ČVUT ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

POSUDEK OPONENTA ZÁVĚREČNÉ PRÁCE

I. IDENTIFIKAČNÍ ÚDAJE

Název práce:	Náhodné algoritmy: teorie a implementace
Jméno autora:	Matěj Trödler
Typ práce:	bakalářská práce
Fakulta:	Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská (FJFI), ČVUT
Katedra:	Katedra matematiky
Oponent práce:	Jan Volec
Pracoviště oponenta práce:	Katedra matematiky, FJFI ČVUT

II. HODNOCENÍ JEDNOTLIVÝCH KRITÉRIÍ

Zadání — **náročnější**

Hodnocení náročnosti zadání závěrečné práce.

Cílem předložené bakalářské práce bylo nastudovat návrh a analýzu některých náhodných algoritmů, což je téma patřící na rozhraní matematiky a informatiky. Jde o aktivní oblast výzkumu s řadou významných teoretických i praktických výsledků, pro jejichž porozumění je často třeba propojit poznatky z několika různých oblastí.

Splnění zadání — **splněno s výhradami**

Posuďte, zda předložená závěrečná práce splňuje zadání. V komentáři případně uveďte body zadání, které nebyly zcela splněny, nebo zda je práce oproti zadání rozšířena. Nebylo-li zadání zcela splněno, pokuste se posoudit závažnost, dopady a případně i příčiny jednotlivých nedostatků.

I přes používaný plurál „algoritmy“ v názvu i zadání práce, v textu je de-facto studován pouze Kargerův algoritmus (v práci nazývaný MinCut) pro hledání minimálního řezu v grafech, a jeho následná varianta od Kargera a Steina (v práci nazývaná FastMinCut). U těchto algoritmu bohužel zcela chybí srovnání s deterministickými algoritmy na hledání minimálních řezů (viz. bod 4 zadání), což považuji za nešťastné i kvůli zavádějícímu vyznění úvodu do Kapitoly 1, viz. otázka č. 1 na konci posudku.

Osobně mi také chybí jakýkoliv komentář ohledně paměťové složitosti algoritmů MinCut a FastMinCut. Zde bych rád poznamenal, že tato má poznámka není myšlena samoúčelně – u těchto algoritmů totiž existuje jak vcelku přímočará implementace vyžadující pro n-vrcholové grafy prostor $O(n^2)$, tak i lehce komplikovanější implementace vyžadující pouze prostor lineární velikosti vzhledem k počtu hran a vrcholů.

Konečně, z textu práce mi nepřijde úplně jasné, jak přesně Kapitola 2 spadá do tématu náhodných algoritmů. Samotné slovo algoritmus se v této kapitole objeví právě jednou, a to hned v prvním odstavci kapitoly, a to ještě poměrně nicnevyjadřůjícím způsobem – viz. též otázka č. 6 na konci posudku. V dalších částech této kapitoly chybí jakákoliv další diskuze na toto téma, např. zda jde opět o Monte-Carlo algoritmus nebo jaké má vlastnosti (délka běhu, odhad chyby, atp.).

Protože je však zadání práce popsáno poměrně dost široce, hodnotím celkově tuto práci i přes zmíněné výhrady jako splněnou.

Zvolený postup řešení *Posuďte, zda student zvolil správný postup nebo metody řešení.*	**vhodný s výhradami**

Předložená bakalářská práce je především teoretická a rešeršního charakteru. Student pro její vypracování nepochybně musel nastudovat řadu konceptů a metod, které nejsou součástí povinných přednášek bakalářského studia na FJFI ČVUT. Považuji však za nešťastné, že různé částí důkazů výsledků prezentovaných v Kapitole 2.1, která je založena na pouze šestistránkovém článku Ulrich-Vybíral (reference [21]), byly záměrně vynechány, a čtenáři jsou explicitně odkázáni na práci [21] – viz. též otázka č. 7 na konci posudku.

Za doslova odfláknutý považuji důkaz Věty 1.12, který je označen jako zřejmý z důvodu, že z množství n vrcholů lze vybrat nejvýše n^2 dvojic. To je jistě pravda, avšak jak to souvisí s tím, že lze implementovat (n-2) kontrakcí hrany v souhrném čase n^2? Toto údajně „zřejmé" tvrzení je o to pikantnější, že autorem prezentovaná implementace MinCut v Pythonu ve skutečnosti vyžaduje řádově n^3 kroků (detaily viz. část Odborná úroveň práce).

Odborná úroveň *Posuďte úroveň odbornosti závěrečné práce, využití znalostí získaných studiem a z odborné literatury, využití podkladů a dat získaných z praxe.*	**průměrná**

Za velmi zásadní nedostatek považuji chybnou implementaci volby náhodné hrany v přiložené Python implementaci MinCut a FastMinCut. Konkrétně, vybrat uniformně náhodně vrchol, a následně vybrat uniformně náhodně jednoho z jeho sousedů nedává uniformní distribuci na hranách. Co hůř, tato distribuce nejenže není uniformní, což je předpokladem v prezentovaném odhadu chyby ve Větách 1.10 a 1.15, ale bohužel může řádově zvýšit preferenci výběru hran z minimálního řezu. Dovolte mi uvést ilustrativní příklad: uvažte úplný graf s n-1 vrcholy a k němu připojený n-tý vrchol, jež bude spojen s právě jedním z předcházejících vrcholů; bez újmy na obecnosti, vrchol n je spojen hranou s vrcholem 1. Zjevně jednoznačně určený minimální řež v tomto grafu má velikost jedna – jedná se o hranu {1,n}. Tato hrana má však pravděpodobnost výběru v autorem prezentované implementaci algoritmu MinCut alespoň 1/n (při výběru vrcholu n bude totiž hrana {1,n} vybrána s pravděpodobností jedna, neboť vrchol n jiné sousedy nemá). Na druhou stranu, všechny ostatní hrany mají pravděpodobnost výběru řádově $1/n^2$. Pokud něco nepřehlížím, ve skutečnosti bude pravděpodobnost, že autorův algoritmus v žádném ze svých (n-2) výběrů náhodné nevybere hranu {1,n} klesá k nule super-exponenciálně v n.

Jako další podstatný nedostatek považuji, že prezentovaná implementace algoritmu MinCut, konkrétně procedura *min_cut(graph)*, vyžaduje řádově n^3 kroků. Provádí totiž celkem (n-2) kontrakcí, z nichž každá z nich pro každý vrchol aktuálního grafu (viz. smyčka for v kroku #19) spouští v kroku #22 resp. #26 metodu *remove()* na seznam obsahující sousedy vrcholu w. Operace *remove()* nad datovou strukturou seznamu v jazyce Python má však časovou složitost úměrnou velikosti seznamu, tzn. v tomto konkrétním případě je počet kroků úměrný stupni vrcholu w. Pro husté grafy, tzn. grafy s n vrcholy a $\Theta(n^2)$ hranami, lze očekávat, že prvních n/2 kontrakcí bude s pravděpodobností více než 99% vyžadovat $\Theta(n^3)$ kroků. Na tomto místě mi přijde vhodné poznamenat, že zmiňovaná kniha Randomized Algorithms od Motwaniho a Raghavana (reference [7]) při důkazu časové složitosti Kargerova algoritmu přesně nechává tuto podstatnou část implementace k rozmyšlení jako cvičení; viz. [7, Theorem 10.10] a [7, Problems 10.9-10.11].

POSUDEK OPONENTA ZÁVĚREČNÉ PRÁCE

Formální a jazyková úroveň **průměrná**

Posuďte správnost používání formálních zápisů obsažených v práci. Posuďte typografickou a jazykovou stránku.

Zavedení terminologie z teorie grafů považuji za vcelku nestandardní:
(i) Poprvé v životě jsem viděl definovat (multi)množinu hran (multi)grafu jakožto posloupnost, tj. s explicitním lineárním uspořádáním. Zvláštní mi to přišlo o to více, že množina vrcholů je v práci definovaná standardně, tj. bez uspořádaní.
(ii) Zkrácení hrany se v české literatuře typicky označuje slovem kontrakce.
(iii) Definice 1.6 (kontrakce/zkrácení hrany) mi přijde extrémně komplikovaná, a to i pro čtenáře, který tento pojem zná. Zde mám na mysli kvantifikaci přes všechny hrany a zároveň i přes všechny vrcholy grafu, aby se nakonec p. Přečtení Definice 1.6 nepomohl ani formální překlep - namísto $V \setminus (A_i \cup B_i)$ autor patrně myslel $V \setminus \{A_i , B_i\} = V_0 \setminus \{A_i \cup B_i\}$.

Mix češtiny a angličtiny v pseudokódu (viz. str. 13, Algoritmus 1 a str. 19, Algoritmus 2) působí velmi zvláštně.

Uvádím též výčet několika drobných chyb a překlepů, kterých jsem si při čtení práce všiml:

(i) Asymptotický řád se v Landau notaci značí Θ a nikoliv Ω (str. 18).

(ii) „Nechť $x \in \{0, 1\}^d$ je náhodně zvolené číslo“ (str. 35) – x je vektor, nikoliv číslo.

(iii) Obecně by práci prospělo použití spell-checker nástroje – „pravděpodobostí“ (str. 18), „výsledkun“ (str. 26).

(iv) Čistě pro formu mi též dovolte uvést, že jméno P. Erdőse je sázeno chybně (v práci je použito ö namísto ő).

Výběr zdrojů, korektnost citací **výborné**

Vyjádřete se k aktivitě studenta při získávání a využívání studijních materiálů k řešení závěrečné práce. Charakterizujte výběr pramenů. Posuďte, zda student využil všechny relevantní zdroje. Ověřte, zda jsou všechny převzaté prvky řádně odlišeny od vlastních výsledků a úvah, zda nedošlo k porušení citační etiky a zda jsou bibliografické citace úplné a v souladu s citačními zvyklostmi a normami.

Práci by výrazné pomohlo zavést terminologii teorie grafů s použitím některé ze standardních učebnic z této oblasti (více viz. můj komentář v předcházející části posudku). Osobně bych též považoval za vhodné, kdyby ústně komunikované výsledky od V. Rödl, M. T. Sales byly explicitně odkazovány do seznamu citací (v anglicky psaných textech je běžné citovat tzv. „Private communication“, české citační zvyklosti popravdě neznám, ale čekal bych, že mají analogickou zvyklost).

Další komentáře a hodnocení

Vyjádřete se k úrovni dosažených hlavních výsledků závěrečné práce, např. k úrovni teoretických výsledků, nebo k úrovni a funkčnosti technického nebo programového vytvořeného řešení, publikačním výstupům, experimentální zručnosti apod.

Předložená bakalářská práce se skládá ze tří částí – Kapitola 1 popisuje Kargerův a Kareger-Steinův algoritmus. V Kapitole 2.1 obsahuje výsledky z článku Ulrich-Vybíral, který dokazuje nejlepší známý horní odhad na tzv. disperzi množiny bodů v d-dimenzionální krychli. Konečně Kapitola 2.2 prezentuje disperzi příbuzný kombinatorický problém, tzv. restriction-set, jež umožňuje zdola odhadnout disperzi libovolné množiny n bodů. Protože jde o rešeršní práci, hodnotit úroveň prezentovaných teoretických výsledků mi nepřipadá relevantní. Avšak jak jsem již uvedl, pro vypracování této práce bylo jistě třeba nastudovat koncepty a metody, jež nejsou obsaženy v povinných přednáškách bakalářského studia na FJFI ČVUT. Praktickou implementaci algoritmů MinCut a FastMinCut v jazyce Python považuji za špatnou, více viz. sekce Odborná úroveň.

POSUDEK OPONENTA ZÁVĚREČNÉ PRÁCE

III. CELKOVÉ HODNOCENÍ, OTÁZKY K OBHAJOBĚ, NÁVRH KLASIFIKACE

Shrňte aspekty závěrečné práce, které nejvíce ovlivnily Vaše celkové hodnocení. Uveďte případné otázky, které by měl student zodpovědět při obhajobě závěrečné práce před komisí.

Mé hodnocení předložené bakalářské práce jednak ovlivnila zcela chybná implementace uniformně náhodné volby hrany v algoritmech MinCut a FastMinCut. Byl jsem též poměrně zklamán absencí jakýchkoliv detailů v důkazu Věty 1.12, což ve světle časově o řád horší implementace působí o to hůře. Dále mi v Kapitole 2.1 chyběly explicitně vynechané části důkazů. Naopak pozitivně vyzdvihuji úroveň Kapitoly 2.2.

Z těchto důvodů hodnotím práci na hranici kvalifikačních stupňů B a C. Zejména proto, že se jedná o práci bakalářskou, tzn. první vlastní práci studenta, vybírám pro své konečné hodnocení ten lepší kvalifikační stupeň.

Otázky:

1) Co autor myslí analytickou (téměř) neřešitelností problému hledání minimálního řezu pro grafy s několika desítkami vrcholů? (viz. str. 11)
V této souvislosti poznamenávám, že úloha minimálního řezu v grafu má deterministický algoritmus pracující v čase $O(n^3)$, a i z praktického hlediska je považovaná za „relativně rychle“ řešitelnou - např. otevřený software SAGE, který v efektivitě typicky bývá daleko za nejlepšími komerčními optimalizačními programy, vyřeší na mém tabletu instance pro náhodně vygenerované grafy s více než 1000 vrcholy a hustotou hran 10% (tj. počtem hran okolo 50.000) za méně než 5 sekund.

2) Jakou paměťovou složitost mají Vaše algoritmy MinCut a FastMinCut?

3a) Byla Vaše implementace algoritmů MinCut a FastMinCut otestována na nějakém souboru grafů?

3b) Pokud ano, kolik grafů soubor obsahoval a o jak velké grafy šlo (počet vrcholů, počet hran)?

3c) Byly výsledky těchto Monte-Carlo algoritmů porovnány se „správnou odpovědí“ pro daný vstup, a jaká v tom případě byla empirická úspěšnost Vaší implementace?

4) Jaký byl důvod v algoritmu FastMinCut na grafy velikosti nejvýše 6 použít Monte-Carlo algoritmus MinCut, namísto v teoretické části zmiňované deterministické řešení pomocí hrubé síly?

5) Z jakého důvodu je text práce psán česky, nicméně implementace MinCut a FastMinCut včetně komentářů v kódu je anglicky?

6) Který algoritmus máte na mysli v úvodním odstavci Kapitoly 2 – „Nejedná se vůbec o úlohu se složitou implementací algoritmu, (…)“ ?

7) Na základě jakých kritérií byla v Kapitole 2.1. vybírána tvrzení resp. jejich části, jejichž prezentace byla v práci vypuštěna, a čtenáři jsou přenechány k samostudiu z článku Ulrich-Vybíral (reference [21]) ?

Předloženou závěrečnou práci hodnotím klasifikačním stupněm **B - velmi dobe.**

Datum: 27.8.2023

Podpis: