

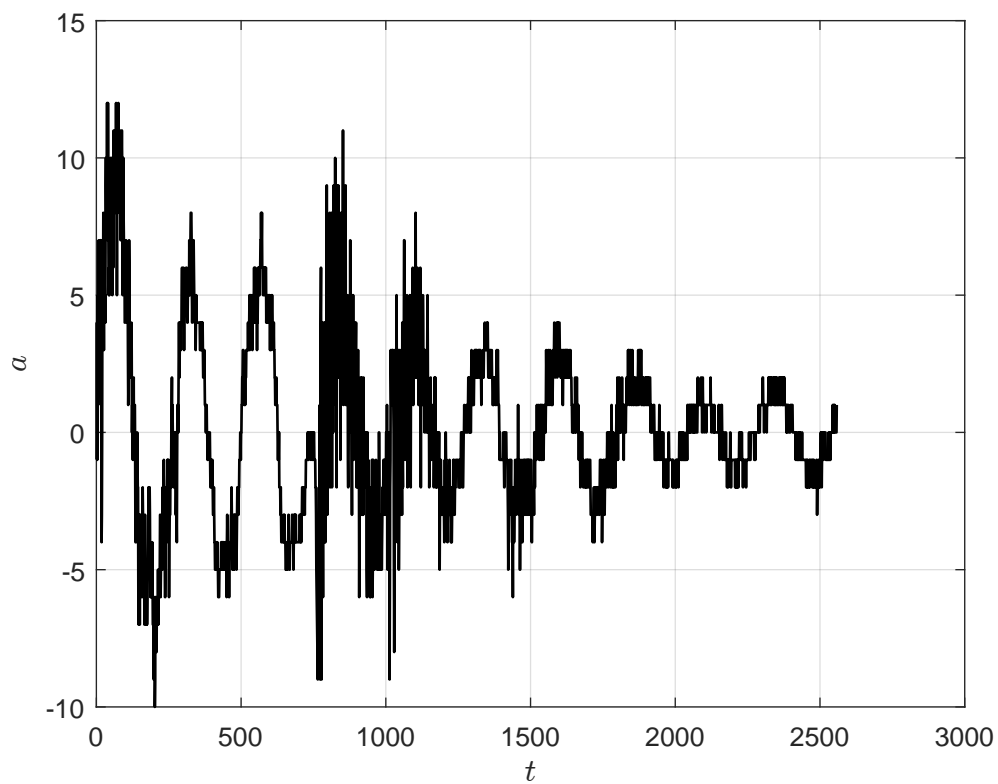
$$J = \frac{J_s}{(T'/T)^2 - 1} = \frac{1,43 \cdot 10^{-4}}{(2530/1150)^2 - 1} \text{ kg m}^2 = 3,7 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2 \quad (\text{P.7})$$



Obr. P.4: Druhý experiment: rotor s pevně připevněnou částí statoru.



Obr. P.5: První experiment: Torzní kmity holého rotoru.



Obr. P.6: Druhý experiment: Torzní kmity rotoru s pevně připojenou částí statoru.