

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta strojní

Ústav technické matematiky



Analýza vlastností okrajových podmínek v metodě SPH

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vypracoval:	Jan Němeček
Vedoucí práce:	doc. Ing. Luděk Beneš, Ph.D.
Konzultant specialista:	Ing. Tomáš Halada
Rok:	2023

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Němeček** Jméno: **Jan** Osobní číslo: **476689**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**
Studijní program: **Aplikované vědy ve strojním inženýrství**
Specializace: **Matematické modelování v technice**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Analýza vlastností okrajových podmínek v metodě SPH

Název diplomové práce anglicky:

Pokyny pro vypracování:

Student se seznámí se základy metody SPH a s různými realizacemi okrajových podmínek. Použije zjednodušený model, který uvažuje pouze jednu částici tekutiny. Na tomto případu se pokusí analyzovat a srovnat vliv jednotlivých typů okrajových podmínek pro pevnou stěnu na pohyb částice.

Seznam doporučené literatury:

Halada T. Vliv okrajových podmínek v metodě SPH. Diplomová práce ÚTM ČVUT FS 2022. Fabricio Macià et al. "A boundary integral SPH formulation consistency and applications to ISPH and WCSPH". In: Progress of Theoretical Physics 128 (zář. 2012), s. 439–462. doi: 10.1143/PTP.128.439 A. English et al. "Modified dynamic boundary conditions (mDBC) for general-purpose smoothed particle hydrodynamics (SPH): application to tank sloshing, dam break and fish pass problems". In: Computational Particle Mechanics (2021). issn: 2196-4386. doi: 10.1007/s40571-021-00403-3. url: <https://doi.org/10.1007/s40571-021-00403-3> Violeau, D., (2012). Fluid Mechanics and the SPH Method: Theory and Applications. Oxford University Press; Illustrated edition (July 5, 2012) Liu, G.R. & Liu, M.B.. (2003). Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method. 10.1142/5340.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

doc. Ing. Luděk Beneš, Ph.D. ústav technické matematiky FS


Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

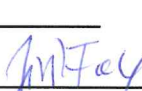
Ing. Tomáš Halada ústav technické matematiky FS

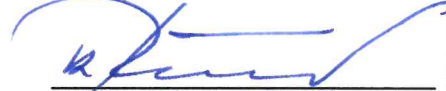
Datum zadání diplomové práce: **20.04.2023**

Termín odevzdání diplomové práce: **13.08.2023**

Platnost zadání diplomové práce: _____


doc. Ing. Luděk Beneš, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce


prof. Ing. Jirí Fůrst, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

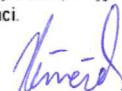

doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

23.5.2023

Datum převzetí zadání



Podpis studenta

Anotace

Diplomová práce se zabývá analýzou okrajových podmínek pro bezsítovou částicovou metodou Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH). Na několika modelových příkladech je provedena analýza okrajových podmínek Dynamic boundary condition (DBC) a Boundary integral (BI). Dále je v práci navržen možný tvar dodatečného členu pro formulaci BI, který modeluje tečnou interakci tekutiny se stěnou. Porovnání mezi BI s členem a DBC je provedeno na příkladu vodorovného pohybu částice tekutiny nad nekonečnou stěnou a případu proudění tekutiny v otevřeném kanále.

Klíčová slova: SPH, BI, DBC, okrajové podmínky

Abstract

The diploma thesis deals with analysis of boundary condition for meshfree particle Smoothed particle hydrodynamics method (SPH). In several cases, the Dynamic boundary condition (DBC) and Boundary integral (BI) condition were analyzed. Furthermore, the thesis proposes a possible shape of an additional term for the BI formulation, which models the tangential interaction of the fluid with the wall. A comparison between BI with additional term and DBC is made using the example of horizontal motion of a fluid particle over an infinite wall and the case of fluid flow in an open channel

Key words: SPH, BI, DBC, boundary conditions

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci s názvem: „Analýza vlastností okrajových podmínek v metodě SPH“ vypracoval samostatně pod vedením doc. Ing. Luďka Beneše, Ph.D. a Ing. Tomáše Halady s použitím literatury uvedené na konci mé diplomové práce v seznamu použité literatury

V Praze dne

.....

Jan Němeček

Poděkování

Rád bych poděkoval vedoucímu práce doc. Ing. Luďkovi Benešovi, Ph.D. a konzultantovi specialistovi Ing. Tomáši Haladovi za cenné rady a velkou trpělivost.

Jan Němeček

Obsah

Přehled značení	9
1 Metoda SPH	13
1.1 Popis kontinua	13
1.2 Matematický základ metody SPH	14
1.2.1 Gradientní náhrady	15
1.2.2 Pokročilejší gradientní náhrady	17
1.2.3 Náhrada druhé derivace	18
1.2.4 Užívaná jádra	20
1.3 Výchozí systém rovnic	22
1.3.1 SPH diskretizace systému výchozích rovnic	23
1.4 Časový krok a difuzní členy v SPH	25
1.5 Numerická integrace	26
1.5.1 Verletova metoda	26
1.5.2 Semi-implicitní Eulerova metoda	26
1.6 Okrajové podmínky v metodě SPH	27
1.6.1 Okrajová podmínka pro volný povrch	27
1.6.2 Okrajové podmínky pro stěnu	27
1.6.3 Vstupní/výstupní okrajové podmínky	28
1.6.4 Periodické okrajové podmínky	28
1.7 Realizace okrajových podmínek v metodě SPH	28
1.8 Okrajové podmínky na stěně	29
1.8.1 Korekce jádra - kernel corrections	29
1.8.2 Okrajové podmínky na principu rozšíření	30
1.8.3 Formulace Dynamic boundary condition (DBC)	31
1.8.4 Formulace Modified Dynamic boundary condition (mDBC) ..	32
1.8.5 Semianalytické okrajové podmínky - Boundary integral (BI) .	33
2 Interakce částice se stěnou	37
2.1 Rozbor volného pádu částice tekutiny na částici stěny	37
2.1.1 Formulace DBC	37
2.1.2 Formulace BI	40
2.2 Numerické řešení volného pádu částice na částici stěny	42
2.2.1 Numerické řešení pomocí DBC formulace	43
2.2.2 Numerické řešení pomocí BI formulace	44
2.2.3 Srovnání	45
2.3 Příklad volného pádu s rozdílnou okrajovou podmínkou	46
2.3.1 Srovnání	52
2.4 Volný pád částice tekutiny na standartní okrajové podmínky s visko- zitou	53

2.4.1	Numerické řešení pomocí DBC formulace	53
2.4.2	Numerické řešení pomocí formulace BI	55
2.4.3	Srovnání	57
2.5	Nesouměrný dopad mezi částice hranice	59
2.5.1	Formulace DBC	59
2.5.2	Formulace BI	62
2.6	Vodorovný pohyb částice tekutiny nad stěnou	62
2.6.1	Formulace DBC	63
2.6.2	Formulace BI	65
2.6.3	Dodatečný tečný člen pro BI formulaci	67
2.6.4	Porovnání DBC a BI s dodatečným členem	72
3	Proudění v otevřeném kanálu	74
	Závěr	80
	Literatura	81

Přehled značení

A	plocha
\mathbf{a}_i^n	vektor zrychlení na i -té částici v n -tém časovém kroce
α, β	prostorový index
α_i	prostorový koeficient váhové funkce
α	1. koeficient umělé viskozity
b, i, j, k	indexy částic
B	množina hraničních částic
\mathcal{B}	materiálové těleso
β	2. koeficient umělé viskozity
c	rychlost zvuku
c_0	numerická rychlost zvuku
c_p	měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku
C	konstantní funkce
C_{cs}	volitelný koeficient pro určení numerické rychlosti zvuku
d	počet prostorových dimenzí
D	difuzní člen
$\frac{D}{Dt}$	materiálová derivace
\mathbb{D}	tenzor rychlosti deformace
$\delta, \delta_{\mathbf{x}}$	Diracova delta distribuce
$\delta_{\alpha\beta}$	Kroneckerovo delta
δ_ψ	koeficient difuzního členu
\mathbb{E}	Euklidovský prostor
ϵ	konstanta zabraňující nulovému jmenovateli
f, g, y	libovolné funkce
F	množina částic tekutiny
\mathbf{f}	vektor vnějších sil
\mathbf{f}	vektorová funkce
\mathbf{g}	tíhové zrychlení
G	množina dodaných částic
γ	Poissonova konstanta
γ_0	zobrazení přiřazující materiálové částici referenční polohu

γ_t	zobrazení přiřazující materiálové částici aktuální polohu
γ_h	Shephardův renormalizační faktor
h	vyhlazovací délka
h	konstantní funkce
h_ω	maximální výška vodního sloupce
H	výška hladiny v otevřeném kanále
\mathbb{I}	tenzor identity
κ	tepelná vodivost
κ	číslo udávající kolik vyhlazovacích délek pojme jádro
K	prostorový koeficient
ξ_{ik}	dodatečný člen pro BI
L	délka otevřeného kanálu
λ	druhá viskozita
\mathcal{L}	renormalizační/deformační operátor
m	hmotnost
μ	dynamická viskozita
μ_{ij}	parametr vazkého členu
\mathbf{n}	normálový vektor
N	počet částic
∇	operátor nabra
Ω	oblast
$\partial\Omega$	hranice oblasti
$\partial\Omega_{FS}$	část hranice typu volné hladiny
$\partial\Omega_B$	část hranice typu pevné stěny
p	tlak
p_{max}	maximální předpokládaná hodnota tlaku
P	tlak na vstupu
Φ_{ij}	vazký člen
φ	testovací funkce
ϕ	číslo udávající kolik vyhlazovacích délek pojme jádro
q	normovaná vzdálenost
ρ	hustota
$\Delta\rho$	změna hustoty
s_k	plocha mezi dvěma sousedními hraničními částicemi
\mathbf{t}	tečný vektor

Δt	časový krok
\mathbb{T}	tenzor napětí
τ	deviatorická část tenzoru napětí
τ	velikost tečného napětí na stěně
ϑ	sklon otevřeného kanálu
V	objem
V_{max}	maximální předpokládaná hodnota rychlosti
\mathbf{v}	vektor rychlosti
\mathbf{v}_t	vektor tečné rychlosti
\mathbf{v}_n	vektor normálové rychlosti
\mathbf{v}_i^n	vektor rychlosti na i -té částici v n -tém časovém kroce
$\mathbf{V}_{n,f}$	vektor normálové rychlosti rozhraní
$\mathbf{V}_{n,b}$	vektor normálové rychlosti stěny
$\mathbf{V}_{t,b}$	vektor tečné rychlosti stěny
\mathbf{V}	vektor rychlosti
w	váhová dodatečného členu
W	váhová funkce
\mathcal{X}	materiálová částice
\mathbf{X}	referenční poloha
\mathbf{x}	aktuální poloha, polohový vektor
\mathbf{x}_i^n	polohový vektor i -té částice v n -tém časovém kroce
Δx	prostorový krok
Δx	prostorová perioda

Úvod

Numerická matematika se zabývá zkoumáním vlastností numerických metod a algoritmů a jejich aplikací na inženýrské a vědecké problémy. Rozmach této vědní disciplíny přišel se zvětšujícím se výkonem počítačů, které jsou pro řešení reálných problémů nezbytné. Jednou z těchto numerických metod je i SPH (Smoothed particle hydrodynamics), kterou se tato práce zabývá.

Metoda SPH je bezsítovou numerickou metodou vyvinutou na konci 70. let minulého století pro řešení astrofyzikálních problémů, se kterými si do té doby používané síťové metody nebyly schopny poradit. Časem následovaly aplikace pro modelování problémů elasticity a pro modelování problémů mechaniky tekutin. Metoda byla aplikována na modely stlačitelných, slabě stlačitelných a nestlačitelných tekutin. Velkou výhodou je, že pro aplikaci této metody není třeba předem vytvářet síť. Tato metoda je ideální pro řešení problémů proudění s volnou hladinou a problémů s velkou deformací. Této metodě se dostalo pozornosti teprve nedávno, díky pokračujícímu vývoji této metody a také díky rozvoji používání grafických procesorů (GPU). Metoda SPH má, tak jako každá jiná numerická metoda, řadu problémů. Jedním z nich je formulace okrajových podmínek.

Záměrem této práce je nejprve teoreticky popsat princip fungování samotné metody SPH a princip aplikace okrajových podmínek v této metodě. Dalším cílem této práce je na několika modelových příkladech provést analýzu numerických vlastností dvou běžných formulací okrajových podmínek, kterými jsou tzv. Dynamic boundary condition (DBC) a Boundary intergral (BI). K řešení těchto modelových příkladů byl využit vlastní program. V úvodních příkladech ověřujeme správnou funkci našeho programu, na zbylých příkladech demonstrujeme vybrané vlastnosti výše zmíněných variant okrajových podmínek. Jedním z cílů v této části, je vylepšit okrajovou podmínku typu BI, neboť tato formulace je snazší na aplikaci pro případ komplexní geometrie stěn. Toto vylepšení se týká možnosti zachytit pomocí BI ulpívání proudu tekutiny na stěně.

Posledním cílem této práce je aplikace vylepšení BI na úlohu proudění tekutiny v otevřeném kanále a porovnáním výsledků se stejnou úlohou s okrajovou podmínkou typu DBC.

1 Metoda SPH

Smoothed-particle hydrodynamics (SPH) je numerická metoda využívaná k modelování problémů mechaniky kontinua a k simulování astrofyzikálních jevů. Je to bezsíťová metoda, která je založená na Lagrangeovském popisu kontinua. Tato skutečnost z ní dělá ideální metodu pro řešení proudění s volnou hladinou, rozstříku tekutiny, multifázového proudění nebo i pro řešení problémů z mechaniky pevných látek jako jsou lomy a velké deformace. Nicméně i tato metoda má své problémy. Jedním z mnoha jsou okrajové podmínky, kterými se v této práci budeme zabývat. Lagrangeovským popisem kontinua, matematickým základem metody, aplikací SPH na rovnice mechaniky tekutin a okrajovými podmínkami se budeme zabývat v této kapitole, ve které vycházím hlavně z těchto dvou prací (Cercós Pita, 2016) a (Halada, 2022).

1.1 Popis kontinua

Předmětem našeho zájmu je materiálové těleso. Materiálové těleso $\mathcal{B} = \{\mathcal{X}\}$ je kompaktní a měřitelná množina nekonečného počtu materiálových částic \mathcal{X} . Materiálové těleso je popsáno polohou všech jeho částí v prostoru (stavové veličiny jsou určeny z konstitučních vztahů a zákonů zachování). Jednu z možných konfigurací volíme jako referenční κ_0 . Tuto skutečnost zapíšeme

$$\begin{aligned}\gamma_0 : \mathcal{B} &\mapsto \mathbb{E}^3 \\ \mathcal{X} &\mapsto \mathbf{X} = \gamma_0(\mathcal{X}),\end{aligned}\tag{1.1}$$

kde \mathbf{X} je referenční poloha částice \mathcal{X} . Vlivem fyzikálního procesu deformace (např. působením vnějších sil) se těleso pohybuje a deformuje. Definujeme aktuální konfiguraci κ_t v čase t pomocí spojitého a prostého (dva různé materiálové body se nemohou zobrazit na stejnou polohu) zobrazení

$$\begin{aligned}\gamma_t : \mathcal{B} &\mapsto \mathbb{E}^3 \\ \mathcal{X} &\mapsto \mathbf{x} = \gamma_t(\mathcal{X}, t),\end{aligned}\tag{1.2}$$

kde \mathbf{x} je aktuální poloha částice \mathcal{X} v čase t . Pohyb tělesa je pak určen zobrazením mezi referenční - κ_0 a aktuální - κ_t konfigurací daným jako

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_t : \mathbb{E}^3 &\mapsto \mathbb{E}^3 \\ \mathbf{X} &\mapsto \mathbf{x} = \mathcal{X}_t(\mathbf{X}, t),\end{aligned}\tag{1.3}$$

„Rovnice (1.2) představuje tzv. materiálový popis, jehož nezávislými proměnnými jsou čas t a materiálový bod \mathcal{X} . O rovnici (1.3) s nezávislými proměnnými časem t a polohou \mathbf{X} částice \mathcal{X} hovoříme jako o referenčním popisu. V případě kdy je za referenční konfiguraci κ_0 zvolena počáteční konfigurace v čase $t = 0$ hovoříme o Lagrangeově popisu. Právě Lagrangeův popis a představa materiálových částic je využita v metodě SPH“ (Halada, 2022).

Odlíšným popisem kontinua je potom tzv. Eulerův popis. Díky spojitosti a prostosti zobrazení \mathcal{X}_t lze získat inverzní zobrazení, která zobrazí současnou polohu materiálové částice na referenční polohu.

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_t^{-1} : \mathbb{E}^3 &\mapsto \mathbb{E}^3 \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{X} = \mathcal{X}_t^{-1}(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (1.4)$$

Eulerovský popis se zaměřuje na aktuální konfiguraci κ_t a zabývá se tím co se děje v jednotlivých pevných bodech prostoru v průběhu času, na rozdíl od Lagrangeova popisu, který se zabývá tím co se děje s konkrétními částicemi v průběhu času. Metoda SPH je založená na Lagrangeově popisu kontinua (Strachota, 2023), (Halada, 2022), (Martinec, 2003).

1.2 Matematický základ metody SPH

Metoda SPH je založena na konvolučním integrálu

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (1.5)$$

kde δ je Diracova delta distribuce. Tato funkce je definována právě vztahem (1.5), platí tedy $\delta_{\mathbf{x}}(\varphi) = \varphi(\mathbf{x})$ pro všechny funkce $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast přes kterou integrujeme.

Tuto δ -distribuci aproximujeme vhodnou funkcí, kterou nazýváme vyhlazovací či váhovou funkcí nebo jádrem. Váhovou funkcí značíme $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)$. Tato funkce má tzv. kompaktní nosič, jenž není bodový jako u δ -distribuce. Váhová funkce $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)$ má kompaktní nosič splňuje-li podmínku $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) = 0$ pro $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| > \kappa h$. Parametr $\kappa \in \mathbb{R}^+$ je vhodná konstanta. Konstanta $h \in \mathbb{R}^+$ se nazývá vyhlazovací délkou a je parametrem váhové funkce resp. metody. Konvoluční integrál aproximujeme pomocí váhové funkce

$$f(\mathbf{x}) \simeq \langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \quad (1.6)$$

kde operátor $\langle \cdot \rangle$ značí, že se jedná o aproximaci. Rovněž požadujeme aby W byla dostatečně hladká, alespoň $W \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{n+1})$. Dále chceme aby W byla normovaná tedy

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = 1. \quad (1.7)$$

Naším dodatečným požadavkem je aby váhová funkce byla nezápornou funkcí, kvůli smysluplné reprezentaci fyzikálních veličin. Také předpokládáme, že váhová funkce je symetrická a radiální, klesající s rostoucím parametrem $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. Posledním požadavkem je, aby váhová funkce konvergovala k δ -distribuci pro $h \rightarrow 0^+$ ve smyslu distribucí.

Pro numerické výpočty budeme také využívat numerickou náhradu derivací, tedy místo funkce $f(\mathbf{x})$ dosadíme do identity (1.6) její derivaci, resp gradient.

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} \nabla f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}'. \quad (1.8)$$

Tuto identitu můžeme, vzhledem k vlastnostem váhové funkce, upravit pomocí Greenovy věty

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\partial\Omega} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) \cdot \mathbf{n} dS' - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}'. \quad (1.9)$$

První integrál je nulový díky kompaktnímu nosiči váhové funkce W v oblasti Ω . Získáváme tedy náhradu pro gradient funkce $f(x)$ ve tvaru

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}'. \quad (1.10)$$

Základní myšlenkou metody SPH je modelování kontinua jako souboru částic které se chovají (dynamicky) jako materiálové částice, ale nesou si i kinematické a termodynamické veličiny. Získané aproximace (1.6) a (1.10) diskretizujeme a dostáváme tzv. částicové aproximace. Uvažovanou spojitou oblast Ω diskretizujeme konečným počtem N částic. Musíme přitom zachovat míru oblasti, která danou oblast charakterizuje a další veličiny. Každé částici připadá neměnná hmotnost m_i . Objem V_i a hustota ρ_i částice jsou propojeny přes vztah $V_i = \frac{m_i}{\rho_i}$. Je-li na Ω definovaná nějaká funkce je částicím přiřazena hodnota této funkce v jejich těžišti. Dostáváme náhrady pro hodnotu funkce a její derivace

$$\langle f(\mathbf{x}_i) \rangle_i = \sum_{j=1}^N f(\mathbf{x}_j) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) V_j, \quad (1.11)$$

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}_i) \rangle_i = - \sum_{j=1}^N f(\mathbf{x}_j) \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) V_j, \quad (1.12)$$

kde operátor $\langle \cdot \rangle_i$ značí, diskretizaci aproximací (1.6) a (1.10).

Tyto náhrady odpovídají představě kontinua složeného z materiálových částic, kterých je v těchto náhradách pouze konečný počet N kvůli numerickým výpočtům. Nicméně díky vlastnosti váhové funkce není třeba při numerických výpočtech sumaci provádět přes všechny částice oblasti, ale pouze přes ty, které se nachází v nosiči částice, u které provádíme napočítávání příspěvku od zbylých částic (Violeau, 2012).

1.2.1 Gradientní náhrady

Výše odvozené náhrady jsou ty nejjednodušší, ale nepoužívají se neboť mají mnoho problémů. Jeden z nich si demonstrujeme na následujícím příkladu. Uvažujme náhradu konstantní funkce pomocí vztahů (1.11) a (1.12). Dostáváme pro hodnotu konstanty C

$$\langle C \rangle_i = \sum_{j=1}^N C_i W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) V_j \quad (1.13)$$

a pro gradient konstanty je výsledkem nulový vektor

$$\langle \nabla C \rangle_i = - \sum_{j=1}^N C_i \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) V_j. \quad (1.14)$$

Budou-li částice rovnoměrně rozloženy v nosiči i -té částice, pak skutečně bude rovnice (1.14) rovna nulovému vektoru. Nicméně pro nerovnoměrně uspořádané částice a v blízkosti hranice není pravá strana rovnice rovna nulovému vektoru. Sestrojíme tedy náhradu s lepšími vlastnostmi. Chceme aby náhrada byla symetrická (tedy aby

příspevek od částice A k částici B byl identický s příspěvkem částice B k částici A), protože symetrie souvisí s konzervativitou náhrady (VILA, 1999). Náhradu odvodíme následovně, místo $\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle$ budeme nahrazovat $\langle \nabla f(\mathbf{x})h(\mathbf{x}) - \nabla h(\mathbf{x})f(\mathbf{x}_i) \rangle$, kde $h(\mathbf{x}) = 1 \forall \mathbf{x} \in \Omega$. Tedy

$$\langle \nabla f(\mathbf{x})h(\mathbf{x}) - \nabla h(\mathbf{x})f(\mathbf{x}_i) \rangle = \int_{\Omega} \left(\nabla f(\mathbf{x}')h(\mathbf{x}') - \nabla h(\mathbf{x}')f(\mathbf{x}_i) \right) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}'. \quad (1.15)$$

Nejdříve integrál upravme

$$\int_{\Omega} \nabla f(\mathbf{x}')W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' - f(\mathbf{x}_i) \int_{\Omega} \nabla h(\mathbf{x}')W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}'. \quad (1.16)$$

Následně aplikujme Greenovu větu

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} f(\mathbf{x}')W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) \mathbf{n} dS' - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}')\nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \\ & - f(\mathbf{x}_i) \int_{\partial\Omega} h(\mathbf{x}')W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) dS' + f(\mathbf{x}_i) \int_{\Omega} h(\mathbf{x}')\nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}'. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Díky kompaktnímu nosiči váhové funkce jsou plošné integrály nulové, tedy

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(\mathbf{x}) - \nabla h(\mathbf{x})f(\mathbf{x}_i) \rangle &= - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}')\nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \\ &+ f(\mathbf{x}_i) \int_{\Omega} h(\mathbf{x}')\nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}'. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Dosaďme za $h(\mathbf{x}')$ a $\nabla h(\mathbf{x})$ a dostáváme symetrickou náhradu derivace

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}')\nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' + \int_{\Omega} f(\mathbf{x}_i)\nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}'. \quad (1.19)$$

Přejděme k částicové diskretizaci

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = - \sum_{j=1}^N (f(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x})) \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) V_j. \quad (1.20)$$

Tato náhrada je pro obecný bod $\mathbf{x} \in \Omega$, chceme-li náhradu derivace na částici, dostáváme

$$\langle \nabla f \rangle_i = - \sum_{j=1}^N (f_j - f_i) \nabla_j W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) V_j = - \sum_{j=1}^N (f_j - f_i) \nabla_j W_{ij} V_j, \quad (1.21)$$

kde $f_j = f(\mathbf{x}_j)$, $W_{ij} = W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h)$.

Je patrné že je tato náhrada skutečně konzistentní pro konstantní funkci

$$\langle \nabla C \rangle_i = - \sum_{j=1}^N (C_j - C_i) \nabla W_{ij} V_j = - \sum_{j=1}^N 0 \nabla W_{ij} V_j = \mathbf{0}.$$

1.2.2 Pokročilejší gradientní náhrady

Často se používají pokročilejší náhrady, z nichž jednu odvodíme. Uvažujme vhodnou funkci g , dále využijeme vztahu

$$\frac{\nabla f}{g} = \frac{f}{g^k} \nabla \left(\frac{1}{g^{1-k}} \right) + \frac{1}{g^{2-k}} \nabla \left(\frac{f}{g^{k-1}} \right), \quad (1.22)$$

kde $k \in \mathbb{Z}$. Platnost tohoto vztahu lze ověřit po složkách, provedeme derivaci pravé strany rovnice (1.22) dle x_i

$$\begin{aligned} & \frac{f}{g^k} (k-1) g^{k-2} \frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{1}{g^{2-k}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{1}{g^{k-1}} + (1-k) g^{-k} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) = \\ & = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{1}{g} + \frac{f}{g^2} (k-1) \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{f}{g^2} (k-1) \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{1}{g}, \end{aligned}$$

vztah tedy platí. Použijeme tedy tento vztah a diskretizujeme pomocí vztahu (1.12). Dostáváme

$$\left\langle \frac{\nabla f}{g} \right\rangle_i = -\frac{f_i}{g_i^k} \sum_{j=1}^N g_j^{k-1} \nabla_j W_{ij} V_j - \frac{1}{g_i^{2-k}} \sum_{j=1}^N \frac{f_j}{g_j^{k-1}} \nabla_j W_{ij} V_j, \quad (1.23)$$

upravíme

$$\left\langle \frac{\nabla f}{g} \right\rangle_i = -\sum_{j=1}^N g_j^{k-2} g_j \frac{f_i}{g_i^k} \nabla_j W_{ij} V_j - \sum_{j=1}^N \frac{f_j}{g_j^k} \frac{1}{g_i^{2-k}} g_j \nabla_j W_{ij} V_j, \quad (1.24)$$

dále spojíme sumy a upravíme

$$\left\langle \frac{\nabla f}{g} \right\rangle_i = -\sum_{j=1}^N \left(\frac{f_i}{g_j^{2-k} g_i^k} + \frac{f_j}{g_j^k g_i^{2-k}} \right) \nabla_j W_{ij} g_j V_j, \quad (1.25)$$

dále využijeme vlastnosti váhové funkce $\nabla_j W_{ij} = -\nabla_i W_{ij}$ a tedy

$$\left\langle \frac{\nabla f}{g} \right\rangle_i = \sum_{j=1}^N \left(\frac{f_i}{g_j^{2-k} g_i^k} + \frac{f_j}{g_j^k g_i^{2-k}} \right) \nabla_i W_{ij} g_j V_j, \quad (1.26)$$

Tento vztah pro metodu SPH v proudění využijeme tak, že za $g \equiv \rho$ a dostáváme

$$\left\langle \frac{\nabla f}{\rho} \right\rangle_i = \sum_{j=1}^N \left(\frac{f_i}{\rho_j^{2-k} \rho_i^k} + \frac{f_j}{\rho_j^k \rho_i^{2-k}} \right) \nabla_i W_{ij} m_j, \quad (1.27)$$

kde $m_j = V_j \rho_j$. Obvykle využívané náhrady jsou pro $k = 1$

$$\left\langle \frac{\nabla f}{\rho} \right\rangle_i = \sum_{j=1}^N \left(\frac{f_i}{\rho_i \rho_j} + \frac{f_j}{\rho_i \rho_j} \right) \nabla_i W_{ij} m_j, \quad (1.28)$$

a pro $k = 2$

$$\left\langle \frac{\nabla f}{\rho} \right\rangle_i = \sum_{j=1}^N \left(\frac{f_i}{\rho_i^2} + \frac{f_j}{\rho_j^2} \right) \nabla_i W_{ij} m_j. \quad (1.29)$$

1.2.3 Náhrada druhé derivace

Druhou derivaci lze odvodit obdobně jako první derivaci. Využijeme tedy rovnici (1.9)

$$\langle \nabla^2 f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\partial\Omega} \nabla f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) \cdot \mathbf{n} dS' - \int_{\Omega} \nabla f(\mathbf{x}') \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}', \quad (1.30)$$

aplikujeme vlastnosti váhové funkce na první integrál

$$\langle \nabla^2 f(\mathbf{x}) \rangle = - \int_{\Omega} \nabla f(\mathbf{x}') \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}'. \quad (1.31)$$

Aplikujeme Greenovu větu

$$\langle \nabla^2 f(\mathbf{x}) \rangle = - \int_{\partial\Omega} f(\mathbf{x}') \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) \cdot \mathbf{n} dS' + \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \nabla^2 W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}', \quad (1.32)$$

i pro derivaci (gradient) váhové funkce platí, že má kompaktní nosič, tedy dostáváme se k finálnímu vztahu

$$\langle \nabla^2 f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \nabla^2 W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}'. \quad (1.33)$$

Tedy v částicové diskretizaci

$$\langle \nabla^2 f \rangle_i = \sum_{j=1}^N f_j \nabla_j^2 W_{ij} V_j. \quad (1.34)$$

Tato derivace je velmi citlivá na nerovnoměrné uspořádání částic. Další nevýhodu demonstrujeme na následujícím příkladu. Mějme rovnici vedení tepla

$$c_p \frac{dT_a}{dt} = \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T_a, \quad (1.35)$$

kde c_p je měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku a κ je tepelná vodivost. Dosadíme náhradu druhé derivace

$$c_p \frac{dT_i}{dt} = \frac{\kappa}{\rho} \sum_{j=1}^N T_j \nabla_j^2 W_{ij} V_j. \quad (1.36)$$

Zde se projeví závislost znaménka druhé derivace váhové funkce na vzdálenosti částice. Mějme dvě částice i a j v 1D, přičemž $T_i > T_j$. V důsledku 2. zákona termodynamiky by měl tepelný tok téct od částice i k j . V případě naší SPH náhrady, ale záleží na tom kde se bude částice j nacházet vzhledem k částici i . V námi uvažovaných váhových funkcích se na intervalech $(-2h, 0)$ a $(0, 2h)$ nachází vždy jeden inflexní bod. Na obou těchto intervalech tedy dochází ke změně znaménka druhé derivace váhové funkce. Tímto dostáváme opačná znaménka v závislosti na vzájemné poloze částic. Může nastat situace, že tepelný tok poteče v opačném směru než by podle 2. zákona termodynamiky měl.

Pro lepší konstrukci náhrady druhé derivace se musíme vyhnout druhé derivaci váhové funkce. Pro účel tohoto odvození budeme uvažovat pro jednoduchost 1D případ.

Definujme funkci $I(x)$ následovně

$$I(x) = \int_a^b (f(x') - f(x))F(|x - x'|)dx', \quad (1.37)$$

kde $F(|x - x'|) = F(|x_{ij}|)$ je definovaná tak, že pro ní platí $\nabla_i W(x_{ij}) = -x_{ij}F(|x_{ij}|)$. Aplikujme Taylorův rozvoj v bodě x a dostáváme

$$I(x) \simeq \int_a^b \left(f(x) + \frac{df}{dx}(x' - x) + \frac{1}{2} \frac{d^2f}{dx^2}(x' - x)^2 - f(x) \right) F(|x - x'|) dx', \quad (1.38)$$

upravíme

$$I(x) \simeq \frac{df(x)}{dx} \int_a^b (x' - x) F(|x - x'|) dx' + \frac{1}{2} \frac{d^2f(x)}{dx^2} \int_a^b (x' - x)^2 F(|x - x'|) dx'. \quad (1.39)$$

Upravme nejprve druhý integrál tak, že dosadíme za $F(|x - x'|)$ definiční vztah. Dostáváme

$$\begin{aligned} \int_a^b (x' - x)^2 F(|x - x'|) dx' &= \int_a^b \frac{\nabla_i W(x - x')}{-(x - x')} (x' - x)^2 dx' = \\ &= \int_a^b \nabla_i W(x - x') (x' - x) dx'. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Využijeme další vlastnosti váhové funkce, respektive její derivace

$$\begin{aligned} \frac{dW(x - x')}{dx} &= \frac{dW(x - x')}{d(x - x')} \frac{d(x - x')}{dx} = \frac{dW(x - x')}{d(x - x')}, \\ \frac{dW(x - x')}{dx'} &= \frac{dW(x - x')}{d(x - x')} \frac{d(x - x')}{dx'} = -\frac{dW(x - x')}{d(x - x')}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\nabla_i W_{ij} = -\nabla_j W_{ij}. \quad (1.41)$$

na takto upravený integrál aplikujeme integraci per partes

$$-\int_a^b (x' - x) \nabla_j W(x - x') dx' = -[(x' - x)W(x - x')]_a^b + \int_a^b W(x - x') dx' = 1, \quad (1.42)$$

jak plyne z vlastností váhové funkce.

Vraťme se k prvnímu integrálu z rovnice (1.39), který upravíme tak, že dosadíme za $F(|x - x'|)$ definiční vztah. Tedy

$$\int_a^b (x' - x) F(|x - x'|) dx' = \int_a^b \frac{\nabla_i W(x - x')}{-(x - x')} (x' - x) dx' = \int_a^b \nabla_i W(x - x'). \quad (1.43)$$

Využijme opět vlastnosti váhové funkce

$$\int_a^b W(x - x') dx' = 1,$$

aplikujeme na tento vztah ∇_i , tedy

$$\nabla_i \int_a^b W(x-x') dx' = \int_a^b \nabla_i W(x-x') dx' = 0. \quad (1.44)$$

Derivaci můžeme přenést dovnitř integrálu protože nederivujeme podle proměnné, po které integrujeme. První integrál je nulový a tím dostáváme

$$I(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}. \quad (1.45)$$

Tímto postupem je odvozena náhrada druhé derivace jako

$$\left\langle \frac{d^2 f}{dx^2} \right\rangle = 2 \int_a^b (f(x') - f(x)) \frac{-\nabla_i W(x-x')}{(x-x')} dx', \quad (1.46)$$

v diskretizované formě

$$\left\langle \frac{d^2 f}{dx^2} \right\rangle_i = 2 \sum_{j=1}^N \frac{f_j - f_i}{x_j - x_i} \nabla_i W_{ij} V_j. \quad (1.47)$$

Obecný vztah pro náhradu druhé derivace, i smíšené, v metodě SPH je tvaru (převzato z (Halada, 2022))

$$\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right\rangle = \sum_{j=1}^N \left((d+2) \frac{\Delta x_\alpha \Delta x_\beta}{\|\mathbf{x}_{ij}\|^2} - \delta_{\alpha\beta} \right) (f_j - f_i) \frac{\mathbf{x}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}}{\|\mathbf{x}_{ij}\|^2} V_j \quad (1.48)$$

kde $d = 1, 2, 3$ je počet dimenzí a $\delta_{\alpha\beta}$ je Kroneckerovo delta. Indexy α a β představují prostorové složky. Výchů uvedenými postupy lze odvodit libovolnou derivaci. Odvození tohoto vzorce a postup odvození pro libovolnou derivaci lze nalézt v článku (Espanol et al., 2003).

Tyto odvozené náhrady byly pouze pro skalární funkce f , v případě, že je f vektorová funkce, pak náhrada Laplaceova operátoru má tvar (Weiler et al., 2018)

$$\nabla^2 \mathbf{f}_i = 2(d+2) \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\mathbf{f}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij}}{\|\mathbf{x}_{ij}\|^2 + \epsilon h^2} \nabla_i W_{ij}, \quad (1.49)$$

kde $\mathbf{f}_{ij} = \mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j$

1.2.4 Užívaná jádra

V této části si uvedeme jádra, která v této práci použijeme pro řešení testovacích úloh.

V článku (Crespo et al., 2007), jehož výsledky budu reprodukovat, je použité takzvané Cubic Spline jádro. To je dáno následujícími vztahy

$$W_{ij} = \begin{cases} \sigma_i \left(1 - \frac{3}{2} q^2 \left(1 - \frac{q}{2} \right) \right), & 0 \leq q \leq 1 \\ \frac{\sigma_i}{4} (2-q)^3, & 1 < q \leq 2 \\ 0, & q > 2 \end{cases} \quad (1.50)$$

$$\frac{\partial W_{ij}}{\partial q} = \begin{cases} \sigma_i \left(-3q + \frac{9}{4}q^2 \right), & 0 \leq q \leq 1 \\ -\frac{3\sigma_i}{4}(2-q)^2, & 1 < q \leq 2 \\ 0, & q > 2 \end{cases}$$

$$\nabla_i W_{ij} = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{h^2 q} \frac{\partial W_{ij}}{\partial q}$$

Kde $q = \frac{|\mathbf{x}_{ij}|}{h}$ je normovaná vzdálenost částic a koeficient σ_i je různý pro jednotlivé dimenze úlohy, $\sigma_1 = \frac{2}{3h}$, $\sigma_2 = \frac{10}{7\pi h^2}$ a $\sigma_3 = \frac{1}{\pi h^3}$. Její průběh lze vidět na obrázku 1.1. (*SPH Kernels*, 2018)

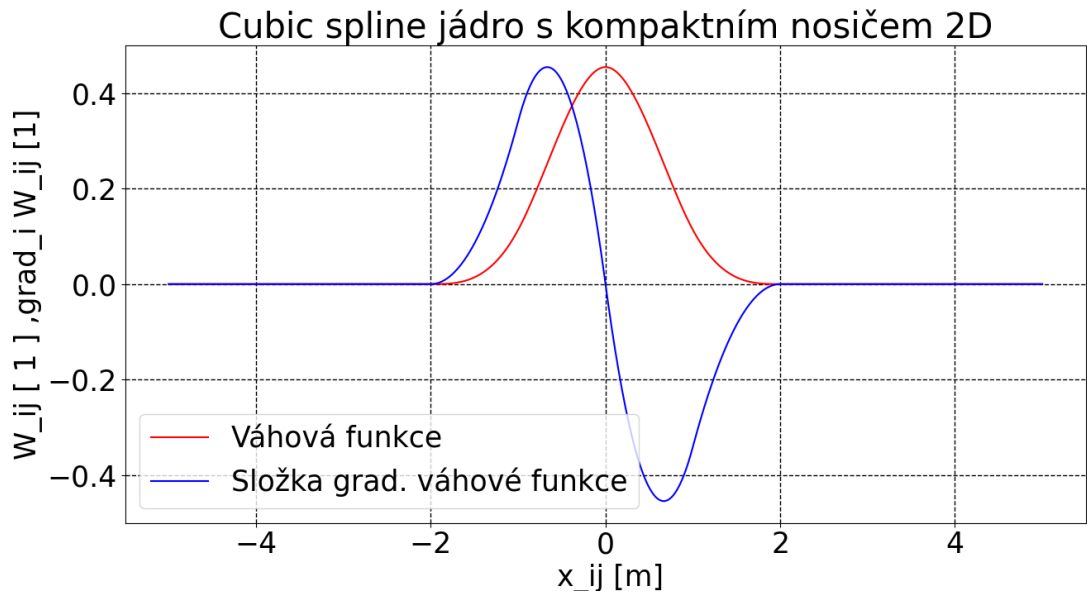
Nejčastěji užívaným jádrem pro řešení reálných úloh je tzv. Wendlandovo jádro. To je definováno následovně

$$W_{ij} = \begin{cases} \alpha_i \left(1 - \frac{q}{2}\right)^4 (1 + 2q), & 0 \leq q \leq 2 \\ 0, & q > 2 \end{cases} \quad (1.51)$$

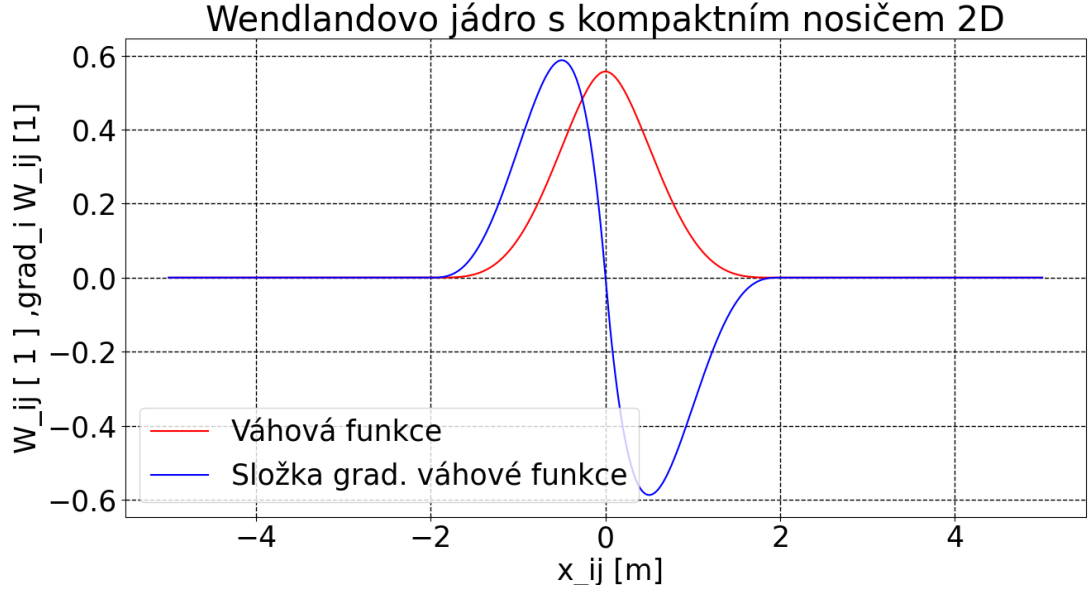
$$\frac{\partial W_{ij}}{\partial q} = \begin{cases} -\frac{5\alpha_i}{h} q \left(1 - \frac{q}{2}\right)^3, & 0 \leq q \leq 2 \\ 0, & q > 2 \end{cases}$$

$$\nabla_i W_{ij} = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{h^2 q} \frac{\partial W_{ij}}{\partial q}$$

Parametr q je identický jako u jádra typu Cubic Spline. Koeficient α , který je různý pro každou dimenzi $\alpha_1 = \frac{3}{4h}$, $\alpha_2 = \frac{7}{4\pi h^2}$, $\alpha_3 = \frac{21}{16\pi h^3}$. Její průběh lze vidět na obrázku 1.2. (Bonallo, 2015)



Obr. 1.1. Průběh váhové funkce typu Cubic Spline (červeně) a jejího gradientu (modře) pro $h = 1$



Obr. 1.2. Průběh Wendlandovy váhové funkce (červeně) a jejího gradientu (modře) pro $h = 1$

1.3 Výchozí systém rovnic

V této práci pracujeme s modelem slabě stlačitelné tekutiny, nelze tedy používat rovnici kontinuity ve tvaru $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, ale je nutné počít rovnici kontinuity pro stlačitelnou tekutinu, tedy

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (1.52)$$

kde ρ je hustota tekutiny, t je čas a \mathbf{v} je vektor rychlosti tekutiny.

Symbolem $\frac{D}{Dt}$ myslíme materiálovou derivaci, která je pro obecnou funkci y definovaná jako

$$\frac{Dy}{Dt} = \frac{\partial y}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla y, \quad (1.53)$$

Rychlost tekutiny je definovaná následovně

$$\frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \mathbf{v}, \quad (1.54)$$

kde \mathbf{x} je polohový vektor.

Systém výchozích rovnic dále obsahuje pohybovou rovnici

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbb{T} + \mathbf{f}, \quad (1.55)$$

kde vektor \mathbf{f} je vektorem vnějších sil a \mathbb{T} je tenzor napětí. V této práci se budeme zabývat Newtonskými tekutinami a tedy je tento tenzor definován jako

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \tau, \quad (1.56)$$

kde p je tlak, \mathbb{I} je tenzor identity a τ je deviatorická část tenzoru napětí

$$\tau = \lambda \text{tr}(\mathbb{D})\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D},$$

kde λ je tzv. druhá viskozita a μ je dynamická viskozita. Tenzor rychlosti deformace \mathbb{D} je dán vztahem

$$\mathbb{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T).$$

Tenzor deformace lze zapsat jako

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \tau = (-p + \lambda \text{tr}(\mathbb{D}))\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D}, \quad (1.57)$$

System uzavírá stavová rovnice

$$p = p(\rho). \quad (1.58)$$

Obvykle používaná stavová rovnice pro slabě stlačitelnou tekutinu je

$$p = b \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + p_0, \quad (1.59)$$

kde $b = \frac{c^2 \rho_0}{\gamma}$, γ je Poissonova konstanta, kterou pro problémy s volnou hladinou volíme $\gamma = 7$. Rychlost zvuku v tekutině označujeme jako c a veličina ρ_0 představuje referenční hustotu média. Stavovou rovnici lze pomocí Taylorova rozvoje v bodě $\rho = \rho_0$ upravit na linearizovaný tvar

$$p_i \simeq b \left[\left(\frac{\rho_0}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + \gamma b \left[\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\rho_0}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} \right] (\rho_i - \rho_{i0}).$$

Což je po dosazení za b a upravení

$$p = c^2(\rho - \rho_0) + p_0 \quad (1.60)$$

1.3.1 SPH diskretizace systému výchozích rovnic

Díky rozdělení spojitého prostředí na konečný počet částic, lze objem částice určit pomocí její hustoty a hmotnosti

$$V_i = \frac{m_i}{\rho_i}. \quad (1.61)$$

Hustotu v SPH formulaci lze vyjádřit pomocí vztahu (1.11) jako

$$\langle \rho(\mathbf{x}) \rangle_i = \sum_{j=1}^N \rho(\mathbf{x}_j) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) V_j = \sum_{j=1}^N m_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h). \quad (1.62)$$

Pro určení hustoty lze využít rovnice kontinuity (1.52). Tu diskretizujeme pomocí náhrady divergence (1.21), tedy

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = -\rho_i \langle \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle_i = -\rho_i \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot \nabla_j W_{ij}.$$

Definujeme-li $\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$ a vztah upravíme, můžeme psát

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \rho_i \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_j W_{ij}. \quad (1.63)$$

Kinematickou rovnicí díky Lagrangeovskému popisu kontinua diskretizujeme následovně

$$\frac{D\mathbf{x}_i}{Dt} = \mathbf{v}_i. \quad (1.64)$$

Diskretizaci pohybové rovnice lze sestrojít více způsoby. Člen vazkých sil $\nabla \cdot \tau$ označíme Π_{ij} a budeme se mu věnovat později. První z možností je nahradit gradient tlaku pomocí vztahu (1.28)

$$\frac{D\mathbf{v}_{ij}}{Dt} = - \left\langle \frac{\nabla p}{\rho} \right\rangle_i + \left\langle \frac{\nabla \cdot \tau}{\rho} \right\rangle_i + \mathbf{f}_i = - \sum_{j=1}^N \left(\frac{p_i + p_j}{\rho_i \rho_j} + \Pi_{ij} \right) \nabla_i W_{ij} m_j + f_i. \quad (1.65)$$

Druhou možností je provést náhradu gradientu tlaku pomocí vztahu (1.29)

$$\frac{D\mathbf{v}_{ij}}{Dt} = - \left\langle \frac{\nabla p}{\rho} \right\rangle_i + \left\langle \frac{\nabla \cdot \tau}{\rho} \right\rangle_i + \mathbf{f}_i = - \sum_{j=1}^N \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \nabla_i W_{ij} m_j + f_i. \quad (1.66)$$

Efekt vazkých sil pro Newtonské tekutiny odpovídá $\mu \nabla^2 \mathbf{u}$. Diskretizaci tedy provedeme podle vztahu (1.49). Nicméně abychom byli konzistentní s pohybovou rovnicí, musíme si uvědomit že nahrazujeme $\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \tau$

$$\left\langle \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \tau \right\rangle_i = \frac{\mu}{\rho_i} 2(d+2) \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij}}{\|\mathbf{x}_{ij}\|^2 + \epsilon h^2} \nabla_i W_{ij} = \sum_j \frac{\mu}{\rho_i} K \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij}}{\|\mathbf{x}_{ij}\|^2 + \epsilon h^2} \nabla_i W_{ij}$$

kde $K = 2(d+2)$ je prostorový koeficient s hodnotami $K = 6; 8; 10$ pro 1D, 2D a 3D a ϵ je kladná volitelná konstanta, která zajišťuje abychom nedělili nulou.

Porovnáme-li tento člen s viskózním členem v rovnici (1.65) resp. (1.66) musí být viskózní člen Π_{ij}^μ roven

$$\Pi_{ij}^\mu = -\mu K \frac{\mu_{ij}}{h \rho_i \rho_j}, \quad \mu_{ij} = \frac{h \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij}}{\|\mathbf{x}_{ij}\|^2 + \epsilon h^2}. \quad (1.67)$$

Tento vazký člen se často nahrazuje tzv. umělou vazkostí, která byla navržena za účelem stabilizace systému. Je definován

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha c_{ij} \mu_{ij} + \beta \mu_{ij}^2}{\bar{\rho}_{ij}}, & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij} < 0 \\ 0, & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij} > 0 \end{cases} \quad (1.68)$$

kde $c_{ij} = \frac{c_i + c_j}{2}$ je průměrná hodnota rychlosti zvuku mezi částicemi, $\bar{\rho}_{ij} = \frac{\rho_i + \rho_j}{2}$.

Definice μ_{ij} a ϵ je stejná jako v rovnici (1.67). Členy α a β jsou volitelné konstanty. Ve všech případech, které se v této práci vyskytují je voleno $\beta = 0$. Člen umělé vazkosti byl navržen jako stabilizační, přesto lze ukázat jeho souvislost s fyzikální

vazkostí (Colagrossi et al., 2017).

Poslední rovnice, která uzavírá diskretizovaný systém, je stavová rovnice. Tuto rovnici díky Lagrangeovskému popisu kontinua diskretizujeme následovně

$$p_i = b \left[\left(\frac{\rho_i}{\rho_{i0}} \right)^\gamma - 1 \right] + p_{i0}, \quad (1.69)$$

případně diskretizujeme její linearizovanou variantou

$$p_i = c_i^2(\rho_i - \rho_{i0}) + p_{i0}. \quad (1.70)$$

1.4 Časový krok a difuzní členy v SPH

V této práci se zabýváme pouze problémy, ve kterých je rychlost proudění tekutiny výrazně nižší než fyzikální rychlost zvuku. Právě časový krok je závislý na rychlosti zvuku $\Delta t \sim \frac{h}{c}$. Z takovéto závislosti nám při aplikaci metody SPH na reálné problémy vychází velmi malé časové kroky. Abychom tento problém vyřešili používáme tzv. numerickou rychlost zvuku c_0 . Numerickou rychlost zvuku určíme ze vztahu

$$c_0 = C_{cs} \sqrt{h_w \|\mathbf{g}\|}, \quad (1.71)$$

kde C_{cs} je volitelný koeficient, který je obvykle volen okolo hodnoty $C_{cs} = 20$, h_w je maximální výška vodního sloupce a \mathbf{g} je tíhové zrychlení. Případně lze volit numerickou rychlost zvuku pomocí vztahu

$$c_0 = 10 \max \left(V_{max}; \sqrt{\frac{p_{max}}{\rho_0}} \right), \quad (1.72)$$

kde V_{max} a p_{max} jsou maximální předpokládané hodnoty rychlosti a tlaku během výpočtu. Oba tyto vztahy souvisí s předpokladem slabé stlačitelnosti

$$\text{tekutiny} \quad \left| \frac{\Delta \rho}{\rho} \right| \leq 0.01.$$

Difuzní členy přidáváme do metody SPH, konkrétně do rovnice kontinuity, kvůli odstranění šumu v tlakovém resp. hustotním poli, který se projevuje při používání standartní náhrady výchozích rovnic. Tento šum je způsoben fyzikálním modelem slabě stlačitelné tekutiny, numerickým schématem, které je centrální a dalšími faktory.

Tento člen musí aproximovat sudé derivace dané veličiny aby byl difuzivní. Dále by měl být konzistentní se zákonem zachování, tedy abychom limitním přechodem mezi diskretizací a kontinuem dostali rovnici kontinuity. Také požaduje konzistenci k volné hladině, tedy aby nedocházelo k nefyzikálnímu pohybu hladiny. Posledním požadavkem je globální zachování hmoty. Upravená rovnice kontinuity s difuzním členem, který splňuje výše uvedené podmínky, je ve tvaru (Halada, 2022)

$$\frac{D\rho_i}{Dt} \simeq \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} + \delta_\psi h c_0 D, \quad (1.73)$$

kde δ_ψ je bezrozměrný parametr difuzního členu a

$$D = 2 \sum_{j=1}^N \psi_{ij} \frac{\mathbf{x}_{ij} \cdot \nabla_j W_{ij} m_j}{\|\mathbf{x}_{ij}\|^2 \rho_j}, \quad \psi_{ij}^{Mo} = \rho_j - \rho_i.$$

1.5 Numerická integrace

SPH diskretizací získáváme systém obyčejných diferenciálních rovnic, pro které řešíme Cauchyho úlohu. K řešení Cauchyho úloh budeme v této práci užívat Verletovu metodu a semi-implicitní Eulerovu metodu.

1.5.1 Verletova metoda

Verletova metoda je jedno z nejčastěji používaných schémat pro částicové systémy. Toto schéma je popsáno následujícím systémem rovnic

$$\mathbf{x}_i^{n+1} = \mathbf{x}_i^n + \Delta t \mathbf{v}_i^n + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{a}_i^n, \quad (1.74)$$

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^{n-1} + 2\Delta t \mathbf{a}_i^n, \quad (1.75)$$

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^{n-1} + 2\Delta t \frac{d\rho_i^n}{dt}, \quad (1.76)$$

kde Δt je délka časového kroku, horní indexy značí časový krok, spodní index v našich případech značí danou částici. Abychom mohli toto schéma používat musíme napočítat první časovou vrstvu jinou metodou. K tomu se běžně využívá Eulerova explicitní metoda popsaná rovnicemi

$$\mathbf{x}_i^{n+1} = \mathbf{x}_i^n + \Delta t \mathbf{v}_i^n + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{a}_i^n, \quad (1.77)$$

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^n + \Delta t \mathbf{a}_i^n, \quad (1.78)$$

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \Delta t \frac{d\rho_i^n}{dt}. \quad (1.79)$$

Verletova metoda je efektivní a jednoduchá na aplikaci. Integrace polohového vektoru tímto schématem dosahuje druhého řádu přesnosti. Této přesnosti dosahuje i integrace vektoru rychlosti a hustoty. Tato metoda je symplektická (Quarteroni et al., 2010).

1.5.2 Semi-implicitní Eulerova metoda

Semi-implicitní Eulerova metoda je využívána pro řešení Cauchyho úlohy. Je dán následujícím systémem rovnic

$$\mathbf{x}_i^{n+1} = \mathbf{x}_i^n + \Delta t \mathbf{v}_i^{n+1}, \quad (1.80)$$

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^n + \Delta t \mathbf{a}_i^n. \quad (1.81)$$

Integrace polohové vektoru a vektoru rychlosti touto metodou dosahuje prvního řádu přesnosti. Tato metoda je také symplektická. Tato metoda je v této práci použita v případech kdy se hustota napočítává pomocí algebraické rovnice a tedy pro ní není nutné provádět integraci (Quarteroni et al., 2010).

1.6 Okrajové podmínky v metodě SPH

Obdobně jako u jiných numerických metod, jsou okrajové podmínky v metodě SPH jedním z hlavních problémů při výpočtech a simulacích. Při řešení problémů s volnou hladinou se vyskytují následující druhy okrajových podmínek.

1.6.1 Okrajová podmínka pro volný povrch

Tato okrajová podmínka vyžaduje splnění kinematické a dynamické podmínky na rozhraní. Kinematická okrajová podmínka je reprezentovaná Dirichletovo okrajovou podmínkou. Ta vynucuje aby body na rozhraní zůstaly na hranici oblasti $\partial\Omega_{FS}$ (index FS značí volný povrch/hladinu tekutiny). Toto rozhraní se pohybuje s tekutinou a tedy

$$\mathbf{v}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{V}_{n,f}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_{FS}, \quad (1.82)$$

kde \mathbf{v}_n je rychlost tekutiny promítnutá do normály hladiny \mathbf{n} , $\mathbf{V}_{n,f}$ je rychlost rozhraní promítnutá do směru normály.

Dynamická okrajová podmínka pro volnou hladinu je důsledkem spojitosti napětí v rozhraní. Předpokládáme že povrchové napětí je zanedbatelné, hladina je bez působení kolmého normálového napětí, rovnoběžného a tečného smykového napětí. Pro Newtonskou tekutinu lze tuto dynamickou okrajovou podmínku Dirichletovo typu zapsat jako

$$\mathbb{T} \cdot \mathbf{n} = (-p + \lambda \text{tr}(\mathbb{D}))\mathbf{n} + 2\mu\mathbb{D} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad (1.83)$$

kde \mathbb{D} je tenzor rychlosti deformace a λ a μ jsou koeficienty vazkosti. (Cercós Pita, 2016)

1.6.2 Okrajové podmínky pro stěnu

Při interakci tekutiny se stěnou nesmí dojít k průniku tekutiny stěnou. Z této představy můžeme určit kinematickou okrajovou podmínku reprezentovanou Dirichletovým tvarem okrajové podmínky

$$\mathbf{v}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{V}_{n,b}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_B, \quad (1.84)$$

kde $\partial\Omega_B$ je část hranice oblasti Ω , která je popsána pevnou stěnou a $\mathbf{V}_{n,b}$ je normálová rychlost stěny.

U dynamické okrajové podmínky rozlišujeme mezi tzv. free-slip BC (okrajová podmínka volného skluzu) a no-slip BC (okrajová podmínka ulpívání). V této práci se budeme zabývat pouze případem ulpívání. Dirichletova okrajová podmínka v případě ulpívání toku na stěně předepisuje pro rychlost

$$\mathbf{v}_t(\mathbf{x}) \Big|_{no-slip} = \mathbf{V}_{t,b}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_B, \quad (1.85)$$

kde \mathbf{v}_t je tečná rychlost tekutiny a $\mathbf{V}_{t,b}$ je tečná rychlost stěny.

Pro tlak je předepsána Neumannova okrajová podmínka ve tvaru

$$\nabla p(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \rho \left[\mathbf{f} - \frac{d\mathbf{V}(\mathbf{x})}{dt} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}) \right] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_B, \quad (1.86)$$

1.6.3 Vstupní/výstupní okrajové podmínky

Pro případ vstupních okrajových podmínek (část hrance značíme $\partial\Omega_I$), na rozdíl od okrajových podmínek pevné stěny, kde aplikujeme Dirichletovu OP pro rychlosti a Neumannovu OP pro tlak, aplikujeme pouze Dirichletovy okrajové podmínky

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_I, \quad (1.87)$$

$$p(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_I, \quad (1.88)$$

kde \mathbf{V} udává rychlost na vstupu a P udává tlak na vstupu.

Pro výstup uvažujeme naopak pouze Neumannovu okrajovou podmínku ve tvaru

$$\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_O, \quad (1.89)$$

$$\nabla p(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_O, \quad (1.90)$$

kde $\partial\Omega_I$ je část hrance odpovídající výstupní okrajové podmínce.

1.6.4 Periodické okrajové podmínky

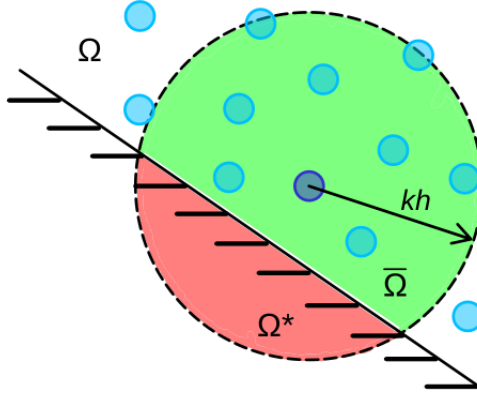
Určité problémy mohou připustit teoretický popis, takový že skalár nebo vektorové pole je možné definovat následovně

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}), \quad (1.91)$$

kde $\Delta\mathbf{x}$ je prostorová perioda.

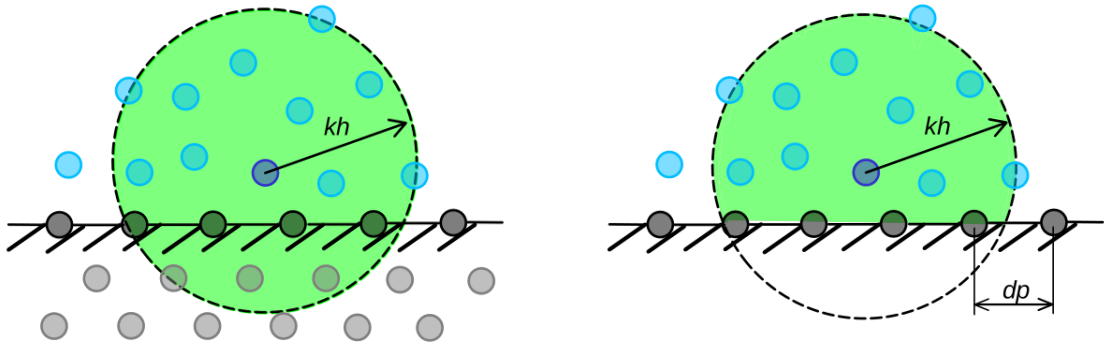
1.7 Realizace okrajových podmínek v metodě SPH

Při realizaci okrajových podmínek pro pevnou stěnu musíme čelit několika problémům. Musíme zaručit neprostupnost stěny pro částici tekutiny. Dalším problémem, který je patrný z obr. 1.3, je že pro částici tekutiny v blízkosti hranice nemáme rovnoměrně zaplněný nosič Ω_i váhové funkce ostatními částicemi (tzv. deformovaný nosič jádra). Pro zjednodušení popisu pro každou částici v blízkosti stěny lze nosič její váhové funkce rozdělit $\Omega_i = \Omega_i^* \cup \bar{\Omega}_i$. Tedy je-li částice v blízkosti hranice, pak se nachází v oblasti Ω pouze část nosiče $\bar{\Omega}_i \in \Omega$ a část nosiče $\Omega_i^* \notin \Omega$ se v oblasti nenachází.



Obr. 1.3. Znáznornění přesahující efektivní oblasti jádra Ω_i přes hranici pro částici nacházející se v její blízkosti. $\Omega_i = \Omega_i^* \cup \bar{\Omega}_i$, Ω_i^* - část mimo oblast úlohy Ω , $\bar{\Omega}_i$ - část v oblasti úlohy Ω (Halada, 2022).

Tento problém lze vyřešit několika způsoby. Prvním možným způsobem jak tento problém odstranit jsou metody dodatečných částic. V tomto případě rovnoměrně doplníme za hranici pomocné částice, které zaručí zaplnění oblasti Ω_i^* pro libovolnou částici v blízkosti stěny. Druhým přístupem jsou způsoby založené na renormalizaci aproximací jednotlivých členů výchozích rovnic, kterými kompenzujeme chybějící částice v oblasti Ω^* , které interagují s naší částicí tekutiny.



Obr. 1.4. Realizace okrajových podmínek pomocí dodatečných částic umístěných za hranicí (vlevo) a pomocí jedné vrstvy částic, obvykle doplněné o renormalizační proceduru (vpravo). Počáteční vzdálenost mezi částicemi značíme d_p (Halada, 2022).

1.8 Okrajové podmínky na stěně

V této části se budeme zabývat realizací výše zmíněných způsobů formulace okrajových podmínek.

1.8.1 Korekce jádra - kernel corrections

Jedná se o kompenzační metody. Nejjednodušší možností jak kompenzovat chybějící sousední částice je nahradit váhovou funkci $W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h)$ v blízkosti hranice

alternativní, tzv. deformovanou, variantou značenou $W^{\mathcal{L}}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h)$ tak aby

$$\nabla W^{\mathcal{L}}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) = \mathcal{L}(\mathbf{x}_i) \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h), \quad (1.92)$$

kde \mathcal{L} je tzv. renormalizačním/deformačním operátorem. Je-li $\mathcal{L}(\mathbf{x}_i) = \mathbb{I}$ obdržíme originální nedeformovanou váhovou funkci (\mathbb{I} je jednotková matice).

Jednou z možností je použít Shephardovu renormalizaci kdy

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{\gamma_h(\mathbf{x})_i} \mathbb{I}, \quad (1.93)$$

kde $\gamma_h(\mathbf{x}_i)$ je Shephardův renormalizační faktor. Ten definujeme

$$\gamma_h(\mathbf{x}_i) = \int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}', \quad (1.94)$$

a v diskretizované částicové reprezentaci

$$\langle \gamma \rangle_i = \sum_{j \in F} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) \frac{m_j}{\rho_j}. \quad (1.95)$$

Písmeno F v sumaci značí že sčítání probíhá pouze přes částice tekutiny, tedy částice hranice k Shephardovu renormalizačnímu faktoru nepřispívají.

Tento postup vede k získání aproximace nultého řádu pro SPH náhradu v blízkosti hranice. Pro konstrukci náhrady prvního řádu lze využít tzv. MLS (moving least squares) přístup. V tomto případě je deformační operátor definován

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}_i) = \left[\sum_{j \in F} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \otimes \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) \frac{m_j}{\rho_j} \right]^{-1}. \quad (1.96)$$

„Kompenzační přístup však nedokáže sám o sobě zaručit neprostupnost stěny. Používá se proto v kombinaci s doplňujícími technikami, obvykle založenými na pokrytí hranice vrstvou částic (se vzdálenostmi mezi částicemi odpovídající počátečnímu dělení d_p , které zavádějí působení dodatečné síly mezi stěnou a tekutinou. Byť použití dodatečných (či umělých) hraničních sil není zcela konzistentní, v případě rozsáhlých, objemných třírozměrných simulací s komplexní geometrií jde, oproti jiným přístupům, o nástroj snadno realizovatelný a lze jej považovat za přijatelnou alternativu“ (Halada, 2022).

1.8.2 Okrajové podmínky na principu rozšíření

Okrajové podmínky na principu rozšíření dodávají do oblasti Ω^* dodatečné částice, tak aby všechny částice v blízkosti hranice měly zcela zaplněný nosič své váhové funkce. Tyto částice (označované jako virtuální nebo jako tzv. ghost particles) realizují předepsanou okrajovou podmínku a také zabraňují částicím tekutiny projít hranicí. Částice lze rozlišit podle toho, patří-li mezi částice tekutiny nebo mezi částice stěny. potom pro interakci částice tekutiny s okolím můžeme v diskretizované formě psát

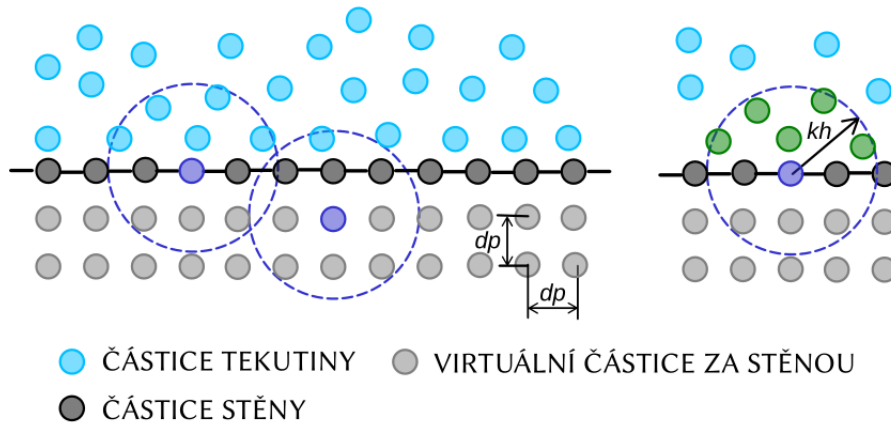
$$\langle f \rangle_i = \sum_{j \in F} f_j W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) \frac{m_j}{\rho_j} + \sum_{j \in G} f_j W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) \frac{m_j}{\rho_j}, \quad (1.97)$$

$$\langle \nabla f \rangle_i = - \sum_{j \in F} f_j \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) \frac{m_j}{\rho_j} - \sum_{j \in G} f_j \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) \frac{m_j}{\rho_j}, \quad (1.98)$$

kde F značí částice tekutiny (respektive částice v oblasti Ω), a G značí dodané částice. Obě sumy přes $j \in G$ odpovídají interakci částice tekutiny s hranicí.

První skupinou okrajových podmínek na principu rozšíření je přístup tzv. virtuálních částic. V těchto případech se za hranici rozmístí dodatečné (virtuální) částice, jenž mají danou a neměnou strukturu uspořádání po čas výpočtu, nicméně poloha virtuálních částic se může měnit, uvažujeme-li pohyblivou stěnu. Od těchto virtuálních částic vyžadujeme, aby zaručily, že pokud se libovolná částice tekutiny dostatečně přiblíží k okrajové podmínce, bude mít zaplněný nosič váhové funkce. Hodnoty jednotlivých fyzikálních veličin jsou přesně předepsány, případně extrapolovány z hodnot částic tekutiny, které se nachází v nosiči dané virtuální částice. Podle způsobu jakým se tyto veličiny na virtuálních částicích určí, se jednotlivé varianty přístupu k formulaci okrajových podmínek založených na virtuálních částicích liší. Druhou variantou je přístup přes zrcadlení částice tekutiny (ghost particles). Stejně jako v předchozím případě máme za hranicí dodatečné částice. Tyto částice, ale vznikají přezrcadlením částic tekutiny, které jsou v blízkosti hranice, přes hranici. Hodnoty na takto vzniklé částici jsou pak stejné jako na jejich vzoru s výjimkou rychlosti, kterou uvažujeme s opačným znaménkem. Tento přístup je složitější na implementaci než ten předchozí hlavně kvůli skutečnosti, že neznáme dopředu počet částic které budeme muset přezrcadlit. (Cercós Pita, 2016), (Halada, 2022)

1.8.3 Formulace Dynamic boundary condition (DBC)

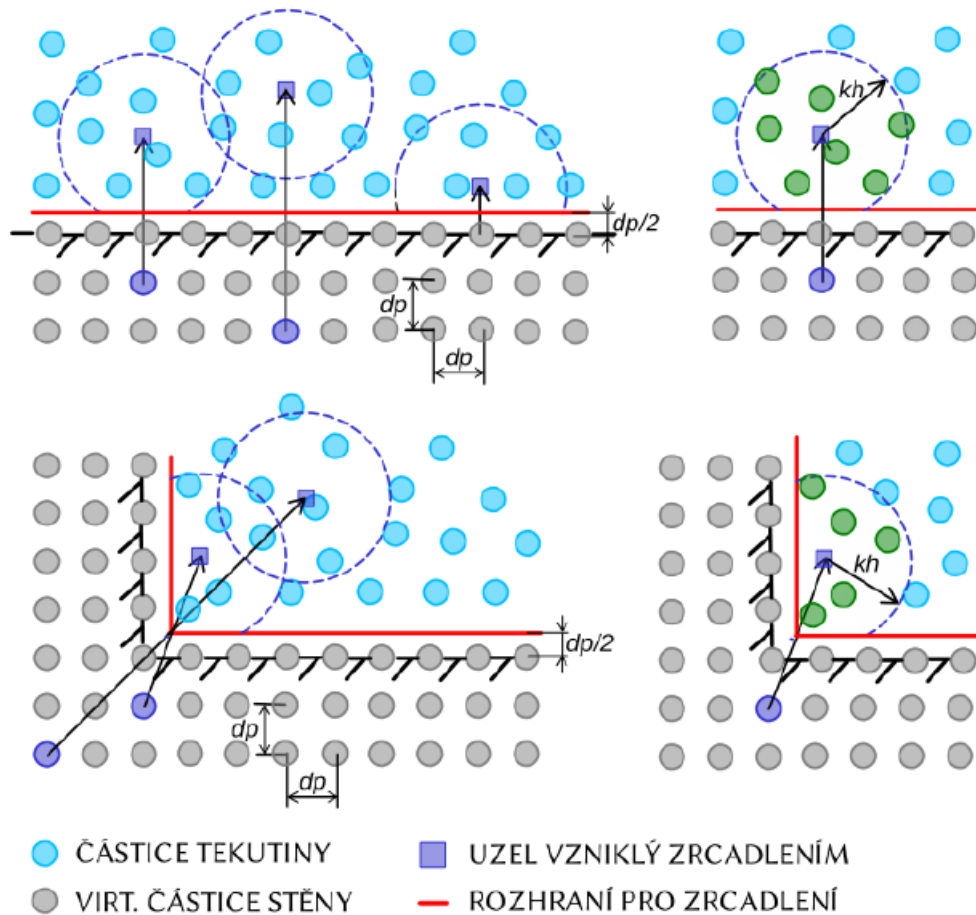


Obr. 1.5. Schématické znázornění interakce částic, hraničních částic a virtuálních částic za stěnou u varianty okrajových podmínek DBC. (Halada, 2022)

Nejběžnější a nejjednodušší varianta okrajových podmínek je založena na virtuálních částicích. Je to tzv. DBC (dynamic boundary condition) formulace. Pro tuto formulaci zaplníme hranici a oblast za ní, do vzdálenosti κh (toto zaručí naplněnost nosiče), virtuálními částicemi. Tyto částice jsou uspořádány do kartézské mřížky o hraně dp , což je inicializační vzdálenosti mezi částicemi tekutiny. Takto vytvořené struktury virtuálních částic jsou však možné pouze pro stěny, které lze popsat úsečkami. Pro křivočaré stěny/hrany, ale i rohy oblasti, musíme částice uspořádat jinak,

s tím že ne vždy můžeme ekvidistantnost zaručit, ale snažíme se při tom co nejvíce přiblížit rovnoměrnému uspořádání. Ve formulaci DBC se hodnoty fyzikálních veličin na virtuálních částicích určují z obdobných výchozích rovnic, které jsou předepsány pro částice tekutiny. Tedy všechny částice v simulaci splňují stejné výchozí rovnice kromě pohybové, virtuální částice se nepohybují, takže pro ně tuto rovnici nevyhodnocujeme. Pro vyhodnocení veličin na virtuální částici, ale musíme mít na paměti, že ostatní virtuální částice k této částici nepřispívají. Proč tomu tak je nám vysvětlí následující příklad. Představme si že v rozlehlé oblasti je pouze jedna částice, jejíž nosič nezasahuje do okrajové podmínky. Pak by zcela nefyzikálně rostla hustota na hraničních částicích. Pokud by se následně začala interagovat částice tekutiny s okrajovou podmínkou, tak by do její pohybové rovnice vstupovala zcela nesmyslná hustota.

1.8.4 Formulace Modified Dynamic boundary condition (mDBC)



Obr. 1.6. Schematické znázornění zrcadlení virtuálních částic na uzly v oblasti tekutiny a jejich následné interakce u varianty okrajových podmínek mDBC (Halada, 2022).

Tato formulace je vylepšením formulace okrajových podmínek DBC, které odstraňuje některé z jejích nedostatků např. uměle vzniklá mezera mezi stěnou a tekutinou,

šum a poruchy v tlakových polích. Tato metoda je ale složitější na implementaci. Rozdílem mezi mDBC a DBC je způsob určení hodnoty daných veličin na hraničních částicích. V této formulaci jsou částice stěny uspořádány stejně jako u DBC formulace, ale s dalším rozhraním mezi částicemi hranice a částicemi tekutiny ve vzdálenosti $0.5dp$. Každá hraniční částice je přes toto rozhraní přezrcadlena do uzlu v oblasti tekutiny. Následně je pro tento uzel napočítán příspěvek od částic tekutiny v nosiči uzlu. Tato hodnota v uzlu je nakonec extrapoloována zpět na hraniční částici pomocí Taylorova polynomu 1. stupně. Samotná okrajová podmínka pracuje na identickém způsobu jako u formulace DBC. Zrcadlení hraniční částice je u přímých stěn osově pomocí normály, u rohových částic je to provedeno středově přes roh oblasti.

1.8.5 Semianalytické okrajové podmínky - Boundary integral (BI)

BI jsou díky jednovrstvé formulaci velmi vhodné pro řešení inženýrských úloh se složitou geometrií. Odpadá problém s ekvidistantním rozdělením dodatečných částic (např. u rohů) jako ve formulaci DBC. Je to přístup využívající hraniční členy. Vyjdeme z náhrady derivace v metodě SPH, v rovnici (1.9) nevypustíme integrál přes hranici a pokoušíme se nalézt jeho řešení na hranici oblasti. Lze to udělat částečně analyticky nebo, jak je to uvedené v této práci, pouze numericky v SPH formalismu.

Výchozí rovnice je již zmiňovaná (1.9), kde budeme integrovat pouze přes kompaktní nosič váhové funkce Ω_i , kterou rozdělujeme, dle obrázku 1.3 na část $\Omega_i \in \Omega$ a $\Omega_i^* \notin \Omega$. Tedy

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = - \int_{\bar{\Omega}_i} f(\mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}'} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' - \int_{\Omega_i^*} f(\mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}'} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (1.99)$$

Druhý integrál v principu neexistuje (neboť je mimo oblast Ω), ale za předpokladu, že je pole f dostatečně regulární a s využitím vlastností váhové funkce provedeme náhradu která zahrnuje oba integrály

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\gamma_h(\mathbf{x})} \left(- \int_{\bar{\Omega}_i} f(\mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}'} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' + \int_{\partial\bar{\Omega}_i} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \bar{\mathbf{n}} d\mathbf{x}' \right) = \quad (1.100) \\ & = \frac{1}{1 - \gamma_h(\mathbf{x})} \left(- \int_{\Omega_i^*} f(\mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}'} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' + \int_{\partial\Omega_i^*} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{n}^* d\mathbf{x}' \right) + O(h). \end{aligned}$$

Kde

$$\gamma_h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (1.101)$$

je spojitý Shephardův renormalizační faktor. A pro vnější normálu oblasti Ω platí vztah $\mathbf{n} = -\mathbf{n}^* = \bar{\mathbf{n}}$ (normály \mathbf{n}^* a $\bar{\mathbf{n}}$ jsou vnější normály příslušné svým částem oblasti). V rovnici 1.100 zanedbáme člen $O(h)$. Díky vlastnostem váhové funkce víme, že povrchové integrály budou mít jedinou nenulovou část a to na části hranice, kterou je $\bar{\Omega}_i \cap \Omega_i^* = \partial\Omega_i$. Můžeme tedy po dosazení správných normál oba povrchové

integrály sjednotit. Tedy

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_i^*} f(\mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}'} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \simeq \\ & \simeq \frac{1 - \gamma_h(\mathbf{x})}{\gamma_h(\mathbf{x})} \int_{\bar{\Omega}_i} f(\mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}'} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' - \frac{1}{\gamma_h(x)} \int_{\partial\bar{\Omega}_i} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{n} d\mathbf{x}'. \end{aligned} \quad (1.102)$$

Tento vztah dosadíme do rovnice (1.99) a tedy dostáváme po úpravách náhradu

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = -\frac{1}{\gamma_h(\mathbf{x})} \left[\int_{\bar{\Omega}_i} f(\mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}'} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' - \int_{\partial\bar{\Omega}_i} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{n} d\mathbf{x}' \right]. \quad (1.103)$$

Na tomto místě provedeme náhradu rovnice kontinuity a Eulerovy rovnice. Eulerova rovnice je volena kvůli jednoduchosti. Nicméně k pohybové rovnice bychom se dostali podobným způsobem.

Mějme rovnici kontinuity

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot (\mathbf{v}) = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho. \quad (1.104)$$

Nahradíme pravou stranu rovnice (1.104) pomocí SPH formalismu z rovnice (1.103)

$$\begin{aligned} \frac{D\rho(\mathbf{x})}{Dt} &= \frac{1}{\gamma_h(\mathbf{x})} \left(\int_{\bar{\Omega}} \rho(\mathbf{x}') \mathbf{v}(\mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}'} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' - \int_{\partial\bar{\Omega}} \rho(\mathbf{x}') \mathbf{v}(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{n} d\mathbf{x}' \right) + \\ & - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x})}{\gamma_h(\mathbf{x})} \left(\int_{\bar{\Omega}} \rho(\mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}'} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' - \int_{\partial\bar{\Omega}} \rho(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{n} d\mathbf{x}' \right). \end{aligned} \quad (1.105)$$

Člen $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ můžeme vepsat do integrálu. Odpovídající si integrály sečteme a dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{D\rho(\mathbf{x})}{Dt} &= \frac{1}{\gamma_h(\mathbf{x})} \left(\int_{\bar{\Omega}} \rho(\mathbf{x}') (\mathbf{v}(\mathbf{x}') - \mathbf{v}(\mathbf{x})) \nabla_{\mathbf{x}'} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right) + \\ & - \frac{1}{\gamma_h(\mathbf{x})} \left(\int_{\partial\bar{\Omega}} \rho(\mathbf{x}') (\mathbf{v}(\mathbf{x}') - \mathbf{v}(\mathbf{x})) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{n} d\mathbf{x}' \right). \end{aligned} \quad (1.106)$$

To lze dále upravit na tuto rovnici

$$\begin{aligned} \frac{D\rho(\mathbf{x})}{Dt} &= -\frac{1}{\gamma_h(\mathbf{x})} \left(\int_{\bar{\Omega}} \rho(\mathbf{x}') (\mathbf{v}(\mathbf{x}') - \mathbf{v}(\mathbf{x})) \nabla_{\mathbf{x}} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right) + \\ & - \frac{1}{\gamma_h(\mathbf{x})} \left(\int_{\partial\bar{\Omega}} \rho(\mathbf{x}') (\mathbf{v}(\mathbf{x}') - \mathbf{v}(\mathbf{x})) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{n} d\mathbf{x}' \right). \end{aligned} \quad (1.107)$$

Tato úprava je pouze pravidlem pro derivaci složené funkce

$$\nabla_{\mathbf{x}} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -\nabla_{\mathbf{x}'} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Teď se zaměříme na Eulerovu rovnici bez vnějšího silového působení

$$\frac{D\mathbf{v}(\mathbf{x})}{Dt} = -\frac{\nabla p(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x})} = -\nabla\left(\frac{p(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x})}\right) - \frac{p(\mathbf{x})}{\rho^2(\mathbf{x})}\nabla\rho(\mathbf{x}). \quad (1.108)$$

Pro nahrazení gradientu použijeme náhradu (1.103) a dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{v}(\mathbf{x})}{Dt} &= \frac{1}{\gamma_h(\mathbf{x})} \left(\int_{\bar{\Omega}} \frac{p(\mathbf{x}')}{\rho(\mathbf{x}')} \nabla_{\mathbf{x}'} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' - \int_{\partial\bar{\Omega}} \frac{p(\mathbf{x}')}{\rho(\mathbf{x}')} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{n} d\mathbf{x}' \right) + \\ &+ \frac{1}{\gamma_h(\mathbf{x})} \left(\int_{\bar{\Omega}} \frac{p(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{\rho^2(\mathbf{x})} \nabla_{\mathbf{x}'} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' - \int_{\partial\bar{\Omega}} \frac{p(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{\rho^2(\mathbf{x})} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{n} d\mathbf{x}' \right). \end{aligned} \quad (1.109)$$

Po úpravách dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{v}(\mathbf{x})}{Dt} &= \frac{1}{\gamma_h(\mathbf{x})} \int_{\bar{\Omega}} \rho(\mathbf{x}') \left[\frac{p(\mathbf{x}')}{\rho^2(\mathbf{x}')} + \frac{p(\mathbf{x})}{\rho^2(\mathbf{x})} \right] \nabla_{\mathbf{x}'} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' + \\ &- \frac{1}{\gamma_h(\mathbf{x})} \int_{\partial\bar{\Omega}} \rho(\mathbf{x}') \left[\frac{p(\mathbf{x}')}{\rho^2(\mathbf{x}')} + \frac{p(\mathbf{x})}{\rho^2(\mathbf{x})} \right] W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{n} d\mathbf{x}'. \end{aligned} \quad (1.110)$$

A tedy mohou opět přepsat gradient váhové funkce

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{v}(\mathbf{x})}{Dt} &= -\frac{1}{\gamma_h(\mathbf{x})} \int_{\bar{\Omega}} \rho(\mathbf{x}') \left[\frac{p(\mathbf{x}')}{\rho^2(\mathbf{x}')} + \frac{p(\mathbf{x})}{\rho^2(\mathbf{x})} \right] \nabla_{\mathbf{x}} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' + \\ &- \frac{1}{\gamma_h(\mathbf{x})} \int_{\partial\bar{\Omega}} \rho(\mathbf{x}') \left[\frac{p(\mathbf{x}')}{\rho^2(\mathbf{x}')} + \frac{p(\mathbf{x})}{\rho^2(\mathbf{x})} \right] W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{n} d\mathbf{x}'. \end{aligned} \quad (1.111)$$

Je tedy patrné že při formulaci okrajové podmínky typu BI, dostáváme část která je přes oblast nosiče uvnitř oblasti ($\bar{\Omega} \in \Omega$) a přes část hranice oblasti, která je v nosiči váhové funkce ($\bar{\Omega} \cap \Omega^* = \partial\bar{\Omega}$). To se projeví při výsledné SPH diskretizaci jako dvě sumy, jedna přes částice tekutiny a druhá přes jednu vrstvu částic stěny.

Přejdeme nyní k plně diskretizovaným rovnicím s viskózním a difuzivním členem, které se používají pro výpočty s okrajovými podmínkami typu BI. Systém rovnic má tvar

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \frac{1}{\gamma_i} \left(\sum_{j \in F} m_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} + \sum_{j \in B} \rho_k \mathbf{v}_{ik} \cdot \mathbf{n}_k W_{ik} s_k + \delta_\psi h c_0 D \right), \quad (1.112)$$

$$D = 2 \sum_{j \in F} \psi_{ij} \frac{\mathbf{x}_{ij} \cdot \nabla_j W_{ij}}{\|\mathbf{x}_{ij}\|^2} \frac{m_j}{\rho_j}, \quad \psi_{ij}^{Mo} = \rho_j - \rho_i,$$

$$p = b \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\kappa - 1 \right] + p_0, \quad b = \frac{c_0^2 \rho_0}{\kappa}, \quad (1.113)$$

$$\frac{D\mathbf{x}_i}{Dt} = \mathbf{v}_i. \quad (1.114)$$

Volíme jednu z následujících dvou tvarů pohybové rovnice

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = -\frac{1}{\gamma_i} \left(\sum_{j \in F} (\Lambda_{ij} + \Pi_{ij}) \nabla_i W_{ij} m_j + \sum_{k \in B} \rho_k (\Lambda_{ik} + \Pi_{ik}) \mathbf{n}_k W_{ik} s_k \right) - \mathbf{f}_i, \quad (1.115)$$

$$\Lambda_{ij} = \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2},$$

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = -\frac{1}{\gamma_i} \left(\sum_{j \in F} (\Lambda_{ij} + \Pi_{ij}) \nabla_i W_{ij} m_j + \sum_{k \in B} \rho_k (\Lambda_{ik} + \Pi_{ik}) \mathbf{n}_k W_{ik} s_k \right) - \mathbf{f}_i, \quad (1.116)$$

$$\Lambda_{ij} = \frac{p_i + p_j}{\rho_i \rho_j}.$$

Zbytek členů volíme pro obě varianty pohybové rovnice stejný

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-2\alpha c_{ij} \mu_{ij} + 2\beta \mu_{ij}^2}{\rho_i + \rho_j}, & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij} < 0 \\ 0, & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij} > 0 \end{cases} \quad \mu_{ij} = \frac{h \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij}}{|\mathbf{x}_{ij}|^2 + \epsilon h^2},$$

$$\gamma_i = \sum_{j \in F} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \frac{m_j}{\rho_j}. \quad (1.117)$$

Písmeno B v sumaci značí sčítání přes hraniční částice. Hodnota s_k je velikost plochy, která připadá na jednu částici hranice. Je závislá na vzdálenosti částic d_p takto $s_k = d_p^{dim-1}$, kde dim je dimenze úlohy. Vnější normálu na $\partial\Omega$ značíme \mathbf{n}_k . V publikacích často bývá naopak brána vnitřní normála, protože máme-li např. 2D úlohu a stěna je rovnoběžná s osou x pak má jednotková vnitřní normála, kladné prvky. Pro určení hodnoty proměnných na hranicích využíváme vážené sumace

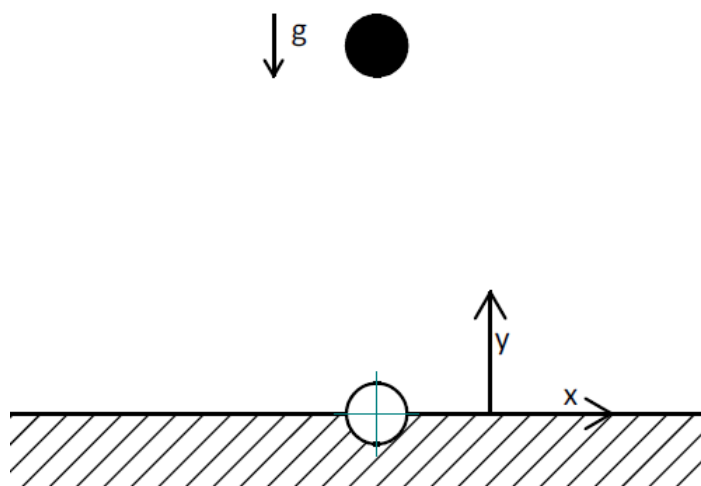
$$f(\mathbf{x}_b) = \frac{\sum_{j \in F} f_j W(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_j)}{\sum_{j \in F} W(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_j)}. \quad (1.118)$$

2 Interakce částice se stěnou

V této části se zaměříme na numerický vliv formulací DBC a BI okrajových podmínek. Inspirací k vypracování této kapitoly je článek (Crespo et al., 2007) ve kterém se autoři zabývají příklady interakce částice tekutiny se stěnou. My tento článek rozšíříme o BI formulaci okrajových podmínek a o další testovací případy. Na nich ukážeme princip fungování jednotlivých okrajových podmínek a jejich numerické vlastnosti. Na závěr této kapitoly se pokusíme o vylepšení formulace BI abychom pomocí nich mohli lépe modelovat vazké proudění. Všechny výsledky uvedené v této kapitole byly získány pomocí vlastního programu,

2.1 Rozbor volného pádu částice tekutiny na částici stěny

V této podkapitole dopodrobna rozebereme formulaci úlohy pomocí DBC a BI formulace okrajových podmínek na kterých vysvětlíme princip odrazu a chování částice tekutiny pro obě formulace.



Obr. 2.1. Schéma řešeného případu

2.1.1 Formulace DBC

Budeme uvažovat problém z obrázku 2.1, tedy volný pád jedné částice tekutiny v tíhovém poli na jednu částici stěny. DBC formulace okrajových podmínek je ze své podstaty vícevrstvá, nicméně zde tuto skutečnost zanedbáme a budeme uvažovat pouze jednu částici v okrajové podmínce.

Pro použití této obecné formulace okrajových podmínek máme následující systém rovnic. Rovnice kontinuity (1.62)

$$\rho_i = \sum_{j \in F \cup B} m_j W_{ij}, i \in F, \quad (2.1)$$

$$\rho_i = \sum_{j \in F} m_j W_{ij} + m_i W_{ii}, i \in B,$$

kde F je množina částic tekutiny a B je množina částic stěny. První rovnice je pro určení hustoty libovolné částice tekutiny a druhá rovnice je pro určení hustoty částice stěny. Druhá část rovnice kontinuity je u varianty DBC obecně nutná, jinak by docházelo k nefyzikálnímu nárůstu hustoty na hraničních členech, neboť hraniční částice je v nosiči nejbližších hraničních částic.

Rovnice kinematiky (1.64)

$$\frac{D\mathbf{x}_i}{Dt} = \mathbf{v}_i. \quad (2.2)$$

Pohybovou rovnicí pro DBC je (1.66) s vazkým členem (1.68)

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = - \sum_{j \in F \cup B} (\Lambda_{ij} + \Pi_{ij}) \nabla_i W_{ij} m_j - \mathbf{f}_i, \quad (2.3)$$

kde m_j je konstantní hmotnost částice a další členy

$$\Lambda_{ij} = \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2}$$

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-2\alpha c_{ij} \mu_{ij} + 2\beta \mu_{ij}^2}{\rho_i + \rho_j}, & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij} < 0 \\ 0, & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij} > 0 \end{cases} \quad \mu_{ij} = \frac{h \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij}}{|\mathbf{x}_{ij}|^2 + \epsilon h^2},$$

$$\mathbf{f}_i = (0, g)^T.$$

Systém uzavírá linearizovaná stavová rovnice (1.70)

$$p_i = c_0^2(\rho_i - \rho_{0i}) + p_{0i}. \quad (2.4)$$

Následně předchozí vztahy rozepíšeme pro interakci částice tekutiny s částicí stěny. Nejprve upravíme rovnici kontinuity

$$\rho_i = \sum_j m_j W_{ij}, i \in F$$

$$\rho_i = \sum_{j \in F} m_j W_{ij} + m_i W_{ii}, i \in B,$$

Máme-li pouze dvě částice dostáváme dvě rovnice pro hustotu. Jak již bylo zmíněno v předchozí kapitole, pro správnou aplikaci okrajových podmínek typu DBC musíme napočítat hustotu na hraničním členu. Dostáváme tedy systém:

$$\rho_i = m_j W_{ij} + m_i W_{ii}. \quad (2.5)$$

$$\rho_j = m_j W_{jj} + m_i W_{ij}.$$

Pro jednoduchost budeme uvažovat stejně hmotné částice a tedy $\rho_i = \rho_j = \rho$. Dále se zaměříme na pohybovou rovnici, tzn. rovnici (2.3). Rozepíšeme ji, pro námi uvažovanou interakci

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = -(\Lambda_{ij} + \Pi_{ij}) \nabla_i W_{ij} m_j - (\Lambda_{ii} + \Pi_{ii}) \nabla_i W_{ii} m_i - \mathbf{f}_i.$$

Z vlastnosti jádra, je patrné že druhý člen na pravé straně bude nulový (jádro nabývá maxima při nulové vzdálenosti, a tedy existuje-li gradient musí být nulový). Dále rozepíšeme další členy

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = - \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \frac{-2\alpha c_{ij}\mu_{ij} + 2\beta\mu_{ij}^2}{\rho_i + \rho_j} \right) \nabla_i W_{ij} m_i - \mathbf{f}_i.$$

Člen obsahující μ_{ij}^2 zanedbáme. Předpokládáme, že se k sobě částice blíží, tedy člen x_{ij} jde k nule. To stejné lze prohlásit i o v_{ij} , pokud má na hranici zastavit. Člen s μ_{ij}^2 jde k nule rychleji.

Nakonec upravíme stavovou rovnici, pro jednoduchost uvažujeme $p_0 = 0$. Dostáváme

$$p_i = p_j = c_0^2(\rho_i - \rho_{i0}) \quad (2.6)$$

Člen ρ_{i0} je počáteční hustota.

Z rovnice kontinuity můžeme psát

$$\rho_{i0} = \rho_{j0} = \rho_0 = mW_{ii}.$$

Finální systém rovnic je ve tvaru

$$\rho = mW_{ij} + mW_{ii}, \quad (2.7)$$

$$\frac{Dx}{Dt} = v_x, \quad (2.8)$$

$$\frac{Dy}{Dt} = v_y, \quad (2.9)$$

$$\frac{Dv_x}{Dt} = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{Dv_y}{Dt} = - \left(\frac{2c_0^2(\rho - \rho_0)}{\rho^2} + \frac{-\alpha c_0}{\rho} \frac{h\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij}}{|\mathbf{x}_{ij}|^2 + \epsilon h^2} \right) \nabla_{iy} W_{ij} m - g. \quad (2.11)$$

Pohybová rovnice v směru x je homogenní, protože padá-li částice tekutiny přímo na částici stěny, pak je gradient váhové funkce v tomto směru nulový. Také vnější zrychlení v tomto směru a počáteční x-ovou rychlost zde uvažujeme rovnu nule.

Mechanismus odrazu funguje následovně. Rovnice (2.8) a (2.10) nejsou pro mechanismus odrazu podstatné, neboť ve směru x podle rovnice (2.10) nedochází k interakci. Nachází-li se částice v nosiči jádra, její hustota, podle rovnice (2.7), roste. Z vlastnosti jádra víme, že v rovnici (2.11) je gradient záporný. Tedy první a druhý člen nabývají kladných hodnot (druhý člen se účastní interakce pouze když $\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij} < 0$, jinak je nulový). Částice začíná interagovat teprve když vletí do nosiče váhové funkce a snižuje rychlost. Pravá strana rovnice je náhle rostoucí funkcí, až v určitý moment dosáhne hodnoty nula, to je moment odrazu. Pak bude materiálová derivace rychlosti kladná a částice se začne vzdalovat od stěny, druhý člen vymizí. Když se částice nenachází v nosiči jádra hraniční částice působí pouze vektor vnějšího zrychlení.

2.1.2 Formulace BI

Ted' zanalyzujeme interakci mezi jednou částicí tekutiny a jednou částicí hranice v BI formulaci. Tato formulace je ze své podstaty pouze jednovrstvá. Pro použití této formulace máme následující systém rovnic. Opět budeme uvažovat nejjednodušší tvar rovnice kontinuity (1.62)

$$\rho_i = \sum_{j \in F \cup B} m_j W_{ij}. \quad (2.12)$$

Rovnice kontinuity, na rozdíl od formulace DBC, platí pouze pro částici tekutiny. Rovnice kinematiky ve tvaru (1.114)

$$\frac{D\mathbf{x}_i}{Dt} = \mathbf{v}_i. \quad (2.13)$$

Pohybovou rovnicí, pro formulaci okrajových podmínek pomocí BI, je (1.115)

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = -\frac{1}{\gamma_i} \left(\sum_{j \in F} (\Lambda_{ij} + \Pi_{ij}) \nabla_i W_{ij} m_j + \sum_{k \in B} \rho_k (\Lambda_{ik} + \Pi_{ik}) \mathbf{n}_k W_{ik} s_k \right) - \mathbf{f}_i. \quad (2.14)$$

Kde \mathbf{n}_k je vnější normála oblasti a s_k je plocha mezi dvěma hraničními částicemi (v našem dvourozměrném případě je to vzdálenost mezi hraničními částicemi). Pro určení hodnoty proměnných na hranicích využíváme vážené sumace (1.118)

$$f(\mathbf{x}_b) = \frac{\sum_{j \in F} f_j W(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_j)}{\sum_{j \in F} W(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_j)}.$$

Tento vztah využijeme pro napočtení tlaku a hustoty na hraniční částici. V našem případě máme pouze jednu částici tekutiny a vztah se zjednoduší na

$$f(\mathbf{x}_b) = f_j.$$

Tedy, stejně jako v případě formulace DBC, bude tlak a hustota hraniční částice rovna tlaku a hustotě částice tekutiny.

Dalším vztahem je Shephardův renormalizační faktor, který je definován takto

$$\gamma_h = \int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}', \quad (2.15)$$

kde Ω je část nosiče částice, která je v naší oblasti. Je-li nosič podmnožinou naší oblasti, je $\gamma_h = 1$. Je-li podmnožinou oblasti pouze polovina nosiče částice, plyne ze symetrie váhové funkce $\gamma_h = 0.5$. Druhý případ by nastal pokud by částice byla přímo na hranici oblasti. Pro další výpočty v našich jednoduchých případech tuto závislost lineárně interpolujeme

$$\gamma_i = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{|\mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{n}_k|}{\Phi h} + 1 \right), & |\mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{n}_k| \leq \Phi h \\ 1, & |\mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{n}_k| > \Phi h \end{cases} \quad (2.16)$$

Kde Φ je číslo, které udává kolik vyhlazovacích délek daná formulace jádra bere v potaz.

Zbylé členy v rovnici (2.14) jsou identické, ale pro úplnost je zopakujeme. Tedy

$$\Lambda_{ij} = \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2}$$

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-2\alpha c_{ij}\mu_{ij} + 2\beta\mu_{ij}^2}{\rho_i + \rho_j}, & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij} < 0 \\ 0, & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij} > 0 \end{cases} \quad \mu_{ij} = \frac{h\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij}}{|\mathbf{x}_{ij}|^2 + \epsilon h^2}.$$

$$\mathbf{f}_i = (0, g)^T$$

Systém rovnic uzavírá linearizovaná stavová rovnice ve tvaru (1.70)

$$p_i = c_0^2(\rho_i - \rho_{0i}) + p_{0i}.$$

Rovnice kontinuity vyjde obdobně jako v předchozím případě. Pro počáteční hustotu platí z rovnice kontinuity $\rho_{i0} = \rho_0 = mW_{ii}$ a pro jednoduchost uvažujeme $p_{0i} = 0$. Zabývejme se teď pohybovou rovnicí. Rozepíšeme jí pro námi uvažovanou interakci

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = -\frac{1}{\gamma_i} \left((\Lambda_{ii} + \Pi_{ii})\nabla_i W_{ii} m_i + \rho_k (\Lambda_{ik} + \Pi_{ik}) \mathbf{n}_k W_{ik} s_k \right) - \mathbf{f}_i.$$

Z vlastnosti jádra je zřejmé že první člen rovnice je roven nule. Dále dostáváme

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = -\frac{\rho_k}{\gamma_i} \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_k}{\rho_k^2} + \frac{-2\alpha c_{ik}\mu_{ik} + 2\beta\mu_{ik}^2}{\rho_i + \rho_k} \right) \mathbf{n}_k W_{ik} s_k - \mathbf{f}_i. \quad (2.17)$$

Stejně jako v předchozím případě zanedbáme člen μ_{ik}^2 . Po aplikaci těchto vztahů dostáváme výsledný systém rovnic

$$\rho = mW_{ij} + mW_{ii}, \quad (2.18)$$

$$\frac{Dx}{Dt} = v_x, \quad (2.19)$$

$$\frac{Dy}{Dt} = v_y, \quad (2.20)$$

$$\frac{Dv_x}{Dt} = 0, \quad (2.21)$$

$$\frac{Dv_y}{Dt} = -\frac{\rho_k}{\gamma_i} \left(\frac{2c_0^2(\rho - \rho_0)}{\rho^2} + \frac{-\alpha c_0}{\rho} \frac{h\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij}}{|\mathbf{x}_{ij}|^2 + \epsilon h^2} \right) n_{ky} W_{ik} s_k - g. \quad (2.22)$$

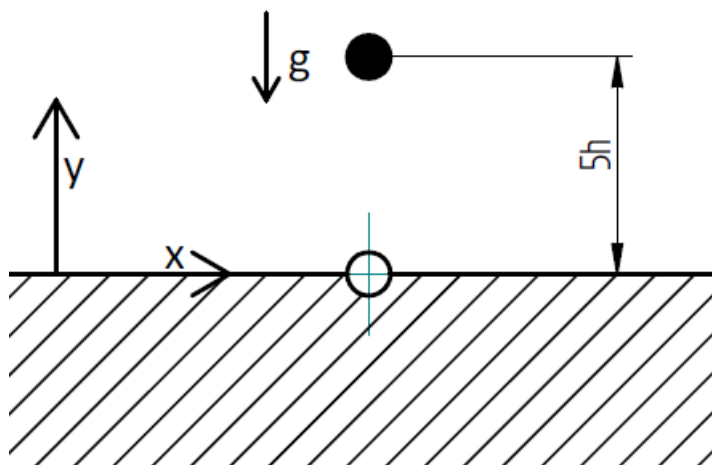
V rovnici (2.17) se vyskytuje jednotkový normálový vektor, který je pro náš případ roven $\mathbf{n}_k = (0, -1)$. Rovnice (2.21) je homogenní, díky x-ové složce normálového vektoru a díky nulovému vnějšímu zrychlení v tomto směru a nulové počáteční rychlosti v ose x.

Mechanismus odrazu funguje obdobně jako pro okrajové podmínky typu DBC. Rovnice (2.19) a (2.21) nejsou pro mechanismus odrazu podstatné, neboť ve směru x podle rovnice (2.21) nedochází k interakci mezi částicí tekutiny a částicí stěny. Nachází-li se částice v nosiči jádra, její hustota, podle rovnice (2.18), poroste. Díky

orientaci normály nabývá první i druhý člen pohybové rovnice ve směru y kladných hodnot (druhý člen se účastní interakce pouze když $\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij} < 0$, jinak je nulový). Částice tekutiny interaguje s částicí stěny, teprve když se vyskytuje v nosiči váhové funkce. Pravá strana rovnice roste, až v určitý moment bude rovna nule, tehdy dojde k odrazu. Následně dál roste a částice se začne vzdalovat od stěny, druhý člen přestává působit. V moment, kdy částice opustí nosič jádra hraniční částice, působí pouze vektor vnějšího zrychlení.

2.2 Numerické řešení volného pádu částice na částici stěny

První příklad, který budeme numericky řešit, je volný pád částice tekutiny na hraniční částici bez tlumení (tedy vazkého členu). Tento příklad budeme srovnávat s fyzikálním modelem volného pádu částice tekutiny (reprezentované hmotným bodem) na stěnu s absolutně pružným odrazem. Na obr. 2.2 je zakreslené schéma našeho problému.



Obr. 2.2. Schéma řešeného příkladu

Na tomto příkladu chceme ověřit správné fungování našeho vlastního programu. Předpokládáme, že ke shodě mezi SPH modelem a fyzikálním modelem dochází pouze do chvíle, kdy se částice tekutiny dostane do oblasti působení hraniční částice. Jelikož neuvažujeme tlumení, budeme chtít zjistit je-li náš SPH model, pro tento jednoduchý případ, energeticky konzervativní. Tedy že okrajové podmínky nevnášejí do systému numerickou vazkost. Nakonec budeme chtít ukázat jaký je rozdíl v numerickém řešení mezi jednotlivými formulacemi okrajových podmínek.

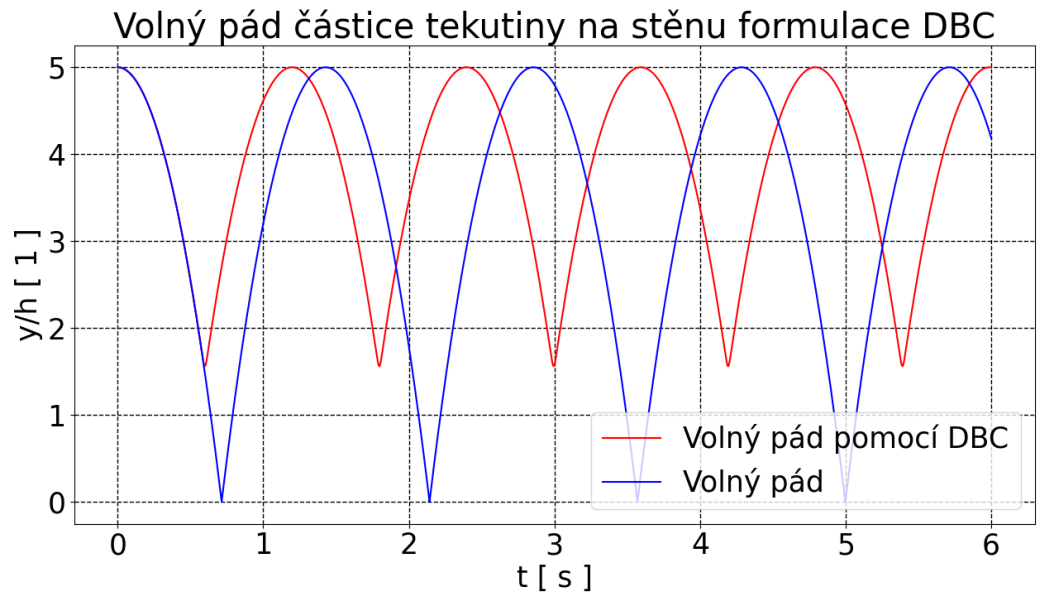
Pro tento příklad použijeme, vzhledem k uvažované dvourozměrnosti úlohy, 2D Wendlandovské jádro popsané rovnicemi (1.51). Toto jádro má nenulovou váhovou funkci v intervalu $(0; 2h)$ a v tomto intervalu očekáváme první změny od našeho fyzikálního modelu volného pádu. Pro numerickou integraci využijeme tzv. semi-implicitní Eulerovu metodu neboť zachovává Hamiltonián systému. Pro obě simulace jsou použité následující hodnoty: vyhlazovací délka $h = 0.5$ m, hmotnost částice $m = 0.1$ kg, počáteční hustota $\rho_0 = m \cdot W(0, h)$, rychlost zvuku $c_0 = 300$ m·s⁻¹ a tíhové zrychlení $g = 9.81$ m·s⁻².

2.2.1 Numerické řešení pomocí DBC formulace

Řešíme následující systém rovnic (2.7), (2.8) (2.9), (2.10) a (2.11) bez vazkého členu

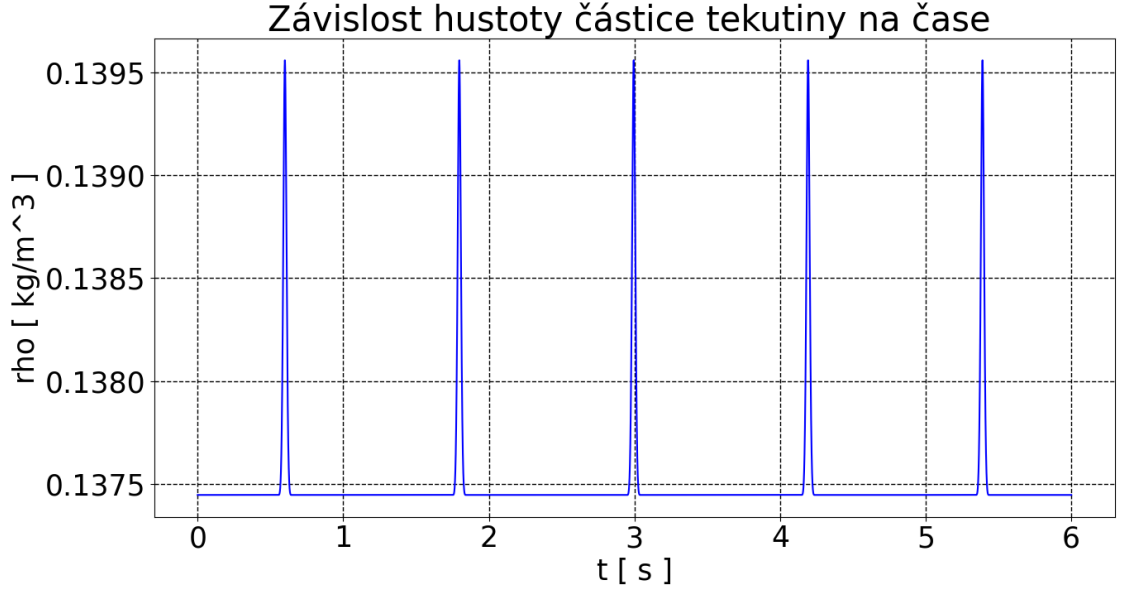
$$\begin{aligned}\rho &= mW_{ij} + mW_{ii}, \\ \frac{Dx}{Dt} &= v_x, \\ \frac{Dy}{Dt} &= v_y, \\ \frac{Dv_x}{Dt} &= 0, \\ \frac{Dv_y}{Dt} &= -\left(\frac{2c_0^2(\rho - \rho_0)}{\rho^2}\right)\nabla_y W_{ij}m - g.\end{aligned}$$

Výsledky numerického výpočtu jsou na obr. 2.3 a 2.4. Na obr. 2.3 je vykreslen průběh normované polohy pro náš numerický výpočet v čase a průběh normované polohy vypočtené pomocí fyzikálního modelu volného pádu na stěnu s absolutně pružným odrazem v čase. Na obr. 2.4 je znázorněna závislost hustoty částice tekutiny na čase.



Obr. 2.3. Průběh y-ové souřadnice pro fyzikální model (modře) a SPH simulace volného pádu částice tekutiny na stěnu (červeně)

Z výsledků je patrné, že tento typ okrajových podmínek vnáší do systému pouze zanedbatelnou vazkost, neboť v čase dosahuje částice tekutiny svojí původní výšky. Řešení obou problémů je totožné do doby, než se ve variantě SPH částice tekutiny dostane do působení hraniční částice. K tomuto dochází v námi předpokládaném rozmezí. Důsledkem působení částice stěny na částici tekutiny v SPH, aniž by došlo k jejich kontaktu, dochází k rozfázování mezi tímto řešením a řešením fyzikálního modelu. Také, jak jsme dříve uvedli, při přibližování částic dochází k nárůstu hustoty na částicích což je následně zodpovědné za odraz.



Obr. 2.4. Průběh hustoty pro SPH-DBC simulaci volného pádu tekutiny na stěnu

2.2.2 Numerické řešení pomocí BI formulace

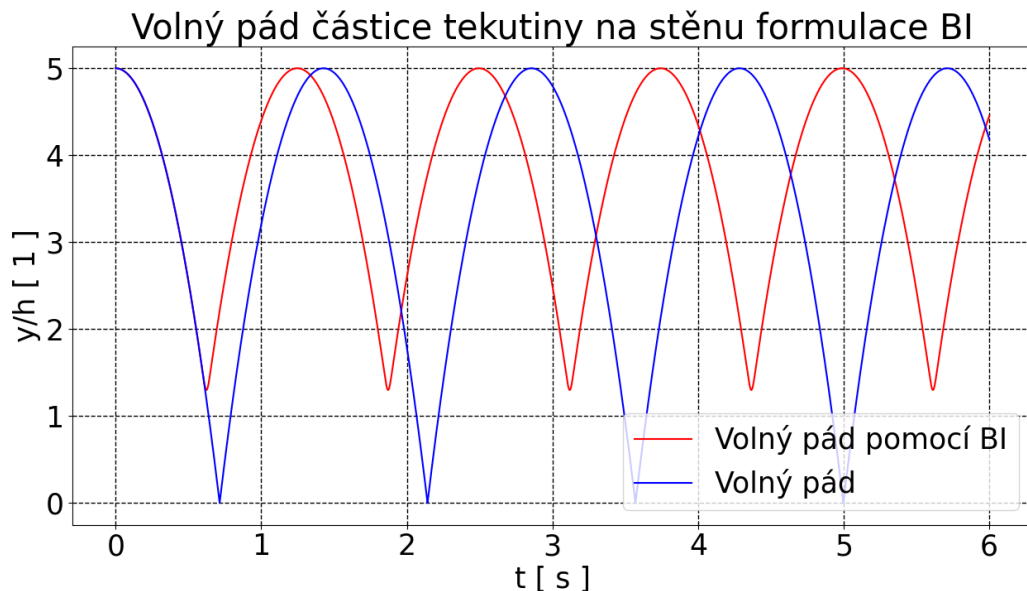
Stejný případ budeme řešit pomocí BI formulace. Máme následující systém rovnic (2.18), (2.19), (2.20), (2.21), (2.16) a (2.22) bez vazkého členu

$$\begin{aligned} \rho &= mW_{ij} + mW_{ii}, \\ \frac{Dx}{Dt} &= v_x, \\ \frac{Dy}{Dt} &= v_y, \\ \gamma_i &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{|\mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{n}_k|}{\Phi h} + 1 \right), & |\mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{n}_k| \leq \Phi h, \\ 1, & |\mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{n}_k| > \Phi h, \end{cases} \\ \frac{Dv_x}{Dt} &= 0, \\ \frac{Dv_y}{Dt} &= -\frac{\rho_k}{\gamma_i} \left(\frac{2c_0^2(\rho - \rho_0)}{\rho^2} \right) n_{ky} W_{ik} s_k - g. \end{aligned}$$

Výsledky numerického výpočtu jsou na obr. 2.5 a 2.6. Na obr. 2.5 je vykreslena závislost normované polohy pro náš numerický výpočet na čase a průběh normované polohy vypočtené pomocí fyzikálního modelu volného pádu na stěnu s absolutně pružným odrazem na čase. Na obr. 2.6 je znázorněna závislost hustoty částice tekutiny na čase.

Ukazuje se, že i pro tuto formulaci okrajových podmínek je do systému vnášena jenom zanedbatelná numerická vazkost, neboť v čase dosahuje částice tekutiny své původní výšky. Obě řešení jsou opět identická do doby, než ve variantě SPH začne

na částici tekutiny působit částice stěny. K tomuto rozdílu dochází v námi předpokládaném rozmezí. Ze stejných důvodů dochází k obdobnému rozfázování mezi řešeními jako u DBC. Stejně jako pro formulaci DBC dochází k nárůstu hustoty na částicích, když se k sobě přibližují, a způsobuje odraz.



Obr. 2.5. Průběh y-ové souřadnice pro fyzikální model (modře) a SPH simulace volného pádu částice tekutiny na stěnu (červeně)

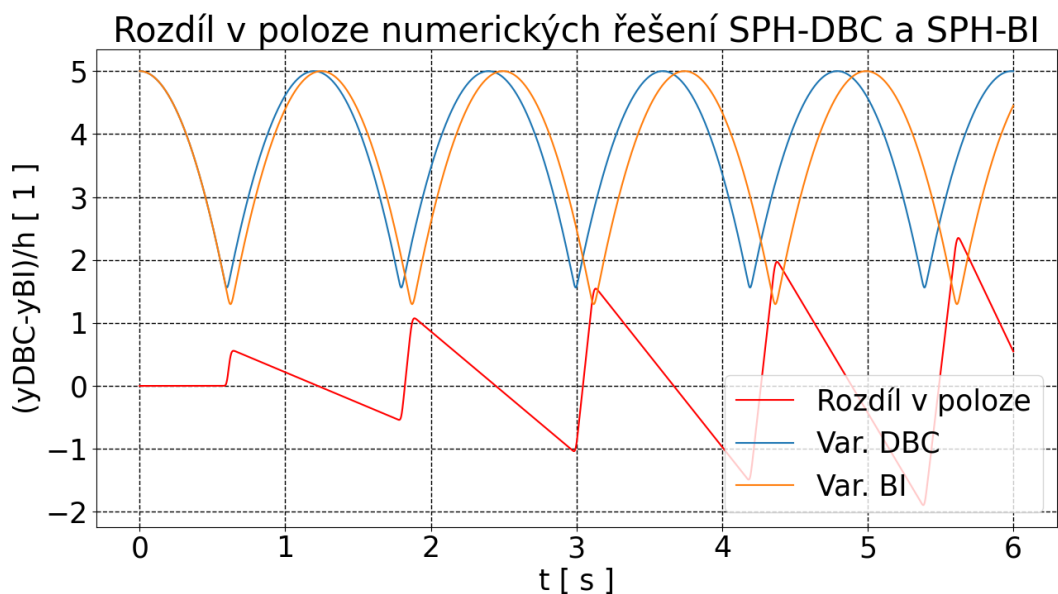


Obr. 2.6. Průběh hustoty pro SPH-BI simulaci volného pádu tekutiny na stěnu

2.2.3 Srovnání

Průběh rozdílu normované polohy obou variant v čase je na obr. 2.7. Na obr. 2.7 si můžeme všimnout rozdílů mezi oběma formulacemi okrajových podmínek.

Pro formulaci DBC dochází k odrazu ve větší výšce než u varianty BI. Částice tekutiny se v obou případech odrazí v intervalu $(1h; 2h)$. V tomto intervalu platí že absolutní hodnota derivace naší váhové funkce je větší než sama absolutní hodnota váhové funkce. Proto dochází u DBC formulace k odrazu částice tekutiny ve větší vzdálenosti od stěny než u formulace BI. U varianty BI dochází k většímu nárůstu hustoty než u varianty DBC. Je to způsobené výše zmiňovaným odrazem částice tekutiny v menší vzdálenosti od stěny než u varianty DBC. Na tomto obrázku si můžeme dále všimnout, že lokální maxima resp. minima funkce rozdílu mezi y-ovou souřadnicí jednotlivých řešení rostou resp. klesají. To je dáno rozfázováním mezi jednotlivými řešeními. Lokální maximum/minimum rozdílu polohy bude růst/klesat dokud rozfázování nepřesáhne půl periody, pak lokální maximum/minimum začne klesat/růst dokud rozfázování nevytizí. Náš program tedy poskytuje předpokládané výsledky.



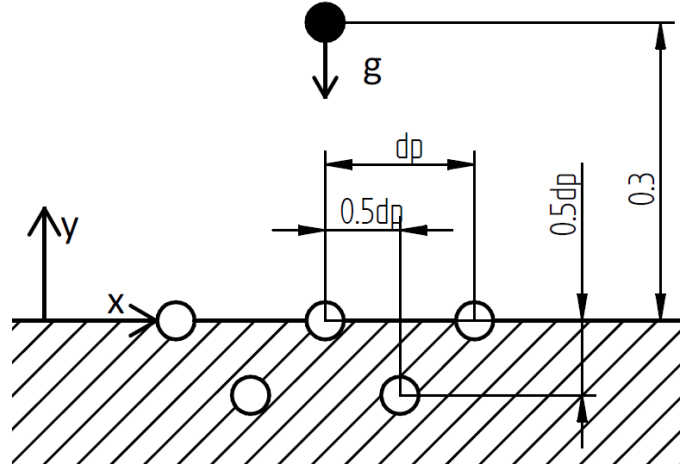
Obr. 2.7. Průběh rozdílu v y-souřadnici $y_{DBC} - y_{BI}$ (červeně), průběh normované polohy SPH-DBC (modře) a průběh normované polohy SPH-BI (oranžově)

2.3 Příklad volného pádu s rozdílnou okrajovou podmínkou

V této části se pokusíme reprodukovat výsledek z článku (Crespo et al., 2007), kde je řešen příklad, který je znázorněn na obr. 2.8. Jde o volný pád částice tekutiny na stěnu složenou ze dvou nekonečných vrstev částic stěny v konfiguraci, která je znázorněna no obr. 2.8. Jde opět o případ bez viskozity. Ve zmíněném článku je uvažovaná pouze okrajová podmínka typu DBC. My jsme pro tento případ použili jak okrajové podmínky typu DBC, pro srovnání s článkem, tak i variantu BI. Abychom byli konzistentní s výše uvedeným článkem budeme používat jádro typu Cubic Spline popsané rovnicemi (1.50). Pro numerickou integraci musíme ze stejného důvodu použít Verletovo schéma. Pro obě simulace jsou použité následující hodnoty: vyhlazovací délka $h = 0.02097$ m, vzdálenost mezi hraničními částicemi

$dp = \frac{h}{1.3}$, počáteční hustota $\rho_0 = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, hmotnost částice $m = \frac{\rho_0}{W(0, h)}$, rychlost zvuku $c_0 = 34 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a tíhové zrychlení $g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Numericky řešíme následující systém rovnic pro okrajovou podmínku typu DBC (1.62), (1.64), (1.66) bez viskózního členu a (1.70) s nulovými počátečními tlaky



Obr. 2.8. Schéma příkladu pro DBC

$$\rho_i = \sum_{j \in F \cup B} m_j W_{ij}, i \in F, \quad (2.23)$$

$$\rho_i = \sum_{j \in F} m_j W_{ij} + m_i W_{ii}, i \in B,$$

$$\frac{Dx}{Dt} = v_x, \quad (2.24)$$

$$\frac{Dy}{Dt} = v_y, \quad (2.25)$$

$$\frac{Dv_x}{Dt} = 0, \quad (2.26)$$

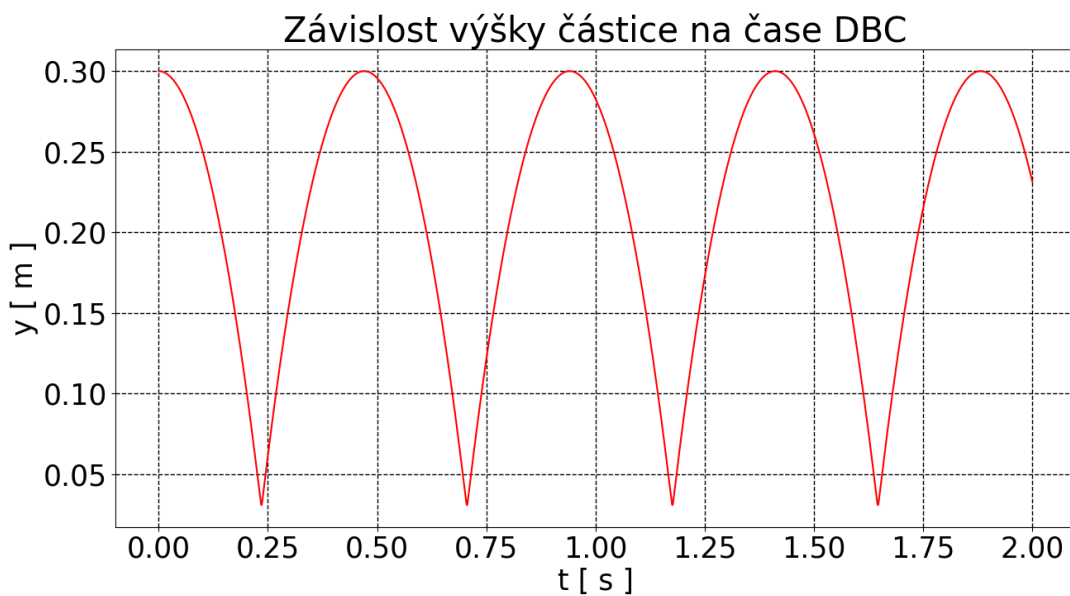
$$\frac{Dv_y}{Dt} = - \sum_{j \in F \cup B} \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \nabla_y W_{ij} m_j - g, \quad (2.27)$$

$$p_i = c_{0i}^2 (\rho_i - \rho_{0i}). \quad (2.28)$$

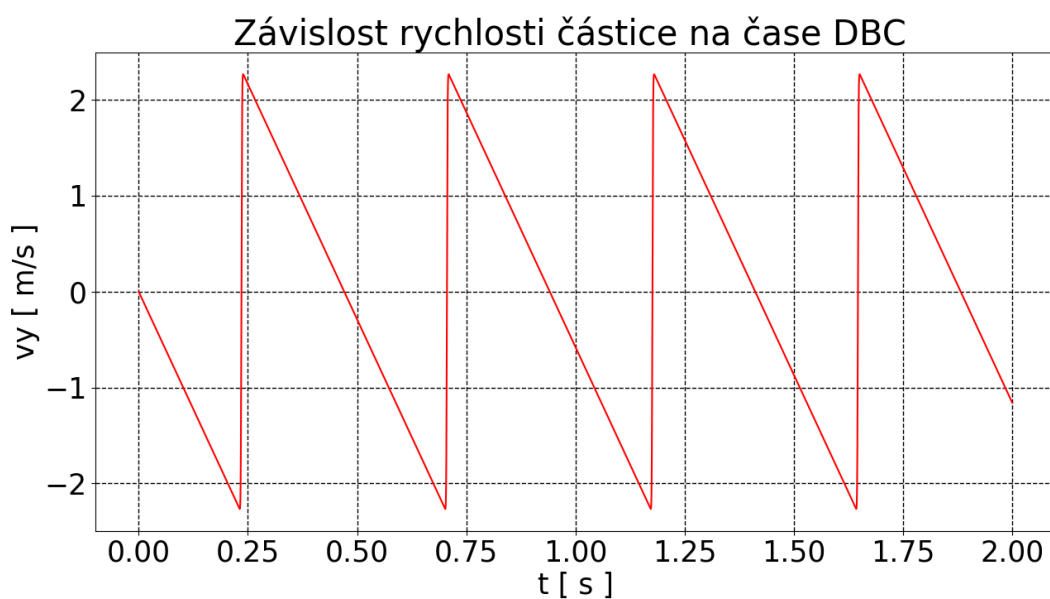
Výsledky numerické simulace můžeme vidět na obr. 2.9, 2.10, 2.11. Na obr. 2.9 je vynesena závislost polohy částice tekutiny na čase. Na obr. 2.10 je zakreslena y-ová rychlost částice tekutiny v čase. Na obr. 2.11 je vykreslena závislost y-ové rychlosti na poloze. Na obr. 2.12 je pak vidět výsledek obdobné simulace z článku (Crespo et al., 2007).

Ve výchozích rovnicích se nevyskytuje viskózní člen a energie v systému zůstává zachována. Naše výsledky se shodují s výsledky uvedenými v článku (Crespo et al., 2007), které jsou na obr. 2.12. Drobné nepřesnosti mohou být zapříčiněny tím, že ve zmíněném článku není uvedena hodnota numerické rychlosti zvuku c_0 . V článku je též chybně uvedená váhová funkce Cubic Spline, neboť je zde uvedena pouze

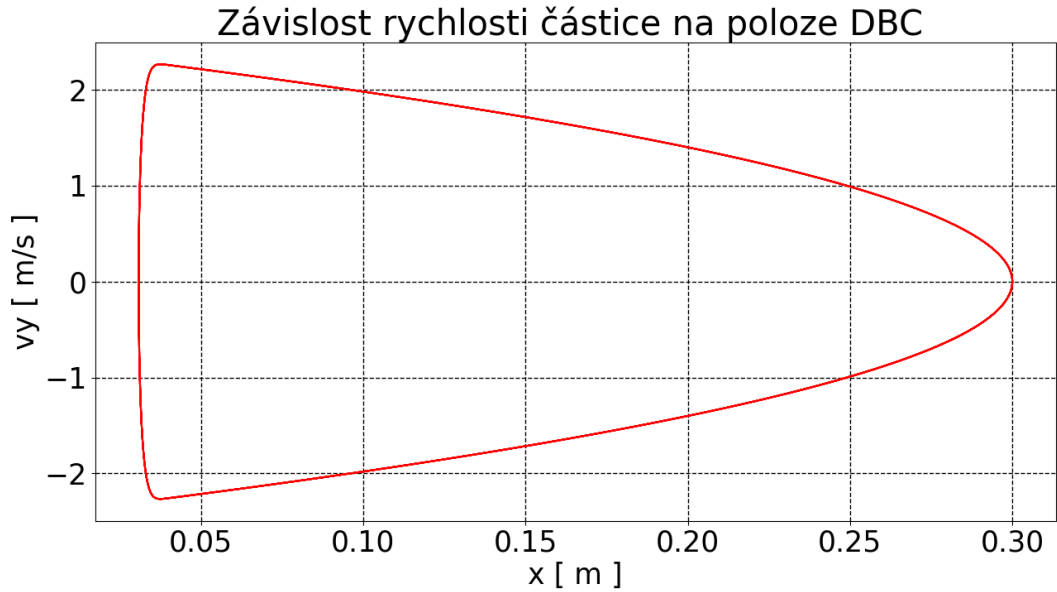
konstanta používaná pro 3D případy. Není zcela jasné, zdali autoři tuto konstantu použili pro tento 2D případ.



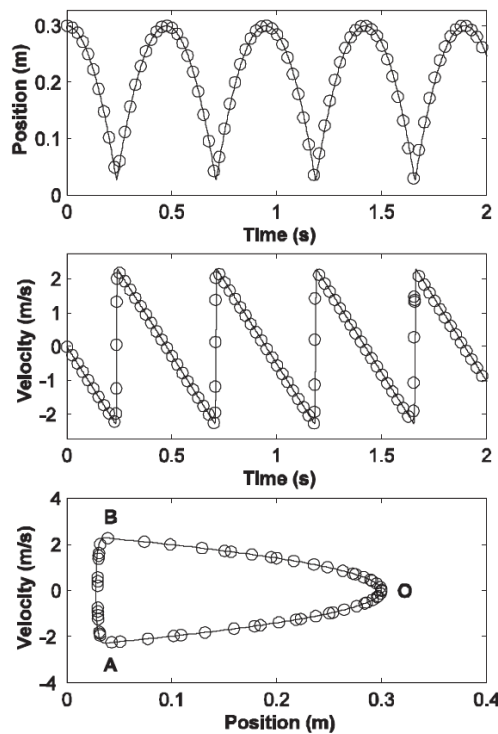
Obr. 2.9. Průběh y-ové souřadnice v závislosti na čase pro DBC



Obr. 2.10. Průběh y-ové rychlosti částice v závislosti na čase pro DBC

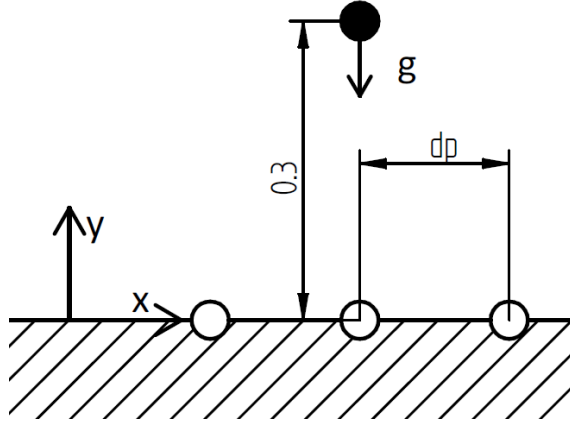


Obr. 2.11. Průběh rychlosti v závislosti na y-ové souřadnici pro DBC



Obr. 2.12. Výsledky z článku (Crespo et al., 2007). Nahoře - závislost výšky částice tekutiny na čase. Uprostřed - závislost y-ové rychlosti částice tekutiny v čase. Dole - průběh y-ové rychlosti částice tekutiny na její výšce.

Ekvivalent příkladu z článku (Crespo et al., 2007) v BI formulaci je na obr. 2.13. Z principu okrajové podmínky typu BI budeme mít pouze jednu vrstvu částic, které reprezentují stěnu. Hodnota vzdálenosti mezi částicemi stěny je $s_k = dp$. Zbytek hodnot bude identický s formulací DBC.



Obr. 2.13. Schéma ekvivalentního příkladu pro BI

Budeme řešit následující systém rovnic (1.62), (1.114), (1.118), (2.16), (1.115) bez viskózního členu a linearizovanou (1.113)

$$\rho_i = \sum_{j \in F \cup B} m_j W_{ij}, i \in F, \quad (2.29)$$

$$\frac{Dx}{Dt} = v_x, \quad (2.30)$$

$$\frac{Dy}{Dt} = v_y, \quad (2.31)$$

$$\gamma_i = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{|\mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{n}_k|}{\Phi h} + 1 \right), & |\mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{n}_k| \leq \Phi h, \\ 1, & |\mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{n}_k| > \Phi h, \end{cases} \quad (2.32)$$

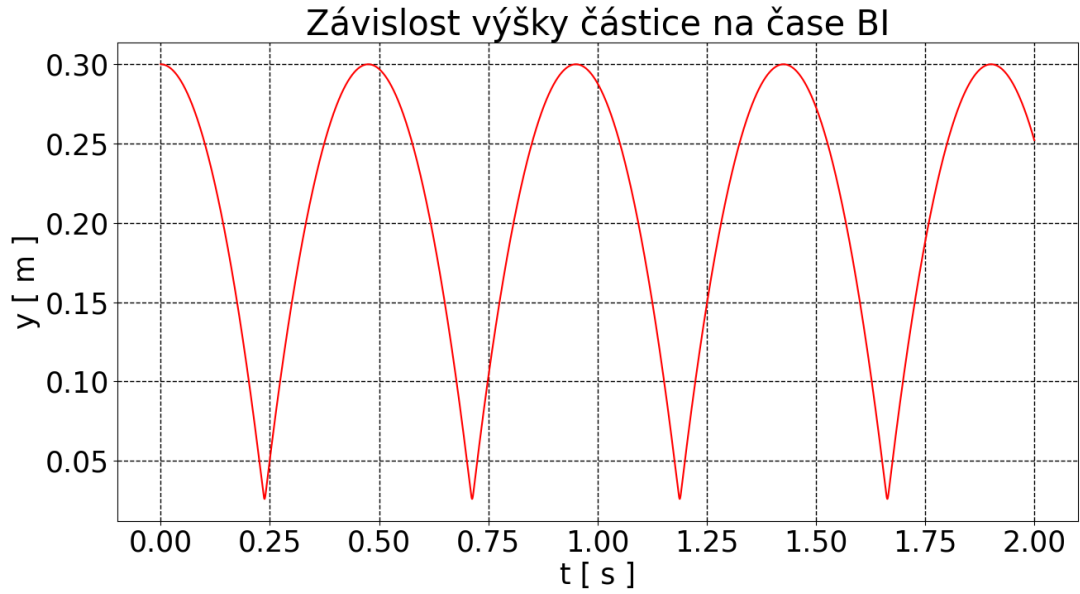
$$f(\mathbf{x}_b) = \frac{\sum_{j \in F} f_j W(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_j)}{\sum_{j \in F} W(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_j)}, \quad (2.33)$$

$$\frac{Dv_x}{Dt} = 0, \quad (2.34)$$

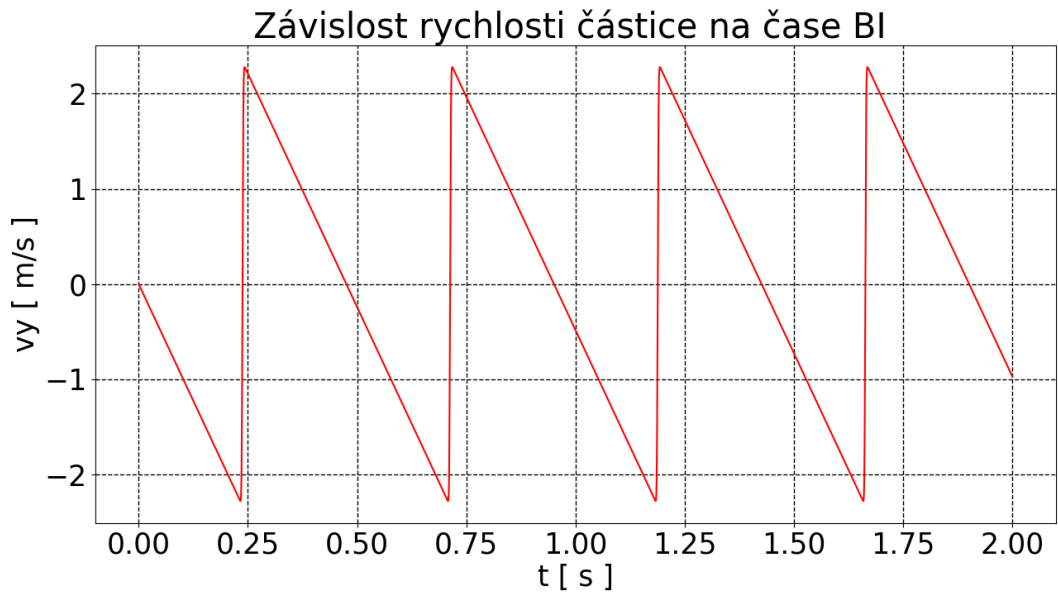
$$\frac{Dv_y}{Dt} = -\frac{1}{\gamma_i} \sum_{k \in B} \rho_k \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_k}{\rho_k^2} \right) n_{yk} W_{ik} s_k - g, \quad (2.35)$$

$$p_i = c_{0i}^2 (\rho_i - \rho_{0i}). \quad (2.36)$$

Výsledky jsou na obr. 2.14, 2.15 a 2.16. Na obr. 2.14 je průběh vzdálenosti částice tekutiny od stěny v závislosti na čase. Na obr. 2.15 je vykreslen časová závislost y-ové rychlosti částice tekutiny. Na obr. 2.16 je závislost y-ové rychlosti částice na její výšce.

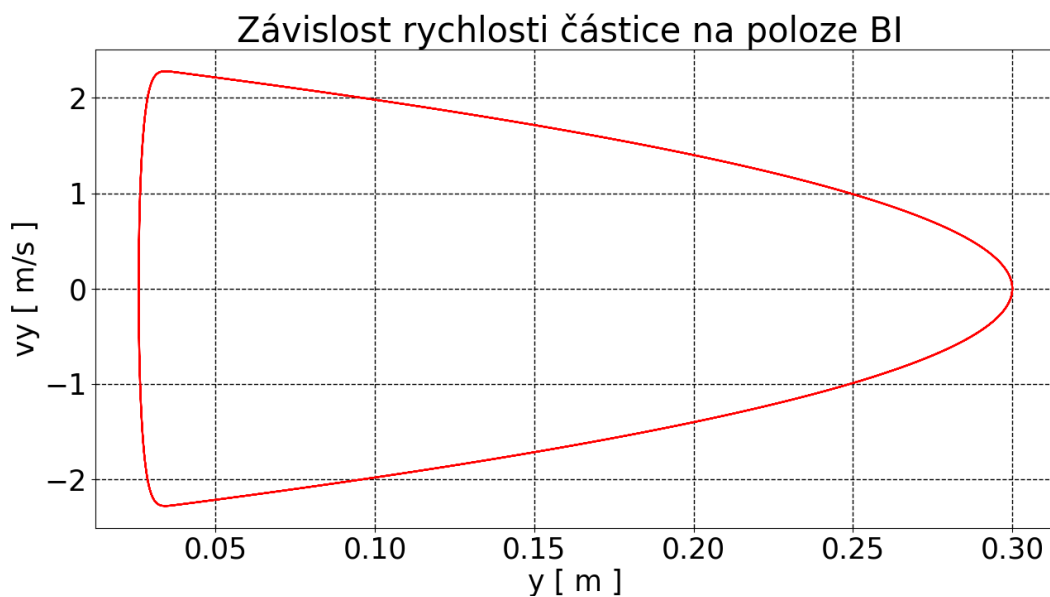


Obr. 2.14. Průběh y-ové souřadnice pro BI



Obr. 2.15. Průběh y-ové rychlosti částice pro BI

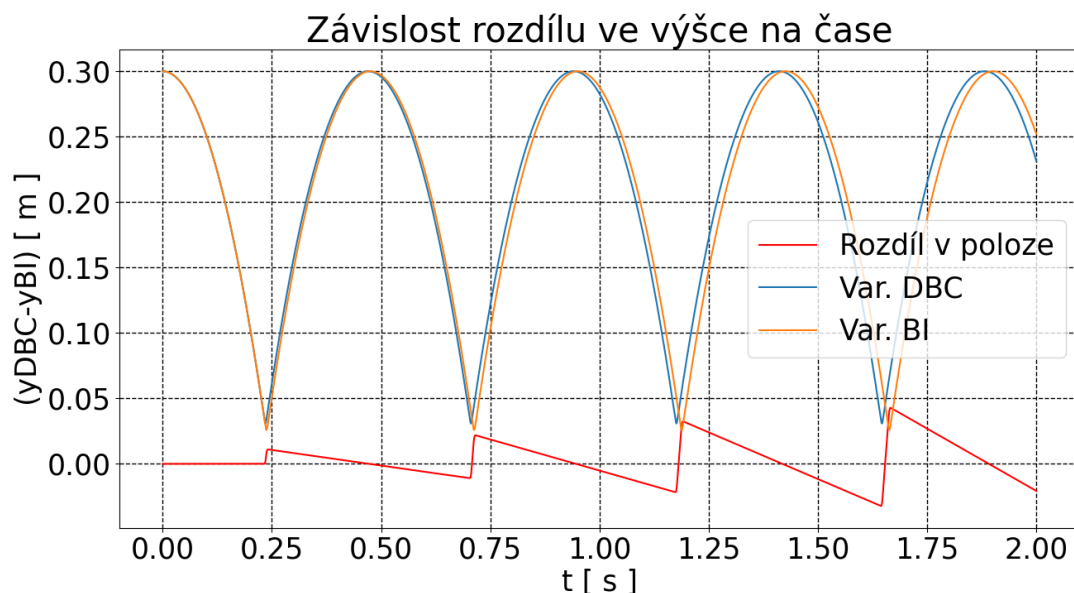
Z výsledků pro numerický výpočet SPH-BI je opět patrné, že nedochází k dodávání energie do systému ani jejímu odebrání ze systému. Tyto výsledky nemáme s čím porovnat v uvedeném článku.



Obr. 2.16. Průběh rychlosti na souřadnici pro BI

2.3.1 Srovnání

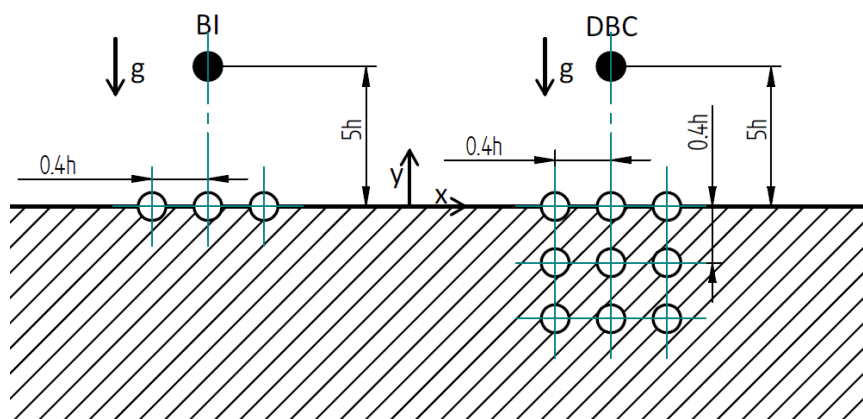
Na obr. 2.17 je patrný rozdíl mezi oběmi variantami. Varianta BI se opět odráží v menší vzdálenosti od stěny než u varianty DBC. Důvod proč je tomu tak je obdobný jako u předchozího příkladu. Hodnoty lokálních maxim resp. lokálních minim funkce rozdílu v poloze rostou resp. klesají. Bude tomu tak dokud rozfázování nepřesáhne půl periody, pak se situace obrátí.



Obr. 2.17. Průběh rozdílu v y-ové souřadnici $y_{DBC} - y_{BI}$ (červeně), průběh normované polohy SPH-DBC (modře) a průběh normované polohy SPH-BI (oranžově)

2.4 Volný pád částice tekutiny na standartní okrajové podmínky s viskozitou

Ve výše uvedených příkladech nebyly použité standartní konfigurace okrajových podmínek (standartní okrajovou podmínkou rozumíme konfigurace uvedené na obr. 2.18, oba vzory hraničních částic se periodicky opakují ve směru osy x), které jsou využívány při modelování komplexních úloh. V této části se tedy zaměříme na případ volného pádu částice stěny na stěnu, vytvořenou pomocí standartní konfigurace okrajové podmínky typu DBC a BI. Také budeme uvažovat, oproti předchozím příkladům, vliv vazkosti. Ten bude reprezentován členem umělé viskozity. Bude nás zajímat interakce částice s různými okrajovými podmínkami. Předpokládáme, že vlivem viskozity se částice tekutiny bude odrážet do stále menší výšky až se nakonec ustálí v rovnovážné poloze. Bude nás zajímat čas, po kterém dojde k ustálení v rovnovážné poloze a rozdíl v průběhu výšky a rychlosti v čase. Tyto rozdíly jsou dané rozdílnými formulacemi okrajových podmínek.



Obr. 2.18. Schéma standartní okrajové podmínky pro formulaci BI a DBC

V obou případech uvažujeme umělou viskozitu s koeficienty $\alpha = 1$ a $\beta = 0$. Pro další konstanty jsou použité následující hodnoty: vyhlazovací délka $h = 0.5$ m, vzdálenost mezi hraničními částicemi $dp = \frac{h}{2.5}$, hmotnost částice $m = 0.1$ kg, počáteční hustota $\rho_0 = mW(0, h)$, rychlost zvuku $c_0 = 30$ m·s⁻¹, tíhové zrychlení $g = 9.81$ m·s⁻², člen zabraňující nulovému jmenovateli $\epsilon = 0.0001$. V simulacích je použité Wendlandovo jádro, které se v aplikacích metody používá nejčastěji. K numerické integraci využijeme semi-implicitní Eulerovu metodu.

2.4.1 Numerické řešení pomocí DBC formulace

Pro formulaci DBC máme následující systém rovnic (1.62), (1.64), (1.66) s umělým vazkým členem (1.68) a (1.70) s nulovými počátečními tlaky

$$\rho_i = \sum_{j \in F \cup B} m_j W_{ij}, i \in F, \quad (2.37)$$

$$\rho_i = \sum_{j \in F} m_j W_{ij} + m_i W_{ii}, i \in B,$$

$$\frac{Dx}{Dt} = v_x, \quad (2.38)$$

$$\frac{Dy}{Dt} = v_y, \quad (2.39)$$

$$\frac{Dv_x}{Dt} = 0, \quad (2.40)$$

$$p_i = c_{0i}^2(\rho_i - \rho_{0i}), \quad (2.41)$$

$$\frac{Dv_y}{Dt} = - \sum_{j \in FUB} \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \nabla_y W_{ij} m_j - g. \quad (2.42)$$

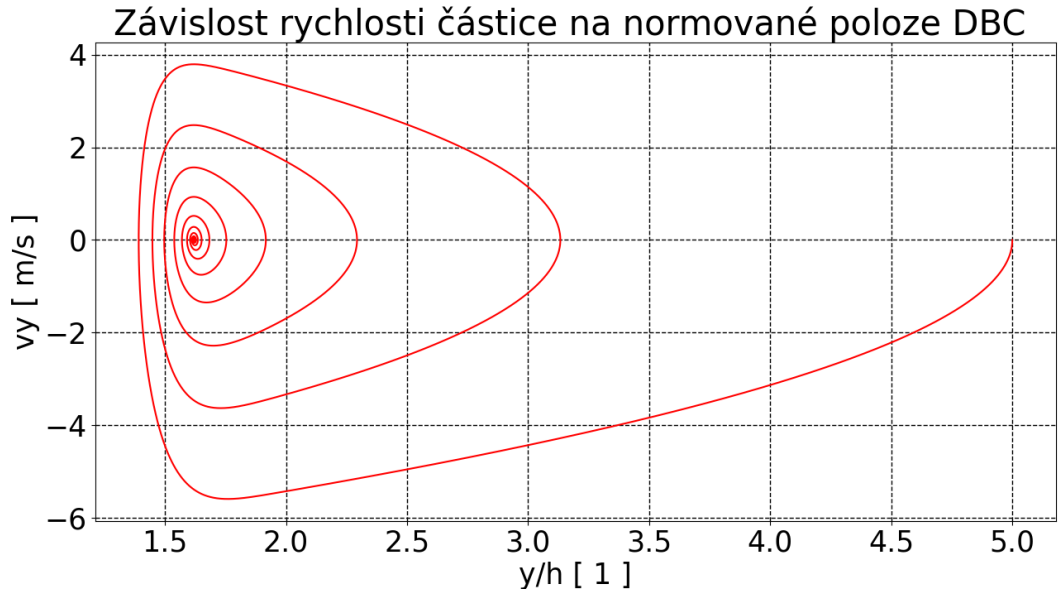
Pozn. rovnice (2.40) je homogenní z důvodu, že derivace váhové funkce je lichá, tedy se příspěvky od částic stěny nalevo a napravo odečtou. Od částice stěny, která má stejnou x-ovou souřadnici jako částice tekutiny je příspěvek nulový.

Výsledky numerického řešení tohoto problému jsou na obr. 2.19, 2.20 a 2.21. Na obr. 2.19 je časová závislost normované vzdálenosti částice tekutiny od stěny. Na obr. 2.20 je vykreslen průběh y-ové rychlosti v závislosti na její normované výšce. Na obr. 2.21 je potom časová závislost této rychlosti.

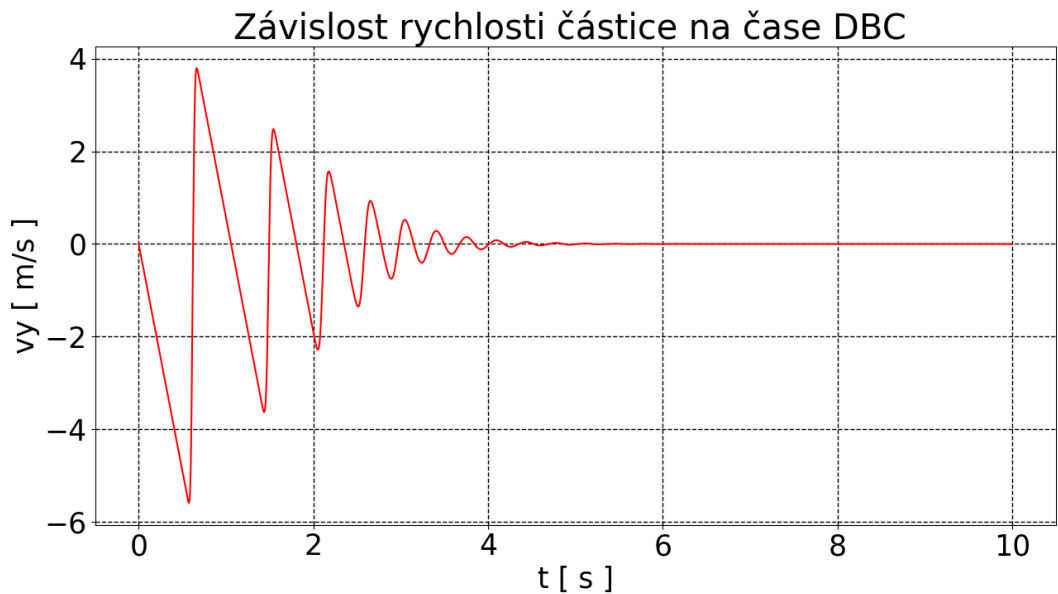


Obr. 2.19. Průběh y-ové souřadnice v závislosti na čase pro formulaci DBC

Z výsledků je patrné, že dochází k tlumení, částice se během přibližně pěti sekund ustaluje v rovnovážné poloze, dochází tedy k odebrání energie ze systému.



Obr. 2.20. Průběh rychlosti v závislosti na y -ové poloze pro formulaci DBC



Obr. 2.21. Průběh rychlosti v čase pro formulaci DBC

2.4.2 Numerické řešení pomocí formulace BI

Pro tuto formulaci máme následující systém rovnic. Budeme řešit následující systém rovnic (1.62), (1.114), (1.118), (2.16), (1.115) s umělou vazkostí a linearizovaná (1.113)

$$\rho_i = \sum_{j \in F \cup B} m_j W_{ij}, i \in F, \quad (2.43)$$

$$\frac{Dx}{Dt} = v_x, \quad (2.44)$$

$$\frac{Dy}{Dt} = v_y, \quad (2.45)$$

$$\gamma_i = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{|\mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{n}_k|}{\Phi h} + 1 \right), & |\mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{n}_k| \leq \Phi h, \\ 1, & |\mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{n}_k| > \Phi h, \end{cases} \quad (2.46)$$

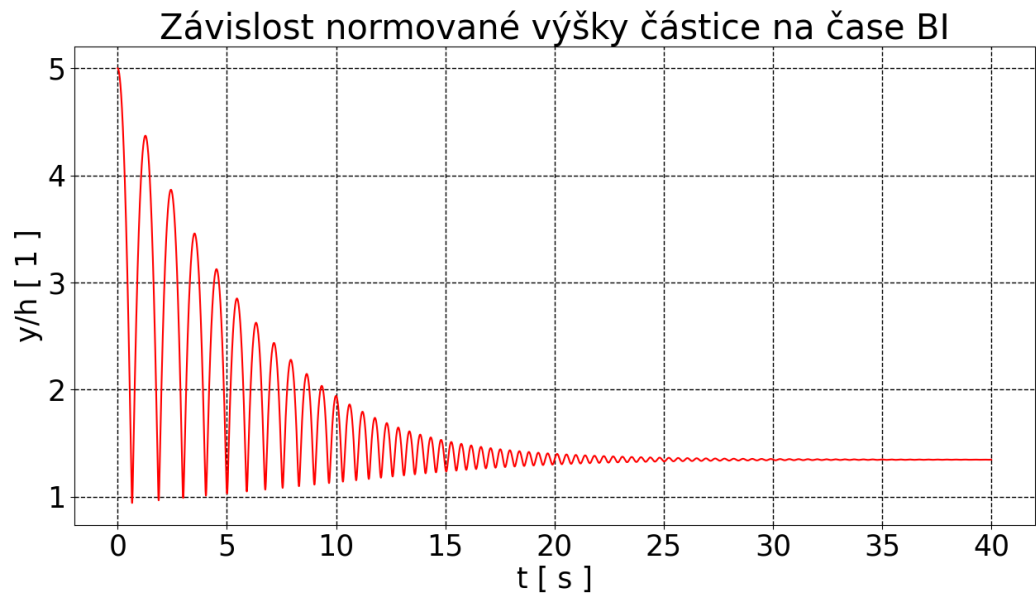
$$f(\mathbf{x}_b) = \frac{\sum_{j \in F} f_j W(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_j)}{\sum_{j \in F} W(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_j)}, \quad (2.47)$$

$$\frac{Dv_x}{Dt} = 0, \quad (2.48)$$

$$\frac{Dv_y}{Dt} = -\frac{1}{\gamma_i} \sum_{k \in B} \rho_k \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_k}{\rho_k^2} + \Pi_{ik} \right) n_{yk} W_{ik} s_k - g, \quad (2.49)$$

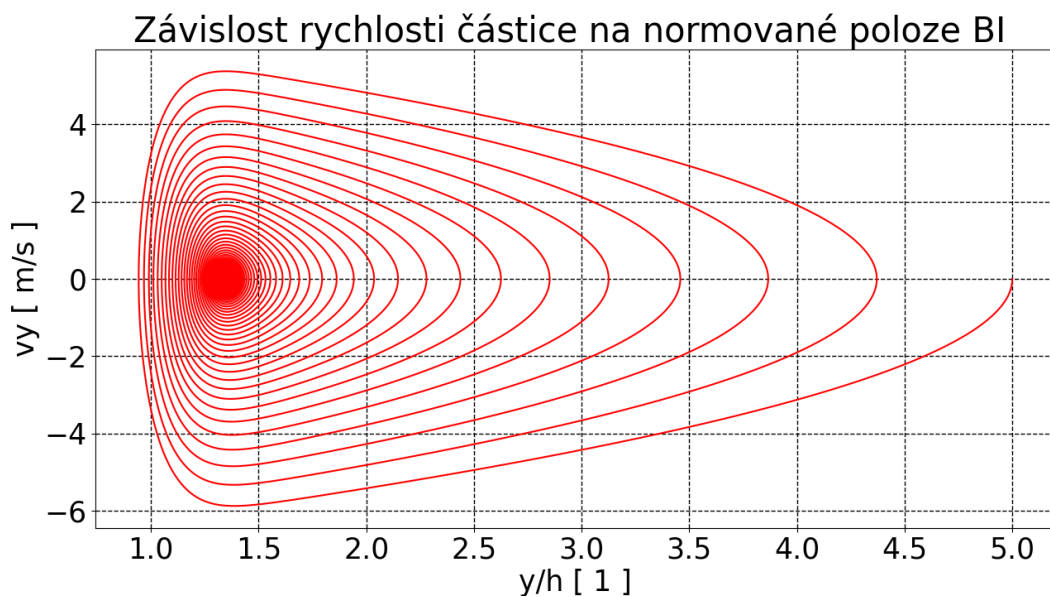
$$p_i = c_{0i}^2 (\rho_i - \rho_{0i}). \quad (2.50)$$

Kde $s_k = dp$ je vzdálenost mezi částicemi stěny. Pohybová rovnice v x-ové souřadnici (rce. (2.48)) je homogení díky nulové složce normálového vektoru $\mathbf{n} = (0, -1)$. Numerické řešení tohoto problému je na obr. 2.22, 2.23 a 2.24. Na obr. 2.22 je časová závislost normované vzdálenosti částice tekutiny od stěny. Na obr. 2.23 je vykreslen průběh y-ové rychlosti v závislosti na její normované výšce. Na obr. 2.24 je potom časová závislost této rychlosti.

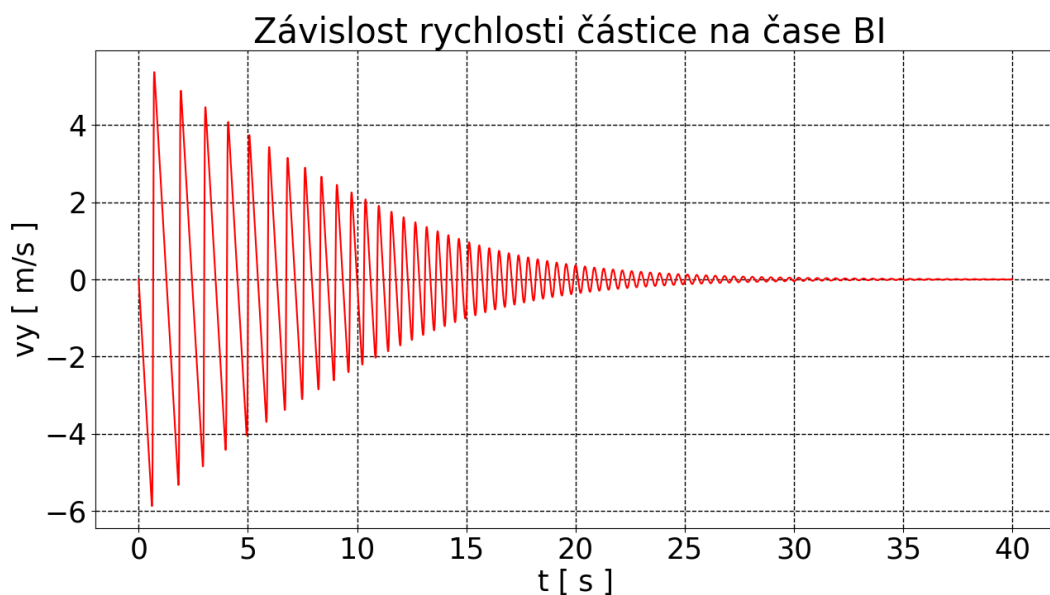


Obr. 2.22. Průběh y-ové souřadnice v závislosti na čase pro BI formulaci

Z výsledků je patrné že dochází k tlumení, částice se během přibližně 35 sekund ustaluje v rovnovážné poloze, dochází tedy k odebírání energie ze systému.



Obr. 2.23. Průběh rychlosti v závislosti na y-ové poloze pro BI formulaci



Obr. 2.24. Průběh rychlosti v čase pro BI formulaci

2.4.3 Srovnání

Jak je patrné z výsledků a obr. 2.25, na kterém můžeme vidět průběh funkce rozdílu v normované poloze obou variant v čase, mezi oběmi variantami jsou rozdíly. Varianta okrajové podmínky DBC se díky velkému tlumení ustálí v rovnovážné poloze během prvních pěti sekund, kdežto varianta okrajové podmínky BI dosáhne ustáleného stavu přibližně po 35 sekundách. Varianta DBC je tedy více disipativní. Je to dané jak faktem, že pro případ okrajové podmínky typu DBC se do interakce zapojí více částic tak i samotnou formulací okrajových podmínek. Pro variantu DBC je člen v sumě přenásobený hmotností t a odpovídající složkou gradientu váhové

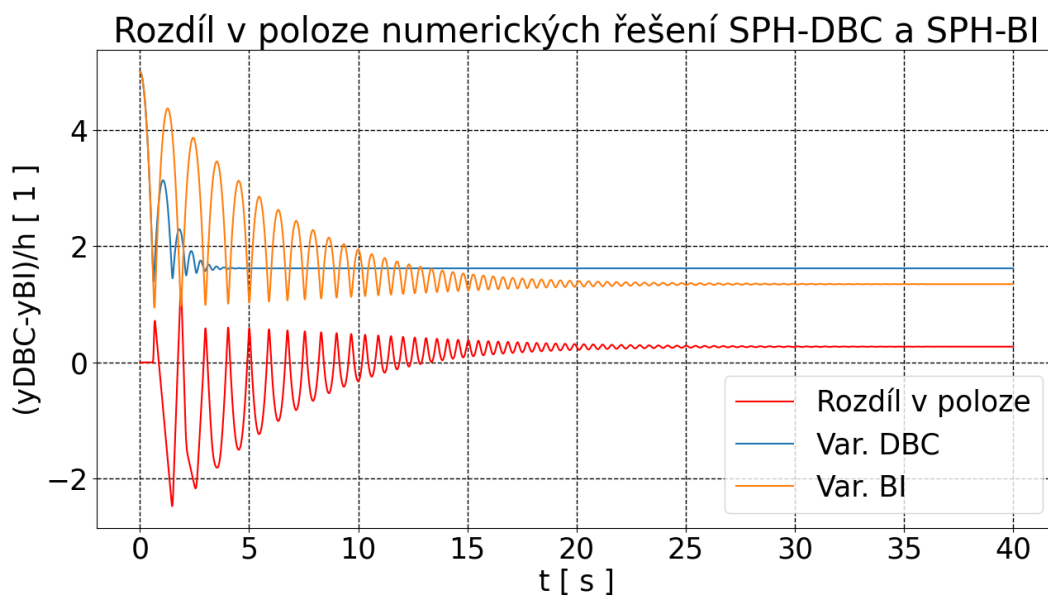
funkce. Naopak u varianty BI je člen v sumě přenásoben hustotou hraniční částice, vzdáleností mezi částicemi stěny a váhovou funkcí. Celá tato suma je navíc přenásobená Shephardovým renormalizačním faktorem. Rozeberme hodnotu viskózního členu pro obě varianty. Nejprve pro DBC, zde uvažujeme hodnotu $\rho = 0.16 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, tato hodnota je větší než jakákoliv hustota v tomto případě. Mějme tedy

$$m \frac{-2\alpha c_0 \mu_{ij}}{2\rho} \nabla_y W_{ij} \approx 0.1 \frac{-2\alpha c_0 \mu_{ij}}{0.32} \nabla_y W_{ij} \approx 0.3125 (-2\alpha c_0 \mu_{ij}) \nabla_y W_{ij}.$$

Pro variantu BI se hodnota hustoty vykrátí, tedy nemusíme odhadovat její hodnotu. Naopak musíme odhadnout velikost Shephardova renormalizačního faktoru, ten volíme tak aby co nejvíce zvětšoval viskózní člen. Jelikož je nejmenší vzdálenost částice tekutiny od stěny přibližně jedna vyhlazovací délka, volíme $\gamma = 0.75$. Tedy máme

$$\frac{1}{\gamma_i} \rho \frac{-2\alpha c_0 \mu_{ik}}{2\rho} s_k W_{ik} \approx \frac{1}{0.75} (-2\alpha c_0 \mu_{ik}) \frac{0.5}{2.5} W_{ik} \approx 0.266 (-2\alpha c_0 \mu_{ik}) W_{ik}.$$

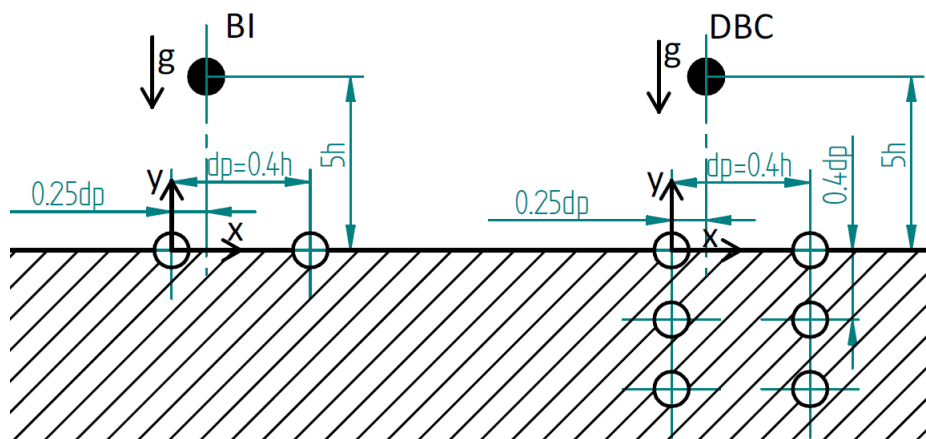
Tedy je patrné, že viskózní člen silněji působí u varianty SPH-DBC. Přidejme ještě, že na intervalu, kde se částice tekutiny pohybuje v oblasti působení hraničních částic (tedy $(1h, 2h)$ pro obě varianty okrajových podmínek), platí $|W_{ij}| < \nabla|W_{ij}|$. Díky tomu se varianta DBC rychleji ustálí v rovnovážné poloze, neboť zde je odebráno více energie od částice tekutiny. Rozdíl mezi variantami je i ve výšce rovnovážné polohy. Obě jsou nad hodnotou $y/h = 1$, ale my zde využíváme Wendlandovské jádro a tedy je to možné, neboť má vyhlazovací délku $2h$. Varianta s okrajovou podmínkou DBC má rovnovážnou polohu ve větší výšce nad stěnou než varianta BI. Je to dáno tím, že u varianty DBC interaguje více částic stěny, jejichž působení vytvoří na částici tekutiny rovnováhu s tíhovou silou, a větší hodnotou (v absolutní hodnotě) gradientu váhové funkce než hodnotou váhové funkce v daném rozmezí. U varianty BI je méně částic stěny, které mohou takovouto rovnováhu vytvořit, a tedy k rovnováze dojde až když je jejich příspěvek od částic a váhové funkce dostatečný, to znamená v menší výšce nad hranici.



Obr. 2.25. Průběh rozdílu v poloze obou variant v čase (červeně), průběh normované polohy SPH-DBC (modře) a průběh normované polohy SPH-BI (oranžově)

2.5 Nesouměrný dopad mezi částice hranice

Pro reálné komplexní úlohy s mnoha částicemi tekutiny je nemožné aby částice tekutiny dopadaly tak aby se vynulovaly příspěvky od hraničních částic jako tomu bylo v předchozí podkapitole 2.4. V této části se budeme zabývat případem nesouměrného dopadu mezi částice stěny. Bude nás zajímat vliv této skutečnosti na pohyb částice. Mějme následující případ zobrazený na obr. 2.26, struktura hraničních částic pro obě okrajové podmínky se periodicky opakují.

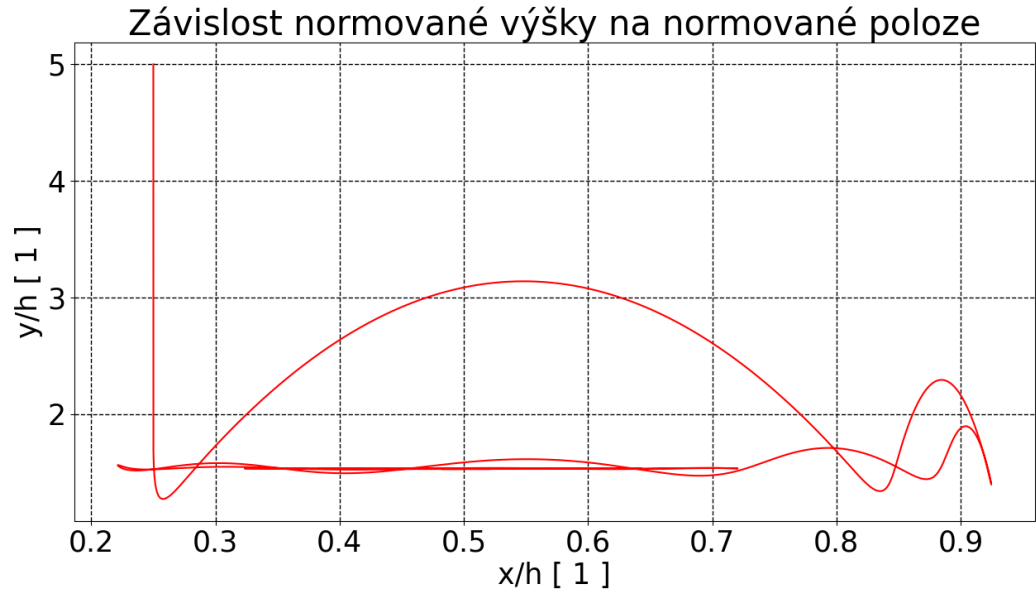


Obr. 2.26. Schéma příkladu

Pro numerické řešení tohoto případu budeme opět využívat Wendlandovo jádro, které je popsáno pomocí rovnic (1.51), pro numerickou integraci semi-implicitní Eulerovu metodu. Parametry simulace a systém rovnic budou stejné jako v podkapitole 2.4, kromě počáteční x-ové polohy $x_0 = 0.25dp$ a rozdílné vzdálenosti mezi hraničními částicemi. Vzdálenost mezi hraničními částicemi je pro názornost volena $dp = h$

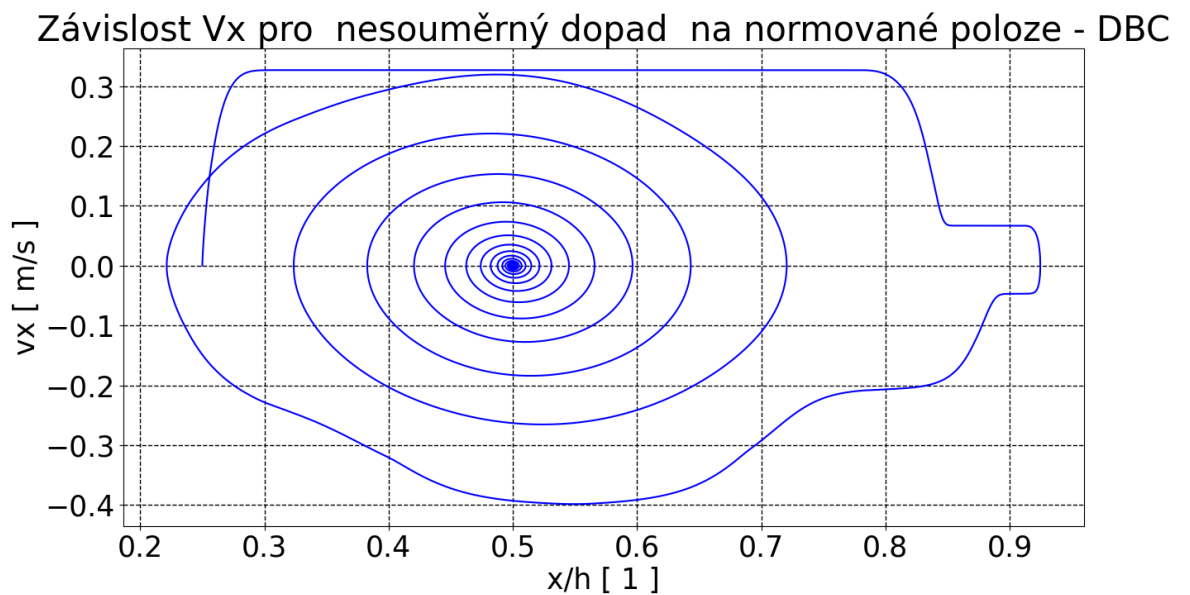
2.5.1 Formulace DBC

Předpokládáme, že průběh výšky bude pro DBC formulaci rozdílný oproti stejné formulaci pro případ z podkapitoly 2.4. Předpokládáme že částice se začne nefyzikálně pohybovat v x-ové souřadnici a po uplynutí určitého časového intervalu zastaví v rovnovážné pozici. K rozdílu v y-ové souřadnici by mělo docházet kvůli jiným vzdálenostem mezi částicemi (v tomto případě totiž nebude konstantní x-ová poloha). Výsledky jsou na obr. 2.27, 2.28, 2.29 a 2.30. Na obr. 2.27 je závislost normované normálové vzdálenosti částice tekutiny od stěny na normované x-ové poloze. Na obr. 2.28 je vykreslen průběh x-ové rychlosti v závislosti na její x-ové poloze. Na obr. 2.29 je potom časová závislost této rychlosti. Na obr. 2.30 je vykreslen průběh x-ové polohy na čase.

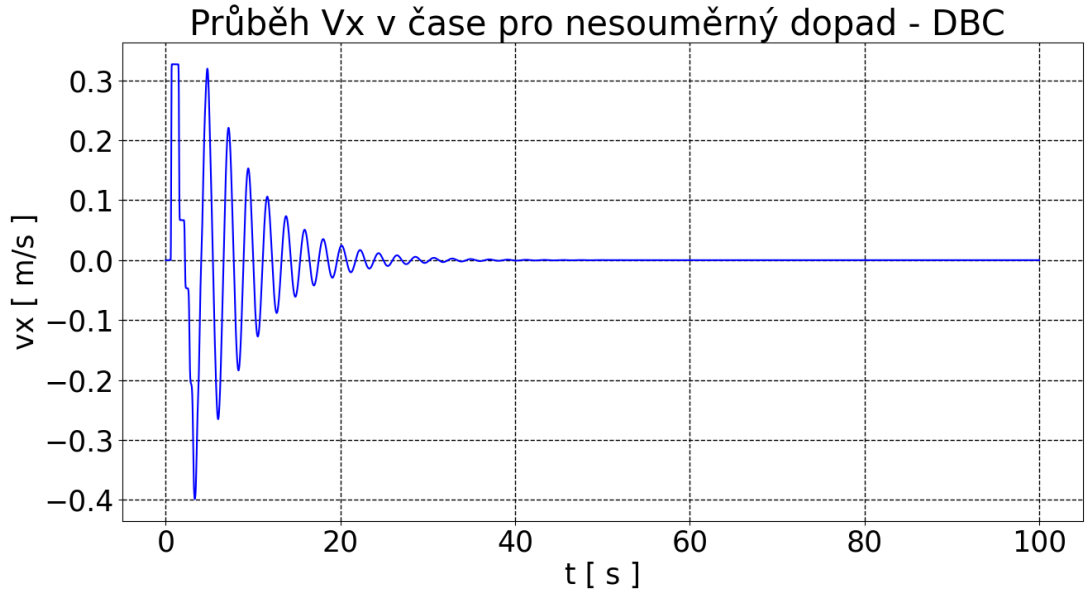


Obr. 2.27. Průběh polohy částice tekutiny

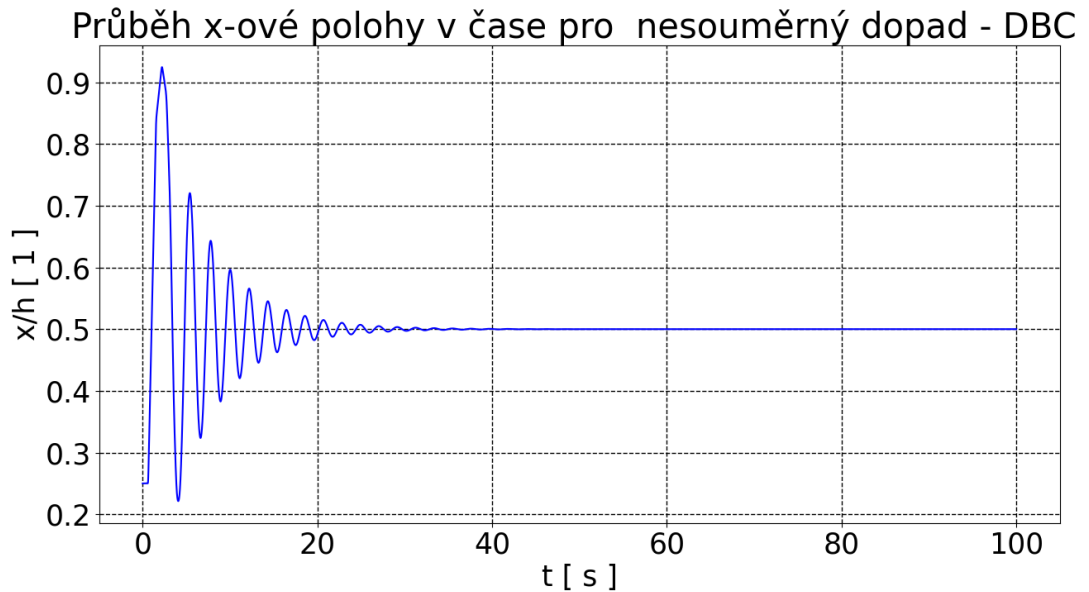
Z obr. 2.27 je patrné že k prvnímu odrazu od stěny došlo, ale zároveň došlo i k vychýlení částice ve směru osy x . Díky nesouměrnému dopadu totiž vzniká nerovnovážné silové působení na částici tekutiny. V průběhu odrazu tedy dostává částice x -ovou rychlost jak je patrné z obr. 2.28 a 2.29 a tedy urazí nenulovou vzdálenost od prvního kontaktu s částicí stěny, jak je vidět na obr. 2.30. To se dále opakuje a částice se v důsledku interakcí začne pohybovat opačným směrem. Takto tlumeně kmitá až se zastaví v rovnovážné poloze, což je zde poloha $x = 0.5$ m. Nicméně nám to do numerického řešení vnáší další nepřesnost, už jen z toho důvodu, že se částice přesunula v x -ovém směru.



Obr. 2.28. Průběh x -ové rychlosti částice tekutiny na x -ové poloze



Obr. 2.29. Průběh x-ové rychlosti na čase



Obr. 2.30. Průběh x-ové polohy na čase

Tato, pro nás nežádoucí interakce, je dána pohybovou rovnicí ((1.66) s umělou vazností)

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = - \sum_{j \in FUB} (\Lambda_{ij} + \Pi_{ij}) \nabla_i W_{ij} m_j - \mathbf{f}_i.$$

Ve směru osy y jde o téměř identický proces odrazu částice tekutiny od stěny, který známe z předchozích příkladů. Nicméně díky rozdílné x -ové vzdálenosti částice tekutiny od částic stěny, je zde rozdíl oproti případu z podkapitoly 2.4. Ve směru x dochází při prvním odrazu k následujícímu. Částice stěny s menší x -ovou souřadnicí

než má částice tekutiny, přidávají částici tekutiny větší silový příspěvek (v absolutní hodnotě) do pohybových rovnic, než částice stěny s větší x-vou souřadnicí než má částice tekutiny. Pohybová rovnice tedy není homogenní a tedy částice má nenulové x-ové zrychlení.

2.5.2 Formulace BI

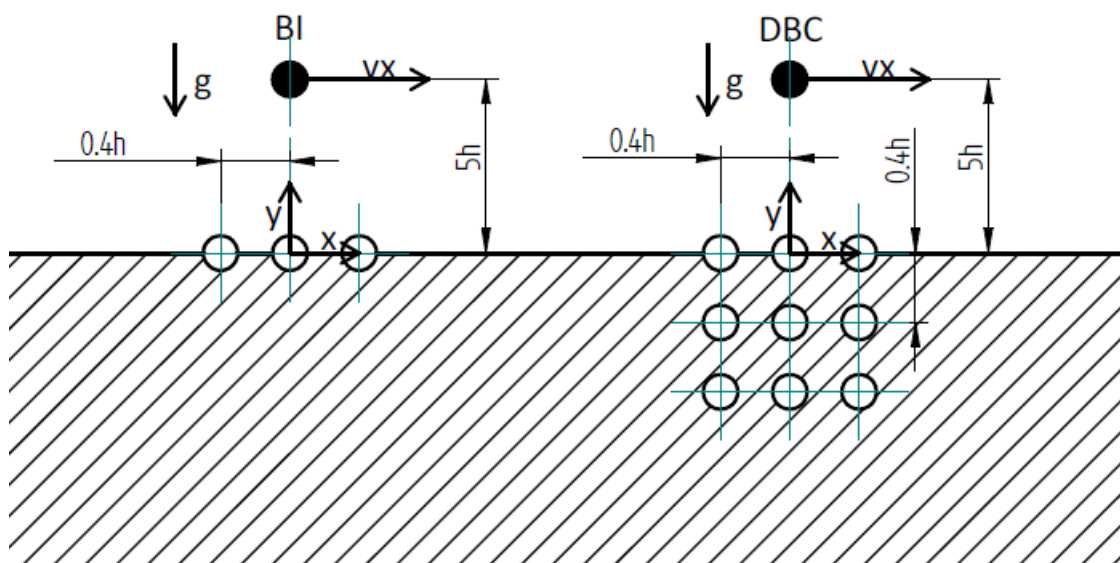
Pokud bychom řešili tento případ pomocí okrajových podmínek typu BI, k tomuto problému by nedošlo. Pohybová rovnice pro tuto formulaci (1.115)

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = -\frac{1}{\gamma_i} \left(\sum_{j \in F} (\Lambda_{ij} + \Pi_{ij}) \nabla_i W_{ij} m_j + \sum_{k \in B} \rho_k (\Lambda_{ik} + \Pi_{ik}) \mathbf{n}_k W_{ik} s_k \right) - \mathbf{f}_i.$$

První suma v této rovnici je nulová neboť máme pouze jednu částici tekutiny. Druhá suma je nenulová ve směru osy y, ale ve směru osy x nulová je. Je to dáno tím, že normála pro námi uvažovanou okrajovou podmínku je v ose x nulová, tedy celá rovnice je homogenní. Tento výsledek lépe vystihuje fyzikální realitu neboť se částice tekutiny pohybuje pouze v ose y. Numerické výsledky jsou velmi podobné předchozím příkladům (liší se pouze v rozdílných vzdálenostech mezi částicemi), proto je zde nebudu uvádět.

2.6 Vodorovný pohyb částice tekutiny nad stěnou

V reálném případě se částice pohybují vůči stěně po nejrůznějších trajektoriích. Částice tekutiny se tak mohou mít nenulovou tečnou rychlost ke stěně. Chceme tedy zjistit chování částic v takovémto případě. Volíme pro jednoduchost případ vodorovného pohybu částice tekutiny nad nekonečnou stěnou s působením tíhové síly.



Obr. 2.31. Schéma řešeného příkladu

Budeme zkoumat chování částice při interakci s okrajovými podmínkami typu DBC a BI. Chceme zjistit jaký vliv budou mít jednotlivé varianty okrajových podmínek na průběh tečné rychlosti. Chceme ověřit, že jsme schopni pomocí DBC zachytit jev podobný mezní vrstvě a že pomocí BI tento jev nezachytíme. Schéma problému pro obě uvažované formulace je na následujícím obr. 2.31 (vzor stěny se periodicky opakuje v ose x). V obou případech uvažujeme umělou viskozitu s koeficienty $\alpha = 1$ a $\beta = 0$. Pro další konstanty jsou použité následující hodnoty: vyhlazovací délka $h = 0.5$ m, vzdálenost mezi hraničními částicemi $dp = \frac{h}{2.5}$, hmotnost částice $m = 0.1$ kg, počáteční hustota $\rho_0 = mW(0, h)$, rychlost zvuku $c_0 = 30$ m·s⁻¹, tíhové zrychlení $g = 9.81$ m·s⁻², člen zabraňující nulovému jmenovateli $\epsilon = 0.0001$. Dále volíme počáteční x-ovou polohu $x_0 = 0$ m a počáteční x-ovou rychlost $v_{x0} = 0.7$ m·s⁻¹. Pro numerické řešení tohoto případu budeme opět využívat Wendlandovo jádro, které je popsáno pomocí rovnic (1.51), pro numerickou integraci semi-implicitní Eulerovu metodu.

2.6.1 Formulace DBC

V části 2.5 jsme viděli, co udělá nesouměrný dopad částice na okrajovou podmínku typu DBC. K tomuto bude v případě vodorovného pohybu nad stěnou docházet téměř při každém odrazu. Zajímá nás tedy zdali tato okrajová podmínka zastaví částici a za jak dlouho. Pro úplnost zde uvedeme systém rovnic, který pro řešení tohoto případu použijeme. Tedy (1.62), (1.64), (1.66) s umělým vazkým členem (1.68) a (1.70) s nulovými počátečními tlaky

$$\rho_i = \sum_{j \in F \cup B} m_j W_{ij}, i \in F, \quad (2.51)$$

$$\rho_i = \sum_{j \in F} m_j W_{ij} + m_i W_{ii}, i \in B,$$

$$\frac{Dx}{Dt} = v_x, \quad (2.52)$$

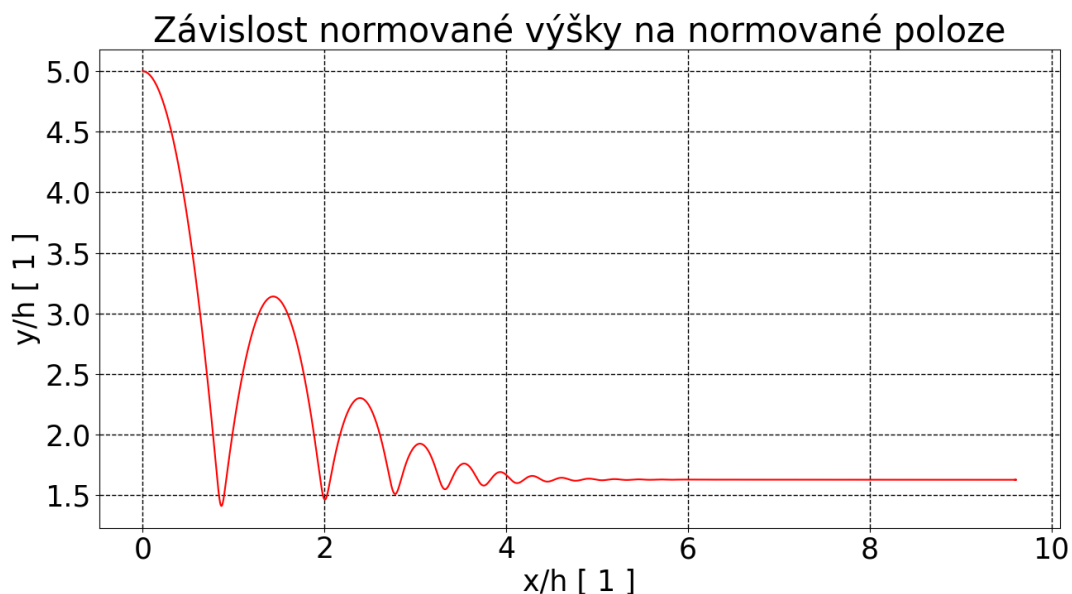
$$\frac{Dy}{Dt} = v_y, \quad (2.53)$$

$$p_i = c_{0i}^2 (\rho_i - \rho_{0i}), \quad (2.54)$$

$$\frac{Dv_x}{Dt} = - \sum_{j \in F \cup B} \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \nabla_x W_{ij} m_j, \quad (2.55)$$

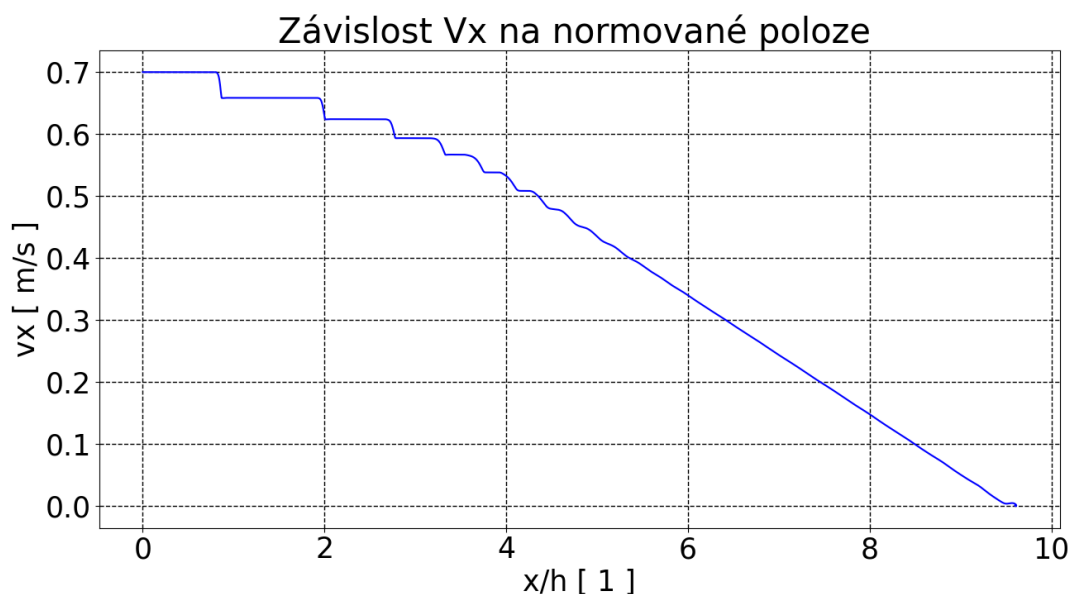
$$\frac{Dv_y}{Dt} = - \sum_{j \in F \cup B} \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \nabla_y W_{ij} m_j - g. \quad (2.56)$$

Výsledky numerické simulace vidíme na následujících obrázcích 2.32, 2.33 a 2.34. Na obr. 2.32 je zakreslena závislost y-ové polohy částice tekutiny na x-ové poloze. Na obr. 2.33 je vykreslena závislost rychlosti ve směru osy x na normované x-ové poloze. Na obr. 2.34 je vynesena časová závislost této rychlosti.



Obr. 2.32. Průběh y-ové polohy na x-ové poloze

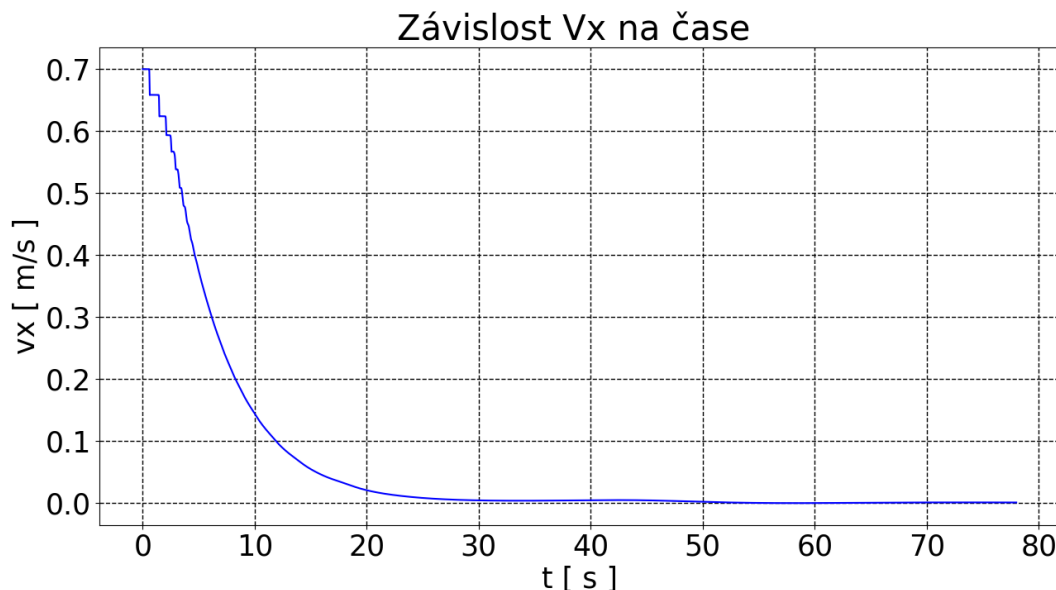
Z obrázku 2.32 je vidět, že v případě kdy částice stěny vyplní jádro váhové funkce částice tekutiny, chová se částice tak jak bychom předkládali, tedy pohybuje se v kladném směru osy x . Nicméně můžeme si všimnout, že je částice bržděna.



Obr. 2.33. Průběh x-ové rychlosti částice na x-ové poloze

Z výsledků je vidět, že částice je bržděna pokaždé, když se vyskytuje v oblasti působení hraničních částic. V důsledku vazkosti dochází k odrazům (a tedy i brždění) s větší frekvencí a závislost rychlosti na poloze se stává téměř lineární, jak je patrné na obrázku 2.33, dokud $v_x \neq 0$. Pak se částice chytne do potenciálové pasti a začíná tlumeně kmitat mezi dvěma částicemi stěny, které jsou jí nejbližší. K tomuto kmitání skutečně dochází ačkoliv to z výsledků není patrné, neboť minimum v_x dosahuje řádově hodnoty záporných tisícín. Z obr. 2.34 je patrné to co bychom předpokládali,

závislost připomíná hyperbolu, ze začátku s jasně patrnými "schody", které se s časem vyhlazují.



Obr. 2.34. Průběh x-ové rychlosti částice na čase

2.6.2 Formulace BI

Jak již bylo řečeno v části 2.5 máme-li okrajové podmínky typu BI, tak díky normále v sumaci přes hraniční částice nedochází v tečném (x-ovém) směru k interakci mezi stěnou a tekutinou. Při vodorovném pohybu částice nad stěnou uletí částice $x_t = v_x t$. Částice by se měla chovat podobně jako v případě volného pádu, ale ne stejně, protože zde je časově závislá i x-ová poloha částice. Systém rovnic uvedeme pro úplnost (1.62), (1.114), (1.118), (2.16), (1.115) s umělou vazkostí a linearizovaná (1.113)

$$\rho_i = \sum_{j \in F \cup B} m_j W_{ij}, i \in F, \quad (2.57)$$

$$\frac{Dx}{Dt} = v_x, \quad (2.58)$$

$$\frac{Dy}{Dt} = v_y, \quad (2.59)$$

$$\gamma_i = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{|\mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{n}_k|}{\Phi h} + 1 \right), & |\mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{n}_k| \leq \Phi h, \\ 1, & |\mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{n}_k| > \Phi h, \end{cases} \quad (2.60)$$

$$f(\mathbf{x}_b) = \frac{\sum_{j \in F} f_j W(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_j)}{\sum_{j \in F} W(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_j)}, \quad (2.61)$$

$$\frac{Dv_x}{Dt} = -\frac{1}{\gamma_i} \sum_{k \in B} \rho_k \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_k}{\rho_k^2} + \Pi_{ik} \right) n_{xk} W_{ik} s_k, \quad (2.62)$$

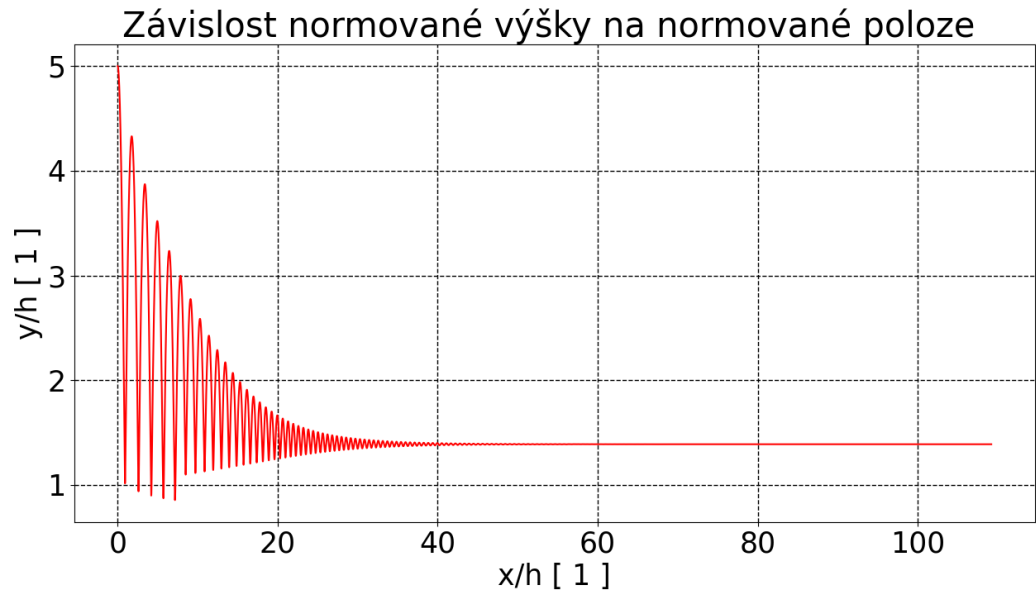
$$\frac{Dv_y}{Dt} = -\frac{1}{\gamma_i} \sum_{k \in B} \rho_k \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_k}{\rho_k^2} + \Pi_{ik} \right) n_{yk} W_{ik} s_k - g, \quad (2.63)$$

$$p_i = c_{0i}^2 (\rho_i - \rho_{0i}). \quad (2.64)$$

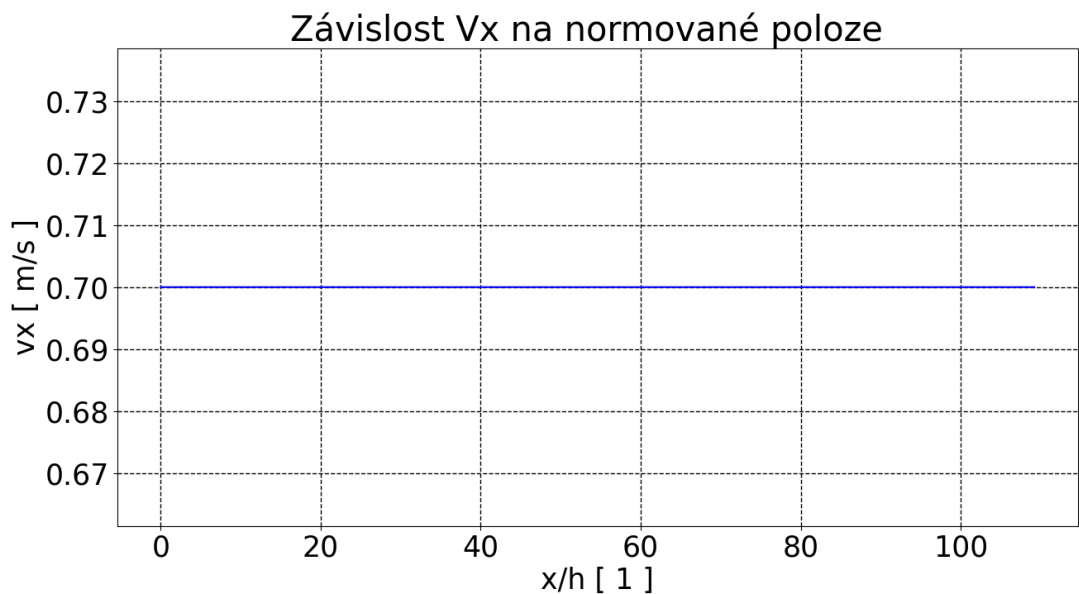
Výsledky numerické simulace můžeme vidět na obrázcích 2.35, 2.36 a 2.37.

Na obr. 2.35 je zakreslana závislost y-ové polohy částice tekutiny na x-ové poloze.

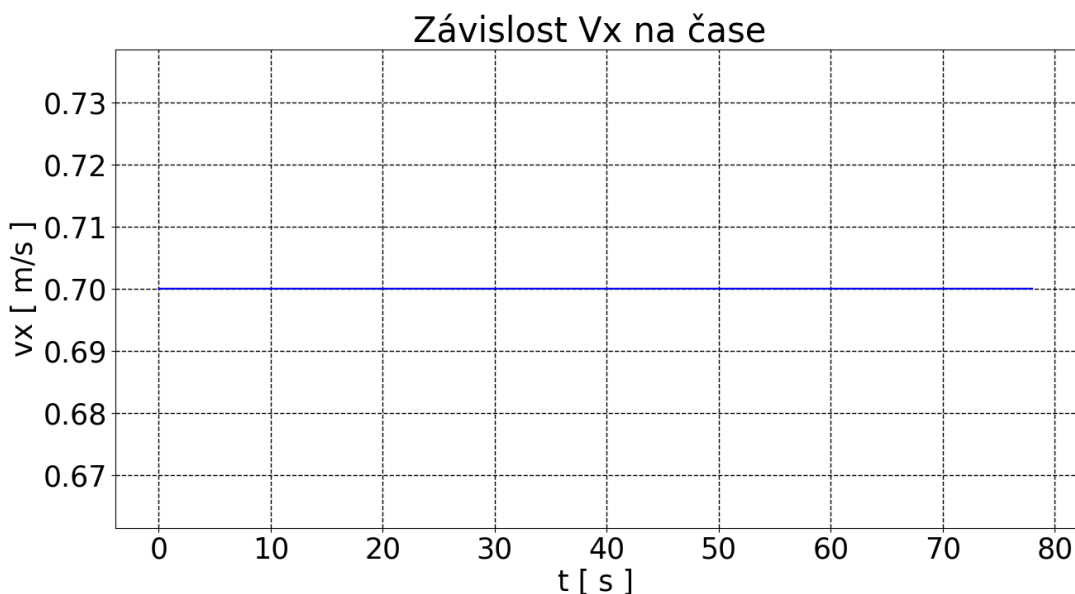
Na obr. 2.36 je vykreslena závislost rychlosti ve směru osy x na normované x-ové poloze. Na obr. 2.37 je vynesena časová závislost této rychlosti.



Obr. 2.35. Průběh y-ové polohy na x-ové poloze



Obr. 2.36. Průběh x-ové rychlosti částice na x-ové poloze



Obr. 2.37. Průběh x-ové rychlosti částice na čase

Potvrzení našich předpokladů je zřejmé z obrázků 2.36 a 2.37, opravdu nedochází k žádnému zpomalení. Skutečně nedochází v tečném (x-ovém) směru k interakci se stěnou. Námí předpokládaná vzdálenost, kterou by měla částice tekutiny urazit, je v normované formě $\frac{x_t}{h} = \frac{0.7 \cdot 78}{0.5} = 109.2$, což našemu výsledku odpovídá. Skutečnost, že v y-ovém směru dochází k disipaci energie pomocí vazkého členu, a v x-ovém směru k žádné disipaci energie nedochází, je v rozporu s naším očekáváním, které klademe na vazké proudění. Pro reálnou úlohu proudění, může být neschopnost této formulace interagovat v tečném směru s tekutinou, např. chceme-li zachytit mezní vrstvu, vážným problémem. Našimi numerickými výpočty jsme tedy ukázali naprostou nevhodnost této formulace pro modelování vazkého proudění. Nicméně v případě, že bychom chtěli modelovat nevazké proudění je BI ideální formulací okrajových podmínek. Problém vazkosti v tečném směru se pokusíme v další části této práce vyřešit, neboť varianta BI je jednoduchá na implementaci i pro zakřivené stěny a je výpočetně méně náročná.

2.6.3 Dodatečný tečný člen pro BI formulaci

Jak už bylo zmíněno, chtěli bychom do formulace pro okrajové podmínky BI dodat člen, který by se zapojoval do interakce v tečném směru za stejných podmínek jako členy ve směru normálovém. Dále od tohoto členu požadujeme aby modeloval ulpívání tekutiny na stěně a její brzdění v blízkosti stěny. Tento úplně nový dodatečný člen byl vytvořen mnou za pomoci vedoucího práce a konzultanta-specialisty. Vyjděme tedy z Newtonova pohybového zákona, ten je pro částici zapsán

$$\mathbf{F}_i = m_i \frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} \qquad \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} = \frac{D\mathbf{v}_i}{Dt}. \qquad (2.65)$$

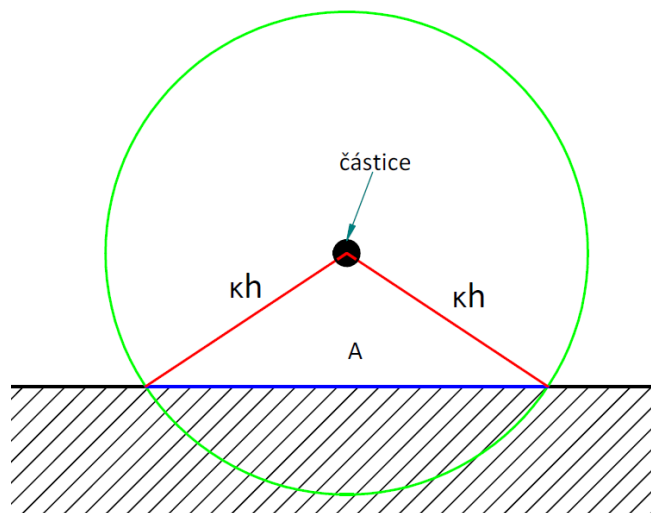
Tedy naším úkolem je nahradit levou stranu pravé rovnice, resp. určit sílu, která působí na částici tekutiny. Od síly požadujeme, aby byla nepřímo úměrná vzdálenosti

od stěny. Využijeme vztahu mezi napětím a silou. Tedy

$$\mathbf{F}_i = \tau A \mathbf{t}, \quad (2.66)$$

kde τ je velikost tečného napětí na stěně, A je plocha a \mathbf{t} je jednotkový tečný vektor. Ve 2D případě, kterým se v této kapitole zabýváme, odpovídá zmiňovaná plocha 1D míře. Pro vícerozměrný případ lze odvodit plochu stěny obdobně.

Nejdříve se budeme zabývat tím co v našem případě je tato plocha. To je patrné z obrázku 2.38.



Obr. 2.38. Schematické znázornění ekvivalentu plochy(modrá) pro částici tekutiny

Snadno už určíme velikost strany rovnoramenného trojúhelníku jako

$$A = 2\sqrt{(\kappa h)^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{ik})^2}, \quad (2.67)$$

kde κh je poloměr uvažovaného nosiče, \mathbf{x}_{ik} je vzdálenost částice tekutiny od hraniční částice a tedy výraz $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{ik}$ je normálová vzdálenost částice od hraniční částice.

Dále se zaměříme na člen τ v rovnici (2.66). K určení tohoto členu vyjdeme z analogie s Newtonovým zákonem viskozity. Tedy

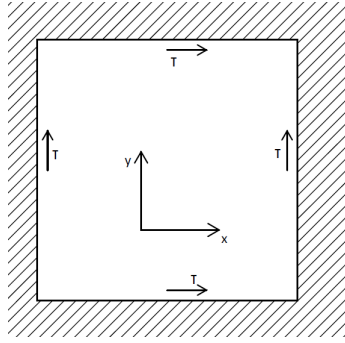
$$\tau = -\mu \frac{du}{dy}, \quad (2.68)$$

kde μ je dynamická viskozita, u je rychlost tekutiny a y je souřadnice kolmá k směru proudění. Dynamickou viskozitu budeme volit konstantě podle dané tekutiny. Stačí pouze vyřešit člen $\frac{du}{dy}$. Zde nahradíme derivaci diferencí. Předpokládáme, že částice na stěně se nepohybují a dostáváme

$$\tau = -\mu \frac{\mathbf{v}_{ik} \cdot \mathbf{t}_k - 0}{(-\mathbf{n}_{ik}) \cdot \mathbf{x}_{ik}}, \quad (2.69)$$

kde ve jmenovateli se vyskytuje znaménko mínus protože uvažujeme vnější normálu.

Posledním členem je \mathbf{t} . Vystává otázka jak normálu orientovat na libovolné stěně, tak aby dodatečný člen plnil svoji úlohu, tedy zbrzdění částice. Jak správně orientovat normály je vidět na obrázku 2.39



Obr. 2.39. Orientace normál tak aby dodatečný člen brzdil částice tekutiny

Pro každou hraniční částici volíme tečný vektor. Máme-li tedy jinak orientované stěny, případně jsou křivočaré lze lokálně zavést ortogonální souřadnicový systém. A ten pomocí transformační matice pro rotaci, převést na stejný jako je na obr. 2.39 a tedy volit správně orientovanou tečnu pro danou částici.

Takto odvozený dodatečný člen má následující tvar

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = -\frac{2\mu\sqrt{(\kappa h)^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{ik})^2}}{m_i} \frac{\mathbf{v}_{ik} \cdot \mathbf{t}_k}{(-\mathbf{n}_{ik}) \cdot \mathbf{x}_{ik}} \mathbf{t}_k = -\bar{\xi}_{ik} \mathbf{t}_k. \quad (2.70)$$

Tato formulace je pro interakci částice tekutiny pouze s jednou částicí stěny. Tento vztah má ještě jeden problém, do této interakce se zapojí i částice stěny, která je mimo nosič váhové funkce částice tekutiny, pokud je částice dostatečně blízko stěny. Není vhodné tento vztah přenásobit váhovou funkcí $W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k, h)$ neboť velikost příspěvku od hraniční částice se škáluje už přes hodnotu plochy. Tento vztah bude mít charakter switche, zapne se pouze pro částice stěny, které se náchází v nosiči váhové funkce částice tekutiny a pro jiné bude mít hodnotu nulovou. Tento switch také vyřeší nesmyslné imaginární hodnoty pro částice tekutiny, které jsou příliš vzdáleny od stěny a vůbec s ní neinteragují. Výsledný tvar pro tento dodatečný člen pro interakci s dalšími částicemi hraniční podmínky je

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = -\sum_{k \in B} \xi_{ik} \mathbf{t}_k, \quad (2.71)$$

kde:

$$\xi_{ik} = \begin{cases} \frac{2\mu\sqrt{(\kappa h)^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{ik})^2}}{m_i} \frac{\mathbf{v}_{ik} \cdot \mathbf{t}_k}{(-\mathbf{n}_{ik}) \cdot \mathbf{x}_{ik}}, & W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k, h) > 0 \\ 0, & W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k, h) = 0. \end{cases}$$

Tedy upravená pohybová rovnice pro okrajové podmínky typu B1 s títo přidaným členem, je

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = -\frac{1}{\gamma_i} \left(\sum_{j \in F} (\Lambda_{ij} + \Pi_{ij}) \nabla_i W_{ij} m_j + \sum_{k \in B} \rho_k (\Lambda_{ik} + \Pi_{ik}) \mathbf{n}_k W_{ik} s_k + \sum_{k \in B} \xi_{ik} \mathbf{t}_k \right) - \mathbf{f}_i. \quad (2.72)$$

Přejdeme teď k našemu příkladu vodorovného pohybu částice nad okrajovou podmínkou. Použijeme následující systém rovnic, do kterého již budou dosazeny normály $\mathbf{n}_k = (0, -1)$ a tečny $\mathbf{t}_k = (1, 0)$. Dynamická viskozita je volena $\mu = 0.001$ Pa·s tedy hodnota kterou má voda při 20°C. Náš systém (1.62), (1.114), (1.118), (2.16), (1.115)

s umělou vazkostí s dodatečným členem a linearizovaná (1.113)

$$\rho_i = \sum_{j \in F \cup B} m_j W_{ij}, i \in F, \quad (2.73)$$

$$\frac{Dx}{Dt} = v_x, \quad (2.74)$$

$$\frac{Dy}{Dt} = v_y, \quad (2.75)$$

$$\gamma_i = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{|\mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{n}_k|}{\Phi h} + 1 \right), & |\mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{n}_k| \leq \Phi h, \\ 1, & |\mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{n}_k| > \Phi h, \end{cases} \quad (2.76)$$

$$f(\mathbf{x}_b) = \frac{\sum_{j \in F} f_j W(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_j)}{\sum_{j \in F} W(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_j)}, \quad (2.77)$$

$$\frac{Dv_x}{Dt} = -\frac{1}{\gamma_i} \sum_{k \in B} \xi_{ik}, \quad (2.78)$$

$$\frac{Dv_y}{Dt} = -\frac{1}{\gamma_i} \sum_{k \in B} \rho_k \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_k}{\rho_k^2} + \Pi_{ik} \right) W_{ik} s_k - g, \quad (2.79)$$

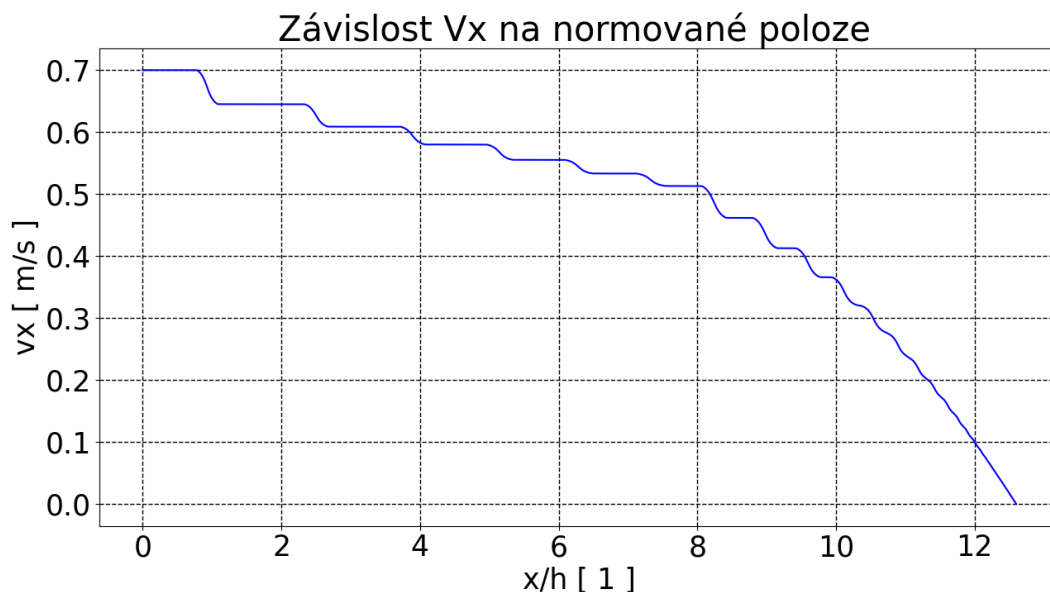
$$p_i = c_{0i}^2 (\rho_i - \rho_{0i}). \quad (2.80)$$

Předpokládáme, že pro tento systém se částice bude brzdit a nakonec zastaví. Jsou použity stejné numerické nástroje jako pro oba předchozí příklady. Výsledky numerického výpočtu můžeme vidět na obrázcích 2.40, 2.41 a 2.42. Na obr. 2.40 je zakreslena závislost y-ové polohy částice tekutiny na x-ové poloze. Na obr. 2.41 je vykreslena závislost rychlosti ve směru osy x na normované x-ové poloze. Na obr. 2.42 je vynesena časová závislost této rychlosti.

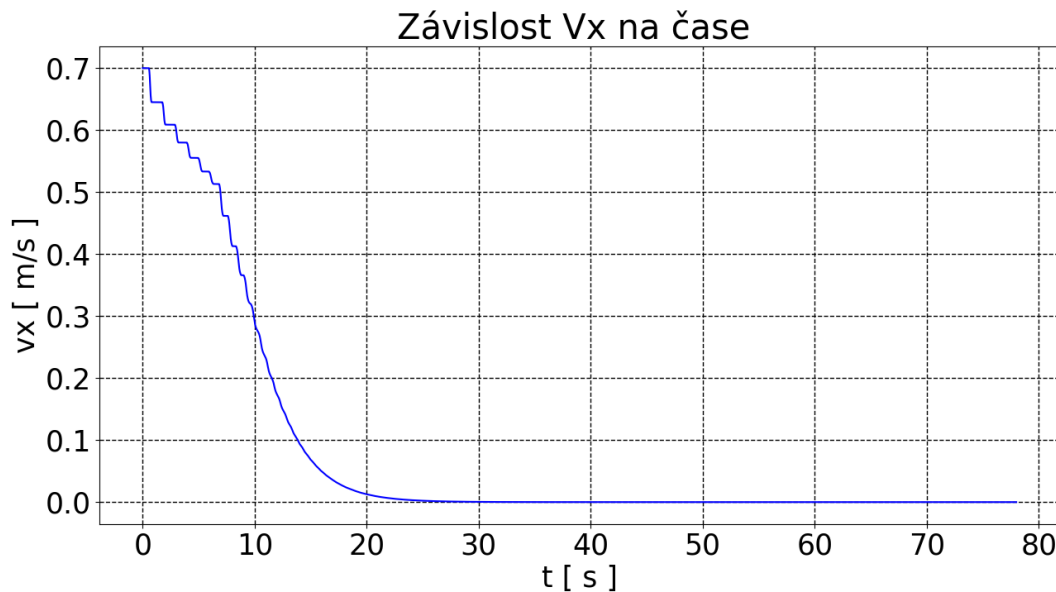


Obr. 2.40. Průběh y-ové polohy na x-ové poloze

Předpoklad toho, že se částice zastaví se nám potvrdil na obrázku 2.40. Uražená vzdálenost je přibližně devětkrát menší než pro výpočet stejného příkladu pomocí standardní BI okrajové podmínky.



Obr. 2.41. Průběh x-ové rychlosti částice na x-ové poloze



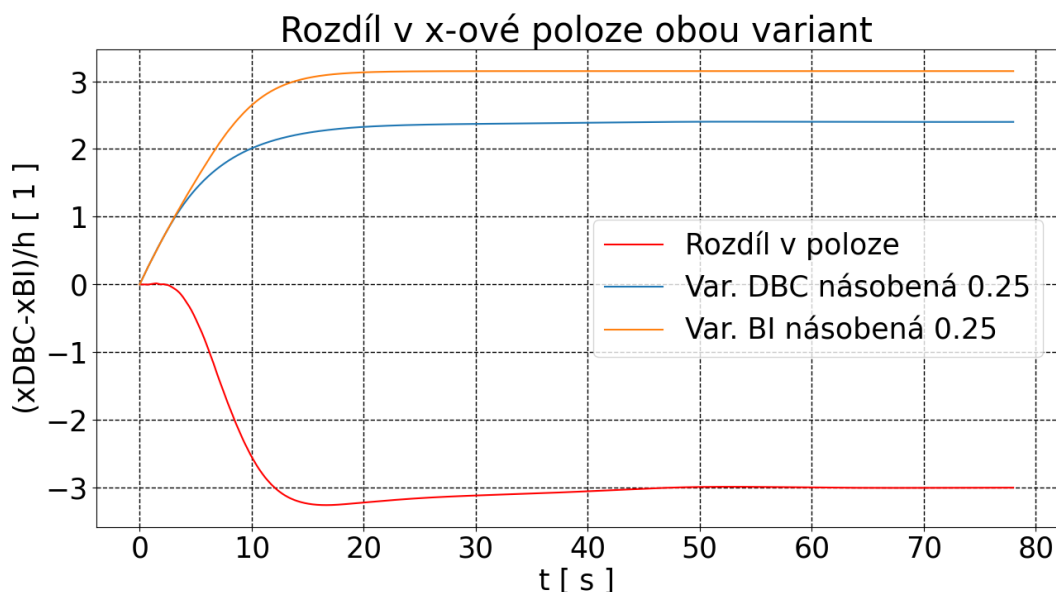
Obr. 2.42. Průběh x-ové rychlosti částice na čase

Z výsledků je patrné že částice je brzděna pouze tehdy, vyskytuje-li se v jejím nosiči váhové funkce částice stěny. Částice se, v důsledku působení vazkosti odráží s větší frekvencí, a tedy i dochází k brzdění častěji. Díky tomu se závislost z obrázku 2.41 stává ke konci téměř lineární. Jakmile částice zpomalí na nulovou x-ovou rychlost, okamžitě zastavuje a její hodnota nenabývá záporných čísel. Z obrázku 2.42 je patrné

že částice podle předpokladu s časem zpomaluje. Tato závislost, která připomíná hyperbolu, velmi rychle klesá k nule.

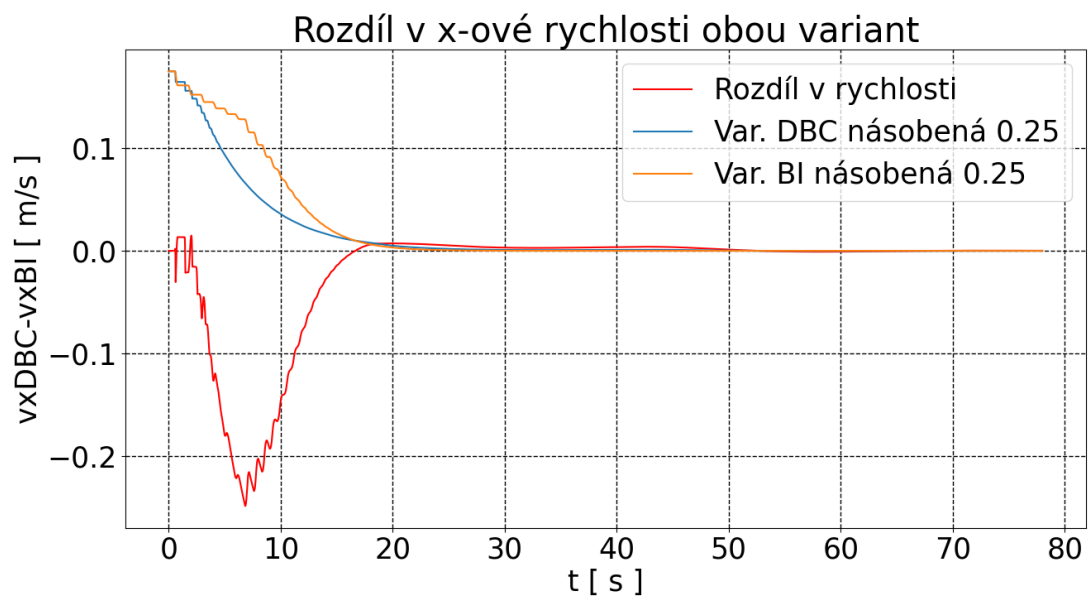
2.6.4 Porovnání DBC a BI s dodatečným členem

Z obrázků 2.32-2.40 je patrné, že průběh y-ové polohy je podobný pro obě formulace okrajových podmínek. Nicméně důležitějším parametrem, pro určení shody mezi jednotlivými formulacemi, jsou hodnoty polohy a rychlosti v x-ovém směru. Tyto hodnoty jsou vykresleny na grafech 2.43 a 2.44. Na obr. 2.43 je zanesena závislost rozdílu v x-ové normované poloze částice tekutiny obou variant na čase. Na obr. 2.44 je vykreslena závislost rozdílu v x-ové rychlosti obou variant částice tekutiny na čase.



Obr. 2.43. Průběh rozdílu v x-ové polohy částice na čase pro formulace DBC - BI. Rozdíl je bráný z nepřenasobených hodnot. Přenasobení hodnot je provedeno kvůli názornosti

Jak je patrné z obou grafů formulace okrajové podmínky typu DBC je více vazká než formulace BI s dodatečným členem. Nicméně se nám podařilo s dynamickou viskozitou dospět k podobným výsledkům při aplikaci našeho dodatečného členu. Vytvořili jsme úplně nový člen pro formulaci BI, který modeluje umělou viskozitu v tečném směru, podobnou té kterou disponuje varianta DBC. Musíme mít ale na paměti že tyto výsledky jsou s vazkým koeficientem $\alpha = 1$ (pro všechny variaty), běžně se toto číslo pohybuje v řádu setin. Koeficient je volen takto, aby byly příklady co nejnázornější a bylo dobře vidět k čemu zde dochází. Také si musíme uvědomit, že tyto výsledky nejsou porovnávány s fyzikálním modelem mezní vrstvy. To bude námětem další práce.



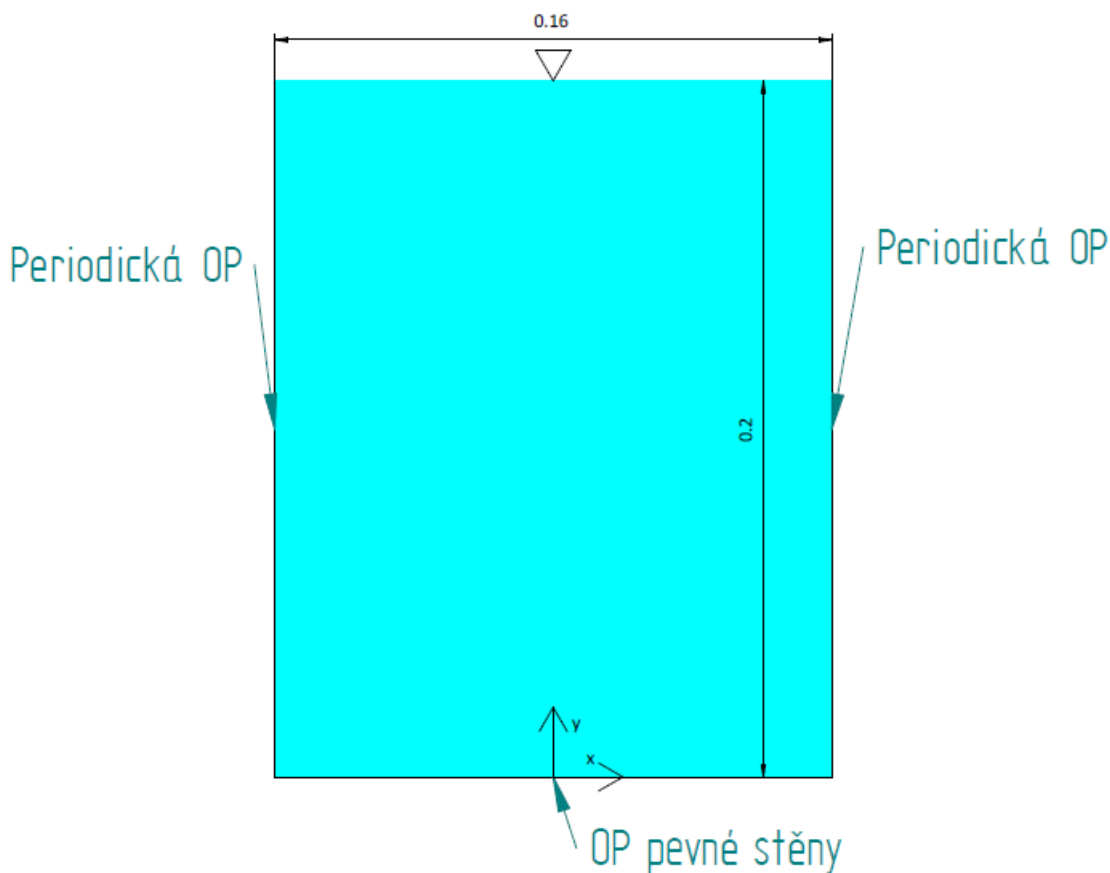
Obr. 2.44. Průběh rozdílu v x-ové rychlosti čátice na čase pro formulace DBC - BI. Rozdíl je bráný z nepřenásobených hodnot. Přenásobení hodnot je provedeno kvůli názornosti

3 Proudění v otevřeném kanálu

Poznatky ze závěru předchozí kapitoly chceme otestovat na reálných problémech proudění. Jako testovací příklad budeme uvažovat 2D proudění v otevřeném kanálu. Na tomto případě budeme zkoumat vytváření mezní vrstvy pro okrajové podmínky typu DBC, BI a modifikovaných BI a tvar rychlostního profilu v ustáleném stavu. Rychlostní profily porovnáme s experimentálními daty z článku (Stanek, 2018) a profilem ze vztahu pro stékání po stěně.

Úlohu představuje nakloněný otevřený kanál, ale pro jednoduchost ho v nastavení úlohy uvažujeme jako vodorovný a udělujeme v tečném směru konstantní zrychlení odpovídající naklonění kanálu. Kanál je nekonečně dlouhý, uvažujeme pouze jeho výsek dlouhý $L = 0.16$ m s periodickými okrajovými podmínkami na vstupu a výstupu a výškou hladiny $H = 0.2$ m. kanál je zpočátku zatopen a tekutina má nulovou počáteční rychlost. Působením gravitační síly se tekutina rozpohybuje. Sklon kanálu je $\vartheta = 0.234^\circ$. Tento sklon je simulován zrychlením $\mathbf{g} = (|\mathbf{g}|\sin\vartheta, |\mathbf{g}|\cos\vartheta)$. Rychlostní profil pro případ stékání po stěně se určí pomocí vztahu

$$v_x = \frac{g_x \rho}{\mu} (yH - 0.5y^2). \quad (3.1)$$



Obr. 3.1. Schéma úlohy

Tento příklad budeme řešit pomocí SPH-DBC a SPH-BI. Pro variantu SPH-DBC je systém popsán rovnicemi (1.73), (1.64), (1.65) s vazkým členem (1.68) a (1.69). Pro variantu SPH-BI je systém popsán rovnicemi (1.112), (1.114), (1.113), (1.117) a (1.118). Pohybovou rovnici pro BI budeme uvažovat ve dvou tvarech. První je rovnice (1.116). Druhý tvar je

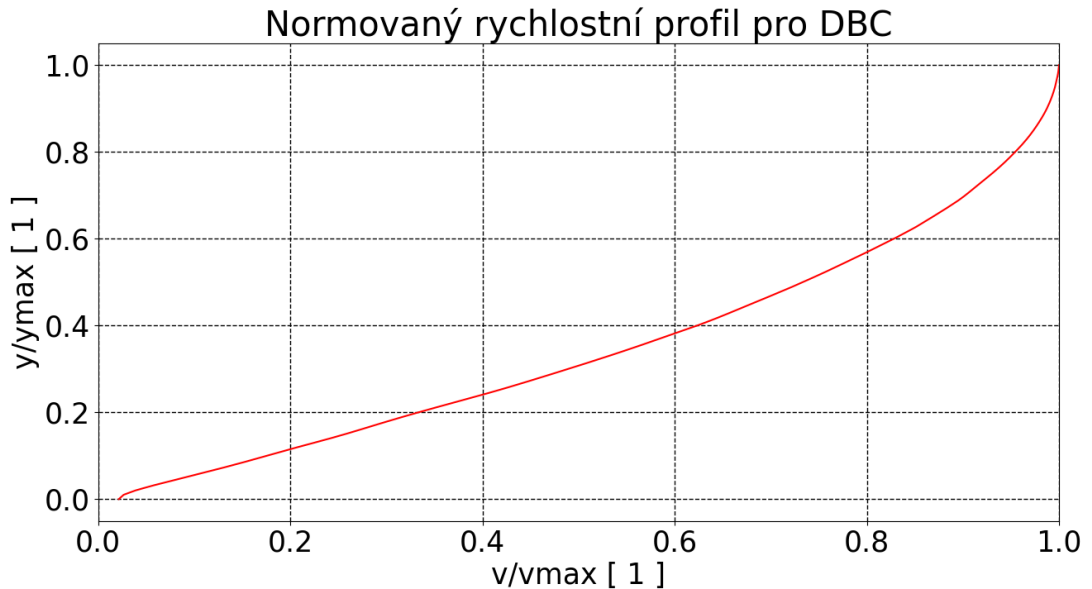
$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = -\frac{1}{\gamma_i} \left(\sum_{j \in F} (\Lambda_{ij} + \Pi_{ij}) \nabla_i W_{ij} m_j + \sum_{k \in B} \rho_k (\Lambda_{ik} + \Pi_{ik}) \mathbf{n}_k W_{ik} s_k + \sum_{k \in B} w \xi_{ik} \mathbf{t}_k \right) - \mathbf{f}_i, \quad (3.2)$$

$$\Lambda_{ij} = \frac{p_i + p_j}{\rho_i \rho_j},$$

kde w je váha dodatečného členu. Tuto konstantu používáme pro ladění tohoto členu.

V obou případech užíváme 2D Wendlandovo jádro (1.51) a Verletovo schéma pro numerickou integraci. Pro tuto úlohu použijeme následující hodnoty: vyhlazovací délka $h = 0.004$ m, počáteční vzdálenost mezi částicemi $d_p = s_k = 0.002$ m, koeficient umělé viskozity $\alpha = 0.5$ a $\beta = 0$, hmotnost částice $m = 0.004$ kg, počáteční hustota $\rho_0 = 1000$ kg·m⁻³, dynamická viskozita $\mu = 0.001$ Pa·s, počáteční rychlost $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ m·s⁻¹, numerická rychlost zvuku $c_0 = 34.3$ m·s⁻¹, difuzní koeficient $\delta_\psi = 0.1$ a časový krok $\Delta t = 2 \cdot 10^{-5}$ s.

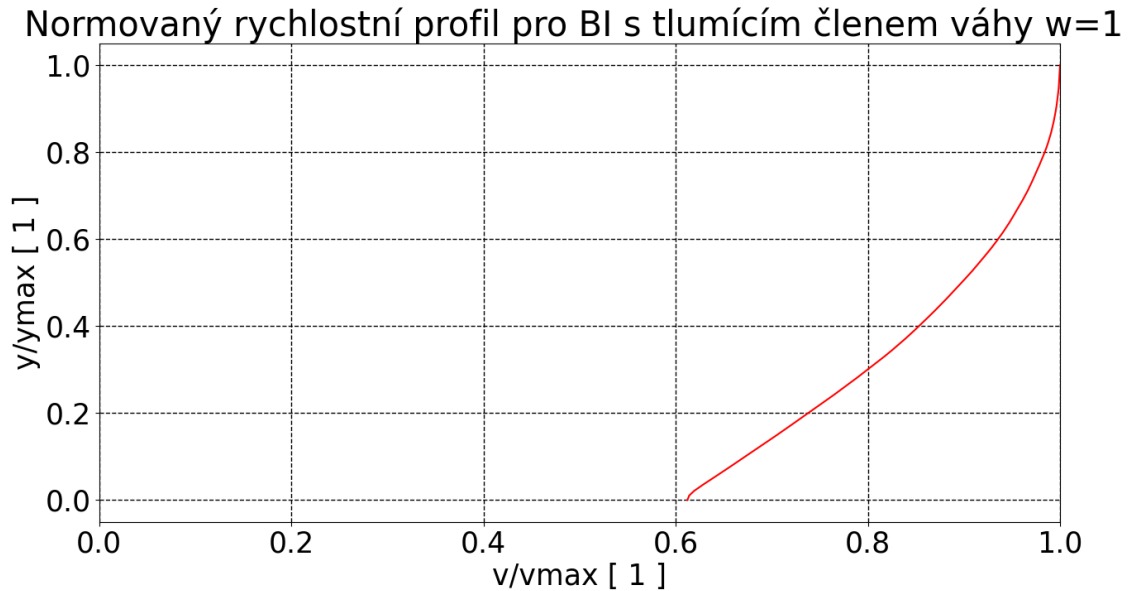
Výsledky jsou na následujících obrázcích. Na obr. 3.2 je normovaný rychlostní profil pro variantu DBC. Na obr. 3.3, 3.4 a 3.5 jsou normované rychlostní profily pro variantu BI s $w = 1$, $w = 3$ a $w = 5$. Výsledky zobrazují rychlostní profily ve středu kanálu v čase $t = 24$ s. Na obr. 3.6 jsou tyto normované profily porovnány s experimentálními daty uvedenými v (Stanek, 2018) (v tomto článku jsou uvedené normované profily) a profilem napočítaným podle rovnice 3.1. Na obr. 3.7 jsou vykresleny nenormované rychlostní profily v závislosti na normované výšce.



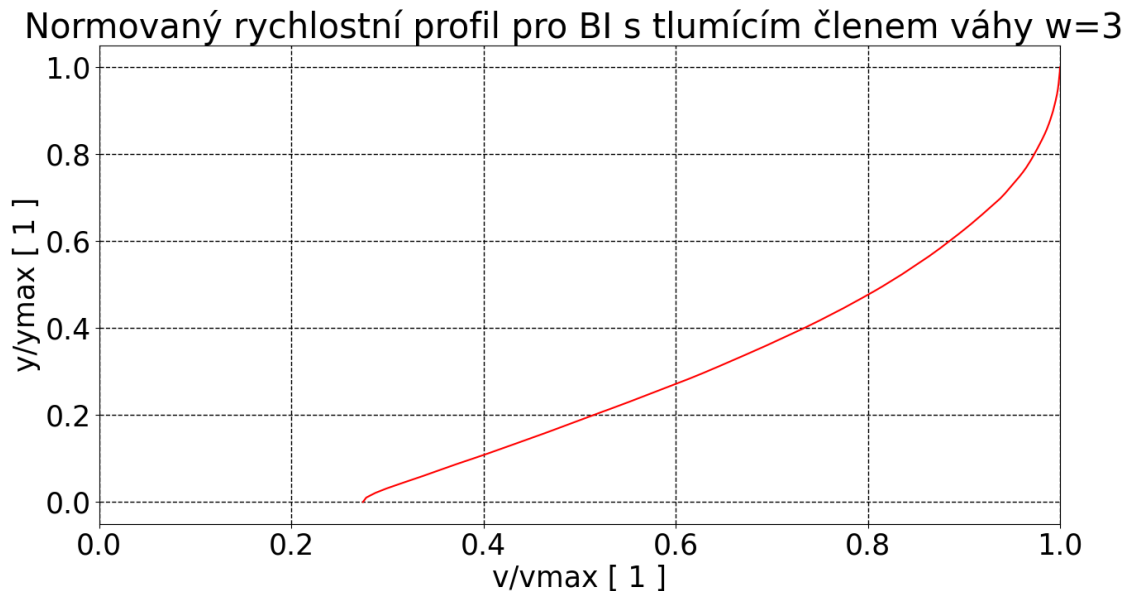
Obr. 3.2. Normovaný rychlostní profil pro variantu DBC

Z výsledků je patrné, že DBC varianta brzdí tekutinu v blízkosti stěny nejvíce, pro námi uvažované varianty. Při použití dodatečného členu dochází k námi požadované

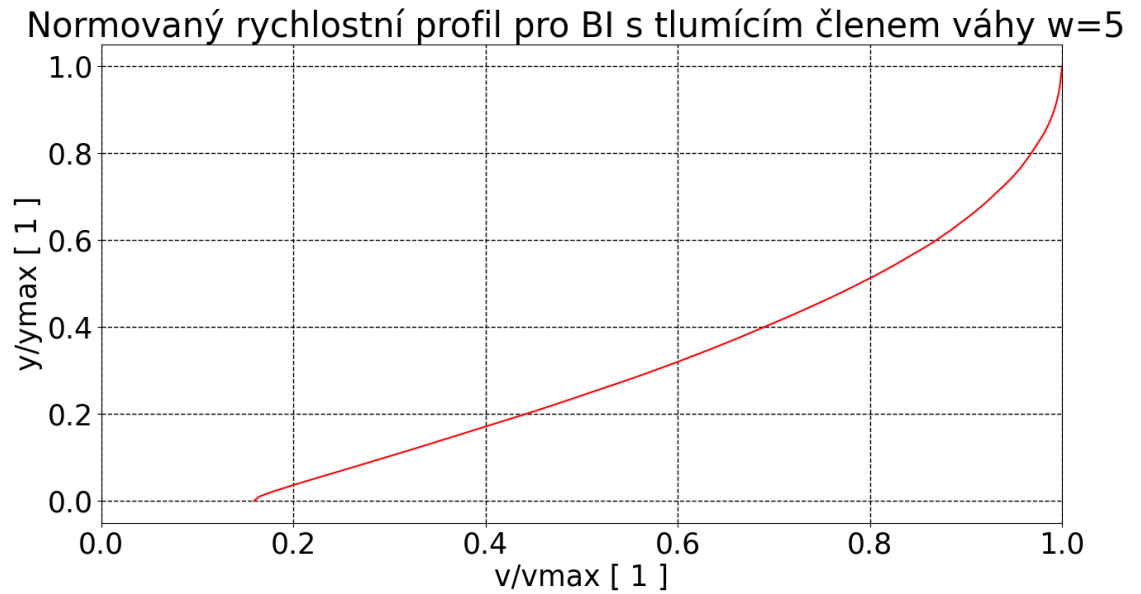
interakci tekutiny se stěnou a tekutina zpomaluje. S rostoucím parametrem w klesá rychlost tekutiny v celém proudovém poli. Dále si můžeme všimnout, že varianty DBC a BI $w = 5$ jsou si podobné, hlavně tvarem profilu. Výsledky experimentu z se tvarem profilu odlišuje od zbylých případů. Naopak tvar profilu určený rovnicí 3.1 se pouze drobně odlišuje od varianty DBC. Tvar profilu může být také ovlivněn použitím umělé viskozity namísto fyzikální.



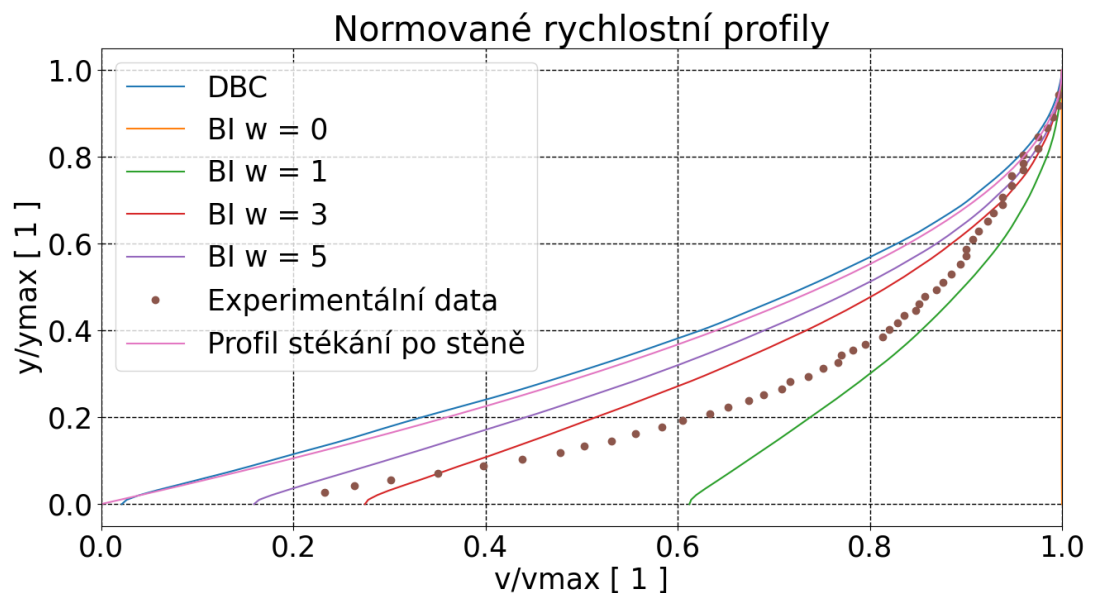
Obr. 3.3. Normovaný rychlostní profil pro variantu BI $w = 1$



Obr. 3.4. Normovaný rychlostní profil pro variantu BI $w = 3$

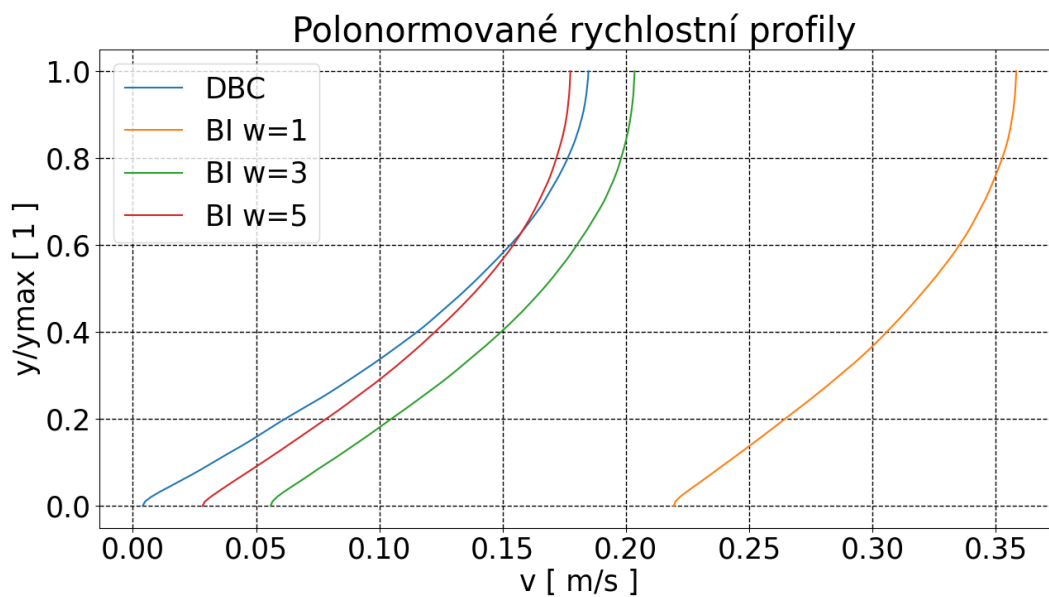


Obr. 3.5. Normovaný rychlostní profil pro variantu BI $w = 5$



Obr. 3.6. Porovnání jednotlivých normovaných rychlostních profilů. Varianta DBC (modrá), varianta BI $w = 0$ (oranžová), varianta BI $w = 1$ (zelená), varianta BI $w = 3$ (červená), varianta BI $w = 5$ (fialová), experimentální data (hnědá) (Štanek, 2018), rychlostní profil určený pomocí 3.1 (růžová).

Z výsledků je zřejmé, že dodatečný člen plní požadovanou funkci zpomalení tekutiny v blízkosti stěny. Výsledky uvedené v této kapitole jsou prvotním pokusem o normování dodatečného členu pro formulaci BI. Normování členu bude nutné provést na širším spektru úloh a také s fyzikální viskozitou.



Obr. 3.7. Porovnání jednotlivých polonormovaných rychlostních profilů. Varianta DBC (modrá), varianta BI $w = 1$ (oranžová), varianta BI $w = 3$ (zelená), varianta BI $w = 5$ (červená).

Závěr

Na úvod je vysvětlen matematický základ metody SPH. Zabýváme se v ní základními SPH náhradami funkcí a diferenciálními operátory. Uvádíme i problémy těchto základních schémat a následně odvozujeme schémata s lepšími numerickými vlastnostmi. Dále je zaveden systém výchozích rovnic pro slabě stlačitelné proudění, na které je dále aplikovaná diskretizace pomocí metody SPH. Na konci kapitoly jsou rozebrány námi užívané okrajové podmínky pro proudění slabě stlačitelné tekutiny. Také jsou zde uvedeny možnosti jak realizovat okrajové podmínky, jejich výhody a nevýhody.

V následující kapitole zkoumáme na modelových příkladech numerické vlastnosti dvou přístupů ke konstrukci okrajových podmínek (DBC a BI). Prvním z nich byl případ pádu částice tekutiny na částici stěny v tíhovém poli bez tlumení. Nejprve jsme vysvětlili mechanismus odrazu na obou okrajových podmínkách. Na tomto příkladu jsme chtěli ověřit správnost vlastního programu. Tyto výsledky jsme porovnávali s fyzikálním modelem volného pádu hmotného bodu s dokonale pružným odrazem na stěně. Pomocí programu jsme dostali pro DBC i BI výsledky, které odpovídaly našim předpokladům. Zjistili jsme, že pro variantu DBC dochází k odrazu ve větší vzdálenosti od stěny než u varianty BI. Vysvětlili jsme proč k této skutečnosti dochází. Také jsme ověřili že okrajové podmínky vnáší do systému pouze zanedbatelnou numerickou vazkost a že nedochází k pozorovatelné disipaci energie v systému.

Dalším příkladem byla úloha z článku (Crespo et al., 2007), který byl inspirací pro vytvoření této práce. V první části jsme úspěšně reprodukovali výsledky uvedené v tomto článku a dále jsme v naší práci rozšířili výsledky o BI formulaci okrajových podmínek. Ověřili jsme, že dochází pouze k zanedbatelným změnám celkové energie systému.

Následně jsme řešili příklad interakce částice tekutiny se standartními okrajovými podmínkami pro DBC a BI, které jsou běžně užívané při složitějších simulacích. Jednalo se opět o případ volného pádu částice tekutiny na stěnu, tvořenou odpovídající konfigurací částic stěny. Zde jsme poprvé aplikovali vazkost, která bývá běžně užívána. V těchto simulacích se potvrdilo, že dochází k očekávanému odebrání energie ze systému pro obě varianty. Varianta DBC s členem umělé vazkosti je výrazně více disipativní než varianta BI se stejným vazkým členem. Je zde podrobně vysvětlen důvod proč tomu tak je. Ve zkratce u SPH-DBC se do interakce zapojuje více částic (neboť DBC je ze své podstaty vícevrstvá) než u SPH-BI (BI je jednovrstvá formulace). Také samotná formulace DBC vytváří silnější působení způsobené jednou částicí stěny než u BI formulace.

Ve výše uvedených případech vždy částice tekutiny dopadala souměrně na částice stěny. V komplexnějších simulacích bude docházet i k nesouměrnému dopadu částic tekutiny na stěnu, čímž se zabývá další část této kapitoly. Chceme zjistit jak se částice tekutiny bude v tomto případě chovat. Přístup DBC nám do systému vnese nefyzikální rychlost v tečném směru. Nicméně v případě s jednou částicí tekutiny klesne tato rychlost časem opět na nulu. Je otázkou, zda-li v případě že by v systému bylo více částic tekutiny, nevnese tato skutečnost do systému energii. Varianta BI naopak nevnáší do systému tečnou rychlost a tedy lépe vystihuje fyzikální realitu.

Posledním příkladem je vodorovný pohyb částice tekutiny nad nekonečnou stěnou. Opět je uvažovaná umělá vazkost. Na tomto příkladě jsme demonstrovali vliv obou okrajových podmínek na průběh tečné rychlosti. Pro variantu DBC dochází ke snižování tečné rychlosti do doby, kdy se částice chytne do potenciálové pasti kde tlumeně kmitá dokud nezastaví. Pro variantu BI nedochází k žádným změnám rychlosti v tečném směru, to je způsobené násobením členu, který je odpovědný za interakci mezi částicí tekutiny a částicemi stěny, normálovým vektorem.

Z těchto výsledků vyplývají následující závěry. Varianta DBC je vhodná pro modelování vazkého proudění, naopak varianta BI je naprosto nevhodná. Pro simulace nevazkého proudění je lepší využívat BI formulaci okrajové podmínky. Jak již bylo několikrát uvedeno v práci, varianta BI je snadnější na implementaci pro zakřivené stěny a proto je výhodnější k řešení inženýrských problémů. Chceme-li tímto přístupem modelovat vazké proudění je nutné upravit formulaci BI, tak aby byla schopna interagovat v tečném směru. Jedním z možných řešení tohoto problému je vytvoření dodatečného členu, který by tuto interakci umožnil. Vytvářením tohoto členu se zabývá další část této kapitoly. Možná podoba tohoto členu byla námi navržena na základě představy Newtonova zákona viskozity. Dále byla srovnána formulace BI s dodatečným členem s formulací DBC na příkladu vodorovného pohybu částice tekutiny nad nekonečnou stěnou. S použitím našeho dodatečného členu, s fyzikální dynamickou viskozitou, v BI formulaci jsme dostali podobné výsledky jako u DBC formulace. Nastavení a škálování tohoto členu za účelem dosažení fyzikální mezní vrstvy bude námětem další práce.

Nakonec jsme aplikovali dodatečný člen varianty BI na úlohu proudění tekutiny v otevřeném kanále. Tento příklad jsme napočítali pro více variant váhy zmiňovaného členu. Výsledky jsme porovnali s formulací DBC, standardní BI formulací, experimentem z článku (Stanek, 2018) a teoreticky napočítaným profilem. Profily vytvořené pomocí metody SPH jsou si tvarem profilu podobné. Teoretický profil se tvarem přibližuje variantě SPH-DBC a variantě BI s koeficientem $w = 5$. Naopak experimentální rychlostní profil se tvarem od ostatních výrazně odlišuje. Tvaru a naškálování dodatečného členu v BI okrajové podmínce tak, aby korektně reprodukoval experimentální výsledky, se chceme věnovat v další práci.

Námi navržený přístup není jedinou možností jak rozšířit použití BI pro proudění vazké tekutiny. V další práci bychom chtěli otestovat i jiné varianty založené na analogii k mDBC variantě okrajových podmínek nebo ekvivalent stěnových funkcí pro metodu SPH.

Literatura

- BONALLO, Ross, 2015. *Post Processing Techniques for Smoothed Particle Hydrodynamics*. Dis. pr.
- CERCÓS PITA, Jose Luis, 2016. *A novel generalized diffusive SPH model: Theoretical analysis and 3D HPC implementation*. Dis. pr. Aeronauticos.
- COLAGROSSI, Andrea; DURANTE, Danilo; BONET AVALOS, Josep; SOUTO-IGLESIAS, Antonio, 2017. Discussion of Stokes' hypothesis through the smoothed particle hydrodynamics model. *Phys. Rev. E*. Roč. 96, s. 023101. Dostupné z DOI: 10.1103/PhysRevE.96.023101.
- CRESPO, A J C; GÓMEZ-GESTEIRA, M; DALRYMPLE, R A, 2007. *Boundary Conditions Generated by Dynamic Particles in SPH Methods*.
- ESPAÑOL, Pep; REVENGA, Mariano, 2003. Smoothed dissipative particle dynamics. *Phys. Rev. E*. Roč. 67, s. 026705. Dostupné z DOI: 10.1103/PhysRevE.67.026705.
- HALADA, Tomáš, 2022. *VLIV OKRAJOVÝCH PODMÍNEK V METODĚ SPH*. Praha.
- MARTINEC, Zdeněk, 2003. *Continuum mechanics*. Dostupné také z: <https://geomff.cuni.cz/vyuka/Martinec-ContinuumMechanics.pdf>.
- QUARTERONI, Alfio; SACCO, Riccardo; SALERI, Fausto, 2010. *Numerical mathematics*. Sv. 37. Springer Science & Business Media.
- SPH Kernels*, 2018. Dostupné také z: <https://pysph.readthedocs.io/en/latest/reference/kernels.html>.
- STANEK, Mathew J., 2018. Characterization of a Turbulent Boundary Layer in Open Channel Flow Using Particle Image Velocimetry. In: dostupné také z: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:53021328>.
- STRACHOTA, Pavel, 2023. *Matematické metody v dynamice tekutin*. Dostupné také z: <https://saint-paul.fjfi.cvut.cz/base/sites/default/files/MMDY/MMDY-main.pdf>.
- VILA, J. P., 1999. ON PARTICLE WEIGHTED METHODS AND SMOOTH PARTICLE HYDRODYNAMICS. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. Roč. 09, č. 02, s. 161–209. Dostupné z DOI: 10.1142/S0218202599000117.
- VIOLEAU, Damien, 2012. *Fluid mechanics and the SPH method: theory and applications*. Oxford University Press.
- WEILER, Marcel; KOSCHIER, Dan; BRAND, Magnus; BENDER, Jan, 2018. A Physically Consistent Implicit Viscosity Solver for SPH Fluids. *Computer Graphics Forum (Eurographics)*. Roč. 37, č. 2.