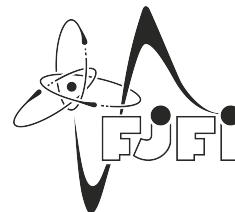




ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



Aplikace optimalizačních metod na vývoj procesů řízených parciálními diferenciálními rovnicemi

Controlling Processes Governed by Partial Differential Equations using Optimization Methods

Bakalářská práce

Autor: **Jan Plecháček**

Vedoucí práce: **Ing. Aleš Wodecki**

Akademický rok: 2022/2023

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student:	Jan Plecháček
Studijní program:	Aplikace přírodních věd
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Studijní zaměření:	Aplikované matematicko-stochastické metody
Název práce (česky):	Aplikace optimalizačních metod na vývoj procesů řízených parciálními diferenciálními rovnicemi
Název práce (anglicky):	Controlling Processes Governed by Partial Differential Equations using Optimization Methods

Pokyny pro vypracování:

- 1) Proveďte rešerši optimalizačních metod týkajících se minimalizace funkcionálu s nekonečně dimenzionální vazbou.
- 2) Formulujte minimalizační úlohu pro rovnici vedení tepla. Odvoďte adjungovanou formulaci úlohy.
- 3) Představte numerickou metodu, která řeší minimalizační úlohu.
- 4) Implementujte numerickou metodu a vyhodnoťte výsledky.

Doporučená literatura:

- 1) M. Hinze, R. Pinnau, M. Ulbrich, and S. Ulbrich, Optimization with PDE Constraints. Springer, 2009.
- 2) L. Blank, H. Garcke, L. Sarbu, T. Srisupattarawanit, V. Styles, and A. Voigt, Phase-field approaches to structural topology optimization. In Constrained Optimization and Optimal Control for Partial Differential Equations, International Series of Numerical Mathematics vol. 160, pp. 245--256, Springer, 2012.
- 3) J. Gao, B. Song, and Z. Mao, Combination of the phase field method and beso method for topology optimization. Struct. Multidisc. Optim. 61 (2020), pp. 225-237.

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

Ing. Aleš Wodecki

Katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze, Trojanova 13, 120 00 Praha 2

Jméno a pracoviště konzultanta:

Datum zadání bakalářské práce: 31.10.2021

Datum odevzdání bakalářské práce: 7.7.2022

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

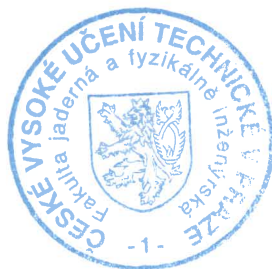
V Praze dne 21. října 2021

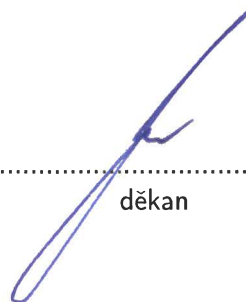


.....
garant oboru



.....
vedoucí katedry





.....
děkan

Poděkování:

Chtěl bych zde poděkovat především svému školiteli Alešovi Wodecki za ochotu, vstřícnost a odborné i lidské zázemí při vedení mé bakalářské práce.

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a uvedl jsem veškerou použitou literaturu.

V Praze dne 2. srpna 2023

Jan Plecháček

Název práce:

Aplikace optimalizačních metod na vývoj procesů řízených parciálními diferenciálními rovnicemi

Autor: Jan Plecháček

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Aplikované matematicko-stochastické metody

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. Aleš Wodecki, České vysoké učení technické v Praze, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, Katedra matematiky

Abstrakt: Tato práce se zabývá problematikou minimalizačních úloh s nekonečně dimenzionální vazbou danou parciálními diferenciálními rovnicemi. Nejprve jsou studovány Banachovy a Hilbertovy prostory, na kterých je následně formulována typová minimalizační úloha. Jsou diskutovány možnosti jejího řešení pomocí citlivostní a adjungované metody a nalezeny nutné podmínky optimálního řešení této úlohy. Následně je adjungovaná metoda použita při optimalizaci Dirichletovy okrajové podmínky v počáteční a okrajové úloze pro rovnici vedení tepla a je představen numerický algoritmus založený na metodě gradientního sestupu řešící tuto úlohu.

Klíčová slova: adjungovaná metoda, metoda gradientního sestupu, optimalizace okrajové podmínky, rovnice vedení tepla

Title:

Controlling Processes Governed by Partial Differential Equations using Optimization Methods

Author: Jan Plecháček

Abstract: This Bachelor project deals with PDE constrained optimization problems. Firstly, the minimization problem with infinite dimensional constrain is defined. The necessary condition for this problem is formulated and the possibilities of its solving using the sensitivity and the adjoint approach are discussed. Further, the adjoint approach is applied to controlling process governed by heat equation and the numerical method solving this task is introduced.

Key words: adjoint method, controlling processes, gradient descent method, heat equation

Obsah

Úvod	7
1 Matematický aparát	8
1.1 Topologické prostory	8
1.2 Vybrané příklady Banachových prostorů	12
1.3 Derivace na normovaných prostorech	14
2 Optimalizační teorie	18
2.1 Minimalizační úloha	18
2.2 Citlivostní a adjungovaná metoda	21
2.3 Optimalizace Dirichletovy okrajové podmínky	23
3 Numerická metoda	33
3.1 Metoda konečných diferencí	33
3.2 Metoda gradientního sestupu	35
3.3 Lichoběžníková formule	37
3.4 Numerická implementace	38
4 Numerická studie	43
4.1 Vliv regularizace a finálního času na optimální řešení	44
4.2 Spojitý požadovaný profil	53
4.3 Nespojité požadovaný profil	55
4.4 Optimalizace chladicího procesu	61
Závěr	67

Úvod

Pomocí parciálních diferenciálních rovnic a jejich soustav lze matematicky popsat chování a vývoj mnoha přírodních systémů a procesů, jakými jsou například šíření tepla a elektromagnetických vln, difúze chemických látek či proudění kapalin [1, 2, 3, 4]. V mnoha aplikacích je žádoucí nejen pouhé predikování průběhu takovýchto procesů, nýbrž i jejich řízení [5, 6, 7, 8]. Jako příklad zde uveďme optimalizaci chladicího procesu při výrobě vysoce kvalitních optických materiálů jako jsou čočky pro laserovou optiku či zrcadla používaná pro vesmírné dalekohledy [5, 9]. Pro zajištění kvality materiálu je důležité, aby pokles teploty během chlazení byl pozvolný a prostorově homogenní. Dalším příkladem je optimalizace tvaru předmětu obtékaného viskózní kapalinou s cílem minimalizovat odpor prostředí, jejíž aplikaci nalezneme kupříkladu ve vývoji závodních plavidel [10]. V medicíně jsou zase používány modely fázového pole k usměrňování růstu nádorů [11, 12].

Cílem této práce je provést optimalizaci Dirichletovy okrajové podmínky v počáteční a okrajové úloze pro rovnici vedení tepla a implementovat numerickou metodu řešící tuto úlohu.

V první kapitole shrneme základní pojmy z teorie topologických prostorů. Představíme pojem Fréchetovy derivace a vybrané příklady Banachových prostorů. Těchto poznatků využijeme ve druhé kapitole, ve které zformulujeme typovou minimalizační úlohu s nekonečně dimenzionální vazbou a budeme diskutovat možnosti jejího řešení. Následně odvodíme nutné podmínky pro optimální řízení počáteční a okrajové úlohy pro rovnici vedení tepla pomocí adjungované metody. Třetí kapitola představí numerické metody použité při řešení odvozené úlohy a v poslední kapitole budou prezentovány výsledky získané během numerických simulací.

Kapitola 1

Matematický aparát

Než se začneme zabývat samotnou optimalizační teorií, je třeba zavést základní pojmy z teorie topologických prostorů [13, 14]. Zaměříme se především na Banachovy a Hilbertovy prostory, jelikož právě s těmito prostory budeme pracovat při formulaci typové minimalizační úlohy s nekonečně dimenzionální vazbou.

1.1 Topologické prostory

Definice 1.1.1. Nechť je dána neprázdná množina X a *potenční* množina $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}$. Systém množin $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ splňující

- (1) $\emptyset, X \in \tau$,
- (2) $(\forall \mathcal{G} \subset \tau)(\bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau)$,
- (3) $(\forall \mathcal{F} \subset \tau, |\mathcal{F}| < \infty)(\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \in \tau)$

nazýváme *topologie* na X a uspořádanou dvojici (X, τ) *topologický* prostor. Prvky $A \in \tau$ se nazývají *otevřené* množiny.

Definice 1.1.2. Nechť (X, τ) je topologický prostor. Systém množin $c\tau = \{X \setminus A \mid A \in \tau\}$ nazýváme *kotopologie* na X a její prvky *uzavřené* množiny.

Poznámka. Kotopologie je uzavřená na libovolné průniky a konečná sjednocení.

Tvrzení 1.1.1. *Mějme (X, τ) topologický prostor, $M \subset X$. Pak*

- (1) *existuje největší otevřená množina G obsažená v M ,*
- (2) *existuje nejmenší uzavřená množina F obsahující M .*

Důkaz.

$$G = \bigcup_{\substack{A \in \tau, \\ A \subset M}} A \qquad F = \bigcap_{\substack{B \in c\tau, \\ B \supset M}} B$$

□

Definice 1.1.3. Uvažujme množiny G a F z předchozího tvrzení.

- (1) Množinu G nazýváme *vnitřek* množiny M a značíme M° .

(2) Množinu F nazýváme *uzávěr* množiny M a značíme \overline{M} .

(3) Množinu $\overline{M} \setminus M^\circ$ nazýváme *hranice* množiny M a značíme ∂M .

Definice 1.1.4. Necht' je dán topologický prostor (X, τ) , $x \in X$ a množina $U \subset X$. Potom U nazveme *okolím* bodu x , jestliže $x \in U^\circ$.

Důležitými topologickými prostory jsou kompaktní topologické prostory.

Definice 1.1.5. Buď (X, τ) topologický prostor. Systém otevřených množin $\mathcal{U} \subset \tau$ nazveme *otevřené pokrytí* X , právě když

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X.$$

Systém množin $\mathcal{U}' \subset \tau$ nazveme *otevřené podpokrytí* \mathcal{U} , právě tehdy když $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ a \mathcal{U}' je otevřené pokrytí X .

Definice 1.1.6. Topologický prostor (X, τ) se nazývá *kompaktní*, právě když každé otevřené pokrytí X má konečné otevřené podpokrytí.

Neprázdnou množinu $A \subset X$ nazveme *kompaktní*, pokud je topologický prostor (A, τ_A) kompaktní, kde $\tau_A := \{U \cap A \mid U \in \tau\}$.

Poznámka. Lze snadno nahlédnout, že systém τ_A z předchozí definice je skutečně topologií. Dvojici (A, τ_A) nazýváme topologický podprostor (X, τ) .

Poznámka. Je-li (\mathbb{R}^n, τ) topologický prostor se standardní topologií. Potom $A \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená [15].

Definice 1.1.7. Mějme topologické prostory (X, τ_X) a (Y, τ_Y) . Zobrazení $f: X \rightarrow Y$ je *spojité* právě tehdy, když

$$(\forall U \in \tau_Y)(f^{-1}(U) \in \tau_X).$$

Definice 1.1.8. Buď $X \neq \emptyset$ množina. Zobrazení $\rho: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ splňující

- (1) $(\forall x, y \in X)(\rho(x, y) = \rho(y, x))$,
- (2) $(\forall x, y, z \in X)(\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z))$,
- (3) $(\forall x, y \in X)(\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$

nazýváme *metrika* na X a uspořádanou dvojici (X, ρ) *metrický prostor*.

Definice 1.1.9. Buď (X, ρ) metrický prostor, $x \in X$, $r > 0$. Množinu

$$B_x(r) := \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$$

nazýváme *otevřenou koulí* se středem v x a poloměrem r .

Poznámka. Poznamenejme, že pojem otevřená koule může být poněkud zavádějící. Například pro *diskrétní metriku* na X definovanou pro $x, y \in X$ jako

$$\rho_d(x, y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

budou mít otevřené koule tvar

$$B_x(r) = \begin{cases} \{x\} & r \leq 1 \\ X & r > 1 \end{cases}$$

Tvrzení 1.1.2. *Mějme metrický prostor (X, ρ) a systém*

$$\tau = \left\{ \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B \mid \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} \right\}, \text{ kde } \mathcal{B} = \{B_x(r) \mid x \in X, r > 0\}.$$

Pak τ je topologií na X a nazýváme ji topologie indukovaná metrikou.

Na metrickém prostoru lze tedy vždy zavést topologii pomocí otevřených koulí, tudíž každý metrický prostor je zároveň prostorem topologickým. Naopak to však obecně neplatí.

Poznámka. Ve vektorovém prostoru \mathbb{R} lze topologii indukovat pomocí metriky

$$\rho(x, y) = |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Takovou topologii nazýváme *standardní topologie na \mathbb{R}* .

Poznámka. Na metrickém prostoru (X, ρ) díky tvrzení 1.1.2 zřejmě platí, že množina $U \subset X$ je otevřená právě tehdy, když

$$(\forall x \in U)(\exists r > 0)(B_x(r) \subset U).$$

Významnými metrickými prostory jsou prostory úplné. Pro zavedení úplnosti si nejprve musíme připomenout pojem cauchyovská posloupnost.

Definice 1.1.10. Necht (X, ρ) je metrický prostor. Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ nazveme *cauchyovskou*, právě tehdy když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(\rho(x_m, x_n) < \varepsilon).$$

Definice 1.1.11. Necht (X, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ *konverguje k $x \in X$* , právě tehdy když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\rho(x_n, x) < \varepsilon).$$

Poznámka. Z předchozích definic okamžitě vyplývá, že na metrickém prostoru je každá konvergentní posloupnost zároveň cauchyovská. Prostory, ve kterých jsou konvergence a cauchyovskost ekvivalentní, nazveme úplné.

Definice 1.1.12. Metrický prostor (X, ρ) se nazývá *úplný*, právě když každá cauchyovská posloupnost v X je konvergentní v X .

Tvrzení 1.1.3. *Necht (X, ρ_X) , (Y, ρ_Y) jsou úplné metrické prostory a $f: X \rightarrow Y$ je stejnoměrně spojitě na množině $U \subset X$. Potom existuje jednoznačné spojitě rozšíření f na \overline{U} .*

Důkaz. Lze nalézt například v [13]. □

Zabývat se topologickými a metrickými prostory obecně je však pro naše účely nadbytečné, jelikož všechny prostory, se kterými budeme později pracovat, budou mít lineární strukturu a půjde na nich zavést norma či dokonce skalární součin. Mluvíme pak o tzv. normovaných, resp. pre-Hilbertových prostorech.

Definice 1.1.13. Buď V vektorový prostor nad tělesem \mathbb{R} . Zobrazení $\|\cdot\|: V \rightarrow [0, \infty)$ s vlastnostmi

$$(1) (\forall x \in V)(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|),$$

$$(2) (\forall x, y \in V)(\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|),$$

$$(3) (\forall x \in V)(\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$$

nazýváme *norma* na V a uspořádanou dvojici $(V, \|\cdot\|)$ *normovaný* prostor.

Na normovaném prostoru $(V, \|\cdot\|)$ lze vždy zavést zobrazení

$$\rho(x, y) := \|x - y\| \quad \forall x, y \in V,$$

jež zjevně splňuje definici metriky 1.1.8. Takové ρ nazýváme *metrika indukovaná normou*. A tedy každý normovaný prostor je zároveň metrický.

Poznámka. Obecně však neplatí, že každý metrický prostor je normovaný. Jedním z problémů je, že metrický prostor nemusí mít lineární strukturu, která je pro zavedení normy nezbytná.

Definice 1.1.14. Buď V vektorový prostor nad tělesem \mathbb{R} . Zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ splňující

$$(1) (\forall x, y \in V)(\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle),$$

$$(2) (\forall x, y, z \in V)(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\langle x, \alpha y + z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle),$$

$$(3) (\forall x \in V)(\langle x, x \rangle \geq 0),$$

$$(4) (\forall x \in V)(\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0)$$

nazýváme *skalárním součinem* a uspořádanou dvojici $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *pre-Hilbertův* prostor.

Na pre-Hilbertově prostoru $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ lze zavést normu indukovanou skalárním součinem vztahem

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \forall x \in V$$

a tedy každý pre-Hilbertův prostor je normovaný. Opačně však tvrzení opět neplatí, tj. normovaný prostor nemusí být pre-Hilbertův. Mezi prostory tedy existuje striktní hierarchie (jednostranné vztahy):

$$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \text{ pre-Hilbertův} \Rightarrow (V, \|\cdot\|) \text{ normovaný} \Rightarrow (V, \rho) \text{ metrický} \Rightarrow (V, \tau) \text{ topologický}$$

Poznámka. Díky hierarchii máme všechny topologické a metrické pojmy (jako kompaktnost a úplnost) dobře zavedeny i na normovaných, resp. pre-Hilbertových prostorech.

Nyní můžeme přistoupit k definici Banachova a Hilbertova prostoru.

Definice 1.1.15. Úplný normovaný prostor se nazývá *Banachův* a úplný pre-Hilbertův prostor nazýváme *Hilbertův*.

Na závěr ještě zavedeme prostor omezených lineárních operátorů mezi normovanými prostory.

Definice 1.1.16. Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované prostory. Lineární zobrazení $A : X \rightarrow Y$ nazveme *omezené*, pokud existuje $c > 0$ takové, že pro $\forall x \in X$ platí

$$\|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X.$$

Množinu všech omezených lineárních zobrazení $A : X \rightarrow Y$ budeme značit $\mathcal{B}(X, Y)$.

Poznámka. $\mathcal{B}(X, Y)$ je normovaný prostor s normou

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y, \quad A \in \mathcal{B}(X, Y).$$

Tvrzení 1.1.4. *Nechť X a Y jsou normované prostory a $A : X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení. Potom platí, že*

$$A \text{ je omezené} \Leftrightarrow A \text{ je spojité.}$$

Důkaz. Lze nalézt například v [13]. □

Definice 1.1.17. Nechť X je normovaný prostor. Množinu všech spojitých lineárních funkcionalů $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme *duální prostor k X* a značíme jej X^* .

Věta 1.1.5 (Rieszův reprezentační teorém). *Nechť \mathcal{H} je Hilbertův prostor. Potom ke každému funkcionalu $\varphi \in \mathcal{H}^*$ existuje jediné $v \in \mathcal{H}$ takové, že*

$$\varphi(u) = \langle v, u \rangle \quad \forall u \in \mathcal{H}.$$

Důkaz. Nalezneme v [5]. □

Definice 1.1.18. Nechť X, Y jsou Banachovy prostory. Potom k operátoru $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ definujeme *duální operátor* $A^* \in \mathcal{B}(Y^*, X^*)$ vztahem

$$\langle A^*u, v \rangle_{X^*, X} = \langle u, Av \rangle_{Y^*, Y} \quad \forall u \in Y^*, v \in X,$$

kde značíme $\langle A^*u, v \rangle_{X^*, X} := A^*u(v)$.

Poznámka. Duálnímu operátoru se také říká *banachovsky adjungovaný operátor*.

Věta 1.1.6 (O adjungovaném operátoru). *Nechť \mathcal{H}_1 a \mathcal{H}_2 jsou Hilbertovy prostory a operátor $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Pak existuje právě jeden operátor $A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ takový, pro který platí*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle \quad \text{pro každé } x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2.$$

Důkaz. Důkaz je proveden v [13]. □

Definice 1.1.19. Operátor A^* z předchozí věty se nazývá (*hilbertovsky*) *adjungovaný operátor*.

1.2 Vybrané příklady Banachových prostorů

Uvažujme n -dimenzionální euklidovský prostor \mathbb{R}^n se standardní topologií a kompaktní podmnožinu $K \subset \mathbb{R}^n$. Zavedeme množinu funkcí spojitých na K

$$C(K) := \left\{ f : K \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ je spojité na } K \right\}.$$

Množina $C(K)$ je zřejmě vektorovým prostorem nad \mathbb{R} a zobrazení $\|\cdot\|_\infty : C(K) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definované vztahem

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in K} |f(x)| \quad \text{pro } \forall f \in C(K)$$

je normou na $C(K)$. Dvojice $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ tedy tvoří normovaný prostor.

Poznámka. Zobrazení $\|\cdot\|_\infty$ nazýváme *supremová norma*.

Věta 1.2.1. *Je-li $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní, pak normovaný prostor $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ je úplný, tedy Banachův.*

Důkaz. Důkaz lze nalézt například v [16]. □

Definice 1.2.1. Necht n je přirozené číslo. *Multiindexem α v n -dimenzionálním prostoru rozumíme uspořádanou n -tici čísel*

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n.$$

Označíme

$$|\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k.$$

Pak pro funkci $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definujeme

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Necht $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $k \in \mathbb{N}$. Označme množinu funkcí se spojitými parciálními derivacemi až do řádu k jako

$$C^k(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid D^\alpha f \text{ existuje a je spojitá na } \Omega \text{ pro všechna } |\alpha| \leq k \right\}.$$

Dále pro otevřenou a omezenou množinu Ω zavedeme označení

$$C^k(\overline{\Omega}) := \left\{ f \in C^k(\Omega) \mid D^\alpha f \text{ je stejnoměrně spojitá na } \Omega \text{ pro všechna } |\alpha| \leq k \right\}.$$

Poznámka. Pro funkce $f \in C^k(\overline{\Omega})$ lze podle tvrzení 1.1.3 derivace $D^\alpha f$ spojitě rozšířit na $\overline{\Omega}$ pro jakékoli $|\alpha| \leq k$.

Množina $C^k(\overline{\Omega})$ je vektorovým prostorem nad \mathbb{R} , na kterém lze zavést normu pomocí supremové normy následovně

$$\|f\|_{C^k} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_\infty \quad \text{pro } \forall f \in C^k(\overline{\Omega}).$$

Věta 1.2.2. *Dvojice $(C^k(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{C^k})$ tvoří Banachův prostor.*

Důkaz. Odkazujeme se na [5] či [14]. □

Posledním příkladem Banachova prostoru, který zde uvedeme, bude prostor všech lebesgueovskými integrabilních funkcí. Pro připomenutí pojmů z teorie míry a Lebesgueova integrálu lze nahlédnout například do [17]. Necht je dán prostor s Lebesgueovou mírou $(X, \mathcal{M}, \lambda)$ a $p \in \mathbb{N}$. Zavedeme lineární prostor

$$\mathcal{L}^p(X) := \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ je měřitelná a } \int_X |f(x)|^p d\lambda(x) < \infty \right\}.$$

Linearita $\mathcal{L}^p(X)$ prostoru plyne z Minkovského nerovnosti [17]. Zobrazení $|\cdot|_{\mathcal{L}^p(X)}: \mathcal{L}^p(X) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definované jako

$$|f|_{\mathcal{L}^p(X)} := \left(\int_X |f(x)|^p d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

bohužel není normou na $\mathcal{L}^p(X)$, neboť není splněn třetí bod v definici normy 1.1.13. Platí pouze

$$(\forall f \in \mathcal{L}^p(X))(|f|_{\mathcal{L}^p(X)} = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad \text{s. v. } x \in X).$$

Proto provedeme faktorizaci prostoru $\mathcal{L}^p(X)$ zavedením relace ekvivalence takové, že funkce nulové všude až na množině míry nula budeme ztotožňovat s nulovou funkcí.

Definice 1.2.2. Mějme $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$. Pak relaci \sim definujeme následovně:

$$f \sim g \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \quad \text{s. v. } x \in X.$$

Neboli f a g jsou v relaci, právě když se liší nanejvýš na množině míry nula.

Je snadné ověřit, že relace \sim je skutečně relací ekvivalence. Získáme faktorový prostor

$$L^p(X) := \mathcal{L}^p(X)_{|\sim} := \{[f] \mid f \in \mathcal{L}^p(X)\},$$

který je tvořený disjunktními třídami ekvivalence

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}^p(X) \mid g \sim f\}.$$

$L^p(X)$ již je normovaný prostor s normou $\|\cdot\|_{L^p(X)}$ definovanou jako

$$\|[f]\|_{L^p} := \left(\int_X |f(x)|^p d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall [f] \in L^p(X).$$

Poznámka. Definice L^p normy je korektní, neboť pro libovolné dva reprezentanty ze stejné třídy ekvivalence je hodnota Lebesgueova integrálu stejná.

Věta 1.2.3. Pro $p \in [1, \infty)$ tvoří dvojice $(L^p(X), \|\cdot\|_{L^p})$ Banachův prostor.

Důkaz. Důkaz je k nahlédnutí například v [16]. □

Poznámka. Speciálně na $L^2(X)$ prostoru lze zavést skalární součin

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_X \bar{f}(x)g(x) d\lambda(x) \quad \forall f, g \in L^2(X).$$

Důsledek 1.2.4. Prostor $(L^2(X), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2})$ je Hilbertův.

1.3 Derivace na normovaných prostorech

Jelikož při řešení typové optimalizační úlohy budeme pracovat s funkcionaly na nekonečně dimenzionálních Banachových prostorech, musíme pojem klasické derivace na \mathbb{R}^n zobecnit. Znění definic a vět byly čerpány z [5] a [14].

Definice 1.3.1. Necht jsou dány Banachovy prostory X a Y , neprázdná a otevřená množina $U \subset X$, $x \in U$, $h \in X$ a zobrazení $F : U \rightarrow Y$.

(1) Existuje-li limita

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + th) - F(x)}{t} \in Y,$$

nazýváme ji *směrová derivace* F v bodě x a ve směru h a značíme $\delta F(x; h)$.

- (2) F se nazývá *Gateauxově diferencovatelné* v bodě x , pokud má F v bodě x směrovou derivaci ve všech směrech $h \in X$ a zobrazení $DF(x) : X \rightarrow Y$ definované vztahem

$$DF(x)[h] = \delta F(x; h) \quad \forall h \in X$$

je lineární a omezené. $DF(x)$ pak nazýváme *Gateauxova derivace* F v bodě x .

- (3) F se nazývá *Fréchetově diferencovatelné* v bodě x , pokud je F Gateauxově diferencovatelné v x a platí

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|F(x+h) - F(x) - DF(x)[h]\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

V takovém případě $DF(x)$ nazýváme *Fréchetova derivace* F v bodě x a značíme ji $F'(x)$.

- (4) F se nazývá *Fréchetově diferencovatelné na V* , pokud je F Fréchetově diferencovatelné v každém bodě $x \in V$, kde $V \subset U$ je otevřená množina.

Poznámka. Skutečnost, že zobrazení F je Gateauxově diferencovatelné, resp. Fréchetově diferencovatelné, budeme označovat pouze G-diferencovatelné, resp. F-diferencovatelné.

Definice 1.3.2. Nechť X, Y, Z jsou Banachovy prostory a $F : X \times Y \rightarrow Z$. Dále nechť $b \in Y$ a $F_x : x \mapsto F(x, b)$. Pokud F_x má Fréchetovu derivaci v $a \in X$, potom operátor $F'_x(a)$ nazýváme *parciální Fréchetova derivace* F v bodě (a, b) podle x a značíme ji $F'_x(a, b)$. Analogicky definujeme parciální Fréchetovu derivaci F v bodě (a, b) podle y .

Tvrzení 1.3.1. Nechť $F : X \rightarrow Y$ je G-diferencovatelné na U , kde U okolí bodu $a \in X$. Pokud zobrazení $DF : U \rightarrow \mathcal{B}(X, Y)$ definované vztahem $x \mapsto DF(x)$ je spojité v bodě a , pak F je F-diferencovatelné v bodě a .

Důkaz. Můžeme najít v [14]. □

Zavedeme pojem spojité Fréchetovy diferencovatelnosti. V definici stačí požadovat existenci pouze Gateauxovy derivace a díky předchozímu tvrzení bude zajištěna i Fréchetova diferencovatelnost.

Definice 1.3.3. Nechť X, Y jsou Banachovy prostory, $U \subset X$ otevřená množina a zobrazení $F : X \rightarrow Y$ Gateauxově diferencovatelné v každém bodě $x \in U$. Potom F nazýváme *spojitě F-diferencovatelné* na U , pokud zobrazení $DF : U \rightarrow \mathcal{B}(X, Y)$ definované vztahem $x \mapsto DF(x)$ je spojité.

Nyní uvedeme několik poznatků o Fréchetových derivacích, které využijeme při výpočtech.

Tvrzení 1.3.2. Nechť X je Banachův prostor. Pokud funkcionál $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ má směrovou derivaci v nějakém bodě $x \in X$ a směru $s \in X$, potom platí

$$\delta F(x; s) = \frac{d}{dt} \left[F(x + ts) \right] \Big|_{t=0}$$

Důkaz. Zavedeme funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vztahem

$$f(t) := F(x + ts) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Potom můžeme psát

$$\delta F(x; s) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + ts) - F(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = f'(0) = \frac{d}{dt} \left[F(x + ts) \right] \Big|_{t=0}$$

□

Tvrzení 1.3.3. *Nechť $A \in \mathcal{B}(X, Y)$, kde X, Y jsou Banachovy prostory. Potom A je Fréchetově diferencovatelné na X a platí*

$$A'(x) = A \quad \forall x \in X.$$

Důkaz. Plyne přímo z definice Fréchetovy derivace. \square

Poznámka. Pro lineární zobrazení plyne analogické tvrzení pro směrovou derivaci. Tedy pokud $A: X \rightarrow Y$ je lineární, potom platí

$$\delta A(x; h) = A(h) \quad \forall x, h \in X.$$

Tvrzení 1.3.4. *Pokud $F: X \times Y \rightarrow Z$ zobrazení mezi Banachovými prostory je F -diferencovatelné v $(a, b) \in X \times Y$, pak i F_x a F_y jsou F -diferencovatelné v a , resp. b a platí:*

$$F'(a, b)[h_x, h_y] = F'_x(a, b)[h_x] + F'_y(a, b)[h_y].$$

Důkaz. Ukážeme, že $F_x: X \rightarrow Z$ je F -diferencovatelné v a . Pro libovolné $u \in X$ platí

$$\delta F_x(a; u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_x(a + tu) - F_x(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(a + tu, b) - F(a, b)}{t} = \delta F((a, b); (u, 0)).$$

Proto díky předpokladu F -diferencovatelnosti operátoru F v bodě (a, b) je zobrazení

$$F'_x(a) : u \mapsto \delta F_x(a; u)$$

lineární a omezené a zároveň

$$\frac{\|F_x(a + u) - F_x(a) - F'_x(a)[u]\|_Z}{\|u\|_X} = \frac{\|F(a + u, b) - F(a, b) - F'(a, b)[u, 0]\|_Z}{\|(u, 0)\|_{X \times Y}} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0.$$

Dokazovanou rovnost již dostaneme z linearitu Fréchetovy derivace a faktu, že

$$F'(a, b)[h_x, 0] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(a + th_x, b) - F(a, b)}{t} = F'_x(a, b)[h_x].$$

\square

Věta 1.3.5 (Řeřezové pravidlo). *Nechť X, Y, Z jsou Banachovy prostory, $U \subset X$ otevřená, $G : U \rightarrow Y$ a $F : Y \rightarrow Z$ takové, že $\delta G(x; v)$ existuje pro nějaké $x \in U, v \in X$ a F je F -diferencovatelné v $y = G(x)$. Potom*

$$\delta(F \circ G)(x; v) = F'(y)[\delta G(x; v)].$$

Pokud je navíc G Fréchetově diferencovatelné v bodě x , pak také $F \circ G$ je F -diferencovatelné v x a platí

$$(F \circ G)'(x)[v] = F'(y)[G'(x)[v]].$$

Důkaz. Důkaz lze nalézt například v [14]. \square

Nakonec ještě vyslovíme větu o implicitní funkci, na kterou se budeme odvolávat v následující kapitole při formulaci minimalizační úlohy.

Definice 1.3.4. Zobrazení $f: X \rightarrow Y$ mezi topologickými prostory se nazývá *homeomorfismus*, pokud

- (i) f je bijektivní a spojité,
- (ii) $f^{-1}: Y \rightarrow X$ je spojité.

Věta 1.3.6 (O implicitní funkci). *Budte X, Y, Z Banachovy prostory a $F: X \times Y \rightarrow Z$. Nechť existuje bod $(a, b) \in X \times Y$ takový, že $F(a, b) = 0$. Dále nechť $M \subset X \times Y$ je otevřená množina obsahující bod (a, b) , F je spojitě F -diferencovatelné na M a $F'_y(a, b) \in \mathcal{B}(Y, Z)$ je homeomorfismus. Pak existuje $U \times V \subset M$ otevřené okolí bodu (a, b) a právě jedno $\varphi: U \rightarrow V$ takové, že*

- i. $\varphi(a) = b$,*
- ii. $(\forall x \in U)(F(x, \varphi(x)) = 0)$,*
- iii. φ je spojitě F -diferencovatelné na U .*

Důkaz. Důkaz nalezneme opět v [14].

□

Kapitola 2

Optimalizační teorie

Při zkoumání přírodních procesů se můžeme zabývat otázkou, jakým způsobem takové procesy řídit chceme-li dosáhnout určitého požadovaného stavu. Zde se budeme zajímat výhradně o procesy, jejichž vývoj lze popsat parciálními diferenciálními rovnicemi. V praxi může jít například o hledání optimálního aerodynamického tvaru křídla letadla [18] či o získání konkrétního teplotního profilu, který pak odpovídá určitým vlastnostem daného materiálu [5]. V této kapitole definujeme minimalizační úlohu zahrnující optimalizační problémy tohoto typu a budeme diskutovat nutné podmínky jejího řešení. Představíme citlivostní a adjungovanou metodu, kterou následně aplikujeme na konkrétní příklad optimalizace okrajové podmínky pro rovnici vedení tepla.

2.1 Minimalizační úloha

V této sekci zformulujeme obecný tvar typové optimalizační úlohy. Poznatky o optimalizační teorii pochází z [5].

Definice 2.1.1. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný prostor, $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ a $C \subset X$ je neprázdňá množina. Říkáme, že F má v bodě $x_0 \in C$ *lokální minimum vzhledem k C* právě tehdy, když

$$(\exists \text{ otevřené okolí } V \text{ bodu } x_0)(\forall x \in V \cap C)(F(x) \geq F(x_0)).$$

Takové x_0 budeme nazývat lokálním řešením úlohy

$$\min_{x \in C} F(x).$$

Říkáme, že F má v bodě $x_0 \in C$ *globální minimum vzhledem k C* , pokud

$$(\forall x \in C)(F(x) \geq F(x_0)).$$

Definice 2.1.2. Nechť X je vektorový prostor nad \mathbb{R} . Zobrazení $p : X \rightarrow [0, \infty)$ je *konvexní funkcionál*, jestliže

- (i) $(\forall x \in X)(\forall \alpha > 0)(p(\alpha x) = \alpha p(x))$,
- (ii) $(\forall x, y \in X)(p(x + y) \leq p(x) + p(y))$.

Věta 2.1.1. *Bud' $(X, \|\cdot\|)$ normovaný prostor, $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ a $C \subset X$ neprázdňá a konvexní množina. Nechť F má v bodě $x_0 \in C$ směřovou derivaci ve směru $x - x_0$ pro všechna $x \in C$. Pokud $x_0 \in C$ je lokální řešení úlohy*

$$\min_{x \in C} F(x),$$

potom platí

$$\delta F(x_0; x - x_0) \geq 0 \quad \forall x \in C. \quad (2.1)$$

Pokud F je navíc konvexní funkcionál na C , pak nerovnost (2.1) je nutnou a postačující podmínkou pro globální minimum.

Poznámka. Je-li navíc F Fréchetově diferencovatelné v x_0 , pak v podmínce (2.1) místo směrové derivace vystupuje Fréchetova derivace.

Důkaz. (\Rightarrow): Necht $x_0 \in C$ je bodem lokálního minima F vzhledem k C . Díky konvexnosti množiny C bude pro libovolné $x \in C$

$$tx + (1 - t)x_0 = x_0 + t(x - x_0) \in C, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Z předpokladu lokálního minima plyne, že

$$(\exists \delta > 0)(t \in [0, \delta))(F(x_0 + t(x - x_0)) \geq F(x_0)).$$

Tudíž

$$\delta F(x_0; x - x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + t(x - x_0)) - F(x_0)}{t} \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

(\Leftarrow): Je-li F konvexní na C , pak

$$F(x_0 + t(x - x_0)) \leq tF(x) + (1 - t)F(x_0) \quad \forall x \in C, \forall t \in (0, 1).$$

Tedy

$$\frac{F(x_0 + t(x - x_0)) - F(x_0)}{t} \leq F(x) - F(x_0)$$

a limitním přechodem při $t \rightarrow 0$ a díky předpokladu nerovnosti (2.1) dostáváme, že

$$F(x) \geq F(x_0) \quad \forall x \in C.$$

□

Máme tedy připravenou nutnou i postačující podmínku pro bod minima funkcionálu. Naším cílem je však zabývat se úlohou hledání extrému vzhledem k vazbě dané diferenciální rovnicí. Takovou minimalizační úlohou si nyní představíme. Mějme Banachovy prostory U, Y , Hilbertův prostor Z a množinu $U_{ad} \subset U$. Předpokládáme, že mezi prvky prostorů U a Y existuje vazba zadaná implicitně pomocí operátoru $e : Y \times U \rightarrow Z$ v podobě stavové rovnice

$$e(y, u) = 0.$$

Zavedeme ztrátový funkcionál

$$J : Y \times U \rightarrow \mathbb{R}.$$

Stavová rovnice zde může představovat například parciální diferenciální rovnici s okrajovou podmínkou popisující zkoumaný systém. Řeší-li dvojice $(y, u) \in Y \times U$ takovou stavovou rovnici, prvek y pak reprezentuje stav systému pro danou okrajovou podmínku u . Prostor U nazýváme prostorem řízení a Y stavový prostor. Podmnožina U_{ad} označuje prostor přípustných řízení, v tomto případě například množinu pouze takových okrajových podmínek, které mají dobrý fyzikální význam. Ztrátový funkcionál J může být různých tvarů, typicky ale představuje střední kvadratickou chybu řešení, kterou se přirozeně budeme snažit minimalizovat.

Naším cílem bude nalézt bod minima J vzhledem k množině $Y \times U_{ad} \subset Y \times U$ za podmínky splnění vazby dané stavovou rovnicí. Řešíme tedy minimalizační úlohu s obecně nekonečně dimenzionální vazbou

$$\begin{aligned} & \min_{(y,u) \in Y \times U_{ad}} J(y, u) \\ & \text{vzhledem k} \\ & e(y, u) = 0, \quad (y, u) \in Y \times U. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Definice 2.1.3. Řekneme, že bod

$$(\bar{y}, \bar{u}) \in Y \times U_{ad}$$

je *optimálním řešením* úlohy (2.2), jestliže

$$e(\bar{y}, \bar{u}) = 0 \quad \text{a} \quad J(\bar{y}, \bar{u}) \leq J(y, u) \quad \forall (y, u) \in Y \times U_{ad} \text{ takové, že } e(y, u) = 0.$$

Definice 2.1.4. Uvažujme úlohu (2.2). Pak následující podmínky

- I. U_{ad} je neprázdná, uzavřená a konvexní,
 - II. J a e jsou spojitě Fréchetově diferencovatelné na $Y \times U$,
 - III. pro každé $u \in U$ má stavová rovnice $e(y, u) = 0$ jednoznačné řešení $y \in Y$, tj. existuje operátor řešení $S : U \rightarrow Y$ splňující $e(S(u), u) = 0$ pro každé $u \in U$,
 - IV. $e'_y(S(u), u) \in \mathcal{B}(Y, Z)$ má omezenou inverzi pro každé $u \in U$,
- nazýváme *podmínkami regularity*.

Poznámka. Operátor řešení budeme značit jako y , tj.

$$y(u) := S(u) \quad \forall u \in U.$$

Předpokládejme, že platí podmínky regularity. Díky existenci operátoru řešení můžeme definovat redukovaný funkcionál $\hat{J} : U \rightarrow \mathbb{R}$ vztahem

$$\hat{J}(u) := J(y(u), u) \quad \forall u \in U.$$

Úlohu (2.2) pak lze ekvivalentně vyjádřit ve tvaru

$$\min_{u \in U_{ad}} \hat{J}(u) \tag{2.3}$$

Věta 2.1.2. *Nechť platí podmínky regularity a bod $u_0 \in U_{ad}$ je lokální řešení úlohy (2.3). Potom platí*

$$\hat{J}'(u_0)[u - u_0] \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}.$$

Důkaz. Podmínky regularity nám zajistí splnění předpokladů věty 1.3.6 pro stavovou rovnici. Operátor řešení y je tedy spojitě F-diferencovatelný na U , a proto díky větě 1.3.5 je \hat{J} Fréchetově diferencovatelný na U . Stačí aplikovat větu 2.1.1. \square

Typovou úlohu vázaného minima (2.2) je tedy možné za předpokladu existence operátoru řešení stavové rovnice převést na minimalizační úlohu (2.3). Bude-li navíc U Hilbertův prostor, potom z Rieszova teorému 1.1.5 můžeme derivaci funkcionálu \hat{J} v bodě $u_0 \in U$

$$\hat{J}'(u_0) : U \rightarrow \mathbb{R}$$

ztotožnit s prvkem $v_{u_0} \in U$, který má geometrický význam směru největšího růstu \hat{J} z bodu u_0 . Pokud umíme vypočítat derivaci \hat{J} , jsme schopni řešit úlohu (2.3) metodou největšího spádu nebo také metodou gradientního sestupu.

2.2 Citlivostní a adjungovaná metoda

V této sekci se budeme zabývat výpočtem Fréchetovy derivace funkcionálu \hat{J} z úlohy (2.3). V zásadě existují dva možné přístupy, kterými lze derivaci spočítat. První možností je tzv. citlivostní metoda. Platí-li podmínky regularity, pak pro libovolné $u, s \in U$ můžeme psát

$$\hat{J}'(u)[s] = J'(y(u), u)[y'(u)[s], s] = J'_y(y(u), u)[y'(u)[s]] + J'_u(y(u), u)[s],$$

kde jsme využili řetězového pravidla 1.3.5 a tvrzení o parciálních derivacích 1.3.4. Vidíme, že ve výrazu vystupuje Fréchetova derivace implicitně zadaného operátoru řešení $y'(u)[s]$. Derivováním stavové rovnice dostaneme

$$e'_y(y(u), u)[y'(u)[s]] + e'_u(y(u), u)[s] = 0.$$

Spočítat derivaci $\hat{J}'(u)$ by tedy znamenalo pro každé $s \in U$ nejprve řešit operátorovou rovnici

$$e'_y(y(u), u)[y'(u)[s]] = -e'_u(y(u), u)[s]$$

pro neznámou $y'(u)[s] =: \delta_s y(u)$ a následně využít vztahu

$$\hat{J}'(u)[s] = J'_y(y(u), u)[\delta_s y(u)] + J'_u(y(u), u)[s].$$

Mnohem efektivnější bude k výpočtu derivace použít druhý přístup, tzv. metodu adjungovaného operátoru.

Uvažujme značení z úlohy (2.2). Nechť platí podmínky regularity a navíc Y je Hilbertův prostor. Pro následující výpočty si zavedeme Lagrangeův funkcionál $L : Y \times U \times Z \rightarrow \mathbb{R}$ vztahem

$$L(y, u, \lambda) := J(y, u) + \langle \lambda, e(y, u) \rangle_Z \quad \forall (y, u, \lambda) \in Y \times U \times Z.$$

Po dosazení bodu $(y(u), u)$ bude pro libovolné pevné $\lambda_0 \in Z$ platit

$$L(y(u), u, \lambda_0) = J(y(u), u) + \langle \lambda_0, e(y(u), u) \rangle_Z = \hat{J}(u) \quad \text{pro každé } u \in U.$$

Čili pro libovolné $u_0, s \in U$ můžeme psát

$$\hat{J}'(u_0)[s] = J'_y(y(u_0), u_0)[y'(u_0)[s]] + J'_u(y(u_0), u_0)[s] + (\langle \lambda_0, e(y(u), u) \rangle_Z)'(u_0)[s].$$

Zavedeme označení

$$\phi_{\lambda_0} := \langle \lambda_0, \cdot \rangle_Z.$$

Zobrazení $\phi_{\lambda_0} : Z \rightarrow \mathbb{R}$ je zřejmě lineární a omezené, proto s využitím vět 1.3.5 a 1.3.3 získáme

$$\begin{aligned} (\langle \lambda_0, e(y(u), u) \rangle_Z)'(u_0)[s] &= (\phi_{\lambda_0}(e(y(u), u)))'(u_0)[s] \\ &= \phi'_{\lambda_0}(e(y(u_0), u_0))[(e(y(u), u))'(u_0)[s]] \\ &= \phi_{\lambda_0}((e(y(u), u))'(u_0)[s]) \\ &= \langle \lambda_0, (e(y(u), u))'(u_0)[s] \rangle_Z. \end{aligned}$$

Celkem tedy

$$\begin{aligned} \hat{J}'(u_0)[s] &= J'_y(y(u_0), u_0)[y'(u_0)[s]] + J'_u(y(u_0), u_0)[s] \\ &\quad + \left\langle \lambda_0, e'_y(y(u_0), u_0)[y'(u_0)[s]] + e'_u(y(u_0), u_0)[s] \right\rangle_Z \\ &= J'_y(y(u_0), u_0)[y'(u_0)[s]] + J'_u(y(u_0), u_0)[s] \\ &\quad + \left\langle \lambda_0, e'_y(y(u_0), u_0)[y'(u_0)[s]] \right\rangle_Z + \left\langle \lambda_0, e'_u(y(u_0), u_0)[s] \right\rangle_Z. \end{aligned}$$

Díky Rieszovu reprezentačnímu teorému 1.1.5 bude existovat jediné $\tilde{J}_{u_0} \in Y$ takové, že

$$J'_y(y(u_0), u_0)[y] = \langle \tilde{J}_{u_0}, y \rangle_Y \quad \forall y \in Y.$$

Dále s využitím věty 1.1.6 víme, že k operátoru

$$e'_y(y(u_0), u_0) \in \mathcal{B}(Y, Z)$$

existuje právě jeden adjungovaný operátor

$$e'_y(y(u_0), u_0)^* \in \mathcal{B}(Z, Y).$$

Výraz tedy můžeme přepsat jako

$$\begin{aligned} \hat{J}'(u_0)[s] &= \langle \tilde{J}_{u_0}, y'(u_0)[s] \rangle_Y + J'_u(y(u_0), u_0)[s] \\ &\quad + \langle e'_y(y(u_0), u_0)^* \lambda_0, y'(u_0)[s] \rangle_Y + \langle \lambda_0, e'_u(y(u_0), u_0)[s] \rangle_Z \\ &= \langle \tilde{J}_{u_0} + e'_y(y(u_0), u_0)^* \lambda_0, y'(u_0)[s] \rangle_Y \\ &\quad + J'_u(y(u_0), u_0)[s] + \langle \lambda_0, e'_u(y(u_0), u_0)[s] \rangle_Z. \end{aligned}$$

Tento vztah platí pro libovolné $\lambda_0 \in Z$. Předpokládejme, že existuje $\bar{\lambda} \in Z$ splňující rovnici

$$\tilde{J}_{u_0} + e'_y(y(u_0), u_0)^* \bar{\lambda} = 0 \quad (2.4)$$

Tato rovnice se nazývá *adjungovaná rovnice*. Potom již bude platit

$$\hat{J}'(u_0)[s] = J'_u(y(u_0), u_0)[s] + \langle \bar{\lambda}, e'_u(y(u_0), u_0)[s] \rangle_Z \quad \forall s \in U \quad (2.5)$$

Tedy hledanou derivaci můžeme spočítat přímo bez znalosti $y'(u_0)$. Nakonec vyslovíme větu, ve které shrneme získané výsledky.

Věta 2.2.1. *Uvažujme úlohu (2.2). Nechť platí podmínky regularity 2.1.4 a Y a Z jsou Hilbertovy prostory. Pokud bod $(y_0, u_0) \in Y \times U_{ad}$ je optimálním řešením úlohy (2.2), potom existuje Lagrangeův multiplikátor $\bar{\lambda} \in Z$ takový, že platí následující podmínky*

$$\begin{aligned} e(y_0, u_0) &= 0 \quad v \ Z, \\ \tilde{J}_{u_0} + e'_y(y_0, u_0)^* \bar{\lambda} &= 0 \quad v \ Y, \\ J'_u(y_0, u_0)[u - u_0] + \langle \bar{\lambda}, e'_u(y_0, u_0)[u - u_0] \rangle_Z &\geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Důkaz. Využijeme vztahu (2.5) a věty 2.1.2. Existence $\bar{\lambda}$ zdůvodněna v [5]. □

Poznámka. Podmínky (2.6) jsou nutnými podmínkami optimálního řešení úlohy (2.2) a budeme je nazývat *podmínkami optimality* pro úlohu (2.2).

Podmínky (2.6) můžeme ekvivalentně přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} \langle e(y_0, u_0), z \rangle_Z &= 0 \quad \forall z \in Z, \\ \langle \tilde{J}_{u_0} + e'_y(y_0, u_0)^* \bar{\lambda}, y \rangle_Y &= 0 \quad \forall y \in Y, \\ J'_u(y_0, u_0)[u - u_0] + \langle \bar{\lambda}, e'_u(y_0, u_0)[u - u_0] \rangle_Z &\geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Za platnosti podmínek regularity je Lagrangeův funkcionál Fréchetově diferencovatelný a pro parciální derivace platí vztahy

$$\begin{aligned} L'_\lambda(y_0, u_0, \bar{\lambda})[h_\lambda] &= (\langle \lambda, e(y, u) \rangle_Z)'_\lambda(y_0, u_0, \bar{\lambda})[h_\lambda] = \langle h_\lambda, e(y_0, u_0) \rangle_Z \quad \forall h_\lambda \in Z, \\ L'_y(y_0, u_0, \bar{\lambda})[h_y] &= J'_y(y_0, u_0)[h_y] + \langle \bar{\lambda}, e'_y(y_0, u_0)[h_y] \rangle_Z = \langle \tilde{J}_{u_0} + e'_y(y_0, u_0)^* \bar{\lambda}, h_y \rangle_Y \quad \forall h_y \in Y, \\ L'_u(y_0, u_0, \bar{\lambda})[h_u] &= J'_u(y_0, u_0)[h_u] + \langle \bar{\lambda}, e'_u(y_0, u_0)[h_u] \rangle_Z \quad \forall h_u \in U. \end{aligned}$$

Pomocí Lagrangeova funkcionálu tedy můžeme podobu podmínek optimality (2.6) z věty 2.2.1 převést do tvaru

$$\begin{aligned} L'_\lambda(y_0, u_0, \bar{\lambda})[h_\lambda] &= 0 \quad \forall h_\lambda \in Z, \\ L'_y(y_0, u_0, \bar{\lambda})[h_y] &= 0 \quad \forall h_y \in Y, \\ L'_u(y_0, u_0, \bar{\lambda})[h_u - u_0] &\geq 0 \quad \forall h_u \in U_{ad}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Díky podmínkám regularity 2.1.4 úlohy (2.2) máme zajištěnou korektnost zavedení redukováného funkcionálu \hat{J} , jeho F-diferencovatelnost, existenci Lagrangeova multiplikátoru ve větě 2.2.1 a ospravedlněné veškeré operace provedené při výpočtu Fréchetovy derivace \hat{J} pomocí adjungované metody. Jelikož pro libovolný Fréchetově diferencovatelný operátor $F: X \rightarrow Y$ zřejmě platí

$$F'(x)[h] = \delta F(x; h) \quad \forall x, h \in X.$$

můžeme využít výsledku z věty 2.2.1 a podmínky (2.6), resp. (2.8) zapsat ve slabší variantě

$$\begin{aligned} \delta L_\lambda(y_0, u_0, \bar{\lambda}; h_\lambda) &= 0 \quad \forall h_\lambda \in Z, \\ \delta L_y(y_0, u_0, \bar{\lambda}; h_y) &= 0 \quad \forall h_y \in Y, \\ \delta L_u(y_0, u_0, \bar{\lambda}; h_u - u_0) &\geq 0 \quad \forall h_u \in U_{ad}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

kde symbolem $\delta L_\lambda(y_0, u_0, \bar{\lambda}; h_\lambda)$ značíme směrovou derivaci L vzhledem k proměnné λ v bodě $\bar{\lambda}$ a směru h_λ pro fixní body y_0, u_0 . Podmínky (2.9) můžeme tedy použít jako návod pro výpočet směrové derivace redukováného funkcionálu, aniž bychom měli ověřenu regularitu úlohy. Poznamenejme, že v takovém případě existence multiplikátoru $\bar{\lambda}$ řešícího rovnici

$$\delta L_y(y_0, u_0, \bar{\lambda})[h_y] = 0 \quad \forall h_y \in Y$$

není zaručena. Při jeho hledání však můžeme formálně využít postupu z adjungované metody.

2.3 Optimalizace Dirichletovy okrajové podmínky

Probranou teorii aplikujeme na úlohu hledání optimální okrajové podmínky pro rovnici vedení tepla. Uvažujme homogenní a izotropní médium rozložené v otevřené a omezené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Regulováním teploty na hranici $\partial\Omega$ bychom chtěli za čas $T > 0$ dosáhnout nějakého daného teplotního profilu, tj. konkrétního rozložení teploty na množině Ω . Zaveďme funkce

$$\begin{aligned} y: \bar{\Omega} \times [0, T] &\rightarrow \mathbb{R}, \\ y_d: \Omega &\rightarrow \mathbb{R}, \end{aligned}$$

kde y je neznámá funkce teploty, tj. $y(x, t)$ označuje teplotu v bodě $x \in \Omega$ a čase $t \in [0, T]$ a y_d je požadovaný teplotní profil, kterého chceme dosáhnout v čase T . Funkce y tedy splňuje rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a\Delta y + f \quad \text{v } \Omega \times (0, T],$$

kde $a > 0$ je bezrozměrná konstanta charakterizující tepelnou difuzivitu média, Δ je Laplaceův operátor vzhledem k prostorové proměnné $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ definovaný jako

$$\Delta y(x, t) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}(x, t) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$$

a funkce $f: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ je daný zdrojový člen. Definujeme-li funkce

$$\begin{aligned} u &: \partial\Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \\ y_0 &: \Omega \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \end{aligned}$$

kde u označuje teplotu na hranici $\partial\Omega$ a y_0 je počáteční teplota v čase $t = 0$, potom funkce y je dána počáteční a okrajovou úlohou

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = a\Delta y + f & \text{v } \Omega \times (0, T] \\ y = u & \text{na } \partial\Omega \times [0, T] \\ y = y_0 & \text{na } \Omega \times \{0\} \end{cases} \quad (2.10)$$

Budeme předpokládat, že k dané okrajové a počáteční podmínce u a y_0 existuje jednoznačné řešení úlohy (2.10) takové, které je třídy $C^2(\bar{\Omega} \times [0, T])$.

Poznámka. Tento předpoklad není nereálný. Za jistých dodatečných požadavků na funkce f, u a y_0 skutečně existuje jednoznačné tzv. slabé řešení úlohy (2.10) na Sobolevových prostorech, které se shoduje s klasickým řešením. Konceptem slabého řešení se zde však nebudeme zabývat, lze jej nalézt například v [19].

Naším cílem je optimalizovat Dirichletovu okrajovou podmínku pro rovnici vedení tepla. Přesněji řečeno chceme pro pevně zvolenou počáteční teplotu

$$y_0 \in C(\Omega \times \{0\})$$

nalézt okrajovou podmínku

$$u \in C(\partial\Omega \times [0, T])$$

takovou, aby se rozložení teploty

$$y \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, T])$$

získané řešením úlohy (2.10) lišilo v čase T od požadovaného profilu y_d co nejméně. Pro názornost budeme závislost řešení y na okrajové podmínce vyznačovat explicitně jako $y = y(u)$. Míru odlišnosti teplotních profilů vyjádříme pomocí normy

$$\|y(u)|_{\Omega \times \{T\}} - y_d\|_{L^2(\Omega)},$$

kde předpokládáme, že $y_d \in L^2(\Omega)$.

Poznámka. Funkce $y(u)$ je dle tvrzení 1.1.3 spojitě rozšířitelná na $\bar{\Omega} \times [0, T]$. Dále funkce spojitá na kompaktní množině je omezená, tedy řešení $y(u)|_{\Omega \times \{T\}}$ je třídy $L^2(\Omega)$.

Označíme-li prostory

$$\begin{aligned} Y &:= C^2(\bar{\Omega} \times [0, T]), \\ U &:= C(\partial\Omega \times [0, T]), \end{aligned}$$

můžeme úlohu optimalizace okrajové podmínky pro rovnici vedení tepla formulovat v podobě úlohy hledající vázané minimum

$$\left[\begin{array}{l} \min \left\{ \|y(u)|_{\Omega \times \{T\}} - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 \mid u \in U \right\} \\ \text{vzhledem k} \\ \frac{\partial y}{\partial t} = a\Delta y + f \quad \text{v } \Omega \times [0, T] \\ y = u \quad \text{na } \partial\Omega \times [0, T] \\ y = y_0 \quad \text{na } \Omega \times \{0\}. \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Do úlohy se obvykle přidává tzv. regularizační člen

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega \times [0, T])},$$

který penalizuje použití zdroje. Budeme tedy řešit následující úlohu

$$\left[\begin{array}{l} \min \left\{ \frac{1}{2} \|y(u)|_{\Omega \times \{T\}} - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\partial\Omega \times [0, T])}^2 \mid u \in U \right\} \\ \text{vzhledem k} \\ \frac{\partial y}{\partial t} = a\Delta y + f \quad \text{v } \Omega \times [0, T] \\ y = u \quad \text{na } \partial\Omega \times [0, T] \\ y = y_0 \quad \text{na } \Omega \times \{0\}, \end{array} \right. \quad (2.12)$$

kde $\alpha \geq 0$ se nazývá regularizační koeficient. Úloha (2.12) je konkrétním příkladem typové úlohy (2.2), respektivě jejího redukováného tvaru. Skutečně, ztrátový funkcionál J na Banachových prostorech Y, U je nyní tvaru

$$J(y, u) = \frac{1}{2} \|y|_{\Omega \times \{T\}} - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\partial\Omega \times [0, T])}^2 \quad (2.13)$$

a Hilbertův prostor Z zvolíme jako

$$Z = L^2(\Omega \times [0, T]) \times L^2(\partial\Omega \times [0, T]) \times L^2(\Omega \times \{0\}).$$

Na přípustnost řízení jsme neuvažovali žádná omezení a tedy

$$U_{ad} = U.$$

Pokud definujeme pomocné lineární operátory

$$\begin{aligned} P: Y &\rightarrow L^2(\Omega \times [0, T]), \\ Q: Y &\rightarrow L^2(\partial\Omega \times [0, T]), \\ R: Y &\rightarrow L^2(\Omega \times \{0\}) \end{aligned}$$

vztahy

$$\begin{aligned} Py &:= \frac{\partial y}{\partial t} - a\Delta y \quad \forall y \in Y, \\ Qy &:= y|_{\partial\Omega \times [0, T]} \quad \forall y \in Y, \\ Ry &:= y|_{\Omega \times \{t=0\}} \quad \forall y \in Y, \end{aligned}$$

můžeme operátor $e : Y \times U \rightarrow Z$ definující stavovou rovnici zapsat jako

$$e(y, u) = \begin{pmatrix} e_1(y, u) \\ e_2(y, u) \\ e_3(y, u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Py - f \\ Qy - u \\ Ry - y_0 \end{pmatrix} \quad \forall (y, u) \in Y \times U,$$

kde navíc předpokládáme, že $f \in L^2(\Omega \times [0, T])$ a $y_0 \in L^2(\Omega \times \{0\})$.

Uvažujme Lagrangeův multiplikátor $\lambda \in Z$, jehož složky označíme $\lambda = (p, q, r)^T$, pak Lagrangeův funkcionál můžeme pro libovolné $(y, u, \lambda) \in Y \times U \times Z$ zapsat jako

$$\begin{aligned} L(y, u, \lambda) &= J(y, u) + \langle \lambda, e(y, u) \rangle_Z = J(y, u) + \langle p, e_1(y, u) \rangle_{L^2(\Omega \times [0, T])} \\ &\quad + \langle q, e_2(y, u) \rangle_{L^2(\partial\Omega \times [0, T])} + \langle r, e_3(y, u) \rangle_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

a tedy po rozepsání skalárních součinů dostáváme

$$\begin{aligned} L(y, u, \lambda) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |y(x, T) - y_d(x)|^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\partial\Omega} |u(x, t)|^2 dS(x) dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} p(x, t) (\partial_t y(x, t) - a\Delta y(x, t) - f(x, t)) dt dx \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \int_0^T q(x, t) (y|_{\partial\Omega \times [0, T]}(x, t) - u(x, t)) dt dS(x) \\ &\quad + \int_{\Omega} r(x) (y|_{\Omega \times \{t=0\}}(x) - y_0(x)) dx, \end{aligned} \tag{2.14}$$

kde jsme díky Hölderově nerovnosti [17] mohli využít větu Fubini-Tonelli [17].

Nalezneme konkrétní tvar podmínek (2.9) pro náš příklad, tj. spočítáme parciální směrové derivace funkcionálu L . Z linearity skalárního součinu plyne dle poznámky u tvrzení 1.3.3 pro libovolné $h_\lambda \in Z$

$$\delta L_\lambda(y, u, \lambda; h_\lambda) = 0 + \langle h_\lambda, e(y, u) \rangle_Z.$$

Tedy zajistit první rovnost v podmínkách (2.9) neznamená samozřejmě nic jiného, než vyřešit počáteční a okrajovou úlohu (2.10), čemuž se budeme věnovat později. Nyní se zaměříme na druhou rovnost z podmínek. Derivaci $\delta L_y(y, u, \lambda; h_y)$ spočteme pro každé $h_y \in Y$ tak, že budeme

derivovat postupně jednotlivé sčítance z výrazu (2.14). S pomocí tvrzení 1.3.2 spočteme

$$\begin{aligned}
\delta J_y(y, u; h_y) &= \frac{d}{d\varepsilon} \left[J(y + \varepsilon h_y, u) \right]_{|\varepsilon=0} = \\
&= \frac{d}{d\varepsilon} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} |y(x, T) + \varepsilon h_y(x, T) - y_d(x)|^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\partial\Omega} |u(x, t)|^2 dS(x) dt \right]_{|\varepsilon=0} = \\
&= \frac{d}{d\varepsilon} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} (y(x, T) + \varepsilon h_y(x, T) - y_d(x))^2 dx \right]_{|\varepsilon=0} + 0 = \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[(y(x, T) + \varepsilon h_y(x, T) - y_d(x))^2 \right]_{|\varepsilon=0} dx = \\
&= \int_{\Omega} (y(x, T) - y_d(x)) h_y(x, T) dx.
\end{aligned}$$

V předposlední rovnosti jsme využili větu o záměně integrálu a derivace podle parametru [17]. Za integrabilní majorantu lze volit například funkci

$$\Phi(x) = 2|h_y(x, T)|(|y(x, T) - y_d(x)| + |h_y(x, T)|) \in L^1(\Omega),$$

kde integrabilita Φ plyne z Hölderovy a Minkowského nerovnosti. Z výrazu (2.14) zbývají členy

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \int_0^T p(x, t) (\partial_t y(x, t) - a \Delta y(x, t)) dt dx, \\
&\int_{\partial\Omega} \int_0^T q(x, t) y|_{\partial\Omega \times [0, T]}(x, t) dt dS(x), \\
&\int_{\Omega} r(x) y|_{\Omega \times \{t=0\}}(x) dx,
\end{aligned}$$

které jsou lineární v y a členy

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \int_0^T p(x, t) f(x, t) dt dx, \\
&\int_{\partial\Omega} \int_0^T q(x, t) u(x, t) dt dS(x), \\
&\int_{\Omega} r(x) y_0(x) dx,
\end{aligned}$$

kteří na y vůbec nezávisí. Jejich derivaci ve směru h_y tedy získáme jednoduše dle poznámky u tvrzení 1.3.3. Celkem tedy dostáváme

$$\begin{aligned} \delta L_y(y, u, \lambda; h_y) &= \int_{\Omega} (y(x, T) - y_d(x)) h_y(x, T) dx \\ &+ \int_{\Omega} \int_0^T p(x, t) (\partial_t h_y(x, t) - a \Delta h_y(x, t)) dt dx \\ &+ \int_{\partial\Omega} \int_0^T q(x, t) h_y(x, t) dt dS(x) + \int_{\Omega} r(x) h_y(x, 0) dx. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Nyní se pokusíme zajistit druhou rovnost z podmínek (2.9). Jinými slovy hledáme Lagrangeův multiplikátor $\lambda = (p, q, r) \in Z$ takový, aby platilo

$$\delta L_y(y, u, \lambda; h_y) = 0 \quad \forall h_y \in Y \quad (2.16)$$

Při řešení této rovnice využijeme postupu adjungované metody. Budeme totiž derivace působící na h_y převádět na jiné funkce, což je v jisté analogii s hledáním adjungovaného operátoru. Zaměříme se na druhý integrál z výrazu (2.15)

$$\langle p, Ph_y \rangle_{L^2(\Omega \times [0, T])} = \underbrace{\int_{\Omega} \int_0^T p(x, t) \partial_t h_y(x, t) dt dx}_{(A)} - a \underbrace{\int_0^T \int_{\Omega} p(x, t) \Delta h_y(x, t) dx dt}_{(B)}.$$

Metodou Per partes pro určitý integrál [15] upravíme pro libovolné pevné $x \in \Omega$ vnitřní integrál z výrazu (A)

$$\int_0^T p(x, t) \partial_t h_y(x, t) dt = [p h_y(x, t)]_0^T - \int_0^T \partial_t p(x, t) h_y(x, t) dt,$$

kde musíme navíc předpokládat, že $p(x, \cdot) \in C^1([0, T])$. Podobně se ve výrazu (B) zbavíme Laplaceova operátoru u funkce h_y pomocí první Greenovy identity [1], která je zobecněním Per partes do více dimenzí. Předpokládejme, že pro libovolné fixní $t \in [0, T]$ je $p(\cdot, t) \in C^2(\Omega)$, potom platí

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} p(x, t) \Delta h_y(x, t) dx &= \int_{\partial\Omega} p(x, t) (\nabla h_y(x, t) \cdot n(x)) dS(x) - \int_{\Omega} \nabla p(x, t) \cdot (\nabla h_y(x, t))^T dx \\ &= \int_{\partial\Omega} p(x, t) (\nabla h_y(x, t) \cdot n(x)) dS(x) + \int_{\Omega} h_y(x, t) \Delta p(x, t) dx - \int_{\partial\Omega} h_y(x, t) (\nabla p(x, t) \cdot n(x)) dS(x), \end{aligned}$$

kde ∇ je operátor nabra vzhledem k prostorové proměnné x a $n(x)$ jednotkový vektor ve směru vnější normály k ploše $\partial\Omega$ v bodě x . Výrazy (A), (B) jsme tedy přepsali jako

$$(A) = \int_{\Omega} p h_y(x, T) - p h_y(x, 0) dx - \int_{\Omega} \int_0^T \partial_t p(x, t) h_y(x, t) dt dx,$$

$$(B) = \int_0^T \int_{\partial\Omega} p(x, t) (\nabla h_y(x, t) \cdot n(x)) \, dS(x) \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} h_y(x, t) \Delta p(x, t) \, dx \, dt \\ - \int_0^T \int_{\partial\Omega} h_y(x, t) (\nabla p(x, t) \cdot n(x)) \, dS(x) \, dt.$$

Celkem tedy dostáváme výraz

$$\delta L_y(y, u, \lambda; h_y) = \int_{\Omega} (y(x, T) - y_d(x)) h_y(x, T) \, dx + \int_{\Omega} p h_y(x, T) - p h_y(x, 0) \, dx \\ - \int_{\Omega} \int_0^T \partial_t p(x, t) h_y(x, t) \, dt \, dx - a \int_0^T \int_{\partial\Omega} p(x, t) (\nabla h_y(x, t) \cdot n(x)) \, dS(x) \, dt \\ - a \int_0^T \int_{\Omega} h_y(x, t) \Delta p(x, t) \, dx \, dt + a \int_0^T \int_{\partial\Omega} h_y(x, t) (\nabla p(x, t) \cdot n(x)) \, dS(x) \, dt \\ + \int_{\partial\Omega} \int_0^T q(x, t) h_y(x, t) \, dt \, dS(x) + \int_{\Omega} r(x) h_y(x, 0) \, dx,$$

který upravíme do tvaru

$$\delta L_y(y, u, \lambda; h_y) = \int_{\Omega} (y(x, T) - y_d(x) + p(x, T)) h_y(x, T) \, dx \\ + \int_{\Omega} (r(x) - p(x, 0)) h_y(x, 0) \, dx \\ - \int_{\Omega} \int_0^T (\partial_t p(x, t) + a \Delta p(x, t)) h_y(x, t) \, dt \, dx \\ - \int_{\partial\Omega} \int_0^T a p(x, t) (\nabla h_y(x, t) \cdot n(x)) \, dt \, dS(x) \\ + \int_{\partial\Omega} \int_0^T (a (\nabla p(x, t) \cdot n(x)) + q(x, t)) h_y(x, t) \, dt \, dS(x).$$

Postačující podmínkou pro zajištění rovnosti (2.16) je tedy existence funkcí

$$p \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, T]) \\ q \in L^2(\partial\Omega \times [0, T]), \\ r \in L^2(\Omega \times \{0\})$$

takových, že p řeší počáteční a okrajovou úlohu

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} = -a\Delta p & \text{v } \Omega \times (0, T) \\ p = 0 & \text{na } \partial\Omega \times [0, T] \\ p = y_d - y & \text{na } \Omega \times \{T\} \end{cases} \quad (2.17)$$

a q, r splňují

$$\begin{aligned} q &= -a\nabla p \cdot n & \text{na } \partial\Omega \times [0, T], \\ r &= p & \text{na } \Omega \times \{0\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Vidíme, že diferenciální rovnice v (2.17) se od rovnice vedení tepla liší o znaménko. Navíc počáteční podmínka je zadaná v koncovém čase T . Úloha (2.17) vlastně popisuje proces probíhající inverzně v čase. Zavedením substituce

$$\hat{p}(x, t) := p(x, T - t) \quad \text{pro všechna } (x, t) \in \Omega \times [0, T]$$

získáme vztahy

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial t}(x, t) = -\frac{\partial p}{\partial t}(x, T - t) \quad \text{a} \quad \Delta \hat{p}(x, t) = \Delta p(x, T - t).$$

Úloha (2.17) je tedy ekvivalentní s počáteční a okrajovou úlohou pro rovnici vedení tepla

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} = a\Delta \hat{p} & \text{v } \Omega \times (0, T) \\ \hat{p} = 0 & \text{na } \partial\Omega \times [0, T] \\ \hat{p} = \hat{p}_0 & \text{na } \Omega \times \{0\}, \end{cases} \quad (2.19)$$

kde \hat{p}_0 označuje počáteční podmínku

$$\hat{p}_0(x) = y_d(x) - y(x, T) \quad \forall x \in \Omega.$$

Opět budeme předpokládat, že pro úlohu (2.19) existuje řešení třídy $C^2(\bar{\Omega} \times [0, T])$. Směrovou derivaci podle proměnné u spočítáme obdobně. Pro libovolné $h_u \in U$ opět s využitím tvrzení 1.3.2 nejprve získáme

$$\begin{aligned} \delta J_u(y, u; h_u) &= \frac{d}{d\varepsilon} \left[J(y, u + \varepsilon h_u) \right]_{|\varepsilon=0} = \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \left[\frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\partial\Omega} |u(x, t) + \varepsilon h_u(x, t)|^2 dS(x) dt \right]_{|\varepsilon=0} = \\ &= \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[(u(x, t) + \varepsilon h_u(x, t))^2 \right]_{|\varepsilon=0} dS(x) dt = \\ &= \alpha \int_0^T \int_{\partial\Omega} u(x, t) h_u(x, t) dS(x) dt. \end{aligned}$$

Argument ospravedlňující záměnu derivace a integrálu je stejný jako prve. Dále ve výrazu (2.14) vystupují pouze členy nezávislé na u a člen

$$- \int_0^T \int_{\partial\Omega} q(x, t) u(x, t) dt dS(x),$$

který je lineární v u . Tedy směrová derivace L podle u je tvaru

$$\delta L_u(y, u, \lambda; h_u) = \int_0^T \int_{\partial\Omega} (\alpha u(x, t) - q(x, t)) h_u(x, t) dS(x) dt. \quad (2.20)$$

Díky linearitě vektorového prostoru U platí implikace

$$\begin{aligned} \delta L_u(y, u, \lambda; h_u) \geq 0 \quad \forall h_u \in U &\Rightarrow \delta L_u(y, u, \lambda; -h_u) \geq 0 \quad \forall h_u \in U \\ &\Rightarrow \delta L_u(y, u, \lambda; h_u) \leq 0 \quad \forall h_u \in U, \end{aligned}$$

neboť derivace je v tomto případě lineární v h_u . A tedy pro jakékoliv $u_0 \in U$ bude

$$\begin{aligned} \delta L_u(y, u, \lambda; h_u - u_0) \geq 0 \quad \forall h_u \in U &\Leftrightarrow \delta L_u(y, u, \lambda; h_u) \geq 0 \quad \forall h_u \in U \\ &\Leftrightarrow \delta L_u(y, u, \lambda; h_u) = 0 \quad \forall h_u \in U. \end{aligned}$$

Splnit podmínky optimality pro úlohu (2.12) tedy znamená nalézt funkce \bar{u} , \bar{y} a $\bar{\lambda} = (\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ takové, které splňují

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} = a\Delta \bar{y} + f & \text{v } \Omega \times (0, T] \\ \bar{y} = \bar{u} & \text{na } \partial\Omega \times [0, T] \\ \bar{y} = y_0 & \text{na } \Omega \times \{0\}, \end{cases} \quad (2.21)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} = -a\Delta \bar{p} & \text{v } \Omega \times (0, T) \\ \bar{p} = 0 & \text{na } \partial\Omega \times [0, T] \\ \bar{p} = y_d - \bar{y} & \text{na } \Omega \times \{T\}, \end{cases} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \bar{q} &= -a\nabla \bar{p} \cdot n \quad \text{na } \partial\Omega \times [0, T], \\ \bar{r} &= \bar{p} \quad \text{na } \Omega \times \{0\}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} (\alpha \bar{u}(x, t) - \bar{q}(x, t)) h_u(x, t) dS(x) dt = 0 \quad \forall h_u \in U. \quad (2.24)$$

Poznámka. Podmínku (2.21) budeme nazývat *primární* úlohou a (2.22) *duální* úlohou pro problém (2.12).

Podmínku (2.23) ještě můžeme upravit do tvaru

$$\bar{q}(x, t) = -a \nabla \bar{p}(x, t) \cdot n(x) = a \nabla \bar{p}(x, t) \cdot \tilde{n}(x) \quad \forall (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T],$$

kde $\tilde{n}(x) = -n(x)$ je jednotkový vektor ve směru vnitřní normály k ploše $\partial\Omega$ v bodě x . Jelikož o funkci \bar{p} předpokládáme, že je třídy $C^2(\bar{\Omega} \times [0, T])$, můžeme využít vztahu mezi gradientem funkce a její směrovou derivací [15]

$$\nabla \bar{p}(x, t) \cdot \tilde{n}(x) = \delta_{\tilde{n}} \bar{p}(x, t; \tilde{n}(x)) =: \frac{\partial \bar{p}}{\partial \tilde{n}}(x, t) \quad \forall (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T].$$

Nalezení funkcí \bar{u} , \bar{y} a $\bar{\lambda}$ splňujících podmínky (2.21), (2.22), (2.23) a (2.24) bohužel nezaručuje ani lokální minimalitu J . I za předpokladu regularity úlohy se jedná pouze o nutné podmínky minima. Úlohu (2.12) vyřešíme následujícím způsobem. Jelikož předpokládáme, že úloha (2.21) má jednoznačné řešení, můžeme zavést redukovaný funkcionál

$$\hat{J}(u) = J(y(u), u) \quad \forall u \in U,$$

kde J je dán vztahem (2.13). Dále platí

$$L(y(u), u, \lambda) = J(y(u), u) + \langle \lambda, 0 \rangle_Z = \hat{J}(u) \quad \forall u \in U,$$

kde $\lambda \in Z$ je parametr. Proto směrovou derivaci \hat{J} ve směru $s \in U$ můžeme pomocí Lagrangeova funkcionálu vyjádřit jako

$$\begin{aligned} \delta \hat{J}(u; s) &= L'(y(u), u, \lambda)[\delta y(u; s), s] \\ &= L'_y(y(u), u, \lambda)[\delta y(u; s)] + L'_u(y(u), u, \lambda)[s] \\ &= \delta L_y(y(u), u, \lambda; \delta y(u; s)) + \delta L_u(y(u), u, \lambda; s). \end{aligned}$$

Pokud nalezneme funkce \bar{u} , \bar{y} a $\bar{\lambda}$ splňující podmínky (2.21), (2.22), (2.23), potom bude

$$\delta \hat{J}(\bar{u}; s) = \delta L_u(\bar{y}, \bar{u}, \bar{\lambda}; s) = \int_0^T \int_{\partial\Omega} (\alpha \bar{u}(x, t) - \bar{q}(x, t)) s(x, t) dS(x) dt \quad \forall s \in U. \quad (2.25)$$

V integrálu (2.25) vystupuje Lagrangeovský multiplikátor \bar{q} , který je možné získat ze vztahu (2.23) až po vyřešení úlohy (2.22). Její řešení však závisí na řešení úlohy (2.21) skrze počáteční podmínku. Z tohoto pozorování jasně vyplývá postup, jakým lze podmínky řešit. Pro danou okrajovou podmínku \bar{u} vyřešíme primární úlohu (2.21). Poté nalezneme řešení duální úlohy (2.22) a dopočteme koeficient \bar{q} .

Minimalizovat redukovaný funkcionál \hat{J} je tedy možné pomocí vztahu (2.25) například metodou gradientního sestupu, kterou rozebereme v následující kapitole.

Kapitola 3

Numerická metoda

V minulé kapitole jsme nastínili postup řešení optimalizační úlohy (2.12), který využívá nalezených podmínek optimality (2.21), (2.22), (2.23) a (2.24). Pro zjednodušení budeme úlohu řešit pro dvou-dimenzionální obdélníkovou oblast, tj. množinu Ω budeme uvažovat speciálně tvaru

$$\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2) \subset \mathbb{R}^2, \text{ kde } L_1, L_2 > 0.$$

V následujících sekcích popíšeme způsob diskretizace podmínek optimality a představíme jednotlivé numerické metody, které budeme při řešení problému používat.

3.1 Metoda konečných diferencí

V této sekci se zaměříme na řešení primární a duální úlohy. Primární úloha je počáteční a okrajovou úlohou pro rovnici vedení tepla. Duální úlohu lze zavedením jednoduché substituce převést na úlohu (2.19), což je opět rovnice vedení tepla s počáteční a okrajovou podmínkou. Uvažujme proto typovou úlohu

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = a\Delta y + f & \text{v } \Omega \times (0, T] \\ y = u & \text{na } \partial\Omega \times [0, T] \\ y = y_0 & \text{na } \Omega \times \{0\}, \end{cases} \quad (3.1)$$

kde $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2)$, $u \in C(\partial\Omega \times [0, T])$ a $y_0 \in C(\Omega)$. Numerické řešení této úlohy nalezneme metodou konečných diferencí [20].

Nejprve provedeme diskretizaci množiny $\Omega \times [0, T]$. Pro $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ zavedeme velikost prostorového kroku ve směru e_i jako

$$h_i := \frac{L_i}{m_i} \quad \text{pro } i \in \{1, 2\},$$

kde e_1, e_2 jsou vektory standardní báze \mathbb{R}^2 . Potom označíme

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_h &:= \{(ih_1, jh_2) \mid i = 0, \dots, m_1 \text{ a } j = 0, \dots, m_2\}, \\ \omega_h &:= \{(ih_1, jh_2) \mid i = 1, \dots, m_1 - 1 \text{ a } j = 1, \dots, m_2 - 1\}, \\ \gamma_h &:= \bar{\omega}_h \setminus \omega_h \subset \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dále pro $n_T \in \mathbb{N}$ definujeme časový krok τ jako

$$\tau := \frac{T}{n_T}$$

a časový interval diskretizujeme pomocí časových hladin

$$\begin{aligned}\bar{\pi}_\tau &:= \{k\tau \mid k = 0, \dots, n_T\}, \\ \pi_\tau &:= \{k\tau \mid k = 0, \dots, n_T - 1\}.\end{aligned}$$

Definice 3.1.1. Zobrazení $g: \bar{\omega}_h \times \bar{\pi}_\tau \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme *síťovou* funkcí a její hodnoty značíme

$$g_{ij}^k := g(ih_1, jh_2, k\tau), \quad 0 \leq i \leq m_1, 0 \leq j \leq m_2, 0 \leq k \leq n_T.$$

Pro k -tou časovou hladinu pak označíme

$$g^k = \begin{pmatrix} g_{00}^k & \cdots & g_{0m_2}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m_1 0}^k & \cdots & g_{m_1 m_2}^k \end{pmatrix}$$

Definice 3.1.2. Nechť pro funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ existuje okolí nuly H_0 takové, že

$$(\exists K > 0)(\forall x \in H_0 \setminus \{0\}) \left(\left| \frac{f(x)}{x^\alpha} \right| \leq K \right) \quad \text{pro nějaké } \alpha \geq 0.$$

Potom říkáme, že se funkce f na okolí H_0 chová jako $\mathcal{O}(x^\alpha)$ a píšeme $f(x) = \mathcal{O}(x^\alpha)$.

Diferenciální výrazy v rovnici vedení tepla nahradíme konečnými diferencemi pomocí rozvoje do Taylorova polynomu. Nechť funkce $y \in C_2^4(\bar{\Omega} \times [0, T])$, tj. čtyřikrát spojitě diferencovatelná podle prostorové proměnné a dvakrát podle časové proměnné. Potom platí dle [20] následující diferenční náhrady

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) &= y_t(x, t) + \mathcal{O}(\tau), \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}(x, t) &= y_{\bar{x}_1 x_1}(x, t) + \mathcal{O}(h_1^2), \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}(x, t) &= y_{\bar{x}_2 x_2}(x, t) + \mathcal{O}(h_2^2),\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}y_t(x, t) &= \frac{y(x, t + \tau) - y(x, t)}{\tau}, \\ y_{\bar{x}_1 x_1}(x, t) &= \frac{y(x_1 + h_1, x_2, t) - 2y(x_1, x_2, t) + y(x_1 - h_1, x_2, t)}{h_1^2}, \\ y_{\bar{x}_2 x_2}(x, t) &= \frac{y(x_1, x_2 + h_2, t) - 2y(x_1, x_2, t) + y(x_1, x_2 - h_2, t)}{h_2^2}.\end{aligned}$$

Čili úlohu (3.1) lze přepsat jako

$$\begin{cases} y_t + \mathcal{O}(\tau) = ay_{\bar{x}_1x_1} + \mathcal{O}(h_1^2) + ay_{\bar{x}_2x_2} + \mathcal{O}(h_2^2) + f & \text{v } \Omega \times (0, T) \\ y = u & \text{na } \partial\Omega \times [0, T] \\ y = y_0 & \text{na } \Omega \times \{0\}. \end{cases}$$

Diskretizací této úlohy vzniká diferenční úloha pro síťovou funkci $z: \bar{\omega}_h \times \bar{\pi}_\tau \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} z_t = az_{\bar{x}_1x_1} + az_{\bar{x}_2x_2} + f^d & \text{v } \omega_h \times \pi_\tau \\ z = u^d & \text{na } \gamma_h \times \bar{\pi}_\tau \\ z = y_0^d & \text{na } \omega_h \times \{0\}, \end{cases} \quad (3.2)$$

kde

$$f^d = f|_{\omega_h \times \pi_\tau}, \quad u^d = u|_{\gamma_h \times \bar{\pi}_\tau}, \quad y_0^d = y_0|_{\omega_h}.$$

Při diskretizaci úlohy diferenciální operátor nahrazujeme operátorem diferenčním, přičemž chyba aproximace je řádu $\mathcal{O}(h_1^2 + h_2^2 + \tau)$. Řešení úlohy (3.2) probíhá po časových hladinách. Pro $k = 0$ získáme z^0 z počáteční a okrajové podmínky

$$\begin{aligned} z^0 &= y_0^d & \text{na } \omega_h, \\ z^0 &= (u^d)^0 & \text{na } \gamma_h. \end{aligned}$$

Potom již pro každé $k = 0, \dots, n_T - 1$ získáme řešení z^{k+1} ze znalosti z^k pomocí explicitního schématu

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k + \tau(az_{\bar{x}_1x_1}^k + az_{\bar{x}_2x_2}^k + (f^d)^k) & \text{v } \omega_h, \\ z^{k+1} &= (u^d)^{k+1} & \text{na } \gamma_h. \end{aligned}$$

Z Laxova teorému [20] plyne, že zvolené diferenční schéma (3.2) je konvergentní, právě když je stabilní. Přičemž podmínkou stability pro toto schéma je nerovnost

$$\frac{\tau}{h_1^2} + \frac{\tau}{h_2^2} < \frac{1}{2a} \quad (3.3)$$

Poznámka. Pro odvození náhrad diferenciálních výrazů konečnými diferencemi pomocí Taylorova polynomu jsme měli poměrně vysoké požadavky na diferencovatelnost dané funkce, které byly poněkud nadbytečné. V [20] se ukazuje, že explicitní diferenční schéma (3.2) je konvergentní, je-li splněna podmínka (3.3) a je-li řešení úlohy (3.1) třídy C_1^2 .

Poznámka. Všimněme si, že zvolené numerické schéma v žádném kroku nevyužívá hodnot okrajové podmínky v rozích $\bar{\omega}_h$, tj. v bodech množiny $\{(0, 0), (0, L_2), (L_1, 0), (L_1, L_2)\}$. Tyto body tedy můžeme při diskretizaci úlohy vynechat.

3.2 Metoda gradientního sestupu

Metoda gradientního sestupu je iterativní optimalizační metoda hledající lokální minimum funkce. Uvažujme diferencovatelnou funkci

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Chtěli bychom nalézt bod lokálního minima f . Tento bod si označíme jako x_m . Metoda je založena na geometrickém významu gradientu. Pro funkci diferencovatelnou v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ platí vztah mezi směrovou derivací a gradientem [15]

$$\delta f(a; v) = \nabla f(a)v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (3.4)$$

Potom z Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti [15] víme, že

$$|\delta f(a; v)| = |\nabla f(a)v| \leq \|\nabla f(a)\| \|v\|,$$

kde rovnost nastává právě tehdy, když v a $\nabla f(a)$ jsou lineárně závislé. Odtud a ze vztahu (3.4) tedy plyne, že mezi všemi směry v , jejichž norma je rovna $\|\nabla f(a)\|$, bude hodnota směrové derivace v bodě a minimální pro směr

$$v = -\nabla f(a).$$

Je-li navíc $f \in C^2$ potom z Taylorovy věty [15] plyne

$$f(a - \alpha \nabla f(a)) = f(a) - \alpha \|\nabla f(a)\|^2 + R_2(a; \alpha \nabla f(a)),$$

kde R_2 je Taylorův zbytek, pro který platí

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{R_2(a; \alpha \nabla f(a))}{\|\alpha \nabla f(a)\|} = 0.$$

Tedy pro dostatečně malé $\alpha > 0$ jsme teoreticky schopni zajistit, aby

$$f(a - \alpha \nabla f(a)) < f(a),$$

je-li $\nabla f(a) \neq 0$. Na základě těchto úvah formulujeme algoritmus metody. Nejprve zvolíme nějaký počáteční odhad bodu x_m . Tento odhad označíme jako

$$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n.$$

Potom iterujeme $k = 0, 1, 2, \dots$ a následující bod $x^{(k+1)}$ nalezneme ze vztahu

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k \nabla f(x^{(k)}),$$

kde $\alpha_k > 0$ je velikost kroku a je volena tak, aby

$$f(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)}).$$

Koeficient α_k můžeme získat například pomocí Armijova pravidla [21] jako

$$\alpha_k = \beta^{n_k},$$

kde $\beta \in (0, 1)$ a n_k je nejmenší přirozené číslo takové, že

$$f(x^{(k)} - \beta^{n_k} \nabla f(x^{(k)})) - f(x^{(k)}) \leq -\frac{\beta^{n_k}}{2} \|\nabla f(x^{(k)})\|^2.$$

Algoritmus je ukončen, pokud v dané iteraci nastane

$$\nabla f(x^{(k)}) = 0.$$

V praxi se však používá ukončovací podmínka

$$\|\nabla f(x^{(k)})\| < \varepsilon,$$

kde $\varepsilon > 0$ je zvolená mez přesnosti.

3.3 Lichoběžníková formule

Mějme funkci $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilní v Riemannově smyslu a integrál

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Budeme se zajímat o numerický výpočet integrálu $I(f)$ pomocí lichoběžníkové formule [22]. Uvažujme ekvidistantní rozdělení intervalu $[a, b]$

$$\sigma_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\},$$

kde pro dělicí body platí

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Vzdálenost mezi dvěma sousedními dělicími body je

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Funkci f aproximujeme po částech lineární funkcí f_{σ_n} definovanou jako

$$f_{\sigma_n}(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}(x - x_i) \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}]$$

pro každé $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Z teorie Riemannova integrálu pak zřejmě platí

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_{\sigma_n}(x) dx.$$

To nás motivuje aproximovat integrál

$$I(f) \approx \int_a^b f_{\sigma_n}(x) dx,$$

kde chyba aproximace závisí na vzdálenosti sousedních bodů zvoleného rozdělení σ_n . Integrál z funkce f_{σ_n} spočteme snadno jako

$$\int_a^b f_{\sigma_n}(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_{\sigma_n}(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} h,$$

neboť f_{σ_n} je lineární na intervalu $[x_i, x_{i+1}]$ pro všechna $i = 0, \dots, n-1$. Získaný výraz lze přepsat do tvaru

$$\int_a^b f_{\sigma_n}(x) dx = f(x_0) \frac{h}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) h + f(x_n) \frac{h}{2}.$$

Označme chybu aproximace integrálu $I(f)$ intergrálem z funkce f_{σ_n} jako

$$E(f_{\sigma_n}) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_{\sigma_n}(x) dx.$$

Je-li funkce f třídy $C^2([a, b])$, potom

$$(\exists K > 0)(\forall x \in [a, b])(|f^{(2)}(x)| \leq K)$$

a pro chybu aproximace lze pomocí Taylorova rozvoje odvodit následující odhad

$$|E(f_{\sigma_n})| < K(b-a)^3 \frac{1}{n^2}.$$

Jelikož při zjemňování dělení intervalu platí

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_{\sigma_n}(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(a) \frac{h}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) h + f(b) \frac{h}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) h,$$

budeme pro numerický výpočet integrálu používat aproximaci

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) h \quad (3.5)$$

3.4 Numerická implementace

V této sekci popíšeme samotnou diskretizaci úlohy (2.12) a postup při hledání jejího řešení. Všechny podmínky optimality budeme diskretizovat na stejné numerické síti. Zavedeme množiny síťových funkcí

$$U_d = \left\{ u^d : (\gamma_h \setminus N) \times \bar{\pi}_\tau \rightarrow \mathbb{R} \right\},$$

$$Y_d = \left\{ y^d : (\bar{\omega}_h \setminus N) \times \bar{\pi}_\tau \rightarrow \mathbb{R} \right\},$$

kde množiny $\bar{\omega}_h$, γ_h , $\bar{\pi}_\tau$ označují diskretizaci množin Ω , $\partial\Omega$, $[0, T]$ popsanou v sekci 3.1 a množina

$$N = \{(0, 0), (0, L_2), (L_1, 0), (L_1, L_2)\}$$

je množina rohových bodů $\bar{\omega}_h$. Při diskretizaci primární úlohy nahrazujeme prostory U a Y pomocí prostorů U_d a Y_d . Idea řešení úlohy (2.12) je následující. Úloha se převede na redukovaný tvar zavedením funkcionálu

$$\hat{J}(u) = J(y(u), u) \quad \forall u \in U.$$

Při diskretizaci získané úlohy

$$\min_{u \in U} \hat{J}(u)$$

se funkcionál

$$\hat{J} : U \rightarrow \mathbb{R}$$

nahradí funkcí

$$\hat{J}^d : U_d \rightarrow \mathbb{R},$$

kteřá představuje aproximaci \hat{J} pomocí lichoběžníkové formule. Takto diskretizovanou úlohu již lze řešit metodou gradientního sestupu, přičemž gradient \hat{J}^d budeme v každé iteraci získávat ze vztahu (2.25) po vyřešení podmínek (2.21), (2.22) a (2.23).

Pro počáteční odhad v metodě gradientního sestupu zvolíme libovolnou funkci $u_0 \in U^d$. Metodou konečných diferencí vyřešíme úlohu (2.21) pro okrajovou podmínku u_0 . Řešením je síťová funkce $y(u_0) \in Y_d$. Označme diskretizovanou funkci požadovaného teplotního profilu jako

$$y_d^d = y_d|_{\omega_h}.$$

Následně funkci

$$y_d^d - y(u_0)|_{\omega_h \times \{T\}}$$

použijeme jako počáteční podmínku pro diskretizovanou úlohu (2.22). Její řešení označíme jako

$$p(u_0) \in Y_d$$

a získáme jej přechodem k úloze (2.19) pro \hat{p} , jak jsme diskutovali v minulé kapitole. Nyní diskretizujeme podmínku (2.23), resp. její ekvivaletní podobu

$$q = a \frac{\partial p}{\partial \tilde{n}} \quad \text{na } \partial\Omega \times [0, T].$$

V tomto případě \tilde{n} nabývá tvaru

$$\begin{aligned} \tilde{n}(x_1, 0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{pro } \forall x_1 \in (0, L_1), \\ \tilde{n}(x_1, L_2) &= - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{pro } \forall x_1 \in (0, L_1), \\ \tilde{n}(0, x_2) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{pro } \forall x_2 \in (0, L_2), \\ \tilde{n}(L_1, x_2) &= - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{pro } \forall x_2 \in (0, L_2). \end{aligned}$$

Vektory \tilde{n} jsou pouze ± 1 -násobky vektorů standardní báze prostoru \mathbb{R}^2 , a proto pro libovolné $k = 0, 1, \dots, n_T$ bude

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \tilde{n}}(ih_1, 0, k\tau) &= \frac{\partial p}{\partial x_2}(ih_1, 0, k\tau) \quad \forall i = 1, \dots, m_1 - 1, \\ \frac{\partial p}{\partial \tilde{n}}(ih_1, m_2 h_2, k\tau) &= - \frac{\partial p}{\partial x_2}(ih_1, m_2 h_2, k\tau) \quad \forall i = 1, \dots, m_1 - 1, \\ \frac{\partial p}{\partial \tilde{n}}(0, jh_2, k\tau) &= \frac{\partial p}{\partial x_1}(0, jh_2, k\tau) \quad \forall j = 1, \dots, m_2 - 1, \\ \frac{\partial p}{\partial \tilde{n}}(m_1 h_1, jh_2, k\tau) &= - \frac{\partial p}{\partial x_1}(m_1 h_1, jh_2, k\tau) \quad \forall j = 1, \dots, m_2 - 1. \end{aligned}$$

Diferenciální výrazy nahradíme konečnými diferencemi

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_2}(ih_1, 0, k\tau) &= p_{x_2}(ih_1, 0, k\tau) + \mathcal{O}(h_2) \quad \forall i = 1, \dots, m_1 - 1, \\ \frac{\partial p}{\partial x_2}(ih_1, m_2 h_2, k\tau) &= p_{\bar{x}_2}(ih_1, m_2 h_2, k\tau) + \mathcal{O}(h_2) \quad \forall i = 1, \dots, m_1 - 1, \\ \frac{\partial p}{\partial x_1}(0, jh_2, k\tau) &= p_{x_1}(0, jh_2, k\tau) + \mathcal{O}(h_1) \quad \forall j = 1, \dots, m_2 - 1, \\ \frac{\partial p}{\partial x_1}(m_1 h_1, jh_2, k\tau) &= p_{\bar{x}_1}(m_1 h_1, jh_2, k\tau) + \mathcal{O}(h_1) \quad \forall j = 1, \dots, m_2 - 1, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} p_{x_2}(ih_1, 0, k\tau) &= \frac{p(ih_1, h_2, k\tau) - p(ih_1, 0, k\tau)}{h_2}, \\ p_{\bar{x}_2}(ih_1, m_2h_2, k\tau) &= \frac{p(ih_1, m_2h_2, k\tau) - p(ih_1, (m_2 - 1)h_2, k\tau)}{h_2}, \\ p_{x_1}(0, jh_2, k\tau) &= \frac{p(h_1, jh_2, k\tau) - p(0, jh_2, k\tau)}{h_1}, \\ p_{\bar{x}_1}(m_1h_1, jh_2, k\tau) &= \frac{p(m_1h_1, jh_2, k\tau) - p((m_1 - 1)h_1, jh_2, k\tau)}{h_1}. \end{aligned}$$

Řešení duální úlohy navíc splňuje okrajovou podmínku

$$p = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \times [0, T].$$

K danému $p(u_0)$ tedy nalezneme koeficient $q(u_0) \in U_d$ pomocí vztahů

$$\begin{aligned} q(u_0)_{i0}^k &= a \frac{p(u_0)_{i1}^k}{h_2} & \forall i = 1, \dots, m_1 - 1, \\ q(u_0)_{im_2}^k &= a \frac{p(u_0)_{im_2-1}^k}{h_2} & \forall i = 1, \dots, m_1 - 1, \\ q(u_0)_{0j}^k &= a \frac{p(u_0)_{1j}^k}{h_1} & \forall j = 1, \dots, m_2 - 1, \\ q(u_0)_{m_1j}^k &= a \frac{p(u_0)_{m_1-1j}^k}{h_1} & \forall j = 1, \dots, m_2 - 1, \end{aligned}$$

pro všechny časové hladiny $k = 0, \dots, n_T$. Posledním krokem v dané iteraci je nalezení gradientu funkce \hat{J}^d v bodě u_0 , k čemuž využijeme vztahu (2.25). Potřebujeme tedy diskretizovat integrál

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} (\alpha u(x, t) - q(x, t)) h_u(x, t) \, dS(x) \, dt$$

pro $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2)$ pomocí lichoběžníkové formule. Hranici $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^2$ můžeme zapsat jako

$$\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^4 \partial\Omega_i,$$

kde

$$\begin{aligned} \partial\Omega_1 &= \{(x_1, 0) \mid x_1 \in (0, L_1)\}, \\ \partial\Omega_2 &= \{(L_1, x_2) \mid x_2 \in (0, L_2)\}, \\ \partial\Omega_3 &= \{(x_1, L_2) \mid x_1 \in (0, L_1)\}, \\ \partial\Omega_4 &= \{(0, x_2) \mid x_2 \in (0, L_2)\}. \end{aligned}$$

Množinu $\partial\Omega$ lze chápat také jako obraz po částech C^1 křivky v \mathbb{R}^2 , kterou popíšeme pomocí parametrizací

$$\begin{aligned}\Phi_1(s) &= \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} & s \in (0, L_1), \\ \Phi_2(s) &= \begin{pmatrix} L_1 \\ s \end{pmatrix} & s \in (0, L_2), \\ \Phi_3(s) &= \begin{pmatrix} L_1 - s \\ L_2 \end{pmatrix} & s \in (0, L_1), \\ \Phi_4(s) &= \begin{pmatrix} 0 \\ L_2 - s \end{pmatrix} & s \in (0, L_2).\end{aligned}$$

Označme funkci

$$f := (\alpha u - q)h_u \quad \text{na } \partial\Omega \times [0, T].$$

Nechť $t \in [0, T]$ je zvoleno libovolně, ale pevně. Potom spočteme křivkový integrál prvního druhu pro funkci f

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} f \, dS &= \int_{\Phi_1} f \, dS + \int_{\Phi_2} f \, dS + \int_{\Phi_3} f \, dS + \int_{\Phi_4} f \, dS \\ &= \sum_{i \in \{1,3\}} \int_0^{L_1} f(\Phi_i(s), t) \|\Phi_i'(s)\| \, ds + \sum_{j \in \{2,4\}} \int_0^{L_2} f(\Phi_j(s), t) \|\Phi_j'(s)\| \, ds \\ &= \int_0^{L_1} f(s, 0, t) \, ds + \int_0^{L_2} f(L_1, s, t) \, ds + \int_0^{L_1} f(s', L_2, t) \, ds' + \int_0^{L_2} f(0, s'', t) \, ds'',\end{aligned}$$

kde v poslední rovnosti jsme u druhých dvou integrálů zavedli substituci

$$L_1 - s = s', \quad \text{resp. } L_2 - s = s''$$

a využili faktu, že

$$\|\Phi_i'(s)\| = 1 \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Nyní použijeme vztah (3.5) k aproximaci

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} f \, dS &\approx \sum_{i=1}^{m_1-1} f(ih_1, 0, t)h_1 + \sum_{j=1}^{m_2-1} f(L_1, jh_2, t)h_2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m_1-1} f(ih_1, L_2, t)h_1 + \sum_{j=1}^{m_2-1} f(0, jh_2, t)h_2\end{aligned}$$

a daný integrál bude po diskretizaci tvaru

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\partial\Omega} f(x_1, x_2, t) \, dS(x) \, dt &\approx \sum_{k=1}^{n_T-1} \sum_{i=1}^{m_1-1} (f(ih_1, 0, k\tau) + f(ih_1, L_2, k\tau))h_1\tau \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n_T-1} \sum_{j=1}^{m_2-1} (f(L_1, jh_2, k\tau) + f(0, jh_2, k\tau))h_2\tau.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Aproximací integrálu (2.25) pomocí vztahu (3.6) dostaneme pro libovolné $s \in U_d$

$$\begin{aligned} \delta \hat{J}^d(u_0, s) &= \sum_{k=1}^{n_T-1} \sum_{i=1}^{m_1-1} \left((\alpha u_0 - q(u_0))_{i0}^k s_{i0}^k + (\alpha u_0 - q(u_0))_{im_2}^k s_{im_2}^k \right) h_1 \tau \\ &+ \sum_{k=1}^{n_T-1} \sum_{j=1}^{m_2-1} \left((\alpha u_0 - q(u_0))_{m_1j}^k s_{m_1j}^k + (\alpha u_0 - q(u_0))_{0j}^k s_{0j}^k \right) h_2 \tau. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Prostor síťových funkcí U_d lze ztotožnit s vektorovým prostorem \mathbb{R}^N , kde

$$N = 2(m_1 + m_2 - 2)(n_T + 1).$$

Složky gradientu $\nabla \hat{J}^d(u_0) \in U_d$ získáme ze vztahu (3.7), volíme-li směr s jako vektory standardní báze \mathbb{R}^N , tedy pro $k \in \{0, n_T\}$ máme

$$\begin{aligned} \nabla \hat{J}^d(u_0)_{ij}^k &= 0 \quad \text{pro } i \in \{1, \dots, m_1 - 1\}, j \in \{0, m_2\}, \\ \nabla \hat{J}^d(u_0)_{ij}^k &= 0 \quad \text{pro } i \in \{0, m_1\}, j \in \{1, \dots, m_2 - 1\} \end{aligned}$$

a pro $k \in \{1, \dots, n_T - 1\}$

$$\begin{aligned} \nabla \hat{J}^d(u_0)_{ij}^k &= (\alpha u_0 - q(u_0))_{ij}^k h_1 \tau \quad \text{pro } i \in \{1, \dots, m_1 - 1\}, j \in \{0, m_2\}, \\ \nabla \hat{J}^d(u_0)_{ij}^k &= (\alpha u_0 - q(u_0))_{ij}^k h_2 \tau \quad \text{pro } i \in \{0, m_1\}, j \in \{1, \dots, m_2 - 1\}. \end{aligned}$$

Nyní lze provést krok v metodě gradientního sestupu, tj. nalézt novou funkci řízení

$$u_1 = u_0 - \beta_0 \nabla \hat{J}^d(u_0),$$

kde $\beta_0 > 0$ volíme dostatečně malé tak, aby platilo

$$\hat{J}^d(u_1) < \hat{J}^d(u_0).$$

Numerickou metodu řešící úlohu (2.12) lze shrnout do následujícího algoritmu. Zvolíme libovolné počáteční řízení $u^{(0)} \in U_d$ a nastavíme $k = 0$. Potom

1. nalezneme $y^{(k)}$ řešením úlohy (2.21) s okrajovou podmínkou $u^{(k)}$,
2. nalezneme $p^{(k)}$ řešením úlohy (2.22) s počáteční podmínkou $y_d - y|_{t=T}^{(k)}$,
3. nalezneme $q^{(k)}$ ze vztahu (2.23) pro $p^{(k)}$,
4. nalezneme nové řízení $u^{(k+1)} = u^{(k)} - \beta_k \nabla \hat{J}^d(u^{(k)})$ tak, aby $\hat{J}^d(u^{(k+1)}) < \hat{J}^d(u^{(k)})$,
5. nastavíme $k = k+1$ a jdeme zpět na krok 1.

Algoritmus zastavíme tehdy, když

$$\|\nabla \hat{J}^d(u^{(k)})\| < \varepsilon,$$

kde $\varepsilon > 0$ můžeme volit například jako

$$\varepsilon = 10^{-6}.$$

Je zřejmé, že tento algoritmus skutečně minimalizuje chybový funkcionál \hat{J} .

Kapitola 4

Numerická studie

V této kapitole popíšeme vybrané numerické experimenty týkající se optimalizace Dirichletovy okrajové podmínky pro rovnici vedení tepla. Připomeňme, že se jedná o minimalizační úlohu tvaru

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \|y(u)|_{\Omega \times \{T\}} - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\partial\Omega \times [0, T])}^2 \mid u \in U \right\}$$

vzhledem k

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= a\Delta y + f && \text{v } \Omega \times [0, T] \\ y &= u && \text{na } \partial\Omega \times [0, T] \\ y &= y_0 && \text{na } \Omega \times \{0\}, \end{aligned}$$

kde Ω , T , a , α , y_0 , y_d a f jsou parametry úlohy popsané v sekci 2.3 a

$$u: \partial\Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$$

je hledaná okrajová podmínka. Úlohu řešíme pomocí algoritmu popsaném v sekci 3.4 a implementovaném v jazyce MATLAB. Pro lepší srovnání výsledků jednotlivých experimentů budeme ve všech případech uvažovat bezrozměrný difúzní koeficient $a = 1$ a množinu Ω tvaru

$$\Omega = (0, 2) \times (0, 2),$$

přičemž pro jednotlivé části hranice $\partial\Omega$ budeme používat již zavedené označení

$$\begin{aligned} \partial\Omega_1 &= \{(x_1, 0) \mid x_1 \in (0, 2)\}, \\ \partial\Omega_2 &= \{(2, x_2) \mid x_2 \in (0, 2)\}, \\ \partial\Omega_3 &= \{(x_1, 2) \mid x_1 \in (0, 2)\}, \\ \partial\Omega_4 &= \{(0, x_2) \mid x_2 \in (0, 2)\}. \end{aligned}$$

Při diskretizaci problému volíme konstanty m_1 , m_2 jako

$$m_1 = m_2 = 49.$$

Počet časových vrstev n_T pro diskretizaci intervalu $[0, T]$ získáme z rovnosti

$$n_T = \lceil 8T (h_1^{-2} + h_2^{-2}) \rceil,$$

která zaručuje splnění podmínky stability (3.3) pro explicitní schéma metody konečných diferencí. Parametry zvolené diskretizace jsou pro přehlednost shrnuty v tabulce 4.1.

L_1	L_2	m_1	m_2	h_1	h_2	n_T	τ
2	2	49	49	$\frac{2}{49}$	$\frac{2}{49}$	$\lfloor 8T(h_1^{-2} + h_2^{-2}) \rfloor$	$\frac{T}{n_T}$

Tabulka 4.1: Parametry diskretizace množiny $\Omega \times [0, T]$.

4.1 Vliv regularizace a finálního času na optimální řešení

V této sekci budeme na jednoduché úloze ilustrovat vliv regularizace a délky časového intervalu $[0, T]$ na optimální řešení. Nastavení parametrů pro tento experiment bude

$$\begin{aligned} y_0 &= 0 \quad \text{na } \Omega, \\ y_d &= 1 \quad \text{na } \Omega, \\ f &= 0 \quad \text{na } \Omega \times [0, T]. \end{aligned} \quad (\text{Experiment 1})$$

Finální čas T a regularizační koeficient α nejprve zvolme jako

$$\begin{aligned} T &= 1, \\ \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Hodnoty diskretizačních kroků h_1 , h_2 a τ jsou pro toto nastavení shrnuty v tabulce 4.2. Pro počáteční odhad řízení

$$u^{(0)} = 0 \quad \text{na } \gamma_h \times \bar{\pi}_\tau$$

dosáhneme optima po 4 000 iteracích, přičemž

$$\|\nabla \hat{J}^d(u^{(opt)})\|_2 \doteq 2,37 \cdot 10^{-7} \quad \text{a} \quad \hat{J}^d(u^{(opt)}) \doteq 7,62 \cdot 10^{-6}.$$

Získaný teplotní profil $y(u^{(opt)})|_{t=T}$ můžeme vidět na obrázku 4.1a a na obrázku 4.2 je znázorněn průběh optimálního řízení $u^{(opt)}$ v několika bodech hranice $\partial\Omega_1$. Ze symetrie úlohy je zřejmé, že ve zbylých třech částech hranice $\partial\Omega_2$, $\partial\Omega_3$ a $\partial\Omega_4$ bude řízení stejné. Z obrázku 4.2 vidíme, že zpočátku dochází k pozvolnému zahřívání, ale pro časy blízké T začíná řízení prudce kolísat. Tento jev se pokusíme zmírnit pomocí regularizace. Z tvaru funkcionálu J (2.13) je zřejmé, že pokud dáme regularizačnímu členu příliš velkou váhu, tj. zvolíme $\alpha \gg 0$, bude optimálním řízením minimalizujícím J řízení nulové. Je tedy podstatné vyladit nastavení koeficientu α tak, aby nalezené řízení bylo realizovatelné (tj. aby nedocházelo k příliš prudkým výkyvům teplot) a zároveň abychom dosáhli uspokojivě malé vzdálenosti

$$\|y(u^{(opt)})|_{\omega_h \times \{T\}} - y_d^d\|_{2,h},$$

kde

$$\|f\|_{2,h} := \left(\sum_{i=1}^{m_1-1} \sum_{j=1}^{m_2-1} |f_{ij}|^2 h_1 h_2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{pro síťovou funkci } f \text{ na } \omega_h.$$

Zkusme nastavit

$$\begin{aligned} T &= 1, \\ \alpha &= 1. \end{aligned}$$

V tomto případě optimum nalezneme po 200 iteracích, kdy

$$\|\nabla \hat{J}^d(u^{(opt)})\|_2 \doteq 6,66 \cdot 10^{-7} \quad \text{a} \quad \hat{J}^d(u^{(opt)}) \doteq 0,676$$

a odchylka získaného profilu od profilu požadovaného je

$$J_1^d(u^{(opt)}) := \|y(u^{(opt)})|_{\omega_h \times \{T\}} - y_d^d\|_{2,h}^2 \doteq 0,624.$$

Optimální řízení je zachyceno na obrázku 4.3. Teplotní výkyvy se skutečně povedlo odstranit, nicméně chyba $J_1^d(u^{(opt)})$ je příliš velká. Koeficient α proto zmenšíme. Pro volbu

$$\begin{aligned} T &= 1, \\ \alpha &= 10^{-2} \end{aligned}$$

dostáváme po 1200 iteracích

$$\|\nabla \hat{J}^d(u^{(opt)})\|_2 \doteq 2,83 \cdot 10^{-8}, \quad \hat{J}^d(u^{(opt)}) \doteq 0,0160 \quad \text{a} \quad J_1^d(u^{(opt)}) = 0,0014.$$

Získaný teplotní profil a optimální řízení jsou zobrazeny na obrázcích 4.1b a 4.4. Z tabulky 4.3 vidíme, že je nejprve minimalizováno \hat{J}^d a poté ještě zlepšovány odchylky J_1^d . Porovnání získaných profilů a optimálních řízení pro $\alpha = 0$ a $\alpha = 10^{-2}$ nalezneme na obrázcích 4.5 a 4.6. Srovnání konvergence reziduí $\hat{J}^d(u^{(k)})$ pro experiment 1 pro různá α je uvedeno v tabulce 4.4. Přidáním regularizačního členu jsme tedy docílili zmenšení teplotních výkyvů během řízení, avšak za cenu větší odchylky získaného teplotního profilu od profilu požadovaného, což je v souladu s chováním, které jsme očekávali. Vhodná volba α pak záleží na konkrétním zadání úlohy. Především na tom, zda získané optimální řízení je realizovatelné, což zde nejsme schopni vyhodnotit. Obvykle se však dle [5] bere hodnota

$$\alpha \in [10^{-5}, 10^{-2}].$$

Nyní budeme studovat vliv délky intervalu $[0, T]$ na tvar optimálního řízení a kvalitu získaného profilu pro experiment 1. Nastavíme

$$\begin{aligned} \alpha &= 0, \\ T &= 0,5. \end{aligned}$$

Hodnoty diskretizace najdeme v tabulce 4.2. Pro optimum získáme

$$\|\nabla \hat{J}^d(u^{(opt)})\|_2 \doteq 1,77 \cdot 10^{-6} \quad \text{a} \quad \hat{J}^d(u^{(opt)}) \doteq 2,91 \cdot 10^{-5}.$$

Optimální řízení je znázorněno na obrázku 4.7. Vidíme, že průběh řízení je téměř identický jako na obrázku 4.2 od času $t = 0,5$. Zdá se tedy, že obdobně dobrých výsledků dosáhneme i pro kratší časy T . Nicméně pokud bychom zvolili čas příliš krátký, například

$$T = 0,1,$$

dosáhneme optimálního výsledku s hodnotami

$$\|\nabla \hat{J}^d(u^{(opt)})\|_2 \doteq 2,15 \cdot 10^{-6} \quad \text{a} \quad \hat{J}^d(u^{(opt)}) \doteq 1,90 \cdot 10^{-3}.$$

Řízení je uvedeno na obrázku 4.8. Průběh tohoto řízení je nyní zcela odlišný a teplotní výkyvy výrazně větší. Pokud naopak finální čas prodloužíme například na

$$T = 1,5,$$

získáme hodnoty

$$\|\nabla \hat{J}^d(u^{(opt)})\|_2 \doteq 9,55 \cdot 10^{-7} \quad \text{a} \quad \hat{J}^d(u^{(opt)}) \doteq 1,90 \cdot 10^{-5}.$$

T	L_1	L_2	m_1	m_2	h_1	h_2	n_T	τ
1,5	2	2	49	49	0,0408	0,0408	14407	$1,0412 \cdot 10^{-4}$
1	2	2	49	49	0,0408	0,0408	9605	$1,0411 \cdot 10^{-4}$
0,6	2	2	49	49	0,0408	0,0408	5763	$1,0411 \cdot 10^{-4}$
0,5	2	2	49	49	0,0408	0,0408	4803	$1,0410 \cdot 10^{-4}$
0,3	2	2	49	49	0,0408	0,0408	2882	$1,0409 \cdot 10^{-4}$
0,1	2	2	49	49	0,0408	0,0408	961	$1,0406 \cdot 10^{-4}$

Tabulka 4.2: Parametry diskretizace množiny $\Omega \times [0, T]$ pro různou volbu T .

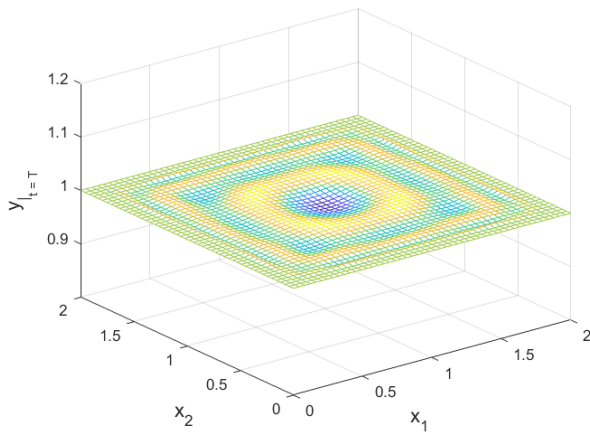
k	$\hat{J}^d(u^{(k)})$	$J_1^d(u^{(k)})$
0	1.919200	3.838401
100	0.243381	0.477405
200	0.017668	0.007160
300	0.016079	0.002196
400	0.015999	0.001757
500	0.015973	0.001585
600	0.015964	0.001505
700	0.015961	0.001460
800	0.015960	0.001433
900	0.015959	0.001418
1000	0.015959	0.001409
1100	0.015959	0.001403
1200	0.015959	0.001400

Tabulka 4.3: Konvergence reziduí $\hat{J}^d(u^{(k)})$ a odchylek $J_1^d(u^{(k)})$ pro experiment 1, $T = 1$ a $\alpha = 10^{-2}$.

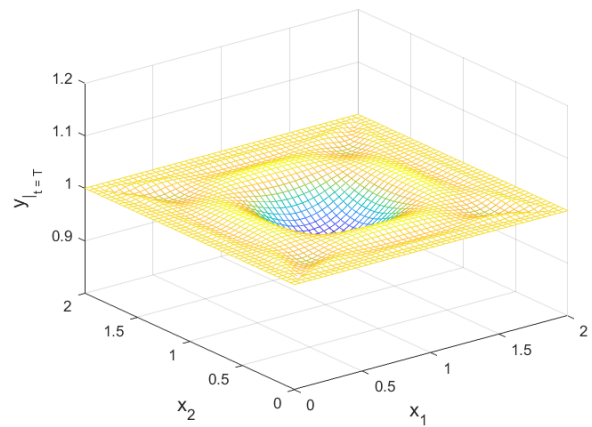
Z obrázku 4.9 vidíme, že zpočátku se řízení pro toto nastavení téměř nemění (je nulové) a od času $t = 0,5$ odpovídá průběhu na obrázku 4.2 pro nastavení $T = 1$. V tabulce 4.5 jsou uvedeny hodnoty reziduí $\hat{J}^d(u^{(k)})$ podle volby T . Pro experiment 1 je ideální volbou finálního času T hodnota

$$T \in \left(\frac{1}{2}, 1\right),$$

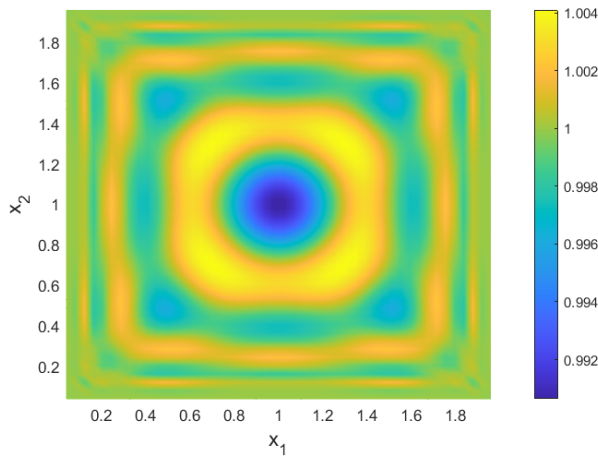
protože pro kratší T získáváme finální profily s větší odchylkou od požadovaného profilu a navíc řízení má větší teplotní výkyvy. Pro delší časy $T > 1$ bude výpočetní doba zbytečně delší a dosažený výsledek jen nepatrně lepší. Obecně však platí, že rovnice vedení tepla je tzv. nulově říditelná [23]. To znamená, že pro libovolný počáteční stav y_0 a konstantní požadovaný profil y_d bude pro libovolný kladný finální čas T existovat okrajová podmínka taková, že se výsledné řešení úlohy v čase T rovná y_d .



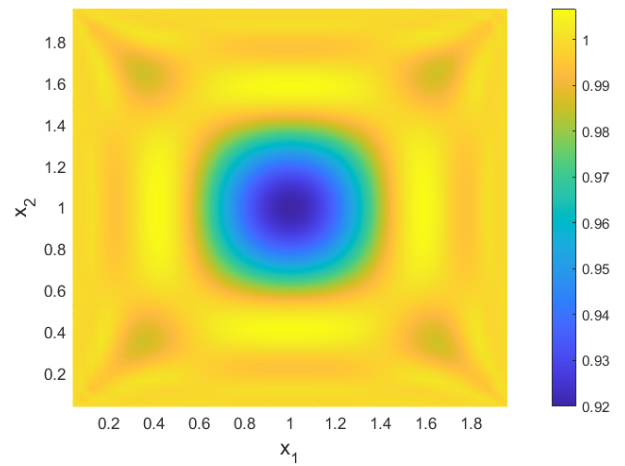
(a) Získaný profil $y(u^{opt})|_{t=1}$ pro $\alpha = 0$.



(b) Získaný profil $y(u^{opt})|_{t=1}$ pro $\alpha = 10^{-2}$.

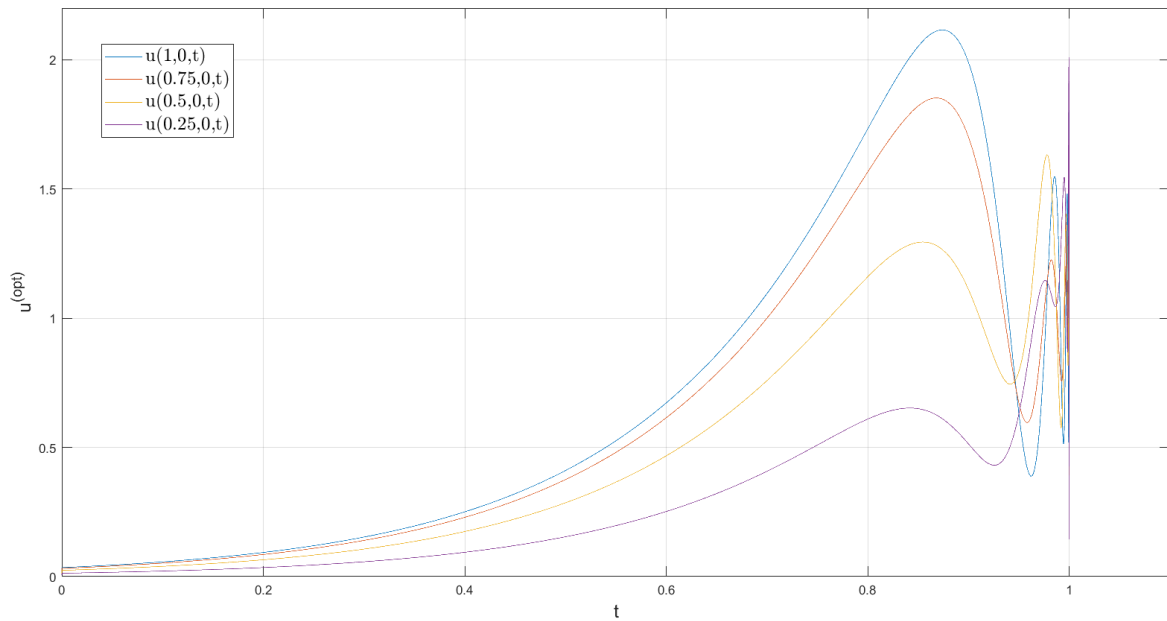


(c) Získaný profil $y(u^{opt})|_{t=1}$ pro $\alpha = 0$.

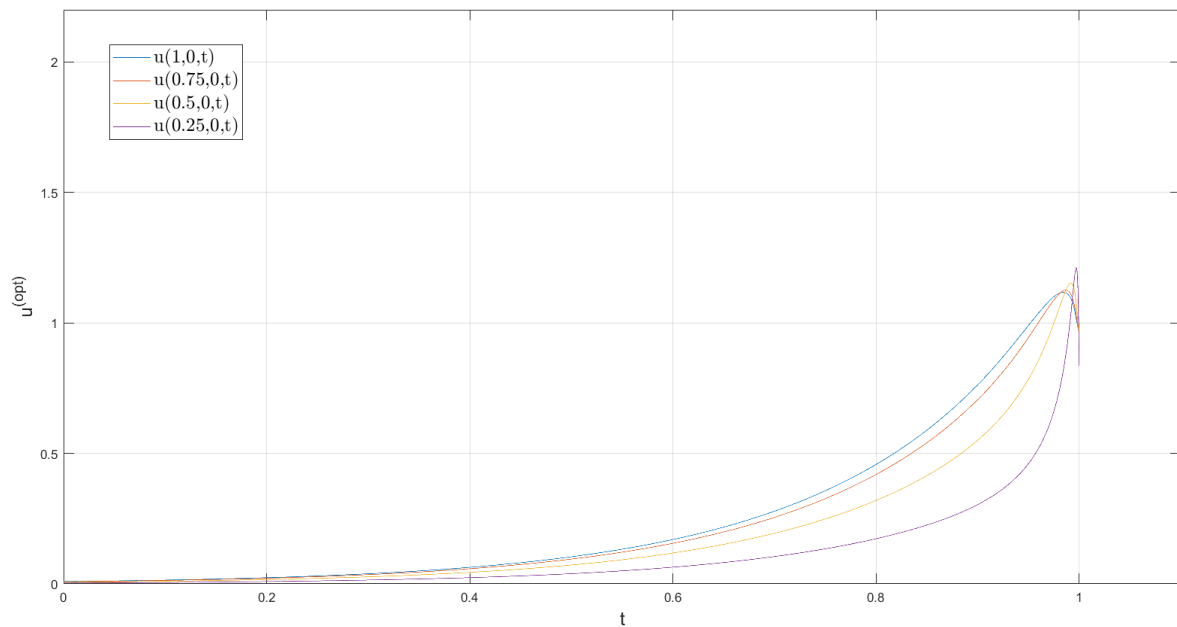


(d) Získaný profil $y(u^{opt})|_{t=1}$ pro $\alpha = 10^{-2}$.

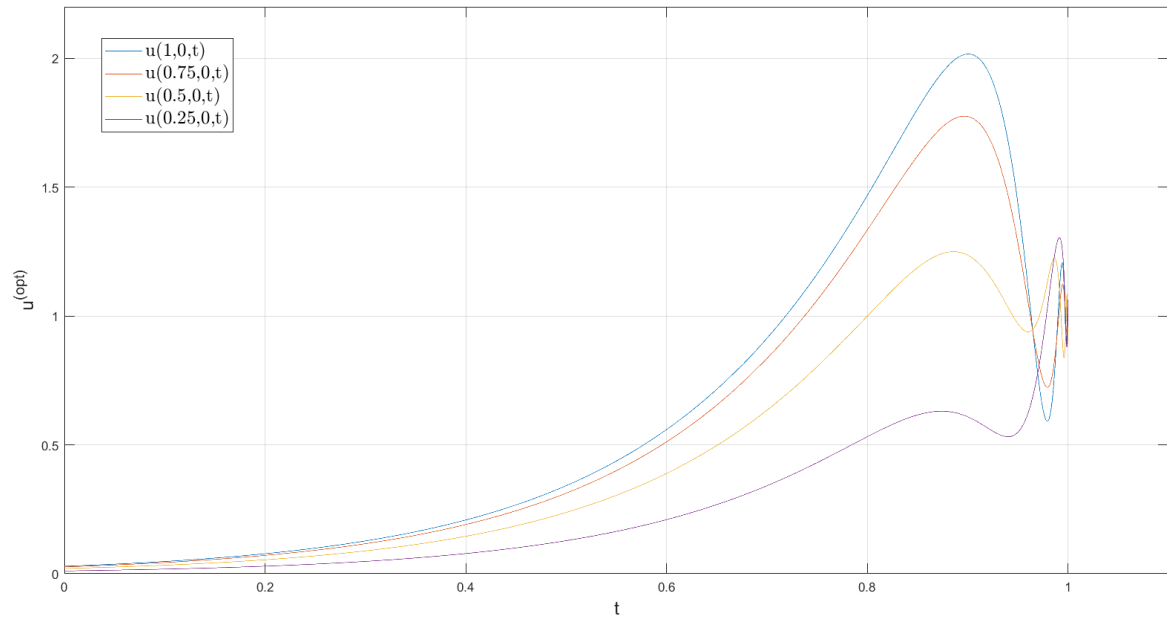
Obrázek 4.1: Získané teplotní profily $y(u^{opt})|_{t=T}$ pro experiment 1 pro $T = 1$.



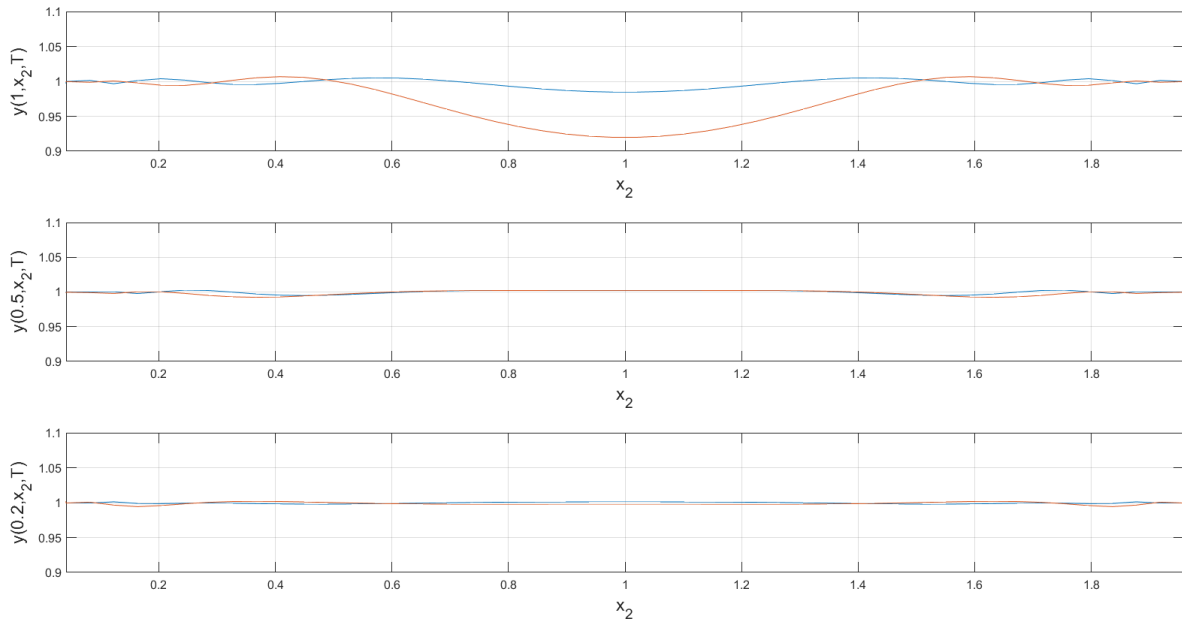
Obrázek 4.2: Časový průběh optimálního řízení $u^{(opt)}$ v několika bodech hranice $\partial\Omega_1$ pro experiment 1, $T = 1$ a $\alpha = 0$.



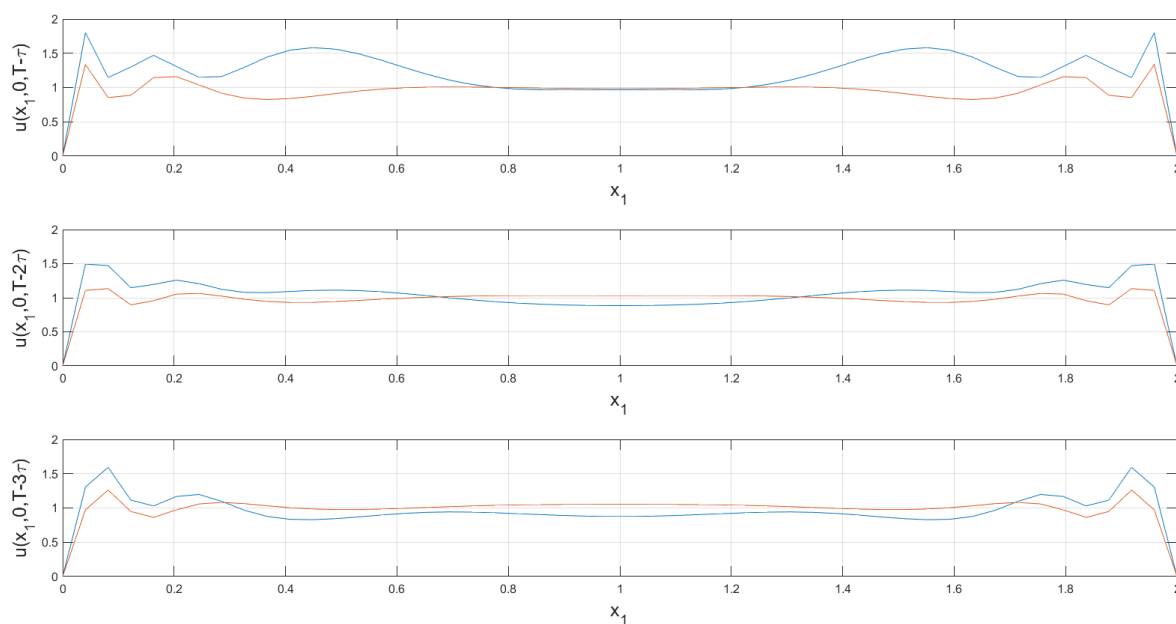
Obrázek 4.3: Časový průběh optimálního řízení $u^{(opt)}$ v několika bodech hranice $\partial\Omega_1$ pro experiment 1, $T = 1$ a $\alpha = 1$.



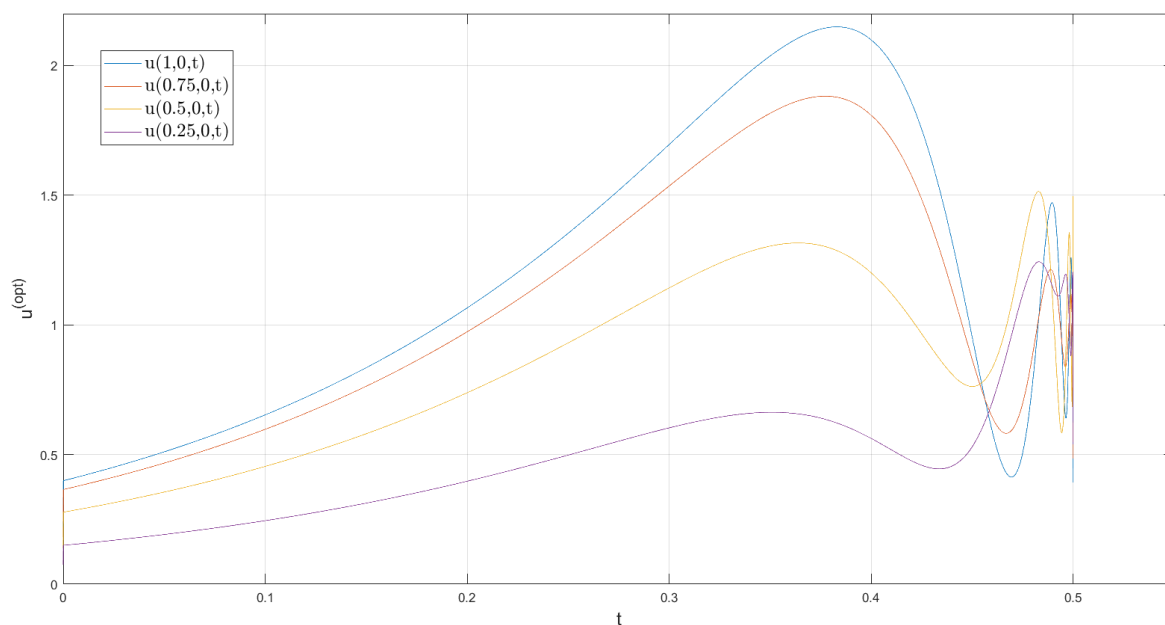
Obrázek 4.4: Časový průběh optimálního řízení $u^{(opt)}$ v několika bodech hranice $\partial\Omega_1$ pro experiment 1, $T = 1$ a $\alpha = 10^{-2}$.



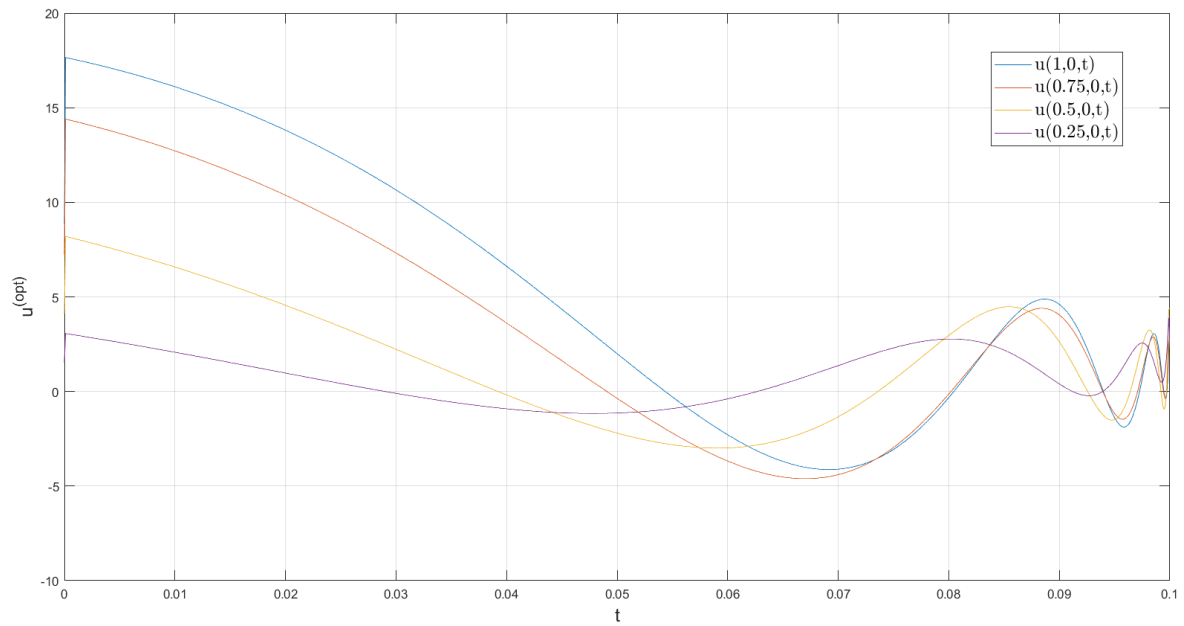
Obrázek 4.5: Porovnání získaných teplotních profilů $y(u^{(opt)})|_{t=T}$ pro experiment 1 v řezech pro $x_1 \in \{0.2, 0.5, 1\}$. Pro $T = 1$, $\alpha = 0$ (modrá) a $\alpha = 10^{-2}$ (červená).



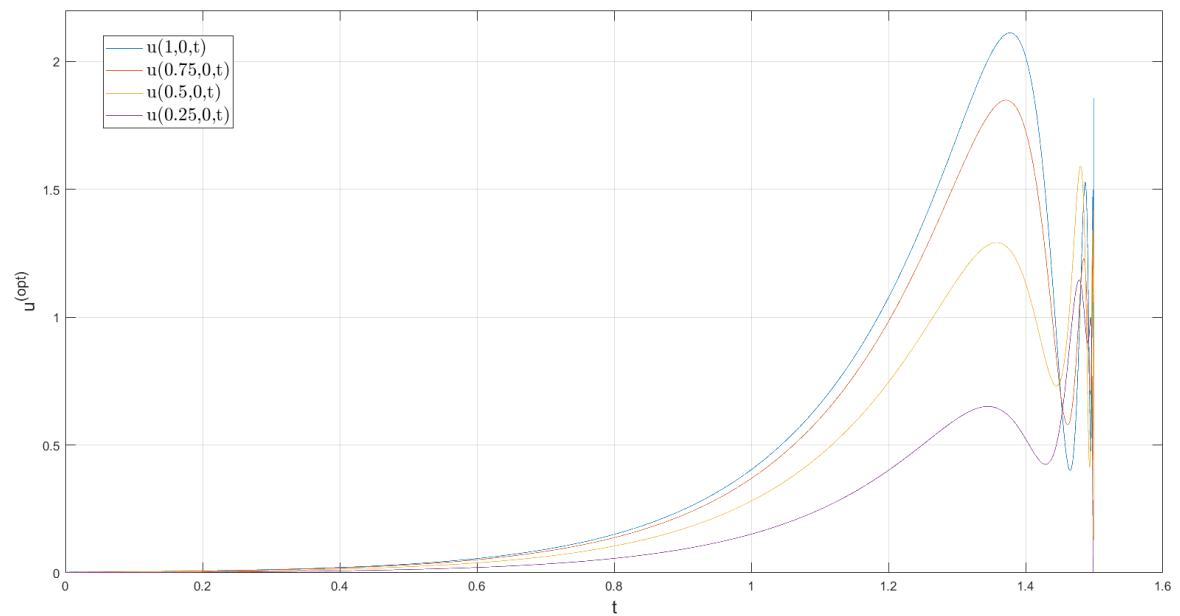
Obrázek 4.6: Porovnání optimálních řízení $u^{(opt)}$ pro experiment 1 na hranici $\partial\Omega_1$ v časech $t \in \{T - 3\tau, T - 2\tau, T - \tau\}$. Pro $T = 1$, $\alpha = 0$ (modrá) a $\alpha = 10^{-2}$ (červená).



Obrázek 4.7: Časový průběh optimálního řízení $u^{(opt)}$ v několika bodech hranice $\partial\Omega_1$ pro experiment 1, $T = 0.5$ a $\alpha = 0$.



Obrázek 4.8: Časový průběh optimálního řízení $u^{(opt)}$ v několika bodech hranice $\partial\Omega_1$ pro experiment 1, $T = 0.1$ a $\alpha = 0$.



Obrázek 4.9: Časový průběh optimálního řízení $u^{(opt)}$ v několika bodech hranice $\partial\Omega_1$ pro experiment 1, $T = 1,5$ a $\alpha = 0$.

k	$\hat{J}^d(u^{(k)})$		
0	1.91920	1.91920	1.91920
200	0.000478	0.004917	0.017507
400	0.000224	0.001930	0.015998
600	0.000151	0.001793	0.015964
800	0.000118	0.001748	0.015959
1000	0.000101	0.001729	0.015959
1200	9.02e-05	0.001719	0.015958
1400	8.16e-05	0.001713	0.015958
1600	2.78e-05	0.001710	0.015958
1800	2.43e-05	0.001707	0.015958
2000	2.15e-05	0.001705	0.015958
	$\alpha = 0$	$\alpha = 10^{-3}$	$\alpha = 10^{-2}$

Tabulka 4.4: Srovnání konvergence reziduí $\hat{J}^d(u^{(k)})$ pro experiment 1, $T = 1$ a různé koeficienty regulace.

k	$\hat{J}^d(u^{(k)})$			
0	1.9192	1.9192	1.9192	1.9192
200	4.70E-04	4.63E-04	4.23E-03	2.81E-02
400	1.91E-04	1.89E-04	3.41E-04	1.68E-02
600	1.07E-04	1.08E-04	1.66E-04	1.22E-02
800	7.31E-05	7.34E-05	1.04E-04	9.68E-03
1000	5.49E-05	5.44E-05	7.47E-05	8.08E-03
1200	4.22E-05	4.26E-05	5.86E-05	6.98E-03
1400	3.37E-05	3.42E-05	4.77E-05	6.16E-03
1600	2.78E-05	2.79E-05	3.98E-05	5.51E-03
1800	2.29E-05	2.43E-05	3.38E-05	5.01E-03
2000	1.90E-05	2.15E-05	2.91E-05	4.59E-03
	$T = 1.5$	$T = 1$	$T = 0.5$	$T = 0.1$

Tabulka 4.5: Srovnání konvergence reziduí $\hat{J}^d(u^{(k)})$ pro experiment 1 pro různá T a $\alpha = 0$.

4.2 Spojitý požadovaný profil

Nyní se zabýváme o něco zajímavější úlohou. Z počáteční nulové teploty se budeme snažit za čas T dosáhnout na množině Ω určitého gaussovského profilu. Pro přesnější formulaci zavedme Gaussovu funkci

$$G_{[A,\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2]}(x_1, x_2) = A \exp\left(-\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

kde $A, \mu_{1,2} \in \mathbb{R}, \sigma_{1,2} > 0$ jsou parametry funkce. Nastavení experimentu bude

$$\begin{aligned} y_0 &= 0 \quad \text{na } \Omega, \\ y_d &= G_{[10,1,1,\frac{1}{3},\frac{1}{3}]} \quad \text{na } \Omega, \\ f &= 0 \quad \text{na } \Omega \times [0, T]. \end{aligned} \quad (\text{Experiment 2a})$$

Požadovaný profil $y_d = G_{[10,1,1,\frac{1}{3},\frac{1}{3}]}$ můžeme vidět na obrázku 4.10a. Nastavíme

$$\begin{aligned} \alpha &= 0, \\ T &= 0,5. \end{aligned}$$

Parametry diskretizace najdeme opět v tabulce 4.2. Pro počáteční odhad

$$u^{(0)} = 0 \quad \text{na } \gamma_h \times \bar{\pi}_\tau$$

zastavíme výpočet po 30 000 iteracích, kdy hodnoty

$$\|\nabla \hat{J}^d(u^{(opt)})\|_2 \doteq 4,83 \cdot 10^{-6} \quad \text{a} \quad \hat{J}^d(u^{(opt)}) \doteq 9,51 \cdot 10^{-3}.$$

Vidíme, že i přes značně vyšší počet iterací je chyba $\hat{J}^d(u^{(opt)})$ poměrně velká ve srovnání s chybami pro experiment 1 bez regularizace. To je způsobeno samotným procesem šíření tepla, tj. difúzním procesem, který se v každém okamžiku snaží systém dovést do rovnovážného stavu. Proto zvoleného gaussovského profilu, jehož teplota směrem ke středu oblasti Ω ostře narůstá, lze dosáhnout mnohem obtížněji než konstantního teplotního profilu z předchozího experimentu. Ačkoliv je tedy získaná chyba poměrně velká, povedlo se nám ji zmenšit o více než tři řády oproti počáteční chybě

$$\hat{J}^d(u^{(0)}) \doteq 17,45$$

a z poklesu hodnot reziduí v tabulce 4.6 lze předpokládat, že při dalším iterování by se výsledek mohl vylepšit. Získaný teplotní profil je na obrázku 4.10b a jeho srovnání s požadovaným profilem najdeme na obrázku 4.11. Největší odlišnost obou profilů můžeme pozorovat na okolí bodu $(1, 1)$. Hodnota získaného profilu v tomto bodě je

$$y(u^{(opt)})(1, 1, T) = 9,63,$$

což je o 0,37 méně než požadovaná výška. Průběh optimálního řízení je znázorněn na obrázku 4.12. Výkyvy teploty během řízení bychom opět mohli zmírnit pomocí regularizace. Pro

$$\begin{aligned} \alpha &= 10^{-3}, \\ T &= 0,5 \end{aligned}$$

je situace zobrazena na obrázcích 4.13 a 4.14.

Řešme stejnou úlohu avšak se zmenšeným rozptylem finálního profilu $y_d = G$. Přesněji, zabývejme se úlohou

$$\begin{aligned} y_0 &= 0 \quad \text{na } \Omega, \\ y_d &= G_{[10,1,1,\frac{1}{4},\frac{1}{4}]} \quad \text{na } \Omega, \\ f &= 0 \quad \text{na } \Omega \times [0, T]. \end{aligned} \quad (\text{Experiment 2b})$$

Požadovaný profil je vykreslen na obrázku 4.15a. Nárůst teploty v tomto finálním profilu je ještě prudší než pro experiment 2a. Zvolíme-li

$$\begin{aligned} \alpha &= 0, \\ T &= 0,5, \end{aligned}$$

potom po 43 000 iterací získáme

$$\|\nabla \hat{J}^d(u^{(opt)})\|_2 \doteq 7,64 \cdot 10^{-6} \quad \text{a} \quad \hat{J}^d(u^{(opt)}) \doteq 3,63 \cdot 10^{-2}.$$

Řízení nalezneme na obrázku 4.13 a získaný profil na obrázku 4.14. Vidíme, že pro experiment 2b je získaný profil ještě o něco nižší (hodnota vrcholu je $y(u^{(opt)})(1,1,T) \doteq 9,16$) a teplotní výkyvy během řízení ještě větší než pro experiment 2a pro $\alpha = 0$.

Nyní budeme uvažovat profil y_d složený ze dvou Gaussových funkcí. Necht'

$$\begin{aligned} y_0 &= 0 \quad \text{na } \Omega, \\ y_d &= G_1 + G_2 \quad \text{na } \Omega, \\ f &= 0 \quad \text{na } \Omega \times [0, T], \end{aligned} \quad (\text{Experiment 2c})$$

kde

$$\begin{aligned} G_1 &= G_{[1,0.6,0.6,\frac{1}{3},\frac{1}{3}]}, \\ G_2 &= G_{[1,1.4,1.4,\frac{1}{3},\frac{1}{3}]}. \end{aligned}$$

Nastavíme

$$\begin{aligned} \alpha &= 0, \\ T &= 0,6. \end{aligned}$$

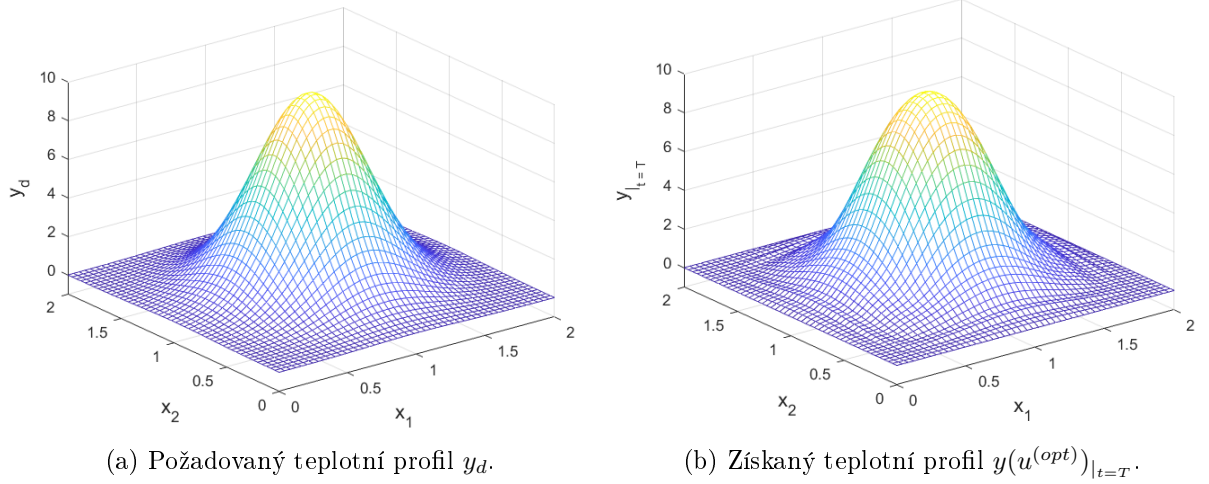
Hodnoty diskretizace najdeme v tabulce 4.2. Nyní je požadovaný profil zdánlivě složitější než v experimentech 2b a 2c, mohli bychom se proto domnívat, že řešení bude obtížnější dosažitelné. Jelikož jsme však výšku profilu y_d zvolili desetkrát menší (nárůst teploty je tedy pozvolnější), získáme optimální řešení již po 13 000 iterací s hodnotami

$$\|\nabla \hat{J}^d(u^{(opt)})\|_2 \doteq 8,38 \cdot 10^{-7} \quad \text{a} \quad \hat{J}^d(u^{(opt)}) \doteq 1,51 \cdot 10^{-4}.$$

Získaný profil a jeho srovnání s požadovaným profilem nalezneme na obrázcích 4.18b, 4.19 a 4.20. Na obrázku 4.21 vidíme průběh optimálního řízení na hranici $\partial\Omega_1$. Na ostatních částech hranice je řízení symetrické.

k	$\hat{J}^d(u^{(k)})$	$\ \nabla \hat{J}^d(u^{(k)})\ _2$
0	1.75E+01	8.08E-03
3000	1.86E-01	8.16E-05
6000	6.93E-02	2.87E-05
9000	4.46E-02	1.35E-05
12000	3.23E-02	1.07E-05
15000	2.54E-02	1.11E-04
18000	2.09E-02	8.99E-05
21000	1.72E-02	1.03E-05
24000	1.41E-02	3.01E-06
27000	1.09E-02	4.79E-06
30000	9.50E-03	4.83E-06

Tabulka 4.6: Hodnoty reziduí $\hat{J}^d(u^{(k)})$ a $\|\nabla \hat{J}^d(u^{(k)})\|_2$ pro experiment 2a, $T = 0,5$ a $\alpha = 0$.



Obrázek 4.10: Požadovaný a získaný teplotní profil pro experiment 2a, $T = 0,5$ a $\alpha = 0$.

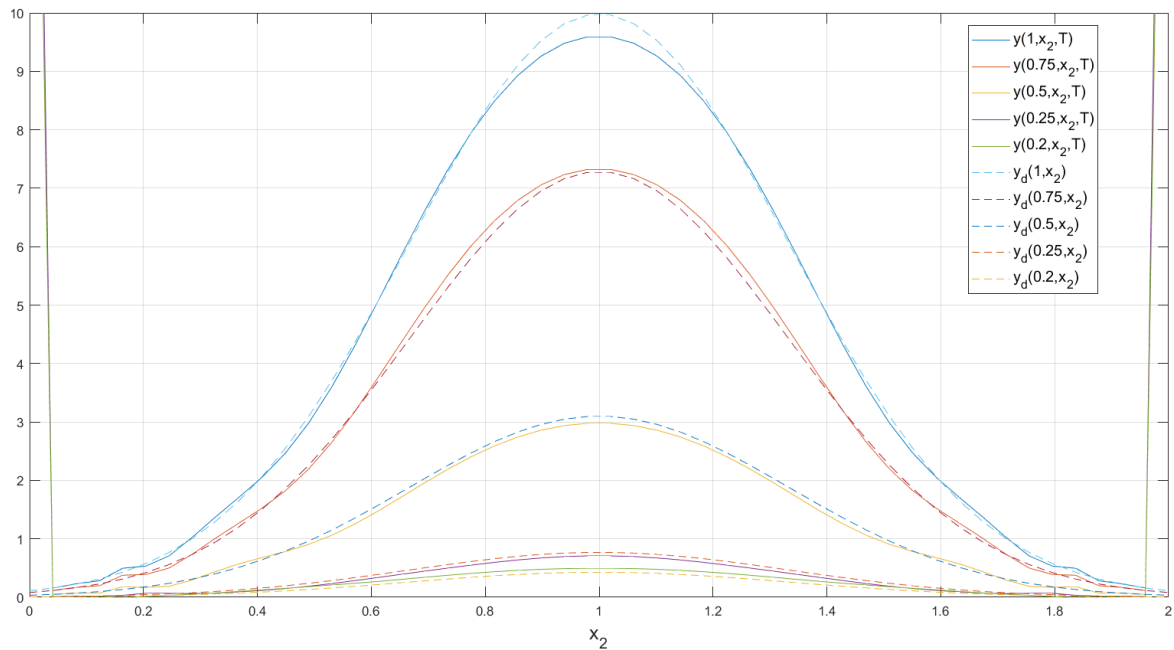
4.3 Nespojité požadovaný profil

Gaussova profilu tedy umíme dosáhnout poměrně spolehlivě. Nyní provedeme experiment s nespojitým požadovaným profilem. Nespojitého teplotního profilu pochopitelně dosáhnout vůbec nelze. Důvodem je opět difúzní proces šíření tepla. Zajímá nás pouze, s jakou přesností je možné se k danému tvaru přiblížit. Uvažujme charakteristickou funkci množiny $M \subset \mathbb{R}^2$

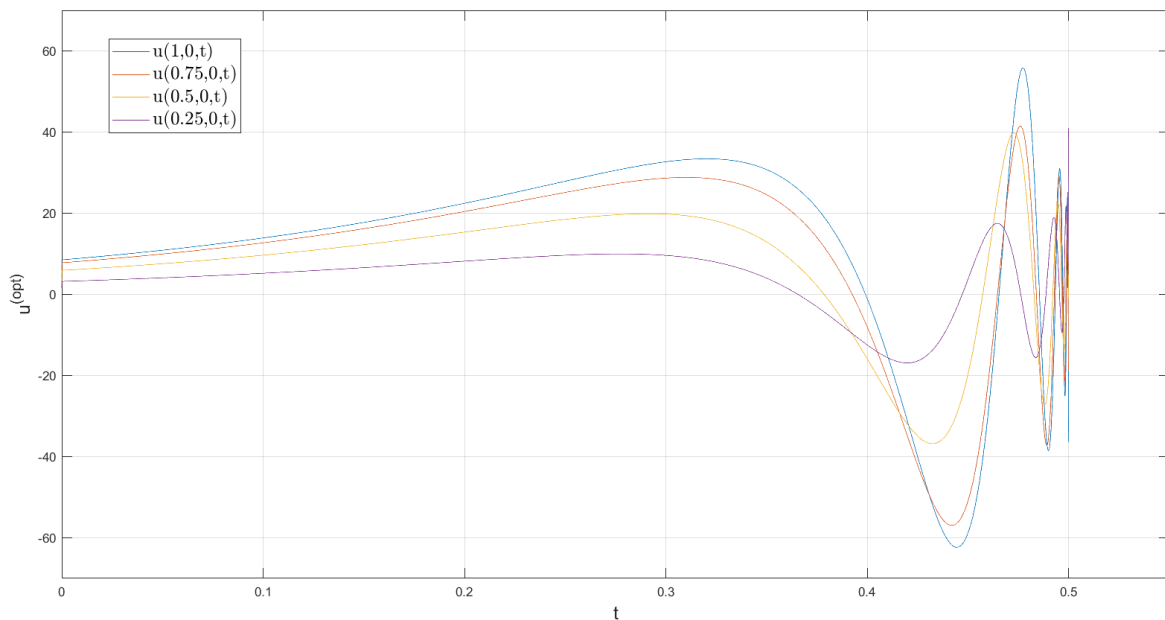
$$\chi_M(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & (x_1, x_2) \in M \\ 0 & (x_1, x_2) \notin M \end{cases} \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

a množinu $B_{(1,1)}(\frac{1}{3}) \subset \mathbb{R}^2$ představující kruh se středem v bodě $(1,1)$ a poloměrem $\frac{1}{3}$. Nastavení úlohy zvolíme

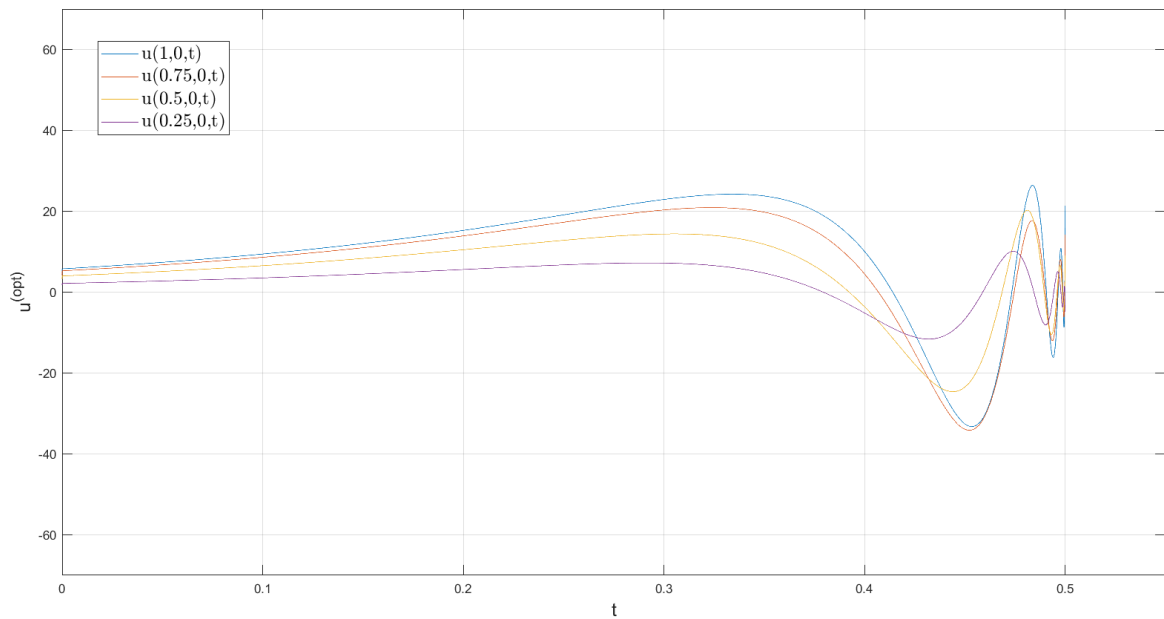
$$\begin{aligned} y_0 &= 0 \quad \text{na } \Omega, \\ y_d &= \chi_{\{B_{(1,1)}(\frac{1}{3})\}} \quad \text{na } \Omega, \\ f &= 0 \quad \text{na } \Omega \times [0, T] \end{aligned} \quad (\text{Experiment 3})$$



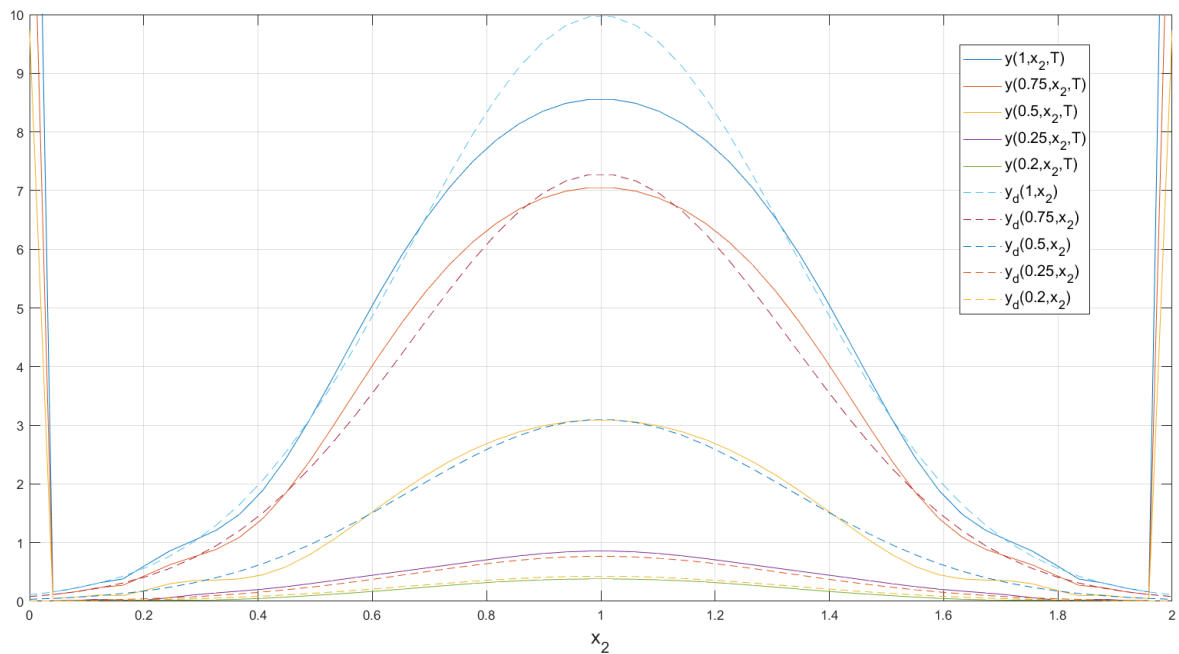
Obrázek 4.11: Porovnání získaného teplotního profilu $y(u^{(opt)})|_{t=T}$ (plně) a požadovaného profilu $y_d = G_{[10,1,1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]}$ (přerušovaně) pro experiment 2a, $T = 0,5$ a $\alpha = 0$ v bodech $x_1 \in \{0.2, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$.



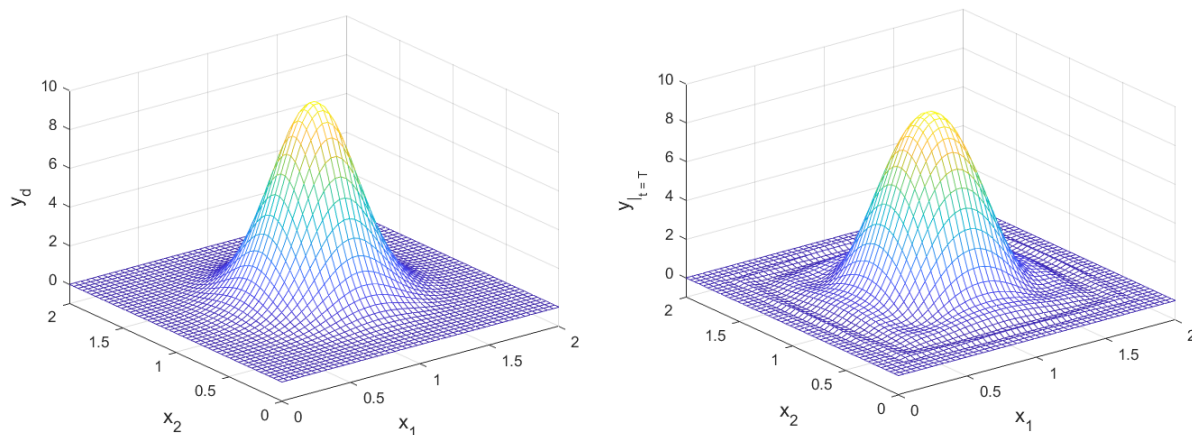
Obrázek 4.12: Časový průběh optimálního řízení $u^{(opt)}$ v několika bodech hranice $\partial\Omega_1$ pro experiment 2a, $T = 0,5$ a $\alpha = 0$.



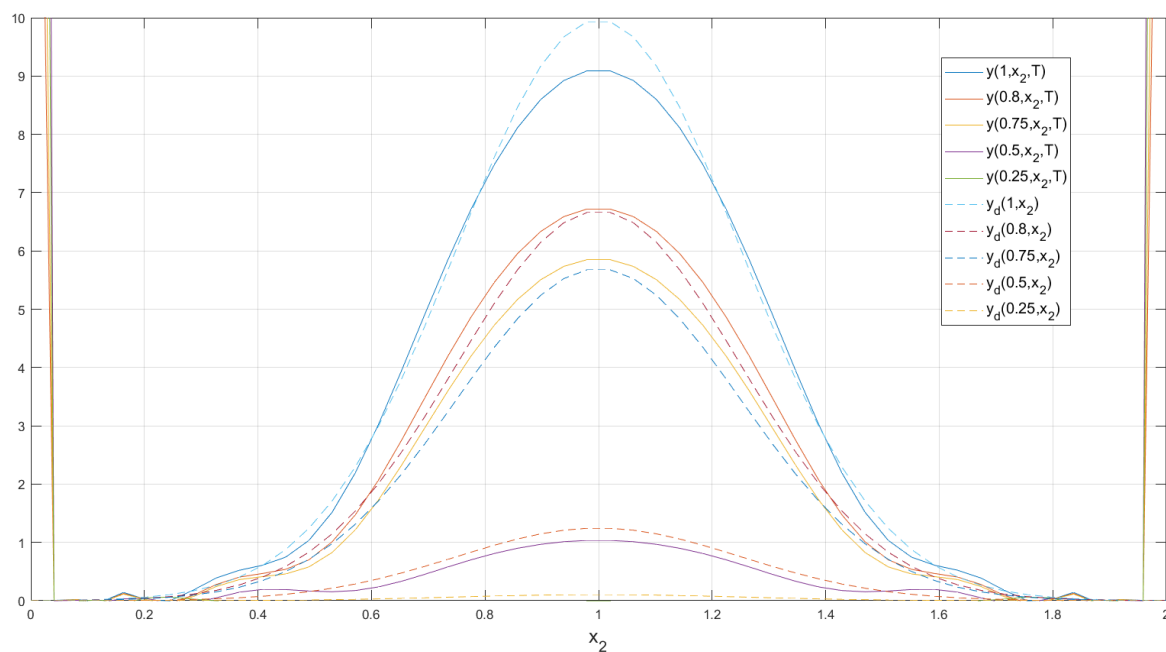
Obrázek 4.13: Časový průběh optimálního řízení $u^{(opt)}$ v několika bodech hranice $\partial\Omega_1$ pro experiment 2a, $T = 0,5$ a $\alpha = 10^{-3}$.



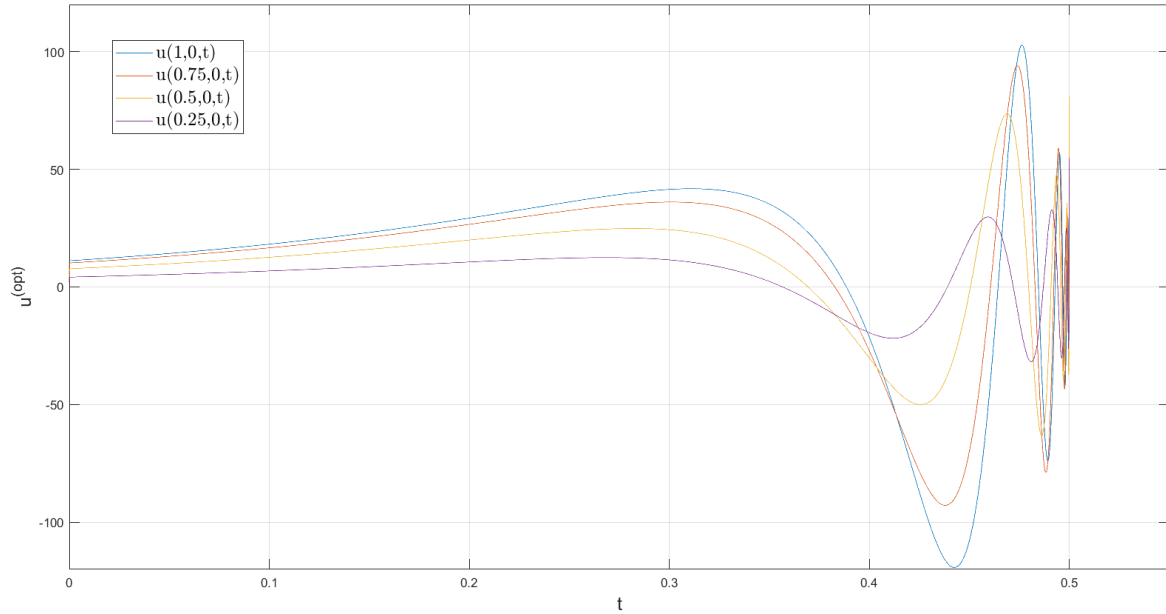
Obrázek 4.14: Porovnání získaného teplotního profilu $y(u^{(opt)})|_{t=T}$ (plně) a požadovaného profilu y_d (přerušovaně) pro experiment 2a, $T = 0,5$ a $\alpha = 10^{-3}$ v bodech $x_1 \in \{0.2, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$.

(a) Požadovaný teplotní profil y_d .(b) Získaný teplotní profil $y(u^{opt})|_{t=T}$.

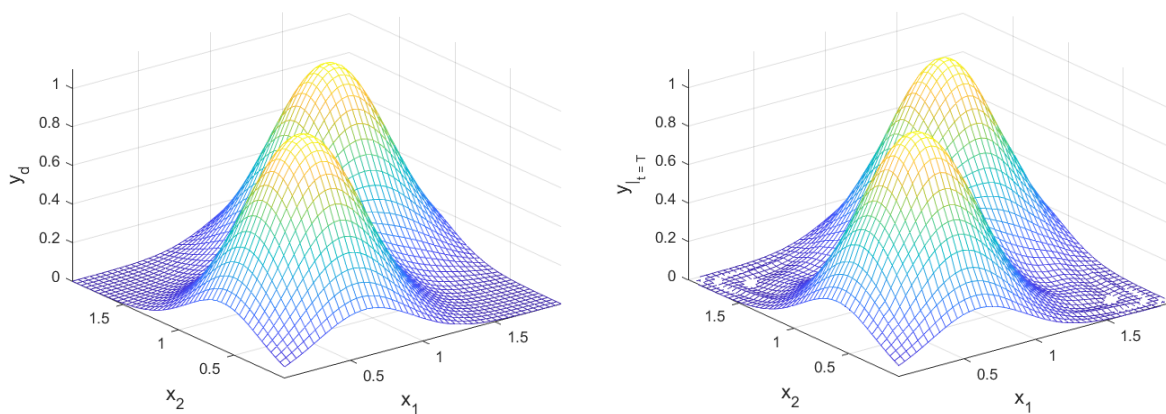
Obrázek 4.15: Požadovaný a získaný teplotní profil pro experiment 2b, $T = 0,5$ a $\alpha = 0$.



Obrázek 4.16: Porovnání získaného teplotního profilu $y(u^{opt})|_{t=T}$ (plně) a požadovaného profilu y_d (přerušovaně) pro experiment 2b, $T = 0,5$ a $\alpha = 0$ v bodech $x_1 \in \{0.25, 0.5, 0.75, 0.8, 1\}$.



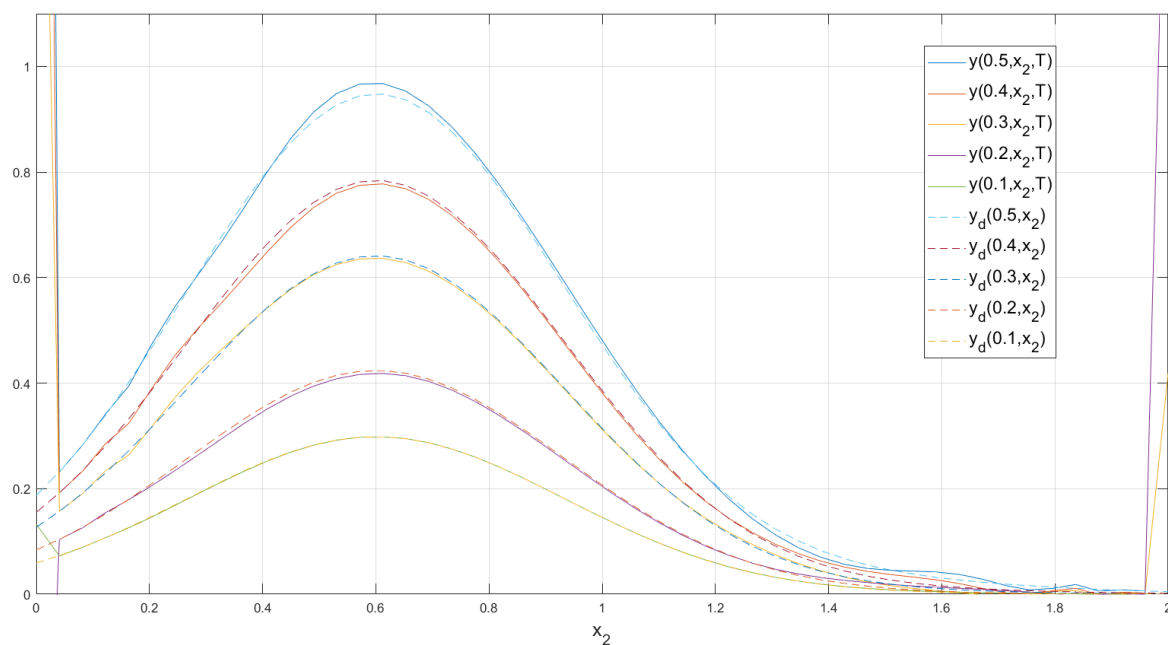
Obrázek 4.17: Časový průběh optimálního řízení $u^{(opt)}$ v několika bodech hranice $\partial\Omega_1$ pro experiment 2b, $T = 0,5$ a $\alpha = 0$.



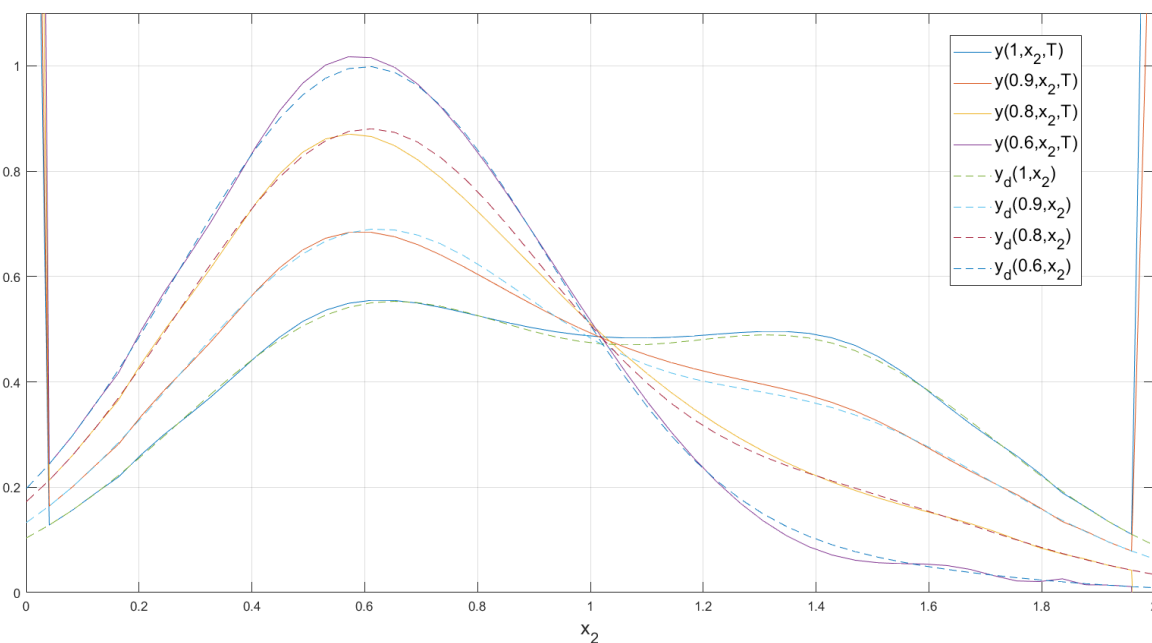
(a) Požadovaný teplotní profil $y_d = G_1 + G_2$.

(b) Získaný teplotní profil $y(u^{(opt)})|_{t=T}$.

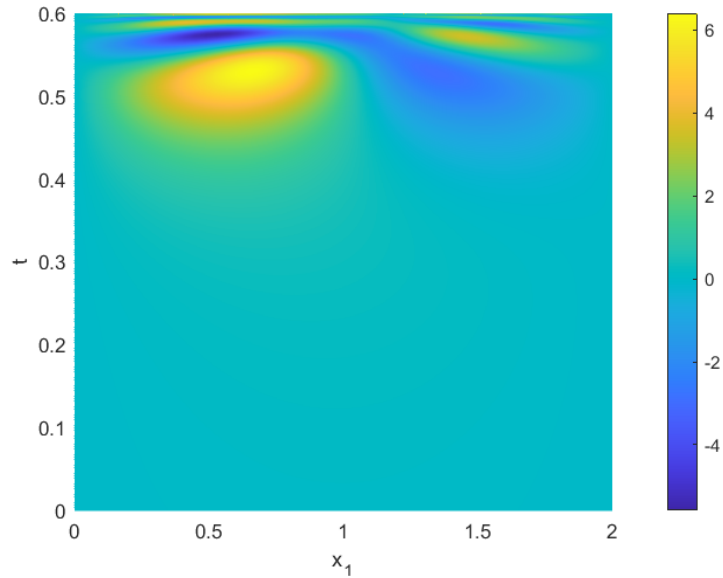
Obrázek 4.18: Požadovaný a získaný teplotní profil pro experiment 2c, $T = 0,6$ a $\alpha = 0$.



Obrázek 4.19: Porovnání získaného teplotního profilu $y(u^{(opt)})|_{t=T}$ (plně) a požadovaného profilu $y_d = G_1 + G_2$ (přerušovaně) pro experiment 2c, $T = 0,6$ a $\alpha = 0$ v řezech pro $x_1 \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$.



Obrázek 4.20: Porovnání získaného teplotního profilu $y(u^{(opt)})|_{t=T}$ (plně) a požadovaného profilu $y_d = G_1 + G_2$ (přerušovaně) pro experiment 2c, $T = 0,6$ a $\alpha = 0$ v řezech pro $x_1 \in \{0.6, 0.8, 0.9, 1\}$.



Obrázek 4.21: Časový průběh optimálního řízení $u^{(opt)}$ na hranici $\partial\Omega_1$ pro experiment 2c, $T = 0,6$ a $\alpha = 0$.

a parametry α , T nastavíme jako

$$\begin{aligned}\alpha &= 0, \\ T &= 0,5.\end{aligned}$$

Požadovaný profil je zachycen na obrázku 4.22a. Po 15 000 iteracích získáme výsledek s chybou

$$\|\nabla \hat{J}^d(u^{(opt)})\|_2 \doteq 1,48 \cdot 10^{-6} \quad \text{a} \quad \hat{J}^d(u^{(opt)}) \doteq 2,70 \cdot 10^{-2}.$$

Získaný teplotní profil můžeme vidět na obrázku 4.22b a optimální řízení na obrázku 4.23.

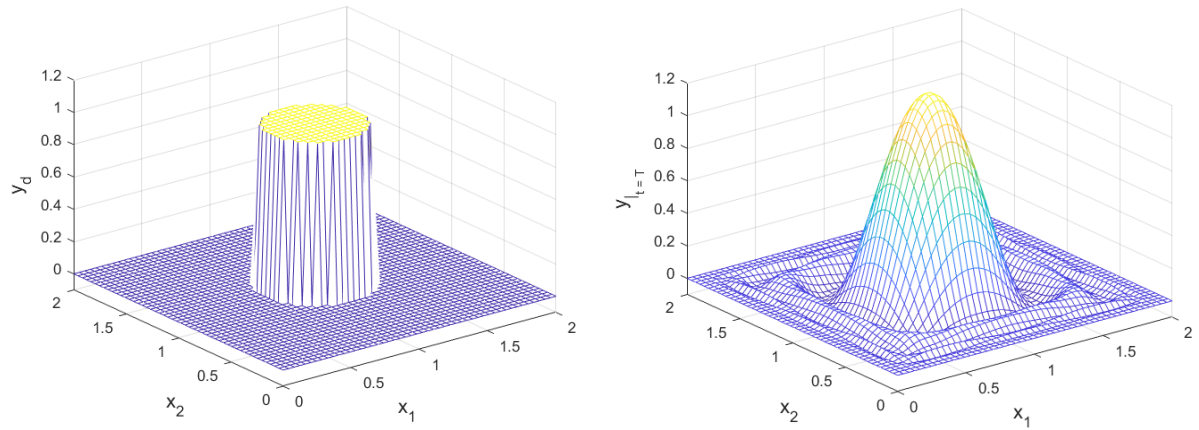
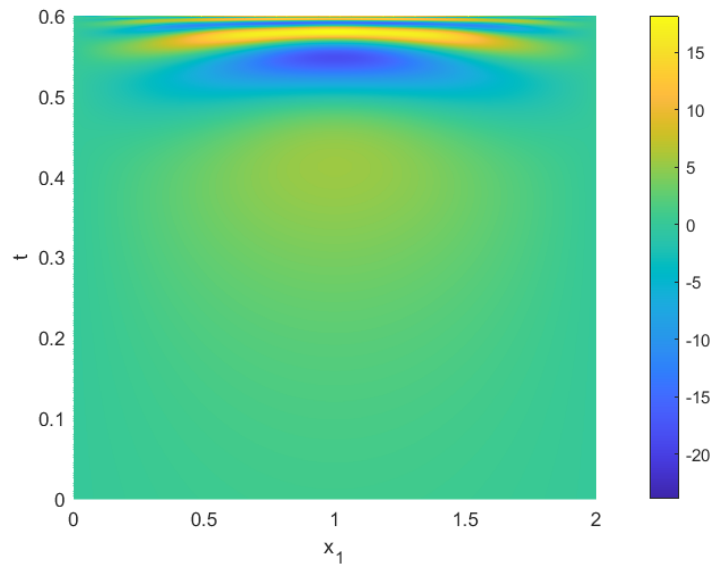
4.4 Optimalizace chladícího procesu

Posledním zde diskutovaným experimentem je optimalizace chladícího procesu. Až doposud jsme ve všech experimentech uvažovali, že teplota daného média je předespána homogenní rovnicí vedení tepla. Nyní však předpokládáme, že v oblasti Ω působí zdroj tepla. Naším cílem bude z daného počátečního stavu navzdory působení tepelného zdroje dosáhnout konstantního teplotního profilu. Konkrétně budeme řešit následující úlohu

$$\begin{aligned}y_0 &= 1 \quad \text{na } \Omega, \\ y_d &= 0 \quad \text{na } \Omega, \\ f &= f_1 + f_2 \quad \text{na } \Omega \times [0, T],\end{aligned} \tag{Experiment 4a}$$

kde

$$\begin{aligned}f_1 &= G_{[50,0.6,1,\frac{1}{3},\frac{1}{3}]}, \\ f_2 &= G_{[100,1.4,1,\frac{1}{4},\frac{1}{4}]}.\end{aligned}$$

(a) Požadovaný teplotní profil $y_d = \chi_{\{B_{(1,1)}(\frac{1}{3})\}}$.(b) Získaný teplotní profil $y(u^{(opt)})|_{t=T}$.Obrázek 4.22: Požadovaný a získaný teplotní profil pro experiment 3, $T = 0,5$ a $\alpha = 0$.Obrázek 4.23: Časový průběh optimálního řízení $u^{(opt)}$ na hranici $\partial\Omega_1$ pro experiment 3, $T = 0,5$ a $\alpha = 0$.

Funkce f je vykreslena na obrázku 4.24. Stejně jako v experimentu 1 bude i zde díky nulové říditelnosti rovnice vedení tepla existovat přesné řešení úlohy. Kvůli zdrojovému členu bude však optimální řízení hůře dosažitelné. Při volbě

$$\begin{aligned}\alpha &= 0, \\ T &= 0,5\end{aligned}$$

dosáhneme po 18 000 iteracích výsledku s hodnotami

$$\|\nabla \hat{J}^d(u^{(opt)})\|_2 \doteq 3,02 \cdot 10^{-6} \quad \text{a} \quad \hat{J}^d(u^{(opt)}) \doteq 1,60 \cdot 10^{-3}.$$

Získaný teplotní profil a řízení jsou na obrázcích 4.25 a 4.26.

Řešme úlohu znovu ovšem nyní s časově proměnným pulzujícím zdrojem. Uvažujme

$$\begin{aligned}y_0 &= 1 \quad \text{na } \Omega, \\ y_d &= 0 \quad \text{na } \Omega, \\ f &= f_3 \quad \text{na } \Omega \times [0, T],\end{aligned} \tag{Experiment 4b}$$

kde

$$f_3(x_1, x_2, t) = G_{[50,1,1,\frac{1}{3},\frac{1}{3}]}(x_1, x_2) \cdot \left| \sin\left(\frac{3\pi}{T}t\right) \right|.$$

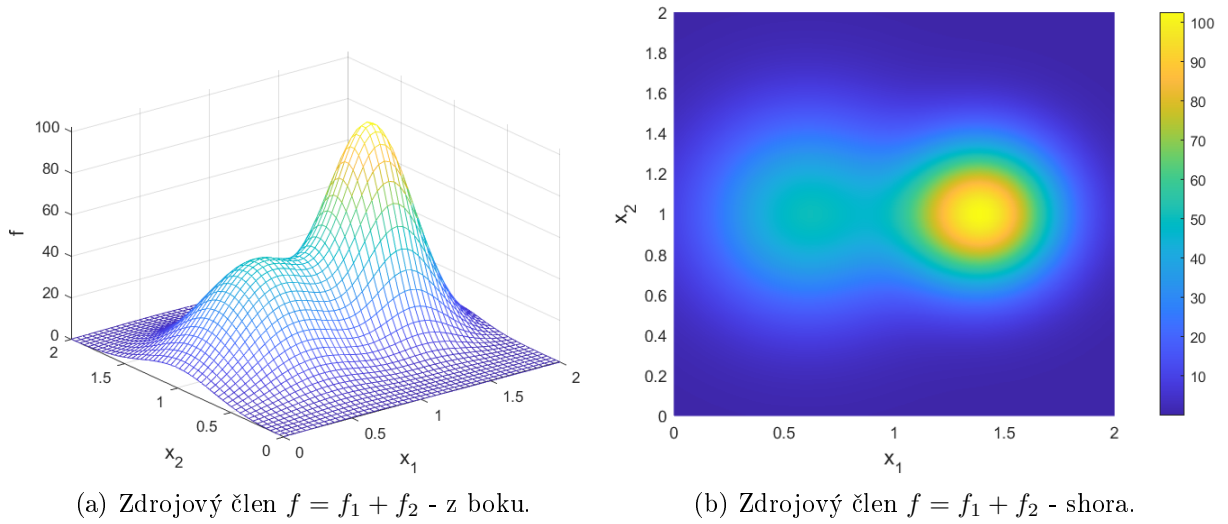
Pro

$$\begin{aligned}\alpha &= 0, \\ T &= 0,3\end{aligned}$$

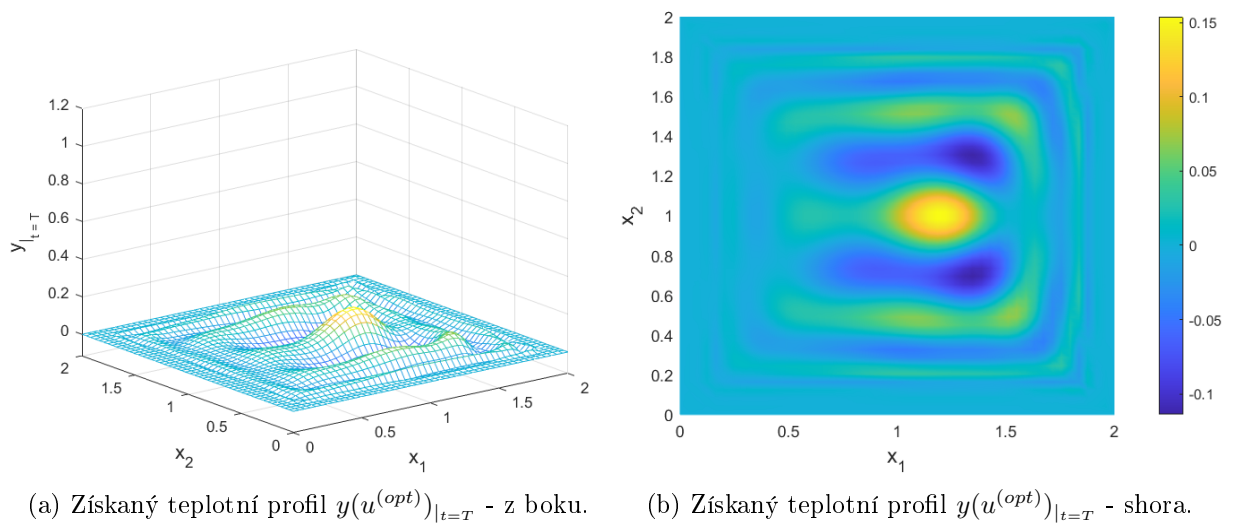
a diskretizaci dle tabulky 4.2 nalezneme optimum s hodnotami

$$\|\nabla \hat{J}^d(u^{(opt)})\|_2 \doteq 1,12 \cdot 10^{-6} \quad \text{a} \quad \hat{J}^d(u^{(opt)}) \doteq 3,65 \cdot 10^{-4}.$$

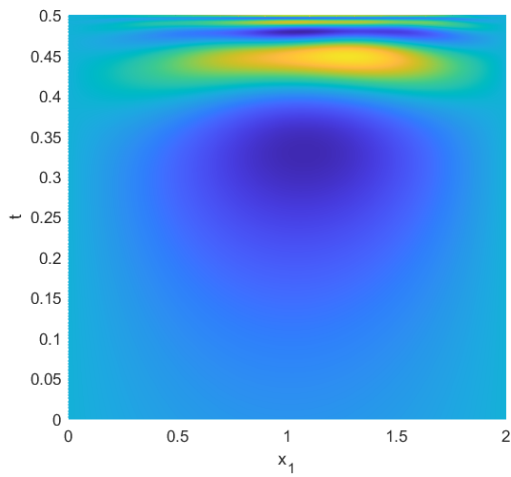
Získaný teplotní profil můžeme vidět na obrázku 4.27 a optimální řízení na obrázku 4.28. Chyba řešení je téměř o řád menší než pro experiment 4a, což je způsobeno menší amplitudou zdrojového členu.



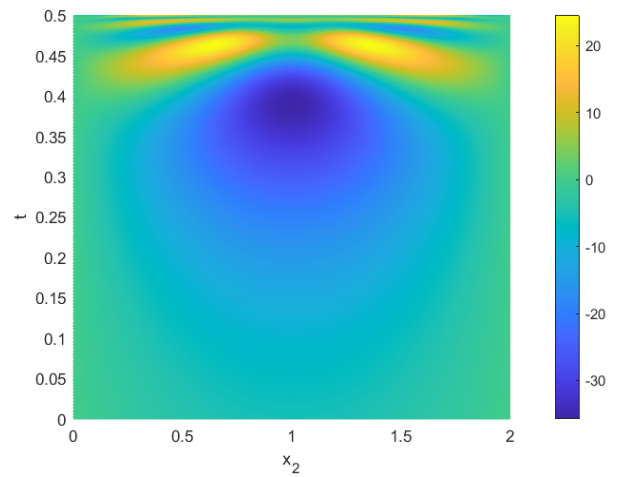
Obrázek 4.24: Zdrojový člen $f = f_1 + f_2$ pro experiment 4a.



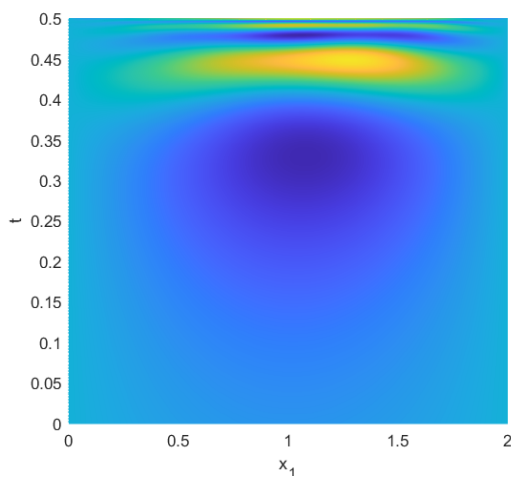
Obrázek 4.25: Získaný teplotní profil $y(u^{opt})|_{t=T}$ pro experiment 4a, $T = 0,5$ a $\alpha = 0$.



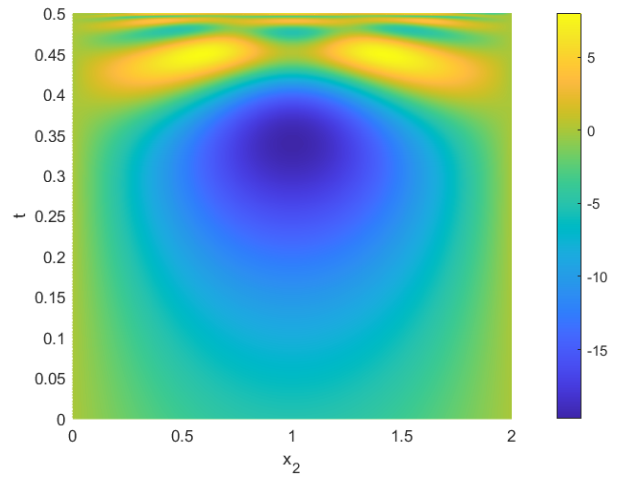
(a) Průběh řízení $u^{(opt)}$ na hranici $\partial\Omega_1$.



(b) Průběh řízení $u^{(opt)}$ na hranici $\partial\Omega_2$.

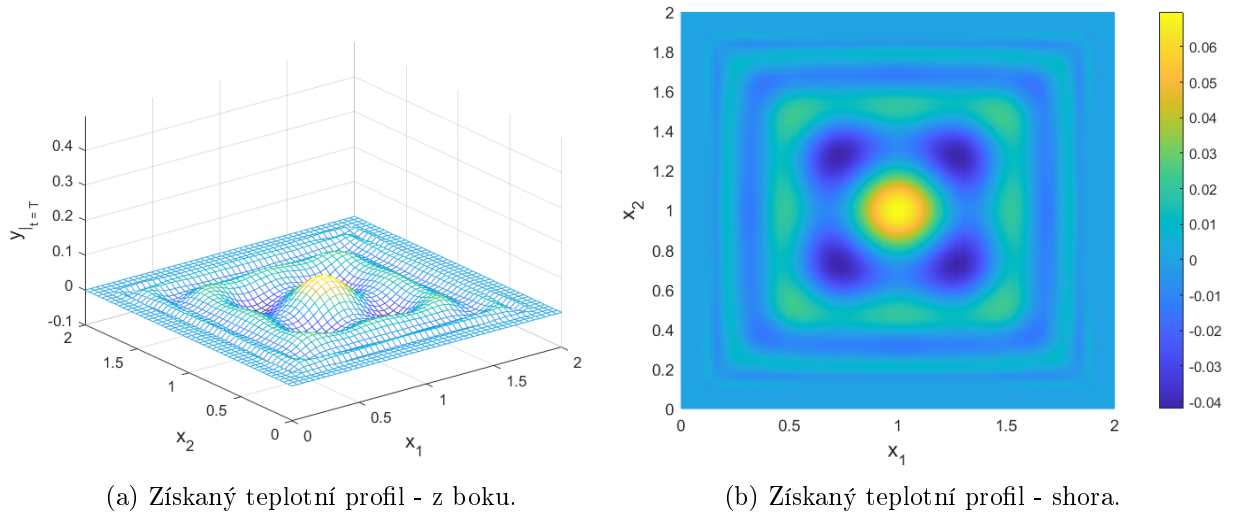


(c) Průběh řízení $u^{(opt)}$ na hranici $\partial\Omega_3$.

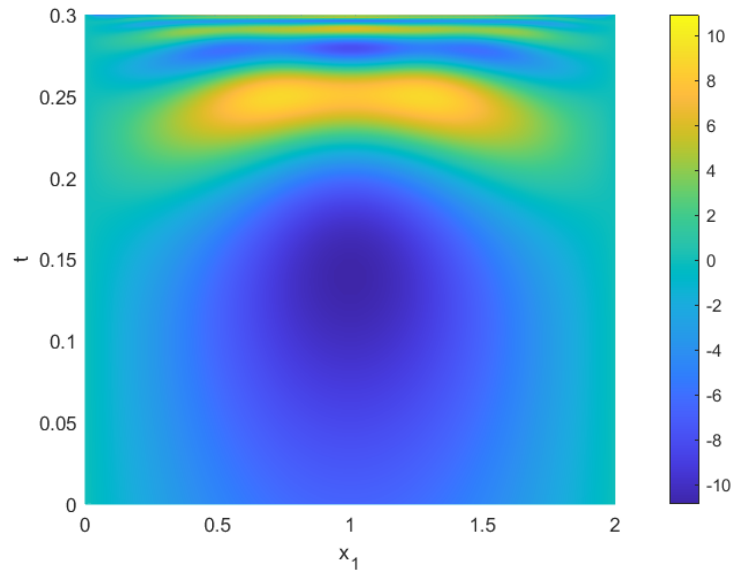


(d) Průběh řízení $u^{(opt)}$ na hranici $\partial\Omega_4$.

Obrázek 4.26: Časový průběh optimálního řízení $u^{(opt)}$ pro experiment 4a, $T = 0,5$ a $\alpha = 0$.



Obrázek 4.27: Získaný teplotní profil $y(u^{(opt)})|_{t=T}$ pro experiment 4b, $T = 0,3$ a $\alpha = 0$.



Obrázek 4.28: Časový průběh optimálního řízení $u^{(opt)}$ na hranici $\partial\Omega_1$ pro experiment 4b, $T = 0,3$ a $\alpha = 0$.

Závěr

V rámci této práce jsem se zabýval optimalizací řízení počáteční a okrajové úlohy pro rovnici vedení tepla. K vyřešení tohoto problému jsem použil numerickou metodu využívající adjungovaného přístupu pro výpočet derivace ztrátového funkcionálu J . Na vybraných experimentech byl otestován vliv regularizačního členu na tvar optimálního řízení. Byla demonstrována vyšší přesnost získaných výsledků pro spojitě požadované profily v porovnání s nespojitými a byla provedena optimalizace chlazení předmětu zahřívajícího různými zdroji tepla. Pro všechny vyzkoušené experimenty se podařilo nalézt aproximaci optimálního řízení. Tímto způsobem byla částečně validována správnost zvolené numerické metody.

Veškeré experimenty byly prováděny v bezrozměrném nastavení, mají tedy kvalitativní fyzikální interpretaci, nikoliv však kvantitativní. V tomto ohledu je možné práci do budoucna rozšířit a zkoumané metody použít při numerických simulacích na reálných datech.

Literatura

- [1] Walter A Strauss. *Partial differential equations: An introduction*. John Wiley & Sons, 2007.
- [2] Shuangling Dong and Songping Wu. A Modified Navier-Stokes Equation for Incompressible Fluid Flow. *Procedia Engineering*, 126:169–173, 2015.
- [3] Ebiendele EboSOLE Peter and Adamu Bala. Application of Navier–Stokes Equation to Solve Fluid Flow Problems. *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science*, 35(8):101–114, 2020.
- [4] Pavel Strachota, Aleš Wodecki, and Michal Beneš. Focusing the Latent Heat Release in 3D Phase Field Simulations of Dendritic Crystal Growth. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 29(6):065009, 2021.
- [5] Michael Hinze, René Pinnau, Michael Ulbrich, and Stefan Ulbrich. *Optimization with PDE constraints*, volume 23. Springer Science & Business Media, 2008.
- [6] Antoine Henrot and Jan Sokolowski. *A Shape Optimization Problem for the Heat Equation*, pages 204–223. Springer US, Boston, MA, 1998.
- [7] Aleš Wodecki, Monika Balázsová, Pavel Strachota, and Tomáš Oberhuber. Existence of Optimal Control for Dirichlet Boundary Optimization in a Phase Field Problem. *Journal of Dynamical and Control Systems*, pages 1–23, 2023.
- [8] Aleš Wodecki, Pavel Strachota, Tomáš Oberhuber, Kateřina Škardová, Monika Balázsová, and Michal Bohatý. Numerical optimization of the Dirichlet boundary condition in the phase field model with an application to pure substance solidification. *Computers & Mathematics with Applications*, 145:90–105, 2023.
- [9] Manoj K Choudhary and Norman T Huff. Mathematical modeling in the glass industry: An overview of status and needs. *Glass science and technology (Frankfurt)*, 70(12):363–370, 1997.
- [10] Christian Brandenburg, Florian Lindemann, Michael Ulbrich, and Stefan Ulbrich. Advanced numerical methods for PDE constrained optimization with application to optimal design in Navier Stokes flow. In *Constrained optimization and optimal control for partial differential equations*, pages 257–275. Springer, 2012.
- [11] Jiangping Xu, Guillermo Vilanova, and Hector Gomez. Phase-field model of vascular tumor growth: Three-dimensional geometry of the vascular network and integration with imaging data. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 359:112648, 2020.

- [12] Pierluigi Colli, Andrea Signori, and Jürgen Sprekels. Optimal control of a phase field system modeling tumor growth with chemotaxis and singular potentials. *Applied Mathematics & Optimization*, 83:2017–2049, 2021.
- [13] Walter Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, Inc., 1991.
- [14] Pavel Drábek and Jaroslav Milota. *Methods of nonlinear analysis: applications to differential equations*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [15] Marian Muresan. *A concrete approach to classical analysis*, volume 14. Springer, 2009.
- [16] Marián Fabian, Petr Habala, Petr Hájek, Vicente Montesinos, and Václav Zizler. *Banach space theory: the basis for linear and nonlinear analysis*. Springer, 2011.
- [17] Vladimir Igorevich Bogachev and Maria Aparecida Soares Ruas. *Measure theory*, volume 1. Springer, 2007.
- [18] Antony Jameson and Luigi Martinelli. Aerodynamic shape optimization techniques based on control theory. *Computational Mathematics Driven by Industrial Problems: Lectures given at the 1st Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME) held in Martina Franca, Italy, June 21–27, 1999*, pages 151–221, 2007.
- [19] Lawrence C Evans. *Partial differential equations*, volume 19. American Mathematical Soc., 2010.
- [20] Gordon D Smith. *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*. Oxford university press, 1985.
- [21] Larry Armijo. Minimization of functions having Lipschitz continuous first partial derivatives. *Pacific Journal of mathematics*, 16(1):1–3, 1966.
- [22] Kendall Atkinson. *An introduction to numerical analysis*. John Wiley & Sons, 1991.
- [23] Salah-Eddine Chorfi, G El Guermai, Abdelaziz Khoutaibi, and Lahcen Maniar. Boundary null controllability for the heat equation with dynamic boundary conditions. *arXiv preprint arXiv:2206.10701*, 2022.