

České vysoké učení technické v Praze

Fakulta strojní – Ústav konstruování a částí strojů

Diplomová práce



**EXPERIMENTÁLNÍ ANALÝZA  
TUHOSTI OZUBENÍ**

Experimental Analysis of the Mesh  
Stiffness of Gears

Bc. Tomáš Karas

Vedoucí práce: Ing. Jan Flek

Studijní program: NDTT Dopravní a transportní technika

Studijní obor: N071TTTE Transportní technika

Praha 2023

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem svou Diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu.

V Praze dne .....

.....

Bc. Tomáš Karas

## **Poděkování**

Rád bych touto cestou vyjádřil poděkování Ing. Janu Flekovi za jeho odborné vedení mé práce, za jeho čas, cenné poznámky a připomínky, a také za možnost častých osobních konzultací. V neposlední řadě patří poděkování mé rodině, která mě při vytváření této práce maximálně podpořila.

Bc. Tomáš Karas

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Karas** Jméno: **Tomáš** Osobní číslo: **483269**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávající katedra/ústav: **Ústav konstruování a částí strojů**  
Studijní program: **Dopravní a transportní technika**  
Specializace: **Transportní technika**

## II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

**Experimentální analýza tuhosti ozubení**

Název diplomové práce anglicky:

**Experimental Analysis of the Mesh Stiffness of Gears**

Pokyny pro vypracování:

V rámci diplomové práce proveďte experimentální stanovení tuhosti sady vzorků ozubených soukolí.

Osnova:

- Rešerše problematiky simulačního modelování a experimentálního stanovení tuhosti ozubení
- Popis experimentálního stanoviště včetně přípravy a realizace experimentu
- Aplikace simulačních modelů tuhosti ozubení pro možnost verifikace experimentu
- Vyhodnocení, závěry

Seznam doporučené literatury:

MORAVEC, Vladimír. Konstrukce strojů a zařízení II.: Čelní ozubená kola: teorie, výpočet, konstrukce, výroba, kontrola. Ostrava: Montanex, 2001. ISBN 80-722-5051-5.  
RAGHUWANSHI, N. K.; PAREY, A.: Experimental measurement of spur gear mesh stiffness using digital image correlation technique. Measurement, ročník 111, 2017: s. 93-104, ISSN 0263-2241, doi:<https://doi.org/10.1016/j.measurement.2017.07.034>  
Flek, J.; Dub, M.; Kolář, J.; Lopot, F.; Petr, K. Determination of Mesh Stiffness of Gear—Analytical Approach vs. FEM Analysis. Appl. Sci. 2021, 11, 4960. <https://doi.org/10.3390/app11114960>

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

**Ing. Jan Flek ústav konstruování a částí strojů FS**

Jméno a pracoviště druhého(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **11.04.2023** Termín odevzdání diplomové práce: **05.08.2023**

Platnost zadání diplomové práce: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
Ing. Jan Flek  
podpis vedoucí(ho) práce

\_\_\_\_\_  
Ing. František Lopot, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

\_\_\_\_\_  
doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

\_\_\_\_\_  
Datum převzetí zadání

\_\_\_\_\_  
Podpis studenta

# Anotační list

<b>Název práce:</b>	EXPERIMENTÁLNÍ ANALÝZA TUHOSTI OZUBENÍ
<b>Autor:</b>	Bc. Tomáš Karas
<b>Rok:</b>	2023
<b>Studijní program:</b>	NDTT Dopravní a transportní technika
<b>Studijní obor:</b>	N071TTTE Transportní technika
<b>Ústav:</b>	Ústav konstruování a částí strojů
<b>Vedoucí práce:</b>	Ing. Jan Flek
<b>Bibliografické údaje:</b>	Počet stran: 122 Počet obrázků: 91 Počet tabulek: 21 Počet příloh: 1

## Abstrakt:

Diplomová práce se zabývá metodikou měření tuhosti ozubení, analytickými modely pro odhad tuhosti ozubení a simulací zatěžovacího stavu pomocí metody konečných prvků. Tato práce je rozdělena do tří hlavních částí.

Teoretická část práce je zaměřena na řešení jednotlivých analytických a simulačních modelů, ale také různých přístupů k experimentálnímu měření tuhosti ozubení.

V praktické části byl nejprve popsán základní princip měřícího standu a následně proběhla příprava na experimentální část práce. Byly využity analytické a simulační modely a byly vytvořeny nástroje pro práci s daty a pro jejich vyhodnocení.

Experimentální část se pak zabývá samotným měřením a finalizací metodiky měření tuhosti ozubení. Jsou v ní také vysvětleny jednotlivé problémy spojené s experimentem. Poslední část zahrnuje diskuzi výsledků, vyhodnocení a závěry.

## Klíčová slova:

Přímé ozubení, Tuhost ozubení, Model deformační energie, Metoda konečných prvků, Experimentální analýza

**Title:** Experimental Analysis of the Mesh Stiffness of Gears

**Author:** Bc. Tomáš Karas

**Abstract:**

The master thesis deals with the methodology of measuring the mesh stiffness of gears, analytical models for estimating the mesh stiffness and simulation of the loading condition using the finite element method. This thesis is divided into three main parts.

The theoretical part of the thesis focuses on the review of different analytical and simulation models, as well as different approaches to the experimental measurement of gearing stiffness.

In the practical part, the basic principle of the measuring stand was first described and then the preparation for the experimental part of the work was carried out. Analytical and simulation models were used and tools for data handling and evaluation were developed.

The experimental part then deals with the actual measurement and the finalisation of the methodology for measuring the mesh stiffness of the gears. It also explains the various problems associated with the experiment. The last part includes a discussion of the results, evaluation and conclusions.

**Keywords:** Spur gears, Mesh stiffness of gears, Deformation energy model, Finite element method, Experimental analysis

## Seznam použitých symbolů a označení

Symbol	Jednotka	Význam
$a_w$	$[mm]$	Valivá osová vzdálenost
$A_x$	$[mm^2]$	Plocha průřezu odříznuté části zubu
$A_i$ až $E_i$ a $G_i$	$[1]$	Koeficienty pro tuhost ovlivněné patní oblasti
$b$	$[mm]$	Šířka zubu/vzorku
$c$	$\left[ \frac{N}{mm \cdot \mu m} \right]$	Tuhost ozubení
$c'$	$\left[ \frac{N}{mm \cdot \mu m} \right]$	Maximální jednopárová tuhost
$c'_{th}$	$\left[ \frac{N}{mm \cdot \mu m} \right]$	Teoretická jednopárová tuhost
$c_\gamma$	$\left[ \frac{N}{mm \cdot \mu m} \right]$	Záběrová tuhost
$C_B$	$[1]$	Součinitel tvaru tělesa
$C_M$	$[1]$	Korekční součinitel pro model ISO
$C_R$	$[1]$	Součinitel vlivu nestandardního profilu zubu
$C_1$ až $C_9$	$[1]$	Koeficienty pro ISO model
$d$	$[mm]$	Průměr roztečné kružnice
$d$	$[mm]$	Vzdálenost bodu záběru od místa vetknutí
$d_1$	$[mm]$	Vzdálenost mezi základní a patní kružnicí
$E$	$[MPa]$	Youngův modul pružnosti v tahu
$E_e$	$[MPa]$	Efektivní modul pružnosti v tahu
$f_\sigma$	$[1]$	Optická citlivost materiálu
$F$	$[N]$	Zátěžná síla
$FIN$	$[MPa \cdot \sqrt{mm}]$	Faktor intenzity napětí
$F_i$	$[N]$	Síla
$F_{BR}$	$[N]$	Zastavovací síla
$F_R$	$[N]$	Radiální složka zátěžné síly
$F_T$	$[N]$	Tečná složka zátěžné síly
$G$	$[N]$	Tíha závaží
$G$	$[MPa]$	Youngův modul pružnosti ve smyku
$h$	$[mm]$	Vzdálenost bodu záběru od osy zubu
$h_a^*$	$[1]$	Jednotková výška hlavy

Symbol	Jednotka	Význam
$h_f^*$	[1]	Jednotková výška paty
$h_{c1}$	[mm]	Vzdálenost konce trhliny od osy zubu
$h_r$	[mm]	Vzdáleností špičky zubu od osy zubu
$h_x$	[mm]	Polovina šířky zubu v integrační vzdálenosti x
$i$	[1]	Převodový poměr
$I_x$	[kg · mm <sup>2</sup> ]	Moment setrvačnosti odříznuté části zubu
$K_i$	$\left[ \frac{N}{mm \cdot \mu m} \right]$	Tuhost
$K_{pár_i}$	$\left[ \frac{N}{mm \cdot \mu m} \right]$	Celková tuhost i-tého páru zubů
$K_2$	$\left[ \frac{N}{mm \cdot \mu m} \right]$	Celková dvoupárová tuhost
$L_i$	[mm]	Délka kontaktní čáry
$LSR_i$	[1]	Poměr rozložení sil
$L^*, M^*, P^*$ a $Q^*$	[1]	Polynomické koeficienty pro tuhost ovlivněné patní oblasti
$m$	[1]	Počet párů v záběru
$m_n$	[mm]	Normálový modul
$m_Z$	[kg]	Hmotnost závaží
$M$	[N · mm]	Moment
$M_k$	[N · mm]	Krouticí moment
$n_p$	[1]	Počet párů v záběru
$N$	[1]	Lomový řád
$P$	[N]	Tíha páky
$P_w$	[J]	Deformační práce
$r_f^*$	[1]	Jednotkový poloměr zaoblení hlavy výrobního hřebene
$R$	[mm]	Aktuální délka ramne
$R$	[1]	Posuzující parametr pro efektivní modul pružnosti v tahu
$R_a$	[mm]	Poloměr hlavové kružnice
$R_b$	[mm]	Poloměr základní kružnice
$R_f$	[mm]	Poloměr patní kružnice



Symbol	Jednotka	Význam
$R_i$	$[mm]$	Poloměr díry pro hřídel (náboje)
$R_{max}$	$[mm]$	Maximální (vodorovná) délka ramene
$S_f$	$[mm]$	Délka oblouku úseku patní kružnice příslušné jednomu zubu
$u_f$	$[mm]$	Rameno síly pro tuhost ovlivněné patní oblasti
$U$	$[J]$	Deformační energie
$v$	$[mm]$	Výška oblouku kruhové úseče
$w$	$[\frac{N}{mm}]$	Šířkové zatížení
$w_i$	$[\frac{N}{mm}]$	Šířkové zatížení i-tého páru zubů
$x$	$[mm]$	Integrační vzdálenost od místa vetknutí
$x_i$	$[1]$	Jednotková korekce i-tého zubu
$x_\Sigma$	$[1]$	Celková jednotková korekce soukolí
$Y$	$[1]$	Tvarová (korekční) funkce
$z_1$	$[1]$	Počet zubů i-tého kola
$\alpha$	$[rad]$	Integrační úhel
$\alpha_n$	$[^\circ]$	Normálový úhel záběru
$\alpha_1$	$[rad]$	Záběrový úhel
$\alpha_2$	$[rad]$	Polovina úhlu šířky zubu na základní kružnici
$\alpha_3$	$[rad]$	Úhel pro určení rozdílu mezi základní a patní kružnicí
$\beta$	$[^\circ]$	Úhel sklonu zubů
$\delta$	$[\mu m]$	Celková přímková deformace zubů
$\delta_{B_i}$	$[\mu m]$	Ohybová deformace i-tého zubu (Bending)
$\delta_{H_{1,2}}$	$[\mu m]$	Stlačení boků zubů vlivem Hertzových tlaků (Hertzian flattening)
$\delta_i$	$[\mu m]$	Deformace
$\delta_{KR_i}$	$[\mu m]$	Naklonení základního materiálu i-tého kola (Tilting)
$\delta_\varphi$	$[rad]$	Úhlová deformace zubů
$\Delta$	$[mm]$	Chyba sesazení šířek kol
$\varepsilon_\alpha$	$[1]$	Součinitel záběru profilu
$\varepsilon_\gamma$	$[1]$	Součinitel celkového záběru

Symbol	Jednotka	Význam
$\theta_d$	[rad]	Úhel trvání dvoupárového záběru
$\theta_f$	[rad]	Polovina úhlu šířky zubu na patní kružnici
$\theta_s$	[rad]	Úhel trvání jednopárového záběru
$\theta_1$	[rad]	Úhel pootočení pastorku
$\nu$	[1]	Poissonova konstanta
$\tau$	[1]	Čas průběhu tuhosti
$\varphi$	[°]	Natočení kol
$\varphi_{max}$	[rad]	Celkové natočení kol
$\psi$	[°]	Úhel šířky zubu na roztečné kružnici
$\psi_a$	[°]	Úhel šířky zubu na roztečné hlavové
$\psi_{1p}$	[°]	Průměrná deformace během jednopárového záběru
$\psi_\gamma$	[°]	Průměrná deformace během dvoupárového záběru

## Seznam indexů

Index	Význam
$a$	Axiální tlak
$b$	Ohyb
$f$	Patní kružnice
$h$	Hertz
$s$	Smyk
$x$	Proměnný při integraci
1	Pastorek - Ozubené kolo 1
2	Kolo - Ozubené kolo 2

## Seznam použitých zkratk a označení

Označení	Význam
AM	Analytický model
BC	Okrajová podmínka
Boxplot	Typ grafu reprezentující pravděpodobnostní rozložení dat
cell	Typ proměnné v softwaru MATLAB - Buňka
csv	Typ souboru s hodnotami oddělenými čárkami
DIC	Digitální korelace obrazu
Dvoupárová tuhost	Tuhost při záběru dvou párů zubů na ozubeném věnci
FEM	Metoda konečných prvků
FIN	Faktor intenzity napětí
FOR cyklus	Opakovací cyklus s nastaveným počtem opakování, počátečním indexem a krokem
IRC	Inkrementální snímač natočení
Jednopárová tuhost	Tuhost při záběru jednoho párů zubů na ozubeném věnci
LDS	Laserový snímač posunutí
LSR	Poměr rozložení sil
LVDT	Senzor lineárního posunutí
MKP	Metoda konečných prvků
Model DE	Analytický model založený na deformační energii
N	Nekorigované soukolí
Pitting	Bodové poškození boků zubů
PMMA	Polymethylmetakrylát - Plexiglas®
RP	Referenční bod
Stand	Experimentální stanoviště
V-	Záporně korigované soukolí
V+	Kladně korigované soukolí
Zátěžná síla	Síla působící v bodu záběru zubového páru ve směru kolmém na evolventní bok zubu

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Tuhost ozubení</b>	<b>4</b>
2.1	Jednopárová tuhost . . . . .	4
2.2	Dvoupárová tuhost . . . . .	5
2.3	Model ISO 6336 - 1 - 2006 . . . . .	6
2.3.1	Jednopárová tuhost . . . . .	7
2.3.2	Dvoupárová tuhost . . . . .	8
2.4	Model Deformační Energie . . . . .	8
2.4.1	Základní složky tuhosti ozubení . . . . .	8
2.4.2	Hertzova kontaktní tuhost . . . . .	14
2.4.3	Tuhost ovlivněné oblasti disku kola pod patní kružnicí . . . . .	16
2.4.4	Celková tuhost . . . . .	18
2.5	Využití programu KISSsoft pro výpočet tuhosti . . . . .	18
2.6	Simulační metoda získání tuhosti - MKP . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Současný stav problematiky měření tuhosti ozubení</b>	<b>26</b>
3.1	Experimentální měření a numerická validace tuhosti osamělého zubu pro čelní evolventní ozubená kola . . . . .	26
3.2	Experimentální měření tuhosti ozubení s trhlinou v patě zubu pomocí statických zkoušek . . . . .	27
3.2.1	Experimentální výzkum tuhosti čelního ozubení s trhlinou za použití fotoelasticimetrie . . . . .	29
3.2.2	Měření tuhosti přímého ozubení s trhlinou pomocí fotoelasticime . . . . .	30
3.2.3	Experimentální měření tuhosti čelního ozubení s trhlinou pomocí tenzometrie . . . . .	32
3.2.4	Experimentální měření tuhosti čelního ozubení za použití techniky digitální korelace obrazu . . . . .	33
3.2.5	Experimentální měření tuhosti ozubení pomocí laserového snímače posunutí . . . . .	36
3.3	Zhodnocení statických metod měření tuhosti . . . . .	37
3.4	Běhové zkoušky . . . . .	39

<b>4</b>	<b>Použité měřicí zařízení a vzorky</b>	<b>41</b>
4.1	Měřicí zařízení . . . . .	41
4.1.1	Měřicí souprava . . . . .	43
4.1.2	LabVIEW . . . . .	46
4.2	Sada vzorků . . . . .	48
4.2.1	Materiál vzorků . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Příprava modelů a nástrojů pro práci s daty</b>	<b>52</b>
5.1	Model ISO 6336 . . . . .	52
5.2	Model KISSsoft . . . . .	53
5.2.1	Kontaktní analýza KISSsoft . . . . .	54
5.2.2	MKP analýza . . . . .	56
5.3	Model Deformační Energie . . . . .	57
5.4	MKP Model - Abaqus . . . . .	63
5.4.1	Vytvoření modelu . . . . .	63
5.4.2	Nastavení sítě . . . . .	64
5.4.3	Nastavení materiálových vlastností . . . . .	65
5.4.4	Nastavení výpočetních kroků . . . . .	66
5.4.5	Nastavení interakcí . . . . .	67
5.4.6	Nastavení zatížení a okrajových podmínek . . . . .	69
5.4.7	Zpracování výsledků . . . . .	70
5.5	Příprava nástroje pro převedení naměřených deformací na tuhost . . . . .	72
5.6	Příprava nástrojů na porovnání dat . . . . .	76
<b>6</b>	<b>Průběh prvních měření</b>	<b>79</b>
6.1	Prvotní způsob měření . . . . .	79
6.1.1	Příprava měřicího standu . . . . .	79
6.1.2	Nastavení referenční polohy IRC snímače a zatížení vzorku . . . . .	81
6.2	Problematika materiálu vzorků . . . . .	81
6.3	Přidání jednoduchého polariskopu . . . . .	83
6.4	Zjištění rozsahu jednotlivých typů záběru během odvalu ozubených kol . . . . .	84
6.5	Přechodná oblast . . . . .	84
6.6	Předzatěžovací cyklus . . . . .	85
6.7	Způsob zatěžování . . . . .	87
<b>7</b>	<b>Finální podoba metodiky experimentálního měření tuhosti ozubení</b>	<b>88</b>
<b>8</b>	<b>Diskuze výsledků</b>	<b>91</b>
8.1	Proměnná tuhost při zatěžování . . . . .	91
8.2	Rozdílná tuhost vzorků se šířkou 5 a 8 mm . . . . .	94
8.3	Výsledné grafy pro vybrané vzorky . . . . .	95

---

8.3.1	Vzorky s osovou vzdáleností $a_w = 174,5 \text{ mm}$ . . . . .	95
8.3.2	Vzorky s osovou vzdáleností $a_w = 176 \text{ mm}$ . . . . .	99
8.3.3	Vzorky s osovou vzdáleností $a_w = 182 \text{ mm}$ . . . . .	102
8.4	Porovnání různě korigovaných vzorků . . . . .	104
8.5	Zhodnocení analytických a simulačních modelů . . . . .	108
8.6	Možnosti vylepšení experimentu . . . . .	109
<b>9</b>	<b>Závěr</b>	<b>111</b>
	<b>Seznam literatury</b>	<b>112</b>
	<b>Seznam obrázků</b>	<b>118</b>
	<b>Seznam tabulek</b>	<b>121</b>
	<b>Seznam příloh</b>	<b>122</b>
	<b>Seznam použitého softwaru</b>	<b>122</b>

# 1 Úvod

V dnešní době se průmyslový sektor i legislativní rámce stále více zaměřují na regulování produkce emisí strojů a zařízení. Emise nelze chápat pouze z hlediska nadměrného produkování škodlivých spalin vznikajících spalováním paliva v benzinových či diesellových agregátech. Emise lze chápat i ve smyslu produkce nepřiměřeného akustického tlaku, tedy hluku vyzařovaného do okolí.

Významným zdrojem hluku pohonných mechanismů jsou i samotné ozubené převody v převodovkách automobilů, strojů a strojních zařízeních. Tento hluk je způsoben změnami tuhosti v soukolí, tedy vnitřním buzením převodové soustavy. Průběh tuhosti ozubení je tedy důležitým parametrem pro návrh převodových systémů např. v automobilech, či návrh zubových čerpadel, apod.

Přestože má tuhost ozubení významný dopad na vibrace a hlučnost převodovek, téma tuhosti ozubení je v posledních letech často opomíjeno a není mnoho nových experimentálních studií.

Tato práce se v první řadě zaměřuje na rešerši přístupů ke zjištění průběhu tuhosti ozubení. Ten je možné získat třemi způsoby, prvním je výpočet pomocí analytických modelů, druhým je využití simulačních modelů (metody konečných prvků) a třetím ale nikoliv nejméně významným způsobem je experimentální měření.

Tyto přístupy není vhodné využívat samostatně pokud je účelem zjištění průběhu tuhosti výzkum. Při využití k návrhu ozubených kol s požadovanou tuhostí je možné využít pouze jednoho z přístupů za účelem zrychlení návrhu. Pro takový případ je tedy důležité znát omezení a zjednodušení, které použité modely zatěžují. Experimentální ověření analytických modelů je pak nezbytné pro ověření jejich přesnosti.

Následuje aplikování jednotlivých způsobů zjištění tuhosti ozubení na zkušební sadu vzorků. Za účelem dosažení co nejvíce vypovídajících dat je vhodné využít jak analytické a simulační modely, tak experimentální měření.

Jelikož analytické modely popisují tuhost ozubení v konkrétním bodu záběru, bude nutné vytvořit nástroj pro výpočet tuhosti většího množství záběrových bodů pro vytvoření proměnného průběhu tuhosti ozubení.

Simulační modely využívají metody konečných prvků a vhodného softwaru pro výpočet nejen tuhosti ozubení. Bude tedy vhodně zvolen výpočtový software a provedeno detailní nastavení výpočtu pro možnost verifikace experimentu.

Dále bude proveden popis základní funkce experimentálního stanoviště (dále jen měřicí stand) a příprava experimentálního měření. Také vytvoření nástrojů pro práci s daty a pro jejich finální vyhodnocení. Na ní naváže samotné měření, během kterého bude vytvořena metodika měření tuhosti ozubení na přiděleném měřicím standu.

Získaná data z měření budou společně s daty z analytických a simulačních modelů porovnána. Na základě výsledných průběhů tuhosti ozubení bude provedeno vyhodnocení a stanoveny závěry.

Tato práce tvoří metodický podklad pro další výzkumnou činnost v oblasti dynamiky ozubených převodů, která se bude orientovat na reálná ozubená kola, zejména na měření průběhů zdrojů vnitřního buzení převodovek.



# Teoretická část

## 2 Tuhost ozubení

Z hlediska namáhání zubů ozubených kol, lze jednotlivé zuby uvažovat jako vetknuté nosníky. Toto pojetí zuby je dáno výpočtovým modelem dle *Bacha* [1]. Každý zub jako vetknutý nosník v místě patního přechodu je pak deformován působením zatížení od druhého zuby v daném páru. Zatížení vyplývá ze silového rozkladu v bodě záběru v daném okamžiku. Ze známého silového působení a ze známé deformace zubů lze stanovit tuhost jednotlivých zabírajících párů zubů v záběru. Tuhost ozubení  $c$  je tedy dána vztahem (2.1), kde  $w$  představuje šířkové zatížení v konkrétním bodě záběru, udává se nejčastěji v  $\left[\frac{N}{mm}\right]$  a  $\delta$  je odpovídající přímková deformace zuby v místě dotyku a směru zatížení. Tato deformace se vzhledem k dosahovaným hodnotám standardně uvádí v  $[\mu m]$ . Tímto je způsobeno, že se tuhost ozubení  $c$  udává ve velmi specifických jednotkách, a to  $\left[\frac{N}{mm \cdot \mu m}\right]$ . Tato jednotka je však velmi názorná a je použita v celém rozsahu práce.

$$c = \frac{w}{\delta} \quad \left[ \frac{N}{mm \cdot \mu m} \right] \quad (2.1)$$

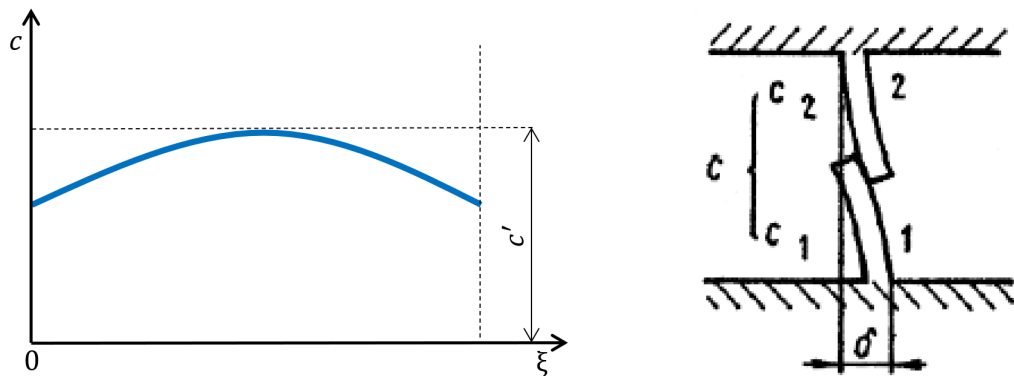
Při otáčení soukolí dochází k periodickým změnám záběru jednoho a dvou párů zubů, tedy změnám mezi tzv. jednopárovým a dvoupárovým záběrem<sup>1</sup>. To způsobuje časově proměnný průběh tuhosti. A právě proměnná změna tuhosti ozubení je hlavním zdrojem buzení periodických kmitů soukolí. Délka periody se mění v závislosti na součiniteli celkového záběru  $\varepsilon_\gamma$  (pro přímé ozubení se  $\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha$  tedy součinitel záběru profilu). [2][3]

### 2.1 Jednopárová tuhost

Tuhost a deformace se u jednotlivých párů zubů mění v průběhu záběru. Největší deformace zubového páru nastává v okamžiku, kdy zátěžná síla (síla v normálovém směru k evolventě) působí na vrcholu zuby a ohybový moment je tedy největší.

<sup>1</sup>Toto neplatí obecně, ale pouze v případě přímého ozubení.

Největší tuhost jednoho páru zubů je přibližně v polovině délky záběru, jelikož se zuby potkávají v místě největší součtové tloušťky. Tato tuhost je označována jako  $c'$  viz Obrázek 1a). Lze tedy říci, že průběh tuhosti jednoho páru zubů v závislosti na součiniteli trvání záběru má parabolický tvar. Deformace zubů jednoho páru ozubení může být nahrazena sériovým modelem dvou pružin dle Obrázku 1b). [2][3]



a) Průběh tuhosti

b) Nahrazení sériovým zapojením pružin

**Obrázek 1:** Tuhost jednoho páru zubů, převzato a upraveno z [2]

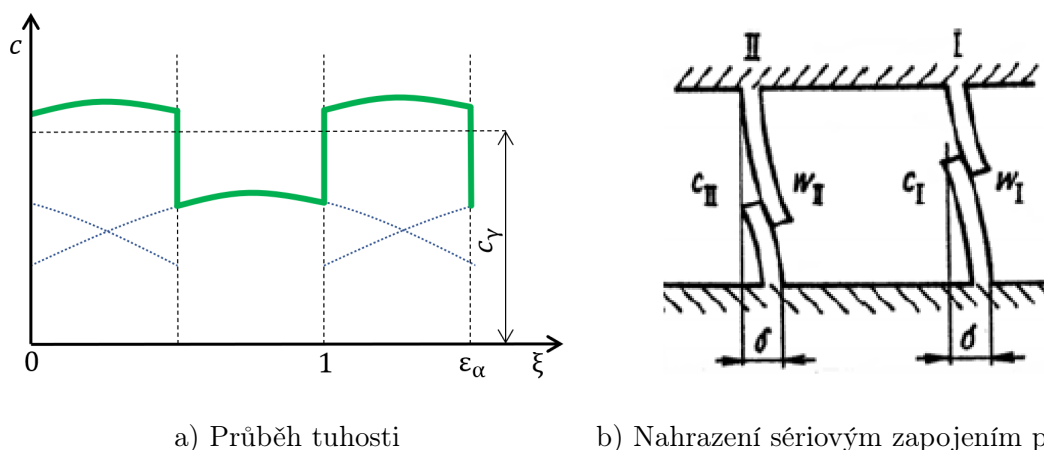
## 2.2 Dvoupárová tuhost

Stejně jako jednopárová tuhost vychází i tuhost dvoupárová ze vztahu (2.1). Lze předpokládat, že celková tuhost je složena ze dvou dílčích tuhostí jednotlivých párů zubů. Z tohoto důvodu je uvažováno i šířkové zatížení jako suma dílčích šířkových zatížení  $w = w_I + w_{II}$ .

Zde se projeví rozdělení zátěžné síly mezi jednotlivé páry zubů. Tuto problematiku popisuje například práce:

- Čelní a šroubová soukolí s evolventním ozubením [2]
- The effects of spur gear tooth spatial crack propagation on gear mesh stiffness [4]
- Approximate equations for the meshing stiffness and the load sharing ratio of spur gears including hertzian effects [5]

Tato problematika je detailněji popsána v kapitole 2.4.2, se kterou úzce souvisí. Velikost jednotlivých šířkových zatížení  $w_i$  je tedy závislá na LSR (Load sharing ratio) - poměru rozložení sil (Obrázek 5). Deformace  $\delta$  označuje celkovou deformaci dvou párů zubů v záběru.



a) Průběh tuhosti

b) Nahrazení sériovým zapojením pružin

**Obrázek 2:** Tuhost dvou páru zubů, převzato a upraveno z [2]

Záběr dvou párů zubů lze v tomto případě modelovat jako soustavu dvou paralelně uspořádaných dvojic pružin viz Obrázek 2b). Na Obrázku 2a) je zobrazen průběh celkové tuhosti přímého ozubení (vyznačeno zeleně). Je na něm také zobrazena tuhost jednotlivých párů zubů (vyznačeno čárkovaně). Je tak zřetelně naznačeno periodické střídání záběru jednoho a dvou párů zubů.

Doba trvání jednotlivých druhů záběru je přímo závislá na součiniteli záběru  $\varepsilon_\alpha$  a lze ji tak ovlivnit například korekcí ozubení [1]. Korekce je proto jedním z hlavních parametrů, který vstupoval do návrhu sady vzorků (viz kapitola 4.2). Vyznačená záběrová tuhost  $c_\gamma$  je zde zavedena pro zjednodušení výpočtu a slouží i jako přibližná reprezentační hodnota tuhosti soukolí [2][3]. Pracuje s ní například model ISO 6336 - 1 - 2006, který je vysvětlen v další kapitole.

## 2.3 Model ISO 6336 - 1 - 2006

Tato metoda pro výpočet tuhosti využívá sadu empirických vzorců, které byly vytvořeny na základě experimentů provedených na škále ozubených soukolí. Metoda je popsána v normě ISO 6336-1-2006 [6] a je důležité uvést, že je použitelná pouze pro ozubení splňující tyto parametry:

- Vnější přímé a šikmé ozubení s úhlem  $\beta$  do  $45^\circ$
- Ozubení se standartním profilem zubu<sup>2</sup> daného normou ISO 53 [7]
- Pro jednotkové korekce ozubení platí  $x_1 \geq x_2$  a zároveň se celková jednotková korekce  $x_\Sigma$  pohybuje v intervalu  $[-0,5; 2]$

<sup>2</sup>Tuto podmínku do jisté míry řeší součinitele  $C_B$  a  $C_R$  ve vztahu (2.3).

Další nevýhodou je vysoká nepřesnost (až 20%) [2]. Norma také přímo neuvádí přesný materiál vzorků, které byly použity při experimentech a neumožňuje provést výpočet pro konkrétní materiál. Model je tedy určen pouze pro ozubená kola z vysokopevnostní oceli. [6]

Tento model pro stanovení tuhosti využívají zejména čeští autoři Č. Šalamoun [2] a V. Moravec [3] ve svých publikacích. V novějších článcích se tento model neobjevuje příliš často, ale například autoři Z. Wan, H. Cao, Y. Zi, W. He, Z. He [8] využívají tento model pro porovnání nových komplexnějších modelů.

### 2.3.1 Jednopárová tuhost

Norma uvádí vztah (2.2) pro výpočet teoretické jednopárové tuhosti  $c'_{th}$ . Koeficienty  $C_1$  až  $C_9$  (viz Tabulka 2.1) jsou konstanty stanovené na základě experimentů na výše popsaných ozubených kolech. Dále  $z_1$  a  $z_2$  jsou počty zubů jednotlivých kol v záběru,  $x_1$  a  $x_2$  jsou pak příslušné korekce.

$$\frac{1}{c'_{th}} = C_1 + \frac{C_2}{z_1} + \frac{C_3}{z_2} - C_4 \cdot x_1 - C_5 \cdot \frac{x_1}{z_1} - C_6 \cdot x_2 - C_7 \cdot \frac{x_2}{z_2} + C_8 \cdot x_1^2 + C_9 \cdot x_2^2 \quad (2.2)$$

**Tabulka 2.1:** Konstanty pro model ISO 6336-1-2006, převzato z [6]

$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_7$	$C_8$	$C_9$
0,04723	0,15551	0,25791	0,00635	0,11654	0,00193	0,24188	0,00529	0,00182

K této teoretické hodnotě následně norma přidává korekční součinitele a možnost přepočtu z přímého ozubení na šikmé pomocí  $\cos\beta$ . Z rovnice (2.3) tedy získáme reálnou jednopárovou tuhost zubů  $c'$ .

$$c' = c'_{th} \cdot C_M \cdot C_R \cdot C_B \cdot \cos\beta \quad (2.3)$$

$C_M \approx 0,8$  - představuje korekční součinitel, který uvažuje rozdíl mezi teoretickou a experimentálně zjištěnou hodnotou tuhosti.

$C_R$  - součinitel tvaru tělesa slouží ke snížení hodnoty tuhosti v případě, že se nejedná o plné diskové kolo.

$C_B$  - součinitel vyjadřuje vliv nestandardního profilu zubu. Tedy případ, kdy  $\alpha_n \neq 20^\circ$  a  $h_f^* \neq 1,25$ .

### 2.3.2 Dvoupárová tuhost

Dvoupárovou tuhost norma vyjadřuje jako záběrovou tuhost  $c_\gamma$ , je zobrazena například na Obrázku 2a). A je vypočtena podle vztahu (2.4) přepočtem z jednopárové tuhosti  $c'$ , kde  $\varepsilon_\alpha$  představuje součinitel záběru profilu.

$$c_\gamma = (0,75 \cdot \varepsilon_\alpha + 0,25)c' \quad (2.4)$$

## 2.4 Model Deformační Energie

Na rozdíl od ISO modelu je tento model výrazně komplexnější a umožňuje značnou variabilitu v oblasti materiálu, tvaru zubů, ale i modelování dílčích tuhostí. Model je založen na teorii nosníků a v rámci teorie pružnosti uvažuje, že zub na ozubeném věnci je možné modelovat jako vetknutý nosník, který je vetknutý v místě základní kružnice [9]. Novější práce tento model zpřesňují a uvažují vetknutí v místě patní kružnice [10].

Zatížení uvažuje jako normálovou sílu vůči evolventě  $F$ , viz Obrázek 3. Od této síly je odvozeno zatížení ohybem, smykem a axiálním tlakem<sup>3</sup>. Pro tyto tři druhy zatížení je stanovena deformační energie s ohledem na konkrétní geometrii ozubení. Následně jsou z těchto deformačních energií vypočteny dílčí tuhosti, které tvoří základ celkové tuhosti ozubení.

Tento model se objevuje ve značném množství vědeckých prací. Jsou zde tedy na úvod shrnuty základní vztahy (vycházející ze základní teorie pružnosti), které jsou pro všechny práce stejné. Následně budou jednotlivé úpravy a doplnění popsány i s odkazem na konkrétní práci.

Dále bude tento model označován jako „model DE“.

### 2.4.1 Základní složky tuhosti ozubení

V následujících rovnicích (2.5, 2.6 a 2.7) jsou uvedeny vztahy pro výpočet jednotlivých deformačních energií  $U$ . Indexem  $b$  jsou označeny proměnné příslušné k ohybu, indexem  $s$  je označen smyk a indexem  $a$  je označeno axiální tlakové zatížení.

$$U_b = \frac{F^2}{2 \cdot K_b} \quad (2.5)$$

$$U_s = \frac{F^2}{2 \cdot K_s} \quad (2.6)$$

<sup>3</sup>Axiálním tlakem je myšleno zatížení ve směru osy zubu nikoliv v ose celého kola.

$$U_a = \frac{F^2}{2 \cdot K_a} \quad (2.7)$$

$K$  v těchto rovnicích označuje příslušné tuhosti. Pomocí teorie nosníků v mechanice poddajných těles lze deformační energii zubu (uvažovaného jako vetknutý nosník) zapsat také následujícími vztahy (2.8, 2.9 a 2.10).

$$U_b = \int_0^d \frac{M^2}{2 \cdot E \cdot I_x} dx \quad (2.8)$$

$$U_s = \int_0^d \frac{1,2 \cdot F_b^2}{2 \cdot G \cdot A_x} dx \quad (2.9)$$

$$U_a = \int_0^d \frac{F_a^2}{2 \cdot E \cdot A_x} dx \quad (2.10)$$

Kde  $E$  a  $G$  jsou Youngovy moduly pružnosti v tahu a smyku, zde se tedy projeví vliv materiálu.  $A_x$  představuje plochu průřezu zubu, která je kolmá na osu zubu.  $I_x$  je pak moment setrvačnosti odříznuté části zubu. Index  $x$  značí vzdálenost od místa vetknutí (základní kružnice - bod N' na Obrázku 3).

Zátěžná síla  $F$ , která působí v záběrovém bodu ve vzdálenosti  $d$  od vetknutí. Ta se na evolventním boku zubu rozkládá v axiálním a normálovém směru vůči ose zubu. Ze silového rozkladu je stanovena axiální tlaková síla  $F_a$  (2.11) a ohybová síla  $F_b$  (2.12), viz Obrázek 3.

Axiální-tlaková a normálová-ohybová složka zátěžné síly jsou vyjádřeny pomocí záběrového úhlu  $\alpha_1$  v následujících rovnicích:

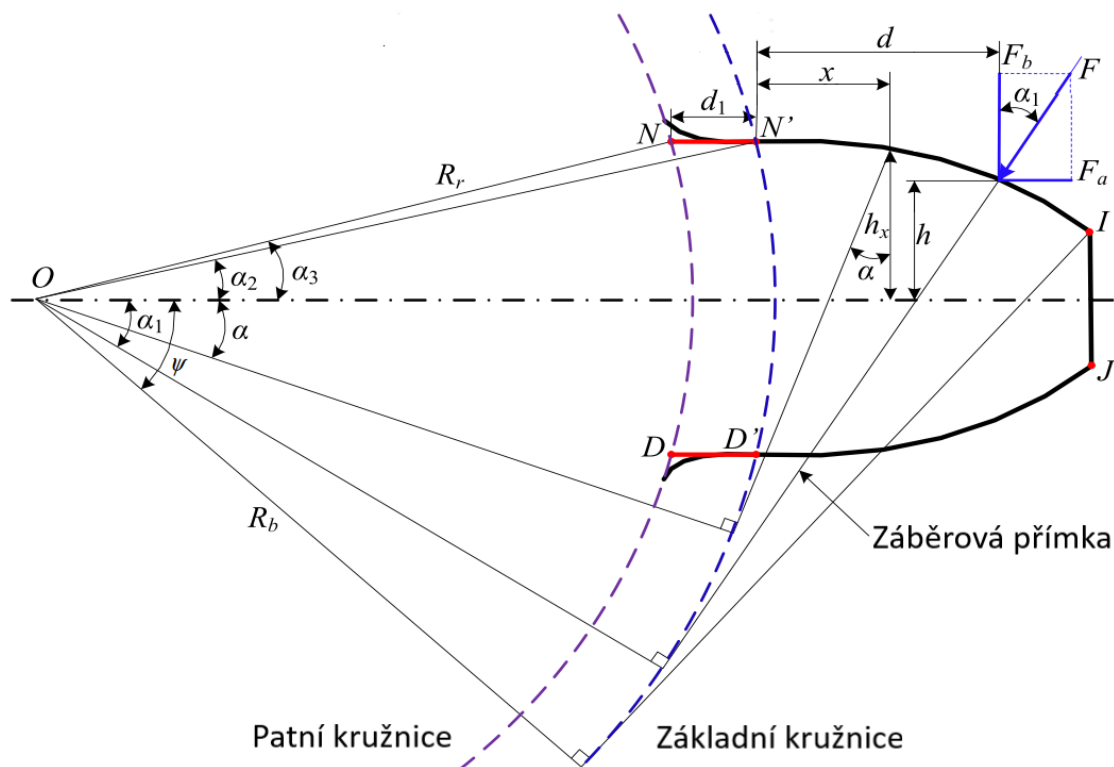
$$F_a = F \cdot \sin(\alpha_1) \quad (2.11)$$

$$F_b = F \cdot \cos(\alpha_1) \quad (2.12)$$

Ohybový moment z rovnice (2.8) vyjádříme pomocí axiální a normálové síly z předchozích rovnic (2.11 a 2.12)

$$M = F_b \cdot (d - x) - F_a \cdot h \quad (2.13)$$

V této rovnici se objevuje proměnná  $h$ , ta představuje vzdálenost místa působení zátěžné síly  $F$  od osy zubu v kolmém směru (viz Obrázek 3).



**Obrázek 3:** Namáhání zubu jakožto vetknutého nosníku, převzato a upraveno z [10]

Na základě předešlých vztahů (2.5) až (2.13) byly vytvořeny následující rovnice (2.14, 2.15 a 2.16) pro přímý výpočet ohybové, smykové a axiální-tlakové tuhosti.

$$\frac{1}{K_b} = \int_0^d \frac{[(d-x) \cdot \cos(\alpha_1) - h \cdot \sin(\alpha_1)]^2}{E \cdot I_x} dx \quad (2.14)$$

$$\frac{1}{K_s} = \int_0^d \frac{1,2 \cdot \cos^2(\alpha_1)}{G \cdot A_x} dx \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{K_a} = \int_0^d \frac{\sin^2(\alpha_1)}{E \cdot A_x} dx \quad (2.16)$$

Této metody výpočtu tuhosti využívají autoři například těchto vědeckých prací:

- Analytically evaluating the influence of crack on the mesh stiffness of a planetary gear set [10]
- A New Model for the Single Mesh Stiffness Calculation of Helical Gears Using the Slicing Principle [11]
- Dynamic Simulation for System Response of Gearbox Including Localized Gear Faults [9]



- Determination of Mesh Stiffness of Gear—Analytical Approach vs. FEM Analysis [12]
- An improved analytical model for gear mesh stiffness calculation [13]
- An improved analytical method for mesh stiffness calculation of helical gear pair considering time-varying backlash [14]
- Research on the time-varying mesh stiffness method and dynamic analysis of cracked spur gear system considering the crack position [15]
- An improved meshing stiffness calculation algorithm for gear pair involving fractal contact stiffness based on dynamic contact force [16]

Autoři těchto prací model přebírají a doplňují ho o další důležité složky, čímž zpřesňují svůj analytický model pro své konkrétní využití. Pro preciznější model zahrnují dvě další podstatné složky, které přispívají k celkové tuhosti.

Je tedy přidána kontaktní - Hertzova tuhost zubu (2.4.2) a složka tuhosti, která představuje tuhost ovlivněné oblasti disku kola pod patní kružnicí (2.4.3). Tato složka tuhosti je velmi problematická, jelikož obsahuje vliv tvaru patního přechodu. Ten závisí na technologii výroby a nelze tedy jednoduše zobecnit vztahy pro výpočet této tuhosti. I přes to, že většina ozubení je vyráběna typizovanými nástroji, které vytváří tzv. standartní tvar paty (dle ISO 53 [7]), je v dnešní době zajímavé zabývat se také ozubením s nestandardním tvarem paty.

Výše uvedené rovnice (2.14, 2.15 a 2.16) se vztahují ke konkrétnímu bodu záběru. Pro výpočet průběhu tuhosti v závislosti na natočení kol je nutné doplnit model o výpočet proměnných rozměrů zubu v závislosti na natočení kol a na základních parametrech ozubení, aby tento proces mohl být automatizován (viz kapitola 5.3).

Rozhodujícími rozměry jsou zde úhly  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  (vyznačené na Obrázku 3). Úhel  $\alpha_1$  označován někdy také jako  $\alpha_p$  („Pressure angle“ - záběrový úhel), pod kterým působí zátěžná síla. Je to ale také úhel mezi osou zubu a kolmicí na záběrovou přímkou procházející středem základní kružnice pastorku. Během odvalu se tento úhel mění úměrně s pootočením kol a toho je využito pro automatizaci výpočtu. Úhel  $\alpha_2$  je neměnný a představuje polovinu úhlu šířky zubu na základní kružnici.

Na základě těchto úhlů jsou následně vyjádřeny vztahy pro proměnné rozměry  $d$  a  $h$ , ale také rozměry pro integraci. A to vzdálenost  $x$ , polovina šířky zubu  $h_x$ , průřez zubu  $A_x$ , moment setrvačnosti  $I_x$  a vyjádření  $dx$  v závislosti na  $d\alpha$ . Tyto rozměry jsou také znázorněny na Obrázku 3.

Tyto vztahy uvádějí autoři výše zmíněných prací (konkrétně [9, 11, 10, 15, 16]).

$$h = R_b \cdot [(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \cos(\alpha_1) - \sin(\alpha_1)] \quad (2.17)$$

$$d = R_b \cdot [(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \sin(\alpha_1) + \cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2)] \quad (2.18)$$

$$h_x = R_b \cdot [(\alpha + \alpha_2) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\alpha)] \quad (2.19)$$

$$x = R_b \cdot [\cos(\alpha) - (\alpha_2 - \alpha) \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha_2)] \quad (2.20)$$

$$A_x = 2 \cdot h_x \cdot b \quad (2.21)$$

$$I_x = \frac{1}{12} \cdot (2 \cdot h_x)^3 \cdot b \quad (2.22)$$

$$dx = R_b \cdot (\alpha - \alpha_2) \cdot \cos(\alpha) \cdot d\alpha \quad (2.23)$$

Tyto rozměry byly dosazeny do rovnic (2.14, 2.15 a 2.16) a v tomto upraveném tvaru představují dílčí tuhosti jednoho zubu, uvažovaného jako vetknutý nosník v místě základní kružnice s konkrétním bodem záběru popsaným úhlem  $\alpha_1$ .

$$\frac{1}{K'_b} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{3 \cdot \{1 + \cos(\alpha_1) \cdot [(\alpha_2 - \alpha) \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha)]\}^2 \cdot (\alpha_2 - \alpha) \cdot \cos(\alpha)}{2 \cdot E \cdot b \cdot [\sin(\alpha) + (\alpha_2 - \alpha) \cdot \cos(\alpha)]^3} d\alpha \quad (2.24)$$

$$\frac{1}{K'_s} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1.2 \cdot (1 + \nu) \cdot (\alpha_2 - \alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha_1)}{E \cdot b \cdot [\sin(\alpha) + (\alpha_2 - \alpha) \cdot \cos(\alpha)]} d\alpha \quad (2.25)$$

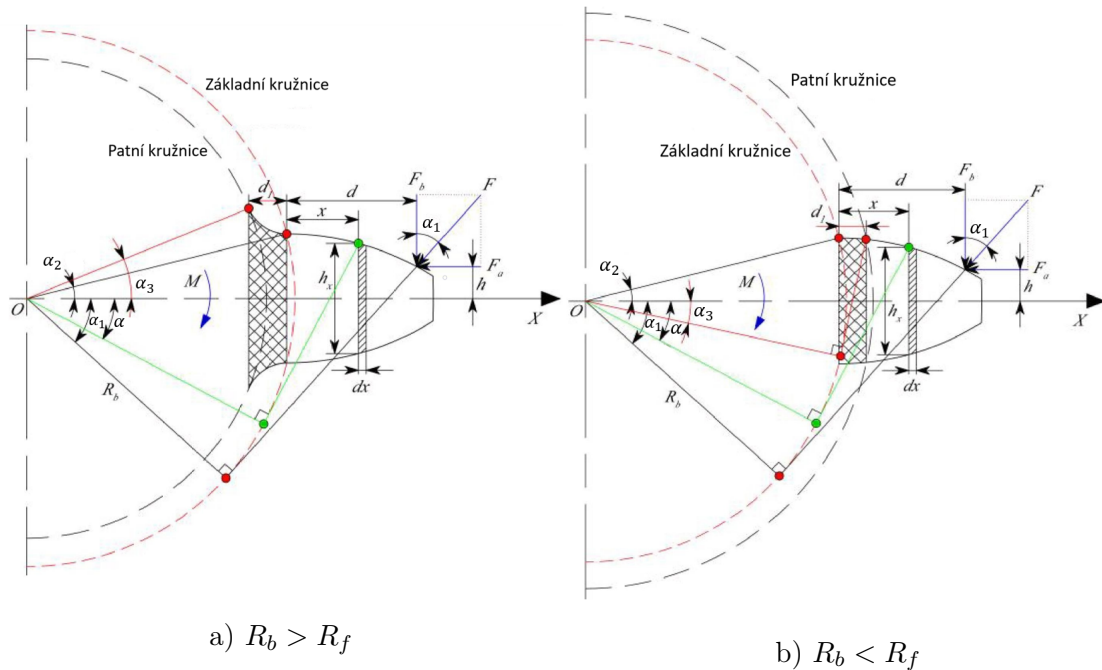
$$\frac{1}{K'_a} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{(\alpha_2 - \alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin^2(\alpha_1)}{2 \cdot E \cdot b \cdot [\sin(\alpha) + (\alpha_2 - \alpha) \cdot \cos(\alpha)]} d\alpha \quad (2.26)$$

Dále je důležité připomenout, že model DE v úplně základní podobě uvažuje zub jako nosník s proměnným průřezem vetknutý v místě základní kružnice [9]. Proto byl na Obrázku 3 zaveden rozměr  $d_1$  a úhel  $\alpha_3$ , které reprezentují rozdíl mezi základní a patní kružnicí [10, 14].

Nastává však případ, kdy má patní kružnice menší poloměr než základní kružnice, ale také případ, kdy má patní kružnice větší poloměr než základní kružnice. Tyto případy jsou zobrazeny na Obrázku 4 a) a b).

Dílčí tuhosti jsou následně doplněny o rozdíl způsobený změnou z vetknutí v místě základní kružnice na vetknutí v místě patní kružnice. To je provedeno přičtením (nebo odečtením v závislosti na případě) příslušné tuhosti  $K^*$ .

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K'} \pm \frac{1}{K^*} \quad (2.27)$$



**Obrázek 4:** Schéma zubu uvažovaného jako nosník vetknutý v místě patní kružnice, převzato a upraveno z [14]

Výpočet doplňkové tuhosti  $K^*$  je proveden dosazením příslušných integračních mezí do rovnic (2.14, 2.15 a 2.16), případně do upravených rovnic (2.24, 2.25 a 2.26). Zde se projeví již zmíněné rozměry  $d_1$  a  $\alpha_3$ , popisující rozdíl mezi základní a patní kružnicí.

(a)  $R_b > R_f$

Pro tento případ jsou dosazeny integrační meze  $[-d_1; 0]$  ( $[\alpha_2; \alpha_3]$ ).

Doplňková tuhost je přičtena.

$$\alpha_3 = \arcsin\left(\frac{R_{b1} \cdot \sin(\alpha_2)}{R_{f1}}\right) \quad (2.28)$$

$$d_1 = R_{b1} \cdot \cos(\alpha_2) - R_{f1} \cdot \cos(\alpha_3) \quad (2.29)$$

(b)  $R_b < R_f$

Pro tento případ jsou dosazeny integrační meze  $[0; -d_1]$  ( $[-\alpha_3; \alpha_2]$ ).

Doplňková tuhost je odečtena.

$\alpha_3 =$  Rovnice nebyla v pracích [10, 14] uvedena.

Bude tedy vytvořena v kapitole 5.3 jako rovnice 5.10.

$$d_1 = R_{b1} \cos(\alpha_2) - R_{f1} \cos(\alpha_3) \quad (2.30)$$

## 2.4.2 Hertzova kontaktní tuhost

Z Hertzovy kontaktní teorie vychází základní rovnice pro výpočet kontaktní tuhosti evolventních zubů  $K_h$ , která vypadá následovně:

$$\frac{1}{K_h} = \frac{4 \cdot (1 - \nu^2)}{\pi \cdot E \cdot b} \quad (2.31)$$

Materiál kol se zde projevuje konstantami  $\nu$ , která značí Poissonovu konstantu a  $E$  což je Youngův modul pružnosti v tahu. Šířka kola se poté projeví jako proměnná  $b$ . Tento výpočet byl popsán v práci *A Rotary Model for Spur Gear Dynamics* [17]. Na tento vědecký článek z roku 1985 se odkazují například tyto práce:

- Dynamic simulation of spur gear with tooth root crack propagating along tooth width and crack depth [18]
- Mesh stiffness calculation using an accumulated integral potential energy method and dynamic analysis of helical gears [19]
- Determination of Mesh Stiffness of Gear—Analytical Approach vs. FEM Analysis [12]

Autoři *W. Yu* a *C. K. Mechefske* [11] naopak využívají pro výpočet kontaktní tuhosti  $K_h$  odlišný postup. Odkazují se na práce:

- An improved analytical method for mesh stiffness calculation of spur gears with tip relief [20]
- Time-varying mesh stiffness calculation of spur gears with spalling defect [21]
- An improved analytical method for calculating time-varying mesh stiffness of helical gears [22]

Základem je tato rovnice pro kontaktní tuhost  $K_h$  i-tého páru zubů:

$$K_h^i = \frac{E_e^{0,9} \cdot L_i^{0,8} \cdot F_i^{0,1}}{1,275} \quad (2.32)$$

Zde  $L_i$  je délka kontaktní čáry mezi plochami spolu zabírajících zubů i-tého páru.  $L_i$  se obecně vypočítá jako  $b/\cos(\beta)$ , pro přímé ozubení ( $\beta = 0$ ) odpovídá délka kontaktní čáry  $L_i$  šířce ozubení  $b$ .

$E_e$  je pak efektivní modul pružnosti, který reflektuje, jestli je zub široký (stav rovinné deformace) nebo úzký (stav rovinné napjatosti). A je vyjádřen takto:

$$E_e = \begin{cases} E/(1 - \nu^2) & (R \geq 5) \\ E & (R < 5) \end{cases}, \text{ kde } R = \frac{2 \cdot L_i}{\pi \cdot m_n} \quad (2.33)$$

$R$  je zde posuzující parametr vypočtený na základě délky kontaktní čáry  $L_i$  a normálového modulu  $m_n$  (viz rovnice 2.33).  $E$  a  $\nu$  jsou již známé konstanty (Youngův modul pružnosti v tahu a Poissonova konstanta).

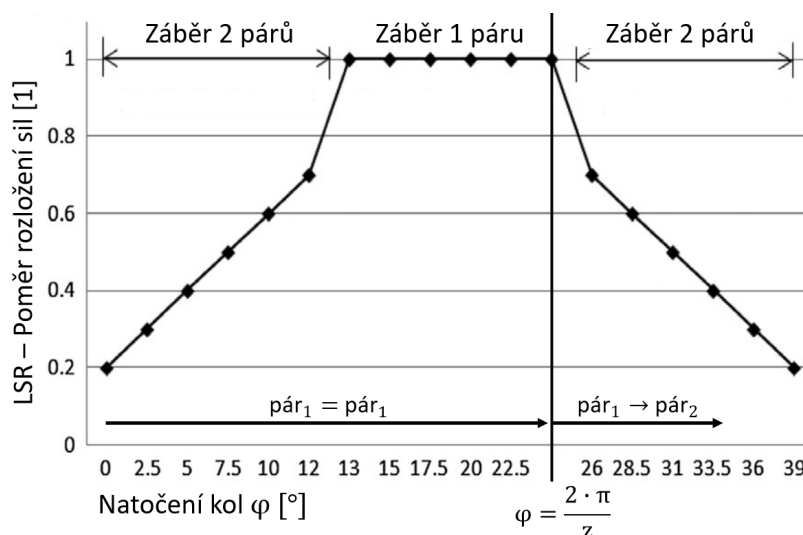
$F_i$  je jednoduše zátěžná síla působící na  $i$ -tý pár zubů, ale v případě dvoupárového záběru je nutné uvažovat rozdělení zátěžné síly mezi páry. Proto všechny výše zmíněné práce [20, 21, 22] počítají s  $LSR_i$  - poměr rozložení sil na  $i$ -tém páru zubů. Průběh  $LSR_1$  síly působící na jeden z párů zubů v průběhu záběru je zobrazen na Obrázku 5 a síla  $F_i$  se tedy vypočítá takto:

$$F_i = F \cdot LSR_i \quad (2.34)$$

$LSR_i$  je vypočítáno na základě poměru tuhostí jednotlivých párů zubů. Proto je nutné využít základních složek tuhosti ozubení (ohybová, smyková a axiální-tlaková). Z těchto dílčích složek je nutné vypočítat celkovou tuhost jednotlivých párů zubů (viz kapitola 2.4.4). Sečtení je provedeno analogicky se skládáním sériově zapojených pružin. Tedy sečtením převrácených hodnot základních tuhostí (dle rovnice 2.42 s vynecháním tuhosti  $K_h$  a  $K_f$ ). Získáme tedy tuhost  $K_{pár_1}$  a  $K_{pár_2}$ . Následně podle rovnice (2.35 a 2.36 [2]) vypočteme z jejich poměru  $LSR_1$  a  $LSR_2$  příslušné jednotlivým párům (silám  $F_i$ ).

$$LSR_1 = \frac{K_{pár_1}}{K_{pár_1} + K_{pár_2}} \quad (2.35)$$

$$LSR_2 = 1 - LSR_1 \quad (2.36)$$



**Obrázek 5:** Průběh poměru rozložení sil na  $i$ -tém zubu ( $LSR_i$ ), převzato a upraveno z [23]

Zde předpokládáme, že  $pár_1$  vstupuje do záběru v moment, kdy je vzájemné natočení kol nulové (viz Obrázek 5) a zároveň tedy začíná dvoupárový záběr. Během odvalu tedy klesá hodnota  $LSR_2$  k nule a nabývá nulové hodnoty v moment, kdy

pár<sub>2</sub> vystoupí ze záběru, nastane jednopárový záběr a celá zátěžná síla působí na pár<sub>1</sub>.

Po skončení jednopárového záběru vstoupí do záběru další pár. Nastává tedy opět „počáteční“ stav a původní pár<sub>1</sub> nyní představuje pár<sub>2</sub> až do konce dvoupárového záběru, kdy přestane figurovat v záběru. Obrázek 5 se tedy vztahuje ke konkrétnímu páru a ukazuje hodnotu  $LSR$  po dobu odvalu, během které je tento pár v záběru.

### 2.4.3 Tuhost ovlivněné oblasti disku kola pod patní kružnicí

Metoda výpočtu této složky celkové tuhosti vychází z prací *Webera* a *Banaschecka* [24], kteří se této problematice věnovali okolo roku 1950. Tato problematika je následně detailně popsána v modernějším článku *Contribution of Gear Body to Tooth Deflections—A New Bidimensional Analytical Formula* [25], ve kterém byly konstantní parametry nahrazeny polynomickou funkcí. Díky tomu lépe reflektují rozložení napětí. Na tento článek se následně odkazují například již zmínění autoři *W. Yu* a *C. K. Mechefske* [11]. Základní vztah pro výpočet této tuhosti (2.37) je relativně jednoduchý, ale je zde problém s odvozením velikosti deformace viz (2.38). Rovnice je samozřejmě možné spojit a zjednodušit zkrácením síly  $F_i$ , ale pro větší přehlednost byly ponechány rozdělené.

$$\frac{1}{K_{fi}} = \frac{\delta_{fi}}{F_i} \quad (2.37)$$

$$\delta_{fi} = \frac{F_i}{E \cdot b} \cos^2(\alpha_1) \cdot \left[ L^*(h_f, \theta_f) \left( \frac{u_f}{S_f} \right)^2 + M^*(h_f, \theta_f) \frac{u_f}{S_f} + P^*(h_f, \theta_f) \cdot [1 + Q^*(h_f, \theta_f) \cdot \tan^2(\alpha_1)] \right] \quad (2.38)$$

V těchto rovnicích  $F_i$  představuje část záběrové síly působící na  $i$ -tý zub,  $E$  je pak Youngův modul pružnosti v tahu,  $b$  značí šířku zubu,  $\alpha_1$  je zátěžný úhel,  $u_f$  značí rameno záběrové síly a  $S_f$  (viz rovnice (2.40)) představuje délku oblouku úseku patní kružnice příslušné jednomu zubu. Koeficienty  $L^*$ ,  $M^*$ ,  $P^*$  a  $Q^*$  jsou popsány obecnou polynomickou rovnicí (2.41), kde  $X^*$  představuje jednotlivé koeficienty. Dále se pak v této rovnici objevuje  $\theta_f$  (viz rovnice (2.39)), což je úhel mezi koncovým bodem patního přechodu a osy symetrie zubu,  $h_f$  udává poměr  $R_f/R_i$ , kde  $R_f$  je poloměr patní kružnice a  $R_i$  poloměr díry pro hřídel (náboje). Vnáší tedy do vztahu závislost

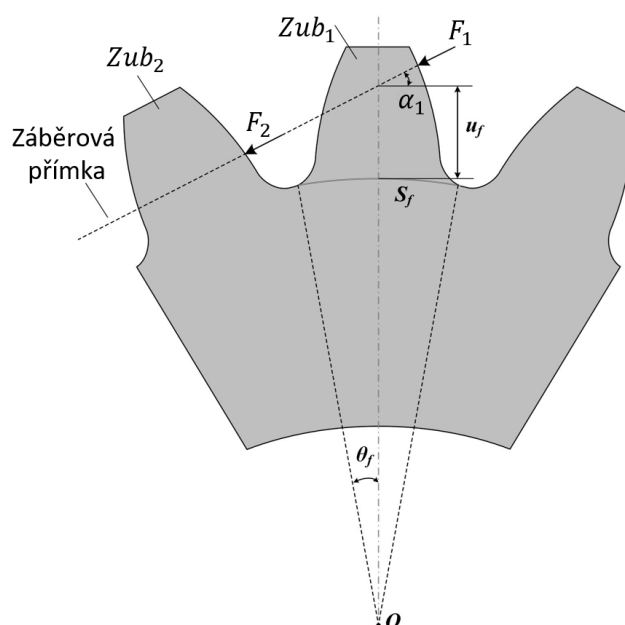
na množství materiálu těla kola. Poslední částí rovnice jsou empirické koeficienty  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$ ,  $E_i$  a  $G_i$ <sup>4</sup>, ty jsou uvedeny v Tabulce 2.2.

$$\theta_f = \frac{1}{z} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2 \cdot r_f^*}{\cos(\alpha_n)} + 2 \cdot \tan(\alpha_n) \cdot (h_a^* - r_f^*) \right) \quad (2.39)$$

$$S_f = 2 \cdot \theta_f \cdot R_f \quad (2.40)$$

$$X_i^*(h_{fi}, \theta_f) = \frac{A_i}{\theta_f^2} + B_i \cdot h_{fi}^2 + \frac{C_i \cdot h_{fi}}{\theta_f} + \frac{D_i}{\theta_f} + E_i \cdot h_{fi} + G_i \quad (2.41)$$

Pro větší přehlednost byly použité proměnné vyznačeny na následujícím schématu:



**Obrázek 6:** Schéma pro model ovlivněné oblasti pod patní kružnicí, převzato a upraveno z [15]

**Tabulka 2.2:** Koeficienty  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$ ,  $E_i$  a  $G_i$  pro výpočet deformace paty zubu, převzato z [25]

	$A_i$	$B_i$	$C_i$	$D_i$	$E_i$	$G_i$
$L^*(h_f, \theta_f)$	$-5,574 \times 10^{-5}$	$-1,9986 \times 10^{-3}$	$-2,3015 \times 10^{-4}$	$4,7702 \times 10^{-3}$	0,0271	6,8045
$M^*(h_f, \theta_f)$	$60,111 \times 10^{-5}$	$28,100 \times 10^{-3}$	$-83,431 \times 10^{-4}$	$-9,9256 \times 10^{-3}$	0,1624	0,9086
$P^*(h_f, \theta_f)$	$-50,952 \times 10^{-5}$	$185,50 \times 10^{-3}$	$0,0538 \times 10^{-4}$	$53,300 \times 10^{-3}$	0,2895	0,9236
$Q^*(h_f, \theta_f)$	$-6,2042 \times 10^{-5}$	$9,0889 \times 10^{-3}$	$-4,0964 \times 10^{-4}$	$7,8297 \times 10^{-3}$	20,1472	0,6904

<sup>4</sup>Původně označováno jako  $F_i$ . Označení bylo změněno, aby nedocházelo k záměně s silou  $F_i$ .

### 2.4.4 Celková tuhost

Celková tuhost jednoho páru zubů se vypočítá jako sečtení převrácených hodnot dílčích tuhostí. Analogicky se skládáním sériových pružin.

$$K_{\text{pár}_i} = \frac{1}{\frac{1}{K_{b1}} + \frac{1}{K_{s1}} + \frac{1}{K_{a1}} + \frac{1}{K_{f1}} + \frac{1}{K_{b2}} + \frac{1}{K_{s2}} + \frac{1}{K_{a2}} + \frac{1}{K_{f2}} + \frac{1}{K_h}} \quad (2.42)$$

Celková tuhost dvou párů zubů se stanoví obyčejným sečtením tuhostí jednotlivých párů v záběru. Opět analogie se sčítáním paralelních pružin.

$$K_2 = K_{\text{pár}_1} + K_{\text{pár}_2} \quad (2.43)$$

V závěru této kapitoly je také dobré zmínit, že model deformační energie je možné dále doplnit o model trhliny, jako to udělali například autoři *Zaigang Chen* a *Yimin Shao* ve své práci *Dynamic simulation of spur gear with tooth root crack propagating along tooth width and crack depth* [26]. Případně také o tribodynamický model tuhosti, který uvažuje vliv mazání. Ten ve své práci *Mesh stiffness and nonlinear dynamic response of a spur gear pair considering tribo-dynamic effect* využili autoři *Zufeng Li, Caichao Zhu, Huaiju Liu* a *Zonglin Gu* [27]. Dále se objevují také práce, které uvažují různé modifikace tvaru nebo vad boků zubů.

Lze tedy říci, že tento model má velký potenciál pro velmi přesný analytický výpočet tuhosti ozubení a jeho variabilita umožňuje použití i ve velmi specifických případech.

## 2.5 Využití programu KISSsoft pro výpočet tuhosti

Další z metod určení tuhosti je využití výpočtového softwaru, jedním z nich je například KISSsoft. Což je softwarový nástroj pro strojírenský návrh a analýzu převodovek, ložisek, hřídelí a dalších mechanických součástí. Umožňuje uživatelům provádět výpočty, simulace a optimalizace různých mechanických součástí a systémů. Je široce používán v automobilovém, leteckém a strojírenském průmyslu a je známý svou přesností a spolehlivostí při předpovídání chování mechanických součástí a systémů.

Tento software byl použit už pro vytvoření sady vzorků, na které byl navržen testovací stand v bakalářské práci *Bc. Kadeřábka* [28]. Tento stand, popsany v kapitole (4.1), je použit při měření v této práci.

KISSsoft umožňuje provést kontaktní analýzu ozubení, ta je zaměřena na výpočet deformace zatíženého zubu. Z vypočtené deformace umí následně stanovit



průběh celkové tuhosti ozubení i tuhost jednotlivých párů zubů. Kontaktní analýza je založena na teorii deformace  $\delta$  páru ozubených kol, popsaná v pracích *Webera* a *Banascheka*. [24]

Tuto deformaci je možné rozdělit na tři komponenty [29]:

- Bending (ohyb zubu)
- Tilting (deformace základního materiálu kola - naklopení zubu)
- Hertzian flattening (stlačení boků zubů vlivem Hertzových tlaků)

Protože jak ohyb zubu, tak deformace základního materiálu kola představují ohybovou deformaci s rozdílným významem, jsou v této kapitole označovány jako ohybová deformace (Bending) a naklopení (Tilting).

Materiál popisující kontaktní analýzu [30], který pro osobní použití poskytla firma *KISSsoft AG*, uvádí rozdíl ve způsobu výpočtu tuhosti oproti normě ISO 6336 [6].

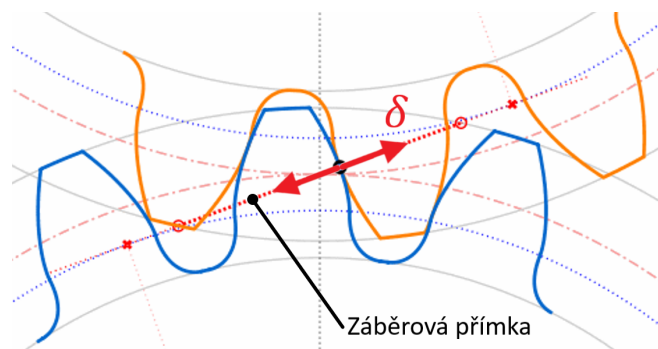


a) Zatížení dle normy ISO 6336 [6]

b) Zatížení dle výpočtového modelu KISSsoft

**Obrázek 7:** Rozdíl výpočtového modelu KISSsoft a normy ISO 6336, převzato z [30]

Tento rozdíl je znázorněn na Obrázku 7, ze kterého je zřejmé, že norma ISO 6336 [6] uvažuje pouze zatížení na valivé kružnici (viz Obrázek 7a)). Oproti tomu kontaktní analýza tohoto softwaru uvažuje posun bodu záběru po evolventním boku během odvalu ozubených kol. Tedy mezi body  $A'$  a  $E'$  dle Obrázku 7b).



**Obrázek 8:** Celková deformace jednoho páru zubů, převzato a upraveno z [31]

Dále také detailně popisuje způsob výpočtu jednotlivých komponent celkové deformace zubu (ve směru zatížení) pro jeden pár zubů v záběru. Ta je na následujícím obrázku (Obrázek 8) znázorněna a její jednotlivé části jsou rozepsány v rovnici (2.44).

$$\delta = [\delta_{B_1} + \delta_{B_2}] + [\delta_{RK_1} + \delta_{RK_2}] + [\delta_{H_{1,2}}] \quad (2.44)$$

Deformace v jednotlivých hranatých závorkách odpovídají částem celkové jednopárové deformace. Zde  $\delta_{B_i}$  představuje ohybové deformace zubu 1 a 2,  $\delta_{RK_i}$  jsou deformace způsobené naklopením základního materiálu kol a  $\delta_{H_{1,2}}$  odpovídá stlačení boků zubů vlivem Hertzových tlaků.

Výpočet ohybové deformace a naklopení vychází z obecné rovnice (2.45) dílčího posunutí v bodu kontaktu. Model také uvažuje rozdíl mezi rovinným napětím a rovinnou deformací pro případy kol s malou šířkou. Tento rozdíl byl již zmiňován v modelu deformační energie a projeví se v  $E_e$  - efektivním modulu pružnosti viz rovnice (2.33).

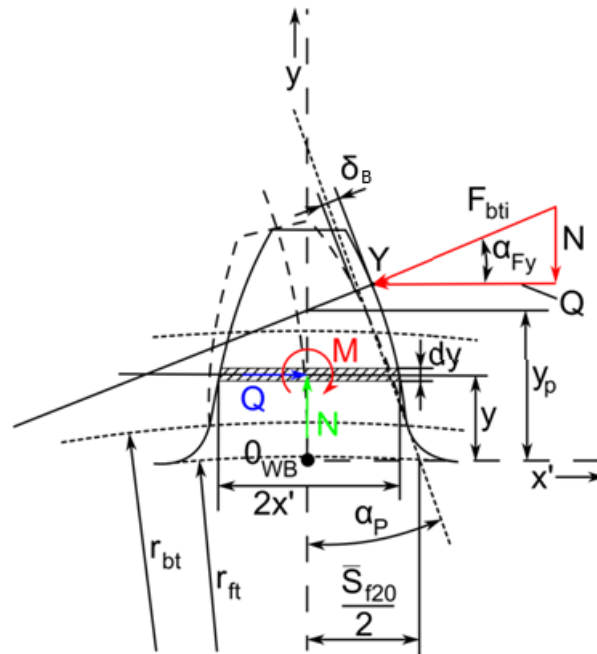
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot P_w = & \left[ \frac{1}{2} \cdot \int_0^{y_p} \frac{M^2}{E_e \cdot \frac{l}{12} \cdot (2 \cdot x)^3} dy \right] + \left[ \frac{1}{2} \cdot \int_0^{y_p} \frac{1, 2 \cdot Q^2}{G \cdot l \cdot 2 \cdot x} dy \right] + \\ & + \left[ \frac{1}{2} \cdot \int_0^{y_p} \frac{N^2}{E_e \cdot l \cdot 2 \cdot x} dy \right] \end{aligned} \quad (2.45)$$

Hranaté závorky zde oddělují jednotlivé části deformační energie, v tomto pořadí se jedná o ohybovou, smykovou a tlakovou deformační energii. Toto jsou tři základní složky, které uvažuje i model deformační energie.

Rovnice (2.45) je následně upravena do tvaru pro výpočet ohybové deformace. Výpočet naznačen na Obrázku 9 a rovnici (2.46).

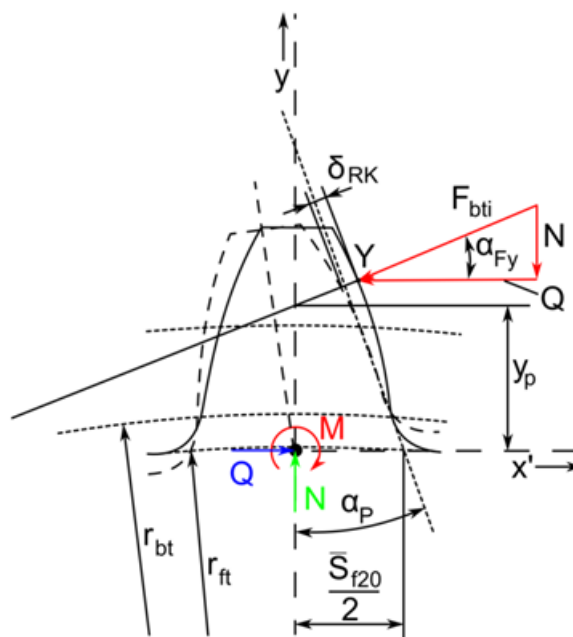
$$\begin{aligned} \delta_{B_i} = & F_{tbi} \cdot \frac{b}{2} \cdot \cos^2(\alpha_{Fy}) \cdot \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \left\{ \left[ 12 \cdot \int_0^{y_p} \left( \frac{(y_p - y)^2}{(2x')^3} \right) dy \right] + \right. \\ & \left. + \left[ \left( \frac{2, 4}{1 - \nu} + \tan^2(\alpha_{Fy}) \right) \cdot \int_0^{y_p} \frac{1}{2x'} dy \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.46)$$

V této rovnici jsou hranatými závorkami opět odděleny jednotlivé deformační energie, první je deformační energie od ohybového momentu  $M$  a druhá je deformační energie od smykové síly  $Q$  a axiální síly  $N$ .



**Obrázek 9:** Schéma pro výpočet ohybové deformace, převzato z [30]

Z rovnice (2.45) pak také vychází výpočet naklopení. Tento výpočet je znázorněn na Obrázku 10 a rovnici (2.47). Na první pohled se může zdát, že se jedná o stejnou deformaci jako na Obrázku 9. Rozdíl je však v umístění reakcí od zatížení. Protože tato deformace představuje vliv poddajnosti základního materiálu kola, jsou reakce umístěny pod patní kružnici.

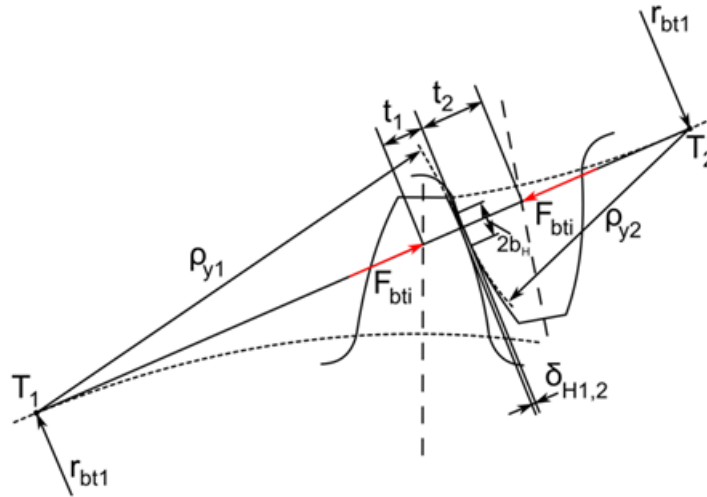


**Obrázek 10:** Schéma pro výpočet naklopení, převzato z [30]

$$\begin{aligned} \delta_{RK_i} = & \frac{F_{tbi}}{b} \cdot \cos^2(\alpha_{Fy}) \cdot \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \left\{ \left[ \frac{18}{\pi} \cdot \left( \frac{y_p}{\bar{s}_{f20}} \right)^2 \right] + \right. \\ & \left. + \left[ 2 \cdot \frac{(1 - 2\nu)}{1 - \nu} \cdot \frac{y_p}{\bar{s}_{f20}} \right] + \left[ \frac{4,8}{\pi} \cdot \left( 1 + \frac{1 - \nu}{2,4} \cdot \tan^2(\alpha_{Fy}) \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.47)$$

V rovnici (2.47) jsou opět naznačeny jednotlivé složky deformační energie pomocí hranatých závorek. První závorka odpovídá deformační energii od ohybového momentu  $M$ , druhá představuje deformační energii od smykové síly  $Q$  a třetí od axiální síly  $N$ .

Poslední částí celkové deformace je  $\delta_{H1,2}$  - stlačení boků zubů modelované, jako dotyk dvou válců pomocí Hertzovy teorie kontaktních tlaků. Toto je opět názorně zakresleno na následujícím Obrázku 11 a popsáno rovnicí (2.48).



**Obrázek 11:** Schéma pro výpočet stlačení boků zubů Hertzovými tlaky, převzato z [30]

$$\begin{aligned} \delta_{H1,2} = & \frac{F_{tbi}}{\pi \cdot b \cdot g} \left\{ \left| \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} \cdot \ln \left( \frac{b_H^2}{4 \cdot t_1^2} \right) + \frac{\nu_1 \cdot (1 - \nu_1)}{E_1} \right| + \right. \\ & \left. + \left| \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \cdot \ln \left( \frac{b_H^2}{4 \cdot t_2^2} \right) + \frac{\nu_2 \cdot (1 - \nu_2)}{E_2} \right| \right\} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Na rozdíl od předchozích rovnic, které se vztahují vždy ke konkrétnímu zubu, stlačení vlivem Hertzových tlaků je vypočteno pro daný pár zubů. To je možné v rovnici pozorovat jako součet dvou částí v absolutních hodnotách.

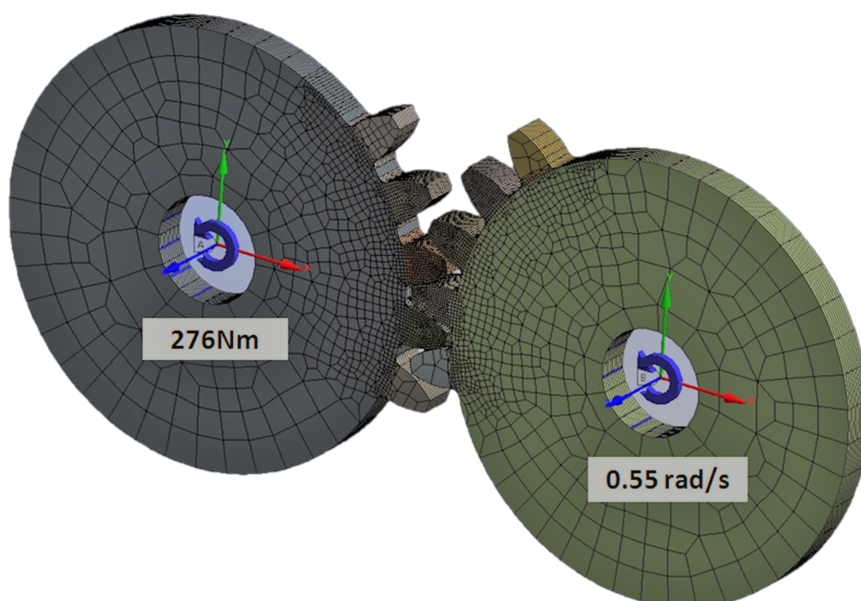
Vzhledem k velkému množství proměnných, které se v této kapitole objevují, zde není uveden jejich seznam. Většina proměnných totiž souvisí se schématy

pro konkrétní výpočet, ostatní proměnné pak odpovídají standartnímu značení (například materiálové konstanty).

Deformace jsou nakonec přepočítány na tuhost a za uvažování jednoduchého modelu sériových a paralelních pružin jsou dílčí tuhosti (jednotlivých párů i složek) sečteny a je tak získána celková tuhost. Stejným způsobem jako v kapitole (2.4.4). Tato tuhost odpovídá konkrétnímu bodu záběru a uvažuje tuhost obou kol. Pro získání průběhu tuhosti je tedy nutné provést výpočet pro dostatečný počet bodů záběru, což software provádí v rozmezí mezi body  $A'$  a  $E'$  (viz Obrázek 7).

## 2.6 Simulační metoda získání tuhosti - MKP

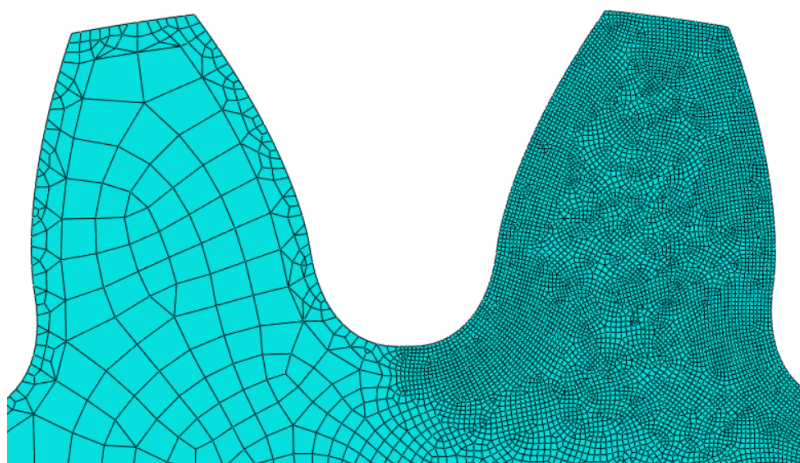
V dnešní době je využití MKP (metoda konečných prvků nebo anglicky FEM - finite element method) velmi rozšířené a velké množství vědeckých článků tuto metodu využívá pro verifikaci výsledků. Je možné ji využít pro simulaci odvalu kol pod zatížením.



**Obrázek 12:** Schéma MKP modelu, převzato a upraveno z [32]

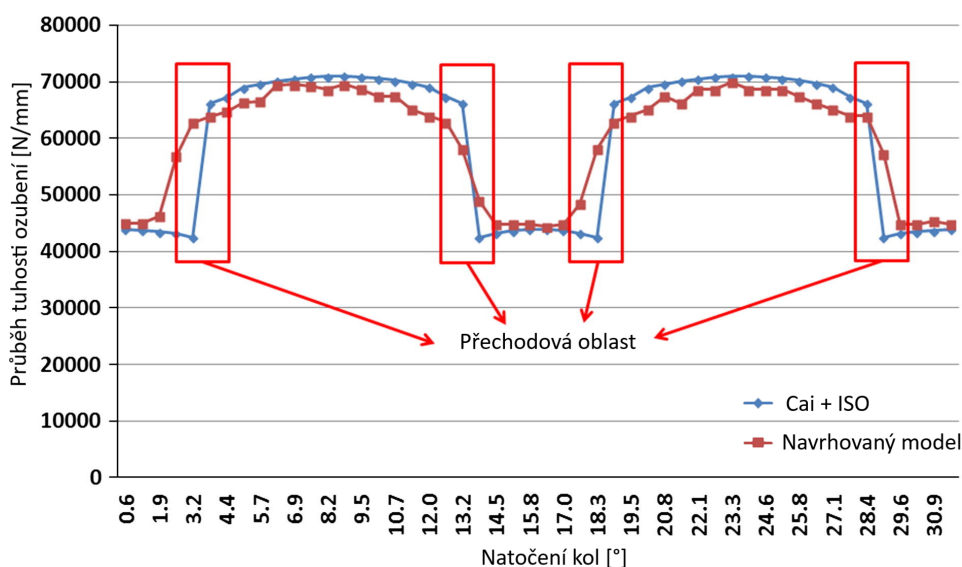
Tím se zabývá například práce *A CAD-FEM-QSA integration technique for determining the time-varying meshing stiffness of gear pairs* [32], ve které autoři využívají software ANSYS Workbench k výpočtu tuhosti ozubení. Na Obrázku 12 je znázorněn použitý způsob zatěžování kol, tedy jedno z kol má nastaven konstantní odval (v tomto případě  $0.55 \text{ rad/s}$ ), na druhé kolo je pak vnesen zátěžný moment ( $276 \text{ Nm}$ ) v opačném smyslu otáčení. Dále lze na Obrázku 12 vidět nastavení sítě, která je hlavně z důvodu setření výpočetního času relativně hrubá v celém rozsahu

kol s výjimkou zkoumaných zubů. Ty mají naopak síť nastavenou velmi hustou. Tímto je zajištěn co nejlepší poměr přesnosti a výpočetní rychlosti. Na Obrázku 13 je znázorněno vhodné nastavení sítě zkoumaného zubu (vpravo) a zubu mimo rozsah výpočtového odvalu (vlevo).



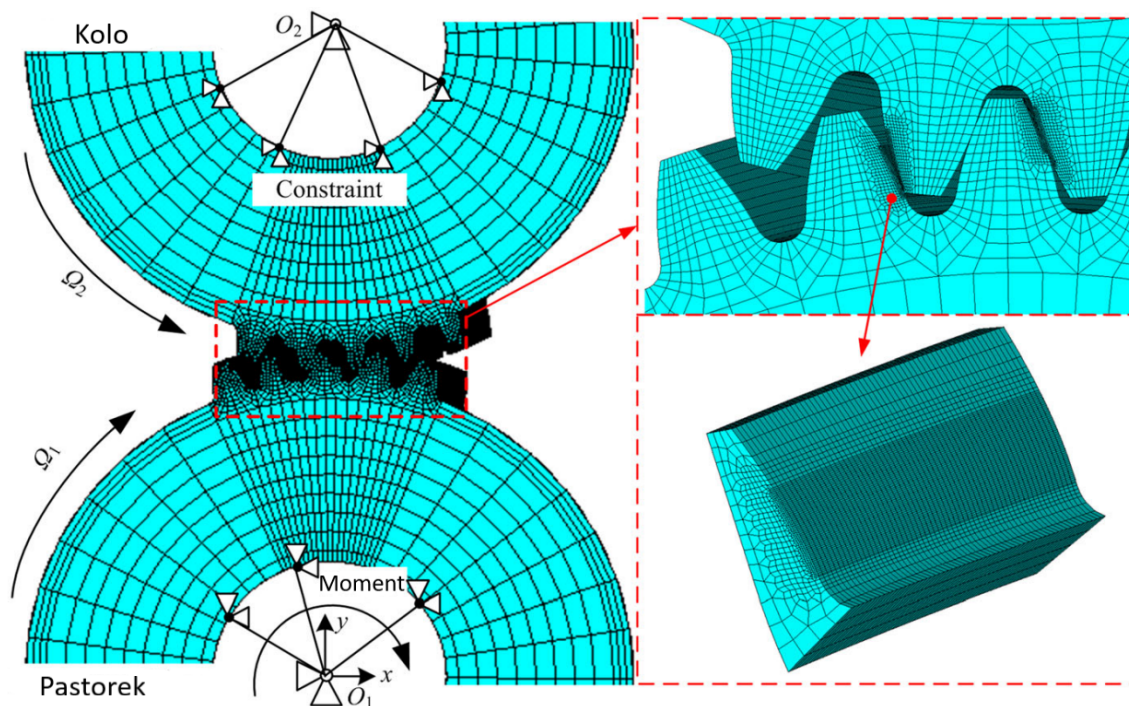
**Obrázek 13:** Ukázka vhodného nastavení hustoty sítě, převzato a upraveno z [33]

Z vypočteného průběhu tuhosti touto metodou (Obrázek 14) je pak vidět rozdíl oproti analytickému modelu (autoři využívají upravený model ISO 6336 [6], který nazývají Cai + ISO). Hlavní rozdíl nastává v části průběhu, kde dochází k přechodu mezi jednopárovým a dvoupárovým záběrem. Analytický model neuvažuje vliv deformace zubů, přechod je tedy skokový, zatímco MKP model deformaci zubů uvažuje a přechod je zde postupný.



**Obrázek 14:** Průběh tuhosti vypočten MKP metodou, převzato a upraveno z [32]

Další práce, zabývající se analýzou tuhosti ozubení a MKP simulací, je - *An improved analytical method for calculating time-varying mesh stiffness of helical gears* [22], ve které se autoři zaměřili na vylepšení analytického modelu pro výpočet tuhosti šikmého ozubení.



**Obrázek 15:** Schéma MKP modelu, převzato a upraveno z [22]

Používají zde MKP jako jednu z metod pro porovnání výsledků. Na Obrázku 15 je znázorněný použitý MKP model, na kterém je opět jedno z kol zatíženo momentem a druhé má nastavenou okrajovou podmínku (Constraint) pro zajištění odvalu. Síť je také vytvořena obdobným způsobem, tedy jemná pouze v oblasti zubů. Elementy na dotykové ploše zubů jsou nastaveny jako Targe170 a Conta174, což je speciální typ elementů pro simulování kontaktu.

Tento způsob zatěžování se jeví jako vhodný pro danou aplikaci a bude proto využit v praktické části práce. Jelikož se tato diplomová práce zabývá výhradně tuhostí přímého ozubení, je možné využít ještě dalšího zjednodušení. A to při použití výpočtového softwaru Abaqus CAE, kde je možné nastavit výpočtové prostředí jako 2D planar - deformable. Tedy převést úlohu z 3D do 2D a šířku kol následně nastavit během přiřazení sekce s materiálem (pomocí Assign section) k jednotlivým kolům. Toto zjednodušení je možné pouze v případě, že je zatížení ozubení po šířce kola konstantní.

## 3 Současný stav problematiky měření tuhosti ozubení

Tato kapitola je zaměřena na rešerši současného stavu problematiky měření tuhosti. Největším množstvím experimentů, prováděných staticky, se zabývali autoři *Naresh K. Raghuvanshi a Anand Parey* v období od roku 2013 do roku 2019. A jejich práce jsou podrobně popsány v této kapitole. Kromě těchto prací se objevují spíše běhové zkoušky. Obecně je prací, zabývajících se touto problematikou, velmi málo a i to je jednou z motivací pro tvorbu této diplomové práce.

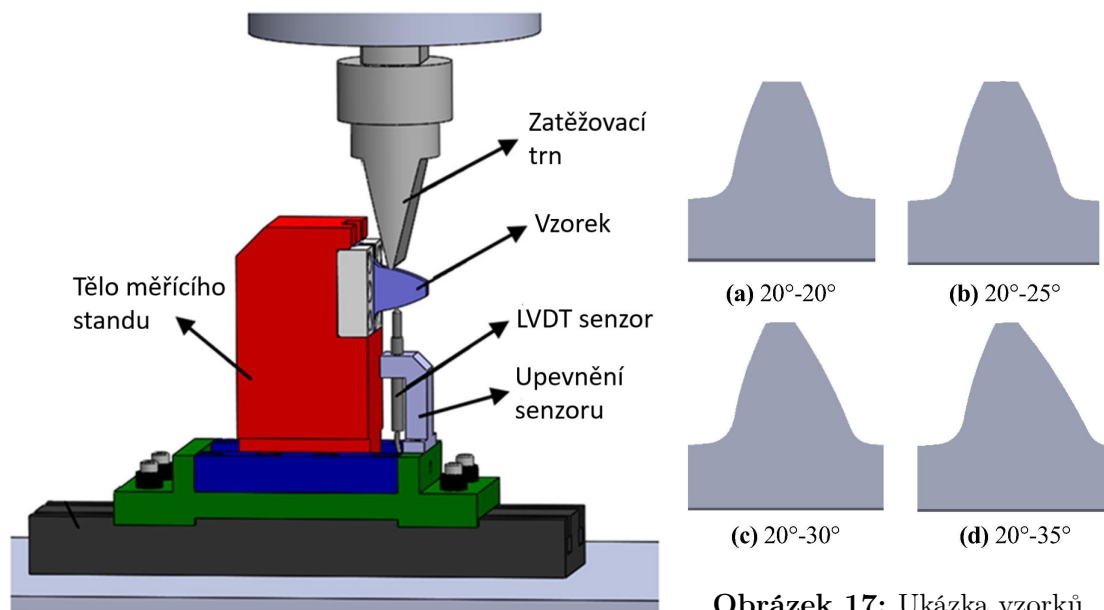
### 3.1 Experimentální měření a numerická validace tuhosti osamělého zubu pro čelní evolventní ozubená kola

Ve článku *Experimental measurement and numerical validation of single tooth stiffness for involute spur gears* se autoři *Fatih Karpat, Celalettin Yuce a Oğuz Doğan* [34] zabývají měřením tuhosti jednoho osamělého zubu. K měření používají jednoduchý stand viz Obrázek 16, na kterém pevně upínají vzorek. Ten je následně zatěžován trnem kolmo na osu zubu ve vzdálenosti 5 mm od špičky zubu. Na druhé straně zubu je umístěno LVDT (Linear variable differential transformer) měřící zařízení lineárního posunu. Je tedy měřena část deformace v kolmém směru na osu zubu, opět ve vzdálenosti 5 mm od špičky zubu.

K verifikaci měřených hodnot používají metodu konečných prvků. Použitý model je velmi jednoduchý a přesně odpovídá způsobu zatěžování na měřícím standu. Získání výsledků z MKP je tedy velmi snadné, protože stačí odečíst hodnotu deformace ve směru zatěžování a následně tuto deformaci přepočítat na tuhost stejným způsobem jako během měření.

Autoři se v práci zaměřili hlavně na vliv modifikace úhlu  $\alpha$  jedné ze stran zubu, viz Obrázek 17. Povedlo se jim ověřit, že při zvětšování úhlu  $\alpha$  a tedy při nárůstu





**Obrázek 16:** Schéma měřícího standu, převzato a upraveno z [34]

**Obrázek 17:** Ukázka vzorků, převzato z [34]

šířky zubu, dochází k lineárnímu nárůstu tuhosti zubu. Ale je důležité upozornit na zvětšující se odchylku mezi měřenou tuhostí a tuhostí získanou z MKP modelu, při zvětšování úhlu  $\alpha$  (viz Tabulka 3.1).

**Tabulka 3.1:** Vliv úhlu  $\alpha$  na tuhost zubu, převzato z [34]

Tuhost zubů [ $N/mm/mm$ ], při zatížení 1500 N				
Úhel $\alpha$	Test 1	Test 2	Test 3	MKP
20°-20°	19,481	18,750	18,293	19,711
20°-25°	20,833	21,429	21,739	20,633
20°-30°	22,727	23,077	23,810	21,552
20°-35°	30,000	23,077	24,590	22,222

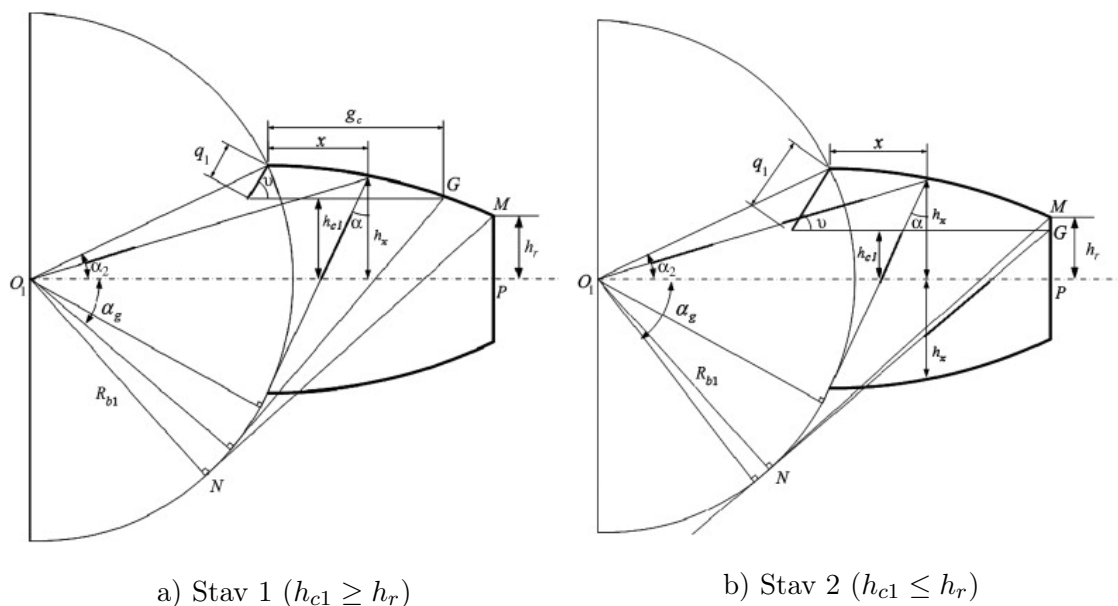
## 3.2 Experimentální měření tuhosti ozubení s trhlinou v patě zubu pomocí statických zkoušek

Autoři *Naresh K. Raghuwanshi a Anand Parey* se několik let zabývali experimentálním měřením tuhosti ozubení a ve svém výzkumu využili řady různých metod měření (jedná se o práce [35, 36, 23, 37, 38, 39, 40]).

Analytický model pro porovnání dat je však po celou dobu stejný a proto je souhrnně popsán hned v následujícím odstavci.

*N. K. Raghwanishi a A. Parey* využívají standartní model deformační energie, popsáný v kapitole (2.4.1). Uvažují tedy ohybovou, smykovou a axiální tlakovou složku tuhosti a doplňují ji o jednoduchý model Hertzovy kontaktní tuhosti dle rovnice (2.31). Později také přidávají tuhost ovlivněné oblasti pod patní kružnicí dle rovnice (2.38). Tímto způsobem tedy získávají tuhost neporušeného zubu a tu rozšiřují o model s uvažováním vlivu trhliny. Kompletní model, který autoři používají, vychází z práce *Simulation of spur gear dynamics and estimation of fault growth* [35], na které se podílel jeden z autorů a je dále označován jako AM (nebo Wu AM, podle hlavního autora).

Model uvažuje vztahy pro výpočet s různými stavy trhliny, kde parametrem pro určení stavu trhliny je vzdálenost konce trhliny od osy zubu  $h_{c1}$ . Tento parametr je porovnáván se vzdáleností špičky zubu od osy zubu  $h_r$ . Tyto rozměry jsou znázorněny na Obrázku 18. Zde je také naznačena trhlina, která začíná na základní kružnici  $R_{b1}$  a šíří se pod úhlem  $45^\circ$  od osy zubu. Takto sestavený komplexní model využívají k verifikaci měřených hodnot.

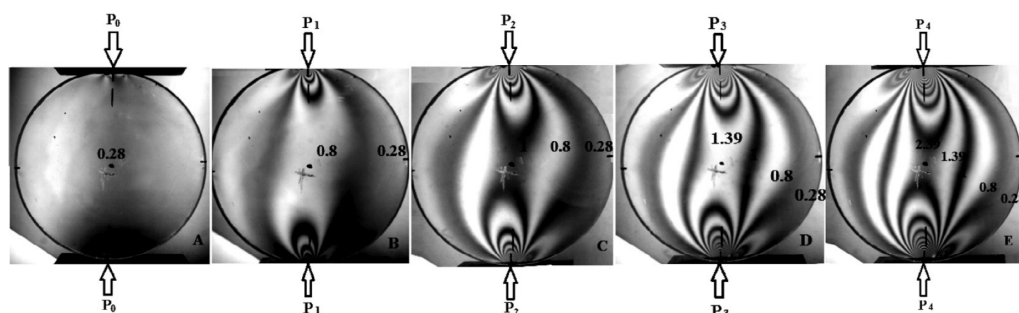


**Obrázek 18:** Schéma pro model s trhlinou, převzato z [35]

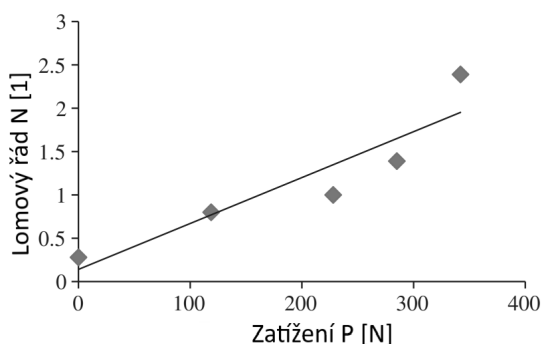
### 3.2.1 Experimentální výzkum tuhosti čelního ozubení s trhlinou za použití fotoelasticimetrie

Tento článek (*Experimental investigation of spur gear tooth mesh stiffness in the presence of crack using photoelasticity technique* [36]) je první z prací, které se zmínění autoři věnovali. Hlavním cílem bylo ověřit, zda je možné použít fotoelasticimetrii k měření tuhosti ozubení z plexiskla a také faktoru intenzity napětí - FIN (důležitý parametr v teorii šíření trhlin). V první části práce se objevuje již zmíněný analytický model, na který navazuje příprava experimentu. Prvním krokem, který je nutné udělat před začátkem měření ozubení je zjištění  $f_\sigma$  - optické citlivosti materiálu. Ta je zjištěna postupným zatěžováním zkušebního disku o známých rozměrech. Disk je zatěžován tlakem (dvěma protilehlými silami, jejichž nositelky prochází středem disku) a během zatěžování je sledován lomový řád  $N$ . Optická citlivost materiálu  $f_\sigma$  je následně dopočítána ze známých rozměrů disku, rozdílů napětí a lomového řádu.

Zatížení disku je znázorněno na Obrázku 19, následně je vytvořena lineární závislost lomového řádu na zatížení (viz Obrázek 20).



Obrázek 19: Zatěžování zkušebního disku, převzato z [36]



Obrázek 20: Lineární regrese lomového řádu  $N$ , převzato a upraveno z [36]

Po zjištění této konstanty (uvedena v Tabulce 3.2), nezbytné pro vyhodnocování, přešli autoři k měření samotných vzorků ozubených kol s trhlinou. Vzorky zatěžovali staticky ve třech různých bodech jednopárového záběru. Konkrétně na nejnižším a nejvyšším bodě jednopárového záběru a také na roztečné kružnici. Pomocí fotoelasticimetrie následně zjistili hodnoty lomového řádu, napětí, FIN a tuhosti.

**Tabulka 3.2:** Optická citlivost materiálu  $f_\sigma$ , převzato z [36]

	Deformace $\delta$ [mm]	Síla P [N]	Lomový řád N [1]	Lomová konstanta $f_\sigma$ [1]
A	0	0	0,28	NA
B	1,25	118,75	0,8	5,11
C	2,4	228	1	7,85
D	3	285	1,39	7,06
E	3,6	342	2,39	4,72

Při porovnání s AM a MKP došli autoři k těmto závěrům [36]:

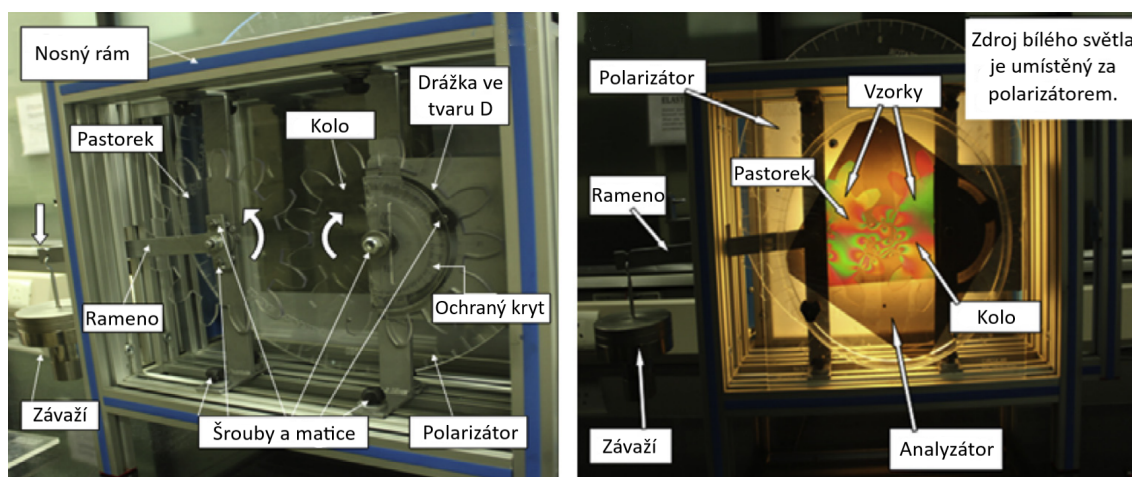
- Lomový řád může být použit k zjištění napětí a FIN i u tvarově složitých součástí, jako jsou ozubená kola.
- Rostoucí trend (v závislosti na počáteční délce trhliny) FIN pozorovaný pomocí fotoelasticimetrie souhlasí s trendem získaným z MKP analýzy.
- Klesající trend tuhosti ozubení v závislosti na zvyšování počáteční délky trhliny ukazuje, že tuto metodu je možné použít k zjištění tuhosti ozubení.
- Je důležité správně určit vztah pro výpočet tvarové funkce  $Y$  (ve výpočtu FIN zohledňuje skutečný tvar tělesa, nazývá se také korekční funkce), protože má zásadní vliv na přesnost zjišťovaného FIN a tuhosti ozubení.

Toto vytváří důležitý základ pro další práci autorů *Naresh K. Raghuvanshi a Anand Parey*, jelikož slouží jako ověření použití fotoelasticimetrie k experimentálnímu zjištění tuhosti a FIN na ozubených kolech s trhlinou.

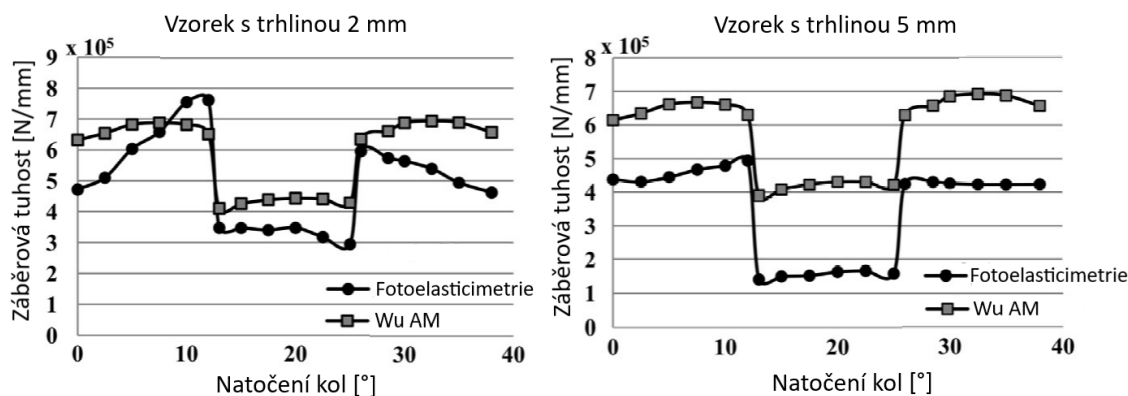
### 3.2.2 Měření tuhosti přímého ozubení s trhlinou pomocí fotoelasticime

Práce *Mesh stiffness measurement of cracked spur gear by photoelasticity technique* [23] přímo navazuje na předešlou, dochází k vylepšení zjištěných nedostatků a měření je prováděno na celém rozsahu záběru. Tedy jak pro jednopárový, tak pro dvoupárový záběr. Proto je nutné uvažování LSR (nezbytné

pro práci s trhlinou, graf LSR viz Obrázek 5), které představuje rozložení sil mezi jednotlivé páry zubů. Pastorek je také vyroben s množstvím děr pro ustavení v požadované poloze. Tomu je tedy přizpůsobený měřicí stand (Obrázek 21), na kterém si můžeme všimnout zatěžovacího mechanismu. Ten je na rozdíl od práce autorů *Fatih Karpat, Celalettin Yuce a Oğuz Doğan* [34] realizován jako zatěžování kroutícím momentem vyvolaným závažím na páce.



**Obrázek 21:** Stand pro měření tuhosti ozubení pomocí fotoelasticimetrie, převzato a upraveno z [23]



**Obrázek 22:** Grafy porovnávající měřenou tuhost s AM, převzato a upraveno z [23]

Autoři prováděli několik měření na čtyřech vzorcích s různou počáteční délkou trhliny (konkrétně 2, 3, 4, a 5 mm) po celé délce záběru. Naměřené hodnoty následně vynesli do grafů (Obrázek 22) a doplnili o porovnání s analytickým modelem. Upozorňují na rozdíl mezi měřenými hodnotami a analytickým modelem, a to hlavně u vzorků s větší délkou trhliny. Usuzují, že je tento rozdíl způsoben analytickým modelem, který neuvažuje vliv deformace oblasti patní kružnice (toto

se samozřejmě více projeví u vzorků s delší trhlinou), vliv nepřesnosti reálného evolventního profilu a další. V závěru pak píše, že metoda měření tuhosti ozubení pomocí fotoelasticimetrie je dostatečně přesná a může tedy být pro měření tuhosti používána.

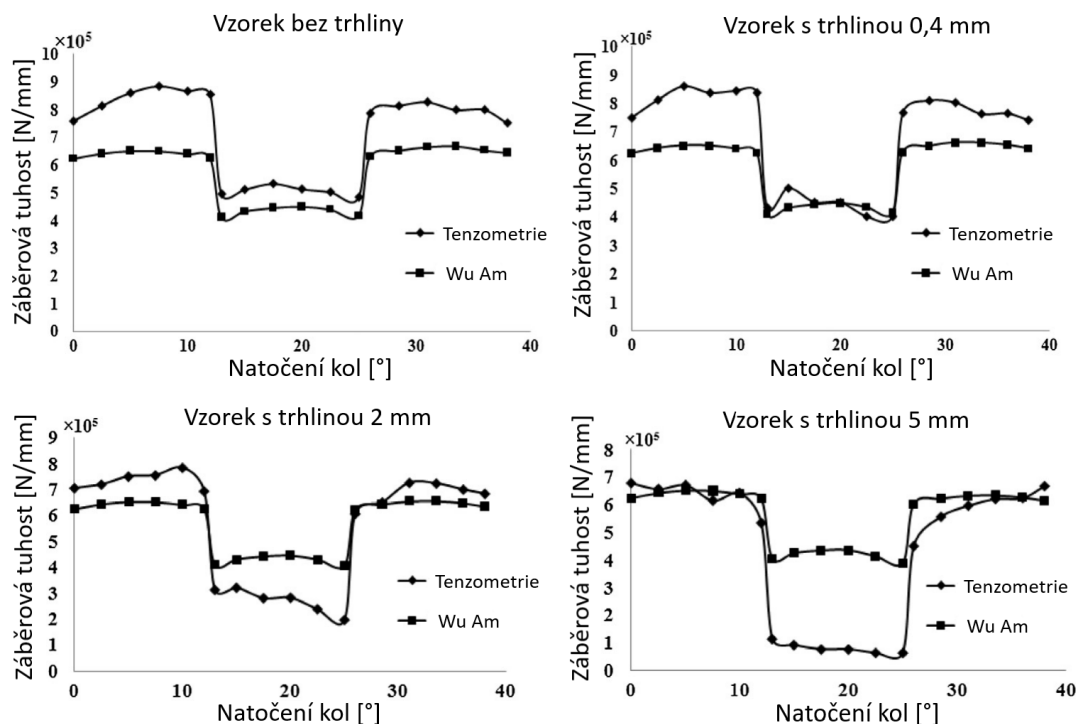
### 3.2.3 Experimentální měření tuhosti čelního ozubení s trhlinou pomocí tenzometrie

V návaznosti na předešlou práci přešli autoři v článku *Experimental measurement of gear mesh stiffness of cracked spur gear by strain gauge technique* [37] z měření tuhosti plexisklových ozubených kol s trhlinou na kola ocelová. Tomu se také musela přizpůsobit metoda měření, jelikož na ocelových vzorcích není možné použít fotoelasticimetrii. Logickým krokem bylo tedy použití tenzometrů, které umožňují zjistit napětí v požadovaném místě zubu (oblast s trhlinou) stejně jako fotoelasticimetrie.

V první části práce byl znovu diskutován AM a tedy jeho vylepšení po zkušenostech z předchozích měření. Následné měření pak probíhalo stejným způsobem jako na vzorcích z plexiskla, rozdíl nastal až při vyhodnocování dat. Tenzometry k měření napětí využívají změny elektrického odporu při deformaci tenkých vodičů, ze kterých se skládají.

V závěru práce autoři opět porovnávají měřenou tuhost ozubení s analytickým modelem (Obrázek 23).

Jako referenční měření byl použit vzorek bez trhliny. U tohoto vzorku je vidět minimální rozdíl mezi jednopárovými tuhostmi. Mezi dvoupárovými tuhostmi je však znatelný rozdíl, který je nejspíše opět způsoben analytickým modelem. Chování průběhu měřené tuhosti v závislosti na zvětšování počáteční délky trhliny odpovídá očekávání. Dochází totiž nejen ke snižování hodnoty jak jednopárové, tak doupárové tuhosti, ale zároveň ke zvětšování rozdílu mezi nimi. Jelikož se vliv trhliny výrazněji projeví na tuhosti jednoho páru zubů. Oproti tomu analytický model vypadá neovlivněný i při uvažování trhliny o délce 5 mm. V závěru přesto autoři uvádí, že je tato metoda použitelná k experimentálnímu zjištění tuhosti ozubení, ale je důležité počítat s rozdílem oproti analytickému modelu. Tento rozdíl je uveden v Tabulce 3.3.



**Obrázek 23:** Výsledné grafy porovnávající tuhost měřenou pomocí tenzometrie a AM, převzato a zpraveno z [37]

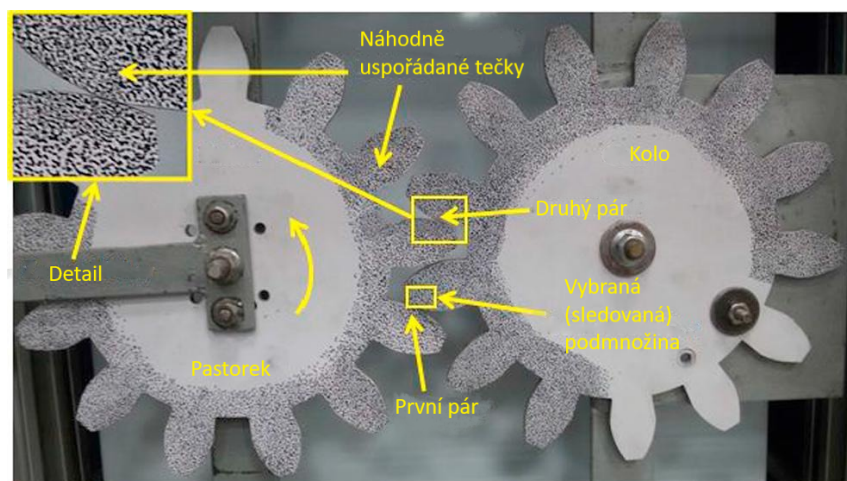
**Tabulka 3.3:** Porovnání průměru naměřených hodnot s AM, převzato z [37]

	Bez trhliny	0,4 mm	1 mm	2 mm	3 mm	5 mm
Tenzometrie [ $N/mm$ ]	7,143	6,791	6,407	5,636	5,026	4,327
AM [ $N/mm$ ]	5,747	5,727	5,717	5,686	5,651	5,584
Rozdíl oproti AM [%]	24,29	18,57	12,07	-0,88	-11,06	-22,51

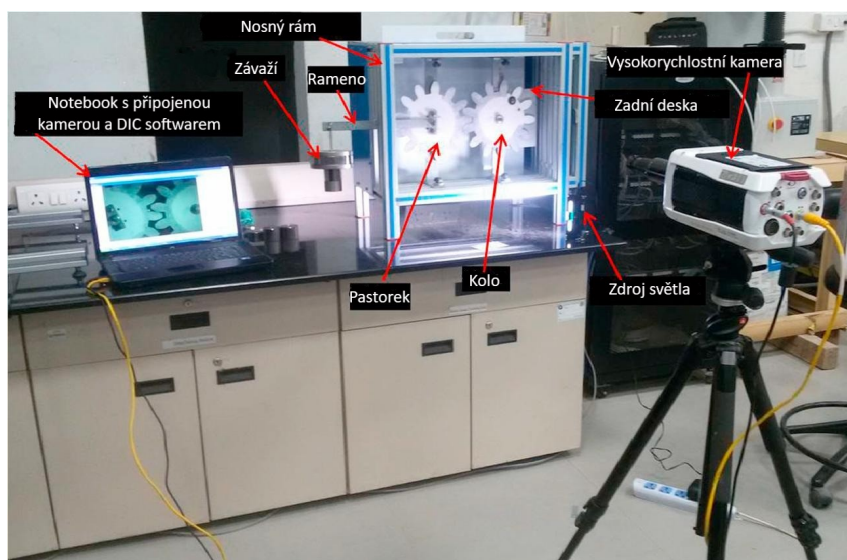
### 3.2.4 Experimentální měření tuhosti čelního ozubení za použití techniky digitální korelace obrazu

Z předchozí práce autorů [37] vyplývá, že měření pomocí tenzometrů je relativně složité a dovoluje měření napětí pouze v místě, kde je tenzometr umístěn. Proto autoři přistoupili v práci *Experimental measurement of spur gear mesh stiffness using digital image correlation technique* [38] k celkem zajímavému způsobu měření tuhosti, a to měření pomocí digitální korelace obrazu - DIC. Metoda je založená na sledování velkého množství bodů pomocí vysokorychlostní kamery a následné vyhodnocení jejich posunu oproti původní poloze. Je tedy získána přímo deformace zubu, která je díky znalosti zatížení snadno převedena na hodnotu tuhosti. Velké

množství sledovaných bodů na boku zubu je vytvořeno pomocí bílé barvy a náhodně uspořádaných černých teček (viz Obrázek 24). Měřicí stand má obdobnou konstrukci jako v předchozích metodách měření a je znázorněn na Obrázku 25.



Obrázek 24: Nátěr kol s náhodně umístěnými body, převzato a upraveno z [38]



Obrázek 25: Stand pro metodu měření s využitím DIC, převzato a upraveno z [38]

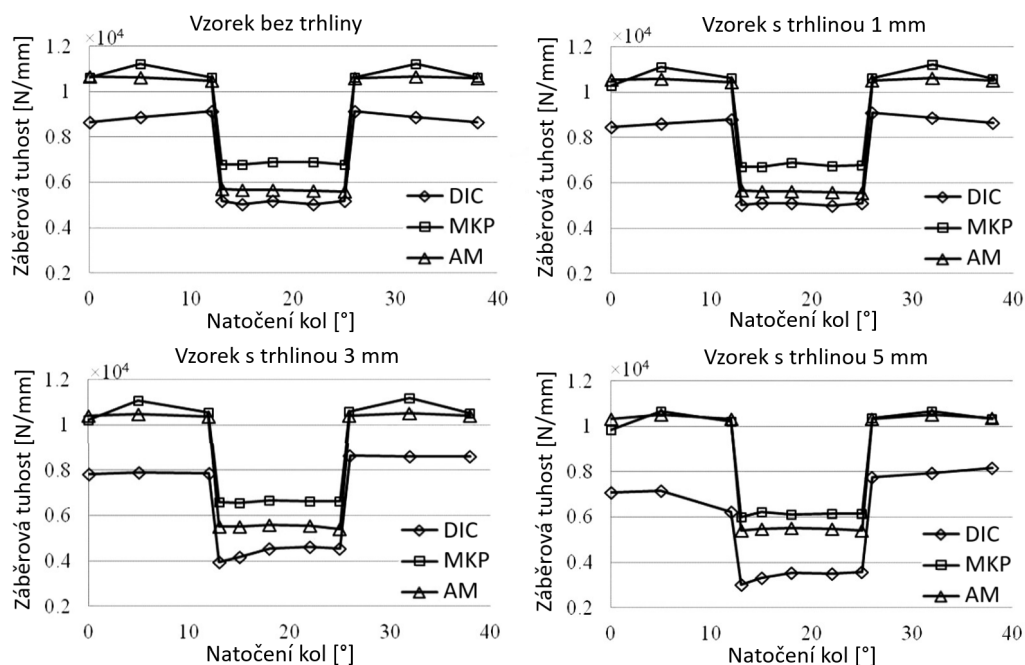
Analytický model byl v této práci doplněn o tuhost ovlivněné oblasti pod patní kružnicí (viz kapitola 2.4.3). Analytický model by tedy měl být přesnější než v předchozích pracích. Je zde k verifikaci také použit simulační model MKP. Z výsledných grafů průběhu tuhosti (Obrázek 26) je patrné, že analytický model velmi přesně odpovídá MKP modelu a oproti předchozím pracím by se tedy dal prohlásit za velmi přesný.



Oproti tomu přesnost experimentální metody DIC nevyhází při porovnání dostačující a se zvětšující se počáteční délkou trhliny přesnost dále klesá. V Tabulce 3.4 jsou vypsány průměrné hodnoty měřené tuhosti a její porovnání s AM a s MKP. Rozdíl metody DIC oproti AM na vzorku bez trhliny je 14% a oproti MKP dokonce 20%. Tento rozdíl se u vzorků s trhlinou zvyšuje až na hodnotu 31% v porovnání s AM a 34% v porovnání s MKP. Přesto autoři v závěru práce uvádí, že je tato metoda jednoduchá (její největší výhoda) a může být použita jako přesná metoda měření tuhosti ozubení bez i s trhlinou.

**Tabulka 3.4:** Porovnání naměřených hodnot s AM a MKP, převzato z [38]

	Bez trhliny	1 mm	2 mm	3 mm	4 mm	5 mm
DIC	0,7172	0,6930	0,681	0,6481	0,6090	0,5572
MKP	0,9015	0,8927	0,8897	0,8838	0,8641	0,8425
AM	0,8347	0,8295	0,8252	0,8196	0,8160	0,8155
Rozdíl DIC a MKP [%]	20,443	22,370	23,457	26,668	29,522	33,863
Rozdíl DIC a AM [%]	14,076	16,455	17,474	20,924	25,360	31,673



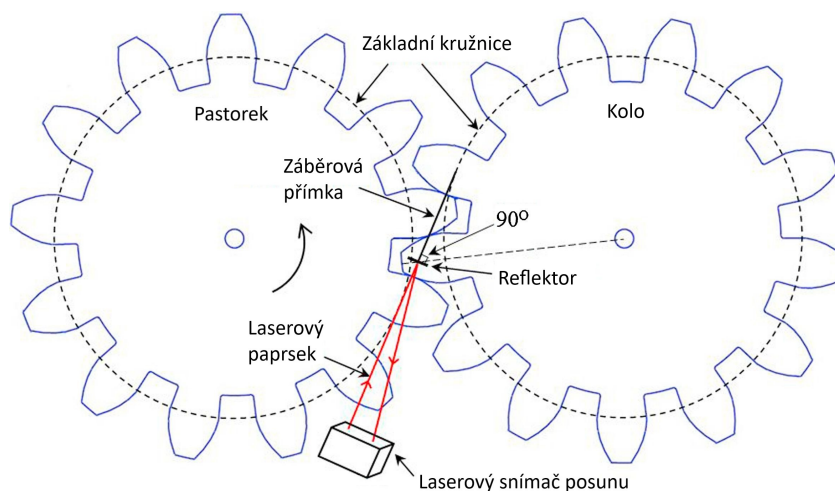
**Obrázek 26:** Tuhost změřená metodou DIC, AM a MKP, převzato a upraveno z [38]

### 3.2.5 Experimentální měření tuhosti ozubení pomocí laserového snímače posunutí

Autoři v této práci (*Experimental measurement of mesh stiffness by laser displacement sensor technique* [39]) zvolili stejný postup vyhodnocování tuhosti ozubení, a to přímo z deformace zubu.

Tuhost je měřena za pomoci LDS (Laser displacement sensor - laserový snímač posunu) a reflektoru umístěného přímo na zubu. Ze schématu umístění LDS a reflektoru (Obrázek 27) je zřetelné, že je měřena deformace ve směru zatížení silou (na záběrové přímce). K tomuto směru je reflektor kolmý.

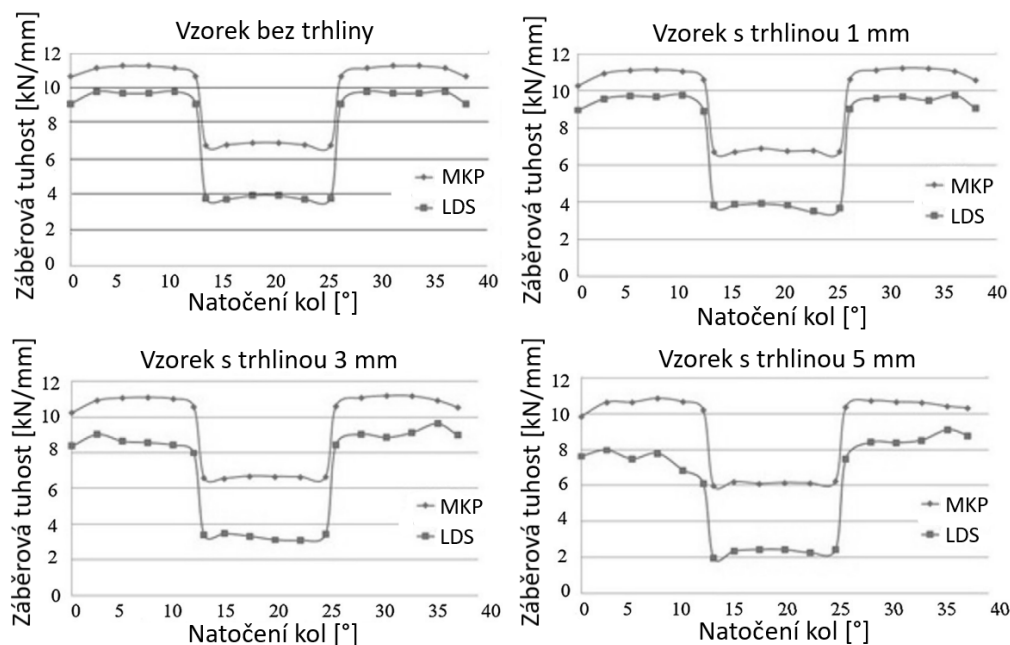
Pro porovnání naměřených hodnot byla v tomto případě použita pouze metoda MKP a opět jsou viditelné značné rozdíly mezi jednotlivými metodami viz Obrázek 28. Průběh tuhosti se s narůstající počáteční délkou trhliny podle očekávání posouvá na nižší hodnoty tuhosti. Oproti tomu MKP model vypadá, že na vliv trhliny vůbec nereaguje. Výsledné hodnoty jsou následně porovnány v Tabulce 3.5, a je opět vidět rozdíl 20 až 33%. Autoři v závěru znovu tvrdí, že tato metoda může být použita k měření přesné tuhosti ozubení.



**Obrázek 27:** Schéma umístění LDS a reflektoru, převzato a upraveno z [39]

**Tabulka 3.5:** Porovnání naměřených hodnot s MKP, převzato z [39]

	Bez trhliny	1 mm	2 mm	3 mm	4 mm	5 mm
LDS [ $kN/mm$ ]	7,627	7,543	7,368	6,925	6,547	6,02
MKP [ $kN/mm$ ]	9,601	9,523	9,494	9,445	9,251	9,048
Rozdíl [%]	20,56	20,79	22,39	26,68	29,22	33,46



**Obrázek 28:** Grafy průběhu tuhosti změřených pomocí LDS a MKP modelu, převzato a upraveno z [39]

### 3.3 Zhodnocení statických metod měření tuhosti

První zmíněná práce (v kapitole 3.1 *Experimentální měření a numerická validace tuhosti osamělého zubu pro čelní evolventní ozubená kola*) se na první pohled jeví relativně jednoduše, ale využití této metody má značný potenciál při zjišťování vlivu určitého parametru ozubení ( $\alpha$ , modul  $m$ , korekce  $x$ , poloměr patního přechodu a další) na tuhost. Bylo by však vhodné provést úpravu ve směru zatěžování (a měření deformace). Více odpovídající by bylo zatěžovat vzorek na záběrové přímce. Dále je pro porovnání důležité odečítat z MKP modelu odpovídající deformaci. Tedy deformaci ve směru zatížení, nikoliv Total deformation (celkovou deformaci), která byla podle obrázků uvedených v práci [34] použita.

U experimentálního měření autorů *Naresh K. Raghuwanshi a Anand Parey* se objevovaly značné rozdíly mezi analytickým modelem - AM a experimentálně zjištěnými daty. To samé platí pro MKP model, ten však není v pracích detailně popsán, a není proto možné ho v této práci hodnotit. AM je však detailně popsán v práci [35], a proto je možné ho komentovat.

Hlavním problémem použití tohoto modelu je umístění trhliny, to je patrné ze schématu (Obrázek 18) a fotek vzorků Obrázek (29). AM uvažuje trhlínu na základní kružnici pod úhlem  $45^\circ$  k ose zubu. První vzorek (Obrázek 29a)) z měření pomocí tenzometrů [37] má však trhlínu umístěnou kolmo k ose zubu a zároveň v

patě zubu. Druhý vzorek (Obrázek 29b)) z měření metodou DIC už problém špatně zvoleného úhlu trhliny odstranil. Umístění trhliny však zůstává v patě a vzhledem k modulu  $m_n = 16 \text{ mm}$  dochází k relativně velkému nárůstu poměru mezi ramenem zatěžující síly a délkou trhliny. Tento poměr bude v AM výrazně nižší a projeví se menší citlivostí tuhosti na změny počáteční délky trhliny.



a) Vzorek z práce [37]

b) Vzorek z práce [38]

**Obrázek 29:** Ukázka vzorků pro porovnání s AM, převzato a upraveno z [37, 38]

Dalším problémem AM je jeho doplnění o tuhost ovlivněné oblasti pod patní kružnicí. V této tuhosti ze značné části figuruje patní přechod, který byl však na použitých vzorcích odstraněn. Tento rozdíl je nejlépe viditelný z grafu pro vzorek bez trhliny z Obrázku 26, kde se projeví vyšší tuhostí AM oproti měřené hodnotě. Nedokonalost AM je nejspíše hlavním důvodem, proč autoři prohlašují experimentální metody za použitelné až přesné.

Hlavním poznatkem z těchto prací je tedy důležitost volby přesného analytického modelu, který co nejlépe odpovídá nastavení experimentu. Proto byla značná část rešerše věnována právě analytickým modelům. Dále je velmi přínosné vidět, že existuje mnoho různých přístupů měření tuhosti. Těchto poznatků bude důležité využít během experimentální části této diplomové práce pro případné odstranění problémů, které se během měření mohou objevit.

Jako poslední poznatek je dobré uvést, že porovnávat modely na základě průměrné hodnoty není úplně vhodné, jelikož neukazuje skutečný rozdíl mezi získanými daty. Vhodnější by bylo porovnání hodnot v dvoupárovém a v jednopárovém záběru zvlášť. Viz Obrázek 23, kde AM odpovídá téměř přesně v oblasti jednopárové tuhosti u vzorků bez nebo s malou trhlinou. Naopak u vzorků s velkou trhlinou odpovídá AM téměř přesně v oblasti dvoupárové tuhosti. Tento fakt je při porovnání průměrné hodnoty z celého průběhu zcela opomenut.

### 3.4 Běhové zkoušky

V případech, kdy je žádoucí zjistit vlastnosti, které jsou na tuhosti závislé (vlastní frekvence nebo úchylnka převodového poměru), není možné provádět zkoušky staticky. Přistupuje se tedy k běhovým zkouškám a měřenou hodnotou zde již není tuhost. Také jsou při experimentu použity spíše jednoduché převodovky, a to hlavně z důvodu bezpečnosti. Také není nutné ustavovat vzorky v určité poloze, což může vést ke zrychlení experimentu. Příklady běhových zkoušek jsou uvedeny v následujícím seznamu a mohou být použity k návrhu vylepšení současného stavu experimentu.

- **Analysis of Time-Varying Mesh Stiffness and Dynamic Response of Gear Transmission System with Pitting and Cracking Coupling Faults [41]**

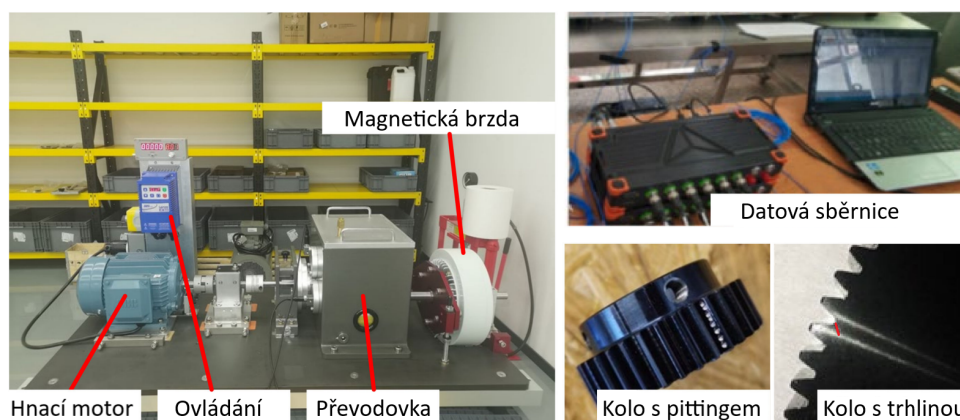
Velmi komplexní práce, která se zabývá důkladným rozбором tuhosti jak zubů, tak i ostatních součástí převodovky. Při běhových zkouškách sledují vliv poškození ozubení (trhlina v patě a pitting) na tuhost, ale také na vibrace.

- **Mesh stiffness and dynamic response analysis of modified gear system with thin web and weight reduction holes [42]**

Autoři v této práci sledují vliv odlehčení těla ozubeného kola na tuhost a dynamickou odezvu. Během běhových zkoušek porovnávají vzorky s plným tělem, se zúženým tělem a s kombinací zúženého kola a odlehčujících děr.

- **Multi-body dynamics based gear mesh models for prediction of gear dynamics and transmission error [43]**

Práce se převážně zabývá tuhostí ozubení s návazností na vlastní frekvence soukolí a úchylnku převodového poměru. Běhový experiment probíhá na jednoduché jednostupňové převodovce s šikmými ozubenými koly. Toto však není jediná práce, ve které se touto problematikou autoři zabývají.



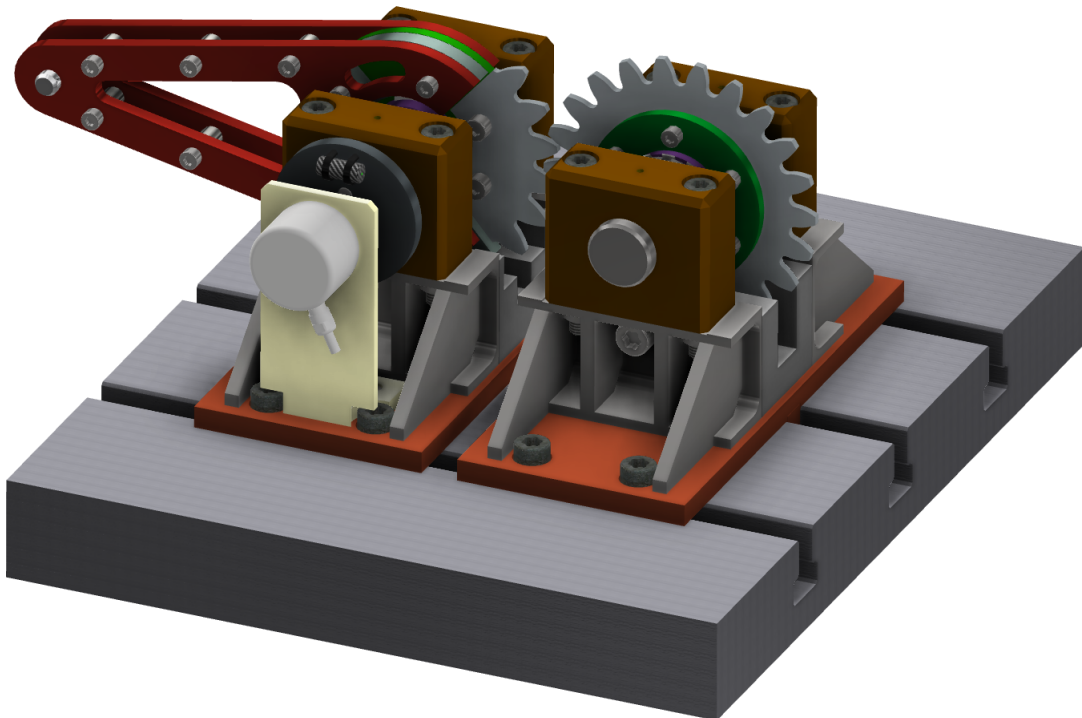
**Obrázek 30:** Stand pro měření vlivu poškození zubů, převzato a upraveno z [41]

# Praktická část

## 4 Použité měřicí zařízení a vzorky

Hlavním nástrojem při vytváření této práce je testovací stand (Obrázek 31) navržený *Bc. Kadeřábkem* v bakalářské práci *Návrh testovacího stavu pro identifikaci tuhosti ozubení* [28]. Je tedy důležité uvést zde alespoň základní popis již navrženého měřicího standu a řady vzorků, které z této práce vychází. V rámci cílů této diplomové práce je však nutné stanovit metodiku měření (kapitola 7) a vyhodnocování dat (kapitola 5.5), a také uvést úpravy provedené na základě zkušeností získaných v průběhu měření v rámci této diplomové práce.

### 4.1 Měřicí zařízení

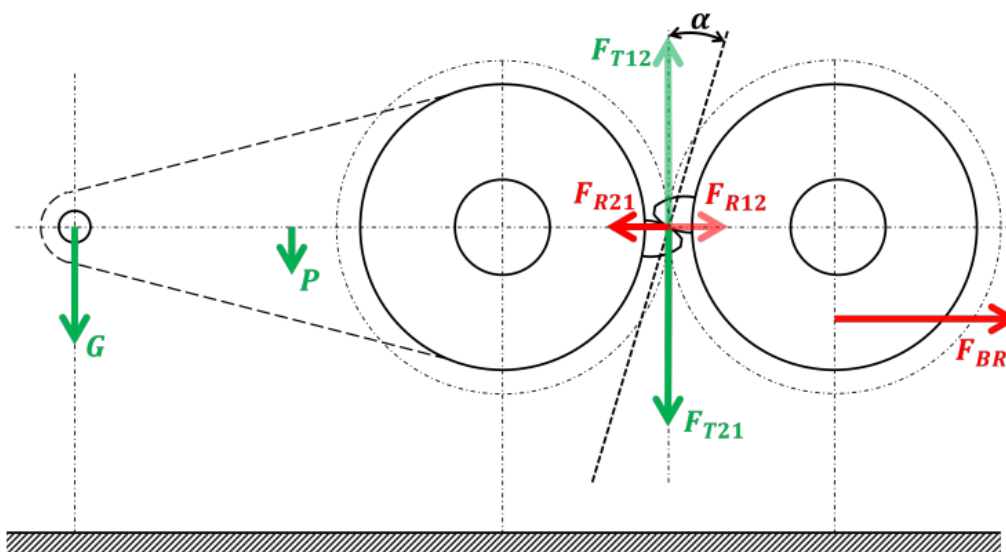


Obrázek 31: Měřicí stand, převzato z [28]

Měřicí stand je založen na podobném principu jako standy z kapitol (3.2.4 a 3.2.5), ale byl koncipován tak, aby jeho tuhost byla řádově vyšší než zkoumané soukolí. Je zde tedy měřena deformace zubu, nikoliv například napětí v patě zubu. Ozubení je zatěžováno statickým momentem vyvozeným závažím na páce.

Stand se skládá z nosné konstrukce vybavené ložiskovými domky. Na straně kola jsou také v konstrukci umístěny zastavovací šrouby. Ty zabraňují pootočení kola při zatěžování a jsou nezbytné pro oddělení deformace zubů od celkového natočení kol. V kluzných ložiskových domcích jsou následně umístěny hřídele s objímkou, nesoucí měřené vzorky. Na straně pastorku je tato objímka doplněna o zatěžovací páku, která slouží k umístění závaží. Tímto způsobem tedy vstupuje do měření zatěžovací moment.

Zatěžování je znázorněno na Obrázku 32,  $G + P$  (tíha závaží + tíha páky) vyvozují zatěžovací moment.  $F_{BR}$  je pak zastavovací síla od šroubů a  $F_R$  a  $F_T$  představují rozklad zátěžné síly v bodu kontaktu zubů. Obě části (část s pastorkem a část s kolem) jsou upevněny ke stolu pomocí T-matic, tím je zajištěna schopnost posuvu, a tedy nastavení osové vzdálenosti. Tento požadavek vyplývá z navržené řady vzorků viz kapitola (4.2).



**Obrázek 32:** Zjednodušené schéma zatěžování

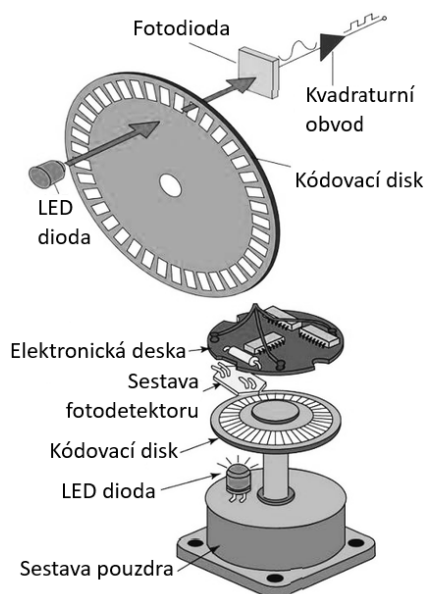
Na základě zkušeností při měření popsaného v kapitole 6, byl měřicí stand doplněn o jednoduchý polariskop, skládající se ze světelného zdroje a dvou polarizačních filtrů. Účelem tohoto aparátu je zvýraznění typu záběru a je možné ho také využít při fotoelasticimetrii (detailněji popsáno v kapitole 6.3). Fotoelasticimetrii používali již zmínění autoři *Naresh K. Raghuwanshi a Anand Parey* viz kapitola (3.2).



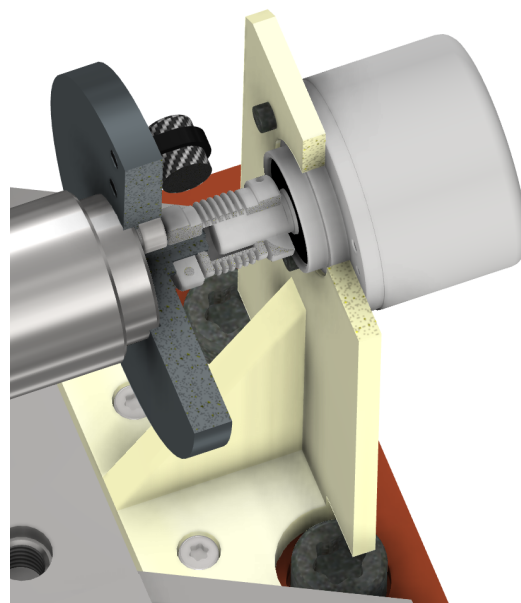
### 4.1.1 Měřicí souprava

V návaznosti na požadavek nastavení osové vzdálenosti je nezbytné vybavit měřicí stand lineárním měřidlem. Bylo tedy použito Lineární magnetické pravítko *TMLS - 05S-02-270* [44].

Samotné měření deformace zubů je realizováno měřením natočení hřídele pastorku. To je možné právě díky zastavovacím šroubům na nosné konstrukci, které zamezují natočení kola během zatěžování. Je tedy měřeno pouze natočení způsobené úhlovou deformací zubů. Na hřídel pastorku je umístěn přesný inkrementální rotační snímač (IRC). Jedná se o senzor *DFS60 Inox*, který měří relativní natočení pomocí speciálního disku, obsahujícího vhodně umístěné průsvitné a neprůsvitné části. Sada paprsků dopadá na část disku, následné vyhodnocení proběhne dle toho, zda paprsek projde skrze disk, anebo neprojde. Tento konkrétní snímač má maximální odchylku  $\pm 0,0015^\circ$  [28][45]. Obrázek 33 ukazuje funkční schéma IRC snímače a Obrázek 34 jeho připojení k hřídeli pastorku.



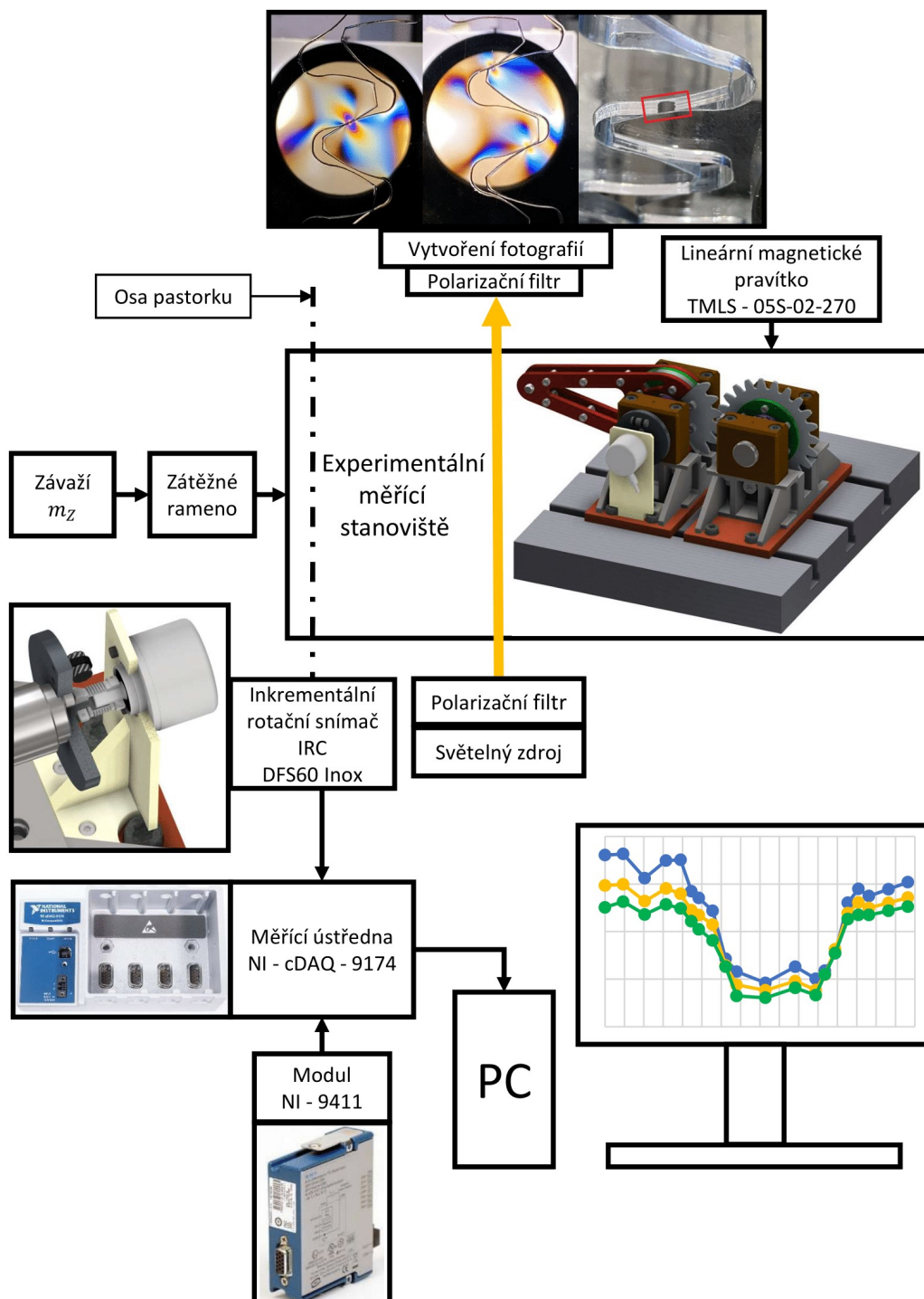
**Obrázek 33:** Schéma IRC, z [46]



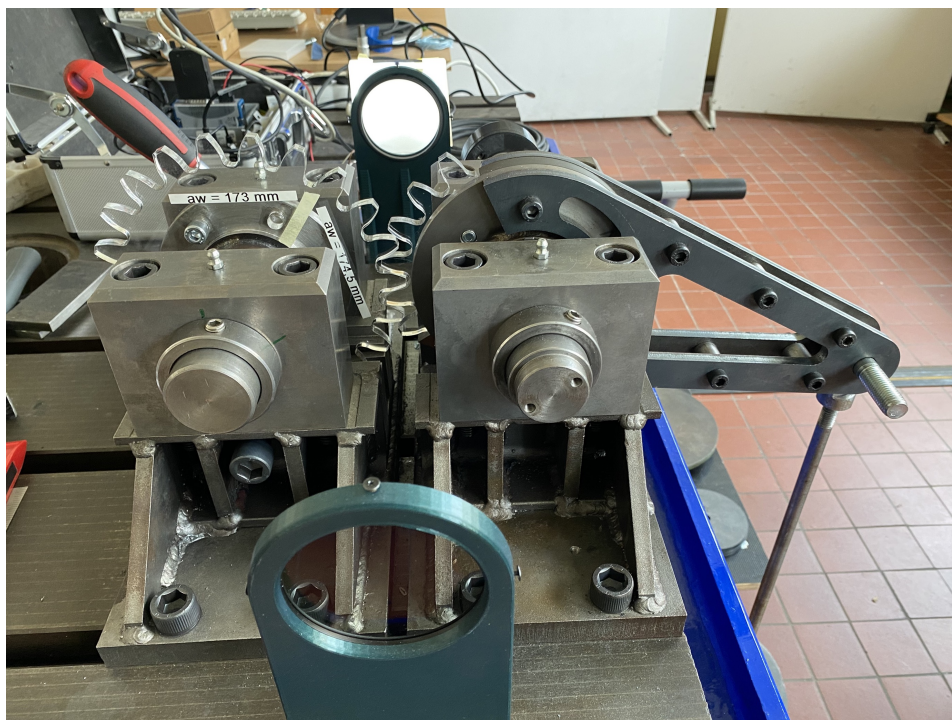
**Obrázek 34:** Připojení IRC, z [28]

IRC snímač je připojen na ústřednu *NI - cDAQ - 9174* od firmy NI – National Instruments, která slouží k připojení jednotlivých měřících modulů. Stará se také o synchronizaci času mezi jednotlivými moduly a umožňuje datovou komunikaci mezi měřícím zařízením a počítačem. Do této ústředny je následně zapojen modul *NI - 9411*, ten vykonává funkci převodníku pulzů z IRC na digitální signál, ke kterému se v ústředně přidá ještě informace o čase. Celá tato sestava je připojena k počítači, kde je v prostředí programu LabVIEW realizováno zpracování digitálního

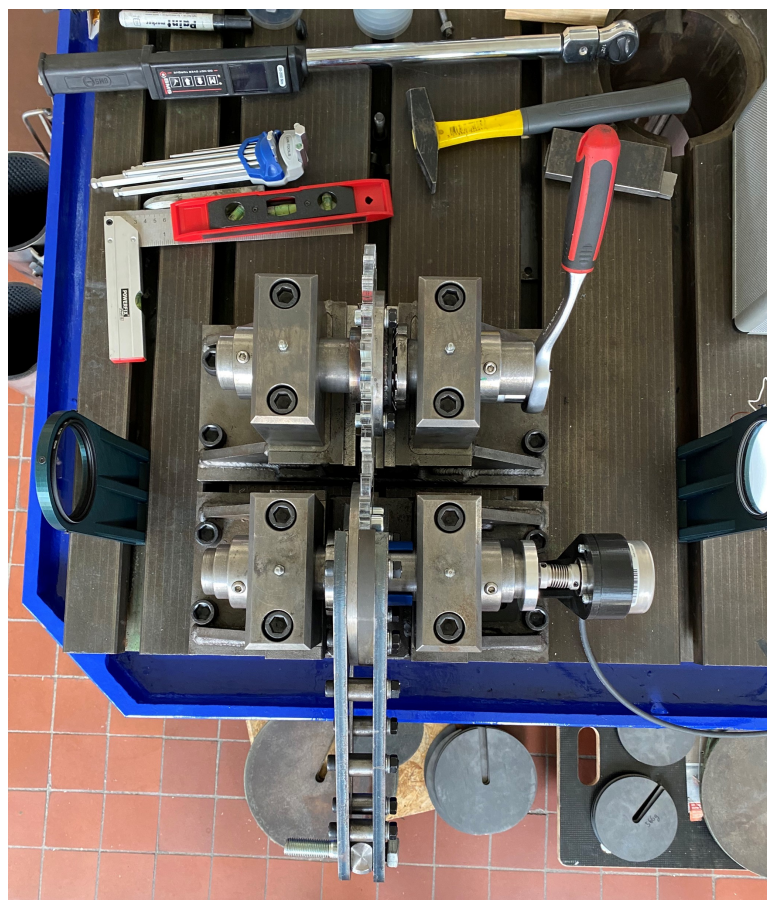
signálu a vykreslení průběhu natočení v závislosti na čase (slouží pouze pro vizuální kontrolu ustálení měřených stavů). Dále je v tomto prostředí připravený prostor pro zapisování a ukládání dat. Kompletní datová sada následně tvoří základ pro vyhodnocení měřených dat. Na Obrázku 35 je pak zobrazeno zjednodušené schéma měřicího standu. Na Obrázcích 36 a 37 jsou vyobrazeny fotografie měřicího standu.



Obrázek 35: Blokové schéma měřicího standu



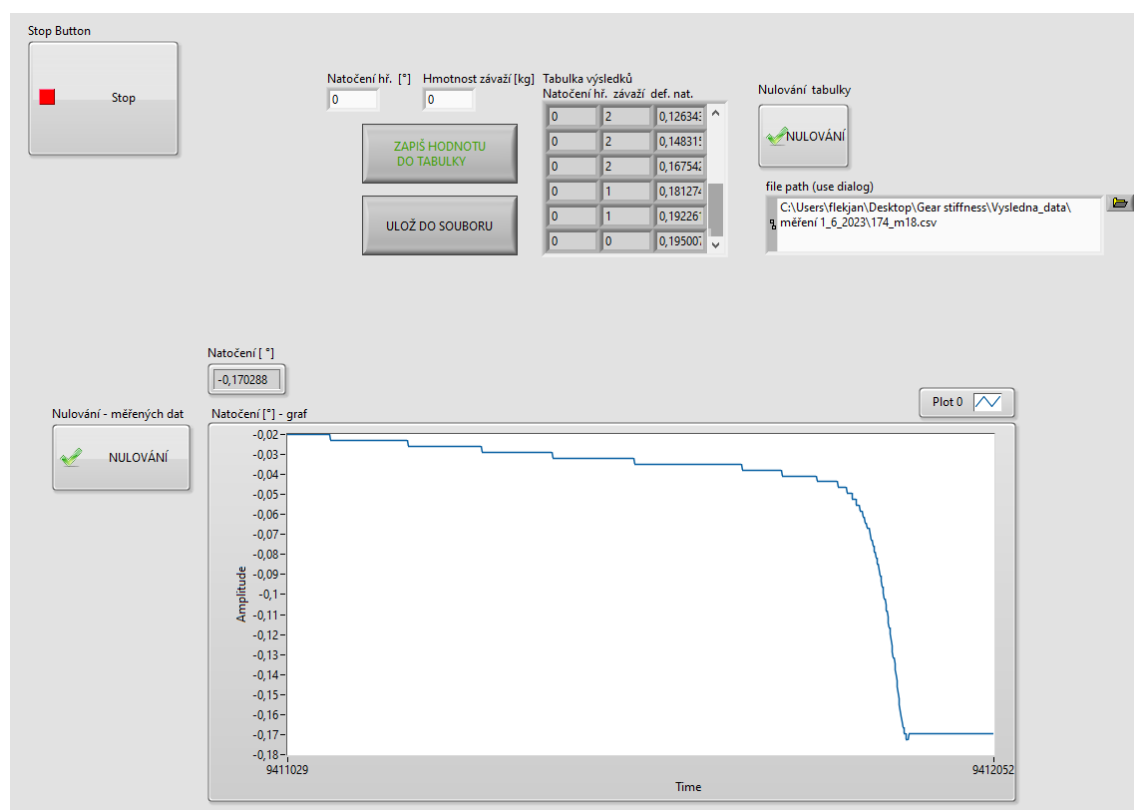
Obrázek 36: Fotografie měřícího standu



Obrázek 37: Fotografie měřícího standu - pohled shora

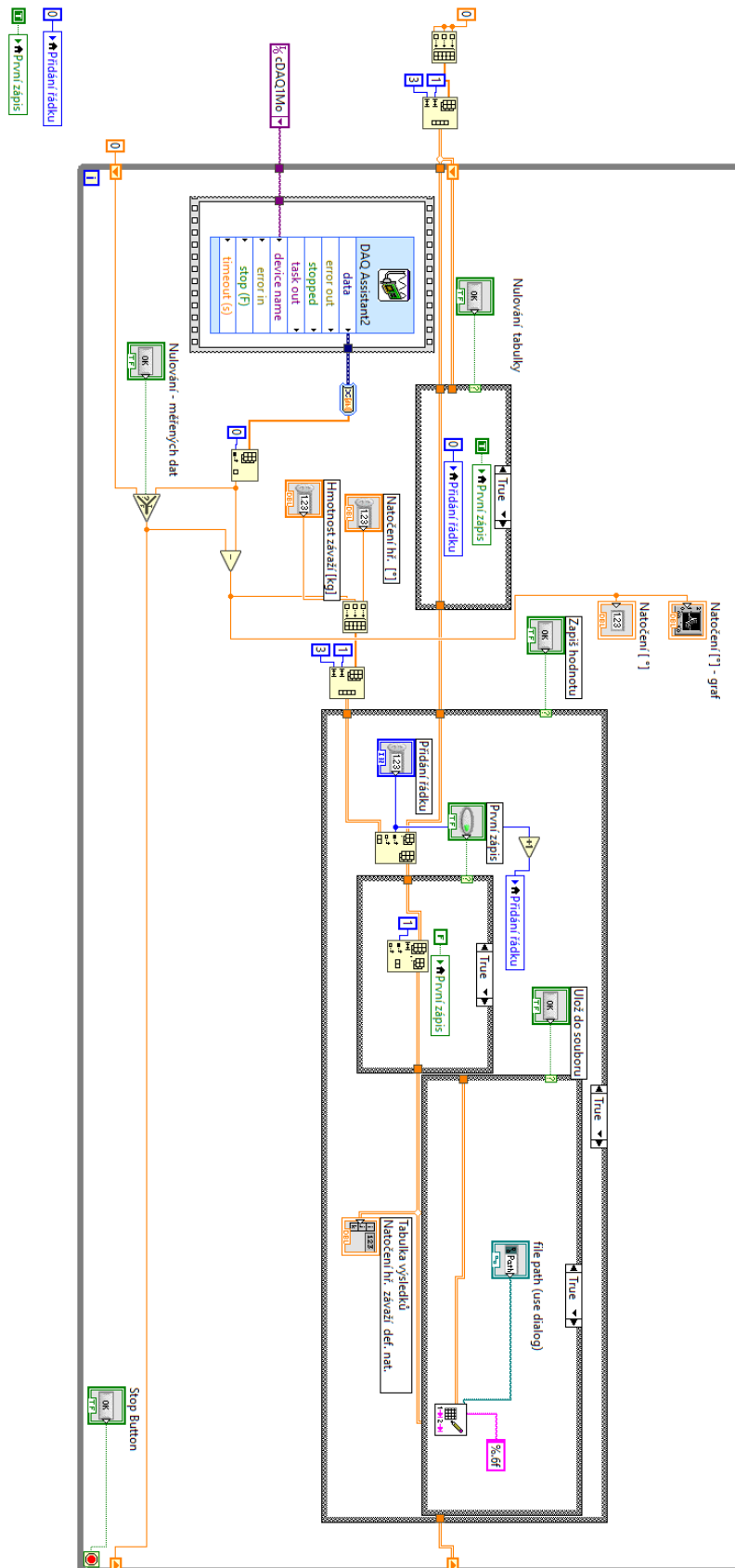
## 4.1.2 LabVIEW

LabVIEW je softwarový nástroj od firmy NI, který má široké využití na poli experimentálního měření. Umožňuje vytvoření měřicího a ovládacího prostředí experimentu, zpracování signálu z měřicí ústředny a modulů, úpravu a filtrování těchto dat a také jejich vykreslení do grafů, případně jejich ukládání. Vytvoření měřicího prostředí v tomto softwaru je jeden z prvních kroků provedených během přípravy měření. Vytvořené prostředí (Obrázek 38) obsahuje graf, vykreslující aktuální hodnotu natočení a tlačítko na nastavení nulové hodnoty natočení. Dále pak tabulku, do které jsou zapisovány změřené hodnoty natočení (úhlové deformace), doplněné o údaj o hmotnosti závaží a natočení kol. V neposlední řadě také nastavení souboru pro ukládání dat a tlačítek pro vymazání hodnot.



Obrázek 38: Měřicí prostředí LabVIEW

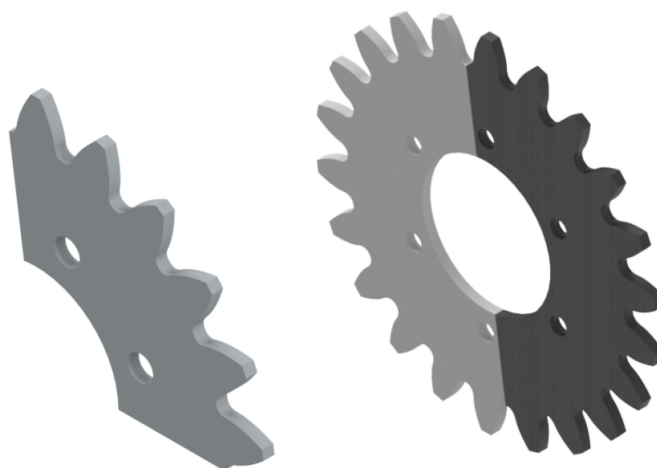
Na Obrázku 39 je naznačeno blokové schéma nastavení měřicího prostředí a jsou v něm vyznačeny jednotlivé funkční uzly.



Obrázek 39: Blokové schéma LabVIEW

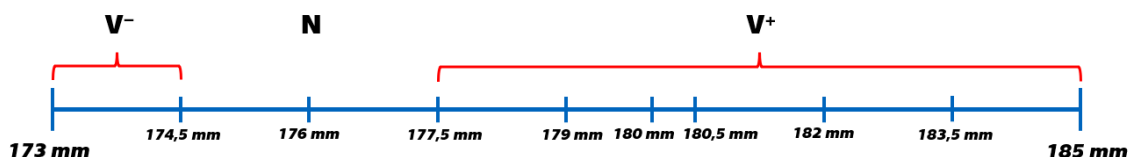
## 4.2 Sada vzorků

Sada vzorků byla použita jako základní vstup do návrhového procesu měřícího standu [28]. Skládá se vždy z pastorku, který je vyroben jako segment ozubení, obsahující 6 zubů. To je dostatečný počet pro experimentální měření a zároveň umožňuje snížení výrobních nákladů. Druhou částí sady je "Multikolo", které je půlené, opět z důvodu snížení nákladů a zjednodušení výměny. Každá polovina přísluší jedné sadě vzorků (viz Obrázek 40).



**Obrázek 40:** Ukázka sady vzorků

Sady vzorků se pak liší šířkou, osovou vzdáleností a hlavně celkovou korekcí soukolí. Byly navrženy řady vzorků o třech šířkách a to 5 a 8 mm, za účelem pozorování závislosti tuhosti na šířce kola. Jak bylo zmíněno v úvodní kapitole o tuhosti a v rovnici (2.1), tak vzhledem k uvažování šířkového zatížení  $w$  při určování tuhosti by se šířka kola neměla na tuhosti projevit. Ale je důležité nezapomenout na rozdíl v případě rovinné napjatosti a rovinné deformace, na který bylo upozorněno jak v modelu deformační energie (2.33), tak v KISSsoftu (2.45).



**Obrázek 41:** Odstupňování řady vzorků

Pro každou šířku byla následně vytvořena řada vzorků s osovou vzdáleností od 173 do 185 mm. Vzorky v tomto intervalu jsou odstupňovány po 1,5 mm (s výjimkou u osové vzdálenosti 180 mm). Pro tyto osové vzdálenosti byly následně vypočteny

příslušné korekce, které pokrývají všechny typy korigování (V- , N a V+), což je naznačeno na Obrázku 41. Je důležité uvést, že celková korekce není rozdělena mezi kolo a pastorek, ale je celá umístěna na pastorek a kolo tedy zůstává nekorigované. Korekce se projeví na poloze tvořícího nástroje při výrobě ozubeného kola. Tímto je dosaženo rozdílných tvarů patních přechodů (návaznost na kapitolu 2.4.3 - Tuhost ovlivněné oblasti pod patní kružnicí). Dále také korekce ovlivní součinitel záběru  $\varepsilon_a$  a s ním poměr doby trvání jednopárového a dvoupárového záběru. Je tedy možné sledovat vliv korekce na průběh celkové tuhosti, případně jejích složek.

Ostatní parametry jsou totožné<sup>1</sup> pro všechny vzorky a jsou shrnuty v následující tabulce:

**Tabulka 4.1:** Základní parametry ozubených vzorků

Název	Symbol	Pastorek	Kolo
Převodový poměr	$i$	1	
Valivá osová vzdálenost	$a_w$	173 – 185 mm	
Normálový modul	$m_n$	8 mm	
Záběrový úhel	$\alpha$	20°	
Počet zubů	$z$	22	22
Šířka zubů	$b$	5/8 mm	
Jednotková korekce	$x$	$x_1$	0
Průměr roztečné kružnice	$d$	176 mm	176 mm

### 4.2.1 Materiál vzorků

Jako materiál vzorků byl původně zvolen *HARDOX® 500*, ale během prvních měření od něj bylo upuštěno a byl nahrazen extrudovaným plexisklem, což umožnilo doplnění standu o již zmíněný polariskop. Detailní vysvětlení tohoto kroku je zmíněno v kapitole 6.2. Hlavním benefitem této změny je řádové zvýšení rozdílu mezi Youngovými moduly -  $E$  a  $G$  vzorů a standu, tedy snížení vlivu deformací standu. A dále také možnost pozorování typu záběru (jednoduchý polariskop) a kontaktní plochy (průhlednost plexiskla) během zatěžování vzorků, případně také využití fotoelasticimetrie.

<sup>1</sup>Hodnota  $x_1$  je závislá na osové vzdálenosti. Pohybuje se v intervalu  $\langle -0,349; 1,312 \rangle$

Materiálové vlastnosti plexiskla vycházejí z katalogu [47] poskytnutého výrobcem. Jedná se konkrétně o polymethylmetakrylát (PMMA) s obchodním označením *Extrudovaný Plexiglas® XT*. Důležité materiálové vlastnosti jsou shrnuty v Tabulce 4.2. Výrobce bohužel neuvádí hodnotu Poissonovy konstanty  $\nu$ . Ta se pro materiál PMMA pohybuje v rozmezí 0,37 až 0,43 [48].

**Tabulka 4.2:** Materiálové vlastnosti pro materiál Plexiglas®<sup>®</sup>, převzato z [47]

Extrudovaný Plexiglas® <sup>®</sup> XT		
Propustnost světla	92	%
Modul pružnosti	3200	MPa
Mez pevnosti v tahu	72	MPa
Rázová houževnatost	15	KJ/m <sup>3</sup>
Poměr prodloužení při přetrhnutí	4,5	%
Koeficient tepelné roztažnosti	0,07	mm/m°C
Měrná hmotnost	1,19	g/cm <sup>3</sup>
Tepelná odolnost	70	°C
Elektrická odolnost	30	KV/mm

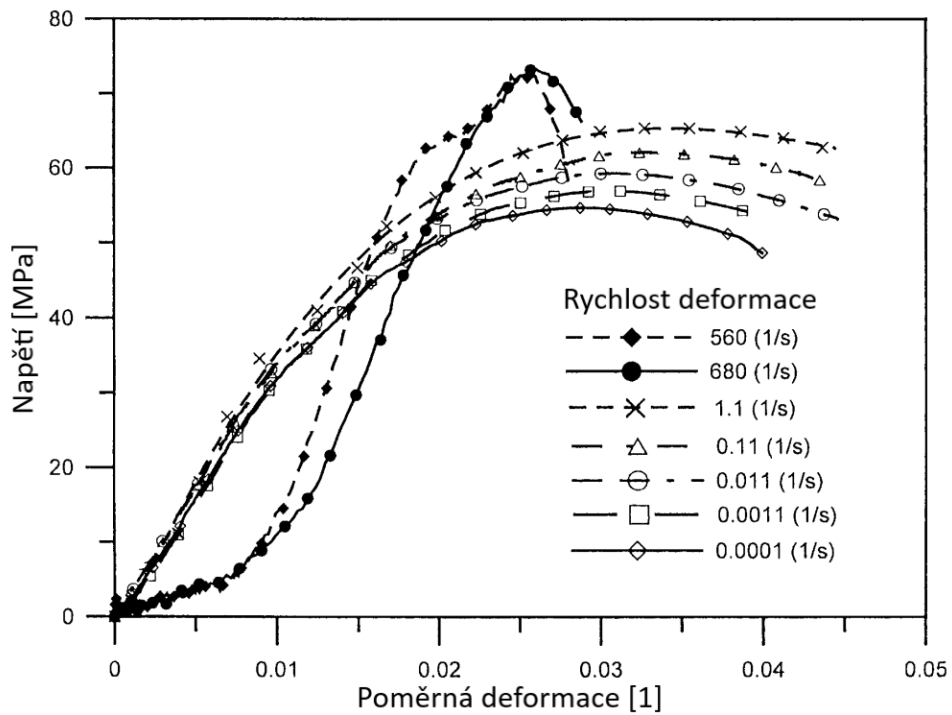
Pro využití tohoto materiálu (PMMA) během experimentů je také důležité znát nejen hodnotu meze pevnosti v tahu, ale také průběh tahového diagramu (případně tlakového). Průběh těchto diagramů a chování materiálu je závislé na rychlosti deformace. Touto problematikou se zabývá článek *Tension and compression tests of two polymers under quasi-static and dynamic loading* [49] nebo také *Experimental study of tensile properties of PMMA at intermediate strain rate* [50].

Materiál PMMA během pomalé deformace vykazoval houževnaté chování a k selhání materiálu došlo při zužování průřezu. Zatímco během rychlé deformace se materiál choval jako křehký, při selhání tedy došlo ke křehkému lomu. Toto chování je zobrazeno v grafech na Obrázku 42 a 43. Jednotlivé průběhy odpovídají příslušné rychlosti deformace (strain rate) znázorněné v legendě grafu.

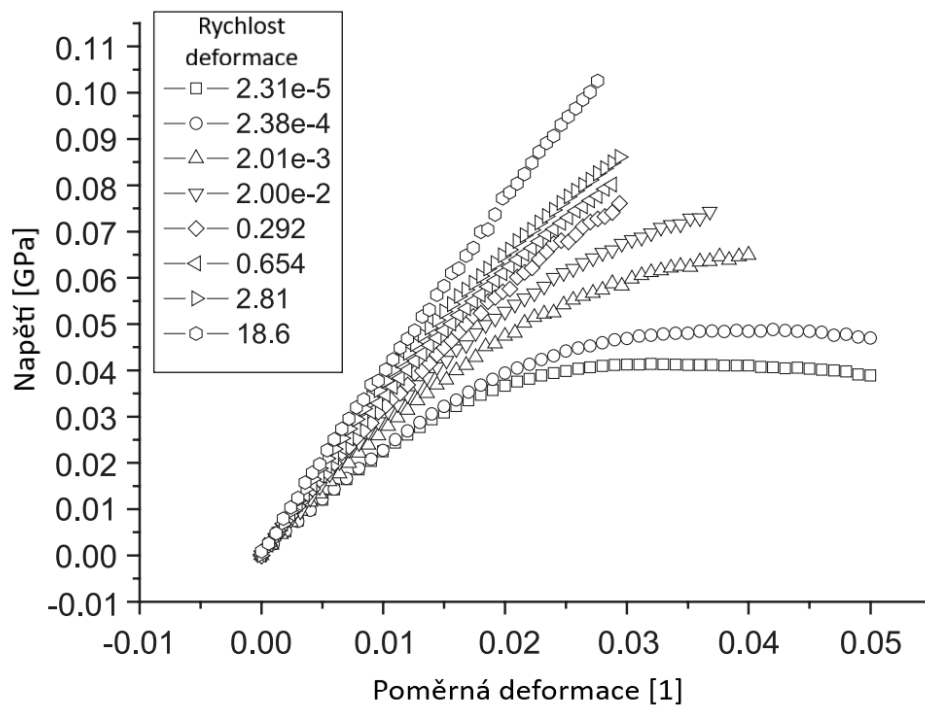
Vzhledem ke způsobu zatěžování na měřícím standu je uvažováno v celém rozsahu práce houževnaté chování materiálu, tedy zatěžování vzorků pomalou deformací.

První ze zmíněných článků [49] také uvádí, že chování materiálu v tlaku je velmi podobné (jak průběhem tak absolutní hodnotou) jako při zatěžování tahem.





Obrázek 42: Tahový diagram, převzato a upraveno z [49]



Obrázek 43: Tahový diagram, převzato a upraveno z [50]

## 5 Příprava modelů a nástrojů pro práci s daty

Tato kapitola je zaměřena na výpočet tuhosti ozubení pomocí analytických modelů a vytvoření průběhu této tuhosti v závislosti na natočení kol. Vytvoření tohoto průběhu je důležitým krokem pro závěrečné vyhodnocení měřených dat a slouží také jako nástroj pro verifikaci dat během vytváření metodiky měření. Proto je nutné mít vypočteny průběhy tuhosti alespoň některými modely ještě před začátkem prvního měření. Pro tento účel byly zvoleny modely, které vyžadovaly co nejmenší časovou náročnost.

V počáteční fázi tvorby diplomové práce byl teprve dokončen měřicí stand a bylo nutné v relativně krátkém časovém úseku uvést stand do provozního stavu, aby mohlo co nejdříve začít měření. Toto bylo také ve fázi práce, kdy byly stále uvažovány ocelové vzorky, proto je zde zahrnut i model ISO 6336 [6].

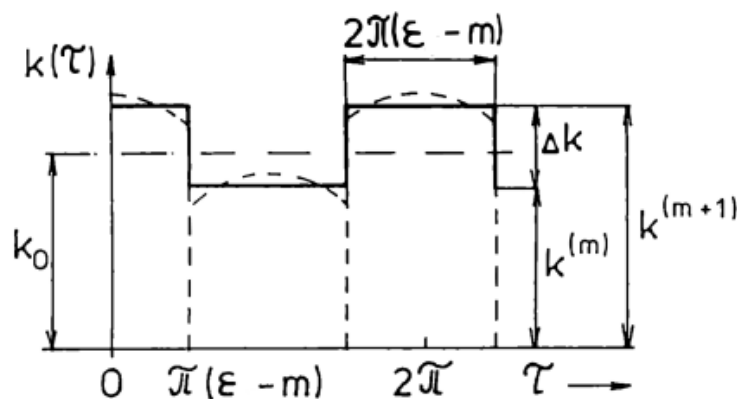
### 5.1 Model ISO 6336

Použití modelu ISO 6336 [6], dále jen ISO model, je velmi jednoduché, jelikož stačí dosadit parametry ozubení do empirických vzorců (viz kapitola 2.3). Pro tento účel byl využit software MATLAB od firmy MathWorks, ve kterém byl realizován výpočet i vytvoření grafů. Vztahy z kapitoly 2.3 byly doplněny o vytvoření časového průběhu tuhosti pomocí Fourierovy řady (5.1) [51]. Do té byla dosazena jednopárová tuhost  $c'$ , dvoupárová tuhost  $c_\gamma$ , součinitel záběru  $\varepsilon = \varepsilon_\alpha$  a  $m$ , které reprezentuje počet párů v záběru (tedy  $m$  a  $m + 1$ ). Výsledkem je průběh tuhosti v závislosti na čase  $\tau$  vykreslený na Obrázku 44.

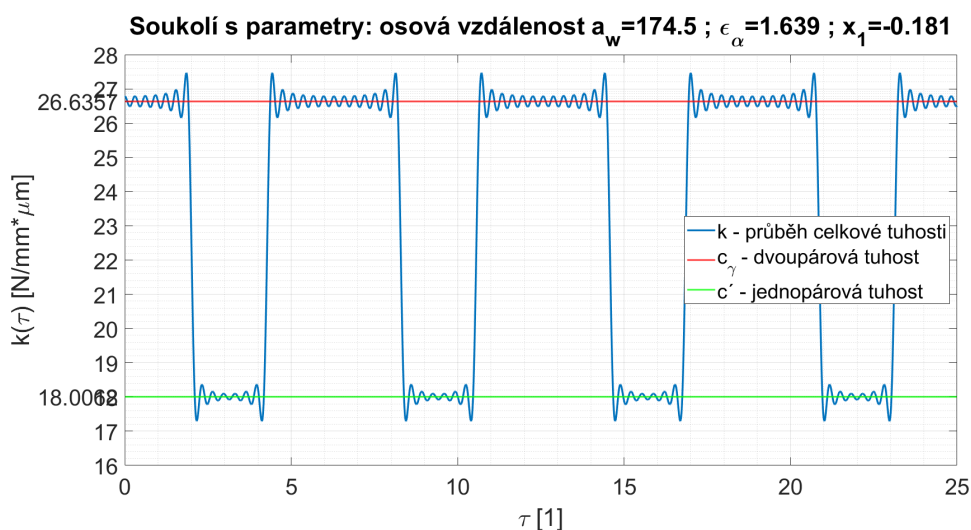
$$k(\tau) = c' + (c_\gamma - c') \cdot (\varepsilon - m) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (c_\gamma - c')}{\pi \cdot n} \cdot \sin[\pi \cdot n \cdot (\varepsilon - m)] \cdot \cos(n \cdot \tau) \quad (5.1)$$

Takto vypočtený časový průběh tuhosti ozubení byl následně vykreslen do grafu například pro vzorek s osovou vzdáleností  $a_w = 174,5 \text{ mm}$  (Obrázek 45) a tedy připraven jako podklad pro kontrolu během měření.

Je důležité zopakovat, že ISO model neumožňuje změnu materiálových konstant. Je tedy platný pouze pro ocelové vzorky.



Obrázek 44: Průběh celkové tuhosti ozubení - ISO model, převzato z [51]



Obrázek 45: Průběh celkové tuhosti ozubení - ISO model

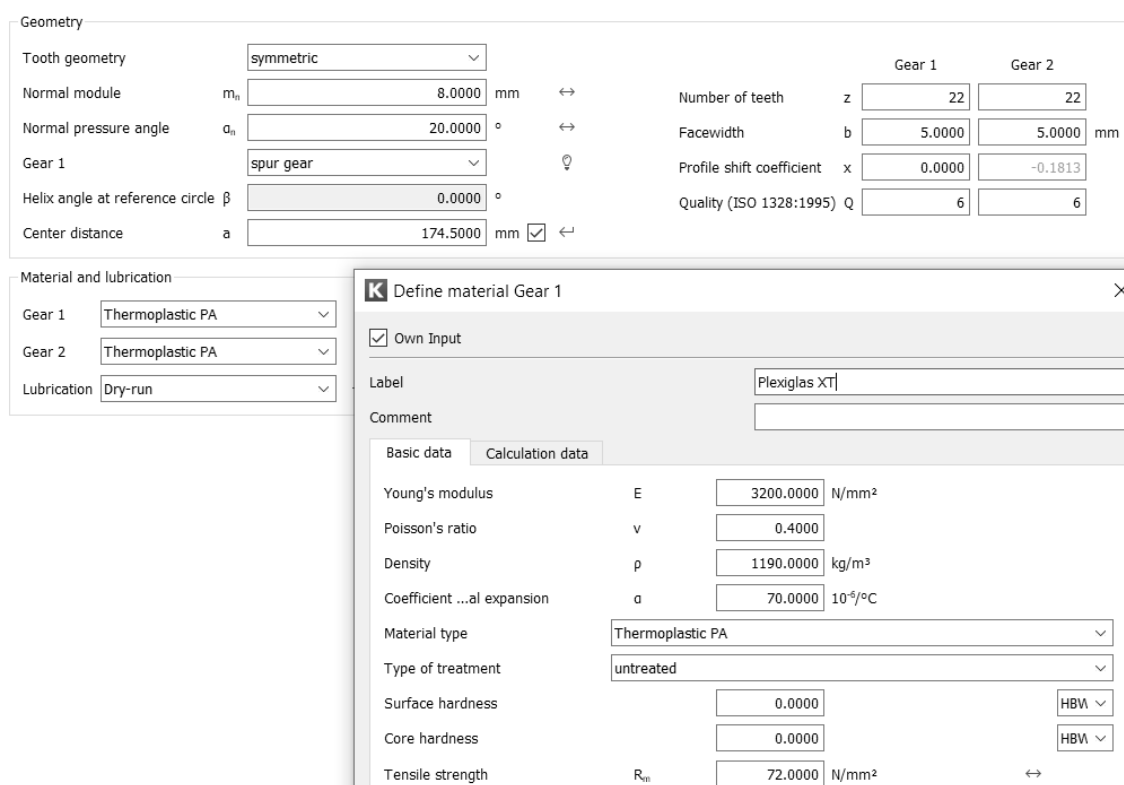
## 5.2 Model KISSsoft

Druhým modelem, který byl použit hned na začátku vytváření práce, je model získaný s využitím výpočetního software KISSsoft. Tento software byl použit už k vytvoření řady vzorků (vstupní parametr do bakalářské práce *Bc. Kadeřábka* [28]). Software používá pro kontaktní analýzu (obsahující výpočet tuhosti) analytický

model popsaný v kapitole 2.5, oproti ISO modelu už však umožňuje nastavení materiálu a je tedy možné ho využít jak pro ocelové vzorky tak pro vzorky z plexiskla. Kromě kontaktní analýzy umí software také jednoduchý MKP výpočet.

### 5.2.1 Kontaktní analýza KISSsoft

Hlavním vstupem do kontaktní analýzy je nastavení materiálu kol. Ten byl nastaven podle hodnot uvedených v kapitole 4.2.1, na Obrázku 46 je zobrazena tabulka nastavení materiálu v KISSsoftu. Je zde také vidět nastavení parametrů soukolí, ze kterých vychází veškeré geometrické rozměry. Software umí také graficky zobrazit záběr kol s možností zobrazení různých prvků jako záběrová přímka, základní průměry ozubení, ale také rozsah průměrů, na kterých dochází k jednopárovému kontaktu. V tomto zobrazení je také možné měnit vzájemné natočení kol, což může být užitečné pro lepší představu o střídání typů záběrů, pohybu kontaktních bodů po záběrové přímce nebo rozsahu oblastí jednopárového a dvoupárového záběru.



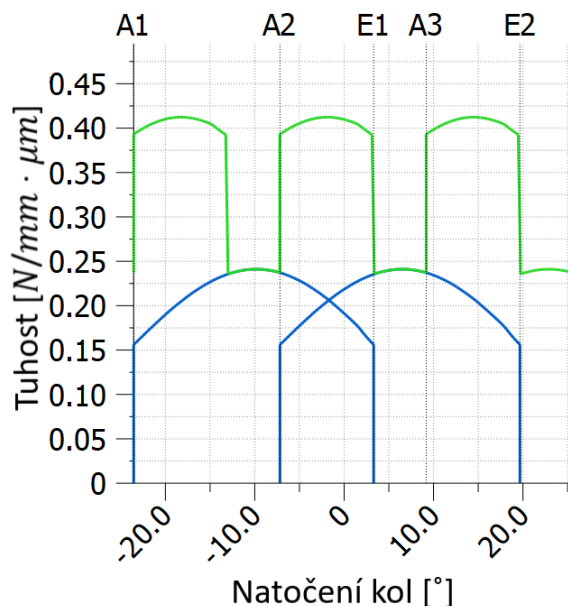
The image shows the KISSsoft software interface for gear analysis. It is divided into several sections:

- Geometry:**
  - Tooth geometry: symmetric
  - Normal module  $m_n$ : 8.0000 mm
  - Normal pressure angle  $\alpha_n$ : 20.0000 °
  - Gear 1: spur gear
  - Helix angle at reference circle  $\beta$ : 0.0000 °
  - Center distance  $a$ : 174.5000 mm
  - Number of teeth: Gear 1 = 22, Gear 2 = 22
  - Facewidth  $b$ : 5.0000 mm
  - Profile shift coefficient  $x$ : Gear 1 = 0.0000, Gear 2 = -0.1813
  - Quality (ISO 1328:1995)  $Q$ : 6
- Material and lubrication:**
  - Gear 1: Thermoplastic PA
  - Gear 2: Thermoplastic PA
  - Lubrication: Dry-run
- Define material Gear 1:**
  - Label: Plexiglas XT
  - Comment: (empty)
  - Basic data:
    - Young's modulus  $E$ : 3200.0000 N/mm<sup>2</sup>
    - Poisson's ratio  $\nu$ : 0.4000
    - Density  $\rho$ : 1190.0000 kg/m<sup>3</sup>
    - Coefficient thermal expansion  $\alpha$ : 70.0000 10<sup>-6</sup>/°C
  - Material type: Thermoplastic PA
  - Type of treatment: untreated
  - Surface hardness: 0.0000 HBW
  - Core hardness: 0.0000 HBW
  - Tensile strength  $R_m$ : 72.0000 N/mm<sup>2</sup>

**Obrázek 46:** Nastavení soukolí a materiálu v softwaru KISSsoft

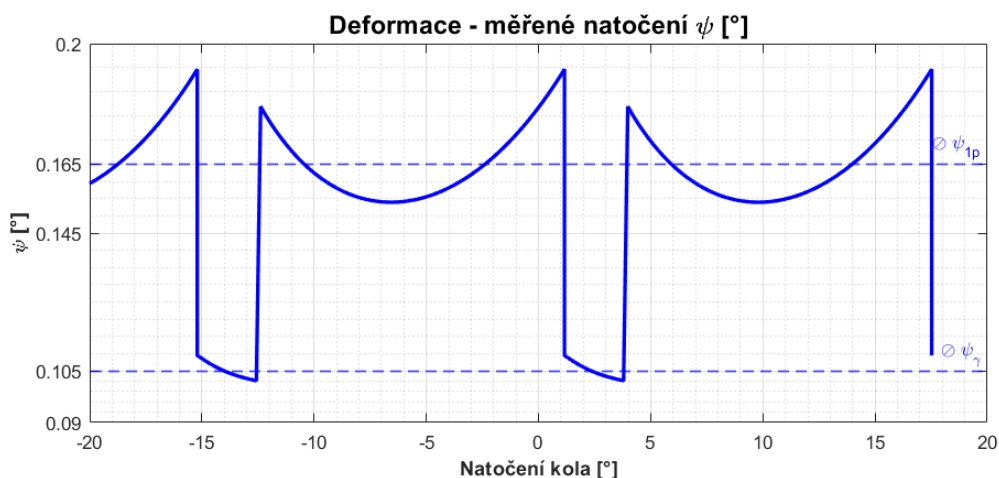
Po provedení výpočtu kontaktní analýzy softwarem je možné zobrazit požadovaný graf průběhů tuhosti (Obrázek 47). Jsou zde zřetelně naznačeny průběhy jednopárové tuhosti (označeny modře) a průběh celkové tuhosti vytvořený jejich

součtem (označen zeleně). Důležitou funkcí je možnost uložení průběhu celkové tuhosti jako souřadnice jednotlivých bodů do textového souboru. Díky tomu je možné přenést průběh například do MATLABu a zde s ním dále pracovat.



Obrázek 47: Průběh tuhostí - Model KISSsoft

Pro účely snadného porovnání během prvních měření byly v programu MATLAB dopočítány hodnoty úhlových deformací, které by měly odpovídat experimentálně měřeným datům. Takový graf je naznačen na Obrázku 48, tento konkrétní graf odpovídá vzorku s parametry  $a_w = 185 \text{ mm}$ ;  $b = 5 \text{ mm}$  zatíženého závažím o hmotnosti  $m_Z = 15 \text{ kg}$ . Jsou zde také vyznačeny hodnoty průměrné deformace během jednopárového ( $\psi_{1p}$ ) a dvoupárového ( $\psi_\gamma$ ) záběru.



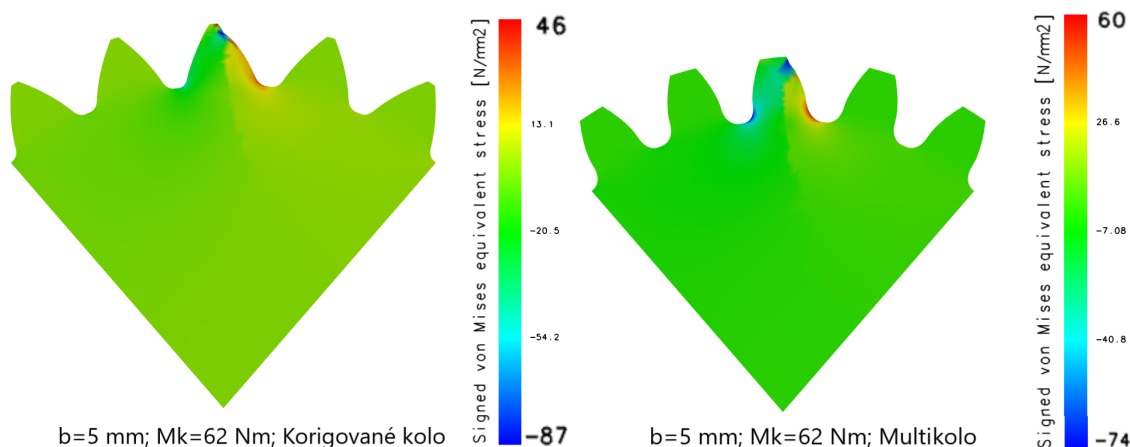
Obrázek 48: Průběhy deformací - Model KISSsoft

Díky těmto grafům bylo možné jednoduše kontrolovat, zda se hodnoty měřené deformace pohybují v podobném rozsahu hodnot. Později byl tento proces převeden do Excelu pro větší variabilitu a to hlavně z hlediska volby a nastavení zatížení. Ve finální části práce, tedy po ověření metody měření byl tento proces odstraněn.

## 5.2.2 MKP analýza

KISSsoft obsahuje také modul pro MKP analýzu, vzhledem k jednoduchosti použití (stačí nastavit zatěžovací moment) byla tato analýza použita k návrhu rozsahu zatížení a to hlavně k volbě maximální možné hmotnosti závaží. Použitý materiál (plexisklo) má relativně malou hodnotu meze pevnosti v tahu ( $72 \text{ MPa}$ ), což je hlavním důvodem pro tento krok, jelikož by mohlo snadno dojít k poškození vzorků.

Pro závaží  $24 \text{ kg}$  odpovídá zátěžný moment přibližně  $62 \text{ Nm}$ , pro toto zatížení byla tedy provedena MKP analýza opět na vzorku s parametry  $a_w = 185 \text{ mm}$ ;  $b = 5 \text{ mm}$  (jelikož byl první měřený) a výsledky jsou zobrazeny na Obrázku 49. Je patrné, že zatížení  $62 \text{ Nm}$  je příliš vysoké. Maximální hodnoty signovaného von Misesova napětí jsou  $60$  a  $-74 \text{ N/mm}^2$  ( $\text{MPa}$ ) pro multikolo. A pro pastorek - korigované kolo  $46$  a  $-87 \text{ N/mm}^2$  ( $\text{MPa}$ ). Za předpokladu stejné pevnosti v tlaku i v tahu (dle kapitoly 4.2.1) je toto zatížení těsně nad mezí pevnosti v tlaku. Významnější je však napětí v tahu, které je v tomto případě vyhovující.



**Obrázek 49:** MKP analýza v KISSsoftu pro návrh vhodného závaží

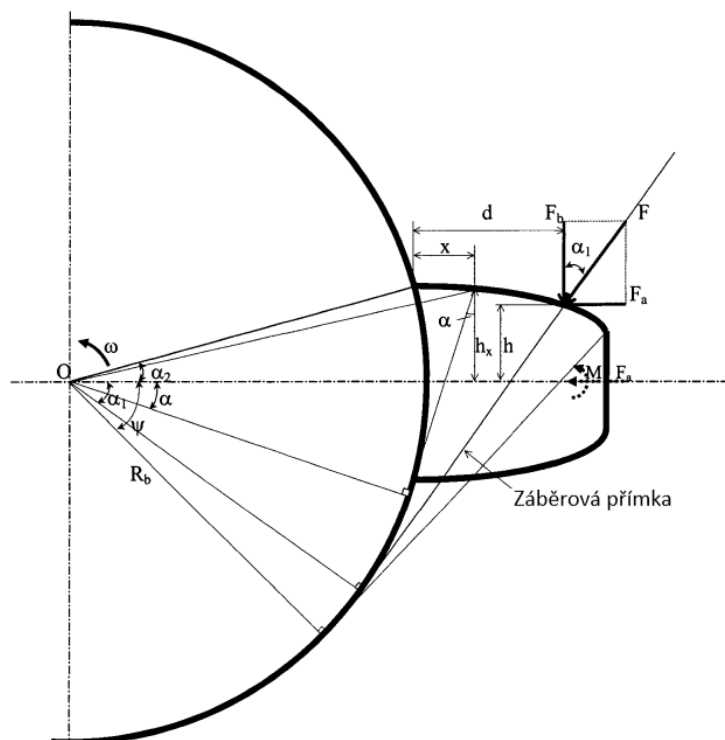
Je uvažován průběh tahového diagramu pro relativně pomalou deformaci dle Obrázku 42 (umístění závaží na páku probíhá postupně viz kapitola 6.7). Materiál se pro tento stav chová jako houževnatý, materiál však nemá výraznou mez kluzu. Byla proto zvolena limitní hmotnost závaží  $18 \text{ kg}$ . To odpovídá přibližně 75% využití

meze pevnosti v tlaku a přibližně 50% využití meze pevnosti v tahu. Vzhledem k tomu, že během měření s tímto limitním závažím nedošlo k poruše vzorku, byl tento způsob návrhu limitního závaží použit i pro ostatní vzorky.

Jako poznámku je dobré uvést, že software pro MKP analýzu uvažuje zatěžování pomocí osamělé síly na největším průměru během jednopárového záběru. Jedná se tedy o krajní stav, při kterém je zatížení maximální.

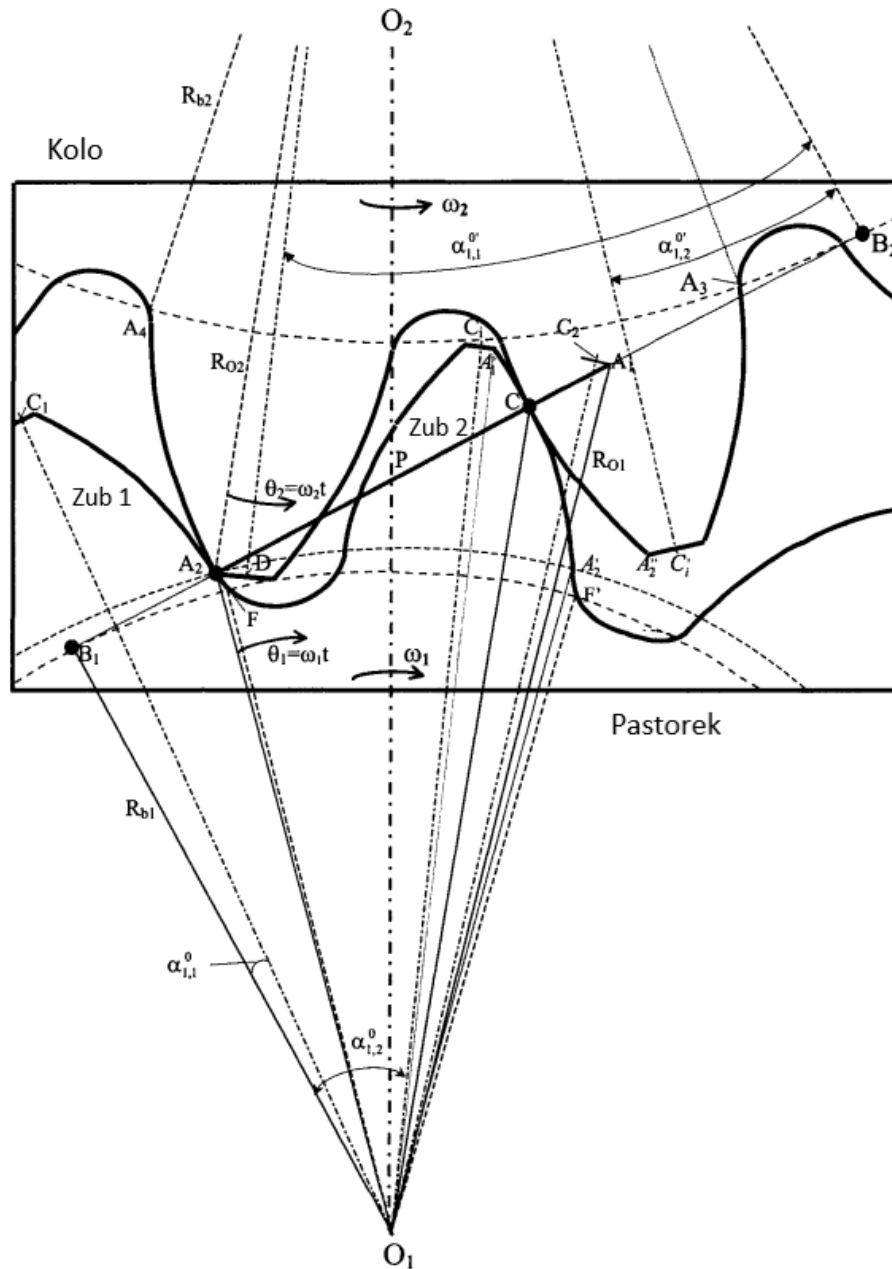
### 5.3 Model Deformační Energie

Tento model vychází ze vztahů představených v kapitole 2.4. Aby bylo možné výpočet automatizovat v prostředí softwaru MATLAB, je nutné popsat odval kol, během kterého se mění rozměry ( $d$ ,  $h$ ,  $x$ ,  $h_x$  a další viz Obrázek 50) a to v závislosti na posunu záběrového bodu po evolventním boku zubu.



**Obrázek 50:** Schéma zubu uvažovaného jako nosník vetknutý v místě základní kružnice, převzato a upraveno z [9]

Pro vyjádření zmíněných proměnných rozměrů je nutné zavést na pastorku úhel  $\theta_1$ , který slouží pro určení polohy záběrového bodu. Jeho velikost se pohybuje v rozmezí od 0 do  $\frac{2 \cdot \pi}{z_1}$  a pokrývá tak celý dvoupárový i jednopárový záběr, pro které jsou zavedeny rozsahy  $\theta_d$  a  $\theta_s$ .



Obrázek 51: Zavedení označení důležitých bodů a úhlů, převzato a upraveno z [9]

Jako počáteční bod záběru (tedy  $\theta_1 = 0$ ) je zvolen první bod kontaktu zubu označeného jako  $zub_1$ . Tento bod (viz Obrázek 51 bod  $A_2$ ) se nachází v průsečíku záběrové přímky  $\overline{B_1B_2}$  a hlavové kružnice kola -  $R_{a2}$ . V tomto okamžiku začíná dvou párový záběr (body kontaktu jsou  $A_2$  a  $C$ ), který trvá až do posunu záběrového bodu  $C$  do průsečíku záběrové přímky  $\overline{B_1B_2}$  a hlavové kružnice pastorku -  $R_{a1}$  označeného jako bod  $A_1$ . Nyní se  $\theta_1 = \theta_d$  a končí záběr  $zubu_2$ , tedy začíná jednopárový záběr, který trvá po dobu otáčení o úhel  $\theta_s$ .



Dalším důležitým rozměrem je úhel  $\alpha_1$ , pod kterým působí zátěžná síla na zub viz Obrázek 50. Na Obrázku 51 je tento úhel pro pastorek označen jako  $\alpha_{1,1}^{\theta_1}$  pro *zub<sub>1</sub>* a  $\alpha_{1,2}^{\theta_1}$  pro *zub<sub>2</sub>*.

Vztahy pro výpočet těchto důležitých úhlů uvedené v práci *Dynamic Simulation for System Response of Gearbox Including Localized Gear Faults* [9], jsou vyjádřeny pro nekorigované soukolí a není tedy možné je použít pro řadu vzorků v této práci (s výjimkou vzorku  $a_w = 176 \text{ mm}$ ). Bylo tedy nutné vztahy upravit, aby uvažovaly vliv korekcí. Vyjádření je provedeno stejným postupem jako pro nekorigované soukolí, a to na základě trigonometrie. Tyto vztahy používají body vyznačené na Obrázku 51 a celý postup vyjádření je uveden v Příloze 1, zde jsou uvedeny pouze finální vztahy.

$$\alpha_{1,1}^{\theta_1} = \theta_1 - \alpha_2 + \tan \left[ \arccos \left( \frac{R_{b1}}{\sqrt{R_{a2}^2 + a_w^2 - 2 \cdot R_{a2} \cdot a_w \cdot \cos \left( \arccos \left( \frac{R_{b2}}{R_{a2}} \right) - \alpha_w \right)}} \right) \right] \quad (5.2)$$

$$\alpha_{1,2}^{\theta_1} = \alpha_{1,1}^{\theta_1} + \frac{2 \cdot \pi}{z_1} \quad (5.3)$$

Úhly  $\alpha'_{1,i}^{\theta_1}$  kola jsou definovány těmito vztahy:

$$\alpha'_{1,1}{}^{\theta_1} = \tan \left[ \arccos \left( \frac{R_{b2}}{R_{a2}} \right) \right] - \alpha'_2 - \frac{z_1}{z_2} \cdot \theta_1 \quad (5.4)$$

$$\alpha'_{1,2}{}^{\theta_1} = \alpha'_{1,1}{}^{\theta_1} - \frac{2 \cdot \pi}{z_2} \quad (5.5)$$

Úhel  $\alpha_2$  pastorku a  $\alpha'_2$  kola představuje úhel poloviny šířky zubu na základní kružnici a je vyjádřen z úhlu šířky zubu na roztečné kružnici  $\psi$ .

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \cdot \psi + \text{inv}(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\pi}{z_1} + \frac{4 \cdot x_1 \cdot \tan(\alpha)}{z_1} \right) + \text{inv}(\alpha) \quad (5.6)$$

$$\alpha'_2 = \frac{1}{2} \cdot \psi + \text{inv}(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\pi}{z_2} + \frac{4 \cdot x_2 \cdot \tan(\alpha)}{z_2} \right) + \text{inv}(\alpha) \quad (5.7)$$

Z rovnic 5.2 až 5.5 mohou být vypočteny zátěžné úhly  $\alpha_1$  pro konkrétní zub na příslušném kole v závislosti na natočení o úhel  $\theta_1$ .

Na základě těchto úhlů jsou následně vyjádřeny vztahy pro proměnné rozměry viz kapitola 2.4.1 (rovnice (2.17 až 2.23)).

Dále je nutné vypočítat meze  $\theta_d$  a  $\theta_s$ , aby bylo možné během výpočtu rozlišit jednopárový a dvoupárový záběr. Délka trvání dvoupárového záběru odpovídá odvalu o úhel  $\angle(A'_1O_1A_1)$ . Délka trvání jednopárového záběru je pak doplněk do  $\frac{2 \cdot \pi}{z_1}$ .

Výsledné vztahy pro výpočet  $\theta_d$  a  $\theta_s$  tedy vypadají takto:

$$\theta_d = \tan \left[ \arccos \left( \frac{R_{b1}}{R_{a1}} \right) \right] - \alpha_{1,1}^0 - \frac{2 \cdot \pi}{z_1} - \text{inv}(\alpha) - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\pi}{z_1} + \frac{4 \cdot x_1 \cdot \tan(\alpha)}{z_1} \right) \quad (5.8)$$

$$\theta_s = \frac{2 \cdot \pi}{z_1} - \theta_d \quad (5.9)$$

Jedna perioda průběhu záběru tedy vypadá následovně:

- $\theta_1 = 0$  - Začátek dvoupárového záběru
- $\theta_1 = \theta_d$  - Konec dvoupárového záběru
- $\theta_1 = \theta_d$  - Začátek jednopárového záběru
- $\theta_1 = \theta_d + \theta_s = \frac{2 \cdot \pi}{z_1}$  - Konec jednopárového záběru a zároveň konec periody. Následuje opět dvoupárový záběr.

Nyní jsou popsány všechny parametry pro výpočet ohybové, smykové a axiální tlakové složky tuhosti zubu uvažovaného jako nosník vetknutý v místě základní kružnice. Pro přepočítání na nosník vetknutý v místě patní kružnice je nutné vypočítat úhel  $\alpha_3$  a rozměr  $d_1$  (viz Obrázek (4) nebo (3), rovnice (2.28 a 2.29) nebo (5.10 a 2.30)).

$$\alpha_3 = \arccos \left( \frac{R_b}{R_f} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\pi}{z} + \frac{4 \cdot x \cdot \tan(\alpha_n)}{z} - 2 \cdot \left( \text{inv} \left[ \arccos \left( \frac{R_b}{R_f} \right) \right] - \text{inv}(\alpha_n) \right) \right] \quad (5.10)$$

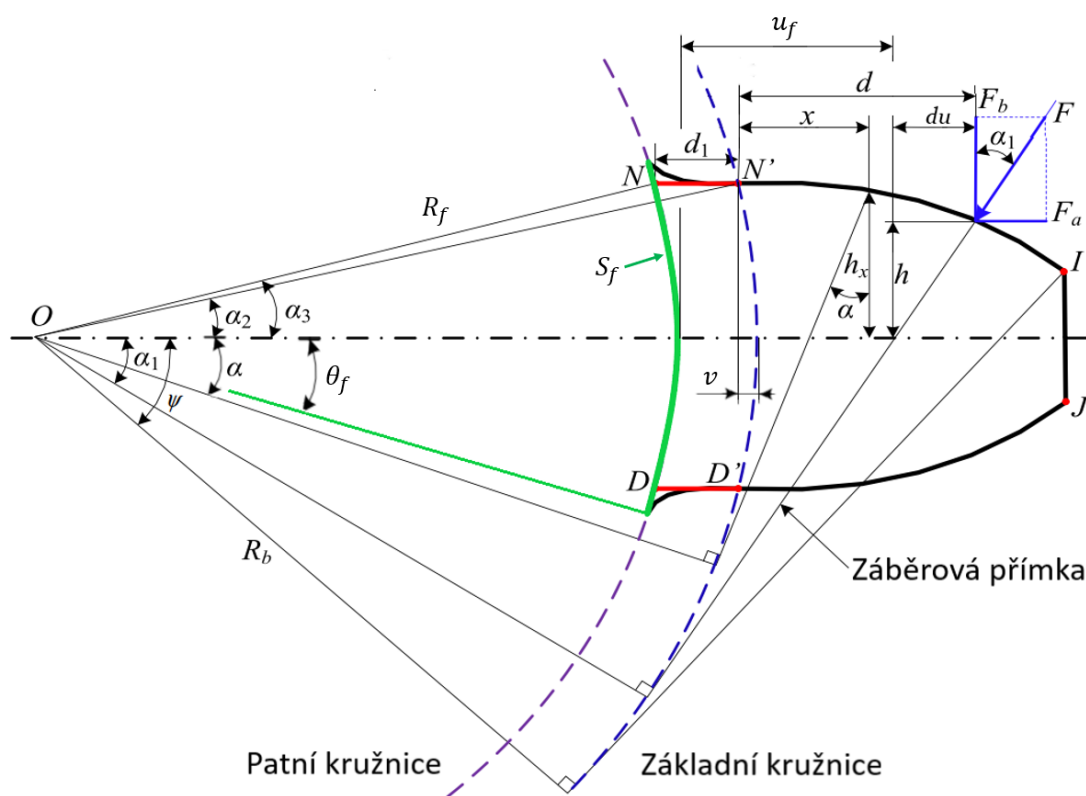
Další z částí celkové tuhosti, která je v této práci do modelu DE zahrnuta, je Hertzova kontaktní tuhost  $K_h$  (viz kapitola 2.4.2, rovnice (2.31)).

Pro tuhost ovlivněné oblasti pod patní kružnicí  $K_f$  (viz kapitola 2.4.3) je nutné vyjádřit rameno zátěžné síly  $u_f$ . K výpočtu je možné využít rozměr  $d$ ,  $h$ ,  $v$  a úhel  $\alpha_1$ . Pro účely tohoto výpočtu byl Obrázek 3 doplněn o tyto rozměry a znovu zobrazen zde jako Obrázek 52. Odvození tohoto vztahu je uvedeno v Příloze 1.

$$u_f = d + (R_b - R_f) - [h \cdot \tan(\alpha_1)] - v \quad (5.11)$$

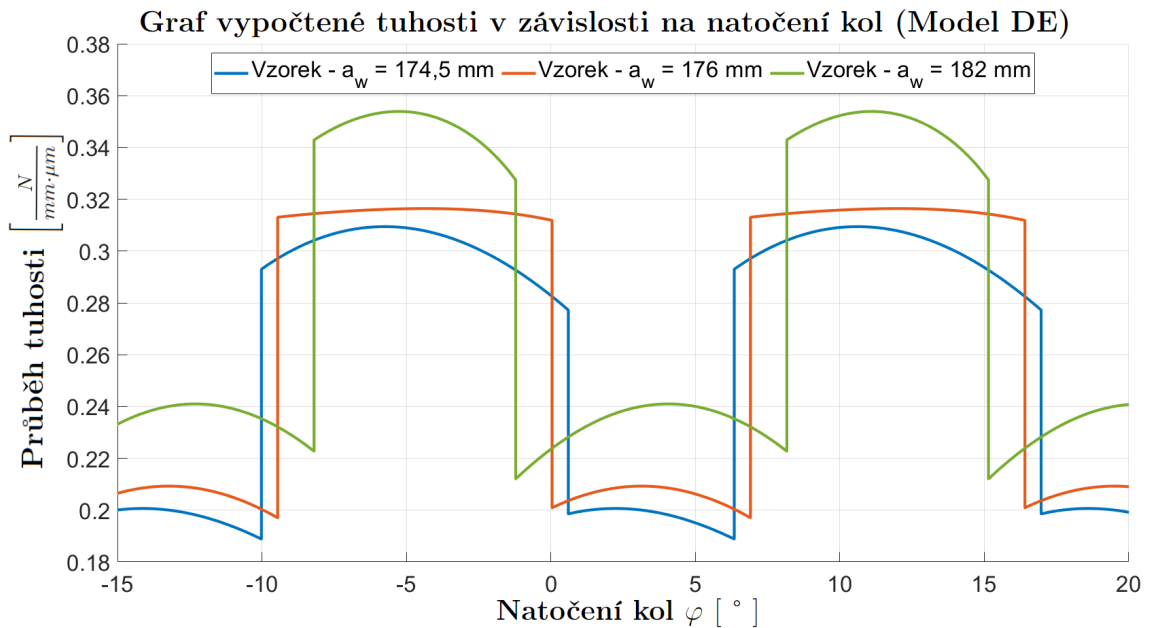
Kde je  $v$  vyjádřeno jako:

$$v = R_b \cdot \left[ 1 - \cos \left( \frac{\frac{\pi}{z} + \frac{4 \cdot x \cdot \tan(\alpha_n)}{z} + 2 \cdot \text{inv}(\alpha_n)}{2} \right) \right] \quad (5.12)$$

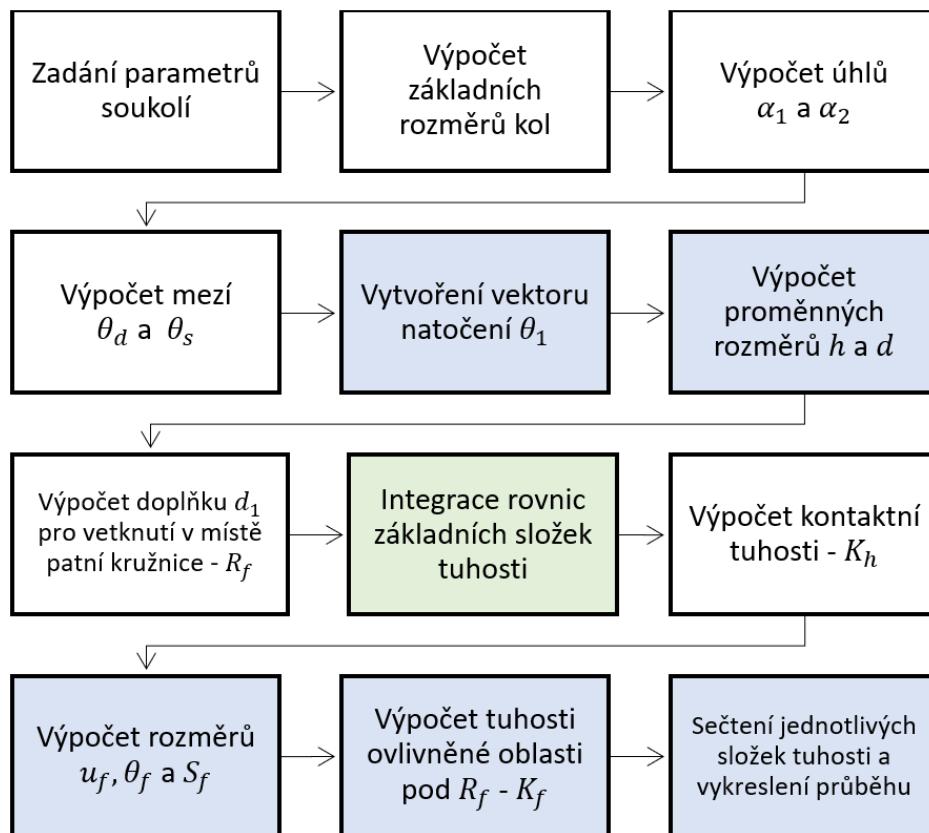


**Obrázek 52:** Schéma pro výpočet  $u_f$ , převzato a upraveno z [10]

Výstupem této metody je opět průběh tuhosti v závislosti na natočení kol (v tomto případě dáno úhlem  $\theta_1$ ) viz Obrázek 53. Výpočet byl proveden v prostředí softwaru MATLAB za použití několika výpočetních „For cyklů“ (zvýrazněny modře) a funkce pro integraci (zvýrazněno zeleně). Kompletní postup výpočtu je naznačen na schématu (Obrázek 54).



**Obrázek 53:** Průběhy tuhosti pro vzorky  $a_w = 174,5 \text{ mm}$ ,  $a_w = 176 \text{ mm}$  a  $a_w = 182 \text{ mm}$



**Obrázek 54:** Schéma postupu výpočtu modelu deformační energie

## 5.4 MKP Model - Abaqus

Jak již bylo několikrát zmíněno, jedním z vhodných způsobů pro zjištění tuhosti je použití metody konečných prvků. Zvoleným výpočetním programem je Abaqus CAE, který je vhodný pro detailní nastavení parametrů výpočtu, sítě a okrajových podmínek. Jinou variantou by mohl být například software Ansys, ten je však vhodnější pro práci s většími sestavami a méně detailním nastavením sítě. Postup pro získání tuhosti je relativně podobný s analytickými metodami. Základem je výpočet deformace zubu. Vhodným způsobem zjištění deformace je výpočet natočení kola kolem své osy vlivem této deformace. Na stejném principu je založen měřicí stand z kapitoly 4.1.

V tomto případě je však nutné nastavení okrajové podmínky pro odval kol. To znamená, že během vyhodnocení se vykresluje natočení osy kola v závislosti na natočení daného okrajovou podmínkou pro odval kol. Pro případ, ve kterém by nedocházelo k deformaci zubů by natočení osy kola a odval kol byly totožné. Je tedy jednoduše popsáno funkcí  $f(x) = x$ , kde  $x$  představuje úhel odvalu kol. V případě, ve kterém se zuby deformují tedy stačí odečíst tuto lineární závislost a získat tak průběh úhlové deformace zubů v závislosti na úhlu odvalu kol. Ten je následně pomocí jednoduchých vztahů přepočten na průběh tuhosti ozubení.

Problematika MKP metody byla diskutována v kapitole 2.6 a na základě těchto poznatků byl vytvořen model popsáný v následujících kapitolách.

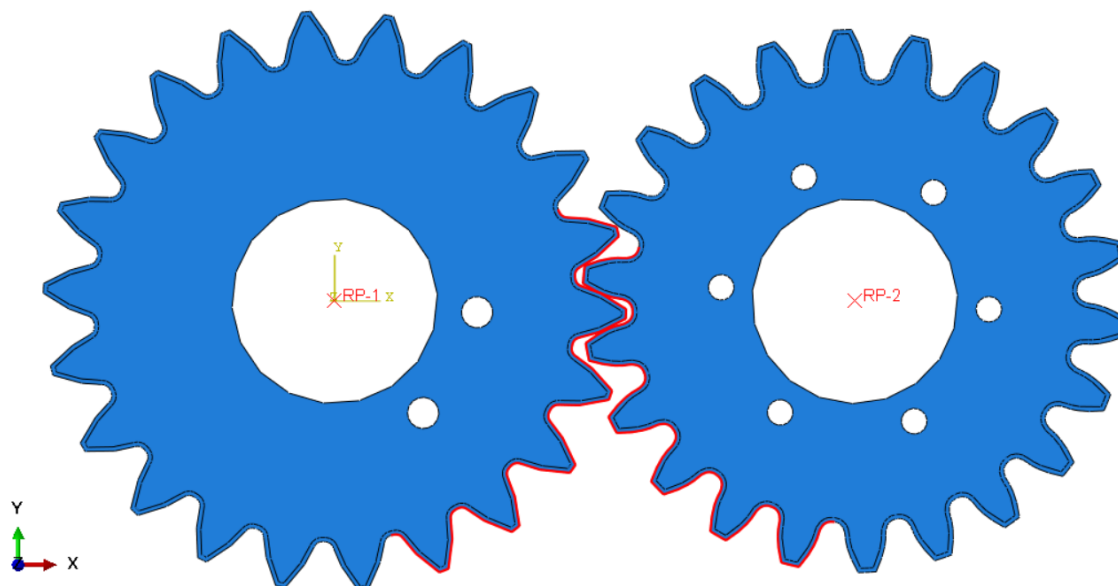
### 5.4.1 Vytvoření modelu

Prvním krokem je vhodná úprava 3D modelu soukolí pro snadné importování do softwaru Abaqus CAE. Jedná se o přímé ozubení, proto bude výpočtové prostředí nastaveno jako „2D planar, deformable“ (2D plošné, deformovatelné). Importovaným modelem je tedy 2D plocha vytvořena z 3D modelu pomocí nástroje „Zesílení“ (výstup je nutné nastavit jako plochu) v programu Inventor a dále vytvořit rozdělení této plochy pomocí nástroje „Rozdělit“. Rozdělení ve formě oddělení svrchní vrstvy ozubení (dle Obrázku 55) je provedeno za účelem přípravy pro síťování. Aby výpočet odpovídal experimentálnímu měření, je segment pastorku modelován jako celé kolo.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Byl proveden i výpočet za použití pouze segmentu pastorku, výsledkem byla nižší tuhost krajních zubů vůči prostředním. Toto je způsobeno chybějícím materiálem, a jelikož je v měřicím standu segment opřen o objímku, nedochází na něm ke snížení tuhosti krajních zubů.

Takto připravený 2D model je následně po částech importován ve formátu „STEP“ do výpočetního softwaru. Důležité je při importování zvolit „Create individual parts“ (vytvořit samostatné součásti). Jinak by došlo ke spojení celého modelu soukolí do jedné součásti.



**Obrázek 55:** Ukázka modelu importovaného do softwaru Abaqus a spojeného v kartě „Assembly“

Po importování jednotlivých částí je nezbytné části spojit a vytvořit z nich jednotlivé součásti. To je provedeno v kartě „Assembly“ (sestava) pomocí nástroje „Merge /Cut instances“ (spojit /oddělit části). Zde je nutné zvolit „Retain Intersecting Boundaries“ (ponechat protínající se okraje) během vytváření součásti pastorku a kola, aby nedošlo k odstranění hrany oddělující svrchní vrstvu na ozubení.

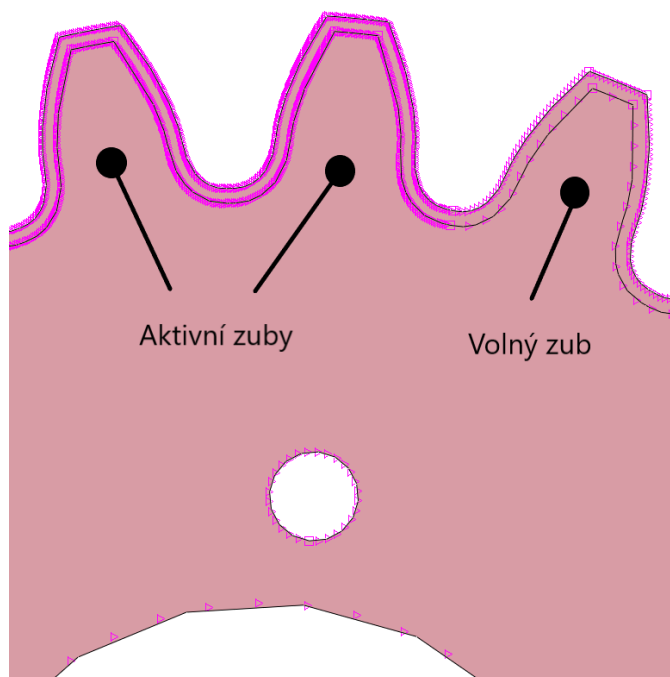
Po tomto kroku většinou následuje nastavení materiálu, okrajových podmínek a zatížení. Pro tuto aplikaci je však vhodnější začít s nastavením sítě. V kartě „Mesh“ (sít) je totiž možné provést spojení čar, ze kterých se skládá obvodová hrana ozubení. Toto spojení pomocí nástroje „Virtual Topology: Combine Edges“ (Virtuální Topologie: Kombinování Hran) zrychlí postup při nastavení okrajových podmínek. Na Obrázku 55 jsou červenou barvou zvýrazněny spojené hrany, na kterých následně probíhá záběr (hrají roli v nastavení kontaktní úlohy).

### 5.4.2 Nastavení sítě

Elementy sítě byly nastaveny nástrojem „Assign Element Type“ (Přiřadit typ elementů) na „CPS4R“<sup>2</sup>. Následně byly na hranách nastaveny velikosti elementů

<sup>2</sup>A 4-node bilinear plane stress quadrilateral, reduced integration, hourglass control.

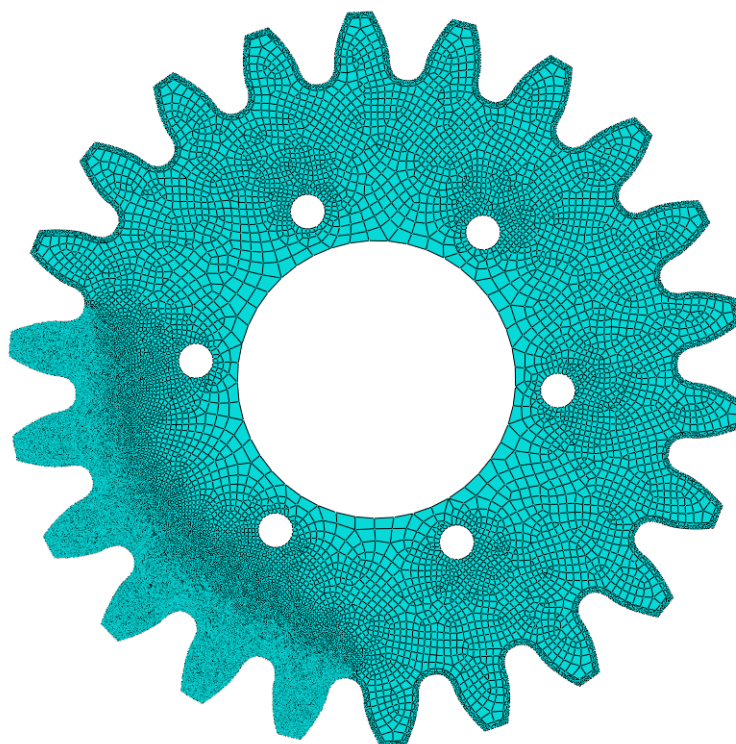
nástrojem „Seed Edges“ (Osetí okrajů) a to tak ,aby vytvořily co nejpravidelnější síť na kontaktních hranách. K tomu pomůže právě vytvořené odsazení hrany. Zbytek sítě v oblasti kola, která není v blízkosti bodu záběru, může být nastaven s relativně hustou sítí. Rozdíl v nastavené hustotě sítě na hranách je zobrazen na Obrázku 56. Finální podobu sítě je možné vidět na Obrázku 57. Detail rozdílů hustoty sítě zubu, který vstupuje do záběru (aktivní zub) a zubu, který do záběru nevstupuje (volný zub) byl již prezentován na Obrázku 13 v kapitole 2.6.



**Obrázek 56:** Ukázka nastavení hustoty sítě na hranách

### 5.4.3 Nastavení materiálových vlastností

Další postup nastavení modelu již probíhá v běžně používaném pořadí. Začíná se tedy nastavením a přiřazením materiálu k jednotlivým součástem. Nastavení probíhá na kartě „Property“ (Vlastnosti), kde je nejprve vytvořen materiál, kterému jsou přiřazeny vlastnosti „General - Density“ (Obecné - Hustota) a „Mechanical - Elasticity - Elastic“ (Mechanické - Elastické - Elasticita), pro kterou je zadán Youngův modul pružnosti a Poissonova konstanta. Zadané hodnoty vychází z kapitoly 4.2.1, kde jsou shrnuty v Tabulce 4.2. Software Abaqus však pracuje s nestandardními jednotkami a například hustotu je nutné zadat v  $t/mm^3$ . Z důvodu větší přehlednosti jsou materiálové vlastnosti znovu vypsány v Tabulce 5.1, kde jsou uvedeny v jednotkách, které Abaqus vyžaduje.


**Obrázek 57:** Příklad vysítovaného kola

**Tabulka 5.1:** Materiálové vlastnosti pro Plexiglas®), převzato z [47]

Hustota [ $t/mm^3$ ]	Youngův modul pružnosti [ $N/mm^2$ ]	Poissonova konstanta [1]
$1,19 \cdot 10^{-9}$	3200	0,4

Následně jsou vytvořeny sekce pro pastorek a kolo. Sekce jsou nastaveny jako „Solid,Homogenous“ (Homogenní těleso), je zde přiřazen materiál, ale hlavně je zde nastavena šířka sekce, tedy šířka kol. Posledním krokem je přiřazení jednotlivých sekcí k součástem.

#### 5.4.4 Nastavení výpočetních kroků

Výpočet úloh v softwaru Abaqus se běžně rozděluje do více výpočetních kroků, a to hlavně kvůli změně okrajových podmínek nebo zatížení. Pro tento případ byl automaticky vytvořený krok „Initial“ (Počáteční) doplněn o další tři výpočetní kroky.

Konkrétně se jedná o krok „Kontakt“, který je určen pro vymezení vůle mezi koly, ta může vzniknout během importování. Během tohoto kroku tedy dojde k dotyku kol, což usnadní konvergenci výpočtu. Následuje krok „Zatížení“, během kterého vstoupí do soukolí zátěžný moment. Posledním krokem je pak samotný „Odval“, během tohoto kroku se soukolí odvaluje pod zatížením za konstantní



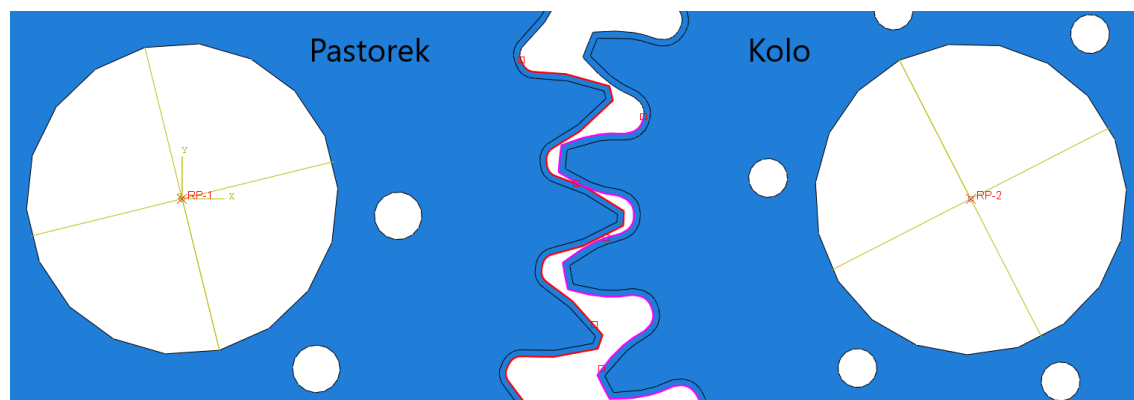
rychlosti. Rychlost odvalu je daná nastavením okrajové podmínky. V následující tabulce je shrnuto nastavení jednotlivých kroků:

**Tabulka 5.2:** Tabulka nastavení jednotlivých kroků

	Kontakt	Zatížení	Odval
Typ postupu	Static, General	Static, General	Static, General
Časová perioda	1	1	1
NI geom.	ON	ON	ON
Automatická stabilizace	—	—	ON - (0, 0002; 0, 05) <sup>5</sup>
Typ časového přírůstku	Automatický	Automatický	Automatický
Maximální počet přírůstků	100	100	300
Velikost přírůstku: (počáteční/ min/ max)	0,01/ 1E-5/ 0,1	0,01/ 1E-5/ 0,1	1E-4/ 1E-6/ 0,005
Metoda řešení	Full Newton	Full Newton	Quasi - Newton

### 5.4.5 Nastavení interakcí

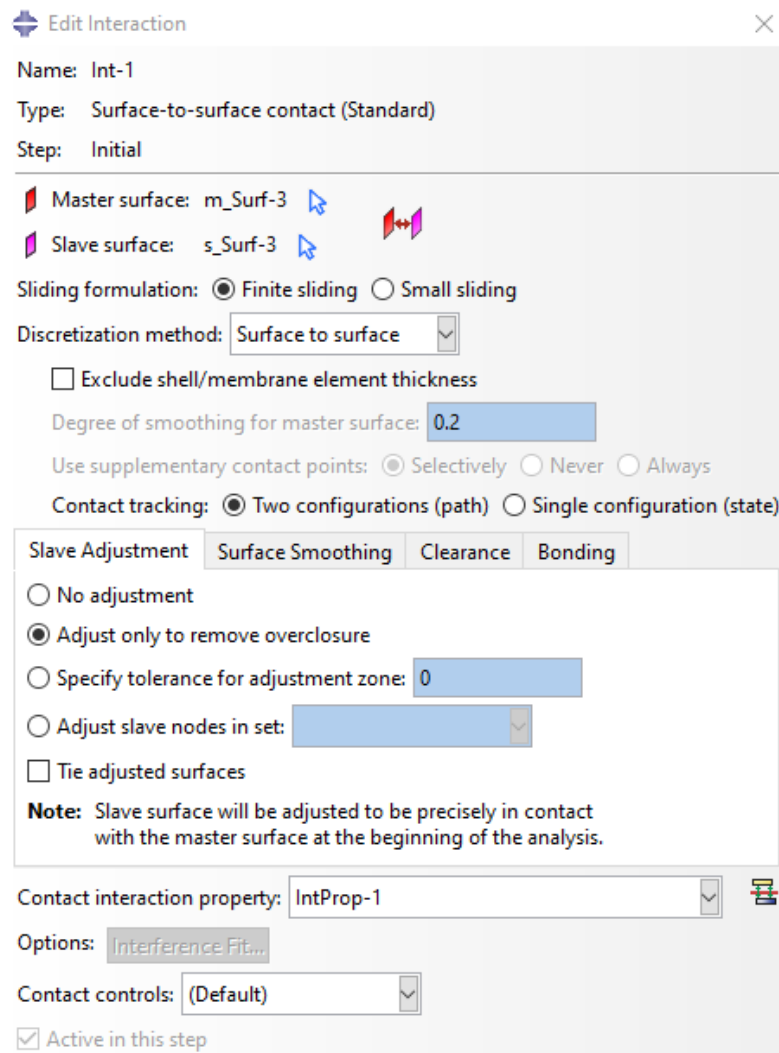
Nezbytným krokem pro správnou funkci výpočtu je nastavení vazeb mezi koly a počátkem souřadnicového systému. Dále také vzájemné chování pastorku a kola. Toto nastavení pobíhá na kartě „Interaction“ (Interakce), kde je nejprve nutné vytvořit referenční body „RP - Reference point“. Je tedy umístěn jeden referenční bod do středu každého z kol. Následně je vytvořena vazba mezi součástí a referenčním bodem. Vhodnou vazbou je svázání referenčního bodu s nábojem příslušného kola a zamezení všech pohybů kromě rotace kolem tohoto bodu (osy).



**Obrázek 58:** Nastavení interakcí

To je provedeno pomocí nástroje „Create Constraint“ (Vytvořit vazbu), kterým je vytvořena vazba typu „Kinematic Coupling“ (Kinematická vazba). Na Obrázku 58 znázorněna žlutými čarami.

Pro nastavení interakce kol je nejprve nastavena vlastnost kontaktu (nástroj „Create Interaction Property“), kde je nastavena vlastnost v normálovém směru jako „Hard contact“ a v tečném směru jako „Frictionless“ (bez tření). Nyní je vytvořen „Surface to Surface contact“ (Kontakt povrchu s povrchem), který je přiřazen části ozubeného věnce, který je během kroku „Odval“ aktivní. Také je přiřazena příslušná vlastnost kontaktu a krok, ve kterém začne být kontakt aktivní (zvolen počáteční krok „Initial“). Na Obrázku 58 je možné vidět vybrané kontaktní hrany. Povrch pastorku je nastaven jako hlavní, tedy „Master surface“ (vyznačen červeně) a povrch kola jako vedlejší, tedy „Slave surface“ (vyznačen fialově). Dále je na Obrázku 59 vidět podrobné nastavení „Surface to Surface“ kontaktu.



**Obrázek 59:** Nastavení „Surface to Surface“ kontaktu

### 5.4.6 Nastavení zatížení a okrajových podmínek

V této části se odehrává hlavní část nastavení, jelikož okrajové podmínky udávají stupně volnosti a vynucené posunutí. Je na nich tedy závislý pohyb součástí. A na nastaveném zatížení samozřejmě závisí deformace a napětí v součástech.

V kartě „Load“ (zatížení) je vytvořeno momentové zatížení o velikosti 35 000  $Nmm$  a kladném směru otáčení. Je vneseno do bodu „RP-1“ a začíná být aktivní v kroku „Zatížení“. Na začátku tohoto kroku je moment nulový a začíná lineárně narůstat až na svou maximální hodnotu, které dosahuje na konci kroku „Zatížení“. Na této hodnotě setrvá až do konce kroku „Odval“.

Nástrojem „Create BC - Boundary Condition“ (Vytvoření okrajové podmínky) jsou následně vytvořeny dva typy okrajových podmínek (oba nastaveny jako „Displacement/Rotation“ neboli posun/natočení). Tím prvním je uložení kol, tedy BC-1 - uložení pastorku a BC-2 - uložení kola. Pastorek má zakázány posuvy ve směru  $x$  a  $y$ , ale povolené otáčení kolem své osy. Kolo má zakázány oba posuny i otáčení kolem své osy. BC-1 a BC-2 jsou vztaženy k příslušnému referenčnímu bodu daného ozubeného kola.

**Tabulka 5.3:** Nastavení jednotlivých okrajových podmínek

	BC - 1	BC - 2	BC - 3	BC - 4
Typ okrajové podmínky	Displacement/Rotation (posun/natočení)			
Umístění	RP - 1	RP - 2	RP - 1	RP - 2
Posun v ose X	Zakázán	Zakázán	Povolen	Zakázán
Posun v ose Y	Zakázán	Zakázán	Povolen	Zakázán
Natočení v ose Z	Povoleno	Zakázáno	Nastaveno	Nastaveno
Hodnota natočení [ $rad$ ]			0,0002	-1,3
Amplituda			Ramp	Ramp

Druhým typem je vynucené natočení, které má v BC-3 funkci přiblížení pastorku ke kolu a v BC-4 vytváří odval kola. V Tabulce 5.3 je shrnuté nastavení jednotlivých okrajových podmínek. V Tabulce 5.4 je pak znázorněno, v jakém kroku je která okrajová podmínka aktivní. BC-2 musí být v kroku „Odval“ vypnuta, aby nekolidovala s podmínkou BC-4.

**Tabulka 5.4:** Přiřazení okrajových podmínek k jednotlivým krokům

	Initial	Kontakt	Zatížení	Odval
BC - 1 - Uložení Pastorku	Aktivní	Aktivní	Aktivní	Aktivní
BC - 2 - Uložení Kola	Aktivní	Aktivní	Aktivní	Neaktivní
BC - 3 - Natočení pro Kontakt		Aktivní	Neaktivní	Neaktivní
BC - 4 - Natočení pro Odval				Aktivní

Natočení je udáváno v radiánech, hodnota 0,0002 v BC-3 slouží pouze k odstranění jakékoliv mezery mezi zabírajícími zuby a usnadnění konvergence výpočtu. Hodnota -1,3 ( $\varphi_{max}$ ) v BC-4 přibližně odpovídá natočení kola nutného pro odval pěti zkoumaných (aktivních) zubů. Tato okrajová podmínka také obsahuje zakázání posuvů a nahrazuje tak uložení kola (BC-2).

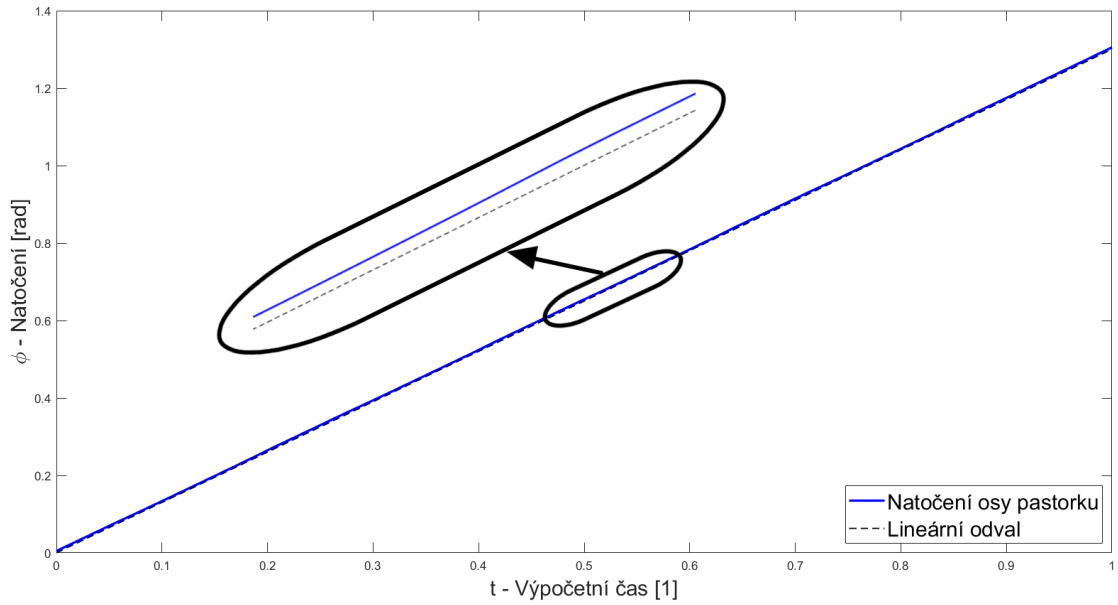
Dalším krokem už je pouze vytvoření a spuštění výpočtu v kartě „Job“ (Práce).

### 5.4.7 Zpracování výsledků

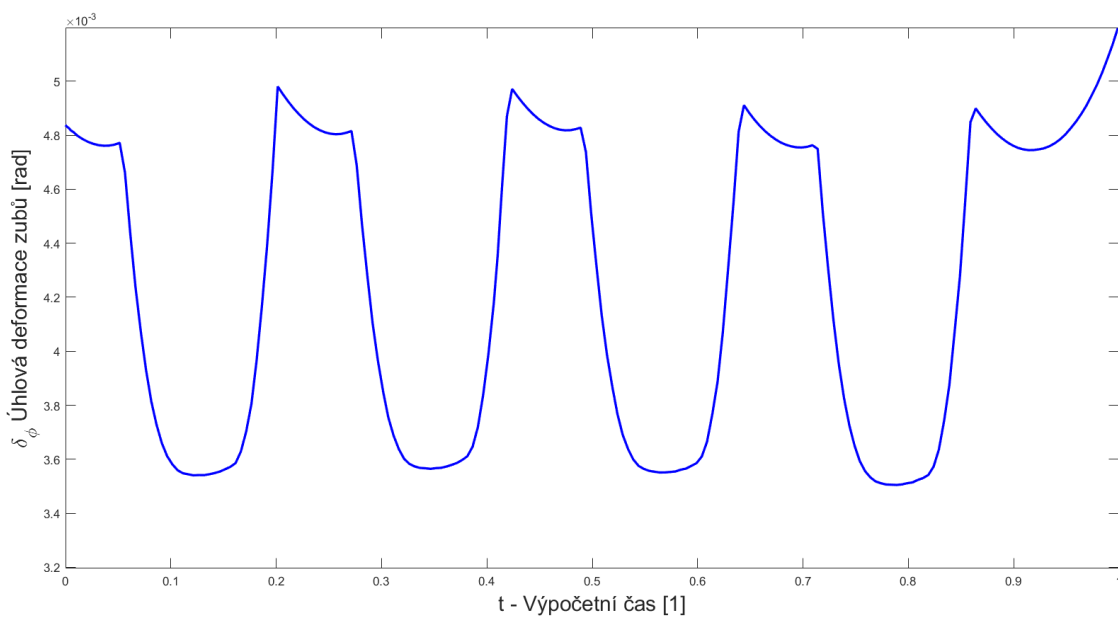
Vypočtený model obsahuje velké množství zajímavých výsledků jako je redukováné napětí (Von Mises), jednotlivé posuvy nebo kontaktní tlaky. Pro účel této diplomové práce je však nejdůležitějším výsledkem natočení osy pastorku. To je odečteno přímo z referenčního bodu RP-1, a to pomocí nástroje „XY data“ a exportováno do Excelu, z něj následně do Matlabu, kde byly provedeny veškeré následující operace.

Při vykreslení tohoto natočení (Obrázek 60) můžeme pozorovat lineární průběh, který odpovídá natočení kola daného nastaveným odvalem pomocí okrajové podmínky BC-4 ( $\varphi_{max}$ ). Tento průběh není ve skutečnosti čistě lineární, ale obsahuje výkyvy způsobené hledanou deformací zubů. Je proto potřeba tyto dvě natočení oddělit, k tomu stačí jednoduché odečtení lineárního průběhu natočení (zobrazeno na Obrázku 60). Výsledkem je periodicky se opakující průběh větší a menší deformace, která odpovídá jednopárovému a dvoupárovému záběru (Obrázek 61).

Získaná úhlová deformace zubů je podle rovnic (5.13) až (5.16) přepočtena na tuhost ozubení, která je vykreslena na Obrázku 62. Je zde také vykreslen střed dvoupárového záběru, který bude využit v následující kapitole k posunu jednotlivých průběhů do stejné fáze záběru. Způsob výpočtu této hodnoty je naznačen v kapitole 5.6 a je stejný pro všechny analytické i simulační modely.



Obrázek 60: Vykreslení průběhů natočení



Obrázek 61: Vykreslení průběhu úhlové deformace  $\delta$

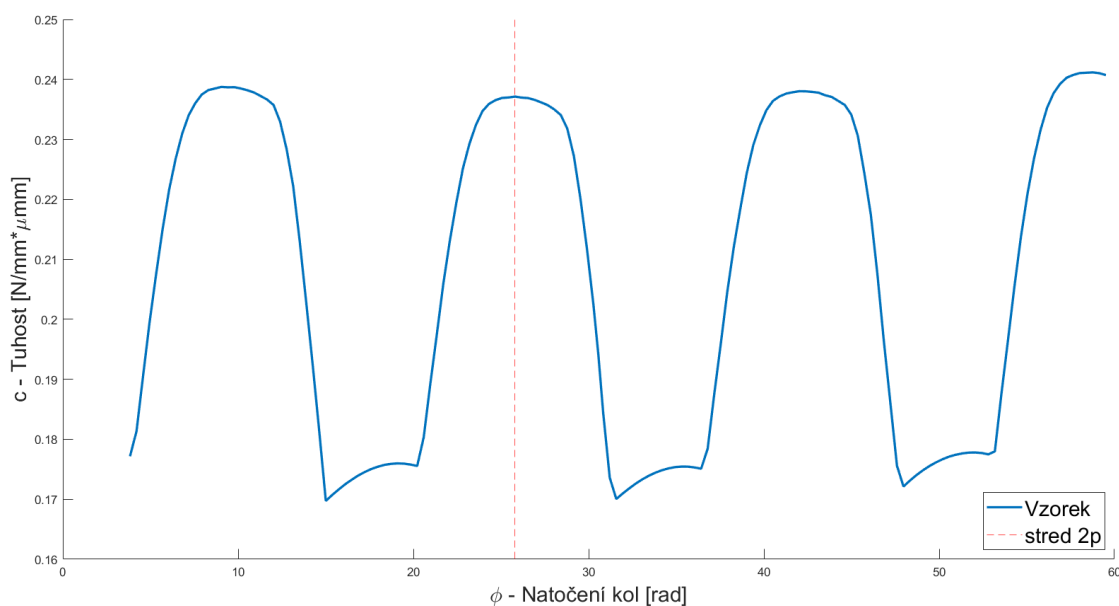
$$\varphi = t \cdot |\varphi_{max}| \cdot \frac{180}{\pi} \quad (5.13)$$

$$\delta = \frac{a_w}{2} \cdot \tan(\delta_\varphi) \cdot 1000 \quad (5.14)$$

$$w = \frac{M_k}{\frac{a_w}{2} \cdot b} \quad (5.15)$$

$$c = \frac{w}{\delta} \quad (5.16)$$

$\varphi$  představuje natočení kol a je vypočteno z  $t$ , které představuje čas kroku „Odval“. Protože  $t$  je bezrozměrná veličina, která nabývá hodnoty od 0 do 1, je převedeno na radiány pomocí úhlu  $\varphi_{max}$  a následně na stupně.  $\delta$  je deformace zubů v  $[\mu m]$  vypočtená z úhlové deformace zubů  $\delta_\varphi [rad]$  a osové vzdálenosti kol  $a_w$ . Šířkové zatížení  $w$  je vypočteno ze zátěžného momentu  $M_k$ , osové vzdálenosti  $a_w$  a šířky kola  $b$ . Výsledná tuhost (viz Obrázek 62) je vypočtena z rovnice 5.16, která je totožná se základním vztahem pro výpočet tuhosti ozubení (rovnice 2.1).



Obrázek 62: Vykreslení průběh u tuhosti  $c$

## 5.5 Příprava nástroje pro převedení naměřených deformací na tuhost

V rámci přípravy na měření je důležité nezapomenout také na vytvoření nástroje pro automatizovaný převod naměřených dat na průběhy tuhosti. Hlavní motivací je očekávání relativně velkého množství dat ke zpracování a pokračování experimentů i mimo rámec této diplomové práce. Tato motivace úzce souvisí nejen s touto a následující kapitolou, ale také s kapitolou 5.3, ve které byl také vytvořen komplexní nástroj pro výpočet tuhosti pomocí modelu DE, a také s celou diplomovou prací. Ta je vytvářena s ohledem na opakovatelnost a snížení časové náročnosti experimentálního měření raději než jednorázové vyhodnocení dat zahrnutých v této práci.

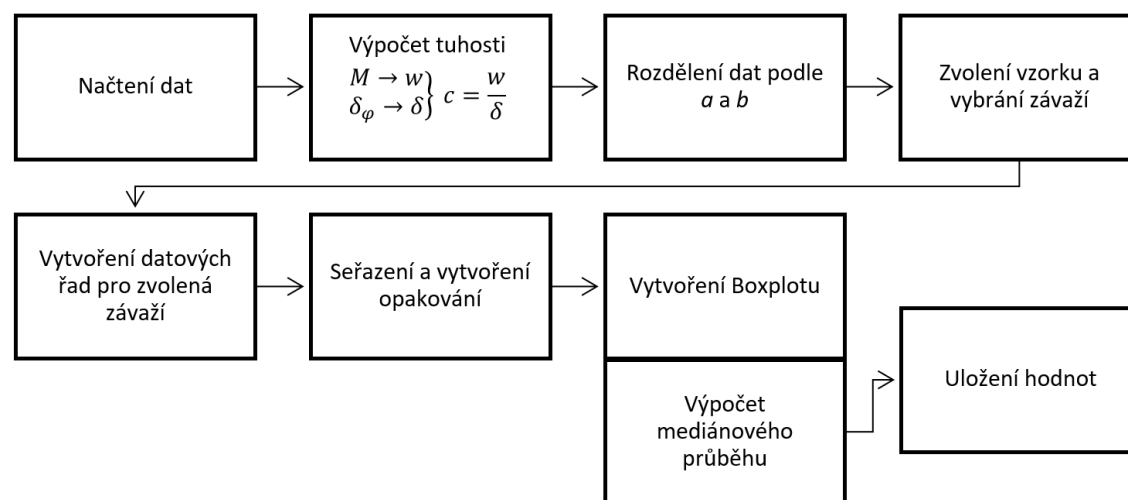
Z funkce měřicího standu a z prvních měření vyšlo najevo, jak vypadá datový set, který z měření vychází. Vždy je měřen vzorek, který je označen parametry  $a_w$  - osová vzdálenost a  $b$  - šířka vzorku. Ten je nastaven do určitého bodu záběru daného úhlem  $\varphi$  měřeného od vodorovné polohy ramene síly. Pro každý bod záběru může být změřen libovolný počet zátěžných stavů určených hmotnostmi závaží zavěšeného na zatěžovací páku. Pro každou hodnotu závaží  $m_Z$  je změřena příslušná úhlová deformace zubů  $\delta_\varphi$ . Datový set pro zvolený vzorek v nastaveném bodu záběru a zatížený konkrétní hodnotou závaží vypadá následovně:

**Tabulka 5.5:** Příklad datového setu

Osová vzdálenost $a_w$ [mm]	Šířka vzorku $b$ [mm]	Natočení kol $\varphi$ [°]	Hmotnost závaží $m_Z$ [kg]	Úhlová deformace $\delta_\varphi$ [°]	Počet párů $n_p$ [1]
176	5	2, 3	12, 15	0, 126	2

Datový set byl po přidání jednoduchého polariskopu doplněn ještě o údaj  $n_p$  - počet párů v záběru, který je pouze jako doplňující informace o typu záběru. Jeho hodnota by měla být pouze rovna 1 pro jednopárový záběr a 2 pro dvoupárový záběr.

Pro zpracování těchto dat byl připraven jednoduchý nástroj v softwaru MS Excel, který má své omezení, ale je dostačující pro rychlé vyhodnocení během měření. A za použití kontingenčních tabulek a grafů bylo možné data relativně snadno filtrovat a vykreslovat do grafů. Následně byl vytvořen komplexnější nástroj v softwaru MATLAB za účelem snadnějšího propojení s analytickými modely. Celý postup práce s daty je naznačen v diagramu na Obrázku 63.



**Obrázek 63:** Diagram postupu práce s měřeními daty

Nejprve jsou načtena data ve formátu naznačeném v Tabulce 5.5, kde je vždy pro jeden záběrový bod daný úhlem  $\varphi$  změřeno několik hodnot úhlové deformace  $\delta_\varphi$  pro vhodně odstupňované velikosti závaží  $m_Z$ .

V dalším kroku je proveden výpočet tuhosti opět podle rovnic (5.14) až (5.16). S jediným rozdílem a to v hodnotě zátěžného momentu, který je daný nejen velikostí závaží  $m_Z$ , ale také úhlem natočení kol  $\varphi$ . Ten se projeví ve velikosti ramene, na kterém tíha závaží působí. Pro úhel  $\varphi = 0$  je velikost ramene maximální a rovna 250 mm, což je dáno konstrukcí měřicího standu. Pro jinou hodnotu úhlu  $\varphi$  je rameno menší a vypočteno z následující rovnice:

$$R = R_{max} \cdot \cos(\varphi) \quad (5.17)$$

Následuje rozdělení dat do samostatných proměnných typu „Tabulka“. V tomto kroku jsou data automaticky roztržena nejprve podle velikosti osové vzdálenosti a poté podle šířky vzorku. Takto roztržená data jsou uložena do automaticky vytvořené proměnné s názvem:

*tabulka - „velikost osové vzdálenosti“ - „šířka vzorku“.*

Po tomto kroku si MATLAB vyžádá zvolení vzorku, pro který bude vykreslovat grafy. Vzorek je zvolen vybráním velikosti osové vzdálenosti a šířky vzorku z vypsané nabídky. Dále vypíše vektor všech hodnot závaží, které byly pro tento vzorek použity a umožní výběr některých nebo všech závaží.<sup>3</sup>

Na základě zvolených parametrů je vytvořena proměnná typu „cell“ (buňka), která obsahuje samostatnou tabulku dat pro každé zvolené závaží. Tabulka má stejný formát jako Tabulka 5.5, jen je doplněna o sloupec s vypočtenou hodnotou tuhosti. Tímto způsobem je tedy vytvořen průběh tuhosti v závislosti na natočení kol zvlášť pro každé zvolené závaží.

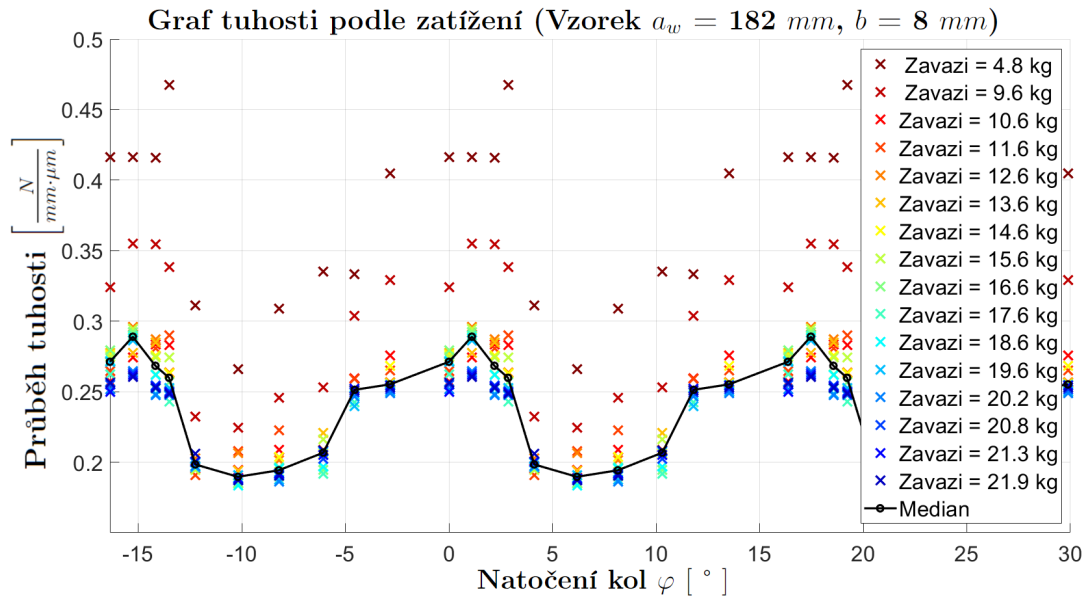
Aby nedocházelo k problémům při vykreslování průběhu tuhosti, jsou data v jednotlivých tabulkách seřazena podle velikosti úhlu natočení kol  $\varphi$ . Pro lepší vizualizaci je vytvořeno opakování dat s periodou  $360^\circ/z_1$  (kde  $z_1$  je počet zubů pastorku).

Následně je vypočten mediánový<sup>4</sup> průběh tuhosti ozubení a provedeno vykreslení grafu (viz Obrázek 64).

<sup>3</sup>Zde je dobré uvést poznámku, že během měření byla vždy snaha dodržovat použití stejné řady závaží. Pro jeden vzorek byla řada závaží vždy dodržena na všech měřených bodech záběru.

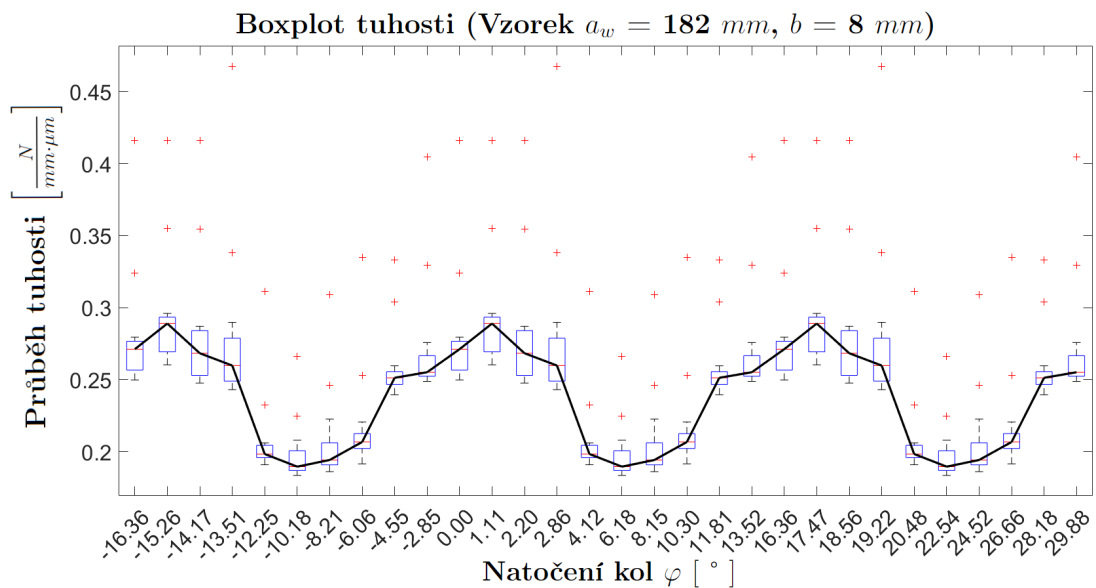
<sup>4</sup>Vysvětlení volby mediánu jako odpovídající hodnoty je v kapitole 8.1, souvisí s chováním vzorků z plexiskla.





**Obrázek 64:** Příklad vykreslení zvolených datových řad

Zároveň je vytvořen „Boxplot“ (viz Obrázek 65), kde je opět mediánový průběh tuhosti doplněn o „Boxy“, které představují oblast ve, které se s určitou pravděpodobností nachází hodnota tuhosti pro danou hodnotu úhlu natočení kol  $\varphi$ .



**Obrázek 65:** Příklad vytvořeného „Boxplotu“

V posledním kroku je tato proměnná typu „cell“ uložena s automaticky vytvořeným názvem na základě velikosti osové vzdálenosti a šířky vzorku.

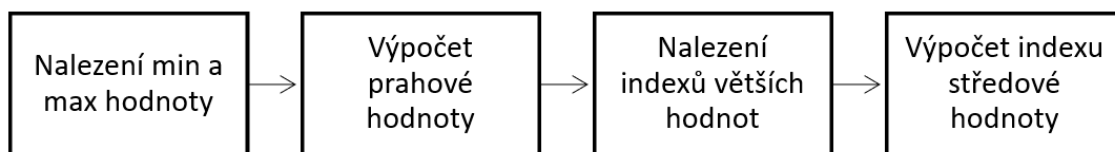
Tento nástroj tedy slouží k rychlému a variabilnímu vykreslení změřených dat s možností výběru a filtrace. Je také možné ho propojit s nástrojem pro porovnání dat z následující kapitoly.

## 5.6 Příprava nástrojů na porovnání dat

Během měření, ale i výpočtu jednotlivých modelů, není vždy stejné umístění průběhu tuhosti na X-ové ose (osa s úhlem natočení kol  $\varphi$ ). Aby bylo možné jednotlivé průběhy porovnávat, je žádoucí je srovnat do stejné fáze záběru. Jako vhodný bod pro srovnání dat se ukázal střed douparového záběru, jak již bylo naznačeno na Obrázku 62. Důvodem je relativně dlouhý a pravidelný průběh dvoupárového záběru.

Prvním nástrojem je tedy „Vyhledávač středu dvoupárového záběru“, který funguje stejným způsobem pro model KISSsoft, model DE i model MKP. A to podle diagramu na Obrázku 66.

Prahová hodnota je vypočtena jako průměr z minimální a maximální hodnoty tuhosti. Následně jsou nalezeny indexy hodnot tuhosti, které jsou větší než prahová hodnota. Index středové hodnoty je pak vypočten jako průměr z prvního a posledního nalezeného indexu.



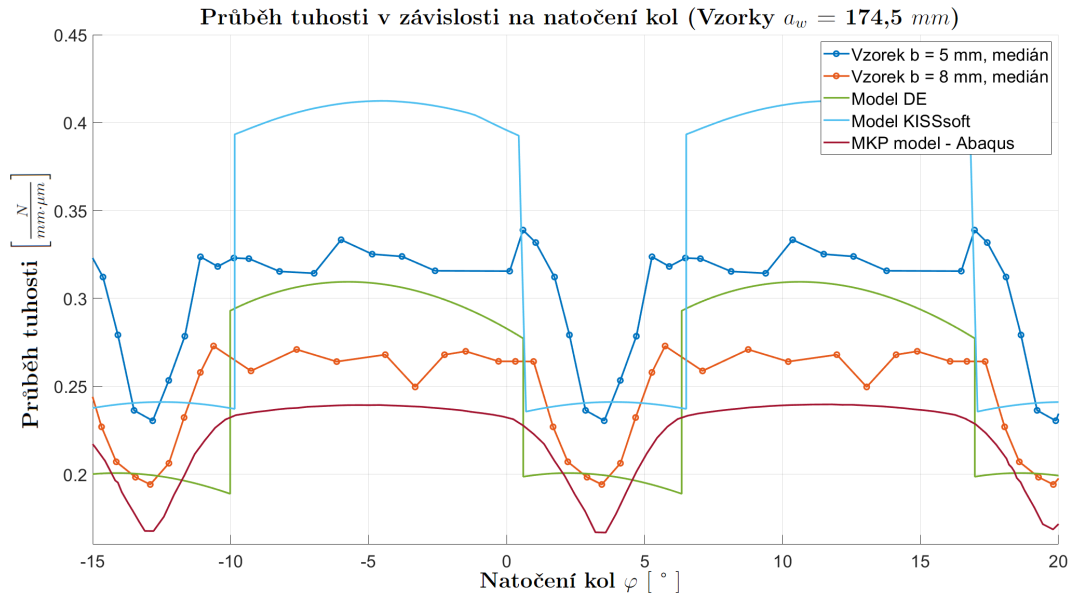
**Obrázek 66:** Diagram funkce nástroje „Vyhledávač středu“

Pro měřená data je střed vyhledán na základě datového sloupce „Počet párů“, nikoliv hodnot větších než prahová hodnota. V posledním kroku jsou data znovu uložena nyní jako proměnná typu „cell“, která obsahuje původní data jako tabulku dat v jedné buňce a středovou hodnotu danou zjištěným indexem ve druhé buňce.

Druhým nástrojem je „Porovnávač dat“, ve kterém se vždy nastaví označení vzorku dané velikostí osové vzdálenosti  $a_w$  a šířkou vzorku  $b$ . Následně je spuštěn nástroj z předchozí kapitoly, který požádá o vybrání závaží a vytvoří průběh mediánové tuhosti. Následně je spuštěn nástroj „Vyhledávač středu“ a proběhne uložení do proměnné typu „cell“ s názvem „Porovnaní“. Tento proces je opakován pro libovolný počet vzorků, při kterém vždy dojde k rozšíření proměnné „Porovnaní“ o jeden sloupec.

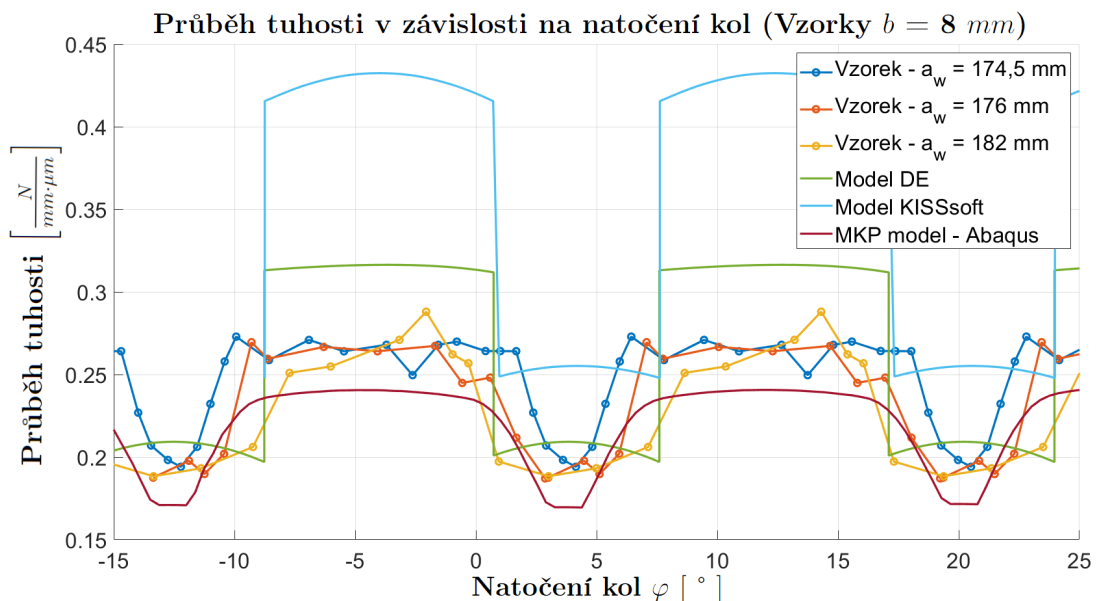
Po načtení všech požadovaných vzorků proběhne proces načtení středů, vypočtení rozdílů a srovnání průběhů na základě těchto rozdílů. Dále je stejný proces proveden pro průběhy analytických a simulačních modelů.

Posledním krokem je vykreslení všech zvolených průběhů. Skrytí jednotlivých průběhů je možné provést jednoduchým zakomentováním (pomocí %) příslušného příkazu „Plot“ (vykreslení).



**Obrázek 67:** Příklad vykreslení zvolených průběhů

Výsledný graf je naznačen na Obrázku 67, kde je vykresleno porovnání dvou šířek vzorku s osovou vzdáleností  $a_w = 174,5 \text{ mm}$ . Případně na Obrázku 68, kde je naznačeno porovnání vzorků se šířkou  $b = 8 \text{ mm}$  s různou osovou vzdáleností (a tedy různou korekcí).



**Obrázek 68:** Příklad vykreslení zvolených průběhů

# Experimentální část

## 6 Průběh prvních měření

V této části práce budou popsány měření, během kterých proběhly první experimenty, zjištění chování jak měřených vzorků, tak měřícího standu. Zde se také projevily problémy zatěžující měření. V reakci na ně byly zavedeny určité postupy a opatření pro jejich minimalizaci, případně úplné odstranění. Během těchto měření byla také finalizována metodika měření. Ta je popsána v kapitole 7.

Kapitoly v této části práce jsou psány v chronologickém sledu, v jakém probíhaly.

### 6.1 Prvotní způsob měření

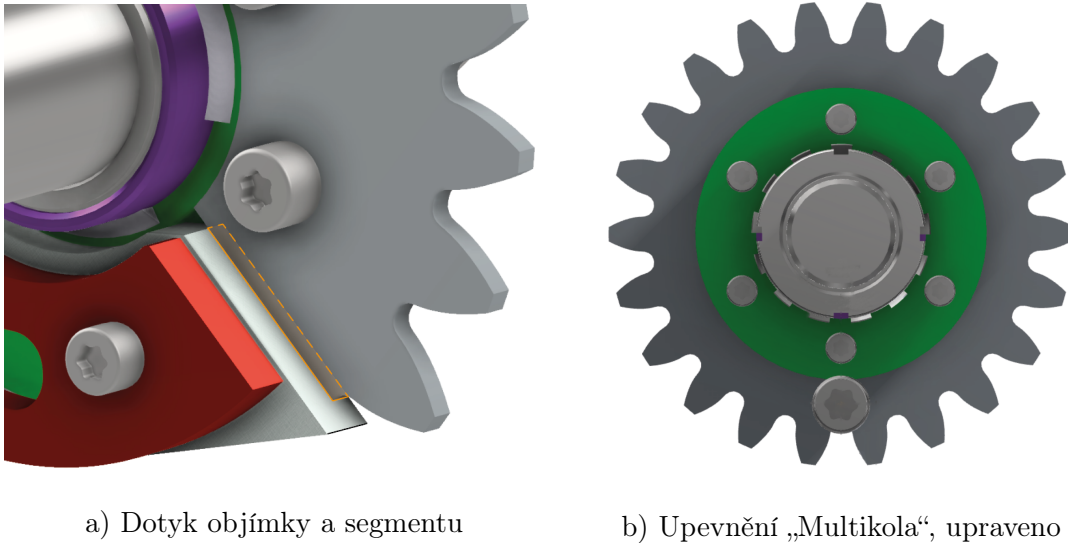
Za účelem větší přehlednosti následujících kapitol je žádoucí shrnout, jakým způsobem měření probíhalo v počáteční fázi experimentů. Také bude lépe viditelný pokrok a úpravy způsobu měření.

#### 6.1.1 Příprava měřícího standu

I přes velmi dobrou konstrukci měřícího standu z hlediska variability je výměna vzorků relativně časově náročný proces, u kterého je důležité dodržet některé kroky.

Ustavení segmentu pastorku je velmi snadné, jelikož je k objímce připevněn pomocí dvou šroubů a jeho výměna nevyžaduje demontáž hřídele z ložiskových domků. Při ustavení je však nezbytné, aby segment správně dosedl jak vnitřním průměrem tak i spodní plochou na objímku. Na Obrázku 69a) je vnitřní průměr zvýrazněn zelenou barvou a dosedací plocha oranžovou. Pokud by tento krok nebyl dodržen, mohlo by během měření dojít k nežádoucímu posuvu, který by znehodnotil změřená data.

Ustavení „Multikola“ je výrazně náročnější, jelikož je nutné vyjmout celý hřídel z ložiskových domků. „Multikolo“ je však k objímce připevněno šrouby po celém obvodu. Není tedy možné, aby došlo ke špatnému ustavení. „Multikolo“ není nutné vyměnit, pokud jsou vzorky, které jsou po sobě měřeny na „Multikole“,

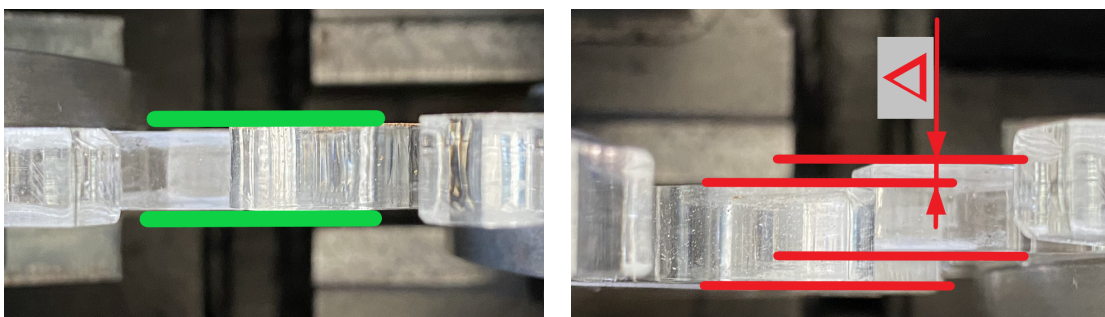


**Obrázek 69:** Ustavení vzorků, obrázky převzaty z [28]

zahrnutý (viz kapitola 4.2). To výrazně sníží časovou náročnost přípravy a bylo to zohledněno už při návrhu vzorků.

Dalším krokem je nastavení osové vzdálenosti odpovídající měřenému vzorku. To je provedeno pomocí posunu celé svařené konstrukce nesoucí „Multikolo“ v T-drážkách. Ke kontrole osové vzdálenosti slouží lineární magnetické pravítko. Je také vhodné nastavit zatěžovací rameno do přibližně vodorovné polohy, aby měření mohlo probíhat na prostředních zubech segmentu pastorku.

Po nastavení osové vzdálenosti je ještě nutné srovnat vzorky tak, aby jejich šířky nebyly vůči sobě posunuty. Při špatném sestavení (vyznačeno jako  $\Delta$  v Obrázku 70b)) by docházelo ke zmenšení kontaktní plochy a vnesení nesymetrického zatížení po šířce vzorku. Vznikal by tedy i přídavný ohybový moment. Axiální poloha vzorku je zajištěna stavěcím kroužkem *DIN 705A-45/70×18* [28].



a) Správné sesazení šířek kol

b) Špatné sesazení šířek kol

**Obrázek 70:** Srovnání šířek zubů

## 6.1.2 Nastavení referenční polohy IRC snímače a zatížení vzorku

Jelikož byl použit inkrementální snímač, který měří odchylku od nastavené referenční „nulové“ polohy, je nejprve nutné nastavit tuto „nulovou“ polohu. To je provedeno připraveným tlačítkem „nulování“ v měřícím prostředí LabVIEW. Vhodnou polohou je vodorovná poloha zátěžného ramene (popsáno v kapitole 5.5).

Po nastavení „nulové“ polohy je možné natočit kola do libovolného zátěžného bodu, ve kterém je „Multikolo“ zabrzděno zastavovacím šroubem. Následně je odečtena a zapsána hodnota úhlu natočení kol  $\varphi$  a IRC snímač opět vynulován. To je provedeno za účelem oddělení natočení kola od úhlové deformace zubů.

Následuje zatížení vzorku závažím a to buďto plnou hmotností naráz nebo postupným přidáváním menších závaží. Pro každé zvětšení hmotnosti závaží  $m_Z$  je zapsána do tabulky aktuální hmotnost závaží a pomocí tlačítka „Zapiš hodnotu do tabulky“ je k ní přiřazena příslušná úhlová deformace zubů.

Před měřením dalšího zátěžného bodu je nutné závaží z páky odebrat a povolit zastavovací šroub. Poté nastavit další zátěžný bod, zabrzdít a zapsat pootočení oproti předchozímu bodu. Po vynulování IRC snímače je možné začít měřit tento zátěžný bod.

Data jsou na konci měření uložena do nastaveného souboru ve formátu „csv“ (Comma-separated values). V tomto formátu jsou data z jednotlivých sloupců oddělena čárkou, což umožňuje jejich snadné načtení libovolným softwarem.

## 6.2 Problematika materiálu vzorků

Jak již bylo zmíněno, hned v počáteční fázi došlo k výměně ocelových vzorků za vzorky z plexiskla.

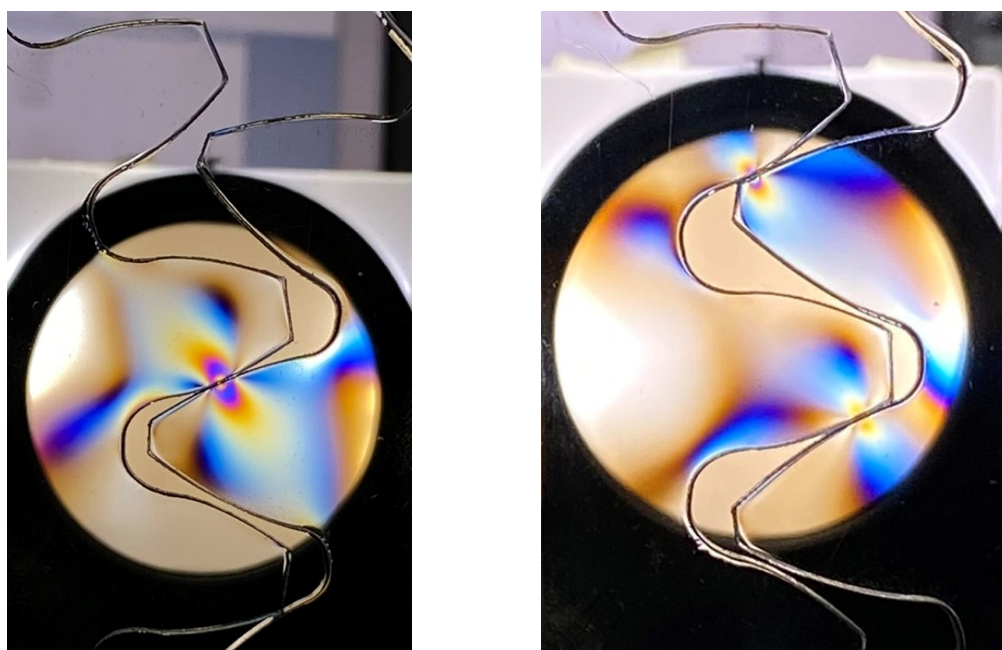
Hlavním důvodem této změny byl problém s odlišením jednopárového a dvoupárového záběru během měření. Při nastavení zátěžného bodu nebylo možné určit, o jaký typ záběru se jedná a tudíž nebyla možná verifikace měřené tuhosti s analytickým modelem (ISO model nebo model KISSsoft). V případě nastavení záběru, který jsme považovali za jednopárový, ale měřená hodnota tuhosti odpovídala spíše tuhosti dvoupárové, nebylo možné říci s dostatečnou spolehlivostí, jestli je tento rozdíl způsoben druhým párem v záběru nebo chybou měření.

Další nevýhodou ocelových vzorků je jejich relativně velký Youngův modul pružnosti v tahu, jelikož pro dosažení dostatečné deformace bylo nutné vzorek

zatížit velmi vysokým momentem. Testovací stand a materiál vzorků byl navržen na maximální momentové zatížení  $M_k = 1000 \text{ Nm}$  [28]. Tato hodnota momentu odpovídá přibližně 400 kg závaží zavěšených na zátěžné páce. Manipulace s takovým množstvím závaží je v laboratorních podmínkách velmi nepraktická a časově náročná.

Z těchto dvou důvodů bylo rozhodnuto o změně materiálu vzorků. Na základě rešerše současného stavu problematiky měření tuhosti ozubení (viz kapitola 3 konkrétně pak kapitola 3.2.1 a 3.2.2) byl jako vhodný materiál zvolen *polymethylmetakrylát (PMMA) - Extrudovaný Plexiglas® XT*.

Tato změna odstranila problém s vysokou hmotností závaží a zároveň má další benefit. Ten je způsoben právě řádově nižší hodnotou Youngova modulu pružnosti v tahu, tedy hlavně jeho rozdílem oproti modulu pružnosti konstrukce standu. Díky relativně malému zatížení (z pohledu ocelového standu) se výrazně více deformují plexisklové vzorky než ocelový stand. Dochází tedy k výraznému snížení vlivu deformace standu, který byl navrhován s požadavkem na vysokou tuhost již v případě zatěžování ocelových vzorků.



a) Jednopárový záběr

b) Dvoupárový záběr

**Obrázek 71:** Rozlišení typu záběru pomocí polariskopu

Problém s rozeznáním typu záběru se povedlo odstranit díky birefringenční vlastnosti plexiskla. Využití této vlastnosti pro odlišení typů záběru je naznačeno na Obrázku 71. Polarizované světlo procházející plexisklem mění svou polarizaci při průchodu oblastí s vyšší napjatostí. Procházející světlo se v materiálu šíří

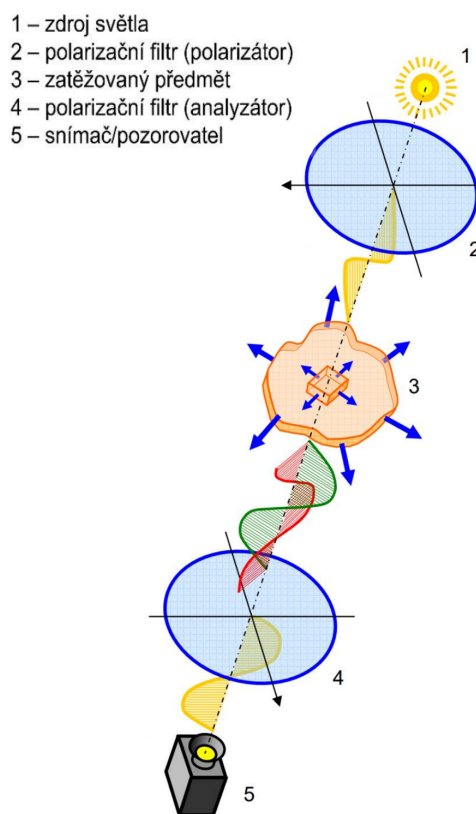
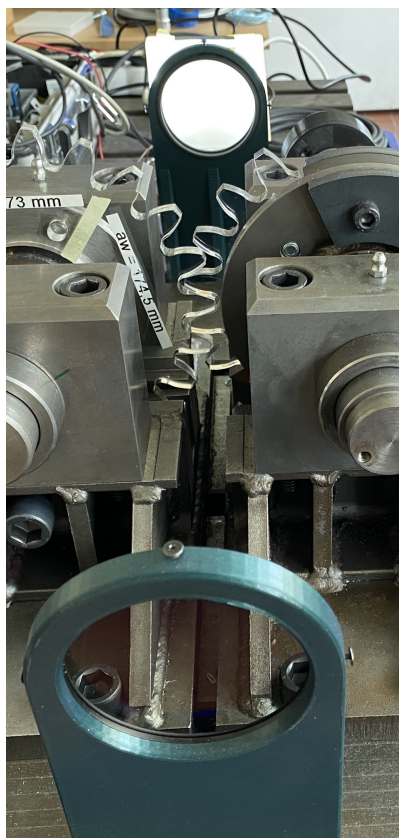


rozdílnými rychlostmi, což způsobuje barevné zvýraznění oblastí se zvýšeným napětím. Pro využití této vlastnosti byl měřicí stand doplněn o jednoduchý polariskop (viz kapitola 6.3).

Nevýhodou této změny je však ztráta možnosti použití ISO modelu. Od této chvíle tedy nebude uvažován, průběhy tuhostí pro ocelové vzorky jsou však připraveny pro budoucí použití.

### 6.3 Přidání jednoduchého polariskopu

Po provedení změny materiálu bylo možné doplnit měřicí stand o jednoduchý polariskop, který se skládá ze světelného zdroje (bílý LED pásek) a dvou polarizačních filtrů původně určených pro fotoaparát. Filtry jsou upevněny do plastových přípravků vytištěných na 3D tiskárně.



a) Použitá konstrukce polariskopu

b) Schéma funkce polariskopu, převzato z [52]

**Obrázek 72:** Jednoduchý polariskop

Polariskop (Obrázek 72) má tedy velmi jednoduchou konstrukci a pro rozlišení typu záběru je dostačující. Přípravky jsou navrženy tak, aby nevyžadovaly speciální

upevnění k měřicímu stolu. Jejich základna má rozměr odpovídající šířce T-drážky. Upevnění je tedy realizováno prostým zasunutím přípravku do T-drážky ve stole.

Je zde však prostor pro vylepšení a to konkrétně doplnění fotoaparátu nebo kamery pro zajištění stejné kvality všech fotografií. Dále možnost správného nastavení úhlu pootočení polarizačních filtrů. Tyto dva požadavky jsou nutné pro vyhodnocení napětí ve vzorku pomocí fotoelasticimetrie, která není v této práci využita jak z časových, tak finančních důvodů.

## 6.4 Zjištění rozsahu jednotlivých typů záběru během odvalu ozubených kol

Během prvních měření docházelo k problémům s odstupňováním zátěžných bodů. Nejvíce se tento problém projevuje u záporně korigovaných vzorků, z důvodu relativně krátké doby trvání jednopárového záběru.

Průběh tuhosti ozubení se periodicky opakuje s periodou danou počtem zubů, což pro ozubení s počtem zubů  $z = 22$  znamená, že se na přibližně  $16,5^\circ$  vystřídá jak jednopárový, tak dvoupárový záběr. Například u vzorku s osovou vzdáleností  $a_w = 174,5 \text{ mm}$  se pohybuje úhel trvání jednopárového záběru okolo  $4^\circ$ . Zbýlých  $12,5^\circ$  tedy trvá dvoupárový záběr.

Pokud bychom měřili zátěžné body s pravidelným odstupňováním například  $1^\circ$ , získali bychom relativně malý počet bodů v oblasti jednopárového záběru v porovnání s množstvím bodů v oblasti dvoupárového záběru. Proto je výhodnější nepravidelné odstupňování zátěžných bodů přizpůsobené konkrétnímu vzorku.

Druhou možností by bylo dostatečně zjemnit krok mezi zátěžnými body. Tento způsob však nepřináší dostatečné zpřesnění výsledků v porovnání s nárůstkem časové náročnosti.

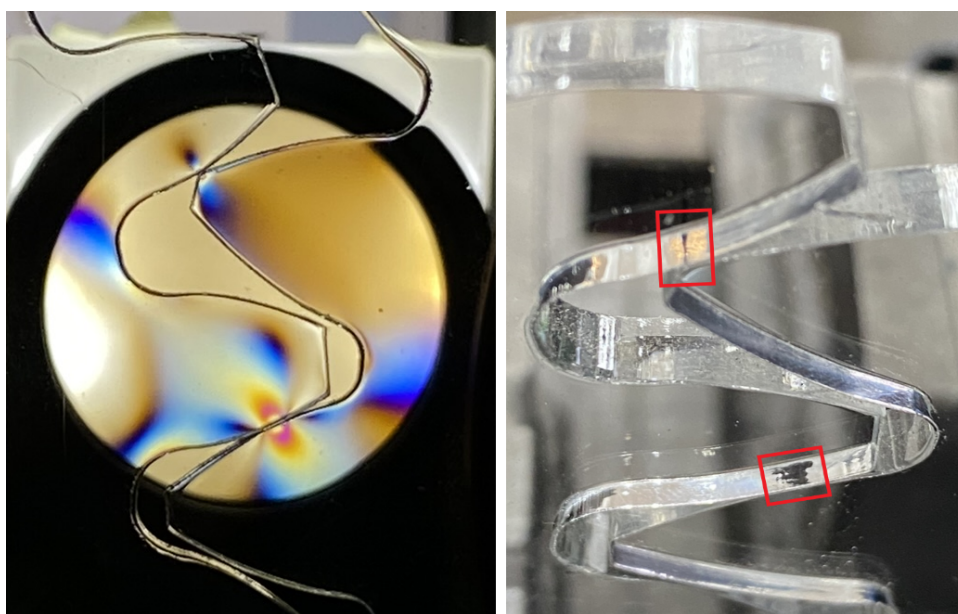
Před měřicí proces byl tedy zařazen cyklus, ve kterém byly zapsány hodnoty úhlu natočení kol  $\varphi$ , při kterých docházelo ke změně typu záběru. Tento cyklus byl prováděn v nezátěženém stavu s počátkem v místě vodorovné polohy zátěžné páky. K rozpoznání typu záběru byl využit polariskop z předchozí kapitoly.

## 6.5 Přejídná oblast

Díky zjištění rozsahu jednotlivých typů záběru byla získána lepší představa o typu záběru, který je měřen. Došlo tedy ke zvýraznění problematiky tuhosti v oblasti

přechodu mezi jednotlivými typy záběru. Tento přechod totiž není skokový jako ho uvažují analytické modely, ale vlivem deformací dochází spíše k plynulému přechodu. Toto je problematika, která se objevila v kapitole 2.6 - Simulační metoda získání tuhosti - MKP (Obrázek 14) nebo také Obrázek 62. MKP simulační metody tuto deformaci zubů během odvalu uvažují, což je jedním z důvodů využití těchto metod pro verifikaci výsledků v mnohých vědeckých člancích.

Přechodná oblast je součástí teoretického rozsahu jednopárového záběru, jelikož zde dochází k ohybu a tedy dotknutí zubu, který vychází ze záběru. V návaznosti na odstupňování zátěžných bodů to znamená zkrácení oblasti čistě jednopárového záběru. A je nutné s tímto přechodem počítat při volbě odstupňování.



**Obrázek 73:** Ukázka bodu záběru v přechodné oblasti

Tento přechodný stav byl pracovním názvem „1P + špička“ tedy jednopárový záběr s dotykem špičky zubu vycházejícího ze záběru (viz Obrázek 73). V datovém setu (Tabulka 5.5) byl označen jako  $n_p = 1,5$ .

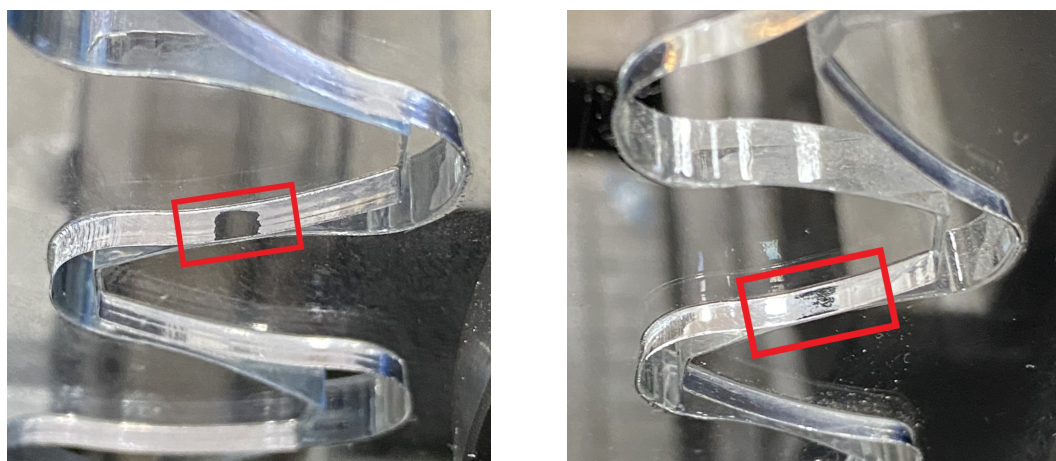
## 6.6 Předzatěžovací cyklus

Jedním z problémů, který se projevil po výměně materiálu vzorků za plexisklo, je nedokonalá kontaktní plocha. Tu bylo možné pozorovat díky průhlednosti vzorků. Je však důležité zmínit, že příčinou nedokonalé kontaktní plochy je způsob výroby plexisklových vzorků. Jsou totiž vyrobeny pomocí laserového obrábění, které dosahuje relativně malé přesnosti. Příklad vzorku se správným kontaktem ploch a vzorku s nedokonalým kontaktem ploch je uveden na Obrázku 74. V reakci na tento

problém byl přidán předzatěžovací cyklus, který by měl vliv těchto nepřesností snížit, případně úplně odstranit.

Předzatěžování také slouží k lepšímu ustavení polohy součástí standu a vymezení vůlí ve směru zatížení. Tento cyklus je nutné provést vždy po výměně<sup>1</sup> vzorků, ale také po nastavení záběrového bodu (nutné uvolnit zastavovací šrouby). Díky tomuto si stand takzvaně „sedne“ a během měření nedochází k posunům způsobených vůlemi.

Předzatěžovací cyklus byl zařazen před začátek měření deformace a probíhá následujícím způsobem. Po nastavení vzorků do požadovaného zátěžného bodu a nastavení referenční („nulové“<sup>2</sup>) polohy IRC snímače je vzorek zatížen polovinou maximální hodnoty  $m_Z$ . Toto závaží je následně odebráno a IRC snímač by tedy měl ukazovat nulovou hodnotu měřené deformace. K tomu však nedochází, zbytková hodnota deformace se pohybuje okolo  $0,013^\circ$ . To je způsobeno již zmíněnou nepřesností vzorků, ale také vůlemi. Tato hodnota je tedy opět „vynulována“ a vzorek je znovu zatížen polovinou maximální hodnoty  $m_Z$ . Nyní po odebrání závaží ukazuje IRC snímač hodnotu  $0^\circ$ <sup>3</sup> a není tedy nutné provádět další „vynulování“.



a) Správný kontakt ploch

b) Nedokonalý kontakt ploch

**Obrázek 74:** Chování kontaktních ploch pod zatížením

IRC snímač je tedy nastaven tak, aby měřená deformace odpovídala pouze deformaci způsobené pouze zavěšeným závažím  $m_Z$  na páce. Po zařazení tohoto cyklu do měření bylo pozorováno výrazné snížení odchylky mezi analytickými modely a měřeními daty. Je to také nezbytný krok pro umožnění opakovatelnosti měření.

<sup>1</sup>Při výměně je stand částečně demontován, aby bylo možné vzorky vyměnit viz kapitola 6.1.1

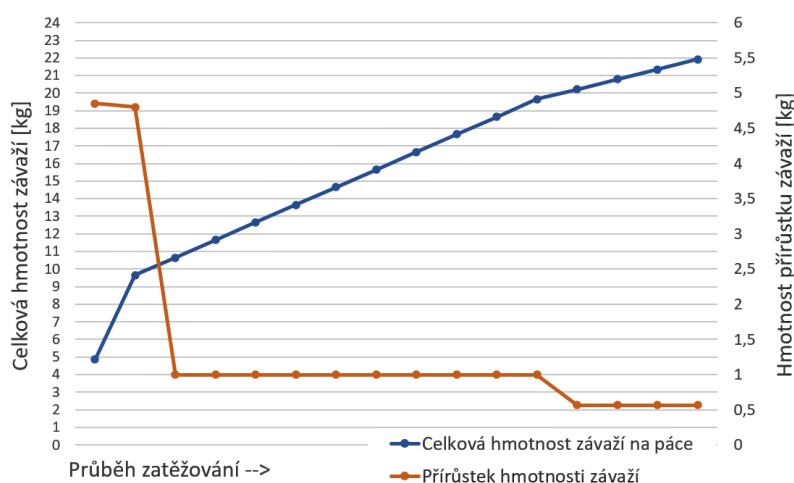
<sup>2</sup>Při tomto nastavení dochází k odstranění deformace způsobené vlastní vahou zátěžné páky.

<sup>3</sup>Případně  $\pm 0,0015^\circ$  v závislosti na aktuální poloze vzorkovacího disku snímače, což ale odpovídá maximální odchylce snímače [45]

## 6.7 Způsob zatěžování

Jak již bylo zmíněno, zátěžný moment je vyvozen zavěšením závaží o hmotnosti  $m_Z$  na zátěžnou páku. Tento způsob je jednoduchý a byl zvolen při návrhu měřícího standu na základě rešerše experimentálních metod měření tuhosti. Není už však diskutován proces přidávání závaží.

Vzhledem k materiálovým vlastnostem plexiskla (viz kapitola 4.2.1) záleží průběh tahového diagramu na rychlosti deformace. Aby chování plexiskla bylo podobné a postup měření tedy aplikovatelný na ocelové vzorky, bylo zvoleno zatěžování s nízkou rychlostí deformace. V tomto případě se plexisklo chová jako houževnatý materiál a průběh tahového diagramu se podobá oceli s nevýraznou mezí kluzu.

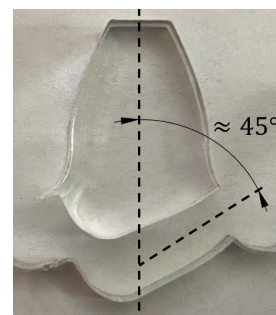


**Obrázek 75:** Vhodně zvolený zatěžovací cyklus

S ohledem na rychlost deformace je tedy maximální hmotnost závaží rozdělena a přidávána postupně. Na základě zkušeností z měření (viz kapitola 8.1) se ukázalo, že zatěžování přibližně do poloviny maximální hmotnosti závaží je možné provádět rychleji a s přibližováním se k maximální hmotnosti je vhodné snižovat hmotnostní přírůstek závaží.

Jako příklad je na Obrázku 75 uveden zatěžovací cyklus pro vzorek  $a_w = 182 \text{ mm}$  o šířce  $8 \text{ mm}$ , jako maximální hmotnost závaží zde byla zvolena hmotnost  $22 \text{ kg}$ .

Dále je důležité zmínit, že zavěšování závaží je nutné provádět velmi opatrně. Plexisklové vzorky jsou velmi náchylné na rázy a při rychlém zavěšení závaží se projeví křehké chování materiálu a dojde ke zlomení zubu. Zlomený zub je ukázán na Obrázku 76. K lomu došlo dle očekávání pod úhlem přibližně  $45^\circ$ .



**Obrázek 76:** Ukázka zlomeného zubu

## 7 Finální podoba metodiky experimentálního měření tuhosti ozubení

Na základě zkušeností získaných během měření popsanych v kapitole 6, byla stanovena tato finální metodika experimentálního měření tuhosti přímého ozubení na měřícím standu navrženého v bakalářské práci *Návrh testovacího stavu pro identifikaci tuhosti ozubení* [28].

Doporučené pořadí provádění jednotlivých kroků:

1. Volba vzorku, návrh maximálního zatížení, návrh řady závaží a příprava analytických modelů
2. Ustavení vzorků
3. Nastavení osové vzdálenosti a srovnání šířek vzorků
4. Nastavení referenční polohy IRC snímače do vodorovné polohy zátěžného ramene
5. Zjištění rozsahu jednotlivých typů záběrů
6. Předběžná úvaha vhodného odstupňování zátěžných bodů
7. Natočení kol do prvního zátěžného bodu
8. Zapsání hodnoty úhlu natočení kol  $\varphi$  a typu záběru
9. Nastavení nulové hodnoty IRC snímače
10. Provedení předzatěžovacího cyklu
11. Postupné přidávání závaží a měření deformace zubů
12. Vyfocení kontaktních ploch zubů a záběru
13. Uložení dat a odebrání závaží
14. Natočení kol do dalšího zátěžného bodu
15. Opakování postupu od bodu 8.

**Krok 1.** - Pro zvolený vzorek je proveden návrh maximálního zatížení pomocí MKP analýzy v softwaru KISSsoft (viz kapitola 5.2.2), pomocí standartních metod kontroly ozubení (např. teorie dle *Bacha* a *Hoffera* [1] [3]) nebo na základě zkušeností.

Odstupňování řady závaží je vhodné volit stejné nebo alespoň podobné pro vzorky, které mezi sebou budou porovnávány.

Analytické modely vhodné pro kontrolu dat během měření jsou model KISSsoft a model DE.

**Krok 2.** - Tento proces je popsán v kapitole 6.1.1 a je zde důležité zkontrolovat správné nastavení segmentu pastorku.

**Krok 3.** - Také popsán v kapitole 6.1.1. Zde je důležité především srovnání šířek vzorků, aby bylo dodrženo konstantní zatížení po celé šířce vzorku.

**Krok 4.** - Toto nastavení (viz kapitola 6.1.2) je nutné provést, aby bylo možné počítat se skutečnou délkou ramene dle rovnice (5.17).

**Krok 5.** - Tento krok je nutné provést, aby mohlo být správně navrženo odstupňování zátěžných bodů. Typ záběru je zjišťován pozorováním nezatížených<sup>1</sup> kol skrze polariskop za postupného otáčení. Při změně typu záběru je natočení kol odečteno z prostředí LabVIEW a zapsáno.

**Krok 6.** - V oblastech přechodu mezi jednopárovým a dvoupárovým záběrem je vhodné volit krok maximálně 0,5°. V oblastech čistě jednopárového/ dvoupárového záběru je možné volit krok větší (1° i více). Jako vhodný počet zátěžných bodů se jeví přibližně 20 bodů. Pro takový počet je celková doba měření (bez nastavení vzorků) přibližně hodinu až hodinu a půl.

**Krok 7.** - Během měření se osvědčilo začínat měření v bodě s natočením kol  $\varphi = 0^\circ$ , tedy ve vodorovné poloze ramene. Poloha je zajištěna utažením zastavovacích šroubů.

**Krok 8.** - Zapsání úhlu  $\varphi$  je nezbytné pro vyhodnocení dat a typ záběru je zapsán pro porovnání nezatíženého a zatíženého stavu.

**Krok 9.** - Nastavení nulové hodnoty je doporučeno provést, aby při předzatěžování byla lépe viditelná hodnota zbytkové deformace.

**Krok 10.** - Postup popsán v kapitole 6.6.

**Krok 11.** - Postup popsán v kapitole 6.7. Je nezbytné přidávat závaží opatrně a nevnést do zatížení žádné rázy, aby nedošlo ke křehkému lomu zubů.

---

<sup>1</sup>Zastavovací šrouby nejsou úplně utaženy, závaží by tedy vyvodilo další natočení, nikoliv deformaci. Jsou však utaženy dostatečně na to, aby byly kontaktní body viditelné při mírném zatlačení rukou na zátěžnou páku.

**Krok 12.** - Tyto fotografie slouží k dokumentaci a v případě, že změřená hodnota neodpovídá očekávání a pak je možné použít je k diskusi nad příčinou tohoto rozdílu. Je zde také určen typ záběru v zatíženém stavu. Ten je porovnán s nezatíženým stavem a jsou tak odhaleny případy s dotykem špičky zubu vycházejícího ze záběru. Pokud by došlo k rozšíření měřicího standu o statický fotoaparát nebo kameru, mohly by být tyto fotografie použity pro fotoelasticimetrii.

**Krok 13.** - Data jsou uložena do nastaveného „csv“ souboru a je doporučeno tento soubor po uložení zkontrolovat a případně do něj zapsat poznámky, pokud došlo k nějaké nestandardní situaci.

**Krok 14.** - Pro snadnější nastavení dalšího zátěžného bodu není vhodné úplné povolení zastavovacích šroubů. Pokud nejsou úplně povoleny, je nastavení malých pootočení snazší díky přidanému odporu. Bez něj dochází k samovolnému otočení kol vlivem vlastní váhy zátěžné páky.

**Krok 15.** - Postup měření jednotlivých zátěžných bodů je stejný. Po skončení měření je doporučeno vzorky oddálit a nenechávat je v záběru ani pokud nejsou zatíženy.

Práce s naměřenými daty byla popsána v kapitole 5.5. Ty mohou být následně spojeny s výsledky analytických a simulačních metod a tento výstup je následně možné porovnávat a diskutovat.



## 8 Diskuze výsledků

V této závěrečné části práce jsou diskutovány poznatky a výsledky z měření, pro přehlednost byly vybrány reprezentativní vzorky viz Tabulka 8.1. Zvolené vzorky pokrývají všechny typy korekcí, které sada vzorků obsahuje a zároveň uvažují obě měřené šířky vzorků. Pro všechny tyto vzorky byly vypočteny analytické a simulační modely (tedy model KISSsoft, model DE a MKP model - Abaqus) za účelem porovnání výsledků.

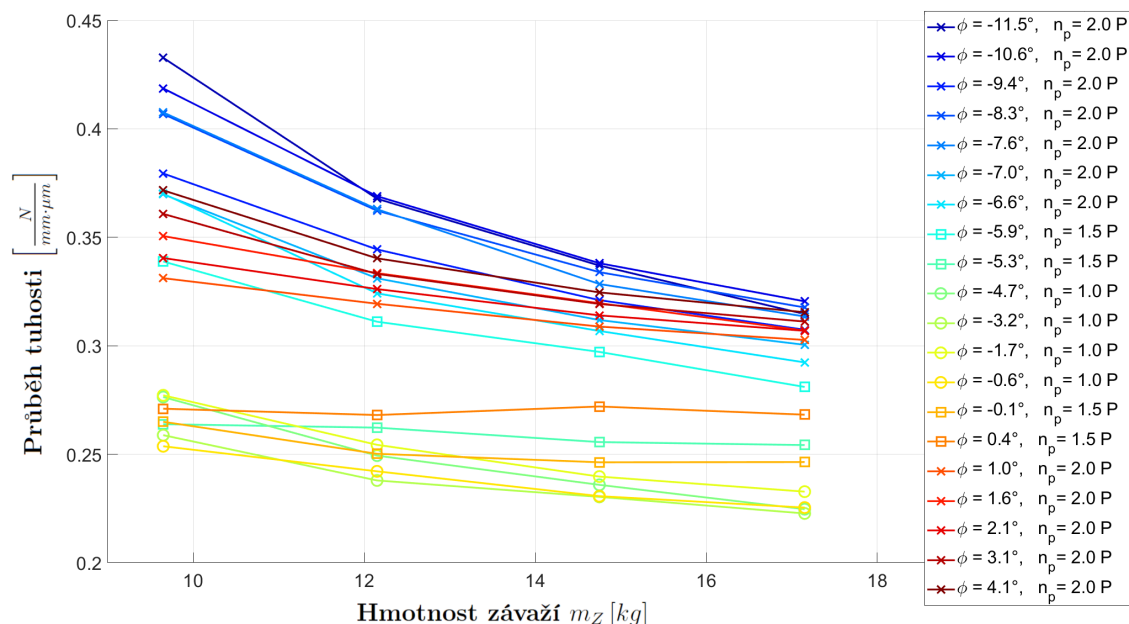
**Tabulka 8.1:** Vybrané reprezentační Vzorky

	Osová vzdálenost	Šířka	Typ	Jednotková korekce		Součinitel záběru profilu $\varepsilon_\alpha$ [1]
	$a_w$ [mm]	$b$ [mm]	korekce	$x_1$ [1]	$x_2$ [1]	
Vzorek 1	174,5	5	V-	-0,1813	0	1,639
Vzorek 2	174,5	8	V-	-0,1813	0	1,639
Vzorek 3	176	5	N	0	0	1,579
Vzorek 4	176	8	N	0	0	1,579
Vzorek 5	182	5	V+	0,8368	0	1,316
Vzorek 6	182	8	V+	0,8368	0	1,316

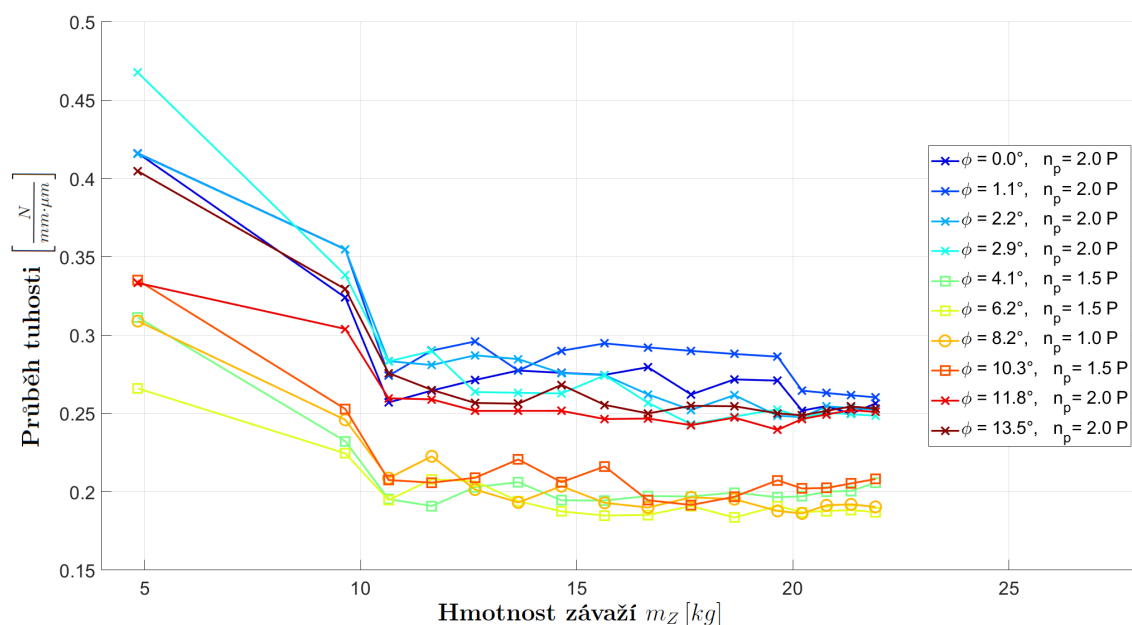
### 8.1 Proměnná tuhost při zatěžování

Během zpracování výsledků se objevilo neočekávané chování vzorků, a to při vykreslení změřené tuhosti v závislosti na hmotnosti závaží zavěšeného na páce. Z definice tuhosti (kapitola 2) vyplývá, že by tuhost neměla být závislá na zatížení a šířce vzorku, tedy konstantní pro daný záběrový bod. To naznačuje i jednotka  $\left[\frac{N}{mm \cdot \mu m}\right]$ , ve které se tuhost udává. Kvůli nestandardním vlastnostem materiálu *Plexiglas®* (viz kapitola 4.2.1) však dochází k postupnému přibližování (konvergenci) tuhosti k této konstantní hodnotě (viz Obrázek 77 a 78).

Také se zde projeví kontaktní-Hertzova tuhost, která je závislá na velikosti dotykové plochy. Vzhledem k relativně malé přesnosti výroby vzorků nedochází při malém zatížení k ideálnímu dotyku boků zubů. Vliv nepřesností klesá se zatížením, jelikož dochází ke stlačení nerovností na bocích zubů.



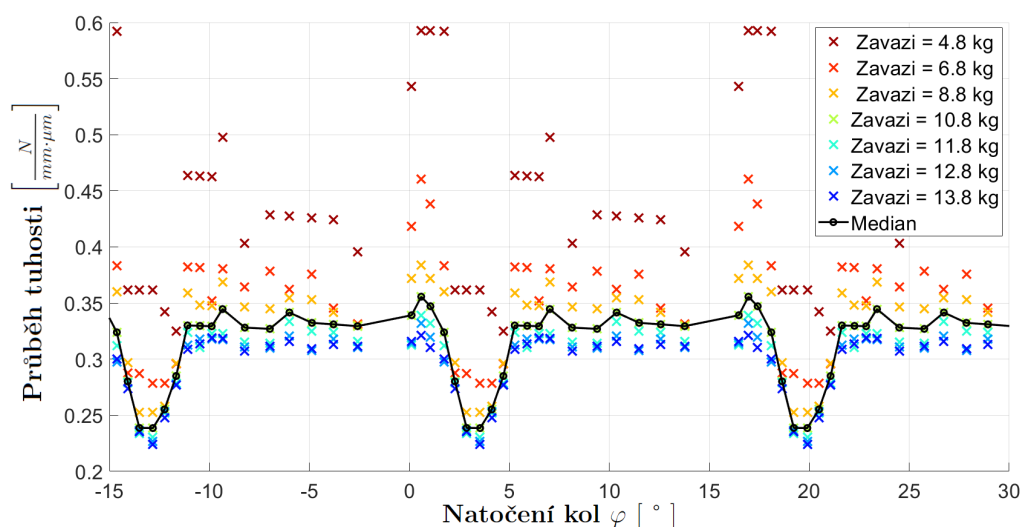
Obrázek 77: Graf průběhu tuhosti v závislosti na zatížení (Vzorky  $b = 5 \text{ mm}$ )



Obrázek 78: Graf průběhu tuhosti v závislosti na zatížení (Vzorky  $b = 8 \text{ mm}$ )

Jsou zde odděleny jednotlivé typy záběru, jednopárový  $n_p = 1$  (body vyznačeny kroužkem), dvoupárový  $n_p = 2$  (body vyznačeny křížkem) a přechodná oblast  $n_p = 1,5$  (body vyznačeny čtvercem). Jednopárový i dvoupárový záběr konverguje ke své konstantní hodnotě, záběrové body v přechodné oblasti se pohybují v rozmezí mezi nimi. Toto je velmi výrazné u vzorku se šířkou 8 mm (Obrázek 78), avšak u 5 mm vzorku však nastává lom dříve než dojde k ustálení hodnoty tuhosti.

Jednopárová tuhost také konverguje rychleji, to je patré z Obrázku 77, protože se u ní méně projeví vliv nepřesnosti výroby v podobě kontaktní-Hertzovy tuhosti.



**Obrázek 79:** Průběh mediánové tuhosti s průběhy pro jednotlivá závaží  
(vzorek  $a_w = 174,5 \text{ mm}$ ,  $b = 5 \text{ mm}$ )

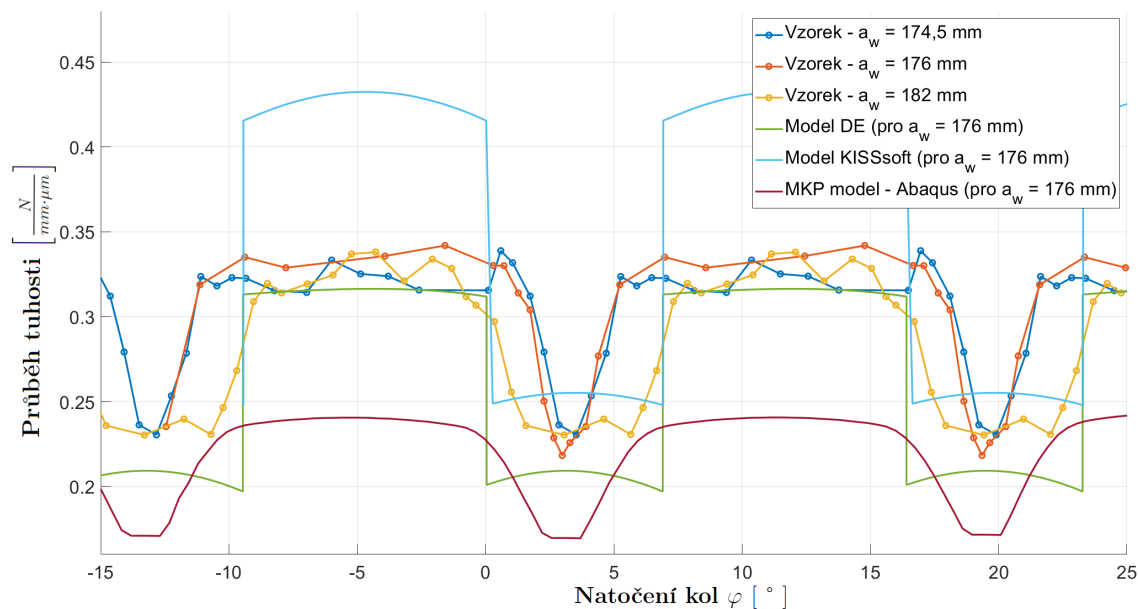
Toto konvergování ke konstantní hodnotě tuhosti je také viditelné po vykreslení průběhu tuhosti v závislosti na natočení kol a s oddělením řad s různou hmotností závaží na zátěžné páce (Obrázek 79). Zde je viditelný stejný trend konvergence hodnot tuhosti.

Na základě těchto poznatků byl zvolen medián (vypočtený ze všech hodnot naměřené tuhosti pro dané natočení kol) jako vhodná reprezentativní hodnota, jelikož představuje nejpravděpodobnější hodnotu a není výrazně ovlivněn extrémními hodnotami. Je tedy vhodnější než aritmetický průměr. Další možností reprezentativního průběhu by mohl být průběh při určitém zatížení, například při největší hmotnosti měřeného závaží.

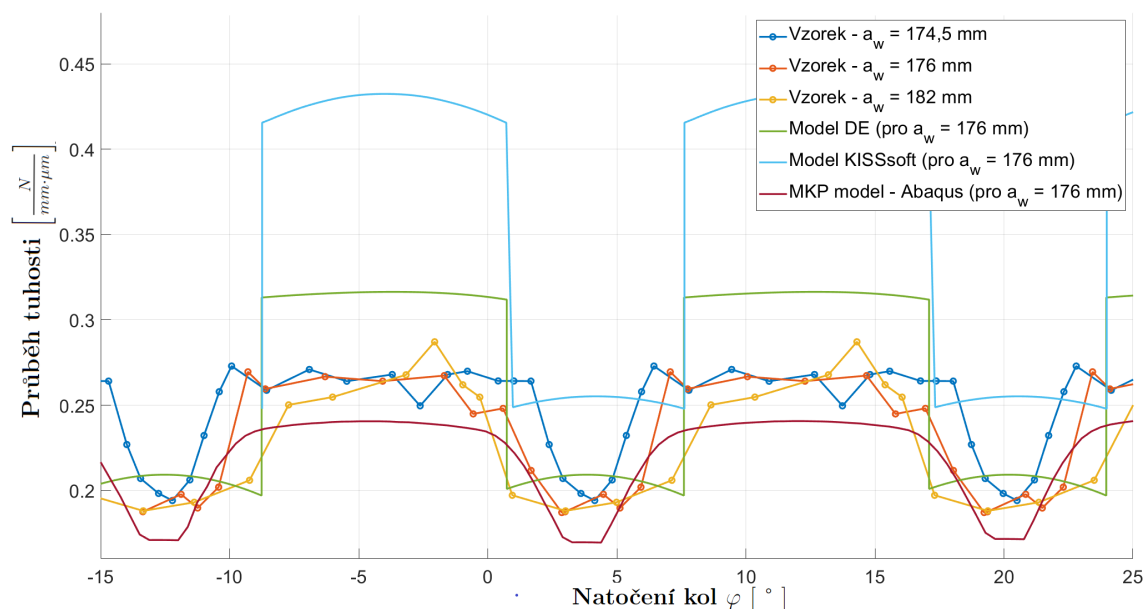
Pokud by tento přístup ke zjištění tuhosti a následného návrhu přímého ozubení z materiálu *Extrudovaný Plexiglas® XT* měl být použit pro komerční využití, je vhodné, aby jedním z parametrů pro návrh ozubení byl rozsah kroutícího momentu, který bude soukolí při odvalu zatěžovat. Aby mohl být zajištěn co nejpřesnější návrh ozubení.

## 8.2 Rozdílná tuhost vzorků se šířkou 5 a 8 mm

Dalším zajímavým poznatkem z naměřených dat je vyšší tuhost vzorků se šířkou 5 mm oproti 8 mm vzorkům (viz Obrázek 80 a 81).



**Obrázek 80:** Porovnání mediánové tuhosti vzorků se šířkou  $b = 5 \text{ mm}$



**Obrázek 81:** Porovnání mediánové tuhosti vzorků se šířkou  $b = 8 \text{ mm}$

Zde se opět projeví fakt, že 5 mm vzorky nemají dostatečnou mez pevnosti k tomu, aby mohly konvergovat do příslušné konstantní hodnoty. Také se zde projeví kontaktní-Hertzova tuhost (popsáno v předešlé kapitole).

Dalším faktorem, který k tomuto přispívá, je rozdíl v chování vzorků při stavu rovinné napjatosti a při stavu rovinné deformace. Model DE obsahuje jednoduchý vztah (2.31) pro výpočet této kontaktní tuhosti, který uvažuje pouze stav rovinné napjatosti, pro který platí  $E_e = E$ . Tento stav přiřazují složitější modely kontaktní tuhosti k tenkým vzorkům. A z Obrázku 80 je viditelné, že se měřená tuhost pro 5 mm vzorky nejvíce shoduje právě s modelem DE. Oproti tomu 8 mm vzorky (Obrázek 81) odpovídají více stavu rovinné deformace, a proto se nejvíce blíží k MKP modelu - Abaqus, který obsahuje více komplexní výpočet kontaktů.

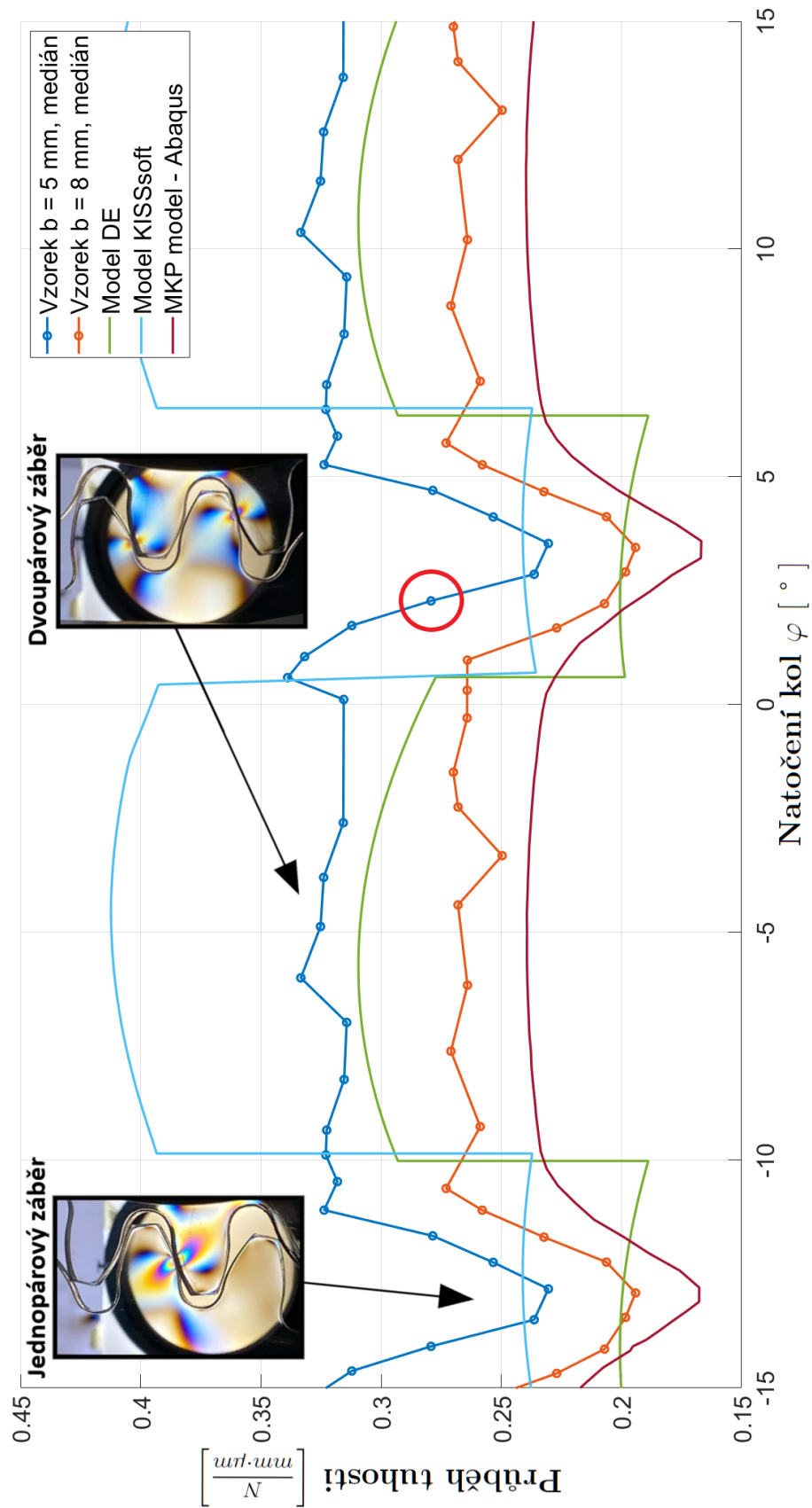
## 8.3 Výsledné grafy pro vybrané vzorky

V této kapitole jsou porovnány jednotlivé vzorky s příslušnými analytickými a simulačními modely. Vzorky s rozdílnou šířkou budou porovnávány současně, jelikož analytické modely neuvažují vliv šířky vzorků a rozdíl mezi vzorky s různou šířkou byl diskutován v předchozí kapitole.

### 8.3.1 Vzorky s osovou vzdáleností $a_w = 174,5 \text{ mm}$

Vzorek  $a_w = 174,5 \text{ mm}$  má zápornou korekci pastorku (tedy typ V-, viz Tabulka 8.1), která ovlivní  $\varepsilon_\alpha$ , což je důležitý parametr pro průběh tuhosti ozubení. Pro mezní hodnotu  $\varepsilon_\alpha = 2$  dochází pouze k dvoupárovému záběru. Pro tento vzorek je hodnota součinitele záběru profilu  $\varepsilon_\alpha = 1,639$  (viz Tabulka 8.1) a je poměrně blízko této mezní hodnotě, proto lze na Obrázku 82 pozorovat relativně krátkou dobu trvání jednopárového záběru.

Trvání jednopárového záběru je navíc zkráceno o přechodnou oblast, ve které dochází k dotyku zubů přicházejících nebo naopak vycházejících ze záběru vlivem jejich deformace. Tuto deformaci uvažuje pouze MKP model - Abaqus, a proto je jeho průběh také nejvíce podobný měřenému průběhu. Model KISSsoft a model DE tuto deformaci neuvažují a přechod mezi jednotlivými typy záběru je tak skokový. Výsledný graf porovnání průběhů tuhosti je uveden na Obrázku 82. Na tomto obrázku jsou také fotografie znázorňující stavy čistě jednopárového a dvoupárového záběru.



Obrázek 82: Porovnání mediánové tuhosti vzorků  $a_w = 174,5$  mm

V Tabulce 8.2 jsou uvedeny průměrné<sup>1</sup> hodnoty tuhosti v oblasti jednopárového a dvouřárového záběru a také procentuální rozdíly v porovnání jednotlivých modelů s měřenými vzorky. Jako jednopárový záběr je u měřených dat a u MKP modelu - Abaqus uvažována pouze oblast, ve které nedochází k dotyku špičky zubu z druhého páru vlivem deformace.

Rozdíly v rozsahu  $\pm 15\%$  jsou vyznačeny zelenou barvou a reprezentují minimální odchylku. V rozsahu  $\pm 15\%$  až  $\pm 25\%$  jsou rozdíly zvýrazněny oranžovou barvou a představují běžné rozdíly, které na základě rešerše experimentálního měření (kapitola 3) většina autorů považuje za přijatelné. Rozdíly nad  $\pm 25\%$  jsou značeny červenou barvou a představují zvýšenou nepřesnost.

**Tabulka 8.2:** Porovnání dat pro vzorek s  $a_w = 174,5 \text{ mm}$

Vzorek $a_w = 174,5 \text{ mm}$	Průměr $\left[ \frac{N}{\text{mm} \cdot \mu\text{m}} \right]$	Rozdíl proti vzorku $b = 5 \text{ mm}$	Rozdíl proti vzorku $b = 8 \text{ mm}$
Jednopárová tuhost			
Vzorek $b = 5 \text{ mm}$	0,233	—	18,9%
Vzorek $b = 8 \text{ mm}$	0,196	-15,9%	—
Model DE	0,197	-15,4%	0,6%
Model KISSsoft	0,243	4,0%	23,6%
MKP model - Abaqus	0,167	-28,5%	-15,0%
Dvoupárová tuhost			
Vzorek $b = 5 \text{ mm}$	0,323	—	23,6%
Vzorek $b = 8 \text{ mm}$	0,261	-19,1%	—
Model DE	0,300	-7,0%	14,9%
Model KISSsoft	0,406	25,6%	55,2%
MKP model - Abaqus	0,237	-26,7%	-9,5%

Rozdílná tuhost vzorků se šířkou  $5 \text{ mm}$  a  $8 \text{ mm}$  byla již vysvětlena v kapitole 8.2, zde je však vidět, že  $8 \text{ mm}$  vzorek při v porovnání s  $5 \text{ mm}$  vykazuje o 16% nižší hodnotu tuhosti v jednopárové oblasti. V oblasti dvouřárové tuhosti je rozdíl o tři procentní body větší.

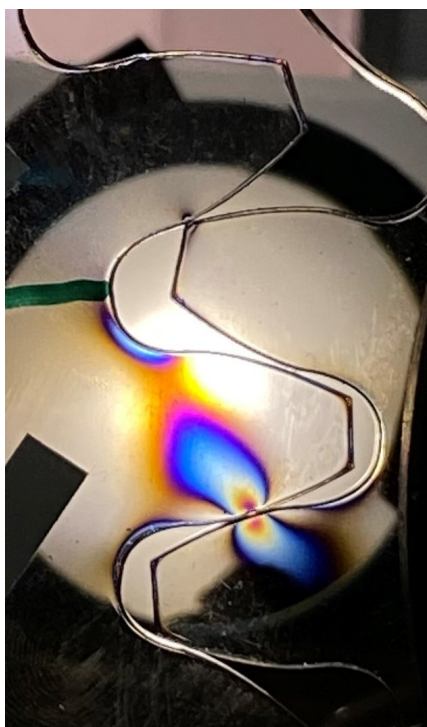
<sup>1</sup>Pro danou oblast (jednopárového a dvouřárového záběru) reprezentativního mediánového průběhu tuhosti je vytvořena průměrná hodnota, aby bylo možné provést procentuální porovnání s analytickými a simulačními modely.

Při porovnání s 8 mm vzorkem jsou tyto procentuální rozdíly větší, jelikož 1% odpovídá menší hodnotě tuhosti než u 5 mm vzorku. Absolutní hodnota rozdílu mezi nimi je však totožná.

Z Modelu DE vycházejí relativně přesné výsledky (maximální rozdíl 15,4%). Nejlépe se shoduje v oblasti jednopárového záběru v porovnání s 8 mm vzorkem a v oblasti dvoupárové tuhosti v porovnání s 5 mm vzorkem. Model DE neuvažuje deformaci zubů v přechodné oblasti a je nutné na tento rozdíl pamatovat při jeho využití.

Model KISSsoft se jeví nejméně přesný v oblasti dvoupárové tuhosti, naopak v oblasti čistě jednopárové tuhosti se relativně přesně shoduje s 5 mm vzorkem.

MKP model - Abaqus dosahuje celkově nejnižších hodnot průběhu tuhosti a při porovnání s 8 mm vzorky je procentuální rozdíl maximálně 15%. V porovnání s 5 mm vzorkem se jeví jako méně přesný, ale to je způsobeno rozdílem mezi různě širokými vzorky. Jako jediný uvažuje vliv deformace zubů, ale je nejvíce časově náročný, jelikož pro každý vzorek musí být nastaven celý výpočet (viz kapitola 5.4) od úplného začátku včetně 2D modelu. Oproti tomu model DE vyžaduje pouze zadání parametrů ozubení<sup>2</sup>.



a) Fotografie záběru



b) Fotografie kontaktní plochy

**Obrázek 83:** Kontaktní bod v přechodné oblasti -  $a_w = 174,5 \text{ mm}$

<sup>2</sup>V případě vhodně připraveného softwarového nástroje (viz kapitola 5.3).



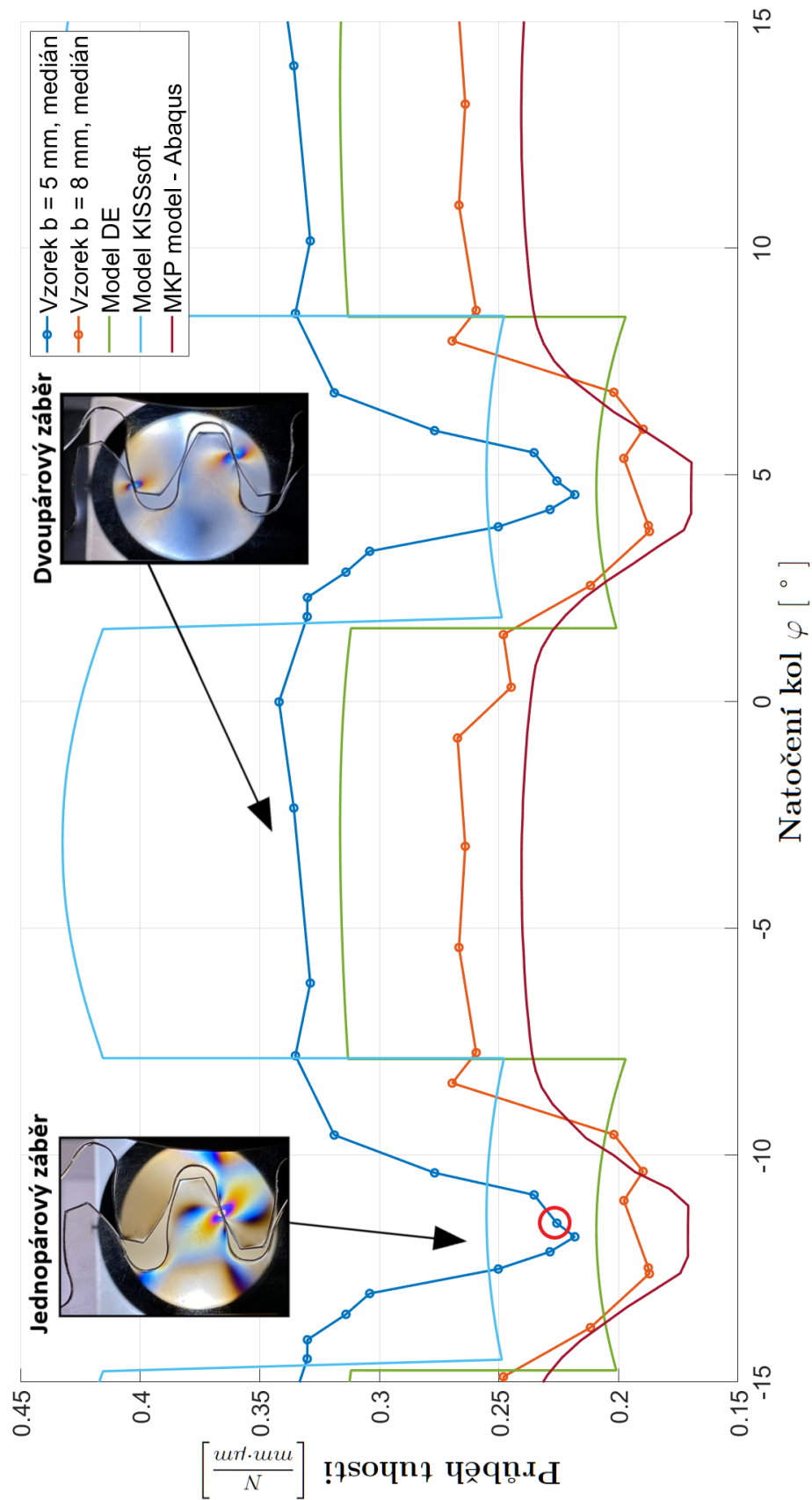
Na Obrázku 83 jsou zobrazeny fotografie záběrového bodu v přechodné oblasti (vyznačen na Obrázku 82). Je zde jasně viditelný dotyk špičky zubu vycházejícího ze záběru. Špička zubu je v tomto případě opřena o druhý zub spíše hranou zubu na hlavové kružnici než evolventní plochou boku zubu. Z tohoto důvodu nedosahuje hodnota tuhosti takové velikosti jako v oblasti dvoupárového záběru.

### 8.3.2 Vzorky s osovou vzdáleností $a_w = 176 \text{ mm}$

Vzorek  $a_w = 176 \text{ mm}$  je nekorigovaný, tedy typ N (viz Tabulka 8.1). Pro tento vzorek je hodnota součinitele záběru profilu  $\varepsilon_\alpha = 1,579$  (viz Tabulka 8.1), proto můžeme na Obrázku 84 pozorovat relativně krátkou dobu trvání jednopárového záběru, která je ale delší než u předchozího záporně korigovaného vzorku. Trvání jednopárového záběru je opět zkráceno o přechodnou oblast. Výsledný graf porovnání průběhů tuhosti je uveden na Obrázku 84. Opět doplněn o fotografie znázorňující stavy čistě jednopárového a dvoupárového záběru.

**Tabulka 8.3:** Porovnání dat pro vzorek s  $a_w = 176 \text{ mm}$

Vzorek $a_w = 176 \text{ mm}$	Průměr $\left[ \frac{N}{\text{mm} \cdot \mu\text{m}} \right]$	Rozdíl proti vzorku $b = 5 \text{ mm}$	Rozdíl proti vzorku $b = 8 \text{ mm}$
Jednopárová tuhost			
Vzorek $b = 5 \text{ mm}$	0,227	—	19,1%
Vzorek $b = 8 \text{ mm}$	0,191	-16,1%	—
Model DE	0,206	-9,4%	7,9%
Model KISSsoft	0,253	11,4%	32,7%
MKP model - Abaqus	0,172	-24,3%	-9,8%
Dvoupárová tuhost			
Vzorek $b = 5 \text{ mm}$	0,332	—	28,3%
Vzorek $b = 8 \text{ mm}$	0,258	-22,0%	—
Model DE	0,315	-5,0%	21,9%
Model KISSsoft	0,427	28,7%	65,0%
MKP model - Abaqus	0,238	-28,2%	-7,9%

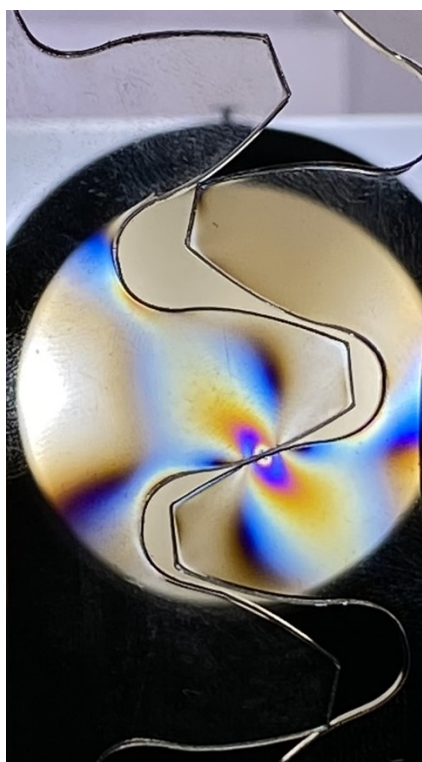


Obrázek 84: Porovnání mediánové tuhosti vzorků  $a_w = 176$  mm

V Tabulce 8.3 jsou uvedeny průměrné hodnoty tuhosti v oblasti jednopárového a dvou párového záběru a také procentuální rozdíly v porovnání jednotlivých modelů s měřeními vzorky. Jako jednopárový záběr je u měřených dat a u MKP modelu - Abaqus opět uvažována pouze oblast, ve které nedochází k dotyku špičky zubu z druhého páru vlivem deformace.

Zde je velmi podobný procentuální rozdíl mezi různě širokými vzorky, a to pod 20%. Model DE se zde shoduje s 5 mm vzorkem lépe než u vzorku s  $a_w = 174,5 \text{ mm}$ , a to o šest procentních bodů v oblasti jednopárového záběru. Model KISSsoft je odpovídající pouze v oblasti jednopárového záběru u 5 mm vzorku, ale rozdíl je výrazně vyšší než u předchozího vzorku. MKP model - Abaqus je zde pro 8 mm vzorek také přesnější, s maximálním rozdílem menším než 10%.

V místě vyznačeném na Obrázku 84 dochází k podezřelému navýšení tuhosti u 5 mm vzorku v oblasti jednopárové tuhosti, je proto provedena kontrola dotyku špičky zubu z druhého páru.



a) Fotografie záběru



b) Fotografie dotykové plochy

**Obrázek 85:** Kontrola pomocí fotografií záběru a kontaktní plochy -  $a_w = 176 \text{ mm}$

Na fotografii 85b) není viditelný žádný dotyk špičky druhého zubu, jedná se tedy skutečně o čistě jednopárový záběr.

### 8.3.3 Vzorky s osovou vzdáleností $a_w = 182 \text{ mm}$

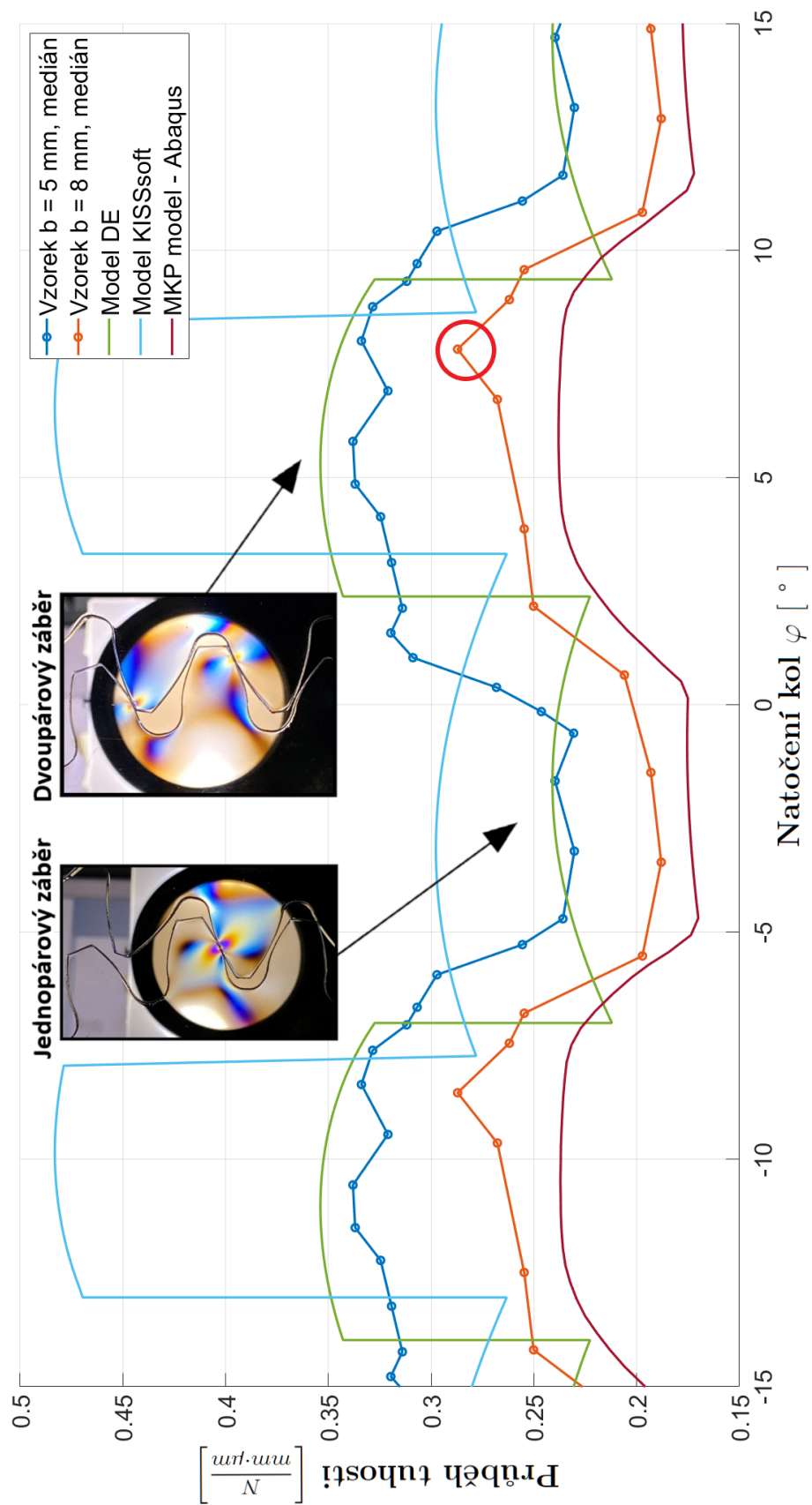
Vzorek  $a_w = 182 \text{ mm}$  má kladnou korekci, tedy typ V+. Hodnota součinitele záběru profilu  $\varepsilon_\alpha$  se rovná 1,316 (viz Tabulka 8.1), proto je z Obrázku 86 patrné, že doba trvání jednopárového záběru je výrazně delší než u předchozích vzorků. Výsledný graf porovnání průběhů tuhosti je uveden na Obrázku 86.

V Tabulce 8.4 jsou uvedeny průměrné hodnoty tuhosti v oblasti jednopárového a dvouprárového záběru a také procentuální rozdíly v porovnání jednotlivých modelů s měřenými vzorky. Jako jednopárový záběr je u měřených dat a u MKP modelu - Abaqus opět uvažována pouze oblast, ve které nedochází k dotyku špičky zubu z druhého páru vlivem deformace.

**Tabulka 8.4:** Porovnání dat pro vzorek s  $a_w = 182 \text{ mm}$

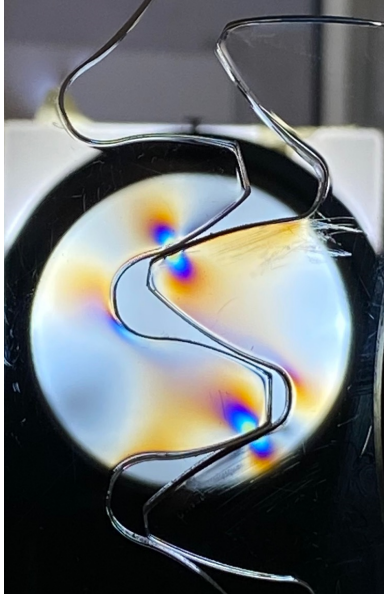
Vzorek $a_w = 182 \text{ mm}$	Průměr $\left[ \frac{N}{\text{mm} \cdot \mu\text{m}} \right]$	Rozdíl proti vzorku $b = 5 \text{ mm}$	Rozdíl proti vzorku $b = 8 \text{ mm}$
Jednopárová tuhost			
Vzorek $b = 5 \text{ mm}$	0,234	—	21,5%
Vzorek $b = 8 \text{ mm}$	0,193	-17,7%	—
Model DE	0,232	-0,7%	20,6%
Model KISSsoft	0,289	23,6%	50,1%
MKP model - Abaqus	0,174	-25,6%	-9,7%
Dvoupárová tuhost			
Vzorek $b = 5 \text{ mm}$	0,322	—	24,8%
Vzorek $b = 8 \text{ mm}$	0,263	-19,9%	—
Model DE	0,347	7,9%	34,7%
Model KISSsoft	0,480	49,0%	86,0%
MKP model - Abaqus	0,236	-26,6%	-8,4%

Je zde mírně vyšší procentuální rozdíl mezi různě širokými vzorky než u předchozích případů, a to okolo 20%. Model DE se zde shoduje s 5 mm výrazně lépe než u vzorku s  $a_w = 174,5 \text{ mm}$  a  $176 \text{ mm}$ , a to až o 14 procentních bodů v oblasti jednopárového záběru. Model KISSsoft je pro tento vzorek velmi nepřesný (nejmenší rozdíl je 24%). MKP model - Abaqus je zde pro 8 mm vzorek opět relativně přesný, s procentuálním rozdílem do 10%.



Obrázek 86: Porovnání mediánové tuhosti vzorků  $a_w = 182$  mm

V místě vyznačeném na Obrázku 86 dochází k podezřelému navýšení v průběhu tuhosti u  $8\text{ mm}$  vzorku v oblasti dvoupárové tuhosti, je proto provedena kontrola záběrového bodu pomocí fotografií.



a) Fotografie záběru



b) Fotografie dotykové plochy

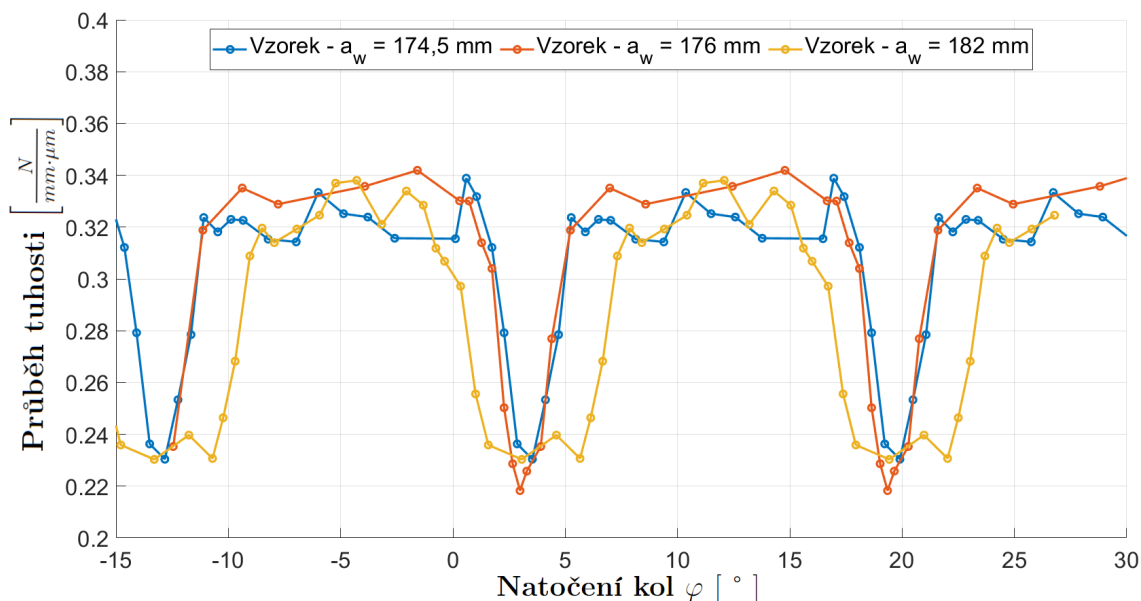
**Obrázek 87:** Kontrola pomocí fotografií záběru a kontaktní plochy

Podle fotografie 87b) nedošlo ke správnému dotyku kontaktních ploch. Na základě této kontroly byl tento bod vyřazen z výpočtu průměrné hodnoty dvoupárové tuhosti a není tedy v Tabulce 8.4 uvažován.

## 8.4 Porovnání různě korigovaných vzorků

Porovnání vzorků s různou hodnotou jednotkové korekce pastorku je další z důležitých výstupů z experimentálního měření. Jako první byly porovnány různě korigované vzorky o šířce  $5\text{ mm}$ . Na Obrázku 88 je tedy uveden graf porovnání mediánových průběhů tuhosti zvolených reprezentativních vzorků se šířkou  $5\text{ mm}$ .

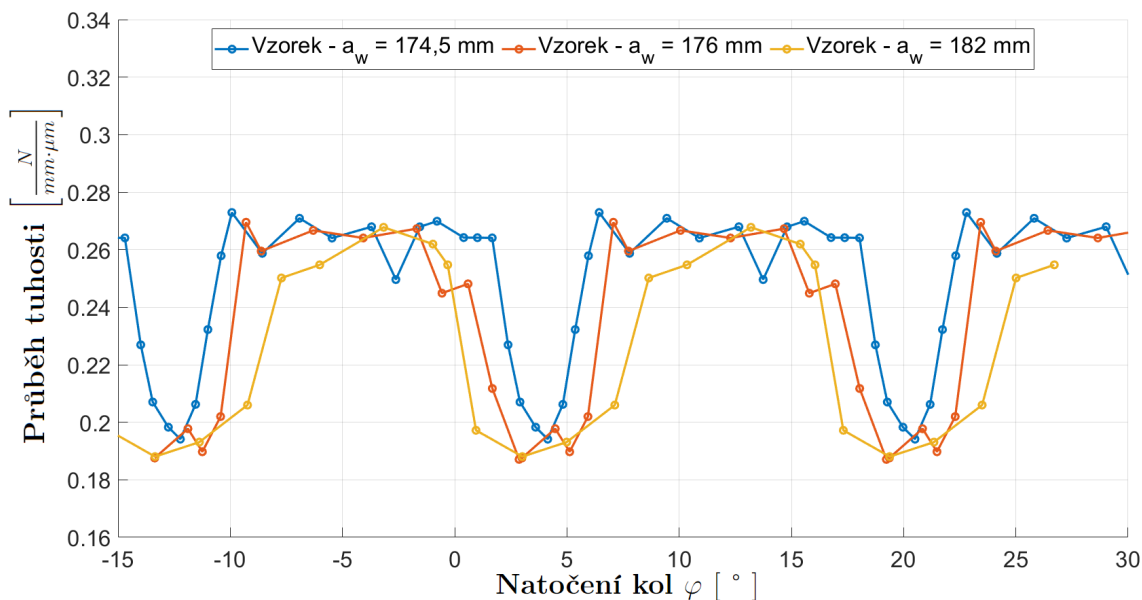
Následně jsou průměrné hodnoty porovnány vůči nekorigovanému vzorku s osovou vzdáleností  $a_w = 176\text{ mm}$ . V Tabulce 8.5 jsou uvedené průměrné hodnoty vytvořeny vždy pro danou oblast záběru reprezentativního mediánového průběhu (stejně jako v kapitole 8.3). Je zde také uveden absolutní rozdíl mezi hodnotou jednopárové a dvoupárové tuhosti představující „výšku“ průběhu.


**Obrázek 88:** Porovnání vzorků s rozdílnou jednotkovou korekcí -  $b = 5 \text{ mm}$ 
**Tabulka 8.5:** Porovnání dat pro vzorky se šířkou  $b = 5 \text{ mm}$ 

Vzorky $b = 5 \text{ mm}$	V- $a_w = 174,5 \text{ mm}$	N $a_w = 176 \text{ mm}$	V+ $a_w = 182 \text{ mm}$
	Jednopárová tuhost		
Průměr $\left[ \frac{N}{\text{mm} \cdot \mu\text{m}} \right]$	0,233	0,227	0,234
Porovnání s N vzorkem [%]	2,8%	—	3,1%
	Dvoupárová tuhost		
Průměr $\left[ \frac{N}{\text{mm} \cdot \mu\text{m}} \right]$	0,323	0,332	0,322
Porovnání s N vzorkem [%]	-2,5%	—	-2,9%
	Jednopárová X Dvoupárová tuhost		
Rozdíl $\left[ \frac{N}{\text{mm} \cdot \mu\text{m}} \right]$	0,090	0,105	0,088

Rozdíly mezi vzorky se pohybují v překvapivě nízkých jednotkách procent. Hlavním rozdílem mezi jednotlivými vzorky je tedy délka trvání jednotlivých typů záběru, nikoliv absolutní hodnota tuhosti. „Výška“ průběhu se zde pohybuje v hodnotách okolo  $0,1 \frac{N}{\text{mm} \cdot \mu\text{m}}$  a nekorigovaný vzorek dosahuje jak nejnižší hodnoty tuhosti jednopárového záběru, tak nejvyšší hodnoty tuhosti dvoupárového záběru.

Stejně porovnání je také vytvořeno pro vzorky o šířce 8 mm, průběhy mediánových tuhostí jsou vykresleny do grafu (Obrázek 89) a průměrné hodnoty jsou porovnány v Tabulce 8.6.



**Obrázek 89:** Porovnání vzorků s rozdílnou jednotkovou korekcí -  $b = 8 \text{ mm}$

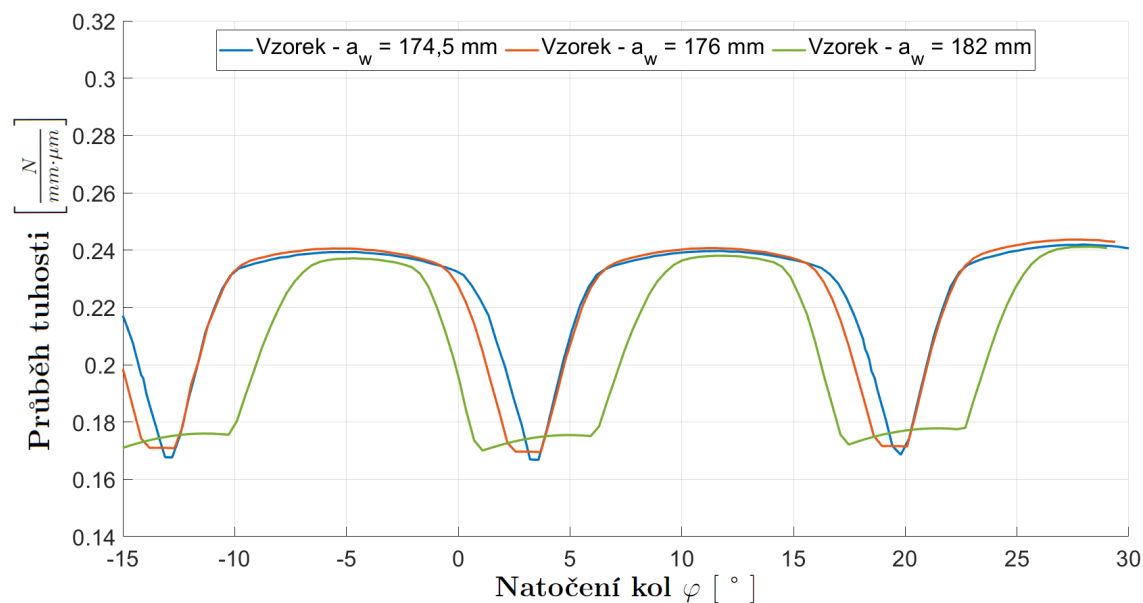
**Tabulka 8.6:** Porovnání dat pro vzorky se šířkou  $b = 8 \text{ mm}$

Vzorky $b = 8 \text{ mm}$	V- $a_w = 174,5 \text{ mm}$	N $a_w = 176 \text{ mm}$	V+ $a_w = 182 \text{ mm}$
	Jednopárová tuhost		
Průměr $\left[ \frac{N}{\text{mm} \cdot \mu\text{m}} \right]$	0,196	0,191	0,193
Porovnání s N vzorkem [%]	-3,0%	—	1,2%
	Dvoupárová tuhost		
Průměr $\left[ \frac{N}{\text{mm} \cdot \mu\text{m}} \right]$	0,261	0,2584	0,2579
Porovnání s N vzorkem [%]	1,2%	—	-0,2%
	Jednopárová X Dvoupárová tuhost		
Rozdíl $\left[ \frac{N}{\text{mm} \cdot \mu\text{m}} \right]$	0,065	0,068	0,065

Zde jsou procentuální rozdíly opět minimální. „Výška“ průběhu však dosahuje výrazně nižší hodnoty a rozdíly jednotlivých „výšek“ mezi příslušnými vzorky jsou zanedbatelné.



Bylo proto vytvořeno porovnání průběhů tuhosti různě korigovaných vzorků vypočtené pomocí MKP modelu - Abaqus. Tento model byl zvolen na základě vysoké přesnosti dle kapitoly 8.3 a umožní lepší porozumění této problematice.



**Obrázek 90:** Porovnání průběhů tuhosti z MKP modelu - Abaqus

**Tabulka 8.7:** Porovnání dat z MKP modelu - Abaqus

MKP model	V-	N	V+
Abaqus	$a_w = 174,5 \text{ mm}$	$a_w = 176 \text{ mm}$	$a_w = 182 \text{ mm}$
	Jednopárová tuhost		
Průměr $\left[ \frac{N}{\text{mm} \cdot \mu\text{m}} \right]$	0,1669	0,1718	0,1741
Porovnání s N vzorkem [%]	-2,9%	—	1,3%
	Dvoupárová tuhost		
Průměr $\left[ \frac{N}{\text{mm} \cdot \mu\text{m}} \right]$	0,2368	0,2380	0,2362
Porovnání s N vzorkem [%]	-0,5%	—	-0,7%
	Jednopárová X Dvoupárová tuhost		
Rozdíl $\left[ \frac{N}{\text{mm} \cdot \mu\text{m}} \right]$	0,070	0,066	0,062

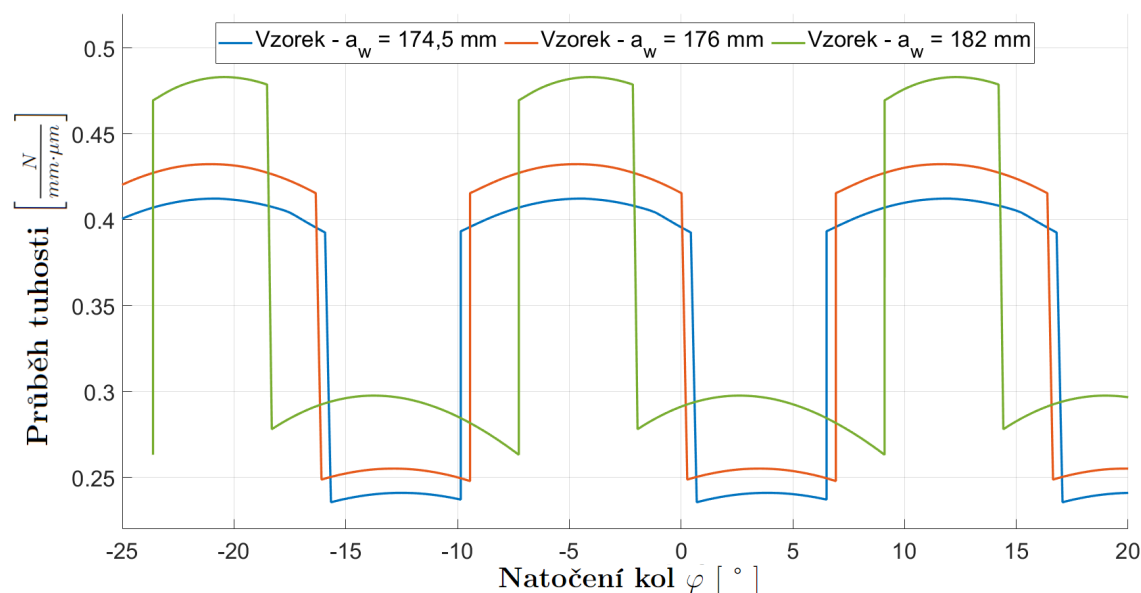
Na Obrázku 90 a v Tabulce 8.7 je tedy znázorněno porovnání průběhů tuhostí jednotlivých vzorků (z MKP modelu - Abaqus) stejným způsobem, jakým jsou porovnány experimentálně naměřené průběhy tuhosti. Objevuje se zde stejný trend

v chování průběhů tuhosti, a to jak v procentuálním porovnání vzorků, tak ve „výšce“ průběhů, která je přibližně stejná ( $\approx 0,065 \frac{N}{mm \cdot \mu m}$ ) jako u 8 mm vzorků.

Zvýšená hodnota této „výšky“ u 5 mm vzorků je způsobená nedokončením konvergence ke konstantní hodnotě tuhosti, viz kapitola 8.2.

Toto chování nemusí být z analytických modelů (DE a KISSsoft) na první pohled zřejmé, jelikož při porovnání průběhů tuhosti vypočtené modelem DE (Obrázek 54) nebo modelem KISSsoft (Obrázek 91) se kladně korigovaný vzorek  $a_w = 182 \text{ mm}$  jeví jako nejvíce tuhý, a to nejspíše proto, že tyto modely neuvažují vliv deformace zubů během záběru.

Je tedy důležité provádět porovnání experimentálně zjištěných dat s větším počtem analytických, ale i simulačních modelů vzhledem k jejich rozdílné funkci a zjednodušením, které uvažují.



Obrázek 91: Porovnání průběhů tuhosti z modelu KISSsoft

## 8.5 Zhodnocení analytických a simulačních modelů

**Model deformační energie** je na základě porovnání s měřenými daty přesný a tedy použitelný pro vzorky z materiálu *Extrudovaný Plexiglas® XT* o šířce 5 mm. Pro tento model nastává největší odchylka 15,4% (viz Tabulka 8.2) při porovnání s měřenými daty na vzorku s osovou vzdáleností  $a_w = 174,5 \text{ mm}$ .

U vzorků se šířkou 8 mm je přesnost podobná pro záporně korigovaný vzorek, ale s rostoucí hodnotou jednotkové korekce do kladného směru přesnost klesá.

Pro zpřesnění tohoto modelu by mohlo pomoci využití jiného modelu kontaktní tuhosti (kapitola 2.4.2, rovnice (2.32)). Tento model uvažuje rozdíl mezi stavy rovinné napjatosti a rovinné deformace, ale také uvažuje vliv LSR a tedy lépe reprezentuje velikost kontaktní tuhosti jednotlivých párů v záběru.

Jelikož byl vytvořen softwarový nástroj pro výpočet modelu DE, je jeho použití velmi snadné a rychlé. Ze zadaných počtů zubů, modulu a jednotkových korekcí přímo vypočte průběh tuhosti.

**Model KISSsoft** je ve všech případech dvou párové tuhosti nejméně přesný, stejně tak u jednopárové tuhosti, kde jsou jedinou výjimkou 5 mm vzorky s hodnotou jednotkové korekce blízko nule (vzorek V- a N).

Výhodou tohoto modelu je jeho nízká časová náročnost, už při návrhu ozubení je totiž možné získat průběh tuhosti. Bohužel ale používá k výpočtu velmi starou metodu (dle *Webera a Banascheka* [24]). Je tedy důležité využívat ho se zvýšenou opatrností a znalostí této nepřesnosti.

**MKP model - Abaqus** je nejvíce časově náročný model, ale jeho výstupem je přesný průběh tuhosti i s reálným chováním v přechodné oblasti. Pro 8 mm vzorky udává výsledky s konzistentním rozdílem 10% pro jednopárovou, ale i pro dvou párovou tuhost (s výjimkou u vzorku se zápornou jednotkovou korekcí V-, kde je rozdíl 15%). Takto konzistentní výsledky nevycházejí ze žádného jiného použitého modelu. Je tedy vhodné MKP model použít k verifikaci výsledků.

## 8.6 Možnosti vylepšení experimentu

Jedním z cílů této diplomové práce je příprava experimentu a tedy vytvoření metodiky měření. V průběhu experimentálního měření byla metodika dovedena do spolehlivého a funkčního stavu. Vždy je však prostor pro zlepšení, a proto jsou v této závěrečné kapitole shrnuty kroky, které by mohly vést ke zlepšení uživatelského přístupu a zrychlení experimentu.

- i) **Automatizace** - Měřicí stand je v současném stavu plně funkční a relativně přesný, ale jeho hlavní nevýhodou je vysoká časová náročnost způsobená nutností manuálního nastavení jednotlivých zátěžných bodů. Automatizováním tohoto procesu, aby bylo například možné provádět měření během odvalu, by došlo k výraznému zrychlení měřicího procesu.
- ii) **LabVIEW** - Zde je asi největší prostor pro zlepšení, a to funkční i grafické. V současné verzi ovládacího prostředí není prostor pro zapsání typu záběru, osové vzdálenosti a šířky vzorku. Doplnění těchto vstupů by zrychlilo

zpracování výsledků, jelikož by se datový set vycházející z LabVIEW přímo shodoval s datovým setem konkrétního vzorku (viz Tabulka 5.5).

Také při ukládání hodnoty vzájemného natočení kol  $\varphi$  a hmotnosti závaží  $m_z$  je v současné době zapisován přírůstek, nikoliv celková hodnota. Bylo by proto vhodné doplnit funkci, která bude celkovou hodnotu počítat na základě zadaného přírůstku. To může být relativně složité, jelikož software bude muset ukládat hodnoty mezi jednotlivým měřením. Opět to ale zrychlí vyhodnocení dat.

Grafická úprava se týká pouze uspořádání a velikosti tlačítek, tabulek a grafů za účelem větší přehlednosti.

- iii) **Fotoelasticimetrie** - Využití této metody by mohlo přinést další způsob ověření chování materiálu *Extrudovaný Plexiglas® XT*, a to hlavně u vzorků se šířkou 5 mm.

Bylo by vhodné alespoň doplnit měřicí stand o statický fotoaparát, který by zajistil stálou kvalitu fotografií pro kontrolu záběru. Rovněž by mohl být použit pro metodu DIC (viz kapitola 3.2.4) při měření ocelových vzorků.

- iv) **Model deformační energie** - Tento model by bylo vhodné doplnit hlavně o složitější model kontaktní-Hertzovy tuhosti dle vztahu (2.32), případně provést rešerši modelu uvažujícího deformaci zubů, což je naznačeno v práci *Mesh stiffness model for spur gear with opening crack considering deflection* [53] pro vzorky s trhlinou. To by mohlo vést k dalšímu zpřesnění modelu DE.
- v) **Ocelové vzorky** - Dalším krokem je samozřejmě také návrat zpět k původním ocelovým vzorkům. Zde je stále problém s kontrolou bodu záběru a s manipulací se závažími. Tyto problémy by mohly být odstraněny přechodem na běhovou zkoušku.

## 9 Závěr

Tato diplomová práce byla vypracována na základě cílů uvedených v zadání práce.

Tyto cíle se v první řadě týkají rešerše problematiky analytického a simulačního modelování tuhosti ozubení, a také experimentálního stanovení tuhosti ozubení. Druhým z cílů je popis experimentálního stanoviště, sady vzorků a nástrojů pro práci s daty. Dalším cílem je pak využití analytických a simulačních modelů ke stanovení tuhosti ozubení za účelem verifikace výsledků experimentu. Posledním z cílů je vyhodnocení všech získaných dat a na základě toho stanovit vyhodnocení a závěry experimentu.

V rámci teoretické části práce byla provedena rešerše analytických a simulačních modelů. Byl věnován důraz především na model deformační energie (kapitola 2.4.1), který se už od začátku vypracování jevil jako velmi vhodný nástroj pro verifikaci experimentu. V rámci rešerše experimentálních metod je kladen důraz na statické zkoušky prováděné jak na ocelových vzorcích, tak na vzorcích z plexiskla.

V praktické části práce byl hned v úvodu popsán měřicí stand a způsob, jakým je na něm tuhost měřena. Byla také popsána sada vzorků připravených k měření. Na tento úvod navázala velmi rozsáhlá kapitola týkající se přípravy experimentu, ve které byly využity všechny analytické a simulační metody stanovení tuhosti popsané v teoretické části práce. Obsahuje detailní popis modelu DE (doplněno v Příloze 1 o vyjádření vztahů) a kompletní nastavení simulačního MKP modelu - Abaqus.

Následně bylo nutné vytvořit nástroje pro zpracování experimentálně zjištěných dat, a také nástroje pro porovnání experimentálních dat s verifikačními modely (model DE, model KISSsoft a MKP model - Abaqus).

Experimentální část je zaměřena na podrobný popis provedeného měření a stanovení metodiky měření. Dále vyhodnocení rozdílů mezi různě širokými vzorky, porovnáním různě korigovaných vzorků a porovnáním vzorků s verifikačními modely. V závěru této části je rovněž zařazena kapitola 8.5, která je zaměřena na zhodnocení jednotlivých modelů. Nakonec je uvedena kapitola 8.6 obsahující doporučení pro vylepšení experimentu.

## Seznam literatury

1. ŠVEC, Vladimír. *Části a mechanismy strojů: Mechanické převody*. 1. vydání. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1999. ISBN 80-01-01934-9.
2. ŠALAMOUN, Čestmír; SUCHÝ, Miloš. *Čelní a šroubová soukolí s evolventním ozubením*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1990. ISBN 80-030-0532-9.
3. MORAVEC, Vladimír. *Konstrukce strojů a zařízení II. čelní ozubená kola : teorie, výpočet, konstrukce, výroba, kontrola*. První. Ostrava: Montanex, 2001. ISBN 80-722-5051-5.
4. YU, Wennian; SHAO, Yimin; MECHEFSKE, Chris K. The effects of spur gear tooth spatial crack propagation on gear mesh stiffness. *Engineering Failure Analysis*. 2015, roč. 54, s. 103–119. ISSN 1350-6307. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2015.04.013>.
5. SÁNCHEZ, Miryam B.; PLEGUEZUELOS, Miguel; PEDRERO, José I. Approximate equations for the meshing stiffness and the load sharing ratio of spur gears including hertzian effects. *Mechanism and Machine Theory*. 2017, roč. 109, s. 231–249. ISSN 0094-114X. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2016.11.014>.
6. *ISO 6336-1-2006 Calculation of load capacity of spur and helical gears–Part 1: Basic principles, introduction and general influence factors*. Standard. International Organization for Standardization.
7. *ISO 53:1998(E): Cylindrical gears for general and heavy engineering - Standard basic rack tooth profile*. Second edition. Switzerland: ISO, 1998.
8. WAN, Zhiguo; CAO, Hongrui; ZI, Yanyang; HE, Wangpeng; HE, Zhengjia. An improved time-varying mesh stiffness algorithm and dynamic modeling of gear-rotor system with tooth root crack. *Engineering Failure Analysis*. 2014, roč. 42, s. 157–177. ISSN 1350-6307. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2014.04.005>.

9. TIAN, Xinhao. Dynamic simulation for system response of gearbox including localized gear faults. 2004.
10. LIANG, Xihui; ZUO, Ming J.; PANDEY, Mayank. Analytically evaluating the influence of crack on the mesh stiffness of a planetary gear set. *Mechanism and Machine Theory*. 2014, roč. 76, s. 20–38. ISSN 0094-114X. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2014.02.001>.
11. YU, Wennian; MECHEFSKE, Chris. A New Model for the Single Mesh Stiffness Calculation of Helical Gears Using the Slicing Principle. *Iranian Journal of Science and Technology: Transactions of Mechanical Engineering*. 2018, roč. 43. Dostupné z DOI: [10.1007/s40997-018-0173-x](https://doi.org/10.1007/s40997-018-0173-x).
12. FLEK, Jan; DUB, Martin; KOLÁŘ, Josef; LOPOT, František; PETR, Karel. Determination of Mesh Stiffness of Gear—Analytical Approach vs. FEM Analysis. *Applied Sciences*. 2021, roč. 11, č. 11. ISSN 2076-3417. Dostupné z DOI: [10.3390/app11114960](https://doi.org/10.3390/app11114960).
13. DAI, He; LONG, Xinhua; CHEN, Feng; XUN, Chao. An improved analytical model for gear mesh stiffness calculation. *Mechanism and Machine Theory*. 2021, roč. 159, s. 104262. ISSN 0094-114X. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2021.104262>.
14. YANG, Hongbo; SHI, Wenku; CHEN, Zhiyong; GUO, Niancheng. An improved analytical method for mesh stiffness calculation of helical gear pair considering time-varying backlash. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2022, roč. 170, s. 108882. ISSN 0888-3270. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2022.108882>.
15. YANG, Yi; TANG, Jinyuan; HU, Niaoqing; SHEN, Guoji; LI, Yuehao; ZHANG, Lun. Research on the time-varying mesh stiffness method and dynamic analysis of cracked spur gear system considering the crack position. *Journal of Sound and Vibration*. 2023, roč. 548, s. 117505. ISSN 0022-460X. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2022.117505>.
16. YU, Xin; SUN, Yunyun; LI, Hongguang; WU, Shijing. An improved meshing stiffness calculation algorithm for gear pair involving fractal contact stiffness based on dynamic contact force. *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 2022, roč. 94, s. 104595. ISSN 0997-7538. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104595>.

17. YANG, D. C. H.; SUN, Z. S. A Rotary Model for Spur Gear Dynamics. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*. 1985, roč. 107, č. 4, s. 529–535. ISSN 0738-0666. Dostupné z DOI: [10.1115/1.3260759](https://doi.org/10.1115/1.3260759).
18. CHEN, Zaigang; SHAO, Yimin. Dynamic simulation of spur gear with tooth root crack propagating along tooth width and crack depth. *Engineering Failure Analysis*. 2011, roč. 18, č. 8, s. 2149–2164. ISSN 1350-6307. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2011.07.006>.
19. WAN, Zhiguo; CAO, Hongrui; ZI, Yanyang; HE, Wangpeng; CHEN, Yimin. Mesh stiffness calculation using an accumulated integral potential energy method and dynamic analysis of helical gears. *Mechanism and Machine Theory*. 2015, roč. 92, s. 447–463. ISSN 0094-114X. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2015.06.011>.
20. MA, Hui; ZENG, Jin; FENG, Ranjiao; PANG, Xu; WEN, Bangchun. An improved analytical method for mesh stiffness calculation of spur gears with tip relief. *Mechanism and Machine Theory*. 2016, roč. 98, s. 64–80. ISSN 0094-114X. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2015.11.017>.
21. MA, Hui; LI, Zhanwei; FENG, Mengjiao; FENG, Ranjiao; WEN, Bangchun. Time-varying mesh stiffness calculation of spur gears with spalling defect. *Engineering Failure Analysis*. 2016, roč. 66, s. 166–176. ISSN 1350-6307. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2016.04.025>.
22. FENG, Mengjiao; MA, Hui; LI, Zhanwei; WANG, Qibin; WEN, Bangchun. An improved analytical method for calculating time-varying mesh stiffness of helical gears. *Meccanica*. 2018, roč. 53, č. 4, s. 1131–1145. ISSN 1572-9648. Dostupné z DOI: [10.1007/s11012-017-0746-6](https://doi.org/10.1007/s11012-017-0746-6).
23. RAGHUWANSHI, Naresh K.; PAREY, Anand. Mesh stiffness measurement of cracked spur gear by photoelasticity technique. *Measurement*. 2015, roč. 73, s. 439–452. ISSN 0263-2241. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2015.05.035>.
24. WEBER, C; BANASCHEK, K. Formänderung und Profilirücknahme bei Gerad-und Schrägverzahnten Antriebstechnik. *Vieweg, Braunschweig*. 1953, roč. 11, č. 4.



25. SAINSOT; VELEX, P.; DUVERGER, O. Contribution of Gear Body to Tooth Deflections—A New Bidimensional Analytical Formula. *Journal of Mechanical Design*. 2004, roč. 126, č. 4, s. 748–752. ISSN 1050-0472. Dostupné z DOI: 10.1115/1.1758252.
26. CHEN, Zaigang; SHAO, Yimin. Dynamic simulation of spur gear with tooth root crack propagating along tooth width and crack depth. *Engineering Failure Analysis*. 2011, roč. 18, č. 8, s. 2149–2164. ISSN 1350-6307. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2011.07.006>.
27. LI, Zufeng; ZHU, Caichao; LIU, Huaiju; GU, Zonglin. Mesh stiffness and nonlinear dynamic response of a spur gear pair considering tribo-dynamic effect. *Mechanism and Machine Theory*. 2020, roč. 153, s. 103989. ISSN 0094-114X. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2020.103989>.
28. KADEŘÁBEK, Petr. *Návrh testovacího stavu pro identifikaci tuhosti ozubení*. Praha, 2022. Dostupné také z: <http://hdl.handle.net/10467/103811>. Bakalářská práce. České vysoké učení technické v Praze.
29. *KISSsoft - User manual*. 2023. Dostupné také z: <https://www.kisssoft.com/en/products/technical-description/brochures/kisssoft-release-2023-user-manual>.
30. *KISSsoft - Contact analysis*. Schweiz, 2015.
31. FLEK, Jan. *ČMS II - Ozubené převody*. Praha, 2023. Dostupné také z: <https://moodle-vyuka.cvut.cz/>.
32. ZHAN, Jiaying; FARD, Mohammad; JAZAR, Reza. A CAD-FEM-QSA integration technique for determining the time-varying meshing stiffness of gear pairs. *Measurement*. 2017, roč. 100, s. 139–149. ISSN 0263-2241. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2016.12.056>.
33. FLEK, Jan; KARAS, Tomáš; DUB, Martin; LOPOT, František; KOLÁŘ, Josef. *Experimentální verifikace teoretických modelů tuhosti ozubení*. Ústí nad Labem: EVM, 2023. ISBN 978-80-7561-411-7.
34. KARPAT, Fatih; YUCE, Celalettin; DOĞAN, Oğuz. Experimental measurement and numerical validation of single tooth stiffness for involute spur gears. *Measurement*. 2020, roč. 150, s. 107043. ISSN 0263-2241. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2019.107043>.

35. WU, Siyan; ZUO, Ming J.; PAREY, Anand. Simulation of spur gear dynamics and estimation of fault growth. *Journal of Sound and Vibration*. 2008, roč. 317, č. 3, s. 608–624. ISSN 0022-460X. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.03.038>.
36. PANDYA, Yogesh; PAREY, Anand. Experimental investigation of spur gear tooth mesh stiffness in the presence of crack using photoelasticity technique. *Engineering Failure Analysis*. 2013, roč. 34, s. 488–500. ISSN 1350-6307. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2013.07.005>.
37. RAGHUWANSHI, Naresh K.; PAREY, Anand. Experimental measurement of gear mesh stiffness of cracked spur gear by strain gauge technique. *Measurement*. 2016, roč. 86, s. 266–275. ISSN 0263-2241. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2016.03.001>.
38. RAGHUWANSHI, Naresh K.; PAREY, Anand. Experimental measurement of spur gear mesh stiffness using digital image correlation technique. *Measurement*. 2017, roč. 111, s. 93–104. ISSN 0263-2241. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2017.07.034>.
39. RAGHUWANSHI, Naresh K.; PAREY, Anand. Experimental measurement of mesh stiffness by laser displacement sensor technique. *Measurement*. 2018, roč. 128, s. 63–70. ISSN 0263-2241. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2018.06.035>.
40. RAGHUWANSHI, Naresh K.; PAREY, Anand. A New Technique of Gear Mesh Stiffness Measurement Using Experimental Modal Analysis. *Journal of Vibration and Acoustics*. 2019, roč. 141, č. 2. ISSN 1048-9002. Dostupné z DOI: [10.1115/1.4042100](https://doi.org/10.1115/1.4042100). 021018.
41. KONG, Yiyi; JIANG, Hong; DONG, Ning; SHANG, Jun; YU, Pengfei; LI, Jun; YU, Manhua; CHEN, Lan. Analysis of Time-Varying Mesh Stiffness and Dynamic Response of Gear Transmission System with Pitting and Cracking Coupling Faults. *Machines*. 2023, roč. 11, č. 4. ISSN 2075-1702. Dostupné z DOI: [10.3390/machines11040500](https://doi.org/10.3390/machines11040500).
42. SUN, Zhou; TANG, Jinyuan; CHEN, Siyu; CHEN, Yafeng; HU, Zehua; WANG, Zhiwei; LU, Rui; CHEN, Xiaoqi. Mesh stiffness and dynamic response analysis of modified gear system with thin web and weight reduction holes. *Journal of Sound and Vibration*. 2023, roč. 546, s. 117437. ISSN 0022-460X. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2022.117437>.

43. NEUSSER, Zdenek; SOPOUCH, Martin; SCHAFFNER, Thomas; PRIEBSCH, Hans-Herwig. Multi-body dynamics based gear mesh models for prediction of gear dynamics and transmission error. *SAE Technical Paper*. 2010, s. 01–0897.
44. *Lineární magnetické pravítko TMLS-05S-02-270* [online]. [cit. 2023-06-15]. Dostupné z: <https://www.odmerovani.cz/linearni-magneticke-pravitko-tmls-05s-02>.
45. INTELLIGENCE, SICK Sensor. *Inkrementální enkodér DFS60 Inox* [online]. [cit. 2023-09-05]. Dostupné z: <https://www.sick.com/cz/cs/encodery/inkrementalni-enkoder/dfs60-inox/c/g354652>.
46. *Schéma IRC snímače*. [B.r.]. Dostupné také z: <https://eltra-trade.com/blog/encoder-working-principle>.
47. ZENIT. *Plexiglas - prospekt* [online]. [cit. 2023-06-09]. Dostupné z: [http://www.zenit.cz/public/media/Plasty/Zenit\\_Prospekt\\_Plasy\\_Plexiglas\\_CZ.pdf](http://www.zenit.cz/public/media/Plasty/Zenit_Prospekt_Plasy_Plexiglas_CZ.pdf).
48. *Materiálové vlastnosti PMMA materiálu - Acrylic, Extruded* [online]. [cit. 2023-02-24]. Dostupné z: <https://www.matweb.com>.
49. CHEN, W.; LU, F.; CHENG, M. Tension and compression tests of two polymers under quasi-static and dynamic loading. *Polymer Testing*. 2002, roč. 21, č. 2, s. 113–121. ISSN 0142-9418. Dostupné z DOI: [https://doi.org/10.1016/S0142-9418\(01\)00055-1](https://doi.org/10.1016/S0142-9418(01)00055-1).
50. WU, Hengyi; MA, Gang; XIA, Yuanming. Experimental study of tensile properties of PMMA at intermediate strain rate. *Materials Letters*. 2004, roč. 58, č. 29, s. 3681–3685. ISSN 0167-577X. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matlet.2004.07.022>.
51. SLAVÍK, Jaromír; STEJSKAL, Vladimír; ZEMAN, Vladimír. *Základy dynamiky strojů*. Praha: České vysoké učení technické, 1997. ISBN 80-010-1622-6.
52. ŘEZNÍČEK, Jan. *Experimentální metody certifikace strojů*. Praha, 2015. Dostupné také z: <http://pruznost.unas.cz/>.
53. LIU, Yinghui; SHI, Zhanqun; LIU, Xiaoang; CHENG, Zhe; ZHEN, Dong; GU, Fengshou. Mesh stiffness model for spur gear with opening crack considering deflection. *Engineering Failure Analysis*. 2022, roč. 139, s. 106518. ISSN 1350-6307. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2022.106518>.

## Seznam obrázků

1	Tuhost jednoho páru zubů, převzato a upraveno z [2] . . . . .	5
2	Tuhost dvou páru zubů, převzato a upraveno z [2] . . . . .	6
3	Namáhání zubu jakožto vetknutého nosníku, převzato a upraveno z [10]	10
4	Schéma zubu uvažovaného jako nosník vetknutý v místě patní kružnice, převzato a upraveno z [14] . . . . .	13
5	Průběh poměru rozložení sil na $i$ -tém zubu ( $LSR_i$ ), převzato a upraveno z [23] . . . . .	15
6	Schéma pro model ovlivněné oblasti pod patní kružnicí, převzato a upraveno z [15] . . . . .	17
7	Rozdíl výpočtového modelu KISSsoft a normy ISO 6336, převzato z [30] . . . . .	19
8	Celková deformace jednoho páru zubů, převzato a upraveno z [31] . .	19
9	Schéma pro výpočet ohybové deformace, převzato z [30] . . . . .	21
10	Schéma pro výpočet naklopení, převzato z [30] . . . . .	21
11	Schéma pro výpočet stlačení boků zubů Hertzovými tlaky, převzato z [30] . . . . .	22
12	Schéma MKP modelu, převzato a upraveno z [32] . . . . .	23
13	Ukázka vhodného nastavení hustoty sítě, převzato a upraveno z [33] .	24
14	Průběh tuhosti vypočten MKP metodou, převzato a upraveno z [32] .	24
15	Schéma MKP modelu, převzato a upraveno z [22] . . . . .	25
16	Schéma měřicího standu, převzato a upraveno z [34] . . . . .	27
17	Ukázka vzorků, převzato z [34] . . . . .	27
18	Schéma pro model s trhlinou, převzato z [35] . . . . .	28
19	Zatěžování zkušebního disku, převzato z [36] . . . . .	29
20	Lineární regrese lomového řádu $N$ , převzato a upraveno z [36] . . . .	29
21	Stand pro měření tuhosti ozubení pomocí fotoelasticimetrie, převzato a upraveno z [23] . . . . .	31
22	Grafy porovnávající měřenou tuhost s AM, převzato a upraveno z [23]	31

23	Výsledné grafy porovnávající tuhost měřenou pomocí tenzometrie a AM, převzato a zpraveno z [37] . . . . .	33
24	Nátěr kol s náhodně umístěnými body, převzato a upraveno z [38] . .	34
25	Stand pro metodu měření s využitím DIC, převzato a upraveno z [38]	34
26	Tuhost změřená metodou DIC, AM a MKP, převzato a upraveno z [38]	35
27	Schéma umístění LDS a reflektoru, převzato a upraveno z [39] . . . .	36
28	Grafy průběhu tuhosti změřených pomocí LDS a MKP modelu, převzato a upraveno z [39] . . . . .	37
29	Ukázka vzorků pro porovnání s AM, převzato a upraveno z [37, 38] .	38
30	Stand pro měření vlivu poškození zubů, převzato a upraveno z [41] . .	39
31	Měřicí stand, převzato z [28] . . . . .	41
32	Zjednodušené schéma zatěžování . . . . .	42
33	Schéma IRC, z [46] . . . . .	43
34	Připojení IRC, z [28] . . . . .	43
35	Blokové schéma měřicího standu . . . . .	44
36	Fotografie měřicího standu . . . . .	45
37	Fotografie měřicího standu - pohled shora . . . . .	45
38	Měřicí prostředí LabVIEW . . . . .	46
39	Blokové schéma LabVIEW . . . . .	47
40	Ukázka sady vzorků . . . . .	48
41	Odstupňování řady vzorků . . . . .	48
42	Tahový diagram, převzato a upraveno z [49] . . . . .	51
43	Tahový diagram, převzato a upraveno z [50] . . . . .	51
44	Průběh celkové tuhosti ozubení - ISO model, převzato z [51] . . . . .	53
45	Průběh celkové tuhosti ozubení - ISO model . . . . .	53
46	Nastavení soukolí a materiálu v softwaru KISSsoft . . . . .	54
47	Průběh tuhostí - Model KISSsoft . . . . .	55
48	Průběhy deformací - Model KISSsoft . . . . .	55
49	MKP analýza v KISSsoftu pro návrh vhodného závaží . . . . .	56
50	Schéma zubu uvažovaného jako nosník vetknutý v místě základní kružnice, převzato a upraveno z [9] . . . . .	57
51	Zavedení označení důležitých bodů a úhlů, převzato a upraveno z [9] .	58
52	Schéma pro výpočet $u_f$ , převzato a upraveno z [10] . . . . .	61
53	Průběhy tuhosti pro vzorky $a_w = 174,5mm$ , $a_w = 176mm$ a $a_w = 182mm$ . . . . .	62
54	Schéma postupu výpočtu modelu deformační energie . . . . .	62



55	Ukázka modelu importovaného do softwaru Abaqus a spojeného v kartě „Assembly“ . . . . .	64
56	Ukázka nastavení hustoty sítě na hranách . . . . .	65
57	Příklad vysítovaného kola . . . . .	66
58	Nastavení interakcí . . . . .	67
59	Nastavení „Surface to Surface“ kontaktu . . . . .	68
60	Vykreslení průběhů natočení . . . . .	71
61	Vykreslení průběhu úhlové deformace $\delta$ . . . . .	71
62	Vykreslení průběh u tuhosti $c$ . . . . .	72
63	Diagram postupu práce s měřeními daty . . . . .	73
64	Příklad vykreslení zvolených datových řad . . . . .	75
65	Příklad vytvořeného „Boxplotu“ . . . . .	75
66	Diagram funkce nástroje „Vyhledávač středu“ . . . . .	76
67	Příklad vykreslení zvolených průběhů . . . . .	77
68	Příklad vykreslení zvolených průběhů . . . . .	77
69	Ustavení vzorků, obrázky převzaty z [28] . . . . .	80
70	Srovnání šířek zubů . . . . .	80
71	Rozlišení typu záběru pomocí polariskopu . . . . .	82
72	Jednoduchý polariskop . . . . .	83
73	Ukázka bodu záběru v přechodné oblasti . . . . .	85
74	Chování kontaktních ploch pod zatížením . . . . .	86
75	Vhodně zvolený zatěžovací cyklus . . . . .	87
76	Ukázka zlomeného zubu . . . . .	87
77	Graf průběhu tuhosti v závislosti na zatížení (Vzorky $b = 5 \text{ mm}$ ) . . . . .	92
78	Graf průběhu tuhosti v závislosti na zatížení (Vzorky $b = 8 \text{ mm}$ ) . . . . .	92
79	Průběh mediánové tuhosti s průběhy pro jednotlivá závaží (vzorek $a_w = 174,5 \text{ mm}$ , $b = 5 \text{ mm}$ ) . . . . .	93
80	Porovnání mediánové tuhosti vzorků se šířkou $b = 5 \text{ mm}$ . . . . .	94
81	Porovnání mediánové tuhosti vzorků se šířkou $b = 8 \text{ mm}$ . . . . .	94
82	Porovnání mediánové tuhosti vzorků $a_w = 174,5 \text{ mm}$ . . . . .	96
83	Kontaktní bod v přechodné oblasti - $a_w = 174,5 \text{ mm}$ . . . . .	98
84	Porovnání mediánové tuhosti vzorků $a_w = 176 \text{ mm}$ . . . . .	100
85	Kontrola pomocí fotografií záběru a kontaktní plochy - $a_w = 176 \text{ mm}$ . . . . .	101
86	Porovnání mediánové tuhosti vzorků $a_w = 182 \text{ mm}$ . . . . .	103
87	Kontrola pomocí fotografií záběru a kontaktní plochy . . . . .	104
88	Porovnání vzorků s rozdílnou jednotkovou korekcí - $b = 5 \text{ mm}$ . . . . .	105

89	Porovnání vzorků s rozdílnou jednotkovou korekcí - $b = 8 \text{ mm}$ . . . . .	106
90	Porovnání průběhů tuhosti z MKP modelu - Abaqus . . . . .	107
91	Porovnání průběhů tuhosti z modelu KISSsoft . . . . .	108

## Seznam tabulek

2.1	Konstanty pro model ISO 6336-1-2006, převzato z [6] . . . . .	7
2.2	Koeficienty $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i$ a $G_i$ pro výpočet deformace paty zubu, převzato z [25] . . . . .	17
3.1	Vliv úhlu $\alpha$ na tuhost zubu, převzato z [34] . . . . .	27
3.2	Optická citlivost materiálu $f_\sigma$ , převzato z [36] . . . . .	30
3.3	Porovnání průměru naměřených hodnot s AM, převzato z [37] . . . . .	33
3.4	Porovnání naměřených hodnot s AM a MKP, převzato z [38] . . . . .	35
3.5	Porovnání naměřených hodnot s MKP, převzato z [39] . . . . .	36
4.1	Základní parametry ozubených vzorků . . . . .	49
4.2	Materiálové vlastnosti pro materiál Plexiglas® , převzato z [47] . . . . .	50
5.1	Materiálové vlastnosti pro Plexiglas® , převzato z [47] . . . . .	66
5.2	Tabulka nastavení jednotlivých kroků . . . . .	67
5.3	Nastavení jednotlivých okrajových podmínek . . . . .	69
5.4	Přiřazení okrajových podmínek k jednotlivým krokům . . . . .	70
5.5	Příklad datového setu . . . . .	73
8.1	Vybrané reprezentační Vzorky . . . . .	91
8.2	Porovnání dat pro vzorek s $a_w = 174,5 \text{ mm}$ . . . . .	97
8.3	Porovnání dat pro vzorek s $a_w = 176 \text{ mm}$ . . . . .	99
8.4	Porovnání dat pro vzorek s $a_w = 182 \text{ mm}$ . . . . .	102
8.5	Porovnání dat pro vzorky se šířkou $b = 5 \text{ mm}$ . . . . .	105
8.6	Porovnání dat pro vzorky se šířkou $b = 8 \text{ mm}$ . . . . .	106
8.7	Porovnání dat z MKP modelu - Abaqus . . . . .	107

# Seznam příloh

Příloha 1

# Seznam použitého softwaru

Abaqus CAE

Autodesk Inventor 2020

MathWorks MATLAB

KISSsoft AG

Adobe Illustrator

Overleaf  $\LaTeX$  editor