

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ
Fakulta Strojní
Ústav technické matematiky



Numerické řešení hypersonického proudění nevazké tekutiny

Diplomová práce

Bc. Tomáš Skořepa

Studijní program: Aplikované vědy ve strojním inženýrství
Specializace: Matematické modelování v technice
Vedoucí: Ing. Jiří Holman, Ph.D.

Praha, srpen 2023

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Skořepa** Jméno: **Tomáš** Osobní číslo: **487184**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**
Studijní program: **Aplikované vědy ve strojním inženýrství**
Specializace: **Matematické modelování v technice**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Numerické řešení hypersonického proudění nevazké tekutiny

Název diplomové práce anglicky:

Numerical solution of inviscid hypersonic flow

Pokyny pro vypracování:

Student se seznámí se základními rovnicemi popisující nevazké proudění a numerickými metodami jejich řešení. Pomocí vlastního software naprogramovaného v C++ provede numerické řešení ověřovací úlohy transonického proudění GAMM kanálem a poté numerické řešení hypersonického obtékání válce a profilu letadla X-43A.

Seznam doporučené literatury:

Kozel, K. a kol., Numerické řešení problémů proudění I, skripta ČVUT FS.
Batten, P., Leschziner, M. A., Goldberg, U. C., Average-State Jacobians and Implicit Methods for Compressible Viscous and Turbulent Flows, Journal of computational physics 137, 1997, 38-78.
Nishikawa, H., Kitamura, K., Very simple, carbuncle-free, boundary-layer-resolving, rotated-hybrid Riemann solvers, Journal of Computational Physics 227, 2008, 2560-2581.
Liou, M. S., A sequel to AUSM, Part II: AUSM+-up for all speeds, Journal of Computational Physics 214, 2006, 137-170.
Navó, A., Bergada, J., Aerodynamic Study of the NASA's X-43A Hypersonic Aircraft. Applied Sciences vol. 10, Issue 22, 2020.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

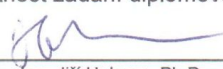
Ing. Jiří Holman, Ph.D. ústav technické matematiky FS

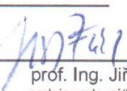
Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

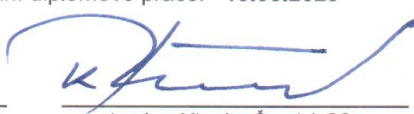
Datum zadání diplomové práce: **17.04.2023**

Termín odevzdání diplomové práce: **13.08.2023**

Platnost zadání diplomové práce: _____


Ing. Jiří Holman, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

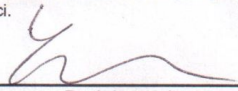

prof. Ing. Jiří Fůrst, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry


doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

24.5.2023
Datum převzetí zadání


Podpis studenta

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma: „Numerické řešení hypersonického proudění nevazké tekutiny“ vypracoval samostatně pod vedením Ing. Jiřího Holmana, Ph.D s použitím odborné literatury uvedené v seznamu použité literatury, jenž tvoří poslední kapitolu této práce.

V Praze, srpen 2023

.....
Bc. Tomáš Skořepa

Abstrakt

Tato práce se zabývá numerickým řešením dvourozměrného hypersonického proudění stlačitelné nevazké tekutiny. Práce začíná uvedením zákonů zachování a sestavením soustavy Eulerových rovnic. Dále jsou v této práci popsány metody pro výpočet nevazkého toku HLL, HLLC, Rotovaný hybridní Riemannův řešič HLL/HLLC a nakonec schéma AUSM+up. Pro ověření správnosti implementace dvourozměrného řešiče je řešeno transonické proudění v GAMM kanálu a poté hypersonické obtékání válce. Nakonec je řešeno hypersonické obtékání aerodynamického profilu letounu X-43A vybranými schémata s TVD rekonstrukcí.

Klíčová slova: Metoda konečných objemů, HLL, HLLC, Rotovaný hybridní Riemannův řešič, AUSM+up, hypersonické nevazké proudění, X-43A

Abstract

This thesis deals with numerical solution of two-dimensional hypersonic flow of compressible inviscid fluid. Thesis begins by introducing the conservation laws and formulating the system of Euler equations. Furthermore, this work describes methods for computing inviscid flow, such as HLL, HLLC, rotated hybrid Riemann solver HLL/HLLC, and finally the AUSM+up scheme. To verify the accuracy of the implementation of the two-dimensional solver, transonic flow in the GAMM channel and then hypersonic flow around a cylinder are solved. Finally, hypersonic flow around the aerodynamic profile of the X-43A aircraft is solved using selected schemes with TVD reconstruction.

Key words: Finite Volume Method, HLL, HLLC, Rotated hybrid Riemann solver, AUSM+up, hypersonic inviscid flow, X-43A

Poděkování

Rád bych poděkoval vedoucímu této diplomové práce Ing. Jiřímu Holmanovi, Ph.D za poskytnuté materiály, vstřícný přístup, odborné rady a konzultace při zpracování této práce. Dále bych rád poděkoval rodině za jejich podporu.

Seznam obrázků

3.1	HLL - grafické zobrazení aproximace řešení Riemannova problému	16
3.2	HLLC - grafické zobrazení aproximace řešení Riemannova problému	17
3.3	Souřadnice $\vec{\xi}$ a $\vec{\psi}$ pro podmínku stability	25
3.4	Fiktivní buňky	27
3.5	Periodická okrajová podmínka	29
4.1	GAMM kanál - schéma	32
4.2	GAMM kanál - síť 100x30	32
4.3	GAMM kanál - srovnání metod prvního řádu	33
4.4	GAMM kanál - Zierepova singularita - metody prvního řádu	33
4.5	GAMM kanál - srovnání metod druhého řádu	34
4.6	GAMM kanál - Zierepova singularita - metody druhého řádu	34
4.7	GAMM kanál - isočáry Machova čísla - AUSM+up	35
4.8	GAMM kanál - isočáry Machova čísla - HLL/HLLC	35
4.9	GAMM kanál - historie rezidua metod prvního řádu	36
4.10	GAMM kanál - historie rezidua metod druhého řádu	36
4.11	Obtékání válce - schéma	38
4.12	Obtékání válce - síť 45x50	38
4.13	Obtékání válce - isočáry hustoty Metody prvního řádu: (a) rotované HLL/HLLC (b) HLL (c) HLLC (d) AUSM+up Metody druhého řádu: (e) rotované HLL/HLLC (f) HLL (g) HLLC (h) AUSM+up	39
4.14	Obtékání válce - isočáry tlaku Metody prvního řádu: (a) rotované HLL/HLLC (b) HLL (c) HLLC (d) AUSM+up Metody druhého řádu: (e) rotované HLL/HLLC (f) HLL (g) HLLC (h) AUSM+up	40
4.15	Obtékání válce - isočáry Machova čísla Metody prvního řádu: (a) rotované HLL/HLLC (b) HLL (c) HLLC (d) AUSM+up Metody druhého řádu: (e) rotované HLL/HLLC (f) HLL (g) HLLC (h) AUSM+up	41
4.16	Obtékání válce - průběh hustoty na stěně - metody prvního řádu	42
4.17	Obtékání válce - průběh hustoty na stěně - metody druhého řádu	42
4.18	Obtékání válce - historie rezidua metod druhého řádu	43
4.19	X-43A - geometrie profilu	44
4.20	X-43A - schéma	45

4.21	X-43A - rozložení Machova čísla - AUSM+up	45
4.22	X-43A - rozložení Machova čísla - HLL/HLLC	46
4.23	X-43A - rozložení Machova čísla - laminární proudění - HLL/HLLC [21] . .	46
4.24	X-43A - isočáry Machova čísla - HLL/HLLC	47
4.25	X-43A - isočáry Machova čísla - AUSM+up	47
4.26	X-43A - isočáry hustoty - HLL/HLLC	48
4.27	X-43A - isočáry hustoty - AUSM+up	48
4.28	X-43A - isočáry tlaku - HLL/HLLC	49
4.29	X-43A - isočáry tlaku - AUSM+up	49
4.30	X-43A - průběh tlakového koeficientu na aerodynamickém profilu	50

Obsah

1	Úvod	4
2	Rovnice dynamiky tekutin	6
2.1	Zákony zachování	6
2.1.1	Zákon zachování hmotnosti	7
2.1.2	Zákon zachování hybnosti	8
2.1.3	Zákon zachování energie	8
2.2	Soustava Eulerových rovnic ve 2D	9
2.3	Konstitutivní vztahy	10
2.4	Počáteční a okrajové podmínky	11
2.4.1	Počáteční podmínky	11
2.4.2	Okrajové podmínky	11
2.4.3	Okrajové podmínky pro soustavu Eulerových rovnic	12
3	Numerické metody pro řešení proudění stlačitelné nevazké tekutiny	13
3.1	Metoda konečných objemů pro soustavu Eulerových rovnic ve 2D	14
3.2	Schéma HLL	15
3.3	Schéma HLLC	17
3.4	Rotované hybridní schéma HLL/HLLC	19
3.5	Schéma AUSM+up	21
3.6	Časová diskretizace	24
3.6.1	Eulerova metoda časové integrace	24
3.6.2	Runge-Kuttovy metody	25
3.7	Numerická realizace okrajových podmínek	26
3.7.1	Koncept fiktivních buněk	26
3.7.2	Okrajové podmínky na supersonickém vstupu	26
3.7.3	Okrajové podmínky na výstupu	28
3.7.4	Okrajové podmínky na pevné stěně	28
3.7.5	Periodická okrajová podmínka	28
3.8	Numerické metody vyššího řádu přesnosti	29
3.8.1	TVD rekonstrukce	29
4	Numerické řešení proudění nevazké tekutiny	31
4.1	GAMM kanál	31
4.2	Hypersonické obtékání válce	37
4.3	Hypersonické obtékání profilu letadla X-43A	43
5	Závěr	52

OBSAH

viii

Literatura

55

Seznam použitých symbolů

Malá písmena

- a Lokální rychlost zvuku [ms^{-1}].
- c_p Měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku [$\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$].
- cp Tlakový koeficient.
- c_v Měrná tepelná kapacita při konstantním objemu [$\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$].
- d Průměr [m].
- f_a Škálovací faktor AUSM+up schématu.
- f_i Složky vektoru tíhových sil \vec{f} [N].
- e Hustota energie, $e = \rho E$ [Jm^{-3}].
- h Měrná entalpie [Jkg^{-1}].
- \dot{m} Hmotnostní tok [kgms^{-1}].
- n_j Složky vektoru vnější jednotkové normály $\vec{n} = [n_x, n_y, n_z]^T$.
- p Tlak [Pa].
- q Rychlost ve směru normály [ms^{-1}].
- q_i Složky vektoru tepelného toku \vec{q} [Wm^{-2}].
- r Měrná plynová konstanta [$\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$].
- t Čas [s].
- u_j Složky vektoru rychlosti $\vec{u} = [u, v]^T$ [ms^{-1}].
- x_j Kartézské souřadnice x, y [m].
- z Výška [m].

Velká písmena

- D Výpočetní obast.
- D_i Buňky výpočetní sítě.
- E Celková energie [J].
- \hat{F} Vektor numerického nevazkého toku.
- F Vektor nevazkého toku ve směru x .
- G Vektor nevazkého toku ve směru y .
- H Entalpie [Jkg^{-1}].
- K Počet buněk.
- K_p, K_u Konstanty AUSM+up schématu.
- J Bilancovaná veličina.
- M Machovo číslo.
- M_o Referenční Machovo číslo AUSM+up schématu.
- P Hustota produkce veličiny.
- \hat{P} Tlaková část numerického toku AUSM+up.
- R Poloměr [m].
- Rez Reziduum.
- S_L, S_R, S_m Vlnové rychlosti v HLLC schématu.
- T Termodynamická teplota [K].
- U Vektor primitivních proměnných.
- V Kontrolní objem.
- ∂V Hranice kontrolního objemu.
- W Vektor neznámých konzervativních proměnných.

Řecká písmena

- α Úhel náběhu [$^\circ$].
 α_1, α_2 Koeficienty lineární kombinace Rotovaného hybridního Riemannova řešiče.
 β Konstanta AUSM+up schématu.
 Γ Hranice výpočetní oblasti.
 δ_{ij} Kroneckerovo delta - jednotková matice, pro $i = j$ $\delta_{ij} = 1$, pro $i \neq j$ $\delta_{ij} = 0$.
 ϵ Konstanta Rotovaného hybridního schématu.
 κ Poissonova konstanta $\kappa = c_p/c_v$.
 λ Součinitel teplotní vodivosti [$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$].
 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ Vlastní čísla Jakobiánu.
 ξ Pomocná souřadnice ve směru x [m].
 ρ Hustota [kgm^{-3}].
 σ_{ij} Složky tenzoru napětí [Nm^{-2}].
 σ Konstanta AUSM+up schématu.
 τ_{ij} Složky tenzoru vazkých napětí [Nm^{-2}].
 ψ Pomocná souřadnice ve směru y [m].
 Ω Výpočetní oblast.
 $\delta\vec{q}$ Vektor rozdílů rychlostí.
 ΔS_k Délka hranice buňky [m].
 Δt Časový krok [s].
 $\vec{\Delta}$ Dopředná diference.
 $\bar{\Delta}$ Zpětná diference.

Zkratky

- AUSM Advection upstream splitting method
 AUSM+up Advection upstream splitting method pro všechny rychlosti
 MKO Metoda konečných objemů
 MKP Metoda konečných prvků
 MKD Metoda konečných diferencí
 TVD Total variation diminishing
 CFL Courant–Friedrichs–Lewy číslo
 HLL Harten-Lax-van Leer
 HLLC Harten-Lax-van Leer-Contact
 HXRV Hyper-X Research Vehicle
 HLL/HLLC Hybridní rotovaný Riemannův řešič HLL/HLLC

Kapitola 1

Úvod

Hypersonické proudění je oblastí výzkumu, která získává stále větší pozornost v souvislosti s rozvojem letecké a kosmické technologie. Jedná se o proudění, při kterém rychlost tekutiny dosahuje více než pětinasobku rychlosti zvuku. Jelikož podmínky hypersonického proudění zahrnují obrovské množství kinetické energie a má extrémní podmínky - vysoká teplota, nízká hustota a nízký tlak proudící tekutiny, je obtížné a nákladné tyto podmínky napodobit v experimentálních zařízeních. Z toho důvodu je velmi populární využití numerické simulace proudění stlačitelné tekutiny pro snížení počtu experimentů a urychlení procesu návrhu a vývoje hypersonických letadel, atmosférických návratových modulů, kosmických lodí a hypersonických zbraní. Hypersonický režim proudění obvykle vede ke složitému proudovému poli, které může obsahovat interakce rázových vln, kontaktní vlny oddělující rozsáhlé podzvukové a nadzvukové oblasti a další složité struktury proudového pole. Pro přesné zachycení všech těchto prvků proudového pole je nutné použít vhodné numerické metody. Jedním z klíčových prvků je numerické schéma, které se používá k diskretizaci fyzikálních toků matematického modelu.

Cílem této práce je vyvinout řešič rovinného proudění nevazké tekutiny, který bude aplikován na úlohu hypersonického obtékání válce a na úlohu hypersonického obtékání profilu letounu X-43A. Dalším cílem je srovnání numerických metod pro řešení hypersonického proudění nevazké tekutiny.

Struktura diplomové práce je přizpůsobena cílům diplomové práce. Ve druhé kapitole je definován základní matematický model proudící stlačitelné nevazké tekutiny, jsou tedy představeny zákony zachování, ze kterých je sestavena soustava Eulerových rovnic a následně je soustava uzavřena konstitutivním vztahem. Tomuto následuje uvedení počátečních a okrajových podmínek použitých v této práci.

V další části je odvozena metoda konečných objemů pro soustavu Eulerových rovnic pro rovinné proudění stlačitelné nevazké tekutiny. Následuje uvedení jednotlivých metod aproximujících nevazký tok hranicí výpočetní buňky. Jsou zde uvedeny metody založené

na přibližném řešení Riemannova problému, metoda založená na rozložení normálového vektoru hranice do dvou směrů ve kterých se počítají dva toky, nebo na tzv. rozdělení toku na konvektivní a tlakovou část. Dále jsou zde uvedeny metody pro časovou diskretizaci a numerická implementace okrajových podmínek. Tato kapitola končí uvedením metod vyššího řádu přesnosti.

Ve čtvrté kapitole jsou prezentovány výsledky vypočtené pomocí vlastního výpočetního programu napsaného v programovacím jazyce C++. Je zde řešeno transonické proudění v GAMM kanálu, hypersonické obtékání válce a na závěr úloha hypersonického obtékání profilu hypersonického letounu X-43A.

Diplomová práce končí kapitolou, která se věnuje závěrečnému zhodnocení.

Kapitola 2

Rovnice dynamiky tekutin

Tato kapitola se zabývá modelem proudění nevazké stlačitelné tekutiny. Začíná představením základních zákonů zachování, kde je vysloveno mnoho důležitých předpokladů. Pokračuje sestavením soustavy Eulerových rovnic pomocí zákonů zachování. Tento systém je uzavřen v následující podkapitole konstitutivním vztahem. Dále jsou v této kapitole uvedeny počáteční a okrajové podmínky pro Eulerovy rovnice.

2.1 Zákony zachování

Základem matematického modelu proudění nevazké tekutiny jsou zákony zachování určitých veličin. Tyto zákony budou konkrétně představeny v následujících podkapitolách. Nyní je však nutné uvést předpoklady, které umožňují následné myšlenkové pochody.

Budu předpokládat, že tekutina, kterou se v této práci budu zabývat, se chová jako spojité prostředí (kontinuum) a zanedbávám tedy veškerou částicovou strukturu. Tento předpoklad lze zdůvodnit tím, že velikostní měřítko řešených úloh v této práci jsou řádově větší než střední volná dráha molekul dané tekutiny, což umožňuje hledat jednotlivé atributy proudění dané tekutiny jako spojité funkce v čase a prostoru. Dále je řešená tekutina stlačitelná, jde tedy o proudění plynu, v této práci především vzduchu. Právě pro vzduch při atmosférických podmínkách jsou tyto předpoklady splněny. Posledním vysloveným předpokladem je nevazkost řešené tekutiny, a tedy zanedbání vazkých a difuzních efektů. Tento předpoklad bude aplikován na jednotlivé zákony zachování pro vazkou tekutinu, ze kterých nakonec budou odvozeny zákony zachování pro nevazkou tekutinu. Tyto zákony zachování jsou odvozeny na základě Eulerovského popisu pohybu částice tekutiny, kdy je vytyčen kontrolní objem V s hranicí ∂V , která je uzavřená a jednoduše souvislá. Proudění je popisováno v pevně zvoleném souřadnicovém systému.

Zákony zachování při použití tohoto popisu potom lze psát jako bilance veličin na vytyčeném kontrolním objemu V [1]. Lze tedy psát obecnou bilanční rovnici složenou

z časové změny bilancované veličiny v kontrolním objemu V , toku veličiny přes hranici kontrolního objemu ∂V a produkce dané veličiny v kontrolním objemu pomocí Einsteinovy sumační konvence jako

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V J dV = - \oiint_{\partial V} F_j(J) n_j dS + \iiint_V P(J) dV, \quad (2.1)$$

kde J je bilancovaná veličina, $F_j(J)$ je složka vektoru hustoty toku veličiny, $P(J)$ je hustota produkce veličiny a n_j je j -tá složka jednotkové vnější normály. U prvního členu rovnice (2.1) lze změnit pořadí integrálu a časové derivace díky neměnnosti objemu V v čase a dále lze díky vlastnostem hranice ∂V převést plošný integrál pomocí Gaussovy-Ostrogradského věty na objemový integrál. Po úpravách vypadá bilanční rovnice následovně

$$\iiint_V \left(\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial F_j(J)}{\partial x_j} \right) dV = \iiint_V P(J) dV. \quad (2.2)$$

Z tohoto tvaru lze rovnici přepsat do obecného zákona zachování v diferenciálním tvaru

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial F_j(J)}{\partial x_j} = P(J). \quad (2.3)$$

Obecné zákony zachování hmotnosti, hybnosti a energie pro proudění vazké stlačitelné tekutiny lze nalézt v [1]. V dalších podkapitolách jsou zákony zachování zjednodušeny pro proudění nevazké tekutiny.

2.1.1 Zákon zachování hmotnosti

Prvním ze tří uvedených zákonů zachování je zákon zachování hmotnosti, kde zachovávanou veličinou je hmotnost vztážená na jednotku objemu, tedy hustota ρ . Hustota toku veličiny ρ hranicí kontrolního objemu je $F_j(\rho) = \rho u_j$, kde u_j je j -tá složka vektoru rychlosti v kontrolním objemu. Jelikož hmota v kontrolním objemu nesmí vznikat ani zanikat, hustota produkce veličiny v případě homogenního prostředí je rovna nule, tzn. $P(\rho) = 0$. Po dosazení těchto výrazů do rovnice obecné bilance (2.1) dostávám

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = - \oiint_{\partial V} \rho u_j n_j dS. \quad (2.4)$$

V diferenciálním tvaru rovnice kontinuity vypadá

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0, \quad (2.5)$$

což je zákon zachování hmotnosti.

2.1.2 Zákon zachování hybnosti

Dalším zákonem je zákon zachování hybnosti, kde zachovávanou veličinou je hybnost vztažená na jednotku objemu ρu_i . Hustota toku veličiny ρu_i hranicí kontrolního objemu je

$$F_j(\rho u_i) = [(\rho u_i)u_j - \sigma_{ij}], \quad (2.6)$$

kde (ρu_i) je konvektivní část hustoty toku hybnosti a σ_{ij} je hustota molekulárního toku hybnosti. Na rozdíl od zákona zachování hmotnosti může hybnost v konvektivním toku vznikat i zanikat. To je způsobeno vnějšími objemovými silami. Produkci hybnosti lze tedy napsat jako $P(\rho u_i) = \rho f_j$. Po dosazení těchto výrazů do rovnice obecné bilance (2.1) dostanu

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho u_i dV = - \oiint_V [(\rho u_i)u_j - \sigma_{ij}] n_j dS + \iiint_V \rho f_j dV. \quad (2.7)$$

Pokud tuto rovnici převedu do diferenciálního tvaru, dostávám

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i, \quad (2.8)$$

což je druhý Newtonův zákon pro spojitě prostředí, tzv. Cauchyho rovnice. Od této chvíle se budu zabývat pouze Newtonskými tekutinami, které se řídí Newtonovým zákonem viskozity [2]. Rozložím tenzor napětí σ_{ij} na jeho tlakovou část a tenzor vazkých napětí tak, že

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad (2.9)$$

kde δ_{ij} je Kroneckerovo delta. Pokud nyní dosadím tento vztah do rovnice (2.8) a zanedbám tenzor τ_{ij} , který je závislý na dynamické viskozitě, která je pro nevazkou tekutinu rovna nule, dostávám

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho f_j, \quad (2.10)$$

což je zákon zachování hybnosti pro stlačitelnou nevazkou tekutinu v diferenciálním tvaru, tzv. Eulerova rovnice.

2.1.3 Zákon zachování energie

Posledním uvedeným zákonem je zákon zachování energie, zde je zachována energie vztažená na jednotku objemu ρE , kde energie E je definována jako

$$E = U + \frac{u_j u_j}{2}. \quad (2.11)$$

Hustota toku veličiny ρE hranicí kontrolního objemu je

$$F_j(\rho E) = [(\rho E)u_j - u_i\sigma_{ij} + q_j], \quad (2.12)$$

kde $(\rho E)u_j$ je konvektivní část hustoty toku energie, $u_i\sigma_{ij}$ je část hustoty toku energie vyvolána povrchovými silami a q_j je tok tepla přes hranici kontrolního objemu. Stejně jako u zákona zachování hybnosti může energie v kontrolním objemu vznikat i zanikat působením vnějších objemových sil. Produkci energie lze tedy napsat jako $P(\rho E) = \rho f_j u_j$. Všechny tyto výrazy dosadím do rovnice (2.1)

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho E dV = - \oiint_{\partial V} [(\rho E)u_j - u_i\sigma_{ij} + q_j] n_j dS + \iiint_V \rho f_i u_j dV. \quad (2.13)$$

Dále rovnici převedu do diferenciálního tvaru a zanedbám tenzor vazkých napětí. Za q_j dosadím z Fourierova zákona $q_j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}$, lze však dokázat, že tento vztah je závislý na dynamické viskozitě [3] a je tedy také zanedbán. Po těchto úpravách lze zákon zachování energie zapsat následovně

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [(\rho E + p)u_j] = \rho f_i u_j. \quad (2.14)$$

Rovnice se nazývá zákon zachování energie pro nevazkou stlačitelnou tekutinu.

2.2 Soustava Eulerových rovnic ve 2D

Spojením zákona zachování hmotnosti, hybnosti a energie (rovnice 2.5, 2.8, 2.14), vznikne dle [1] obecná soustava Eulerových rovnic. V této práci je uvažován pouze jejich dvou-
rozměrný tvar, kde $\vec{x} = [x, y]$ a vektor rychlosti $\vec{u} = [u, v]$. S použitím tohoto značení lze přepsat obecné Eulerovy rovnice do jejich rovinného tvaru

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial[(\rho E + p)u]}{\partial x} + \frac{\partial[(\rho E + p)v]}{\partial y} = 0. \quad (2.18)$$

Tuto soustavu rovnic lze zapsat i ve vektorovém tvaru, který je úspornější na zápis a užitečnější pro pozdější numerické řešení následovně

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0, \quad (2.19)$$

$$W = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad F(W) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho E + p)u \end{bmatrix}, \quad G(W) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho E + p)v \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

kde W je vektor konzervativních veličin, $F(W)$ a $G(W)$ jsou nevazké fyzikální toky. Takto zapsaný systém rovnic je nutno uzavřít ještě jednou rovnicí, protože se jedná o soustavu čtyř rovnic pro pět neznámých, kterými jsou hustota, dvě složky vektoru rychlosti, energie a tlak. Takto definovaný systém je vhodný pro řešení úloh, u kterých nejsou důležité vazké efekty, například se takto dá řešit rozložení tlaku na stěně aerodynamického profilu, jestliže je tento profil obtékán bez odtržení proudu. Naopak tímto systémem nelze řešit odpor aerodynamického profilu, mezní vrstva, odtržení proudu atd.

2.3 Konstitutivní vztahy

Doplňujícím konstitutivním vztahem pro uzavření systému rovnic (2.19) je stavová rovnice udávající vztah mezi tlakem, hustotou a termodynamickou teplotou. V této práci bude uvažován model ideálního plynu, což je fyzikální model popsáný v [4] s následujícími vlastnostmi:

- částice mezi sebou neinteragují kromě srážek
- všechny srážky jsou dokonalé pružné
- rozměry částic jsou zanedbatelné vzhledem k jejich vzdálenostem.

Z těchto vlastností modelu ideálního plynu vyplývá, že

- ideální plyn je dokonale stlačitelný a nedochází v něm k tření
- vnitřní energie se rovná pouze kinetické energii plynu
- kinetická energie plynu je závislá pouze na teplotě
- platí Mayerův vztah

$$c_p - c_v = r = konst., \quad (2.21)$$

kde c_v je měrná tepelná kapacita při konstantním objemu a c_p při konstantním tlaku, dále r je měrná plynová konstanta, která je pro vzduch rovna přibližně $r = 287.1 \text{ Jkg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

- Poissonova konstanta je definována

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \textit{konst.}, \quad (2.22)$$

pro vzduch má stejnou hodnotu jako pro dvouatomový plyn $\kappa = 1.4$. Vztah pro tlak se tedy dá zapsat jako

$$p = \rho r T. \quad (2.23)$$

Rovnice se nazývá stavová rovnice ideálního plynu. Lze ji přepsat do následujícího tvaru pro tlak

$$p = (\kappa - 1) \left[\rho E - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right]. \quad (2.24)$$

Toto je tvar stavové rovnice pro ideální plyn, který bude dále používán v této práci.

2.4 Počáteční a okrajové podmínky

Soustava Eulerových rovnic v této práci je řešena na omezené oblasti $D \subset R^2$ pro $t > 0$. Proto je nutno doplnit vhodné počáteční a okrajové podmínky. V této kapitole čerpám z [5].

2.4.1 Počáteční podmínky

Pro konkrétní výpočet za použití Eulerových rovnic (2.19) je nutno předepsat počáteční stav proudového pole, tedy hodnoty primitivních proměnných pro okamžik kdy $t = 0$

$$\rho(\vec{x}, 0) = \rho_{pp}(\vec{x}), \quad \vec{u}(\vec{x}, 0) = \vec{u}_{pp}(\vec{x}), \quad E(\vec{x}, 0) = E_{pp}(\vec{x}), \quad (2.25)$$

kde $\rho_{pp}(\vec{x})$, $\vec{u}_{pp}(\vec{x})$ a $E_{pp}(\vec{x})$ jsou dané počáteční hodnoty neznámých veličin.

2.4.2 Okrajové podmínky

Jakákoliv numerická simulace může uvažovat pouze část skutečné fyzické oblasti. Zkrácení oblasti vede k umělým hranicím, kde se musí předepisovat hodnoty určitých fyzikálních veličin. Dále také stěny, které jsou vystaveny proudění, představují přirozené hranice fyzické oblasti. Okrajové podmínky je nutno volit vhodně, nesprávná volba může vést k nepřesné simulaci skutečnosti. Použité okrajové podmínky v této práci jsou:

- vstup
podmínka je zavedena v části hranice, kde vstupuje proud do výpočetní oblasti
- výstup
podmínka se používá v té části hranice, kterou proud opouští výpočetní oblast
- stěna
podmínka je zavedena v místech, kde je výpočetní oblast ohraničena pevnou stěnou.

2.4.3 Okrajové podmínky pro soustavu Eulerových rovnic

Například dle [6] je při předepisování podmínek na vstupu a výstupu pro soustavu Eulerových rovnic nutno rozlišovat, zda normálová rychlost nabíhajícího proudu, či výstupního proudu je větší či menší než lokální rychlost zvuku a .

- Vstupní okrajová podmínka:
Pro $\vec{u} \cdot \vec{n} < a$ zadat tři veličiny, například ρ, u, v
Pro $\vec{u} \cdot \vec{n} > a$ zadat všechny 4 veličiny ρ, u, v, p .
- Výstupní okrajová podmínka:
Pro $\vec{u} \cdot \vec{n} < a$ zadat jednu veličinu, například p .
Pro $\vec{u} \cdot \vec{n} > a$ nezadat žádnou veličinu.
- Pevná stěna:
Pro nevázkou tekutinu platí, že proud stěnou neprochází a vektor rychlosti je s ní v její blízkosti rovnoběžný. Z toho vyplývá

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0. \quad (2.26)$$

Kapitola 3

Numerické metody pro řešení proudění stlačitelné nevazké tekutiny

Soustava Eulerových rovnic představená v předchozí kapitole není řešitelná žádným známým analytickým aparátem. Proto se užívají numerické metody na nalezení přibližného řešení daného problému. K nejpoužívanějším metodám řešící proudění stlačitelné nevazké tekutiny patří:

- Metoda konečných diferencí (MKD)

Metoda konečných diferencí je založena na tom, že aproximuje diferenciální rovnice pouze v bodech a parciální diferenciální rovnice v těchto bodech se nahradí rovnicemi algebraickými. Zmíněné body jsou uzly sítě pokrývající výpočetní oblast, proto je tato numerická metoda známa jako metoda sítí. Tato metoda je jednou z nejstarších metod [1].

- Metoda konečných objemů (MKO)

Nejčastěji používanou metodou pro numerické řešení proudění tekutin je metoda konečných objemů. Tato metoda se zaměřuje na diskretizaci výpočetní oblasti na konečný počet buněk, které představují diskrétní objemy v prostoru. Každá buňka je považována za samostatný objekt a její vlastnosti, jako jsou hustota, tlak, rychlost a další, jsou definovány v těžišti buňky. Pro každou buňku se poté vypočítají příspěvky od sousedních buněk v souladu se zákony zachování hmotnosti, hybnosti a energie. Tyto příspěvky jsou aproximovány pomocí numerických schémat. Metoda konečných objemů je vhodná pro modelování různých typů proudění tekutin, včetně stlačitelných a nevazkých tekutin, protože je schopna zachytit šíření nespojivosti [1]. Tato metoda bude více popsána v dalších kapitolách.

- Metoda konečných prvků (MKP)

Princip metody konečných prvků spočívá v rozdělení oblasti, ve kterém se proudění tekutiny řeší, na malé elementy nazývané konečné prvky, nejčastěji trojúhelníky. Musí být tedy vytvořena nestrukturovaná síť. Každý konečný prvek je obvykle definován svými vrcholy, které jsou propojeny pomocí uzlových spojů. Zákony zachování hmotnosti, hybnosti a energie jsou integrovány přes tyto konečné prvky, což umožňuje získat diskrétní rovnice pro každý prvek [1]. Vzniklou soustavu rovnic je nutno vyřešit vhodnou metodou [7].

3.1 Metoda konečných objemů pro soustavu Eulerových rovnic ve 2D

Dvourozměrné proudění nevazké stlačitelné tekutiny je popsáno systémem Eulerových rovnic ve tvaru

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0, \quad (3.1)$$

kde

$$W = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad F(W) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho E + p)u \end{bmatrix}, \quad G(W) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho E + p)v \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Soustava rovnic je uzavřena stavovou rovnicí ideálního plynu

$$p = (\kappa - 1) \left[\rho E - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right]. \quad (3.3)$$

Postup pro odvození metody konečných objemů ve 2D je převzat z [5]. Mám výpočetní oblast $O \in R^2$, tu rozdělím na jednotlivé buňky D_i . Buňky jsou navzájem disjunktní a sjednocení všech buňek pokrývá celou výpočetní obast. Nyní intergruji soustavu rovnic přes obecnou buňku sítě D_i

$$\iint_{D_i} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) dx dy + \iint_{D_i} \left[\frac{\partial F(W)}{\partial x} + \frac{\partial G(W)}{\partial y} \right] dx dy = 0. \quad (3.4)$$

U prvního integrálu v rovnici (3.4) zaměním pořadí derivace a integrování, na druhý integrál aplikuji Greenovu větu

$$\frac{d}{dt} \iint_{D_i} W dx dy + \oint_{\partial D_i} [F(W)n_x + G(W)n_y] dS = 0, \quad (3.5)$$

kde n_x a n_y jsou složky vnější jednotkové normály. Nyní označím

$$|D_i| = \iint_{D_i} dx dy \quad (3.6)$$

a

$$\hat{F}(W, \vec{n}) = F(W)n_x + G(W)n_y = \begin{bmatrix} \rho q \\ \rho u q + p n_x \\ \rho v q + p n_y \\ (\rho E + p)q \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

kde $q = un_x + vn_y$ je rychlost ve směru normály. Na první integrál v rovnici (3.5) aplikuji větu o střední hodnotě a po úpravě s použitím vztahu (3.6) a (3.7) dostanu

$$\frac{dW_i(t)}{dt} = -\frac{1}{D_i} \oint_{\partial D_i} \hat{F}(W, \vec{n}) dS. \quad (3.8)$$

V rovnici (3.8) nahradím krřivkový integrál přes hranici buňky D_i sumou přes všechny části hranice buňky D_i ¹ a dostávám obecný semidisktrétní tvar metody konečných objemů pro soustavu Eulerových rovnic

$$\frac{dW_i(t)}{dt} = -\frac{1}{D_i} \sum_{k=1}^{k=4} \hat{F}_k(W, \vec{n}) \Delta S_k = Rez(W)_i, \quad (3.9)$$

kde ΔS_k je velikost příslušných stran, které tvoří hranici buňky D_i .

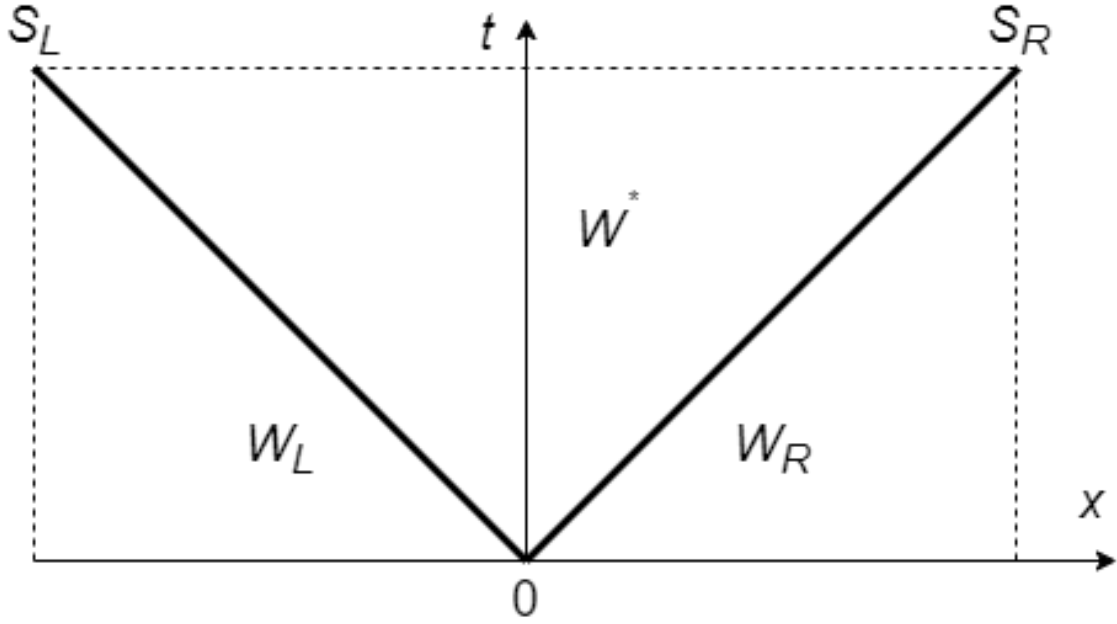
3.2 Schéma HLL

Pro výpočet členu $\hat{F}_k(W, \vec{n})$, představující nevazký tok k-tou stěnou hranice buňky D_i , je nutno zvolit vhodné schéma. Prvním takovým schématem bylo v této práci zvoleno schéma HLL, které bylo odvozeno Hartenem, Laxem a van Leerem [8]. Schéma bylo navrženo na základě zjednodušení Riemannova problému pro soustavu rovnic pro mělkou vodu [3]. Podrobné odvození schématu HLL lze nalézt v [9]. Nevazký tok stěnou, která představuje rozhraní mezi dvěma sousedními buňkami, závisí na stavu konzervativních veličin vlevo (index L) a vpravo (index R) od hranice. Nevazký tok pomocí schématu HLL lze aproximovat jako:

$$\hat{F}_k(W, \vec{n}) \approx \hat{F}_k^{HLL}(W_L, W_R, \vec{n}) = \begin{cases} F(W_L) & \text{pro } S_L > 0 \\ F(W^*) & \text{pro } S_L \leq 0 \leq S_R \\ F(W_R) & \text{pro } S_R < 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

¹V této práci jsou uvažovány pouze čtyřúhelníkové buňky.

Schéma uvažuje dvě vlny s největší a nejmenší rychlostí šíření, které rozdělí oblast na tři podoblasti, ve kterých považuje veličiny za konstantní viz obrázek 3.1.



Obrázek 3.1: HLL - grafické zobrazení aproximace řešení Riemannova problému

Stavy vlevo a vpravo jsou definovány

$$F(W_L) = \begin{bmatrix} \rho_L q_L \\ \rho_L u_L q_L + p_L n_x \\ \rho_L v_L q_L + p_L n_y \\ (e_L + p_L) q_L \end{bmatrix}, \quad F(W_R) = \begin{bmatrix} \rho_R q_R \\ \rho_R u_R q_R + p_R n_x \\ \rho_R v_R q_R + p_R n_y \\ (e_R + p_R) q_R \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

kde $e = \rho E$ a stav mezi vlnami je definován

$$F(W^*) = \frac{S_R F_L - S_L F_R + S_R S_L (W_R - W_L)}{S_R - S_L}. \quad (3.12)$$

Vlnové rychlosti se podle Einfeldta [10] vypočítají

$$S_L = \min [q_R - a_R, q_L - a_L], \quad (3.13)$$

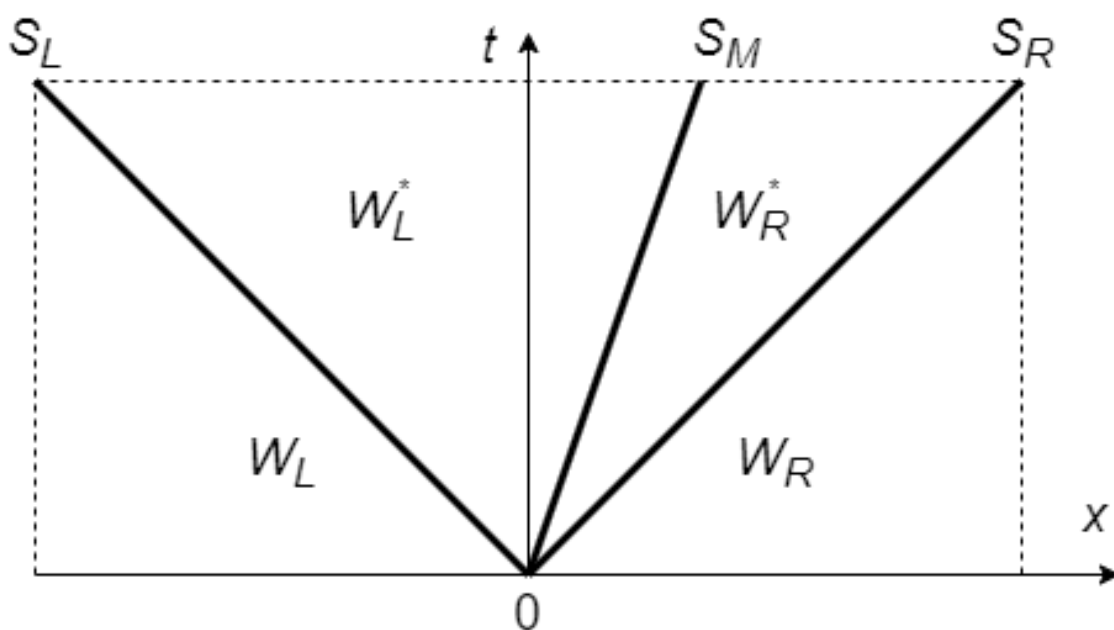
$$S_R = \max [q_R + a_R, q_L + a_L]. \quad (3.14)$$

Hlavním nedostatkem schématu HLL je nepřesné zachycení příčných vln a kontaktních nespojitostí [11]. HLL schéma uvažuje pouze dvě vlnové rychlosti odpovídající nejmenšímu a největšímu vlastnímu číslu Jakobiánu vzniklého zápisem kvazilineárního tvaru Eulerových rovnic. Další vlnové rychlosti (pro rovinné proudění odpovídající vlastním číslům $\lambda_2 = \lambda_3 = q$ [6]) nejsou ve výpočtech toku zohledněny. Schéma HLL má i své výhody,

správně zachycuje izolované rázové vlny, zachovává pozitivitu a je robustní, avšak za cenu velké numerické vazkosti [9].

3.3 Schéma HLLC

Dalším užívaným schématem v této práci je schéma HLLC, což je vylepšení schématu HLL, které je přímo odvozeno pro soustavu Eulerových rovnic [9]. Liší se v tom, že uvažuje existenci prostřední, kontaktní vlny (C - Contact). HLLC metoda tedy uvažuje tři vlny a zohledňuje ve výpočtech všechna vlastní čísla. Tvar HLLC schématu byl převzat z [5].



Obrázek 3.2: HLLC - grafické zobrazení aproximace řešení Riemannova problému

Metoda HLLC nevazký tok $\hat{F}_k(W, \vec{n})$ aproximuje následovně

$$\hat{F}_k(W, \vec{n}) \approx \hat{F}_k^{HLLC}(W_L, W_R, \vec{n}) = \begin{cases} F(W_L) & \text{pro } S_L > 0 \\ F(W_L^*) & \text{pro } S_L \geq 0 < S_M \\ F(W_R^*) & \text{pro } S_M \leq 0 \leq S_R \\ F(W_R) & \text{pro } S_R < 0 \end{cases}, \quad (3.15)$$

kde stavy vlevo a vpravo jsou definovány stejně jako u schématu HLL rovnicí (3.11) a prostřední stavy jsou určeny

$$F(W_L^*) = \begin{bmatrix} \rho_L^* S_M \\ (\rho u)_L^* S_M + p^* n_x \\ (\rho v)_L^* S_M + p^* n_y \\ (e_L^* + p^*) S_M \end{bmatrix}, \quad F(W_R^*) = \begin{bmatrix} \rho_R^* S_M \\ (\rho u)_R^* S_M + p^* n_x \\ (\rho v)_R^* S_M + p^* n_y \\ (e_R^* + p^*) S_M \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

$$W_L^* = \begin{bmatrix} \rho_L^* \\ (\rho u)_L^* \\ (\rho v)_L^* \\ e_L^* \end{bmatrix} = \frac{1}{S_L - S_M} \begin{bmatrix} (S_L - q_L) \rho_L \\ (S_L - q_L) (\rho u)_L + (p^* - p_L) n_x \\ (S_L - q_L) (\rho v)_L + (p^* - p_L) n_y \\ (S_L - q_L) e_L - p_L q_L + p^* S_M \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

$$W_R^* = \begin{bmatrix} \rho_R^* \\ (\rho u)_R^* \\ (\rho v)_R^* \\ e_R^* \end{bmatrix} = \frac{1}{S_R - S_M} \begin{bmatrix} (S_R - q_R) \rho_R \\ (S_R - q_R) (\rho u)_R + (p^* - p_R) n_x \\ (S_R - q_R) (\rho v)_R + (p^* - p_R) n_y \\ (S_R - q_R) e_R - p_R q_R + p^* S_M \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

tlak v prostředním stavu lze spočítat dvěma ekvivalentními způsoby

$$p^* = \rho_L (q_L - S_L) (q_L - S_M) + p_L = \rho_R (q_R - S_R) (q_R - S_M) + p_R. \quad (3.19)$$

Vlnová rychlost S_M se vypočte dle [12]

$$S_M = \frac{\rho_R q_R (S_R - q_R) - \rho_L q_L (S_L - q_L) + p_L - p_R}{\rho_R (S_R - q_R) - \rho_L (S_L - q_L)} \quad (3.20)$$

a vlnové rychlosti S_L a S_R jsou podle [13] definovány následovně:

$$S_L = \min [\lambda_1(W_L), \lambda_1(W^{Roe})] \quad (3.21)$$

$$S_R = \max [\lambda_m(W_R), \lambda_m(W^{Roe})], \quad (3.22)$$

kde $\lambda_1(W_L)$ je nejmenší a $\lambda_m(W_R)$ největší vlastní číslo jakobiánu $\partial \hat{F} / \partial W$, tedy

$$\lambda_1(W_L) = q_L - a_L \quad (3.23)$$

$$\lambda_m(W_R) = q_R + a_R \quad (3.24)$$

a $\lambda_1(W^{Roe})$ je nejmenší a $\lambda_m(W^{Roe})$ největší vlastní číslo Roeho matice [9]. Tato vlastní čísla jsou definována jako

$$\lambda_1(W^{Roe}) = \bar{q} - \bar{a}, \quad (3.25)$$

$$\lambda_m(W^{Roe}) = \bar{q} + \bar{a} \quad (3.26)$$

a dále

$$\bar{q} = \bar{u}n_x + \bar{v}n_y, \quad (3.27)$$

kde

$$\bar{u} = \frac{u_L + u_R R_\rho}{(1 + R_\rho)}, \quad \bar{v} = \frac{v_L + v_R R_\rho}{(1 + R_\rho)}, \quad (3.28)$$

$$\bar{a}^2 = (\kappa - 1) \left[\bar{H} - \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2) \right], \quad (3.29)$$

$$\bar{H} = \frac{H_L + H_R R_\rho}{(1 + R_\rho)} \quad (3.30)$$

a

$$R_\rho = \sqrt{\frac{\rho_R}{\rho_L}}, \quad (3.31)$$

kde H je entalpie a spočítá se jako

$$H = \frac{(e + p)}{\rho}. \quad (3.32)$$

Schéma HLLC je stejně jako HLL prvního řádu přesnosti [12]. Schéma HLLC dokáže správně zachytit rázové vlny, kontaktní nespojitosti i smykové vlny a navíc si zachovává pozitivitu hustoty i tlaku v případě kladných počátečních podmínek [5]. Nevýhodou HLLC metody je však náchylnost ke vzniku nestabilit v oblasti rázových vln [14].

3.4 Rotované hybridní schéma HLL/HLLC

Princip rotovaného hybridního numerického schématu je založen na rozkladu jednotkového normálového vektoru hranice na dva ortonormální vektory \vec{n}_1, \vec{n}_2 [11]

$$\vec{n} = \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2, \quad \alpha_1 = n \cdot n_1, \quad \alpha_2 = n \cdot n_2. \quad (3.33)$$

Ve směru každého vektoru se počítá různý numerický tok. Výsledný numerický tok je lineární kombinací toků v obou směrech

$$\hat{F}_k^{HLL/HLLC}(W_L, W_R, \vec{n}) = \alpha_1 \hat{F}_k^{HLL}(W_L, W_R, \vec{n}_1) + \alpha_2 \hat{F}_k^{HLLC}(W_L, W_R, \vec{n}_2). \quad (3.34)$$

Rotované hybridní schéma HLL/HLLC bylo převzato z [15]. Výběr schémat HLL a HLLC do Rotovaného schématu lze odůvodnit tak, že je potřeba metoda schopná správně zachytit rázové vlny a přesně vyřešit proudění v mezní vrstvě [16]. Mnohé numerické metody splňují pouze jeden z těchto požadavků, např. uvedené HLLC schéma přesně řeší smy-

kové vrstvy, ale je náchylné ke vzniku nestabilit v oblasti rázových vln, které mohou znehodnotit řešení. Tyto nestability se anglicky označují jako carbuncle phenomenon [14]. HLL je naopak velmi disipativní, takže nestability potlačuje. Do Rotovaného hybridního schématu je tedy vybrán jeden tok z obou skupin.

HLL je třístavové schéma (3.10), zatímco HLLC čtyřstavové (3.15). Výsledné schéma je tedy dvanáctistavové, ty lze rozdělit do tří skupin:

1. Proudění v obou směrech (\vec{n}_1, \vec{n}_2) je supersonické ve směru normály, tedy

$$S_L^{HLL} > 0 \text{ a } S_L^{HLLC} > 0. \quad (3.35)$$

Pro supersonické proudění mají HLL a HLLC stejný tvar a numerický tok je tedy nalevo od rozhraní

$$\hat{F}_k^{HLL/HLLC}(W_L, W_R, \vec{n}) = F(W_L). \quad (3.36)$$

2. Proudění v obou směrech je supersonické proti směru normály, tedy

$$S_R^{HLL} < 0 \text{ a } S_R^{HLLC} < 0. \quad (3.37)$$

Numerický tok se obdobně redukuje na tok napravo od rozhraní

$$\hat{F}_k^{HLL/HLLC}(W_L, W_R, \vec{n}) = F(W_R). \quad (3.38)$$

3. Ve všech zbývajících případech vztah pro výpočet toku nelze zjednodušit. Musí se tedy vypočítat oba toky a vypočítat jejich lineární kombinaci (3.34).

Pro výpočet nevazkého toku \hat{F}_k je nejprve nutné určit oba směry ve kterých se počítá numerický tok. Směr vektoru \vec{n}_1 je

$$\vec{n}_1 = \begin{cases} \frac{\delta \vec{q}}{\|\delta \vec{q}\|} & \text{pro } \|\Delta \vec{q}\| \geq \epsilon \\ \vec{n} & \text{jinak,} \end{cases} \quad (3.39)$$

kde $\|\delta \vec{q}\| = (\Delta u, \Delta v) = (u_R - u_L, v_R - v_L)$ a ϵ je malé číslo (v [11] je $\epsilon = 10^{-12}|U_{ref}|$). Mírně vylepšenou alternativou používanou v této práci je

$$\vec{n}_1 = \begin{cases} \frac{\delta \vec{q}}{\|\delta \vec{q}\|} & \text{pro } \|\Delta \vec{q}\| \geq \epsilon \\ \vec{n}_\perp & \text{jinak.} \end{cases} \quad (3.40)$$

Vektor \vec{n}_\perp je paralelní s rozhraním. Druhý vektor \vec{n}_2 je volen jako kolmý k \vec{n}_1 , přičemž

nesmí směřovat dovnitř buňky, tzn.

$$\vec{n}_2 \cdot \vec{n} \geq 0. \quad (3.41)$$

Druhá varianta výpočtu se tedy liší jen pokud je velikost rozdílu rychlosti menší než ϵ .

Pak platí

$$\alpha_1 = \vec{n} \cdot \vec{n}_1 = 0, \quad \alpha_2 = \vec{n} \cdot \vec{n}_2 = 1, \quad \vec{n}_2 = \vec{n}. \quad (3.42)$$

Tok se tak zjednoduší

$$\hat{F}^{HLL/HLLC} = \hat{F}^{HLLC}(\vec{n}_2) \quad (3.43)$$

a redukuje se tedy na přesnější numerický tok HLLC. Normála \vec{n}_2 se spočítá jako kolmá k normále \vec{n}_1

$$\vec{n}_2 = (-n_{1y}, n_{1x}). \quad (3.44)$$

Rotované hybridní schéma HLL/HLLC nevazký tok $\hat{F}_k(W, \vec{n})$ aproximuje následovně

$$\hat{F}_k(W, \vec{n}) \approx \hat{F}_k^{HLL/HLLC}(W_L, W_R, \vec{n}) = \begin{cases} F(W_L) & \text{pro } S_L^{HLL} > 0 \text{ a } S_L^{HLLC} > 0 \\ F(W_R) & \text{pro } S_R^{HLL} < 0 \text{ a } S_R^{HLLC} < 0 \\ \alpha_1 F^{HLL}(\vec{n}_1) + \alpha_2 F^{HLLC}(\vec{n}_2) & \text{jinak} \end{cases} \quad (3.45)$$

Rotované hybridní schéma HLL/HLLC přejímá vlastnosti HLLC schématu bez náchylnosti ke vzniku nestabilit v oblasti rázových vln [15]. Nevýhodou rotovaného schématu je jeho výpočetní náročnost, jelikož musí počítat dva toky zároveň.

3.5 Schéma AUSM+up

AUSM+up je rozšířením schémat AUSM (Advection Upstream Splitting Method). Rozšířené schéma bylo vyvinuto za účelem získat metodu, která je schopna počítat všechny rychlostní režimy [17]. Principem AUSM schémat je rozdělení nevazkého toku na konvektivní a tlakovou část. Konvektivní část toku je spojena s rychlostí advekce, zatímco tlaková část s rychlostí akustickou [18]. Numerický tok na hranici je definován jako

$$\hat{F}_k = F(W_L, W_R, \vec{n}). \quad (3.46)$$

Tok rozdělím na konvektivní a tlakovou část

$$F = F^{(e)} + P, \quad (3.47)$$

kde

$$F^{(c)} = \dot{m} \vec{\Psi}, P = \begin{bmatrix} 0 \\ pn_x \\ pn_y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

kde hmotnostní tok \dot{m} a vektor $\vec{\psi}$ jsou definovány jako

$$\dot{m} = \rho q, \vec{\Psi} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ e \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Numerický nevazký tok \hat{F}_k vyjádřím jako součet numerické konvektivní části toku $\hat{F}_k^{(c)}$ a numerického toku tlakové části \hat{P}_k

$$\hat{F}_k = \hat{F}_k^{(c)} + \hat{P}_k, \quad (3.50)$$

kde konvektivní numerický tok je dán vztahem

$$\hat{F}_k^{(c)} = \dot{m}_{1/2} \vec{\Psi}_{1/2}, \vec{\Psi}_{1/2} = \begin{cases} \vec{\Psi}_L & \text{pro } \dot{m}_{1/2} > 0, \\ \vec{\Psi}_R & \text{jinak.} \end{cases} \quad (3.51)$$

Hmotnostní tok přes hranici po dosazení $u_{1/2} = a_{1/2} M_{1/2}$ se spočítá

$$\dot{m}_{1/2} = a_{1/2} M_{1/2} \begin{cases} \rho_L & \text{pro } M_{1/2} > 0 \\ \rho_R & \text{jinak,} \end{cases} \quad (3.52)$$

kde rychlost zvuku na rozhraní $a_{1/2}$ je definován jako průměr a_L a a_R

$$a_{1/2} = \frac{a_L + a_R}{2}. \quad (3.53)$$

Machovo číslo na rozhraní z hlediska M_L a M_R je definováno jako

$$M_{1/2} = \mathcal{M}_{(4)}^+(M_L) + \mathcal{M}_{(4)}^-(M_R) - \frac{K_p}{f_a} \max\left(1 - \sigma \overline{M}^2, 0\right) \frac{p_R - p_L}{\rho_{1/2} a_{1/2}^2}, \quad (3.54)$$

kde hustota na rozhraní je

$$\rho_{1/2} = \frac{\rho_L + \rho_R}{2}. \quad (3.55)$$

$\mathcal{M}_{(m)}$ jsou polynomické funkce stupně $m = 1, 2, 4$ a jsou definovány následujícími vztahy

$$\mathcal{M}_{(1)}^\pm(M) = \frac{1}{2} (M \pm |M|), \quad (3.56)$$

$$\mathcal{M}_{(2)}^\pm(M) = \pm \frac{1}{4} (M \pm |M|)^2, \quad (3.57)$$

$$\mathcal{M}_{(4)}^\pm(M) = \begin{cases} M_{(1)}^\pm & \text{pro } |M| \geq 1, \\ M_{(2)}^\pm (1 \mp 16\beta M_{(2)}^\mp) & \text{jinak,} \end{cases} \quad (3.58)$$

kde Machovo číslo na pravé a levé straně definují

$$M_R = \frac{q_R}{a_{1/2}}, \quad M_L = \frac{q_L}{a_{1/2}}. \quad (3.59)$$

Dále je nutno dle [17] zavést konstanty $K_p = 0.25$, $\beta = 1/8$, $\sigma = 1$ a škálovací faktor f_a , který je definován rovnicí

$$f_a = M_o(2 - M_o) \quad (3.60)$$

s referenčním Machovým číslem

$$M_o^2 = \min \left(1, \max \left(\overline{M}^2, M_\infty^2 \right) \right) \in [0, 1], \quad (3.61)$$

kde střední Machovo číslo

$$\overline{M}^2 = \frac{q_R^2 + q_L^2}{2a_{1/2}^2} \quad (3.62)$$

a mezní Machovo číslo M_∞ je definováno jako Machovo číslo nerušeného proudu. Tímto je plně definována numerická konvektivní část toku $\hat{F}_k^{(c)}$. Dále definuji tlakovou část numerického toku \hat{P}_k

$$\hat{P}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ p_{1/2} n_x \\ p_{1/2} n_y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.63)$$

kde tlak na rozhraní je dán vztahem

$$p_{1/2} = \mathcal{P}_{(5)}^+(M_L)p_L + \mathcal{P}_{(5)}^-(M_R)p_R - K_u \mathcal{P}_{(5)}^+ \mathcal{P}_{(5)}^-(\rho_L + \rho_R)(f_a a_{1/2})(u_R - u_L), \quad (3.64)$$

kde $K_u = 0.75$ a stejně jako u výpočtu Machova čísla \mathcal{P}^\pm jsou polynomy. Polynom pátého stupně je vyjádřen

$$\mathcal{P}_{(5)}^{\pm}(M) = \begin{cases} \frac{1}{M}\mathcal{M}_{(1)}^{\pm} & \text{pro } |M| \geq 1, \\ \mathcal{M}_{(2)}^{\pm} \left[(\pm 2 - M) \mp 16\alpha M \mathcal{M}_{(2)}^{\mp} \right] & \text{jinak,} \end{cases} \quad (3.65)$$

konstanta α je zavedena jako

$$\alpha = \frac{3}{16} (-4 + 5f_a^2) \in \left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{16} \right]. \quad (3.66)$$

AUSM+up nevazký tok lze upravit do tvaru

$$\hat{F}_k(W, \vec{n}) = \hat{F}_k^{AUSM+up}(W_L, W_R, \vec{n}) = \begin{cases} F(W_L) & \text{pro } \dot{m}_{1/2} > 0, \\ F(W_R) & \text{jinak,} \end{cases} \quad (3.67)$$

$$F(W_L) = \begin{bmatrix} \dot{m}_{1/2} \\ \dot{m}_{1/2}u_L + p_{1/2}n_x \\ \dot{m}_{1/2}v_L + p_{1/2}n_y \\ \dot{m}_{1/2}H_L \end{bmatrix}, \quad F(W_R) = \begin{bmatrix} \dot{m}_{1/2} \\ \dot{m}_{1/2}u_R + p_{1/2}n_x \\ \dot{m}_{1/2}v_R + p_{1/2}n_y \\ \dot{m}_{1/2}H_R \end{bmatrix}. \quad (3.68)$$

Schéma AUSM+up je spolehlivá a efektivní metoda nejen pro vysoká Machova čísla, ale také pro všechny rychlostní režimy a pro širokou škálu problémů s prouděním v různých geometriích. AUSM+up dokáže přesně zachytit rázové vlny a kontaktní nespojitosti [17].

3.6 Časová diskretizace

V této podkapitole budu čerpat z [5]. V rovnici (3.9) pro obecný semidiskrétní tvar metody konečných objemů pro soustavu Eulerových rovnic zbývá diskretizovat derivace podle času.

3.6.1 Eulerova metoda časové integrace

Nejjednodušší metodou aproximující časovou derivaci je dopředná Eulerova metoda, která derivaci podle času aproximuje dopřednou diferencí

$$\frac{dW_i(t)}{dt} \approx \frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t}, \quad (3.69)$$

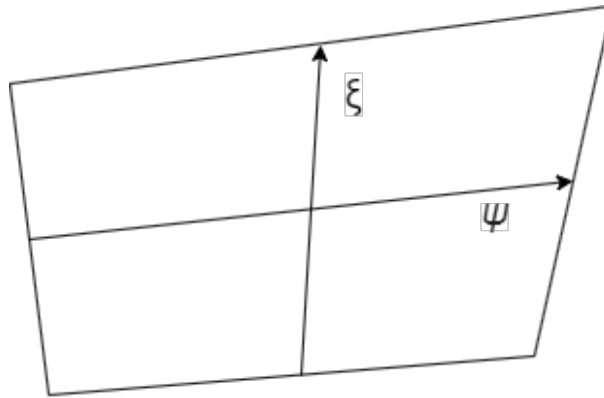
kde Δt je velikost časového kroku. Dopřednou Eulerovu metodu (3.69) dosadím do rovnice (3.9) a dostávám plně diskrétní explicitní metodu konečných objemů

$$W_i^{n+1} = W_i^n + \Delta t \text{Rez}(W)_i^n. \quad (3.70)$$

Tato metoda je prvního řádu přesnosti v čase [3]. Časový krok je omezen podmínkou stability

$$\Delta t \leq \min \left(\frac{CFL}{\frac{|u|+a}{\Delta x} + \frac{|v|+a}{\Delta y}} \right), \quad (3.71)$$

kde minimum je počítáno přes každou buňku sítě. CFL se nazývá dle autorů Courantovo-Friedrichsovo-Lewyho číslo, které je pro Eulerovu metodu voleno v intervalu $(0, 1)$. Podmínka platí pouze pro kartézskou síť a je nutno ji přepsat do obecnějšího tvaru pro strukturované křivočaré sítě. Zavedu pomocné vektory $\vec{\xi}$ a $\vec{\psi}$, které charakterizují velikost buňky ve směru souřadnice x , resp. y .



Obrázek 3.3: Souřadnice $\vec{\xi}$ a $\vec{\psi}$ pro podmínku stability

Podmínku stability (3.71) lze přepsat do tvaru

$$\Delta t \leq \min \left(\frac{CFL}{\frac{|u^\xi|+a}{\Delta \xi} + \frac{|v^\psi|+a}{\Delta \psi}} \right), \quad (3.72)$$

kde

$$u^\xi = \vec{u} \cdot \frac{\vec{\xi}}{\|\vec{\xi}\|}, \quad u^\psi = \vec{u} \cdot \frac{\vec{\psi}}{\|\vec{\psi}\|} \quad (3.73)$$

a

$$\Delta \xi = \|\vec{\xi}\|, \quad \Delta \psi = \|\vec{\psi}\|. \quad (3.74)$$

3.6.2 Runge-Kuttovy metody

Přesnější metody pro časovou diskretizaci jsou TVD Runge-Kuttovy metody [19]. Dvoukroková Runge-Kuttova metoda je definována

$$\begin{aligned} W_i^{n+\frac{1}{2}} &= W_i^n + \Delta t \text{Rez}(W)_i^n \\ W_i^{n+1} &= \frac{1}{2}W_i^n + \frac{1}{2}W_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta t \text{Rez}(W)_i^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Tato metoda je druhého řádu v čase [19].

Tříkroková TVD Runge-Kuttova metoda má tvar

$$W_i^{n+\frac{1}{3}} = W_i^n + \Delta t \text{Rez}(W)_i^n \quad (3.76)$$

$$W_i^{n+\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}W_i^n + \frac{1}{4}W_i^{n+\frac{1}{3}} + \frac{1}{4}\Delta t \text{Rez}(W)_i^{n+\frac{1}{3}} \quad (3.77)$$

$$W_i^{n+1} = \frac{1}{3}W_i^n + \frac{2}{3}W_i^{n+\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}\Delta t \text{Rez}(W)_i^{n+\frac{2}{3}}. \quad (3.78)$$

Tato metoda je třetího řádu v čase [19]. Pro obě metody platí podmínka stability (3.71), resp. (3.72).

3.7 Numerická realizace okrajových podmínek

Okrajové podmínky již byli představeny v kapitole 2.4, nyní je však nutné je vhodně numericky aproximovat. K tomu budou v této práci použity tzv. fiktivní buňky.

3.7.1 Koncept fiktivních buněk

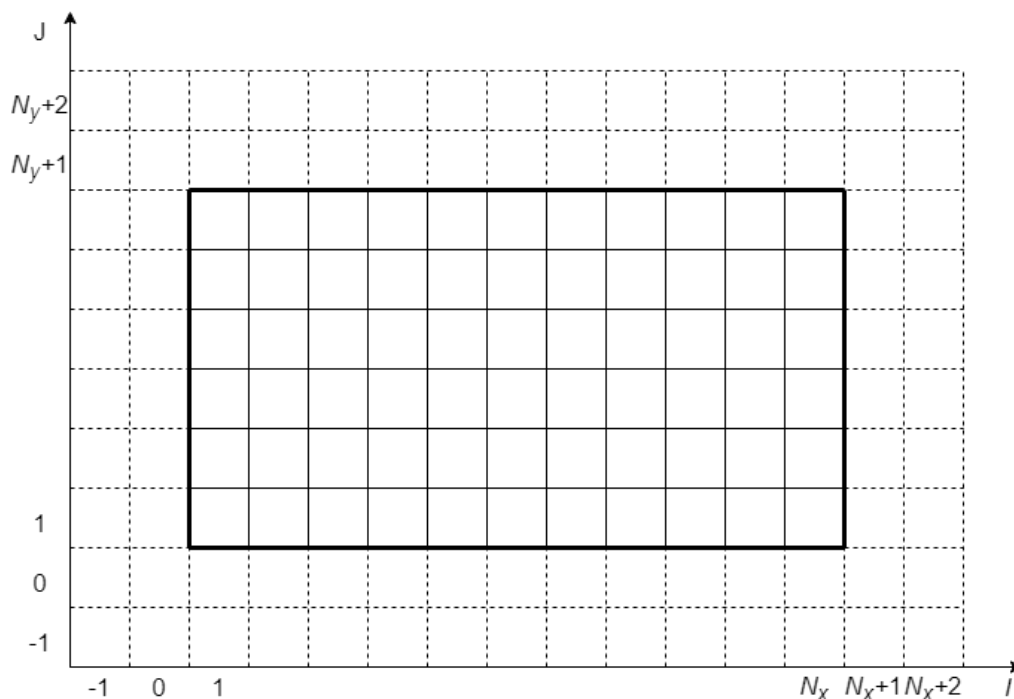
Tento princip je především využíván pro strukturované sítě [1]. Fiktivní buňky jsou tvořeny dodatečnou vrstvou bodů sítě mimo počítanou oblast. Tento princip je zobrazen na obrázku 3.4 pro případ jednoduché 2D strukturované sítě. Jak lze vidět, celá výpočetní oblast je obklopena dvěma vrstvami fiktních buněk (vyobrazeno čárkovanou čarou). Fiktivní buňky nejsou obvykle generovány jako součást sítě, jsou většinou vnímány jako virtuální, ovšem buňky mají geometrické vlastnosti jako například objem, těžiště nebo vnější normálu hranice.

Účelem fiktivních buněk je zjednodušit výpočet toků a gradientů podél hranic. Jak je možné vidět na obrázku 3.4, stejné diskretizační schéma lze použít na hranicích jako uvnitř fyzické oblasti, je tedy možné nevázké toky hranicí výpočetní oblasti počítat numerickými schématy bez jakékoliv modifikace.

3.7.2 Okrajové podmínky na supersonickém vstupu

Jak bylo zmíněno v kapitole 2.4.3, musím v případě supersonického proudění na vstupu zadat 4 veličiny. V této práci je nejčastěji zadávána stagnační teplota T_0 , stagnační tlak p_0 , úhel náběhu proudu α_∞ a Machovo číslo M_g . Pomocí izoentropických vztahů lze spočítat tlak ve fiktivní buňce

$$p_g = p_0 \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_g^2 \right)^{\left(\frac{\kappa}{1 - \kappa} \right)} \quad (3.79)$$



Obrázek 3.4: Fiktivní buňky

a dále teplotu

$$T_g = \frac{T_0}{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_g^2\right)}. \quad (3.80)$$

Ze stavové rovnice lze vypočítat hustota ve fiktivní buňce

$$\rho_g = \frac{p_g}{rT_g}. \quad (3.81)$$

Pomocí hustoty a tlaku je možné vyčíslit rychlost zvuku

$$a_g = \sqrt{\frac{\kappa p_g}{\rho_g}} \quad (3.82)$$

a dále velikost rychlosti

$$|\vec{u}_g| = M_g a_g. \quad (3.83)$$

Se znalostí velikosti rychlosti a zadaného úhlu náběhu můžu vyjádřit jednotlivé složky vektoru rychlosti jako

$$u_g = |\vec{u}_g| \cos \alpha_\infty, \quad (3.84)$$

$$v_g = |\vec{u}_g| \sin \alpha_\infty \quad (3.85)$$

a nakonec dopočítat celkovou energii

$$E_g = \frac{p_g}{\kappa - 1} + \frac{1}{2} \rho_g (u_g^2 + v_g^2). \quad (3.86)$$

3.7.3 Okrajové podmínky na výstupu

Z kapitoly 2.4.3 vyplývá, že v případě supersonického proudění by se neměla na výstupu zadat žádná veličina. Všechny veličiny, tedy hustota, složky rychlosti a energie jsou extrapolovány v každé iteraci do fiktivních buněk z poslední řady buněk výpočetní oblasti

$$\rho_g = \rho_N, \quad (3.87)$$

$$u_g = u_N, \quad (3.88)$$

$$v_g = v_N, \quad (3.89)$$

$$p_g = p_N, \quad (3.90)$$

kde N značí poslední buňku ve výpočetní oblasti.

3.7.4 Okrajové podmínky na pevné stěně

V proudění nevazké tekutiny platí, že normálová složka vektoru rychlosti musí být nulová (2.26). Pro realizaci této podmínky používám metodu zrcadlení. Veličiny ve fiktivní buňce za stěnou dostanu zrcadlením veličin v první buňce u stěny ve směru normály, tedy

$$\rho_g = \rho_1, \quad (3.91)$$

$$u_g = u_1 - 2(u_1 n_x + v_1 n_y) n_x, \quad (3.92)$$

$$v_g = v_1 - 2(u_1 n_x + v_1 n_y) n_y, \quad (3.93)$$

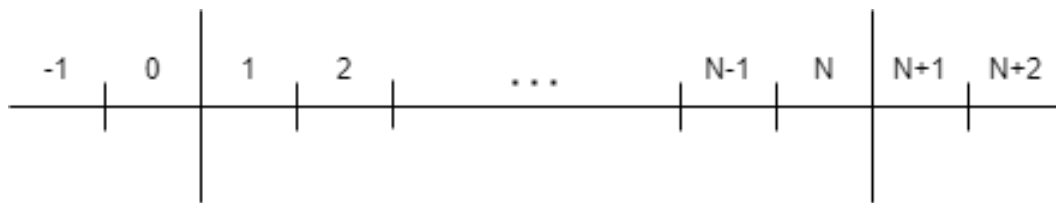
$$p_g = p_1, \quad (3.94)$$

kde index 1 značí první buňku u stěny ve směru normály. Celkovou energii lze dopočítat dle vztahu (3.86).

3.7.5 Periodická okrajová podmínka

Periodická okrajová podmínka je zavedena tam, kde se sama na sebe napojuje síť, např. při řešení proudění okolo aerodynamického profilu. Tato podmínka je znázorněna na obrázku 3.5 pro 1D případ.

Při aktualizaci hodnot v buňce 1 je potřeba v každé iteraci hodnota buňky 0 vlevo a buňky 2 vpravo (pro metodu 1.řádu přesnosti v prostoru). Díky periodicitě by se měly hodnoty buňky 0 rovnat hodnotám v poslední buňce ve výpočetní oblasti N a hodnoty buňky $N + 1$ by se měly analogicky rovnat hodnotám v buňce 1. Při použití metody druhého řádu přesnosti je nutno zavést dvě fiktivní buňky na každé hranici. Pro fiktivní



Obrázek 3.5: Periodická okrajová podmínka

buňky pak platí vztahy

$$W_{-1}^n = W_{N-1}^n, \quad W_0^n = W_N^n, \quad W_{N+1}^n = W_1^n, \quad W_{N+2}^n = W_2^n. \quad (3.95)$$

Periodické podmínky pro řešení rovinného proudění lze zavést jako zopakování tohoto postupu pro všechny řádky a sloupce výpočetní sítě.

3.8 Numerické metody vyššího řádu přesnosti

Do teď byl uvažován první řád přesnosti v prostoru při němž se uvažuje na celé buňce konstantní řešení. Ukazuje se, že řešení získané pomocí po částech konstantní aproximace není dostatečně přesné [3]. Metoda prvního řádu přesnosti v prostoru přidává do výsledného proudového pole přílišné množství numerické vazkosti a nedostatečně ostře zachycuje rázové vlny [5]. Pro zvýšení řádu přesnosti v prostoru je nutno nahradit konstantní funkci aproximace řešení funkcí lineární. Takový postup se nazývá rekonstrukce.

3.8.1 TVD rekonstrukce

Jednou z metod rekonstrukce je tzv. TVD rekonstrukce, která minimalizuje celkovou variaci řešení a zajistí, že řešení zůstává fyzikálně platné (tj. že nedochází ke vzniku nefyzikálních oscilací) [3]. TVD vlastnost lze dokázat pouze v 1D případě, ve vícerozměrném případě se TVD vlastnost nepodařilo dokázat, ale numerické experimenty ukazují, že si zachovává příznivé vlastnosti TVD schémat [5]. Po částech konstantní konzervativní proměnné jsou nahrazeny v jednotlivých buňkách po částech lineárními funkcemi

$$W_i \rightarrow \tilde{W}_i = W_i + (x - x_i)\sigma_i^n, \quad (3.96)$$

kde σ_i^n je aproximace první derivace W_i . Tuto aproximaci zavedu pomocí funkce \minmod , která je závislá na dopředné a zpětné diferenci

$$\sigma_i^n = \minmod\left(\frac{W_{i+1}^n - W_i^n}{\Delta x}, \frac{W_i^n - W_{i-1}^n}{\Delta x}\right). \quad (3.97)$$

Uvažuji konstantní krok sítě, tedy že $\Delta x = (x - x_i)$. Krok sítě Δx je vykrácen a zjednodušená rekonstrukce tedy není závislá na geometrii sítě. Označím

$$\vec{\Delta}_i = W_{i+1}^n - W_i^n, \quad \bar{\Delta}_i = W_i^n - W_{i-1}^n, \quad (3.98)$$

funkci minmod lze zapsat

$$\minmod(\vec{\Delta}_i, \bar{\Delta}_i) = \begin{cases} \vec{\Delta}_i & \text{pro } \vec{\Delta}_i \cdot \bar{\Delta}_i > 0 \text{ a } |\vec{\Delta}_i| < |\bar{\Delta}_i|, \\ \bar{\Delta}_i & \text{pro } \vec{\Delta}_i \cdot \bar{\Delta}_i > 0 \text{ a } |\bar{\Delta}_i| < |\vec{\Delta}_i|, \\ 0 & \text{pro } \vec{\Delta}_i \cdot \bar{\Delta}_i \leq 0. \end{cases} \quad (3.99)$$

Rekonstruované proměnné se pak spočítají

$$\tilde{W}_L^n = W_L^n + \frac{1}{2} \minmod(\vec{\Delta}_i, \bar{\Delta}_i), \quad (3.100)$$

$$\tilde{W}_R^n = W_R^n + \frac{1}{2} \minmod(\vec{\Delta}_{i+1}, \bar{\Delta}_{i+1}). \quad (3.101)$$

Rekonstruované konzervativní proměnné nahradí původní proměnné

$$\hat{F}_{1.\check{r}ád}(W_L, W_R, \vec{n}) \rightarrow \hat{F}_{2.\check{r}ád}(\tilde{W}_L, \tilde{W}_R, \vec{n}). \quad (3.102)$$

Tato rekonstrukce je stejně zavedena i ve směru y , jedná se tedy o 1D rekonstrukci aplikovanou do dvou směrů.

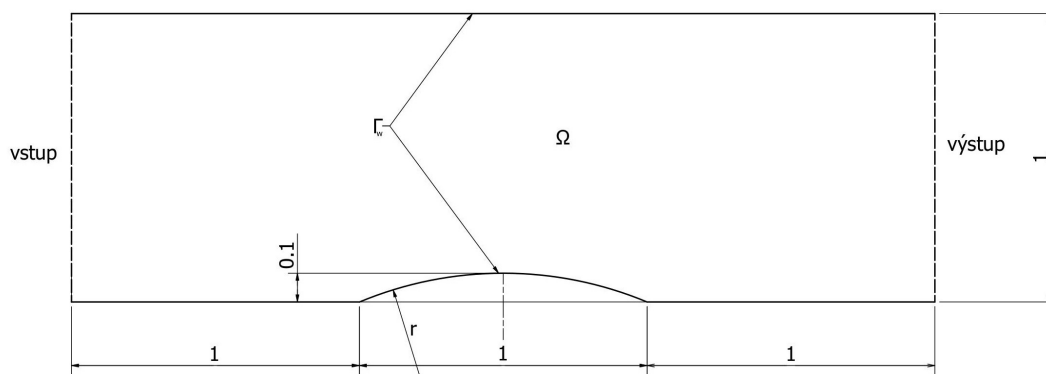
Kapitola 4

Numerické řešení proudění nevazké tekutiny

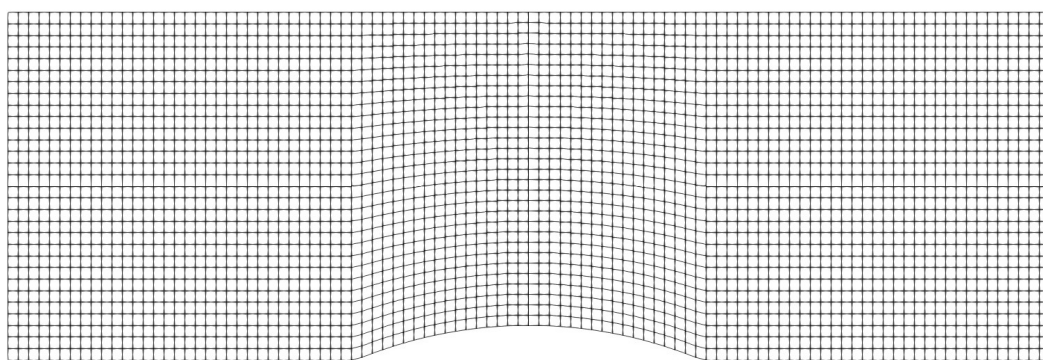
V této kapitole jsou prezentovány výsledky získané pomocí postupů popsanych v předchozích kapitolách. Výpočty byly provedeny pomocí vlastního výpočetního programu, který jsem napsal v programovacím jazyku C++. Program je schopen řešit proudění nevazké stlačitelné tekutiny v rovině na strukturovaných sítích s přesností 1. nebo 2. řádu v prostoru a 1., 2. nebo 3. řádu v čase. Nejdříve je na prvním příkladu ověřena správnost implementace 2D programu na transsonickém proudění v GAMM kanálu. V následující kapitole je řešeno hypersonické obtékání válce. Nakonec jsou na základě testovacích úloh vybrané metody aplikovány na řešení hypersonického proudění kolem profilu hypersonického letounu X-43A. Pro všechny příklady je proudící tekutinou vzduch, pro který platí Poissonova konstanta $\kappa = 1.4$ a měrná plynová konstanta $r = 287.1 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

4.1 GAMM kanál

V tomto případě počítám rovinné transonické proudění testovacím kanálem. Příklad je převzat z [5]. Geometrie GAMM kanálu včetně aplikace jednotlivých okrajových podmínek je zobrazena na obrázku 4.1. Vlevo na hranici předepisuji vstupní okrajovou podmínku, vpravo na hranici výstupní okrajovou podmínku a na horní a dolní straně předepisuji stěnu pro nevazké proudění. Proudění je charakterizováno poměrem výstupního a stagnačního tlaku $p_2/p_0 = 0.737$ a nulovým úhlem náběhu, tzn $\alpha_\infty = 0$, stagnační tlak je volen $p_0 = 1$ a stagnační hustota $\rho_0 = 1$. Výpočetní síť uvažuji jako strukturovanou s 300 buňkami ve směru x a 100 ve směru y . Pro přehlednost je na obrázku 4.2 ukázána hrubší síť 100x30. Dle [6] by maximální Machovo číslo mělo být dosaženo na spodní stěně kanálu ve druhé polovině profilu a jeho hodnota by měla být $M_{max} = 1.37 - 1.38$. Nejdůležitějšími sledovanými fenomény rovinného transonického proudění v GAMM kanálu, podle kterých je



Obrázek 4.1: GAMM kanál - schéma



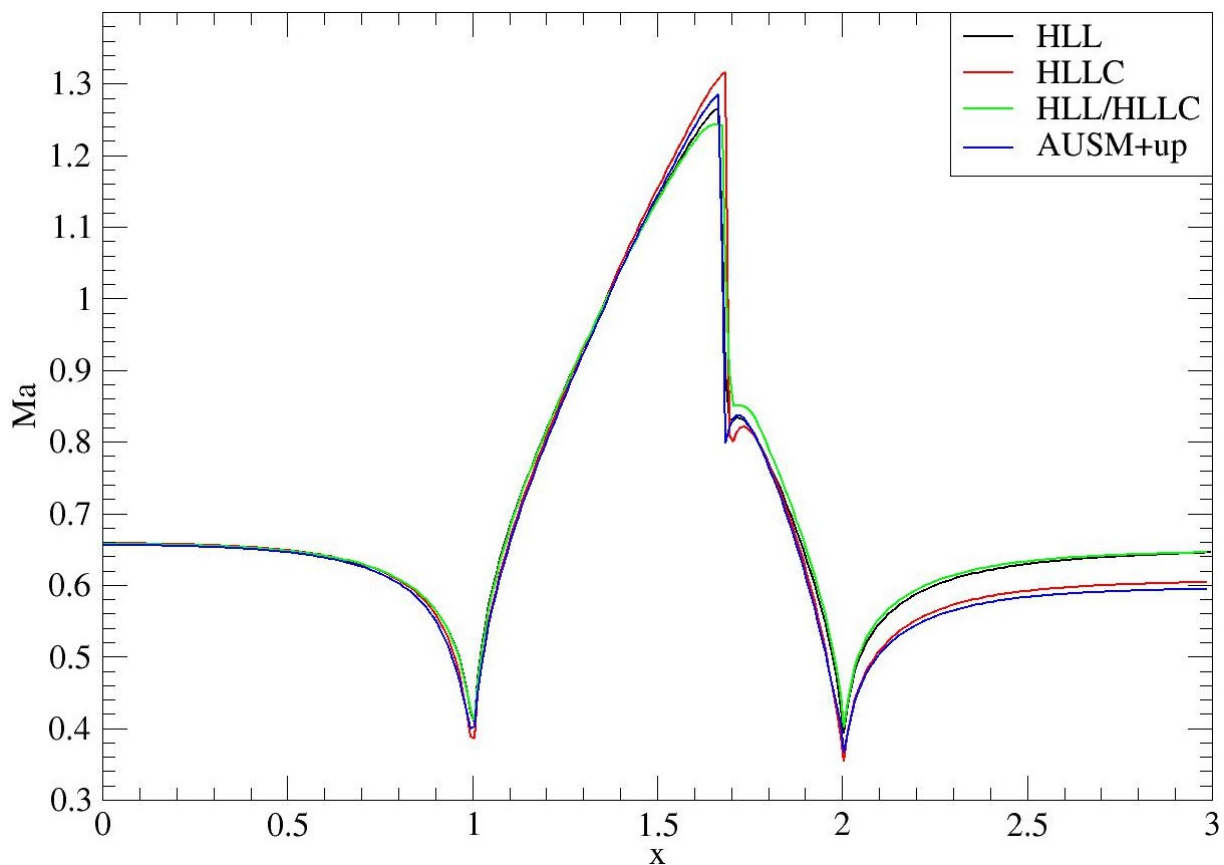
Obrázek 4.2: GAMM kanál - síť 100x30

posuzována kvalita numerických výsledků, jsou kolmá rázová vlna následována Zierepovou singularitou.

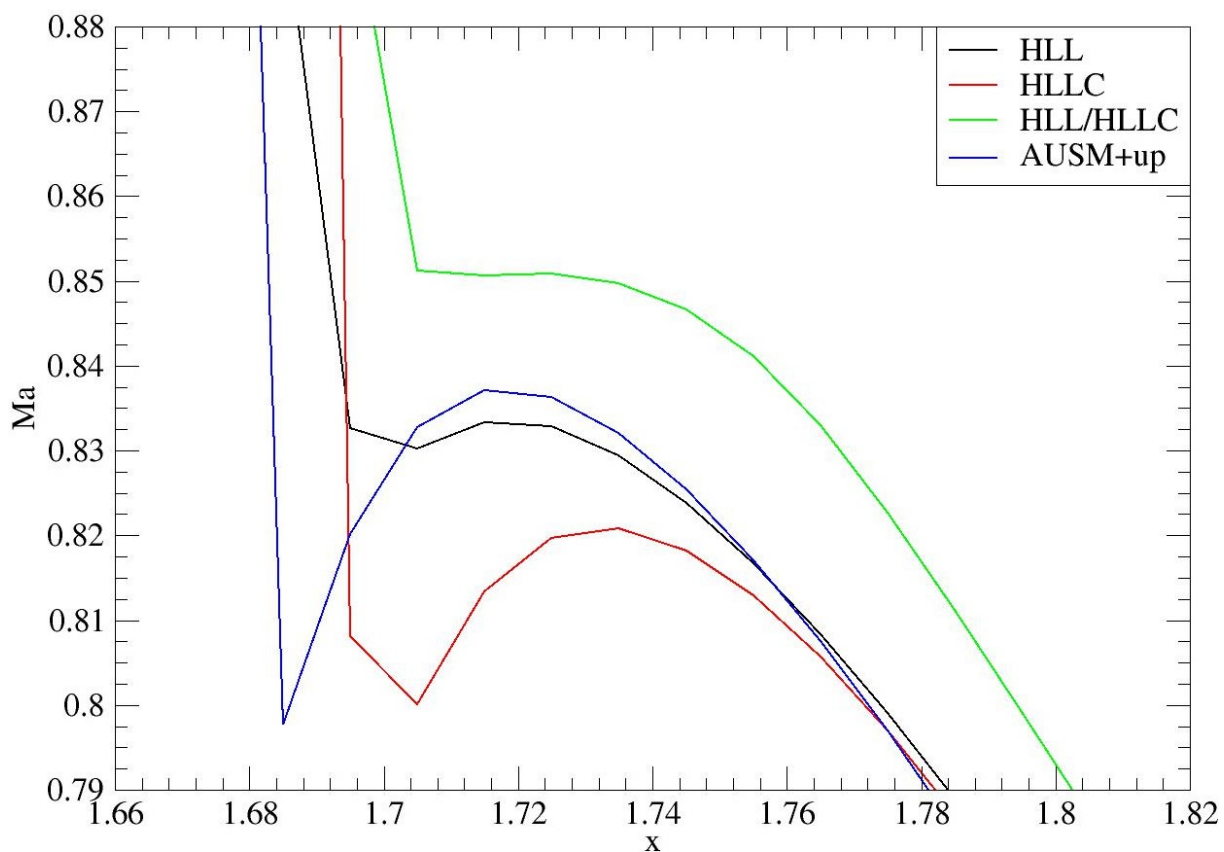
GAMM kanál byl počítán schématy HLL, HLLC, rotovaným hybridním HLL/HLLC a AUSM+up. Na obrázcích 4.3 - 4.6 je srovnán průběh Machova čísla na dolní stěně GAMM kanálu. Na obrázku 4.3 jsou srovnány metody prvního řádu přesnosti v prostoru. Je vidět, že HLL a rotované HLL/HLLC v tomto případě méně výrazně zachycují rázovou vlnu oproti AUSM+up a HLLC metodám. Maximálního Machova čísla dosahuje v tomto srovnání schéma HLLC $M_{max} = 1.316$, což však neodpovídá předpokládanému rozsahu M_{max} . Na obrázku 4.4 je zobrazena Zierepova singularita. Schéma HLL a rotovaný hybridní řešič HLL/HLLC jsou výrazně horší v zachycení tohoto jevu oproti HLLC a AUSM+up.

Na obrázku 4.5 jsou srovnány metody druhého řádu přesnosti dosaženého pomocí TVD rekonstrukce s limiterem minmod. V tomto případě všechna schémata ostře zachycují rázovou vlnu. Vykreslení Zierepovy singularity je vidět na obrázku 4.6. Metody HLLC a AUSM+up dosahují přesnějšího detailu tohoto fenoménu, avšak schémata HLL a rotované HLL/HLLC se liší jen minimálně. V pravé části kanálu se výsledky HLL a HLL/HLLC liší od výsledků HLLC a ASUM+up.

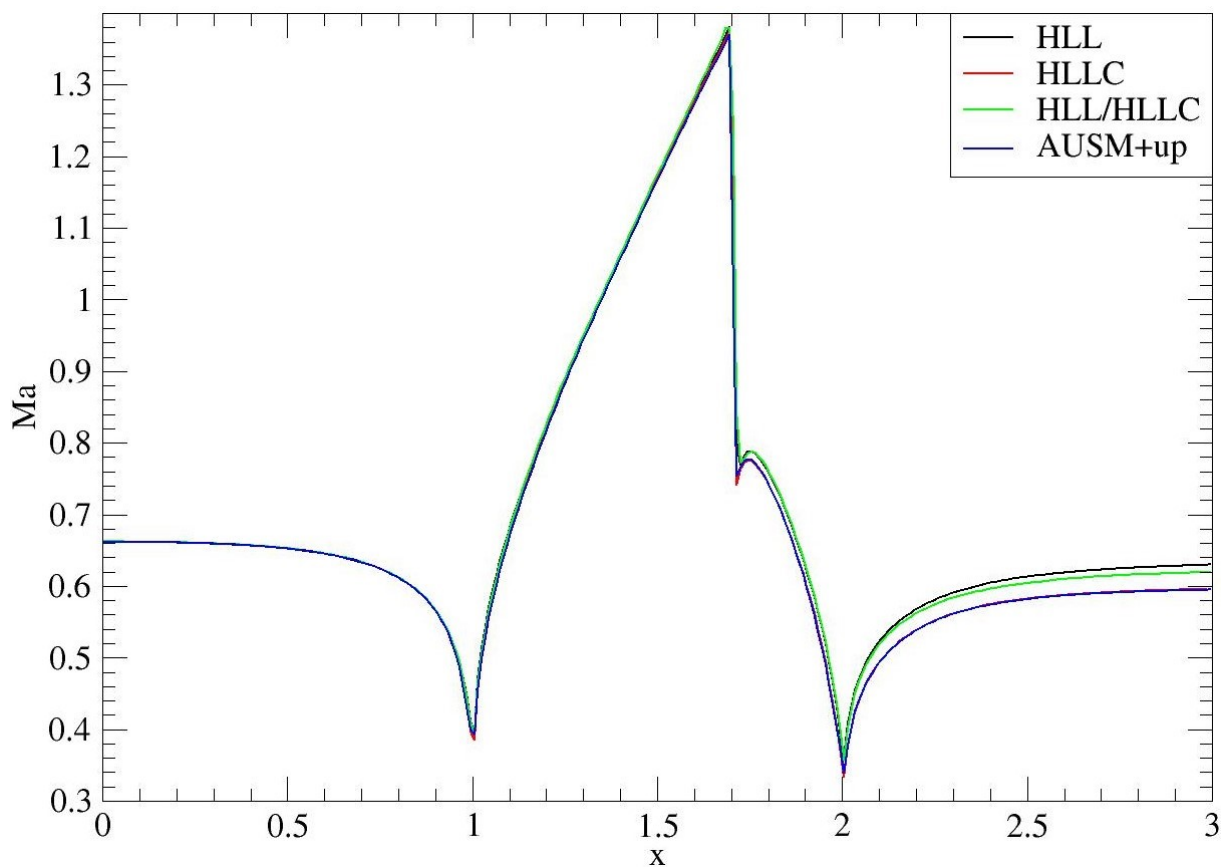
Konvergence jednotlivých metod je vidět na obrázcích 4.9 a 4.10, pro časovou integraci



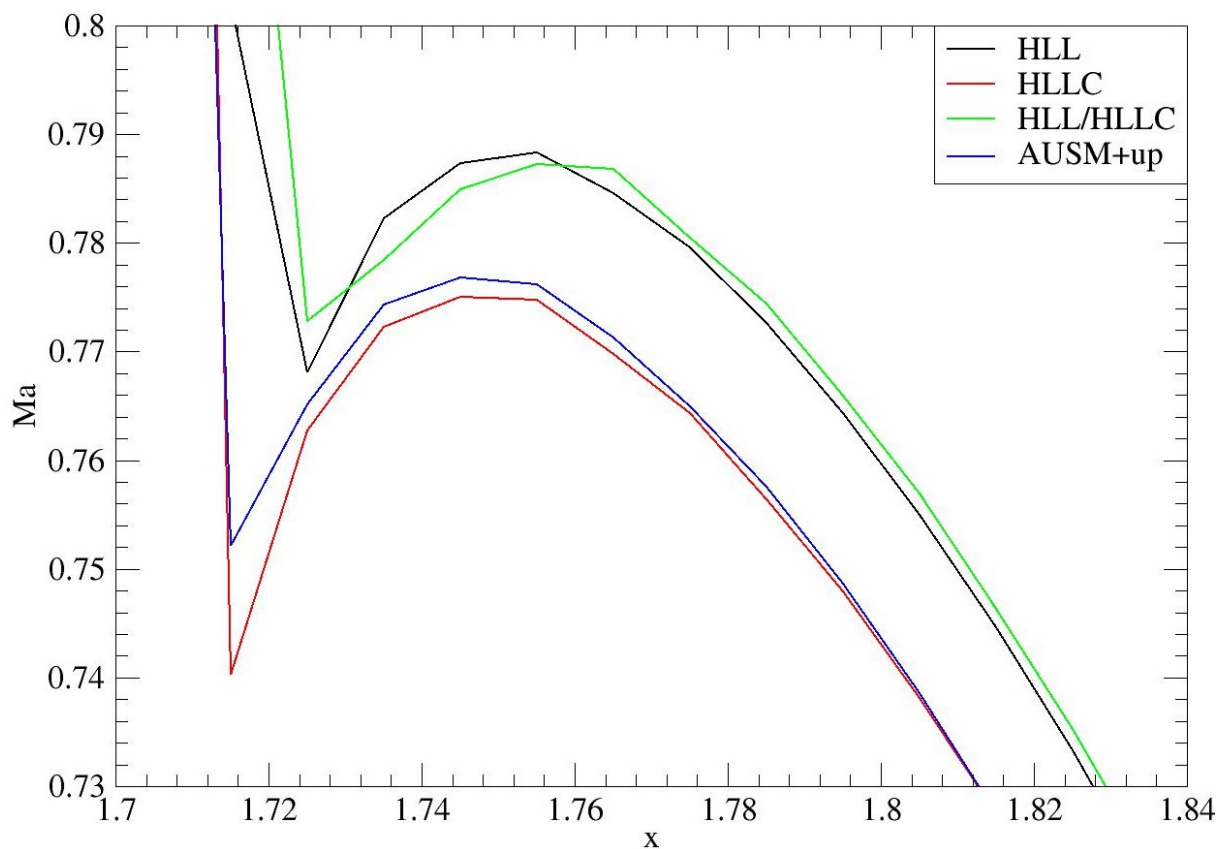
Obrázek 4.3: GAMM kanál - srovnání metod prvního řádu



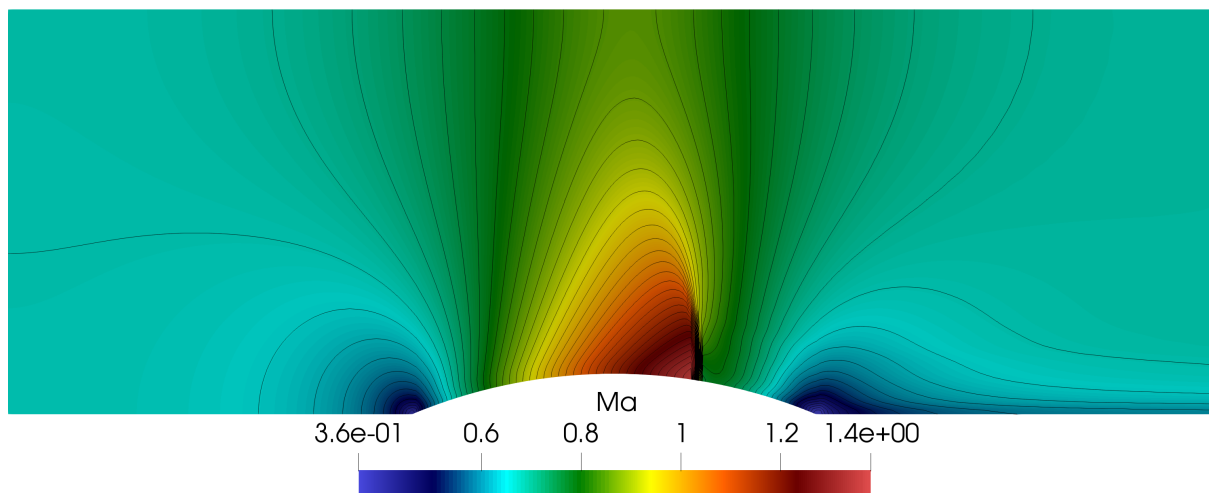
Obrázek 4.4: GAMM kanál - Zierepova singularita - metody prvního řádu



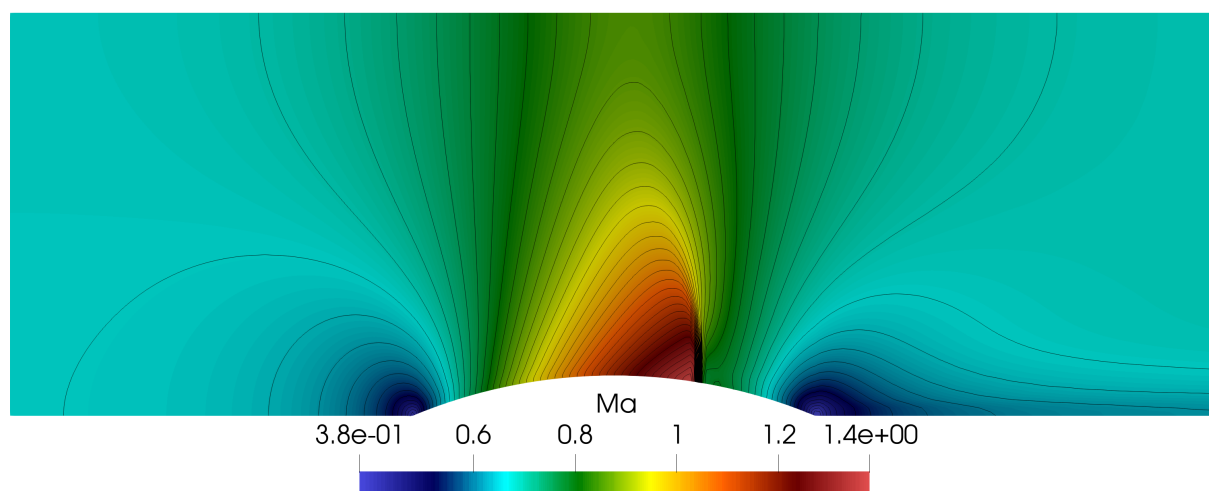
Obrázek 4.5: GAMM kanál - srovnání metod druhého řádu



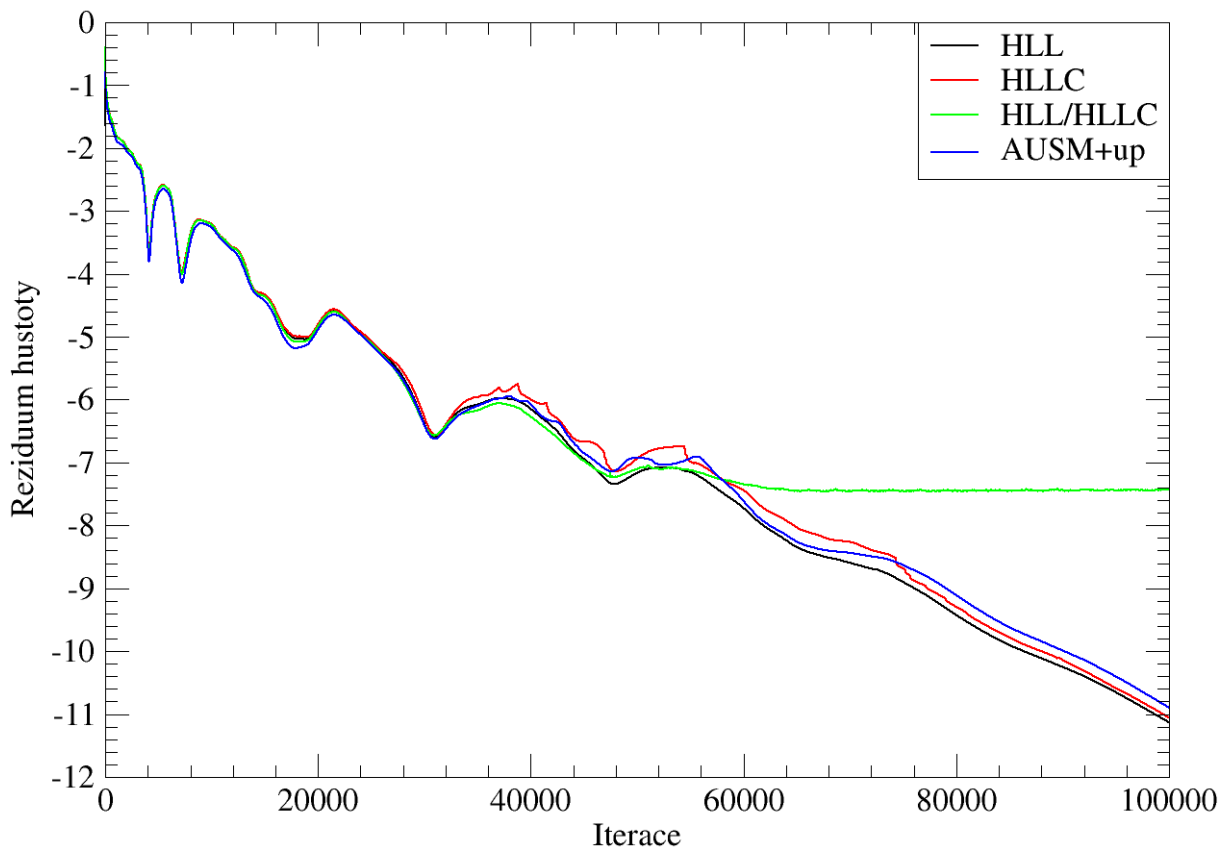
Obrázek 4.6: GAMM kanál - Zierepova singularita - metody druhého řádu



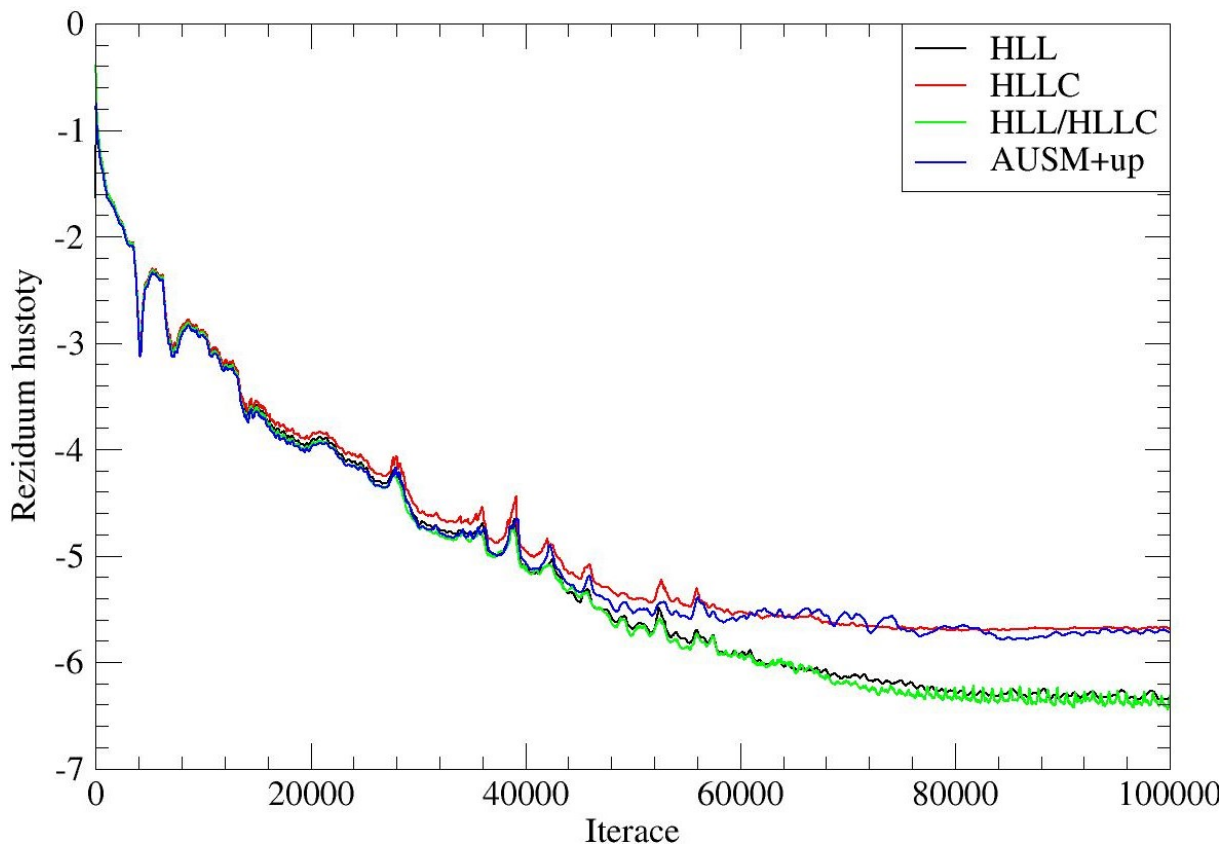
Obrázek 4.7: GAMM kanál - isočáry Machova čísla - AUSM+up



Obrázek 4.8: GAMM kanál - isočáry Machova čísla - HLL/HLLC



Obrázek 4.9: GAMM kanál - historie rezidua metod prvního řádu



Obrázek 4.10: GAMM kanál - historie rezidua metod druhého řádu

je použita Eulerova dopředná metoda. Reziduum je dáno logaritmem L_2 normy derivace hustoty

$$\text{Reziduum} = \log_{10} \left(\frac{\sum_i \left(\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} \right)^2 |D_i|}{\sum_i |D_i|} \right)^{0.5}. \quad (4.1)$$

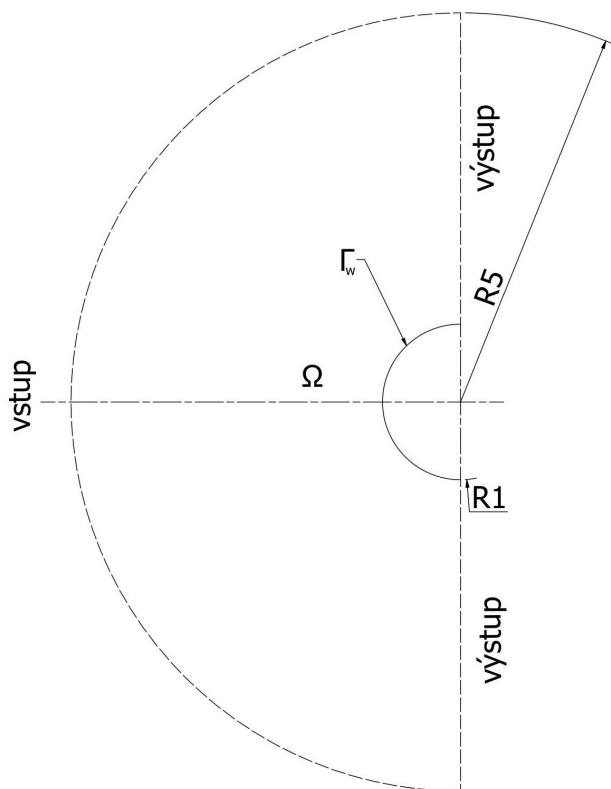
Výsledky spočtené metodami prvního řádu přesnosti konvergují na úroveň strojové nuly. Odlišuje se od nich reziduum rotovaného HLL/HLLC schématu, které se po 60000 iterací ustálí přibližně na hodnotě -7.42. V případě druhého řádu přesnosti schéma HLL a rotované HLL/HLLC konvergují k hodnotě -6.37 a HLLC a AUSM+up pouze k hodnotě -5.67. Na obrázcích 4.7 a 4.8 jsou porovnány isočáry Machova čísla získané výpočtem druhého řádu přesnosti v prostoru za použití numerických toků AUSM+up a rotovaného HLL/HLLC. Výsledky jsou v dobré shodě s výsledky z [5] a [6].

4.2 Hypersonické obtékání válce

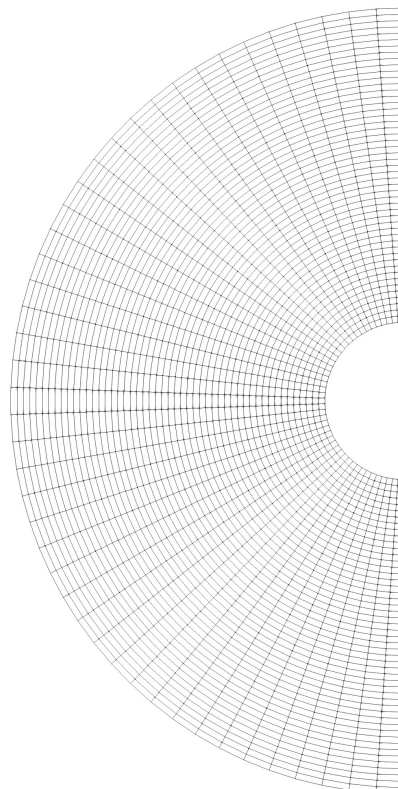
V tomto případě je řešeno hypersonické rovinné proudění vzduchu okolo válce o poloměru $R = 1$ m. Tento příklad je jedním z velmi často používaných příkladů na otestování carbuncle problému vznikajícího nevhodným použitím řešičů hypersonického proudění nevazké stlačitelné tekutiny. Geometrie problému včetně okrajových podmínek je zobrazena na obrázku 4.11. Levý okraj je supersonický vstup, pravý je stěna a horní a dolní okraje jsou supersonické výstupy. Výpočetní síť je rovnoměrná strukturovaná tvořená z 180x300 buněk. Pro přehlednost je na obrázku 4.12 zobrazena hrubší síť 45x50 buněk. Proudění je charakterizováno Machovým číslem nabíhajícího proudu na vstupu $M_\infty = 8$ a nulovým úhlem náběhu, tzn. $\alpha_\infty = 0$. Stagnační tlak na vstupu je volen $p_0 = 101325$ Pa a stagnační teplota $T_0 = 288.15$ K. Na supersonickém výstupu nezadáám žádné hodnoty, extrapoluji je z vnitřku výpočetní oblasti.

Na obrázcích 4.13-4.15 jsou srovnány výsledky schémat rotované HLL/HLLC, HLL, HLLC, AUSM+up počítané prvním řádem přesnosti v prostoru v první řadě a v druhé řadě druhým řádem přesnosti v prostoru pomocí TVD rekonstrukce s minmod limitem. Sledovanými atributy proudící tekutiny jsou hustota, tlak a Machovo číslo. Všechny numerické metody správně zachycují čelní rázovou vlnu.

Na obrázku 4.13 jsou zobrazeny isočáry hustoty. Od prvního pohledu se od všech výsledků odchyluje řešení HLLC schématu, kde dochází k tzv. carbuncle jevu, dochází tedy k narušení proudového pole. Tento problém je zvýrazněn TVD rekonstrukcí. Výsledky AUSM+up schématu se oproti dalším výsledkům liší okolo stagnačního bodu, tuto odlišnost lze odstranit použitím TVD rekonstrukce. Nejhladší výsledky jsou dosaženy pomocí rotovaného hybridního Riemannova řešiče HLL/HLLC.



Obrázek 4.11: Obtékání válce - schéma



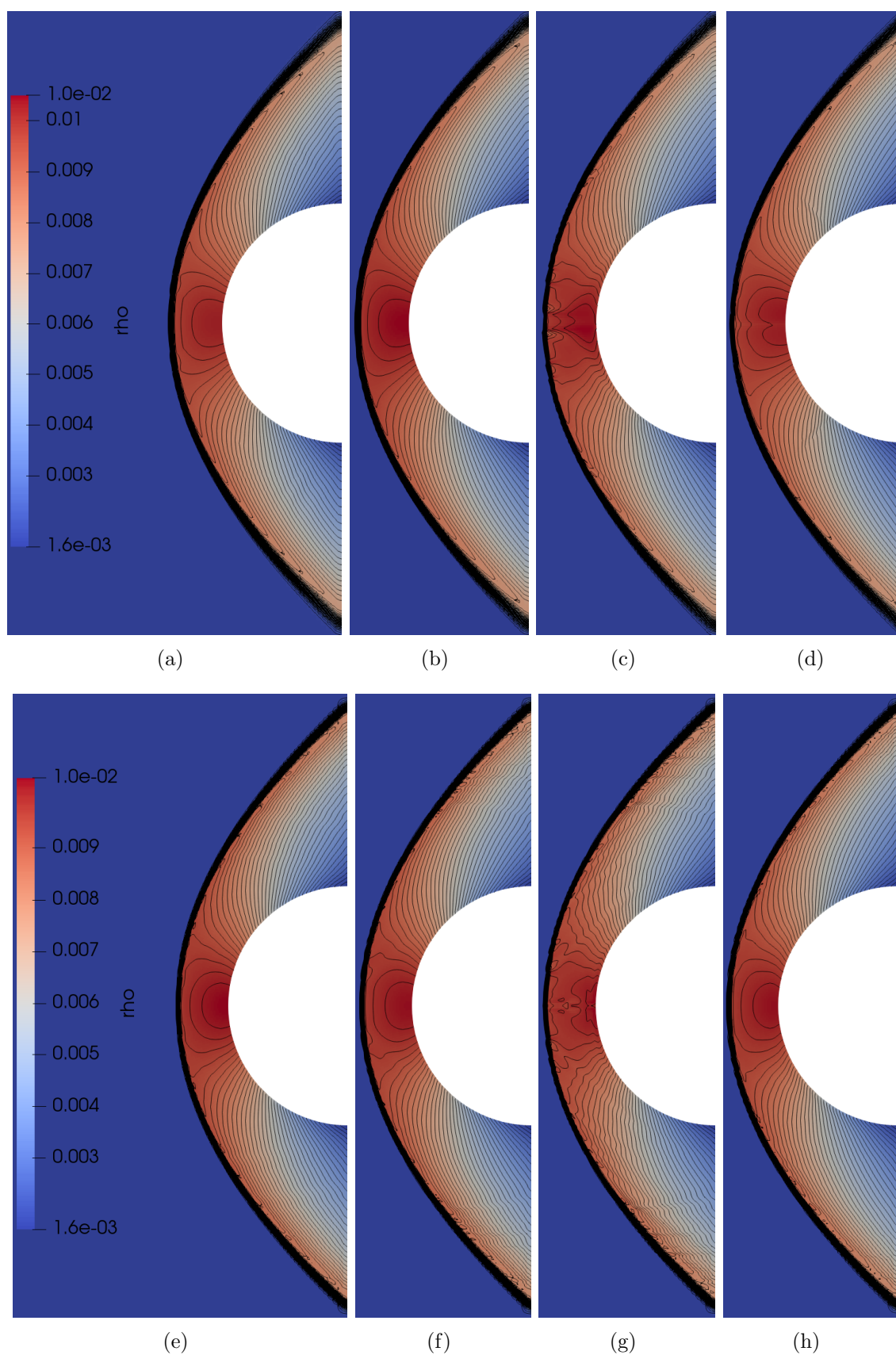
Obrázek 4.12: Obtékání válce - síť 45x50

Srovnání isočár Machova čísla výsledků jednotlivých metod je ukázáno na obrázku 4.15. Výsledky jsou shodné s porovnáním isočár hustoty, navíc je lépe vidět, že metody druhého řádu přesnosti v prostoru zobrazují rázovou vlnu ostřeji.

Na obrázku 4.14 jsou porovnány isočáry tlaku. Je vidět, že isočáry výsledků různých metod se příliš neliší, ve stagnační oblasti jsou odlišné výsledky HLLC a AUSM+up metod. S použitím TVD rekonstrukce se liší pouze HLLC. Při porovnání prvního a druhého řádu přesnosti v prostoru je nejvíce vidět, že pomocí TVD rekonstrukce je rázová vlna zachycena ostřeji.

Průběh hustoty na stěně obtékaného válce je porovnán na obrázcích 4.16 a 4.17. Od ostatních výsledků prvního řádu přesnosti se odchyluje výsledek AUSM+up numerického toku. V případě druhého řádu přesnosti v prostoru se odchyluje HLLC schéma. Rozdíly mezi výsledky prvního řádu a druhého řádu přesnosti jsou v tomto srovnání minimální.

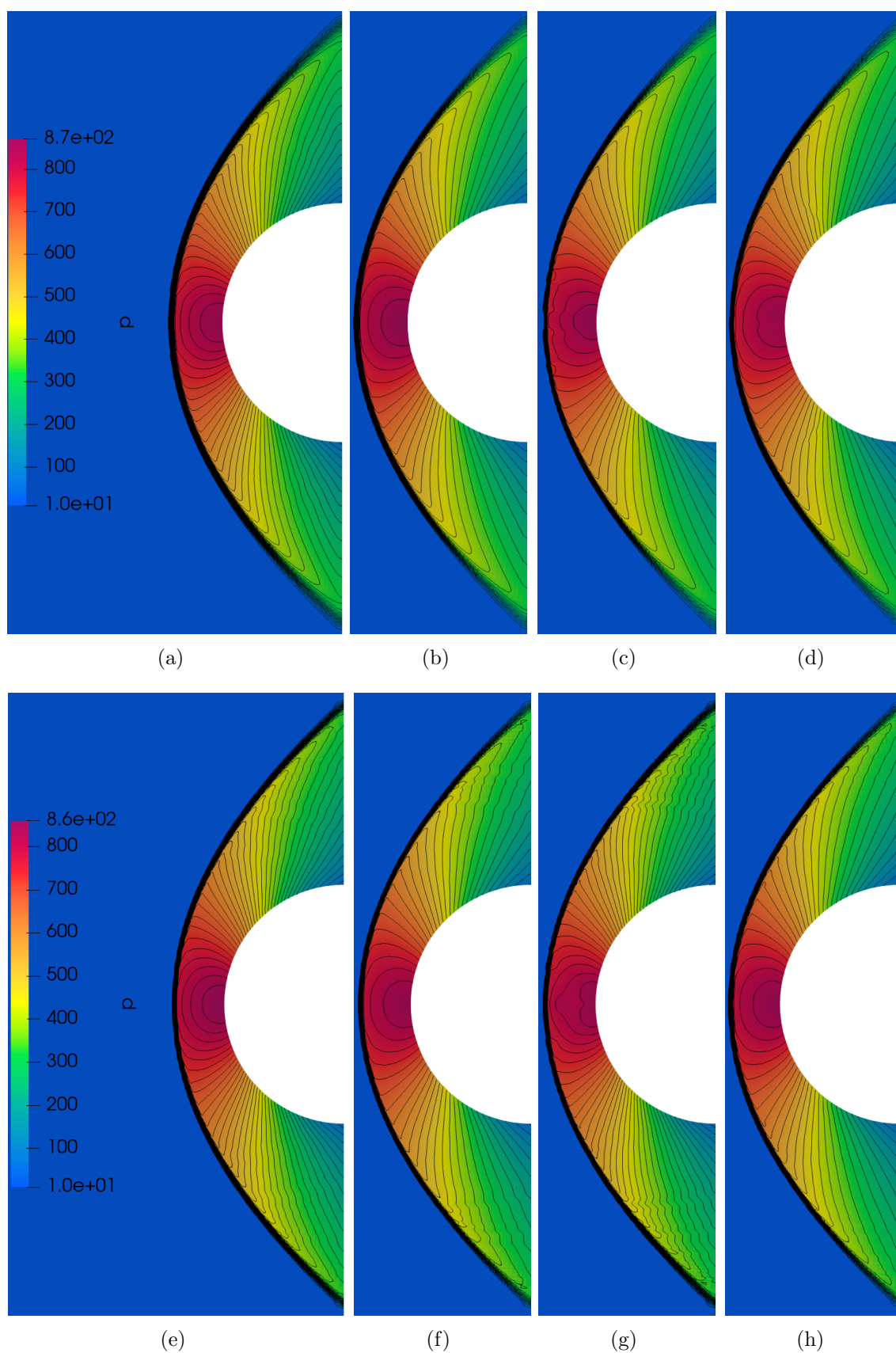
Historie konvergence schémat s TVD rekonstrukcí s Runge-Kuttovou dvoukrokovou metodou časové integrace je ukázána na obrázku 4.18. Metody zkonvergují po 30000 iteracích.



Obrázek 4.13: Obtékání válce - isočáry hustoty

Metody prvního řádu: (a) rotované HLL/HLLC (b) HLL (c) HLLC (d) AUSM+up

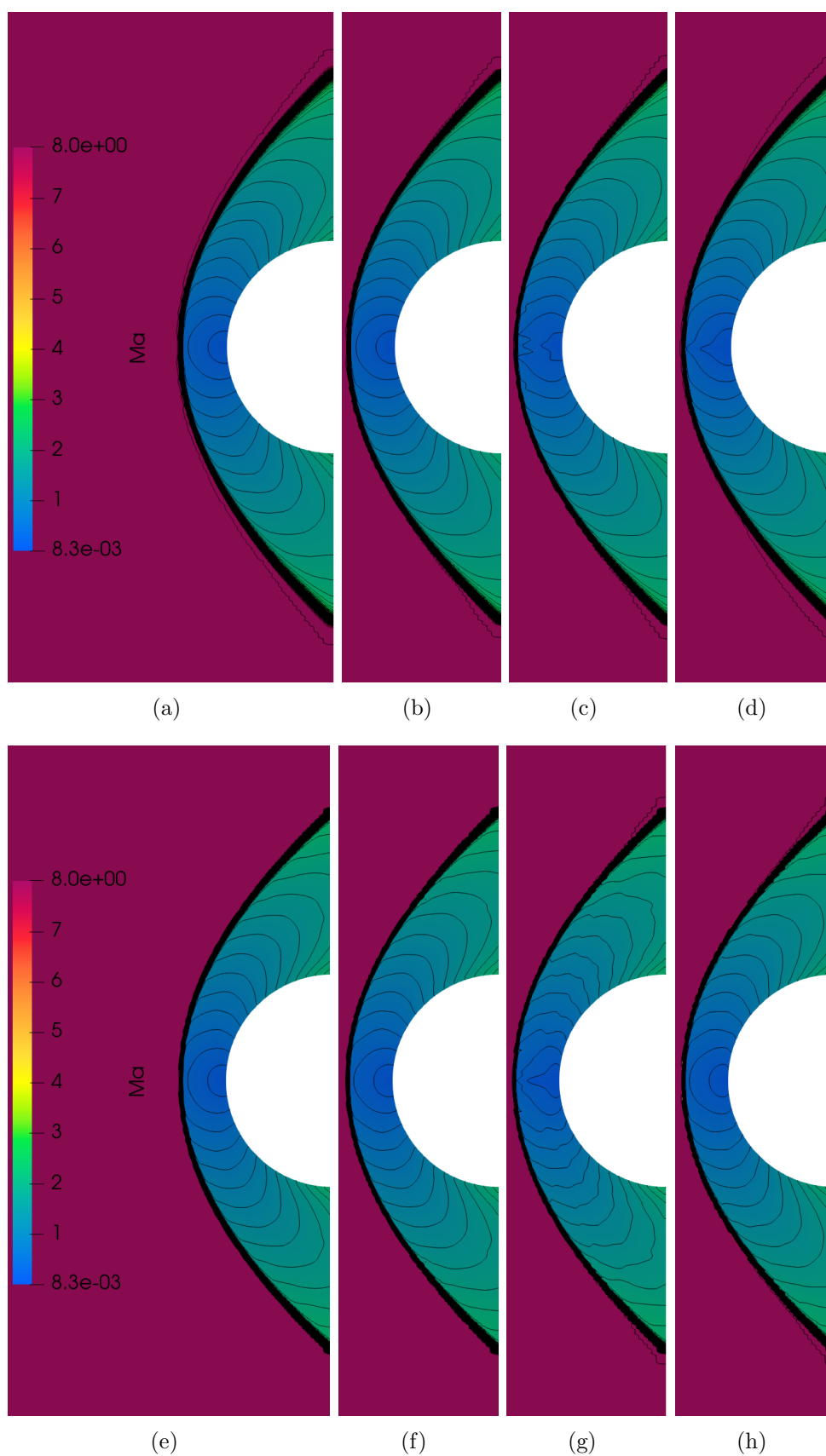
Metody druhého řádu: (e) rotované HLL/HLLC (f) HLL (g) HLLC (h) AUSM+up



Obrázek 4.14: Obtékání válce - isočáry tlaku

Metody prvního řádu: (a) rotované HLL/HLLC (b) HLL (c) HLLC (d) AUSM+up

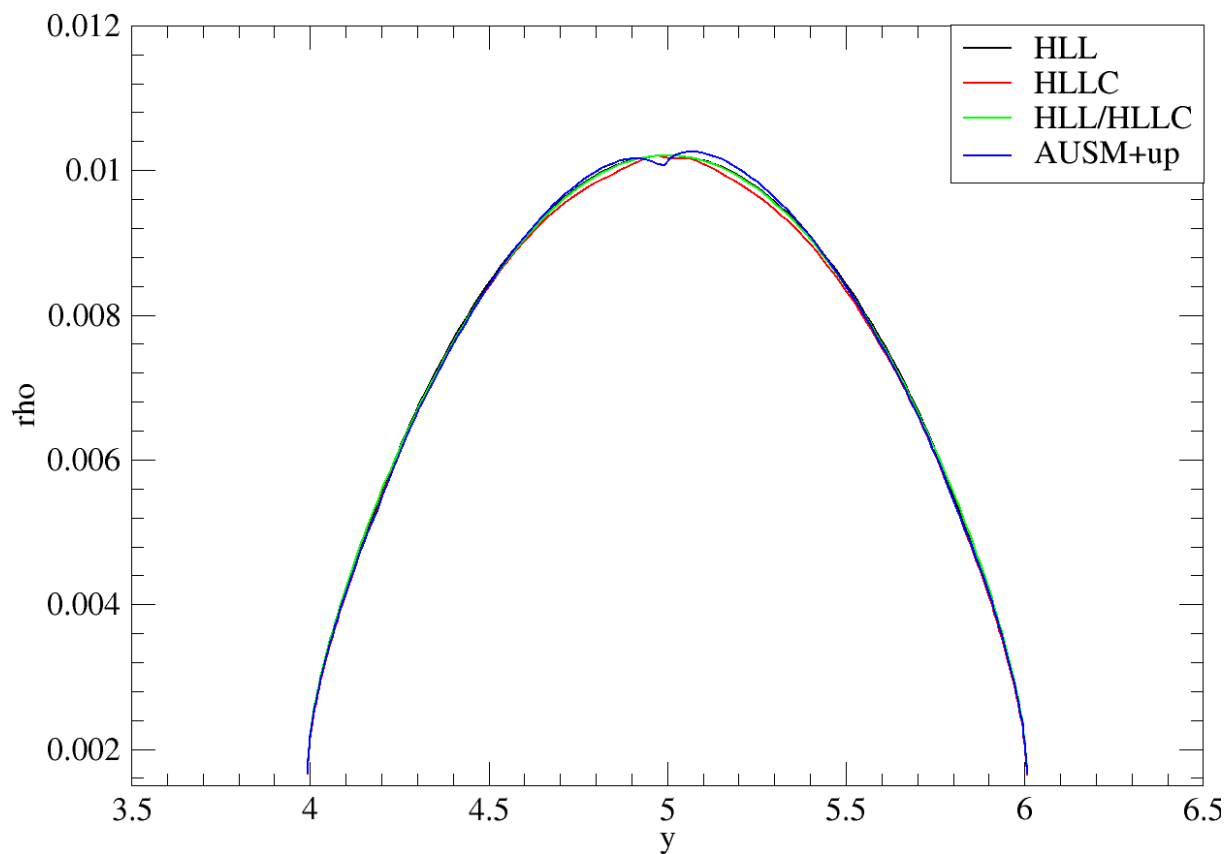
Metody druhého řádu: (e) rotované HLL/HLLC (f) HLL (g) HLLC (h) AUSM+up



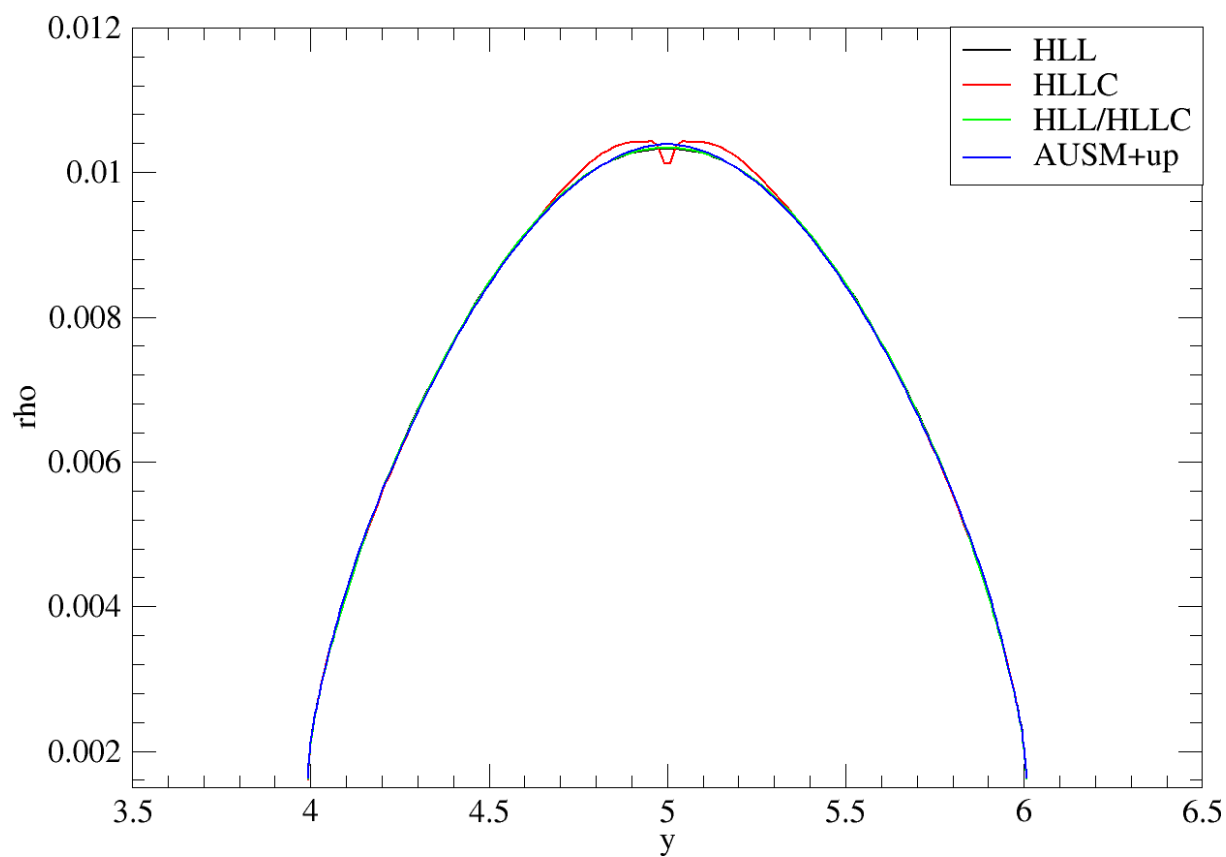
Obrázek 4.15: Obtékání válce - isočáry Machova čísla

Metody prvního řádu: (a) rotované HLL/HLLC (b) HLL (c) HLLC (d) AUSM+up

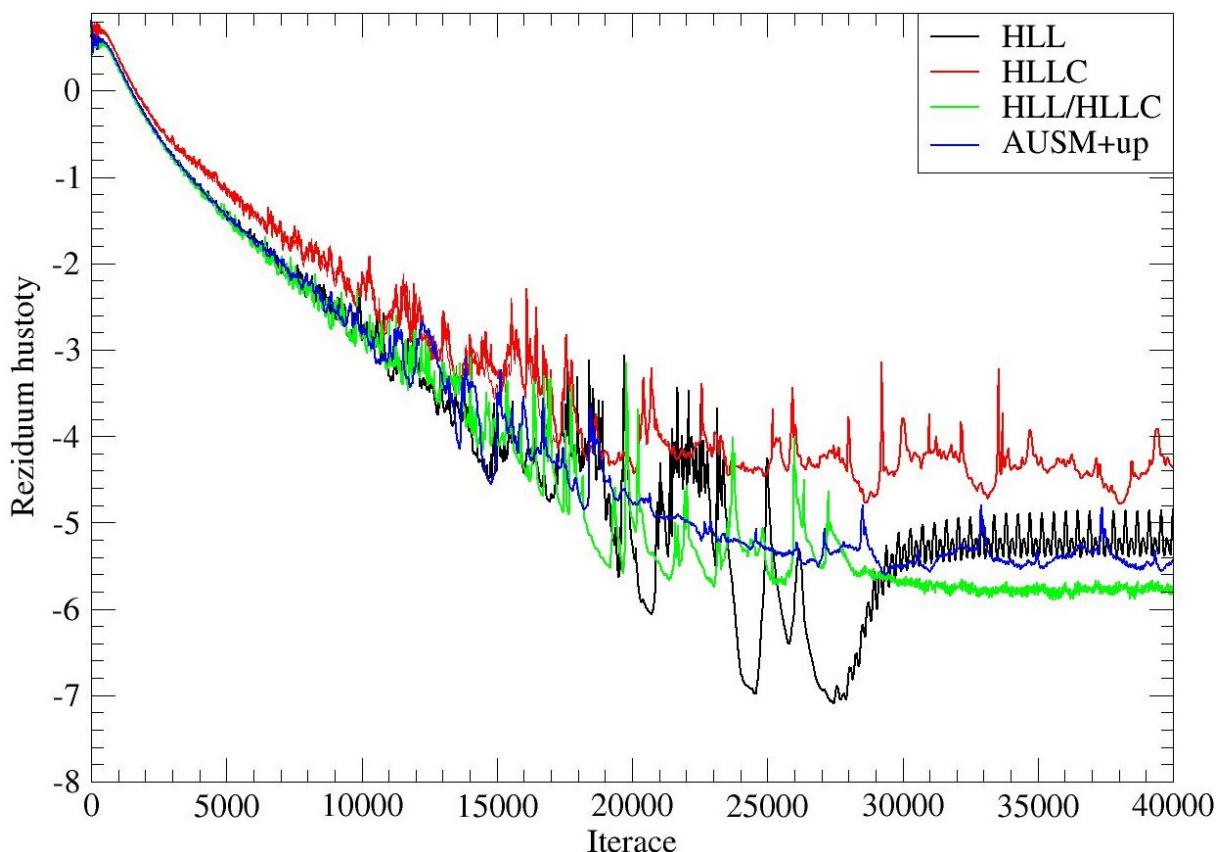
Metody druhého řádu: (e) rotované HLL/HLLC (f) HLL (g) HLLC (h) AUSM+up



Obrázek 4.16: Obtékání válce - průběh hustoty na stěně - metody prvního řádu



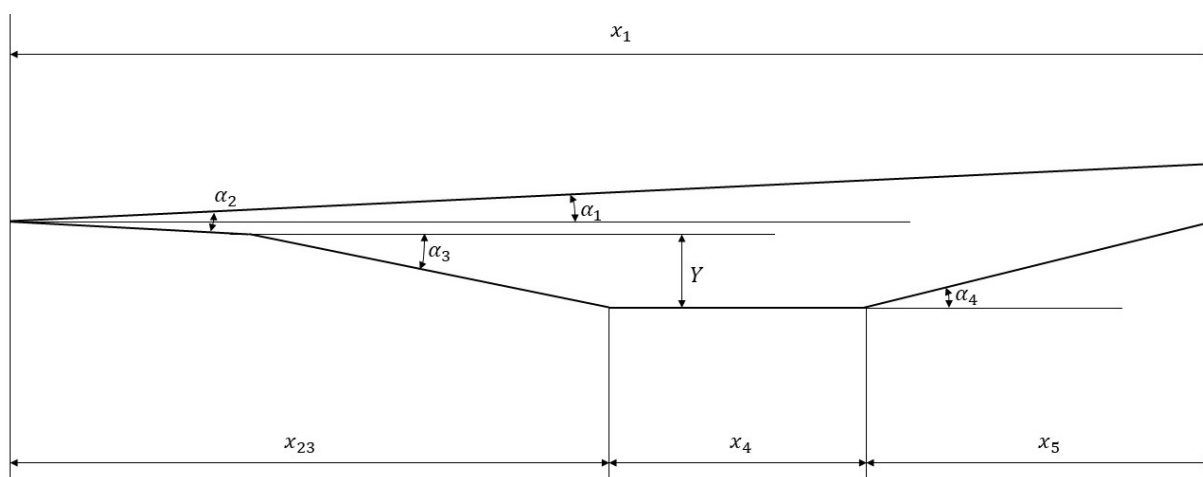
Obrázek 4.17: Obtékání válce - průběh hustoty na stěně - metody druhého řádu



Obrázek 4.18: Obtékání válce - historie rezidua metod druhého řádu

4.3 Hypersonické obtékání profilu letadla X-43A

Hypersonické letadlo X-43A, také známé jako Hyper-X Research Vehicle (HXRV), je experimentální výzkumné letadlo navržené pro bezpilotní lety ve vysokých výškách při hypersonických rychlostech až do $M = 10$. V listopadu 2004 se stalo nejrychlejším letadlem, dosáhlo Machova čísla $M = 9.68$ ve výšce $z = 33223$ m. X-43A je pomocí rakety zrychleno do hypersonického testovacího bodu, poté je poháněno trupově-integrovaným pohonem scramjet. Hlavním cílem bylo demonstrovat, ověřit a implementovat technologii, experimentální techniky a výpočetní metody a nástroje pro návrh a predikci výkonu hypersonického letadla s trupově-integrovaným pohonem scramjet. Za účelem získání potřebných dat NASA navrhla a vyrobila tři podobná letadla X-43A. Dvě z nich byly navrženy pro lety rychlostí $M = 7$ a třetí pro rychlost $M = 10$. Všechna letadla měřila přibližně $l = 3.66$ m na délku a vážila zhruba $m = 1361$ kg. Geometrie aerodynamického profilu X-43A je definována návrhovými úhly $\alpha_1 = 2.7^\circ$, $\alpha_2 = 3.07^\circ$, $\alpha_3 = 11.5^\circ$ a $\alpha_4 = 13.9^\circ$ a následujícími hlavními rozměry $x_1 = 3.66$ m, $x_{23} = 1.83$ m, $Y = 0.2225$ m, $x_4 = 0.762$ m a $x_5 = 1.068$ m [20] viz obrázek 4.19. Obtékání profilu je řešeno v nadmořské výšce $z = 30$ km při Machově čísle $M = 7$ a nulovém úhlu náběhu $\alpha_\infty = 0$. Výpočetní oblast včetně aplikace jednotlivých okrajových podmínek pro tuto úlohu je zobrazena na obrázku 4.20.



Obrázek 4.19: X-43A - geometrie profilu

Vlevo na hranici předepisují okrajovou podmínku supersonický vstup, vpravo předepisují podmínku supersonický výstup, na aerodynamický profil předepisují stěnu a v místě, kde je síťový blok napojen sám na sebe předepisují periodickou podmínku. Tento případ je počítán na hyperbolicky generované síti tvořené z 900x100 buněk, síť byla převzata z [21].

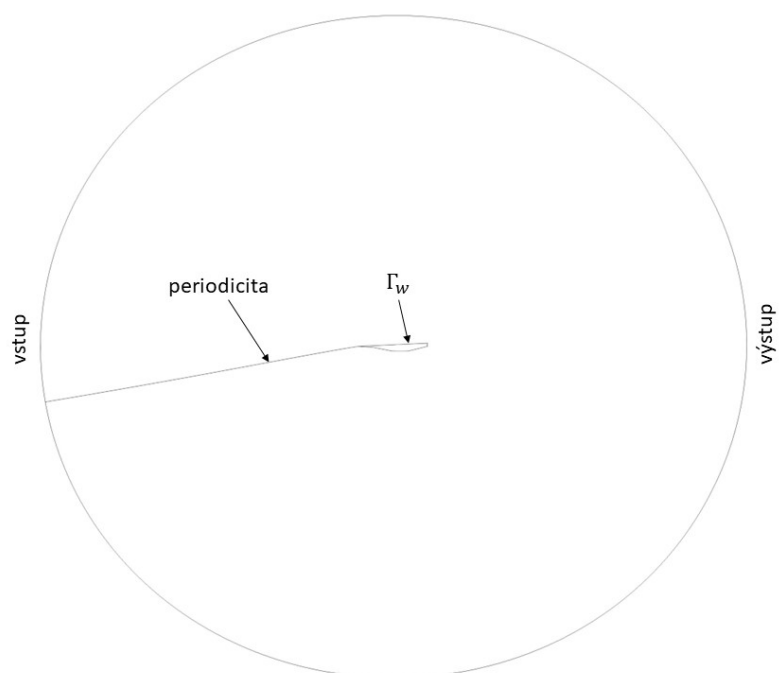
Proudění je charakterizováno hodnotami na supersonickém vstupu, kde předepisují hodnoty nenarušeného proudu tak, aby bylo Machovo číslo $M = 7$. Dále je dáno, že příklad je počítán ve výšce $z = 30$ km, na supersonickém vstupu tedy zadávám:

$$\begin{aligned}
 \rho_{\infty} &= 0.0176 \text{ kgm}^{-3} \\
 u_{\infty} &= 2135.3 \text{ ms}^{-1} \\
 v_{\infty} &= 0 \\
 p_{\infty} &= 1172 \text{ Pa}
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

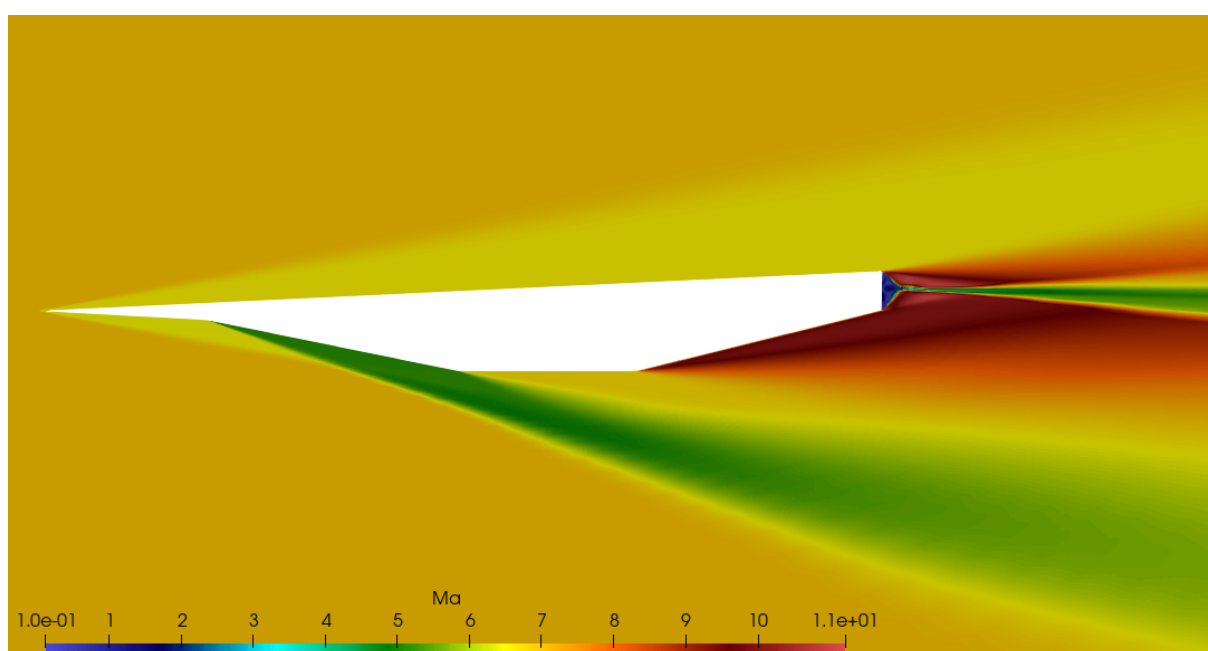
Tento příklad byl počítán schématem AUSM+up a rotovaným hybridním řešičem HLL/HLLC, pro zvýšení řádu přesnosti v prostoru byla u obou schémat použita TVD rekonstrukce. Jelikož se jedná o výpočet s hyperbolicky generovanou sítí je velmi výhodné použít lokální časový krok. V každé buňce se počítá časový krok z podmínky stability (3.72) a nehledá se tedy minimum přes všechny buňky výpočetní oblasti.

Na obrázcích 4.22 - 4.29 jsou srovnány výsledky obou schémat. Je vidět, že obě metody jsou srovnatelné. Metody správně zachycují rázové vlny. Obě metody modelují šikmou přimknutou čelní rázovou vlnu na špičce aerodynamického profilu, v dolní části profilu správně zobrazují rázovou vlnu. V dalších dvou následujících zakřiveních v dolní části správně zachycují Prandtl-Mayerovy expanze.

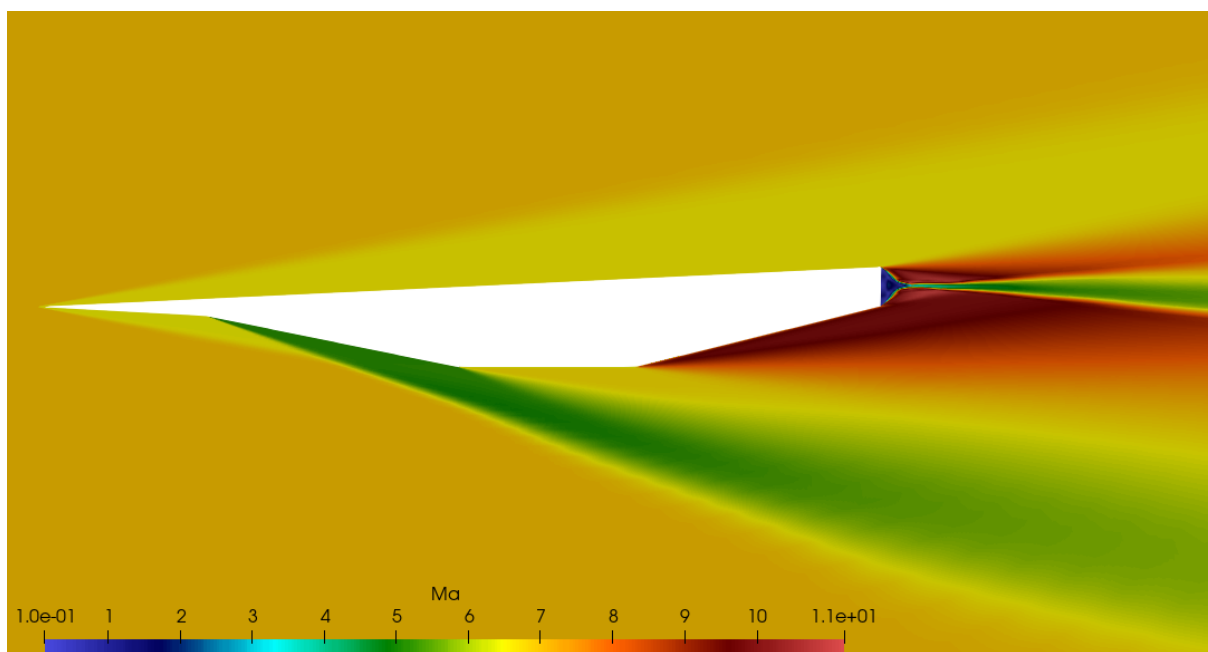
Na obrázku 4.23 je vidět výsledek laminárního proudění publikovaný v [21]. Tento výsledek navíc zobrazuje mezní vrstvu, interakci mezní vrstvy a rázových vln. Největší rozdíl se srovnávanými výsledky je však vidět v oblasti za aerodynamickým profilem,



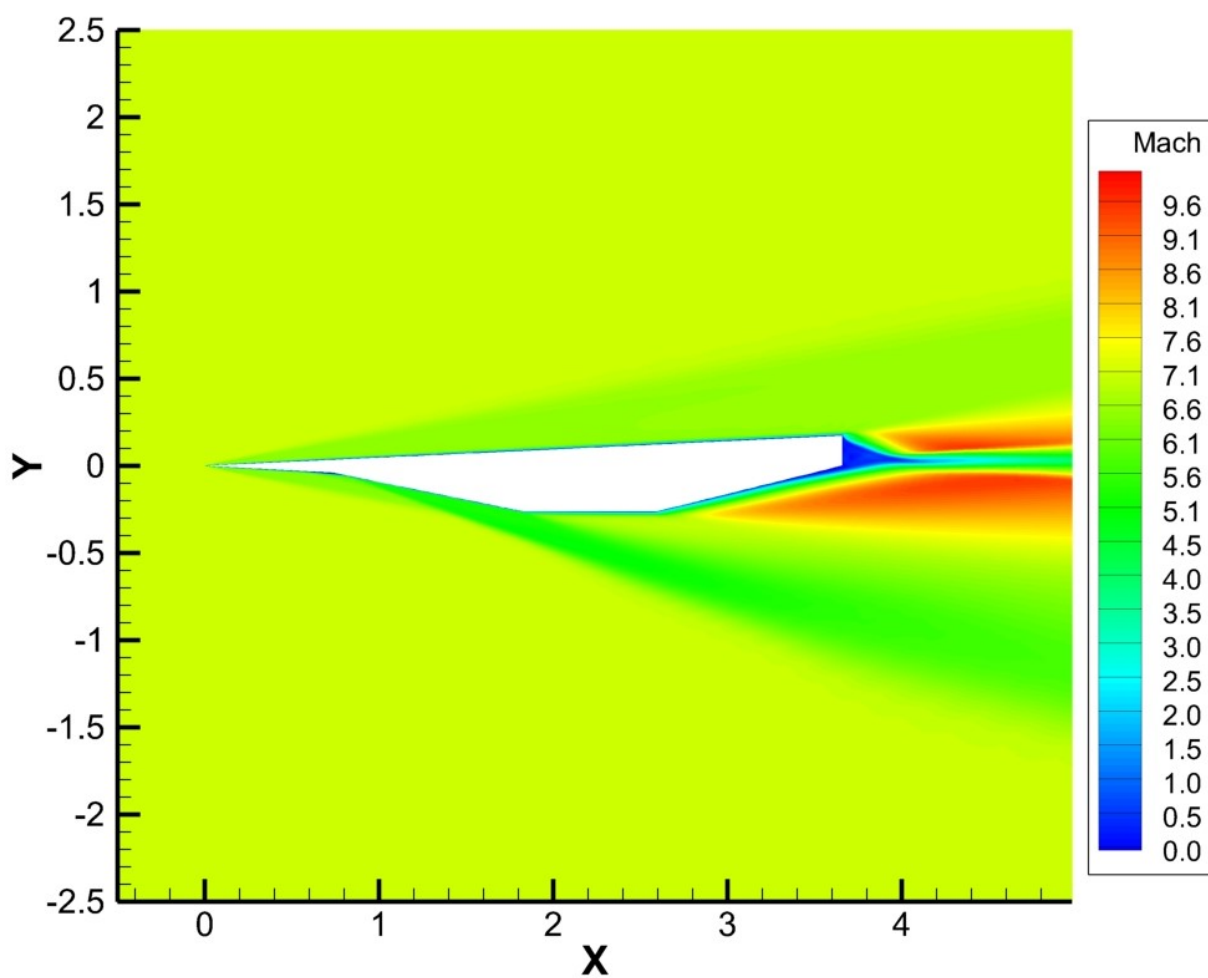
Obrázek 4.20: X-43A - schéma



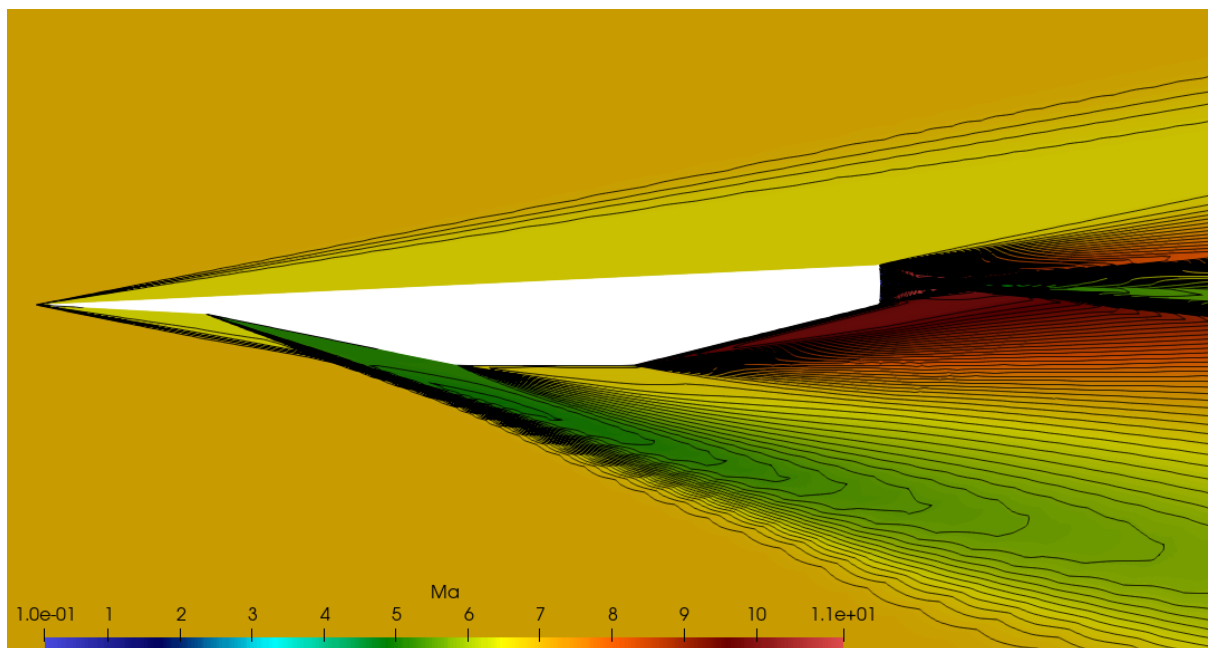
Obrázek 4.21: X-43A - rozložení Machova čísla - AUSM+up



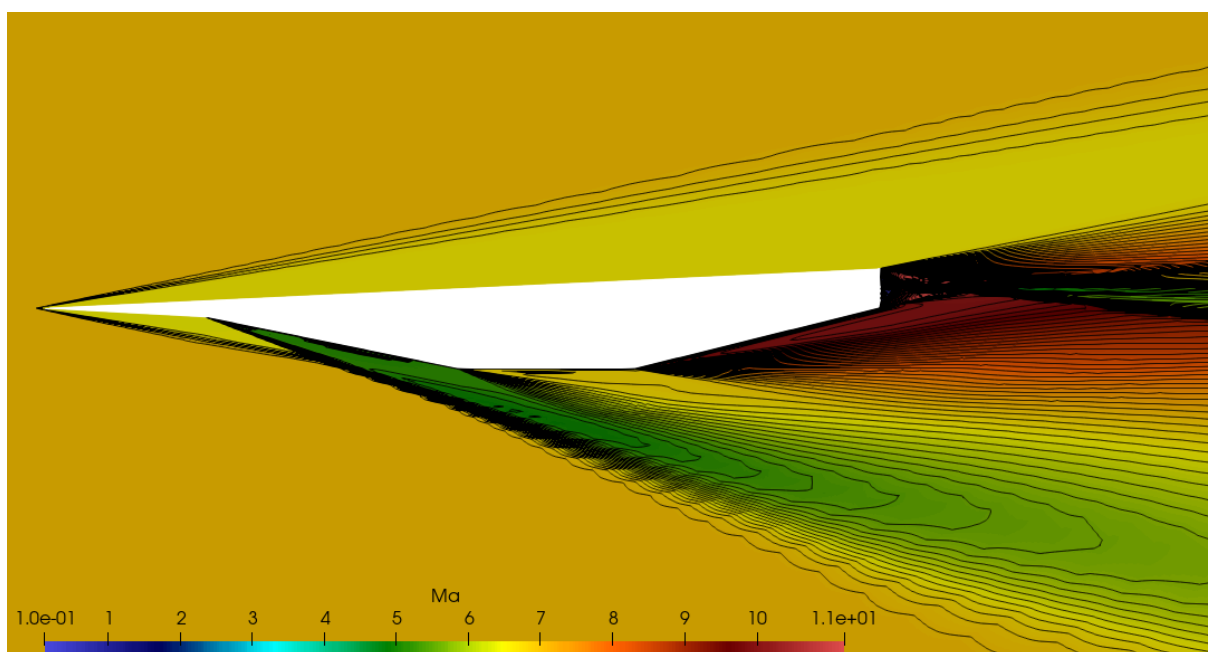
Obrázek 4.22: X-43A - rozložení Machova čísla - HLL/HLLC



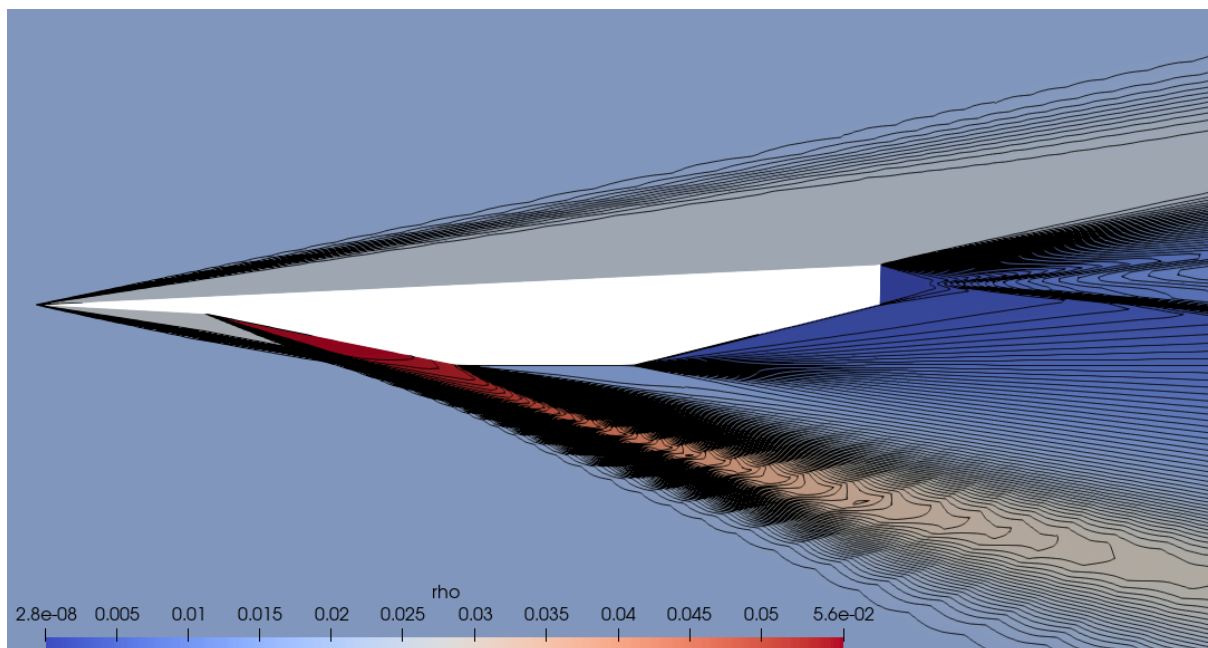
Obrázek 4.23: X-43A - rozložení Machova čísla - laminární proudění - HLL/HLLC [21]



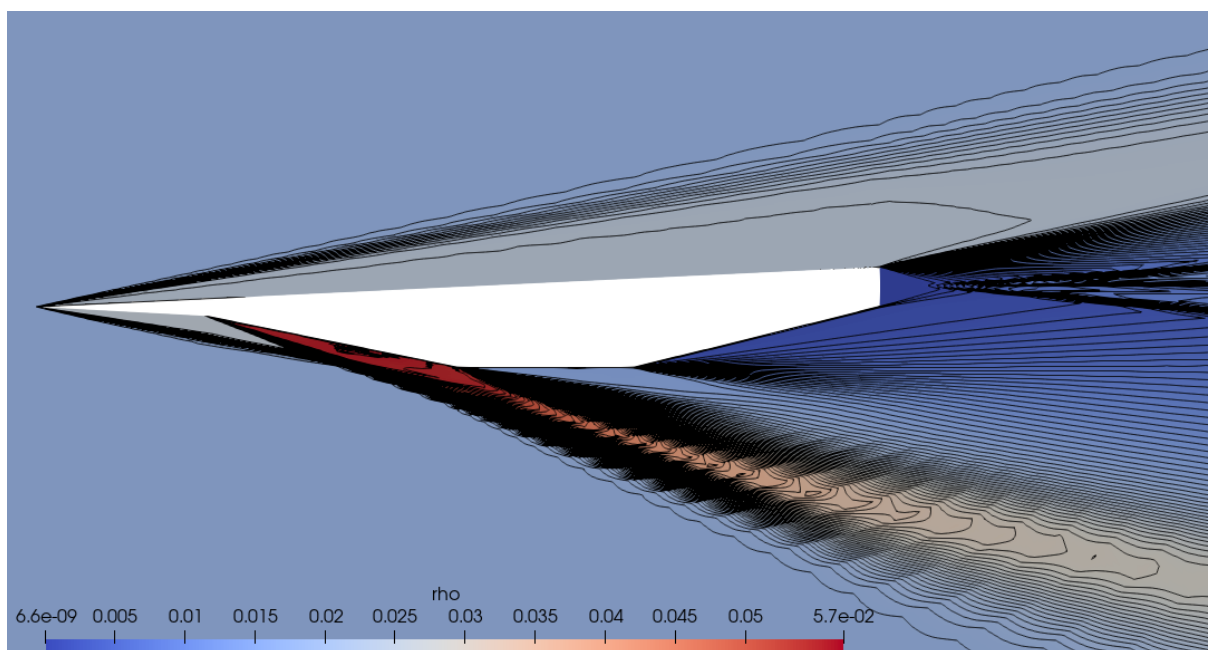
Obrázek 4.24: X-43A - isočáry Machova čísla - HLL/HLLC



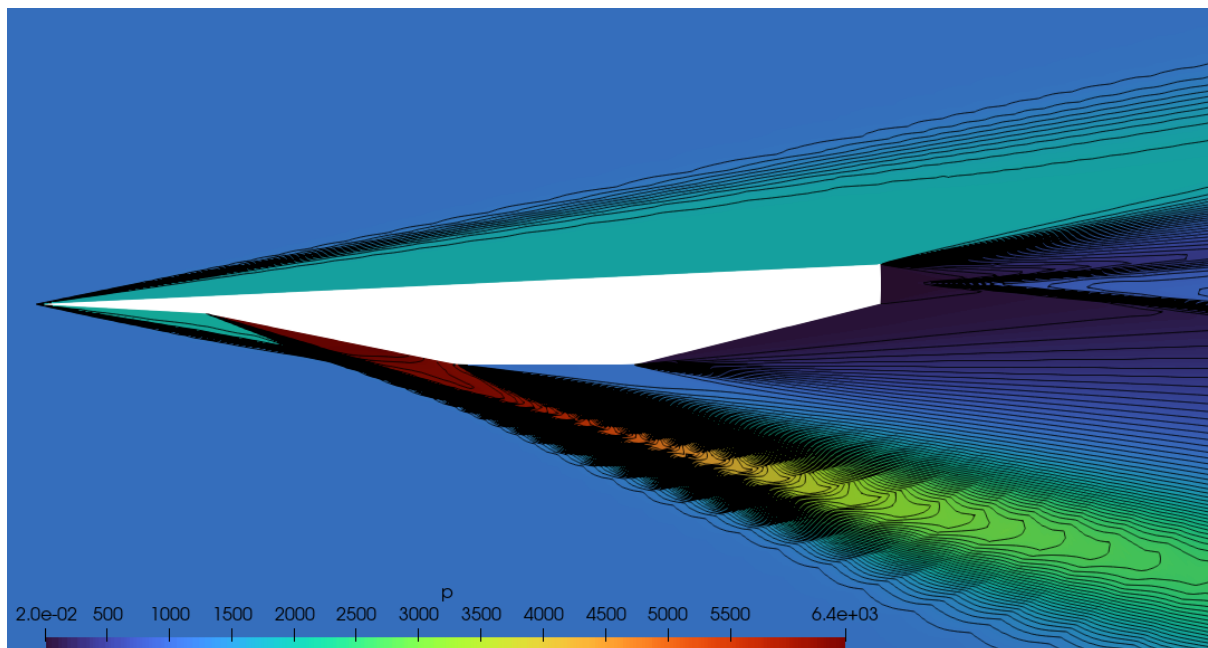
Obrázek 4.25: X-43A - isočáry Machova čísla - AUSM+up



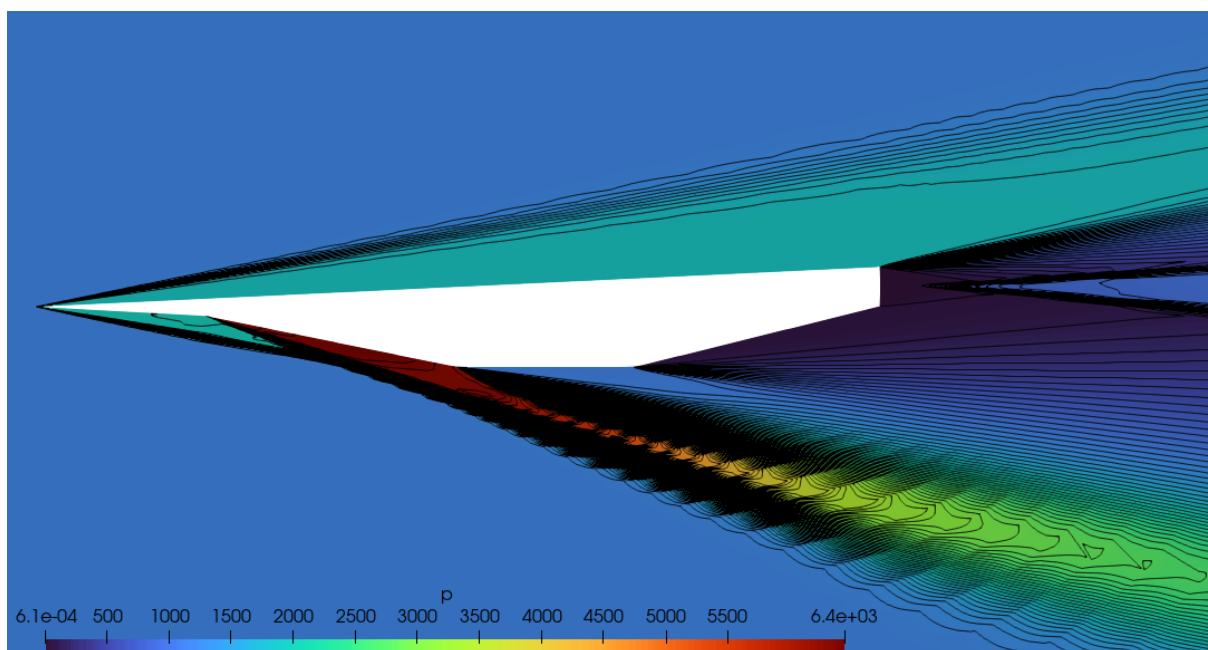
Obrázek 4.26: X-43A - isočáry hustoty - HLL/HLLC



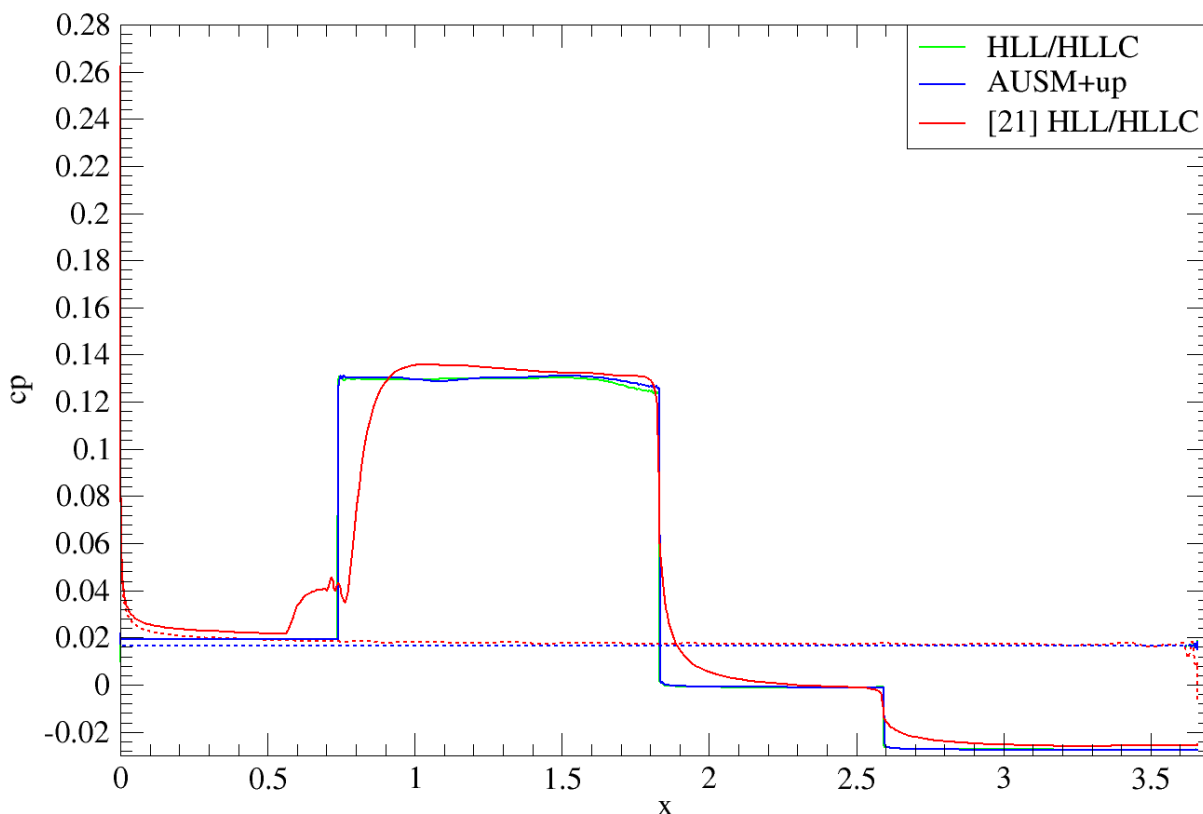
Obrázek 4.27: X-43A - isočáry hustoty - AUSM+up



Obrázek 4.28: X-43A - isočáry tlaku - HLL/HLLC



Obrázek 4.29: X-43A - isočáry tlaku - AUSM+up



Obrázek 4.30: X-43A - průběh tlakového koeficientu na aerodynamickém profilu

kde při matematickém modelování nevazkého proudění metody kvůli umělé numerické vazkosti schémat vypočítají úplav. Až na tyto nedostatky vzniklé zanedbáním vazkých efektů jsou vypočtené výsledky v dobré shodě s výsledky publikovými v [20] a [21].

Srovnání isočar Machovova čísla je zobrazeno na obrázcích 4.24 a 4.25. Rotované schéma zobrazuje ostřeji čelní rázovou vlnu a výrazněji rozlišuje oblasti mezi jednotlivými rázovými vlnami a Prandtl-Mayerovými expanzemi.

Na obrázcích 4.26 - 4.29 je vidět, že se schémata nejvíce liší v oblasti po rázové vlně v oblasti po prvním zakřivení profilu v dolní části. Isočáry spočítané AUSM+up metodou jsou v této části značně rozrušené, oproti tomu hybridní HLL/HLLC spočítá plynulé isočáry tlaku i hustoty.

Na obrázku 4.30 je srovnán průběh tlakového součinitele na stěně obtékaného profilu

$$c_p = \frac{(p - p_\infty)}{(0.5\rho_\infty u_\infty^2)}. \quad (4.3)$$

Čárkovanou čarou je označen průběh tlakového součinitele na horní části profilu a plnou čarou na dolní části. Vypočtené výsledky jsou na obrázku porovány s výsledkem publikovaným v [21] (označeno červenou barvou), kde se však uvažovalo laminární proudění tekutiny. Tlakový součinitel se liší v dolní části v oblastech změny geometrie. Spočítané výsledky ukazují skokové změny zatímco referenční výsledky spočítají postupný nárůst či

pokles. V horní části se tlakový součinitel liší na začátku a na konci profilu. Vypočtené výsledky se od sebe liší minimálně v oblasti po prvním zakřivení v dolní části profilu.

Kapitola 5

Závěr

Práce začíná představením hypersonického proudění, bylo zde zdůvodněno proč má smysl k řešení hypersonického proudění používat metod numerického řešení neviskózní stlačitelné tekutiny. Dále byla v této kapitole nastíněna problematika výběru vhodných numerických schémat pro matematické modelování hypersonického proudění. V následující kapitole byl popsán matematický model proudění neviskózní stlačitelné tekutiny. Byly zde uvedeny zákony zachování, ze kterých sestává soustava Eulerových rovnic, která byla uzavřena stavovou rovnicí ideálního plynu. Potom následovalo uvedení počátečních a okrajových podmínek používaných v této práci. Ve třetí kapitole byla odvozena metoda konečných objemů pro soustavu Eulerových rovnic pro rovinné proudění stlačitelné neviskózní tekutiny. Tato část pokračovala uvedením jednotlivých metod aproximující neviskózní tok stěnou hranice výpočetní buňky. Byly zde uvedeny schémata HLL, HLLC, rotované hybridní HLL/HLLC a AUSM+up. Kapitola pokračovala numerickou realizací jednotlivých okrajových podmínek, způsobem docílení metody vyššího řádu přesnosti v prostoru a dále popisem metod časové integrace. V předposlední kapitole byly prezentovány výsledky získané pomocí metod, které byly definovány v předchozích kapitolách. Bylo řešeno transonické proudění v GAMM kanálu z důvodu otestování správnosti implementace řešiče proudění neviskózní tekutiny. Dále byla řešena úloha hypersonického obtékání válce při rychlosti nabíhajícího proudu odpovídající Machovu číslu $M = 8$. Na závěr byly nejúspěšnější metody pro matematické modelování hypersonického proudění stlačitelné neviskózní tekutiny vybrány pro výpočet hypersonického proudění okolo aerodynamického profilu hypersonického letounu X-43A při rychlosti odpovídající Machovu číslu $M = 7$ v nadmořské výšce $z = 30\text{km}$. Pro zvýšení řádu v prostoru byla použita TVD rekonstrukce s minmod limiterem a z metod aproximující numerický tok byl vybrán rotovaný hybridní Riemannův řešič HLL/HLLC a AUSM+up. Výsledky obou metod byly srovnány se závěrem, že o něco vhodnější metodou numerického modelování nejen hypersonického proudění je rotovaný hybridní Riemannův řešič HLL/HLLC, protože spočítá výsledky s ostřeji vykreslenými

jednotlivými jevy proudového pole. Je ovšem nutno podotknout, že výpočet rotovaným hybridním schématem zabere přibližně 1.8x násobku času z důvodu počítání dvou numerických toků oproti jednomu při výpočtu AUSM+up metodou.

Lze tedy prohlásit, že všechny body zadání diplomové práce byly splněny. Tato práce by se dala rozšířit o řešení proudění vazké tekutiny, tedy numerické řešení soustavy Navierových-Stoeksových rovnic. Výsledky řešení obtékání aerodynamického profilu letounu X-43A při hypersonických rychlostech by tedy ukazovaly mezní vrstvu, interakce rázových vln s mezní vrstvou a správně by vypočítaly oblast za aerodynamickým profilem.

Bibliografie

- [1] J. Blazek, *Computational fluid dynamics: principles and applications*. Amsterdam: Elsevier, 2015.
- [2] J. H. Ferziger, M. Perić a R. L. Street, *Computational methods for fluid dynamics*. Springer, 2019.
- [3] R. J. LeVeque, *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge university press, 2002, sv. 31.
- [4] C. J. Adkins, *Equilibrium thermodynamics*. Cambridge University Press, 1983.
- [5] J. Holman, *Numerické řešení stacionárního a nestacionárního turbulentního proudění*. Disertační práce. Praha: ČVUT FS, 2014.
- [6] K. Kozel a J. Fürst, *Numerické metody řešení problém proudění I*. skriptum. ČVUT FS, 2001.
- [7] J. W. Demmel, *Applied numerical linear algebra*. SIAM, 1997.
- [8] A. Harten, P. D. Lax a B. v. Leer, “On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws”, *SIAM review*, roč. 25, č. 1, s. 35–61, 1983.
- [9] E. F. Toro, “The HLL and HLLC Riemann Solvers”, in *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009, s. 315–344.
- [10] B. Einfeldt, “On Godunov-Type Methods for Gas Dynamics”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, roč. 25, č. 2, s. 294–318, 1988.
- [11] H. Nishikawa a K. Kitamura, “Very simple, carbuncle-free, boundary-layer-resolving, rotated-hybrid Riemann solvers”, *Journal of Computational Physics*, roč. 227, č. 4, s. 2560–2581, 2008.
- [12] P. Batten, M. A. Leschziner a U. Goldberg, “Average-state Jacobians and implicit methods for compressible viscous and turbulent flows”, *Journal of computational physics*, roč. 137, č. 1, s. 38–78, 1997.
- [13] P. Batten, N. Clarke, C. Lambert a D. M. Causon, “On the choice of wavespeeds for the HLLC Riemann solver”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, roč. 18, č. 6, s. 1553–1570, 1997.
- [14] S. Henderson a J. Menart, “Grid study on blunt bodies with the Carbuncle phenomenon”, in *39th AIAA thermophysics conference*, 2007, s. 3904.
- [15] R. David a J. Holman, “Numerical solution of Euler equations using rotated-hybrid Riemann solver”, s. 63–68, 2019.

-
- [16] Y.-X. Ren, “A robust shock-capturing scheme based on rotated Riemann solvers”, *Computers & Fluids*, roč. 32, č. 10, s. 1379–1403, 2003.
- [17] M.-S. Liou, “A sequel to AUSM, Part II: AUSM+-up for all speeds”, *Journal of computational physics*, roč. 214, č. 1, s. 137–170, 2006.
- [18] M.-S. Liou, “A sequel to ausm: Ausm+”, *Journal of computational Physics*, roč. 129, č. 2, s. 364–382, 1996.
- [19] J. C. Butcher, “On Runge-Kutta processes of high order”, *Journal of the Australian Mathematical Society*, roč. 4, č. 2, s. 179–194, 1964.
- [20] À. Navó a J. M. Bergada, “Aerodynamic study of the NASA’s X-43A hypersonic aircraft”, *Applied Sciences*, roč. 10, č. 22, s. 8211, 2020.
- [21] J. Holman a J. Fürst, “Rotated-hybrid Riemann solver for all-speed flows”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, roč. 427, s. 115–129, 2023.