

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta strojní - Ústav technické matematiky

Diplomová práce



Metoda konečných prvků a její použití v úlohách
kmitání elastického tělesa

Autor: Prokop Pučejdl

Vedoucí: doc. RNDr. Petr Sváček Ph.D.

Akademický rok 2022/2023

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Pučejdl** Jméno: **Prokop** Osobní číslo: **482427**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**
Studijní program: **Aplikované vědy ve strojním inženýrství**
Specializace: **Matematické modelování v technice**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Metoda konečných prvků a její použití v úlohách kmitání elastického tělesa

Název diplomové práce anglicky:

Application of Finite Element Method for Vibrations of Elastic Structures

Pokyny pro vypracování:

Fyzikální popis problému kmitání elastického tělesa.
Matematická formulace stacionární úlohy.
Popis numerické aproximace pomocí metody konečných prvků.
Formulace nestacionární úlohy. Modální analýza.
Modální analýza předepjatého tělesa.
Realizace numerických výpočtů pomocí metody konečných prvků.

Seznam doporučené literatury:

P. Sváček, M. Feistauer, Metoda konečných prvků, Vydavatelství ČVUT, 2007
Miroslav Brdička, Ladislav Samek, Bruno Sopko, Mechanika kontinua, Academia 2005
Feistauer, M. (1993) Mathematical Methods in Fluid Dynamics. Longman Scientific & Technical, New York. 1992
P. Ciarlet, Numerical analysis of the finite element method 1976, Montreal, Canada.
P. G. Ciarlet, Mathematical Elasticity, SIAM 2022

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

doc. RNDr. Petr Sváček, Ph.D. ústav technické matematiky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **13.04.2023**

Termín odevzdání diplomové práce: **13.08.2023**

Platnost zadání diplomové práce: _____

doc. RNDr. Petr Sváček, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

prof. Ing. Jiří Fůrst, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením doc. RNDr. Petra Sváčka, Ph.D. a s použitím zdrojů uvedených v příloženém seznamu na konci práce.

V Praze dne

.....

Podpis

Poděkování

Děkuji panu doc. RNDr. Petru Sváčkovi, Ph.D., za vedení této práce a za pravidelné konzultace, které pomohly k obeznámení se s příslušnou tematikou a při následné tvorbě práce.

Abstrakt

Tato práce se zabývá matematickou formulací a následným numerickým řešením problémů elastické deformace a kmitání elastického tělesa pomocí metody konečných prvků. V práci je zaveden matematický aparát popisující statickou i dynamickou deformaci, a to jak model lineární popisující problémy malých deformací, tak model nelineární vhodný pro úlohy s velkými deformacemi, rotacemi či předpětím. Dále je popsána problematika modální analýzy, tedy vyšetřování vlastních frekvencí a vlastních tvarů kmitajícího tělesa. Je popsáno řešení těchto úloh metodou konečných prvků a je vytvořen program v jazyce C implementující tuto metodu. Program je využit k řešení problémů deformace nosníku, vyšetřování vlastních frekvencí modelu křídla a analýzy kmitání modelu lidské hlasivky.

Abstract

This thesis is interested in mathematical formulation and subsequent numerical solution of problems related to elastic deformation and elastic body vibration using finite element method. Thesis introduces a mathematical model describing both static and dynamic deformation using linear model for small deformation problems and nonlinear model suitable for problems with large deformations, rotations or prestress. Furthermore, it describes a modal analysis, which involves determining the natural frequencies and mode shapes of a vibrating body. Solution of these problems using finite element analysis is described and a program implementing this method is developed in the C language. The program is used in problems like deformation of a beam, determining the natural frequencies of a wing model, and vibration analysis of a human vocal fold model.

Obsah

1	Úvod	5
2	Matematický model	6
2.1	Deformace kontinua	6
2.2	Působící síly a Cauchyho napětí	8
2.3	Rovnice rovnováhy a zákon zachování hybnosti	9
2.4	Pioloova transformace a rovnice rovnováhy v referenční konfiguraci	11
2.5	Konstitutivní vztahy mezi napětím a deformací	12
3	Numerické řešení	14
3.1	Slabá formulace problému lineární elasticity	14
3.2	Prostorová diskretizace	16
3.3	Časová diskretizace	17
3.4	Modální analýza	19
3.5	Diskretizace úlohy nelineární elasticity	20
4	Programová realizace a technické aspekty diskretizace pomocí MKP	23
4.1	Tvorba a načtení sítě	23
4.2	Sestavení matic	23
4.3	Sestavení vektoru pravých stran	24
4.4	Řešení soustavy	25
4.5	Řešení problému zobecněných vlastních čísel a frekvenční analýza	26
4.6	Vizualizace výsledků	26
5	Numerické výsledky	27
5.1	Vyšetřování deformace modelu nosníku, srovnání lineárního a nelineárního modelu	27
5.1.1	Statická deformace	28
5.1.2	Dynamická deformace	30
5.2	Vyšetřování vlastních frekvencí modelu křídla	33
5.2.1	Řešení rovnic pro ortotropní materiály	34
5.3	Vyšetřování kmitů modelu lidské hlasivky	39
5.3.1	Modální analýza	40
5.3.2	Dynamická odezva na tlakový vzruch	45
5.3.3	Vliv přepětí na vlastní frekvence	49
6	Závěr	52

1 Úvod

Deformace elastického tělesa je jedním z běžných problémů, které jsou zapotřebí řešit v mnoha inženýrských aplikacích. Časově závislá deformace pak může vést ke vzniku kmitů ve vyšetřovaném tělese, což může být jev žádoucí (vznik hlasu kmitáním hlasivek), ale i nežádoucí (flutter u leteckého křídla), viz například [10], [2].

K řešení problému deformace pružného tělesa vlivem působících sil uvažujeme model kontinua, tedy zjednodušení předpokládající spojité rozložení hmoty. S využitím modelu kontinua tak můžeme fyzikální problémy modelovat pomocí spojitých funkcí a diferenciálního a integrálního počtu.

Příslušný matematicko-fyzikální model je založený na takzvaném *Lagrangeovu popisu kontinua*, tedy popisu založeném na materiálových, nebo také referenčních souřadnicích, kde neznámou je pole posuvů po deformaci, viz [3]. Je tedy zapotřebí definovat míry deformace, napětí a vztah mezi nimi. V závislosti na charakteru řešeného problému je pak zapotřebí volit vhodný matematický model. Běžně definujeme model lineární pro problémy malých deformací a nelineární pro problémy velkých deformací, rotací či vyšetřování deformace předepjatých těles.

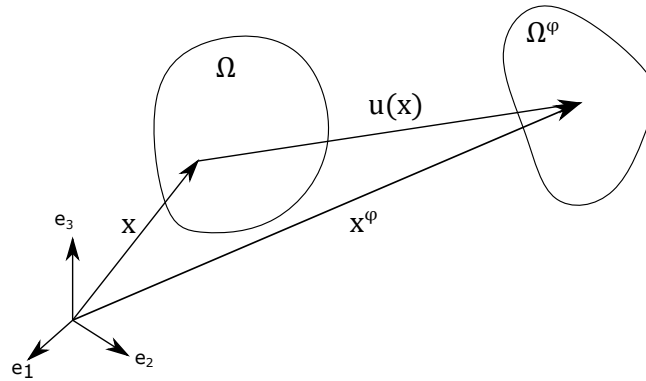
Numerické řešení úloh pružnosti budeme provádět pomocí *metody konečných prvků* (dále MKP), viz [20]. Parciální diferenciální rovnice je nejdříve zapotřebí převést do takzvané slabé formulace, která je následně diskretizována pomocí metody konečných prvků na soustavu lineárních algebraických rovnic pro problémy statiky, popřípadě na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic pro dynamické problémy. V takovém případě je zapotřebí zavést i vhodnou časovou diskretizaci tohoto systému. Při vyšetřování vlastních frekvencí a vlastních tvarů kmitajících těles je pak zapotřebí řešit rovnice modální analýzy, viz [18].

Zavedením příslušných diskretizací je pak možné s pomocí výpočetní techniky řešit rozličné problémy dynamické deformace a kmitání elastických těles. V práci se budeme věnovat vedle modelového problému deformace nosníku také problémům vlastních frekvencí křídla důležitých při vyšetřování vzniku flutteru (třepotání), a dále vyšetřováním vlastních frekvencí modelu lidské hlasivky, či odezvy modelu hlasivky na tlakový vzruch vznikající vlivem okolního proudění. Pro model hlasivky budeme nakonec uvažovat posun vlastních frekvencí v závislosti na předpětí.

2 Matematický model

V kapitole se budeme věnovat matematické teorii lineární a nelineární pružné deformace za účelem formulace příslušných rovnic rovnováhy. Budeme vycházet z Lagrangeova popisu kontinua, využívajícího zavedení pevně zvolené referenční oblasti a přetvořené oblasti obsahující stejné materiálové částice. Nejprve zavedeme pojem deformace a definujeme vhodné míry deformace, popisující, jak problémy malých deformací, tak problémy, ve kterých se vyskytují velké deformace, rotace, či předpětí (takzvané geometricky nelineární úlohy). Následně definujeme vnější síly působící na těleso, a také vnitřní napětí uvnitř tělesa. Pomocí bilance sil a zákona zachování hybnosti zavedeme rovnice rovnováhy ve zdeformované oblasti, které budeme pomocí vhodných transformací definovat na referenční známé oblasti. Pro uzavření systému rovnic pak nakonec definujeme vztah mezi mírami deformace a napětí, pomocí zavedení deformační energie.

2.1 Deformace kontinua



Obr. 1: Referenční a deformovaná konfigurace.

Uvažujme trojrozměrný Euklidovský prostor s ortonormální bází $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, ve kterém definujeme elastické těleso zaobírající referenční konfiguraci $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ s hranicí $\partial\Omega$. Bod v referenční konfiguraci \mathbf{x} také nazýváme materiálovým. Referenční oblast je transformována působením vnějších sil do deformované konfigurace Ω^φ , charakterizované zobrazením $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, viz Obrázek 1. Zobrazení φ nazýváme deformací. Bod v deformované konfiguraci označíme $\mathbf{x}^\varphi := \varphi(\mathbf{x})$. Předpokládáme, že zobrazení φ je regulární (každému bodu \mathbf{x}^φ ve zdeformované konfiguraci odpovídá právě jeden bod \mathbf{x} v referenční konfiguraci) a dostatečně hladké. Existuje tedy inverzní zobrazení $\varphi^{-1} : \Omega^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Definujeme deformační gradient jako

$$\mathbf{F} = \nabla \varphi := \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1^\varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial x_1^\varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x_2^\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2^\varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial x_2^\varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x_3^\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial x_3^\varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial x_3^\varphi}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Společně s deformačním gradientem definujeme posunutí $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, jako vektorové pole $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ a jemu odpovídající gradient posunutí

$$\nabla \mathbf{u} := \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

který je k deformačnímu gradientu vztažen pomocí vztahu

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}, \quad (3)$$

kde \mathbf{I} je jednotková matice. Deformační gradient \mathbf{F} odpovídá Jacobiho matici zobrazení φ . Definujeme tak Jakobián, pro který vzhledem k předpokládané hladkosti a existenci inverze zobrazení φ platí

$$J := \det \mathbf{F} \neq 0. \quad (4)$$

Pomocí Jacobiánu můžeme vyjádřit poměr mezi objemovým elementem $d\mathbf{x}$ v referenční konfiguraci a $d\mathbf{x}^\varphi$ v konfiguraci aktuální, jako $d\mathbf{x}^\varphi = J d\mathbf{x}$ a pro objem tělesa v aktuální konfiguraci tedy platí

$$\text{vol } \Omega^\varphi = \int_{\Omega^\varphi} d\mathbf{x}^\varphi = \int_{\Omega} J d\mathbf{x}, \quad (5)$$

kde uvažujeme deformace φ zachovávající orientaci a platí tak $J > 0$. Z předchozího také vyplývá vztah mezi hustotou v referenční konfiguraci ρ a aktuální hustotou ρ^φ

$$\rho^\varphi = J^{-1} \rho. \quad (6)$$

Deformační gradient popisuje jak deformace, tak rotace tělesa. Pro další odvození zavedeme míru invariantní k rotaci. Výpočtem totálního diferenciálu zobrazení φ získáme vztah

$$d\mathbf{x}^\varphi = \mathbf{F} d\mathbf{x}. \quad (7)$$

Zavedme úsečku dl v referenční konfiguraci Ω , pro kterou platí

$$(dl)^2 = d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} \quad (8)$$

a délku přetvořené úsečky, pro kterou platí

$$(dl^\varphi)^2 = d\mathbf{x}^{\varphi T} d\mathbf{x}^\varphi = d\mathbf{x}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{x} = d\mathbf{x}^T \mathbf{C} d\mathbf{x}, \quad (9)$$

kde $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ nazýváme *Cauchyho-Greenův tenzor deformace*. Rozdíl druhých mocnin délek původní a přetvořené úsečky lze vyjádřit jako

$$(dl^\varphi)^2 - (dl)^2 = d\mathbf{x}^T (\mathbf{C} - \mathbf{I}) d\mathbf{x} = 2d\mathbf{x}^T \mathbf{E} d\mathbf{x}, \quad (10)$$

kde \mathbf{E} označuje *Green-Lagrangeův tenzor deformace*

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}). \quad (11)$$

Green-Lagrangeův tenzor deformace lze vyjádřit pomocí gradientu posunutí jako

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}), \quad (12)$$

tedy ve složkovém zápisu jako

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \quad (13)$$

Green-Lagrangeův tenzor je symetrický, tedy má nejvýše šest různých složek, a můžeme tak s výhodou využívat *Voightova zápisu* a tenzor zapsat jako $\mathbf{E} = (E_{11}, E_{22}, E_{33}, 2E_{23}, 2E_{13}, 2E_{12})^T$. Zanedbáním kvadratických členů v rovnici (13) definujeme *tenzor malých deformací* \mathbf{e} jako

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad (14)$$

ve složkovém zápisu jako

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (15)$$

Tenzor malých deformací je lineární vzhledem k $\nabla \mathbf{u}$ a je tak vhodnou mírou pro mnoho inženýrských problémů. Není však na rozdíl od Green-Lagrangeova tenzoru invariantní k rotacím. Nevhodné bývá jeho použití u takzvaně geometricky nelineárních úloh, jako je kmitání s předpětím, průhyby membrán či stabilita.

2.2 Působící síly a Cauchyho napětí

Zvolme nyní libovolně podoblast ϑ^φ - tzv. *kontrolní objem* - vyjmutou ze zdeformovaného tělesa Ω^φ , tedy $\vartheta^\varphi \subset \Omega^\varphi$, s hranicí $\partial\vartheta^\varphi$. Na tuto oblast působí síly dvojího charakteru - *objemové* a *povrchové*.

Objemové síly

Účinek objemových sil na kontrolní objem ϑ^φ zapisujeme

$$\int_{\vartheta^\varphi} \mathbf{f}^\varphi d\mathbf{x}^\varphi, \quad (16)$$

kde vektorové pole $\mathbf{f}^\varphi : \Omega^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$, označuje sílu vztaženou na jednotku objemu. Vedle toho také s výhodou definujeme hustotu objemových sil na jednotku hmotnosti $\mathbf{b}^\varphi : \Omega^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$ pro kterou platí vztah

$$\mathbf{f}^\varphi = \rho^\varphi \mathbf{b}^\varphi. \quad (17)$$

Příkladem objemových sil jsou síly gravitační, elektromagnetické či odstředivé.

Povrchové síly

Povrchové síly můžeme rozdělit na síly v důsledku působení vnějšího prostředí na těleso a vnitřní síly. Účinek povrchových sil vnějšího prostředí uvažujeme na části hranice $\partial\vartheta^\varphi \cap \Gamma_N^\varphi$ a zapisujeme jako

$$\int_{\partial\vartheta^\varphi \cap \Gamma_N^\varphi} \mathbf{g}^\varphi d\mathbf{S}^\varphi \quad (18)$$

definovaný vektorovým polem $\mathbf{g}^\varphi : \Gamma_N^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$ tedy silou na jednotku plochy $d\mathbf{S}^\varphi$, kde $\Gamma_N^\varphi \subset \partial\Omega^\varphi$. Příkladem jsou tahové či tlakové síly.

Účinek vnitřních sil na povrch kontrolního objemu $\partial\vartheta^\varphi$ zapisujeme pomocí vektorového pole \mathbf{t}^φ , definovaného jako povrchová síla na jednotku plochy, tedy

$$\int_{\partial\vartheta^\varphi} \mathbf{t}^\varphi d\mathbf{S}^\varphi. \quad (19)$$

Takové pole nazýváme vektorem napětí. Vektor napětí v bodě \mathbf{x}^φ závisí na jednotkové normále \mathbf{n}^φ k povrchu $\partial\vartheta^\varphi$ a můžeme tedy psát $\mathbf{t}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi, \mathbf{n}^\varphi)$. Závislost vektoru napětí na normále je lineární, tudíž pro každé \mathbf{x}^φ existuje tenzor $\boldsymbol{\sigma}$ takový, že platí

$$\mathbf{t}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi, \mathbf{n}^\varphi) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^\varphi)\mathbf{n}^\varphi. \quad (20)$$

Tenzor $\boldsymbol{\sigma}$ nazýváme *Cauchyho tenzorem napětí*. Tenzor $\boldsymbol{\sigma}$ je symetrický a určuje napětí v bodě \mathbf{x}^φ . Tenzor lze opět s výhodou zapsat užitím Voightovy notace jako $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})^T$, viz například [16].

2.3 Rovnice rovnováhy a zákon zachování hybnosti

Uvažujme nyní nejprve stacionární úlohu, tedy problém, kde síly působící na těleso Ω jsou konstantní v čase, viz [12]. Libovolný kontrolní objem ϑ^φ ležící uvnitř oblasti Ω^φ (tedy $\partial\vartheta^\varphi \cap \partial\Omega^\varphi = \emptyset$) musí být v rovnováze, tudíž musí platit rovnováha sil ve tvaru

$$\int_{\vartheta^\varphi} \mathbf{f}^\varphi d\mathbf{x}^\varphi + \int_{\partial\vartheta^\varphi} \mathbf{t}^\varphi d\mathbf{S}^\varphi = 0. \quad (21)$$

Užitím vztahu (20) a Gaussovy věty, viz [17], na druhý integrál dostáváme

$$\int_{\partial\vartheta^\varphi} \mathbf{t}^\varphi d\mathbf{S}^\varphi = \int_{\partial\vartheta^\varphi} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}^\varphi d\mathbf{S}^\varphi = \int_{\vartheta^\varphi} \operatorname{div}^\varphi \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{x}^\varphi, \quad (22)$$

kde $\operatorname{div}^\varphi \boldsymbol{\sigma}$ definujeme jako

$$\operatorname{div}^\varphi \boldsymbol{\sigma} := \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1^\varphi} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2^\varphi} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3^\varphi} \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1^\varphi} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2^\varphi} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3^\varphi} \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1^\varphi} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2^\varphi} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3^\varphi} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Dosazením zpět do rovnice rovnováhy tak získáváme rovnici

$$\int_{\vartheta^\varphi} (\mathbf{f}^\varphi + \operatorname{div}^\varphi \boldsymbol{\sigma}) \, d\mathbf{x}^\varphi = 0, \quad (24)$$

která je splněná jen tehdy platí-li

$$-\operatorname{div}^\varphi \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}^\varphi \quad \text{v oblasti } \Omega^\varphi. \quad (25)$$

Rovnici zapíšeme ve složkovém zápisu jako

$$-\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j^\varphi} = f_i^\varphi \quad \text{v oblasti } \Omega^\varphi. \quad (26)$$

Jedná se o tři parciální diferenciální rovnice rovnováhy. Při problémech s malými deformacemi si můžeme dovolit uvažovat oblast $\Omega^\varphi \simeq \Omega$. V takovém případě definuje systém (25) společně s okrajovými a počátečními podmínkami úlohu lineární stacionární elasticity.

V případě problémů nestacionární elasticity, nebo také dynamické elasticity, je těleso Ω podrobena obecně časově proměnným vnějším silám a v systému se vlivem zrychlení objevují inerciální síly, viz [12]. Aktuální konfigurace $\Omega^\varphi(t)$ je tedy funkcí času t . Suma sil působících na kontrolní objem $\vartheta^\varphi(t)$ je v dynamické analýze rovna časové změně hybnosti. Hybnost definujeme jako

$$\mathbf{p} = \int_{\vartheta^\varphi(t)} \rho^\varphi \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \, d\mathbf{x}^\varphi, \quad (27)$$

kde symbolem $\frac{D\mathbf{u}}{Dt}$ vyjadřujeme rychlost materiálového bodu pomocí materiálové derivace jak je definována například v [14]. Druhý Newtonův zákon, nebo také zákon zachování hybnosti, udává závislost časové změny hybnosti vlivem působících sil na vyjmutý element jako

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \int_{\vartheta^\varphi(t)} \mathbf{f}^\varphi \, d\mathbf{x}^\varphi + \int_{\partial\vartheta^\varphi(t)} \mathbf{t}^\varphi \, d\mathbf{S}^\varphi, \quad (28)$$

kde časovou změnu hybnosti vyjádříme opět pomocí materiálové derivace jako

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{\vartheta^\varphi(t)} \rho^\varphi \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \, d\mathbf{x}^\varphi \right) = \int_{\vartheta^\varphi(t)} \rho^\varphi \frac{D^2\mathbf{u}}{Dt^2} \, d\mathbf{x}^\varphi. \quad (29)$$

Aplikací Cauchyho vztahu (20) a Gaussovy věty obdobně jako v případě stacionární elasticity, pak získáme rovnici rovnováhy s uvážením inerciálních sil ve tvaru

$$\int_{\vartheta^\varphi(t)} \left(-\rho^\varphi \frac{D^2 \mathbf{u}}{Dt^2} + \mathbf{f}^\varphi + \operatorname{div}^\varphi \boldsymbol{\sigma} \right) d\mathbf{x}^\varphi = 0, \quad (30)$$

která platí právě tehdy když platí

$$\rho^\varphi \frac{D^2 \mathbf{u}}{Dt^2} - \operatorname{div}^\varphi \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}^\varphi \quad \text{v oblasti } \Omega^\varphi(t) \quad (31)$$

ve složkovém zápisu jako

$$\rho^\varphi \frac{D^2 u_i}{Dt^2} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j^\varphi} = f_i^\varphi \quad \text{v oblasti } \Omega^\varphi(t). \quad (32)$$

Obdobně jako ve stacionárním případě lze při problémech s malými deformacemi uvažovat oblast $\Omega^\varphi(t) \simeq \Omega$. V takovém případě definuje systém (31) společně s okrajovými a počátečními podmínkami úlohu lineární dynamické elasticity.

2.4 Piolova transformace a rovnice rovnováhy v referenční konfiguraci

Cauchyho tenzor napětí definuje reálnou míru napětí, jako sílu na jednotku deformované plochy. V problémech geometricky nelineární elasticity, kde se setkáváme s velkými deformacemi a rotacemi, nelze referenční a aktuální oblast zaměňovat. Bylo by tak vhodnější pracovat s mírou napětí v referenční známé konfiguraci. Za tímto účelem užíváme takzvanou *Piolovu transformaci*, viz [3]. Mějme deformaci φ působící na oblast Ω tak, že deformační gradient matice \mathbf{F} je invertibilní v každém bodě referenční konfigurace. Pak pro libovolný tenzor \mathbf{T}^φ definovaný v bodě \mathbf{x}^φ definujeme tenzor \mathbf{T} definovaný v bodě \mathbf{x} referenční konfigurace takový, že platí

$$\mathbf{T} = J \mathbf{T}^\varphi \mathbf{F}^{-T}. \quad (33)$$

Vztah (33) nazýváme Piolovu transformaci. Matici $J \mathbf{F}^{-T}$ nazýváme kofaktorem, neboli algebraickým doplňkem matice \mathbf{F}

$$\operatorname{Cof}(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} = J \mathbf{F}^{-T}. \quad (34)$$

Pomocí Piolovy transformace definujeme 1. *Piolův-Kirchhoffův tenzor* \mathbf{P}

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}, \quad (35)$$

který reprezentuje sílu v deformované konfiguraci na jednotku nedeformované plochy. S výhodou definujeme i 2. *Piolův-Kirchhoffův tenzor* \mathbf{S} jako

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}. \quad (36)$$

Výhodou tenzoru \mathbf{S} je, že je na rozdíl od tenzoru \mathbf{P} symetrický právě tehdy když je symetrický tenzor $\boldsymbol{\sigma}$. Dále musíme pro definici problému v referenční konfiguraci transformovat i objemové síly podle vztahu

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi)J \quad (37)$$

a transformace plošných sil je dána jako

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi)|\text{Cof}(\mathbf{F})\mathbf{n}|. \quad (38)$$

Rovnice rovnováhy pak přecházejí do tvaru

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \text{div} \mathbf{P} = \mathbf{f} \quad \text{v oblasti } \Omega \quad (39)$$

ve složkovém zápisu jako

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} = f_i \quad \text{v oblasti } \Omega. \quad (40)$$

2.5 Konstitutivní vztahy mezi napětím a deformací

Soustava rovnic rovnováhy (40) popřípadě (25) obsahuje devět neznámých, tři složky posuvů popsaných vektorovou funkcí \mathbf{u} a šest neznámých složek tenzoru napětí \mathbf{S}, \mathbf{P} popřípadě $\boldsymbol{\sigma}$. Zbývající vztahy pro uzavření systému jsou dány až určením materiálových vlastností uvnitř oblasti Ω . Systém je tedy kompletní až definováním konstitutivních vztahů, definující vztah mezi napětím a deformací, daným obecným vztahem pro takzvaně energeticky konjugované dvojice deformace a napětí, viz [3].

Vnitřní energie akumulovaná uvnitř deformovaného tělesa, kterou také nazýváme *deformační energie*, je definována zobrazením φ jako $\Pi^{int}(\varphi)$. V práci budeme pracovat s takzvaně *hyperelastickými materiály*, což je konstitutivní model předpokládající plně elastické chování, pro který je vztah mezi napětím a deformací odvozen z deformační energie. Pro 1. Piola-Kirchhoffův tenzor existuje potenciál W tak, že platí

$$\mathbf{P}(\mathbf{F}) = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}, \quad (41)$$

obdobně pro 2. Piola-Kirchhoffův tenzor

$$\mathbf{S}(\mathbf{E}) = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} \quad (42)$$

a při předpokladu malých deformací také aproximativní vztah

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}) = \frac{\partial W(\mathbf{e})}{\partial \mathbf{e}}. \quad (43)$$

Dvojice $\{\mathbf{P}, \mathbf{F}\}$, $\{\mathbf{S}, \mathbf{E}\}$, popřípadě $\{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}\}$ při předpokladu malých deformací, nazýváme vzhledem k výše uvedeným vztahům jako energeticky konjugované dvojice tenzorů.

Integrací hustoty deformační energie získáme celkovou deformační energii uvnitř tělesa jako

$$\Pi(\boldsymbol{\varphi})^{int} = \int_{\Omega} W(\boldsymbol{E}) d\boldsymbol{x}. \quad (44)$$

Specifikováním vztahu pro $W(\boldsymbol{E})$ dostáváme vztahy mezi napětím a deformací, uzavírající systém rovnic. Nejjednodušším hyperelastickým modelem je takzvaný *Saint-Venant Kirchoffův materiál*. Pro obecný anizotropní Saint-Venant Kirchoffův materiál nabývá hustota deformační energie tvaru

$$W(\boldsymbol{E}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{E} : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{E}, \quad (45)$$

kde \boldsymbol{C} je obecně tenzor čtvrtého řádu. Pro izotropní materiál pak vyplývá vztah mezi Green-Lagrangeovým tenzorem deformace a 2. Piolovým-Kirchoffovým tenzorem napětí ve tvaru

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{E} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{E}) \boldsymbol{I} + 2\mu \boldsymbol{E}, \quad (46)$$

kde λ a μ jsou takzvané *Lamého koeficienty*, které jsou vztaženy k materiálovým konstantám E (*Youngův modul pružnosti*) a ν (*Poissonovo číslo*) pomocí vztahů

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (47)$$

Pro problém lineární elasticity definovaný zanedbáním kvadratických členů v tenzoru deformace, pak obdobně platí

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{e} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{e}) \boldsymbol{I} + 2\mu \boldsymbol{e}. \quad (48)$$

Konstitutivní vztah mezi napětím a deformací nazýváme *zobecněným Hookovým zákonem* a můžeme ho vzhledem k symetrii tenzorů $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{E}$ popřípadě $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{e}$ s výhodou zapsat pomocí Voigtova zápisu. Pro hyperelastický izotropní Saint-Venant Kirchoffův materiál tak platí vztah

$$\begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{13} \\ S_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{23} \\ 2E_{13} \\ 2E_{12} \end{pmatrix} \quad (49)$$

a obdobně při aproximaci problému uvažováním malých deformací

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{13} \\ 2e_{12} \end{pmatrix}. \quad (50)$$

3 Numerické řešení

V kapitole popíšeme postup při numerickém řešení úloh elastické deformace. Nejprve se budeme věnovat řešení úlohy lineární dynamické deformace, pro kterou zavedeme takzvanou slabou formulaci, popíšeme diskretizaci pomocí metody konečných prvků a následně zavedeme vhodnou časovou diskretizaci vzniklého systému. Dále popíšeme možné postupy při vyšetřování vlastních tvarů a frekvencí dynamického systému. V poslední části kapitoly se budeme věnovat diskretizaci úlohy geometricky nelineární elasticity.

3.1 Slabá formulace problému lineární elasticity

Pro popis numerického řešení uvažujme trojrozměrný problém nestacionární lineární elasticity. Poznamenejme, že vzhledem k volbě modelu lineární elasticity očekáváme malé deformace a lze tak uvažovat $\Omega^\varphi \simeq \Omega$. Všechny proměnné a integrační oblasti tak můžeme definovat na referenční oblasti Ω . Uvažujme těleso reprezentované omezenou oblastí $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ s Lipschitzovsky spojitou hranicí $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, na které řešíme rovnici (25) s okrajovými podmínkami

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D \quad \text{na } \Gamma_D, \quad (51a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g} \quad \text{na } \Gamma_N \quad (51b)$$

a počátečními podmínkami

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad (52a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}). \quad (52b)$$

Pro aproximaci problému pomocí metody konečných prvků nejprve tento problém zformulujeme slabě. Rovnici vynásobíme vektorovou testovací funkcí $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, kde $\mathbf{V} = V^3$ a prostor $V = \{\phi \in H^1(\Omega) : \phi = 0 \text{ na } \Gamma_D \text{ ve smyslu stop}\}$. Vynásobenou rovnici integrujeme přes oblast Ω čímž dostaneme rovnici

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}. \quad (53)$$

Použitím Greenovy věty, viz [17], na druhý člen z levé strany rovnice získáme vztah

$$- \int_{\Omega} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = - \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{S} + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad (54)$$

přičemž platí identita

$$- \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{S} = - \int_{\Gamma_D} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{S} - \int_{\Gamma_N} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{S}, \quad (55)$$

neboť $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ na Γ_D dle požadavků na prostor \mathbf{V} a dle okrajové podmínky (51b) platí $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g}$ na Γ_N . Dále můžeme využitím symetrie tenzoru napětí $\boldsymbol{\sigma}$ psát

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x}. \quad (56)$$

Poznamenejme, že operátorem $:$ značíme takzvaný dvou skalární součin (double inner product) jak je definován například v [16]. Aplikací zobecněného Hookova zákona pro lineární elastický materiál popsáno v kapitole 2.5 pak dostaneme

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{C} : \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x}. \quad (57)$$

Výsledná rovnice má tedy tvar

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{C} : \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{S}. \quad (58)$$

Vztah zapíšeme pomocí lineárních operátorů a definujeme tak úlohu lineární dynamické pružné deformace. Hledáme tedy neznámé pole posuvů \mathbf{u} tak, že platí

$$m \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \mathbf{v} \right) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) \quad \text{pro všechna } \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (59)$$

kde

$$m \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \mathbf{v} \right) = \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad (60)$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{C} : \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x}, \quad (61)$$

$$L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{S}. \quad (62)$$

Při řešení statické deformace se v rovnicích neobjevuje časová derivace a výše uvedené vztahy přejdou do tvaru

$$\int_{\Omega} \mathbf{C} : \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{S}. \quad (63)$$

Hledáme tedy neznámé pole posuvů \mathbf{u} tak, že platí

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) \quad \text{pro všechna } \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (64)$$

Výše uvedené vztahy odpovídají formulaci pomocí principu minima celkové potenciální energie, kdy celkovou energii $\Pi : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ formulujeme jako rozdíl vnitřní (interní) a vnější (externí) energie

$$\Pi(\mathbf{u}) = \Pi^{int}(\mathbf{u}) - \Pi^{ext}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} W(\mathbf{e}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{S}. \quad (65)$$

Z principu minima vyplývá, že hledané řešení $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ minimalizuje funkcionál Π , tedy

$$\Pi(\mathbf{u}) \leq \Pi(\mathbf{v}) \quad \text{pro všechna } \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (66)$$

3.2 Prostorová diskretizace

Uvažujme triangulaci τ_h omezené oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Jako přípustnou považujeme triangulaci splňující následující vlastnosti, viz [20]:

1. Triangulace τ_h je tvořena konečným počtem uzavřených čtyřstěňů K .
2. $\bar{\Omega}_h = \bigcup_{K \in \tau_h} K$.
3. Pro $K_i, K_j \in \tau_h, K_i \neq K_j$ je buď $K_i \cap K_j = \emptyset$ nebo je průnik $K_i \cap K_j$ tvořen společným vrcholem nebo $K_i \cap K_j$ je tvořen společnou stěnou K_i a K_j .

Užitím této triangulace definujeme prostor konečných prvků $\mathbf{V}_h = V_h^3$, kde V_h je prostor spojitých po částech lineárních funkcí. Bázové funkce $\Phi_n \in \mathbf{V}_h$, pro $n = 1, \dots, 3N$ volíme jako

$$\Phi_n = \begin{cases} (\phi_n, 0, 0), & n = 1, \dots, N \\ (0, \phi_n, 0), & n = N + 1, \dots, 2N \\ (0, 0, \phi_n), & n = 2N + 1, \dots, 3N \end{cases}, \quad (67)$$

kde skalární funkce ϕ_n volíme tak aby ve vrcholech jednotlivých elementů P_i bylo splněno $\phi_n(P_i) = \delta_{in}$ pro všechna $i = 1, \dots, N$, kde N je počet vrcholů, viz [20].

Hledáme aproximaci řešení $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$, která splňuje rovnici

$$m \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_h}{\partial t^2}, \mathbf{v}_h \right) + a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = L(\mathbf{v}_h) \quad \text{pro všechna } \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h. \quad (68)$$

Speciálně rovnice (68) platí pro $\mathbf{v}_h = \Phi_n$, dostáváme tedy $3N$ rovnic. Aproximaci řešení \mathbf{u}_h zapíšeme jako lineární kombinaci bázových funkcí

$$\mathbf{u}_h = \sum_{m=1}^{3N} U_m(t) \Phi_m, \quad (69)$$

tedy v rozepsaném tvaru jako

$$\mathbf{u}_h = \sum_{m=1}^N U_m(t) \begin{bmatrix} \phi_m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{m=N+1}^{2N} U_m(t) \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_m \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{m=2N+1}^{3N} U_m(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_m \end{bmatrix}, \quad (70)$$

kde $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_{3N})^T$ je vektor neznámých posuvů ve vrcholech triangulace.

Dosazením rovnice (70) do rovnice (68) dostáváme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \sum_{m=1}^{3N} \ddot{U}_m(t) \Phi_m \cdot \Phi_n d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \sum_{m=1}^{3N} U_m(t) \mathbf{C} : \mathbf{e}(\Phi_m) : \mathbf{e}(\Phi_n) d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \Phi_n d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \Phi_n d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (71)$$

a vytknutím sumy před integrál pak rovnici

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{3N} \ddot{U}_m(t) \int_{\Omega} \rho \Phi_m \cdot \Phi_n d\mathbf{x} + \sum_{m=1}^{3N} U_m(t) \int_{\Omega} \mathbf{C} : \mathbf{e}(\Phi_m) : \mathbf{e}(\Phi_n) d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \Phi_n d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \Phi_n d\mathbf{S}, \end{aligned} \quad (72)$$

kterou zapíšeme v maticovém tvaru jako systém obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbb{K}\mathbf{U} = \mathbf{b}(t). \quad (73)$$

Matrice \mathbb{K} se často označuje jako *matice tuhosti* a je symetrická a pozitivně definitní. Matici \mathbb{M} nazýváme *maticí hmotnosti* a je také symetrická a pozitivně definitní. Volba aproximačního prostoru \mathbf{V}_h zaručuje řídkost matic, která je výhodná pro následné řešení soustav.

Zabýváme-li se pouze úlohou statické lineární deformace přejde systém (73) do tvaru

$$\mathbb{K}\mathbf{U} = \mathbf{b}. \quad (74)$$

Úloha lineární statiky je tak diskretizací pomocí MKP převedena na soustavu lineárních algebraických rovnic.

3.3 Časová diskretizace

Výsledkem prostorové diskretizace úlohy dynamické deformace popsané v kapitole 3.2 je systém obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu (73). Tuto soustavu doplníme o člen modelující tlumení dynamického systému do tvaru

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbb{D}\dot{\mathbf{U}} + \mathbb{K}\mathbf{U} = \mathbf{b}(t). \quad (75)$$

Přibližné řešení systému společně s počátečními podmínkami budeme získávat pomocí takzvané *Newmarkovi metody*, viz [15]. Zavedeme dělení časového intervalu $[0, T]$ na N ekvidistantních dílů $t_n = t_0 + n\Delta t$, kde $n = 1, 2, \dots, N$ a označme $\mathbf{U}_n, \dot{\mathbf{U}}_n, \ddot{\mathbf{U}}_n$ hodnoty řešení (případně aproximace) $\mathbf{U}(t_n), \dot{\mathbf{U}}(t_n), \ddot{\mathbf{U}}(t_n)$. Nyní vyžadujeme platnost rovnice (75) na každé časové vrstvě, tedy

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{U}}_n + \mathbb{D}\dot{\mathbf{U}}_n + \mathbb{K}\mathbf{U}_n = \mathbf{b}_n. \quad (76)$$

Rozepsáním \mathbf{U}_{n+1} a $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$ pomocí Taylorova rozvoje získáme vztahy

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \dot{\mathbf{U}}_n \Delta t + \ddot{\mathbf{U}}_n \frac{(\Delta t)^2}{2!} + \dddot{\mathbf{U}}_n \frac{(\Delta t)^3}{3!} + \mathcal{O}(\Delta t^4), \quad (77)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_n + \ddot{\mathbf{U}}_n \Delta t + \dddot{\mathbf{U}}_n \frac{(\Delta t)^2}{2!} + \mathcal{O}(\Delta t^3). \quad (78)$$

Případně použijeme-li Lagrangeův tvar zbytku, viz [7], tak vztahy (77),(78) lze přesně zapsat ve tvaru

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \dot{\mathbf{U}}_n \Delta t + \ddot{\mathbf{U}}(t_n + 2\beta \Delta t) \frac{(\Delta t)^2}{2!}, \quad (79)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_n + \ddot{\mathbf{U}}(t_n + \gamma \Delta t) \Delta t, \quad (80)$$

kde hodnoty γ, β jsou neznáme a platí $0 \leq \gamma \leq 1$ a $0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}$. Užijeme lineární interpolaci a volíme hodnoty γ, β

$$\ddot{\mathbf{U}}(t_n + 2\beta \Delta t) \approx (1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{U}}_n + 2\beta \ddot{\mathbf{U}}_{n+1}, \quad (81)$$

případně

$$\ddot{\mathbf{U}}(t_n + \gamma \Delta t) \approx (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{U}}_n + \gamma \ddot{\mathbf{U}}_{n+1}. \quad (82)$$

Dosazením vztahů (81),(82) do rovnic (79),(80) a úpravou získáme vztahy

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_n + \Delta t^2 \frac{1 - 2\beta}{2} \ddot{\mathbf{U}}_n + \Delta t^2 \beta \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \tilde{\mathbf{U}}_{n+1} + \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \beta \Delta t^2, \quad (83)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_n + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{U}}_n + \Delta t \gamma \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \dot{\tilde{\mathbf{U}}}_{n+1} + \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \gamma \Delta t, \quad (84)$$

kde $\tilde{\mathbf{U}}_{n+1}, \dot{\tilde{\mathbf{U}}}_{n+1}$ jsou hodnoty získané prediktorem (explicitním vzorcem) a $\mathbf{U}_{n+1}, \dot{\mathbf{U}}_{n+1}$ jsou pak korekce, viz [6]. Dosazením vztahů (83),(84) do rovnice (76) v čase $t = t_{n+1}$ získáme vyjádření

$$\mathbb{M} \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} + \mathbb{D} \left(\dot{\tilde{\mathbf{U}}}_{n+1} + \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \gamma \Delta t \right) + \mathbb{K} \left(\tilde{\mathbf{U}}_{n+1} + \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \beta \Delta t^2 \right) = \mathbf{b}_{n+1}, \quad (85)$$

které lze upravit do tvaru

$$\mathbb{A} \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \mathbf{g}_{n+1}, \quad (86)$$

kde matici \mathbb{A} odpovídá

$$\mathbb{A} = \left(\mathbb{M} + \mathbb{D} \gamma \Delta t + \mathbb{K} \beta \Delta t^2 \right) \quad (87)$$

a pravou stranu \mathbf{g}_{n+1} získáváme ve tvaru

$$\mathbf{g}_{n+1} = \mathbf{b}_{n+1} - \mathbb{D} \dot{\tilde{\mathbf{U}}}_{n+1} - \mathbb{K} \tilde{\mathbf{U}}_{n+1}. \quad (88)$$

Z počátečních podmínek (známá počáteční rychlost a výchylka) tak dopočítáme úpravou první rovnice (75) zrychlení $\ddot{\mathbf{U}}_0$ v čase t_0 . Následně pro $n = 0, 1, 2, \dots$ můžeme ze známých $\ddot{\mathbf{U}}_n, \dot{\mathbf{U}}_n, \mathbf{U}_n$ spočítat $\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}$ pomocí rovnice (86). Nakonec pomocí vztahů (83) a (84) určíme $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}, \mathbf{U}_{n+1}$. Postup opakujeme do času t_N . Volbou parametrů $\gamma = 0.5, \beta = 0.25$ dosahuje metoda druhého řádu přesnosti a je nepodmíněně stabilní, viz [15].

3.4 Modální analýza

Modální analýzou dynamického systému lze získat základní charakteristické frekvence a tvary kmitů vyšetřovaného tělesa, viz [4]. Vyjdeme z rovnic popisující nestacionární problém, získaných prostorovou diskretizací popsanou v kapitole 3.2. Rovnice uvažujeme bez budícího a tlumícího členu členu, tedy ve tvaru

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbb{K}\mathbf{U} = 0. \quad (89)$$

Řešení systému předpokládáme v harmonickém tvaru

$$\mathbf{U} = e^{i\omega t}\mathbf{V}, \quad (90)$$

Jedná se tak o soustavu kmitajících s frekvencí ω , kde vektor \mathbf{V} je tvar kmitu. Toto řešení dosadíme do rovnice (89) a získáme

$$e^{i\omega t}(-\omega^2\mathbb{M}\mathbf{V} + \mathbb{K}\mathbf{V}) = 0, \quad (91)$$

z čehož plyne vztah

$$(\mathbb{K} - \omega^2\mathbb{M})\mathbf{V} = 0. \quad (92)$$

Jedná se o takzvaný problém zobecněných vlastních čísel, kterému přísluší charakteristická rovnice

$$\det(\mathbb{K} - \omega^2\mathbb{M}) = 0, \quad (93)$$

jejíž kořeny $\lambda = \omega^2$ nazýváme zobecněná vlastní čísla a ω jsou vlastní frekvence. Zobecněná vlastní čísla λ jsou díky symetrii a pozitivní definitnosti matic \mathbb{K}, \mathbb{M} reálná a nezáporná. Z vlastních frekvencí je možné dopočítat fyzikální frekvence pomocí vztahu

$$f = \frac{\omega}{2\pi} [\text{Hz}]. \quad (94)$$

Dosazením spočítaných frekvencí ω do rovnice (92) a jejím řešením získáme vlastní vektory \mathbf{V} reprezentující vlastní kmity tělesa.

Vyšetřování vlastních frekvencí, můžeme provést také uvažujeme-li harmonicky buzený systém ve tvaru

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbb{K}\mathbf{U} = \mathbf{b}e^{i\omega t}. \quad (95)$$

Předpokládejme řešení ve tvaru

$$\mathbf{U} = e^{i\omega t}\mathbf{V}. \quad (96)$$

Dosazením do rovnice dostáváme tvar

$$(\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M}) \mathbf{V} = \mathbf{b}. \quad (97)$$

Jedná se tedy o řešení soustavy algebraických rovnic, kde $(\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M})$ je symetrická matice. Pro vyšetření vlastních frekvencí budeme tedy v daném rozsahu ω cyklicky vyšetřovat hodnoty řešení a hledat taková ω pro které nastávají jejich extrémy. Funkční závislost budící frekvence ω na velikosti \mathbf{V} nazýváme *přenosovou funkcí*, viz [11].

Další možností při frekvenční analýze je použití *Fourierovy transformace*, viz [11], na dynamický signál získaný například pomocí výpočtu popsaném v kapitole 3.3. Definujeme transformaci mezi posloupnostmi $\{U_j\} = U_0, U_1, \dots, U_{N-1}$ a $\{Y_k\} = Y_0, Y_1, \dots, Y_{N-1}$ danou vztahem

$$Y_k = \sum_{j=0}^{N-1} U_j e^{-\frac{2\pi}{N} ijk}. \quad (98)$$

Použitím transformace (98) na časový průběh výchylky \mathbf{U} převádíme časově závislý signál do frekvenční oblasti. Hodnoty lokálních maxim transformované posloupnosti představují dominantní frekvence ve vyšetřovaném signálu.

3.5 Diskretizace úlohy nelineární elasticity

Jak již bylo zmíněno v předchozích kapitolách v mnoha úlohách inženýrské praxe nelze uvažovat předpoklad malých deformací $\Omega^\varphi \simeq \Omega$ použitý při diskretizaci úlohy lineární elasticity. V takových případech se musíme zabývat řešením rovnic na známé referenční konfiguraci pomocí Green-Lagrangeova tenzoru deformace a 2. Piolova-Kirchoffova tenzoru napětí definovaných v kapitole 2. Problém je pak v posuvech \mathbf{u} nelineární a využíváme s výhodou iteračních řešení, viz [16].

Při odvození diskretizace pro úlohu nelineární statické deformace je výhodné vycházet z principu minimalizace potenciální energie. Potenciální energii elastického systému lze vyjádřit jako rozdíl vnitřní deformační energie Π^{int} a práce konané vnějšími silami Π^{ext}

$$\Pi(\mathbf{u}) = \Pi^{int}(\mathbf{u}) - \Pi^{ext}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} W(\mathbf{E}) dx - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dx - \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} dS \quad (99)$$

Princip minima potenciální energie udává, že pole posuvů \mathbf{u} v rovnovážné poloze minimalizuje funkcionál Π . Uvažujme tedy derivaci funkcionálu Π ve směru \mathbf{v} s krokem τ

$$\bar{\Pi}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{(\Pi(\mathbf{u} + \tau \mathbf{v}) - \Pi(\mathbf{u}))}{\tau}. \quad (100)$$

Pro nalezení minima funkcionálu $\Pi(\mathbf{u})$ vyjádříme první derivaci $\bar{\Pi}$ a položíme rovnou nule

$$\bar{\Pi}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} : \bar{\mathbf{E}} dx - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx - \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dS = 0. \quad (101)$$

Pro první člen představující variaci deformační energie je podle pravidel derivace složené funkce použita nejprve derivace deformační energie W podle \mathbf{E} . Následně pro první variaci Green-Lagrangeova tenzoru platí

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T + \nabla \mathbf{v}^T \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{v}). \quad (102)$$

Poznamenejme, že variace $\bar{\mathbf{E}}$ je lineární, jak v \mathbf{u} , tak ve \mathbf{v} , zatímco $\mathbf{E}(\mathbf{u})$ je nelineární. Variační rovnici pro nelineární elastický systém můžeme zapsat jako

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \quad (103)$$

kde $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ nazýváme energetickou formou ve tvaru

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{u}) : \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) d\mathbf{x} \quad (104)$$

a $L(\mathbf{v})$ je funkcionál představující vnější zatížení ve tvaru

$$L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{S}. \quad (105)$$

Rovnice (103) odpovídá slabé formulaci rovnice pro geometricky nelineární elastický systém. Jedná se o takzvanou *totální Lagrangeovu formulaci* (jsou použity míry napětí a deformace v referenční konfiguraci). Energetická forma a je stále nelineární v posuvech \mathbf{u} , a je tak zapotřebí její linearizace. Nelineární systém budeme řešit pomocí iterační Newtonovy metody. Řešení \mathbf{u} v iteraci $k + 1$ zapíšeme ve tvaru

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \Delta \mathbf{u}_k. \quad (106)$$

Vyjádření neznámého řešení pomocí inkrementu dosadíme do energetické formy a . Tu pak můžeme aproximovat jako

$$a(\mathbf{u}_k + \Delta \mathbf{u}_k, \mathbf{v}) \simeq a(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}) + a^*(\mathbf{u}_k, \Delta \mathbf{u}_k, \mathbf{v}), \quad (107)$$

kde linearizaci energetické formy můžeme zapsat jako

$$a^*(\mathbf{u}_k, \Delta \mathbf{u}_k, \mathbf{v}) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{(a(\mathbf{u}_k + \tau \Delta \mathbf{u}_k, \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}))}{\tau}. \quad (108)$$

Pro linearizovanou formu pak zanedbáním členů vyššího řádu získáváme vztah

$$a^*(\mathbf{u}_k, \Delta \mathbf{u}_k, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \Delta \mathbf{S} : \bar{\mathbf{E}} + \mathbf{S} : \Delta \bar{\mathbf{E}} d\mathbf{x}. \quad (109)$$

Člen $\Delta \mathbf{S}$ nazýváme inkrement napětí, pro který platí vztah

$$\Delta \mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} : \Delta \mathbf{E} = \mathbf{C} : \Delta \mathbf{E}, \quad (110)$$

kde $\Delta \mathbf{E}$ je inkrement deformace ve tvaru

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{u}_k, \Delta \mathbf{u}_k) = \frac{1}{2}(\nabla \Delta \mathbf{u}_k + \nabla \Delta \mathbf{u}_k^T + \nabla \Delta \mathbf{u}_k^T \nabla \mathbf{u}_k + \nabla \mathbf{u}_k^T \nabla \Delta \mathbf{u}_k). \quad (111)$$

Pro člen $\Delta \bar{\mathbf{E}}$ pak platí

$$\Delta \bar{\mathbf{E}}(\Delta \mathbf{u}_k, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla \Delta \mathbf{u}_k^T \nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T \nabla \Delta \mathbf{u}_k). \quad (112)$$

Linearizaci energetické formy tedy zapíšeme ve tvaru

$$a^*(\mathbf{u}_k, \Delta \mathbf{u}_k, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{C} : \Delta \mathbf{E}(\mathbf{u}_k, \Delta \mathbf{u}_k) : \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}) + \mathbf{S}(\mathbf{u}_k) : \Delta \bar{\mathbf{E}}(\Delta \mathbf{u}_k, \mathbf{v}) dx, \quad (113)$$

která závisí na známém posuvu \mathbf{u}_k a je bilineární v $\Delta \mathbf{u}_k$ a \mathbf{v} . První integrand odpovídá tuhostnímu prvku v lineární elasticitě, druhý integrand se objevuje pouze v geometricky nelineárních úlohách. Získáváme tedy linearizovanou rovnici pro inkrement posuvu $\Delta \mathbf{u}_k$ v k -té iteraci ve tvaru

$$a^*(\mathbf{u}_k, \Delta \mathbf{u}_k, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}). \quad (114)$$

Absolutní posuv je pak v každé iteraci dopočítán pomocí vztahu (106). Iterační řešení, schématicky znázorněno na obrázku 2, tedy probíhá pro $k = 0, 1, 2, \dots$ získáním vektoru $\Delta \mathbf{u}$ a aktualizací absolutního posuvu \mathbf{u} .

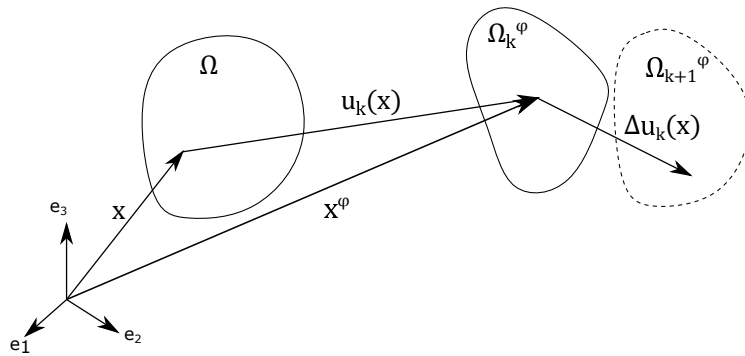
Diskretizací pomocí MKP obdobně jako v předchozí kapitole, pak získáme v každé iteraci soustavu lineárních algebraických rovnic pro neznámý inkrement posuvu ve tvaru

$$\mathbb{K}_k \Delta \mathbf{U}_k = \mathbf{b} - \mathbf{b}_k^{int}, \quad (115)$$

kde \mathbb{K}_k značí matici tuhosti definovanou pro nelineární problém. Rozdíl na pravé straně označme jako residuum \mathbf{R}_k a iterační řešení opakujeme dokud není splněna podmínka

$$\|\mathbf{R}_k\| = \|\mathbf{b} - \mathbf{b}_k^{int}\| < \xi, \quad (116)$$

kde $\xi \in \mathbb{R}$ je vhodně zvolené malé číslo představující podmínku konvergence.



Obr. 2: Schéma iteračního procesu při řešení geometricky nelineární úlohy elastické deformace.

4 Programová realizace a technické aspekty diskretizace pomocí MKP

V kapitole se budeme věnovat realizaci výpočtů problémů elasticity a praktickým aspektům programového řešení pomocí MKP. Nejprve popíšeme tvorbu MKP sítě a ve zbytku kapitoly se budeme věnovat vlastnímu programu, který byl vytvořen v jazyce *C*. Jedná se o víceúčelový řešič problémů trojrozměrné elastické deformace s implementací řešení statických a dynamických problémů, či problémů modální analýzy, pomocí modelu lineární i nelineární elasticity. Řešič podporuje výpočty na homogenních i nehomogenních oblastech s izotropními či ortotropními materiálovými vlastnostmi.

4.1 Tvorba a načtení sítě

Pro vytvoření MKP sítě využijeme volně dostupný generátor sítí Gmsh, viz [8]. Geometrii oblasti Ω popíšeme pomocí skriptu ve formátu *.geo*, kde mimo geometrie oblasti budeme specifikovat různé části hranice (pro odlišné okrajové podmínky), podoblasti pro nehomogenní problémy, ale také hrubost sítě. Vygenerovanou síť je pak možno uložit ve formátu *.msh*, který obsahuje všechny informace o síti, podoblastech i částech hranice.

Sít tvořenou konečným počtem čtyřstěnů uloženou ve formátu *.msh* zapíšeme do vhodné datové struktury v našem programu. Pomocí vytvořené funkce, tak nejprve zkontrolujeme formát sítě, načteme počty elementů a vrcholů, pomocí čehož pak můžeme alokovat paměť a následně naplníme vektory souřadnic jednotlivých uzlů (x, y, z) a vektory, do kterých budeme ukládat indexy vrcholů pro jednotlivé elementy (čtyřstěny a hraniční trojúhelníky).

4.2 Sestavení matic

Výpočet matic \mathbb{K}, \mathbb{M} (popřípadě \mathbb{D}, \mathbb{A}) vzniklých diskretizací pomocí MKP popsanych v předchozí kapitole budeme provádět cyklicky přes všechny čtyřstěny K triangulace τ_h oblasti Ω . Tedy pro člen matice matici tuhosti $(\mathbb{K})_{mn}$

$$(\mathbb{K})_{mn} = \int_{\Omega} \mathbf{C} : \mathbf{e}(\Phi_m) : \mathbf{e}(\Phi_n) d\mathbf{x} = \sum_{K \in \tau_h} \int_K \mathbf{C} : \mathbf{e}(\Phi_m) : \mathbf{e}(\Phi_n) d\mathbf{x} \quad (117)$$

a pro člen matice hmotnosti $(\mathbb{M})_{mn}$

$$(\mathbb{M})_{mn} = \int_{\Omega} \Phi_m \cdot \Phi_n d\mathbf{x} = \sum_{K \in \tau_h} \int_K \Phi_m \cdot \Phi_n d\mathbf{x}. \quad (118)$$

Obdobně pro matici tuhosti úlohy nelineární elasticity v k -té iteraci $(\mathbb{K}_k)_{mn}$

$$\begin{aligned} (\mathbb{K}_k)_{mn} &= \int_{\Omega} \mathbf{C} : \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{u}_k, \Phi_m) : \Delta \mathbf{E}(\mathbf{u}_k, \Phi_n) + \mathbf{S}(\mathbf{u}_k) : \Delta \bar{\mathbf{E}}(\Phi_m, \Phi_n) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{K \in \tau_h} \int_K \mathbf{C} : \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{u}_k, \Phi_m) : \Delta \mathbf{E}(\mathbf{u}_k, \Phi_n) + \mathbf{S}(\mathbf{u}_k) : \Delta \bar{\mathbf{E}}(\Phi_m, \Phi_n) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (119)$$

Vyhodnocení integrálů přes element K provedeme pomocí transformace na referenční čtyřstěn se známými souřadnicemi, tedy i známými předpisy báзовých funkcí ϕ a vhodné numerické integrace, více například v [19]. Na každém čtyřstěnu tak spočítáme hodnoty a příslušné derivace skalárních báзовých funkcí ϕ , z čehož můžeme dopočítat hodnoty vektorové funkce Φ . Pomocí hodnot báзовých funkcí a jejich derivací lze vypočítat příslušné tenzory deformace a napětí pomocí vztahů odvozených v kapitolách 2 a 3.

Vzhledem k vhodné volbě báзовých funkcí, bude výsledná matice řídká (*sparse matrix*), tedy počet nulových prvků bude výrazně převyšovat počet nenulových prvků. V programu tak implementujeme datovou strukturu, do které ukládáme jen nenulové prvky matice a je tak méně náročná na výpočetní paměť. Datová struktura, ve které je uložená matice je zásadní pro výpočetní náročnost programu. Jednotlivé příspěvky do matice tuhosti vzniklé integrací přes oblast Ω budeme nejdříve ukládat do struktury *triplet*. To nám umožňuje na pozici s řádkovým indexem i a sloupcovým indexem j uložit nenulovou hodnotu *value* vzniklou numerickou integrací. Vznikají tak vektory řádkových indexů I , sloupcových indexů J a vektor hodnot VAL . Triplet je následně zapotřebí seřadit, a to nejdříve vzestupně podle indexu I a následně vzestupně podle indexu J . Setřídění provedeme pomocí implementace algoritmu *quicksort*, viz [9]. Pro setříděný seznam můžeme jednoduše sečíst hodnoty se stejnými řádkovými a sloupcovými indexy a získáváme všechny nenulové prvky matice. Vzhledem ke struktuře setříděného a sečteného tripletu můžeme pro efektivnější práci matici uložit do struktury *sparse* ve formátu CRF (*compressed row format*), ve které není potřeba ukládat všechny indexy řádků, ale jen indexy PI značící pozici prvního nenulového čísla na řádku následujícím.

Báзовé funkce Φ jsou vektorové funkce a matice tak budou mít rozměr $3N$, kde N je počet vrcholů triangulace τ_h .

V rámci stejného cyklu přes všechny elementy tak můžeme sestavit matice tuhosti \mathbb{K} , matici hmotnosti \mathbb{M} , popřípadě matici tlumení \mathbb{D} (aproximujeme jako lineární kombinaci matice tuhosti a matice hmotnosti) či iterační matici \mathbb{A} , kterou jsme definovali při časové diskretizaci problému v kapitole 3.3. Při řešení modální analýzy je také možné v rámci jednoho cyklu sestavit rozdíl matic $(\mathbb{K} - \omega^2\mathbb{M})$, pomocí kterého vyšetřujeme vlastní frekvence systému.

4.3 Sestavení vektoru pravých stran

Vyčíslení vektoru pravé strany \mathbf{b} provedeme obdobně cyklem přes všechny čtyřstěny K triangulace τ_h oblasti Ω pro objemové síly a cyklem přes všechny stěnové trojúhelníky S triangulace τ_h hranice oblasti Γ_N , na kterých je předepsána povrchová síla pomocí Neumannovy okrajové podmínky

$$(\mathbf{b})_n = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \Phi_n d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \Phi_n d\mathbf{S} = \sum_{K \in \tau_h} \int_K \mathbf{f} \cdot \Phi_n d\mathbf{x} + \sum_{S \in \tau_h} \int_S \mathbf{g} \cdot \Phi_n d\mathbf{S}. \quad (120)$$

Jednotlivé integrace na elementu pro vyčíslení pravé strany \mathbf{b} provedeme pomocí numerické kvadratury přes součet ve vrcholech. Máme-li tedy čtyřstěn $K \in \tau_h$ s vrcholy X_i o objemu $|K|$, integrál přes tento čtyřstěn vyjádříme jako

$$\int_K \mathbf{f} \cdot \Phi_n dx \approx \frac{|K|}{4} \sum_i^4 \mathbf{f}(X_i) \cdot \Phi_n(X_i). \quad (121)$$

Pro integraci přes hranici použijeme opět numerickou kvadraturou přes součet hodnot ve vrcholech, tedy máme-li trojúhelníkovou stěnu čtyřstěnu S na hranici oblasti s vrcholy X_i s povrchem $|S|$, integrál přes tento trojúhelník vyjádříme jako

$$\int_S \mathbf{g} \cdot \Phi_n dS \approx \frac{|S|}{3} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{g}(X_i) \cdot \Phi_n(X_i). \quad (122)$$

Získáme tedy vektor \mathbf{b} o velikosti $3N$, kde N je počet uzlů soustavy.

Při řešení geometricky nelineární úlohy pomocí iteračního procesu, počítáme pravou stranu jako rozdíl interních a externích sil. Vyčíslení vektoru interních sil provedeme obdobně jako vyčíslení matice tuhosti pro nelineární problém

$$(\mathbf{b}^{int})_n = \int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{u}_k) : \mathbf{E}(\Phi_n) dx = \sum_{K \in \tau_h} \int_K \mathbf{S}(\mathbf{u}_k) : \mathbf{E}(\Phi_n) dx. \quad (123)$$

Získáme tedy vektor \mathbf{b}^{int} o velikosti $3N$, kde N je počet uzlů soustavy.

4.4 Řešení soustavy

Máme tedy sestavené příslušné matice $(\mathbb{K}, \mathbb{M}, \mathbb{D}, \mathbb{A})$ ve struktuře *sparse* a vektor pravých stran \mathbf{b} . Řešení stacionárního problému získáme řešením soustavy algebraických rovnic (74). Řešení nestacionárního problému budeme programově realizovat pomocí algoritmu popsaném v kapitole 3.3. Sestavíme tedy matice a s jejich pomocí i vektor \mathbf{g} a následně cyklicky provádíme řešení v časových iteracích. Iterační řešení provádíme i při výpočtu geometricky nelineárních úloh popsaném v kapitole 3.5.

Ve všech případech je zapotřebí řešit soustavy lineárních algebraických rovnic. K řešení soustavy můžeme využít vytvořenou funkci, implementující metodu sdružených gradientů, založenou na převedení úlohy řešení soustavy rovnic, na úlohu hledání minima funkcionálu. Dále můžeme k řešení využít volně dostupnou knihovnu *UMFPACK* pro řešení soustav s řídkou maticí pomocí LU rozkladu, viz [24].

4.5 Řešení problému zobecněných vlastních čísel a frekvenční analýza

Problém zobecněných vlastních čísel můžeme řešit pomocí funkce `eigs()` v programu Matlab [15], získáme tak hodnoty vlastních čísel (a tedy i vlastních frekvencí) a jim odpovídající vlastní tvary kmitů.

Ke zjištění vlastních frekvencí pomocí výpočtu přenosové funkce jsme vytvořili funkci, která cyklicky pro daný rozsah ω řeší soustavu (97). Soustava již není pozitivně definitní a jako řešič soustavy tedy použijeme výhradně knihovnu Umfpack.

K vyšetřování dominantních frekvencí z časového signálu využijeme funkci `fft()` v programu Matlab, která převede posloupnost výchylek v čase do frekvenční oblasti.

4.6 Vizualizace výsledků

K vizualizaci výsledků využijeme volně dostupný software Paraview [26]. Pro něj jsou v našem programu vytvořeny funkce exportující výsledky do formátu `.vtk`, se kterým Paraview pracuje. Jsme tak schopni ukládat časově závislá skalární, vektorová a tenzorová pole získaná výpočty a následně provádět vhodné vizualizace.

5 Numerické výsledky

Vytvořený program budeme testovat na třech vybraných problémech elastické deformace. Nejprve budeme uvažovat modelový příklad vetknutého nosníku, na kterém můžeme ověřit vliv hrubosti MKP sítě na výsledky, a také rozdíl v použití lineárního a nelineárního modelu deformace. Dále budeme vyšetřovat model křídla s anizotropními materiálovými vlastnostmi a pomocí modální analýzy zjišťovat vlastní tvary a vlastní frekvence tohoto křídla. Program nakonec využijeme ke komplexní analýze dvou modelů lidské hlasivky. Pomocí nástrojů modální analýzy budeme zjišťovat vlastní frekvence a tvary kmitů, a dále budeme vyšetřovat dynamickou odezvu modelu na tlakové buzení. Nakonec budeme u hlasivek vyšetřovat vliv předpětí na hodnoty vlastních frekvencí.

5.1 Vyšetřování deformace modelu nosníku, srovnání lineárního a nelineárního modelu

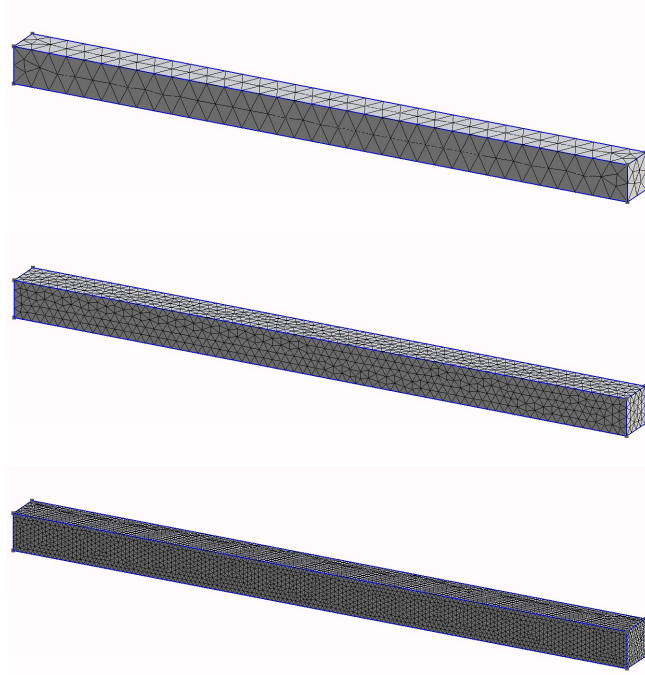
Model jednoduchého prizmatického nosníku s čtvercovým průřezem budeme využívat k testování programu na výpočtech statické deformace, a to jak pomocí lineárního modelu tak i pomocí modelu geometricky nelineárního. Dále budeme vyšetřovat dynamickou odezvu na počáteční vychýlení nosníku a vliv tlumení. Jedná se o nosník o délce $l = 0.35$ m se čtvercovým průřezem s délkou strany $h = 0.02$ m. Nosník je na levé straně vetknutý, předepisujeme tedy Dirichletovu okrajovou podmínku

$$\mathbf{u} = (0, 0, 0) \quad \text{na } \Gamma_D. \quad (124)$$

Na zbytku hranice předepisujeme Neumanovu okrajovou podmínku definující nulovou povrchovou sílu

$$\mathbf{g} = (0, 0, 0) \quad \text{na } \Gamma_N. \quad (125)$$

Nakonec definujeme materiál nosníku pomocí konstant $E = 1.4 \cdot 10^6$ Pa a $\mu = 0.4$. Hustota materiálu je pak $\rho = 10^3$ kg m⁻³.



Obr. 3: MKP sítě $M1, M2$ a $M3$, na kterých budeme provádět výpočty.

5.1.1 Statická deformace

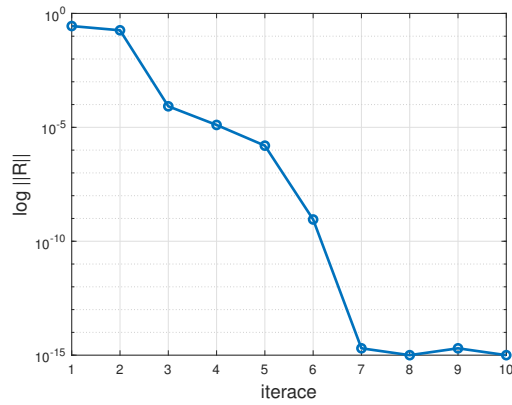
Vyšetřování statické deformace prizmatické nosníku budeme provádět zatěžováním objemovou silou ve směru z definovanou pomocí hustoty objemové síly jako

$$\mathbf{b} = (0, 0, -2)[\text{ms}^{-2}]. \quad (126)$$

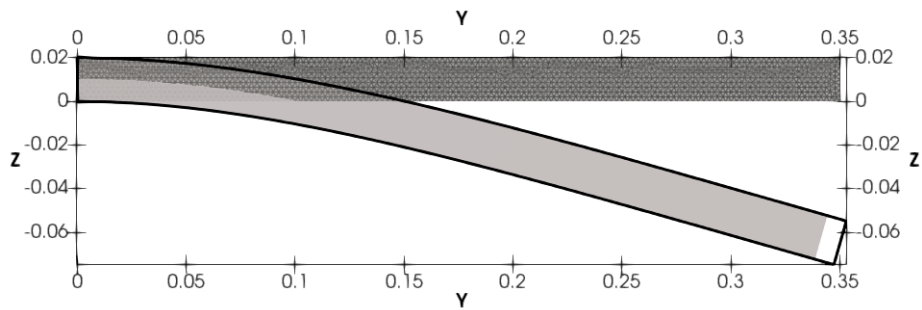
Výsledný posuv $\mathbf{u} = (u, v, w)$ spočítáme nejprve pomocí modelu lineární deformace řešením rovnice (74), a následně pomocí nelineárního modelu iteračním řešením soustavy (115). Nelineární model by měl lépe popisovat velké deformace a rotace. Řešení provedeme na třech sítích s postupně zvětšující se jemností a vyneseme maximální průhyb na konci nosníku, viz Tabulka 1. Konvergenci nelineárního výpočtu pomocí iterační metody vyneseme jako závislost reziduua na počtu iterací, viz Obrázek 4. Z obrázku je vidět že už po 7 iteracích dosahujeme přesnosti řádu 10^{-15} . Na obrázku 5 je pak je znázorněný rozdíl mezi výpočty pomocí modelu lineární a nelineární deformace. Z obrázku vyplývá, že nelineární model správně zachycuje kontrakci nosníku ve směru y vlivem ohybu ve směru z . Výsledky nelineárního iteračního výpočtu můžeme porovnat s volně dostupným softwarem pro MKP výpočty *CalculiX*[27], viz Obrázek 6. Z obrázku vyplývá, že deformace nosníku vypočítaná naším programem je identická s výpočtem pomocí softwaru *CalculiX*.

	počet elementů	w_{linear}	$w_{nonlinear}$
<i>M1</i>	1327	-0.0345250	-0.0343161
<i>M2</i>	9018	-0.0635671	-0.0624672
<i>M3</i>	53159	-0.0747219	-0.0730023

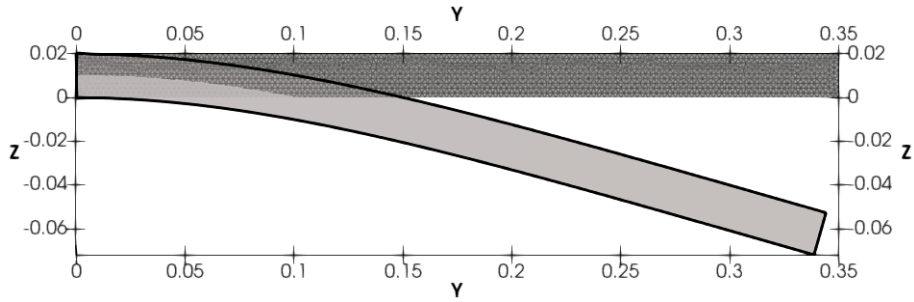
Tab. 1: Maximální průhyb w ve směru osy z na třech MKP sítích *M1*, *M2* a *M3*, srovnání lineárního a nelineárního modelu.



Obr. 4: Konvergence iteračního výpočtu nelineární deformace, výpočet na síti *M3*.



Obr. 5: Deformace nosníku vypočítaná pomocí lineárního (obrys) a nelineárního modelu (výplň), výpočet na síti *M3*.



Obr. 6: Deformace nosníku vypočítaná pomocí nelineárního modelu (výplň), srovnání se softwarem CalculiX (obrys), výpočet na síti M3.

5.1.2 Dynamická deformace

Deformaci prizmatického nosníku budeme vyšetřovat i jako časově závislou pomocí výpočtu uvažujícího inerciální členy. Budeme vyšetřovat časový průběh deformace po počátečním vychýlení daném statickým výpočtem v kapitole 5.1.1. Výpočty budeme provádět na nejjemnější síti M3. Nejprve spočítáme vlastní frekvence modelu, viz Tabulka 2.

	ω	$f[\text{Hz}]$
1.	6.4229	1.0222
2.	39.6165	6.30514
3.	99.1084	15.7730

Tab. 2: Vlastní frekvence ω a f vypočítané modální analýzou.

Při následné analýze dynamické odezvy budeme vyšetřovat vliv tlumení a koeficientů, pomocí kterých modelujeme tlumící člen. Tlumený dynamický systém bez vnějších sil řešený při problému dynamické odezvy na počáteční vychýlení je daný rovnicí

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbb{D}\dot{\mathbf{U}} + \mathbb{K}\mathbf{U} = 0. \quad (127)$$

Matici tlumení \mathbb{D} budeme aproximovat jako lineární kombinaci matic \mathbb{K} a \mathbb{M} vztahem

$$\mathbb{D} = \varepsilon_1\mathbb{M} + \varepsilon_2\mathbb{K}, \quad (128)$$

kde koeficienty $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Řešení systému očekáváme v harmonickém tvaru

$$\mathbf{U} = \mathbf{V}e^{zt}, \quad (129)$$

kde $z \in \mathbb{C}$, tedy obsahuje jak reálnou tak imaginární složku

$$z = d + i\tilde{\omega}. \quad (130)$$

Dosazením vztahu (129) do rovnice (127) dostáváme

$$(z^2\mathbf{M}\mathbf{V} + z\mathbf{D}\mathbf{V} + \mathbf{K}\mathbf{V})e^{zt} = 0 \quad (131)$$

a dosazením vztahu, kterým modelujeme matici tlumení (128) pak

$$(z^2 + \varepsilon_1 z)\mathbf{M}\mathbf{V} + (1 + \varepsilon_2 z)\mathbf{K}\mathbf{V} = 0. \quad (132)$$

Tento vztah můžeme upravit do tvaru

$$\frac{z^2 + \varepsilon_1 z}{1 + \varepsilon_2 z}\mathbf{M}\mathbf{V} + \mathbf{K}\mathbf{V} = 0, \quad (133)$$

ve kterém označíme

$$\frac{z^2 + \varepsilon_1 z}{1 + \varepsilon_2 z} = -\omega^2 \quad (134)$$

a rovnici zapíšeme jako

$$-\omega^2\mathbf{M}\mathbf{V} + \mathbf{K}\mathbf{V} = 0. \quad (135)$$

Člen ω tedy představuje frekvenci netlumeného systému. Cílem je rozhodnout, kdy budou vlastní čísla systému reálná a kdy komplexně sdružená. Úpravou vztahu (134) získáme

$$z^2 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2\omega^2)z + \omega^2 = 0. \quad (136)$$

Jedná se o kvadratickou rovnici, pro kterou můžeme zapsat diskriminant jako

$$D = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2\omega^2)^2 - 4\omega^2. \quad (137)$$

Pro velká $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ bude $D > 0$ a kořeny kvadratické rovnice budou tedy reálné. V takovém případě bude řešením systému exponenciální funkce a systém nebude kmitat. V případě $D = 0$ mluvíme o takzvaném kritickém tlumení. Pro dostatečně malá $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ platí $D < 0$ a kořeny rovnice budou komplexně sdružená čísla ve tvaru

$$z_{1,2} = \frac{-\varepsilon_1 - \varepsilon_2\omega^2}{2} \pm i\sqrt{\omega^2 - \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\omega^2)^2}{4}}. \quad (138)$$

Ze vztahu (138) pak definujeme koeficient útlumu

$$d = \frac{-\varepsilon_1 - \varepsilon_2\omega^2}{2} \quad (139)$$

a vlastní frekvenci tlumeného systému

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\omega^2)^2}{4}}. \quad (140)$$

Řešením rovnice (127) je tedy v takovém případě goniometrická funkce a systém kmitá.

Při vyšetřování modelu nosníku volíme koeficienty tlumení $\varepsilon_1 = 0.005$, $\varepsilon_2 = 0.2$. Nejprve vypočítáme dynamickou odezvu pomocí řešení nestacionárního výpočtu popsaného v kapitole 3.3. Počáteční podmínky volíme

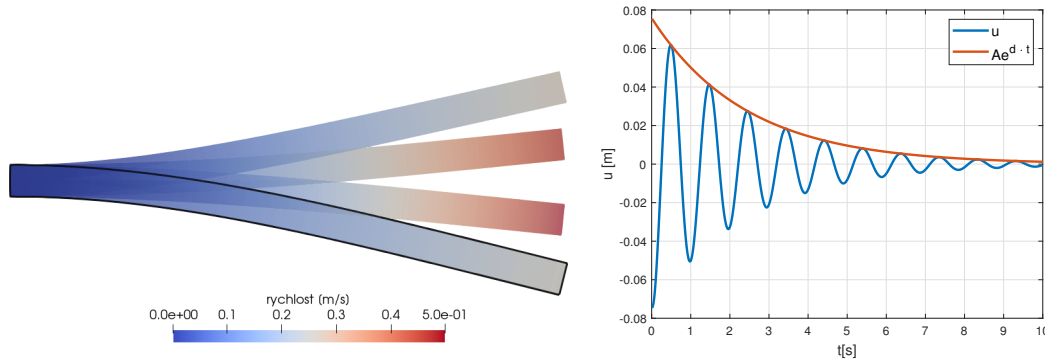
$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_s(\mathbf{x}), \quad (141a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = (0, 0, 0), \quad (141b)$$

kde \mathbf{u}_s zde značí řešení získané stacionárním výpočtem v kapitole 5.1.1. Získané řešení zobrazíme, viz Obrázek 7. Pomocí zvolených koeficientů můžeme užitím vztahů (139) a (140) spočítat poměrný útlum a vlastní frekvence tlumených kmitů jako $d = -0.4128$ a $\tilde{\omega} = 6.4097$. Frekvence tlumeného systému $\tilde{\omega}$ je podle očekávání nižší než první vlastní frekvence $\omega = 6.4229$ zjištěná z modální analýzy. Zjištěný koeficient tlumení využijeme k vynesení exponenciální funkce $f(t)$ ve tvaru

$$f(t) = Ae^{-0.4128t} \quad (142)$$

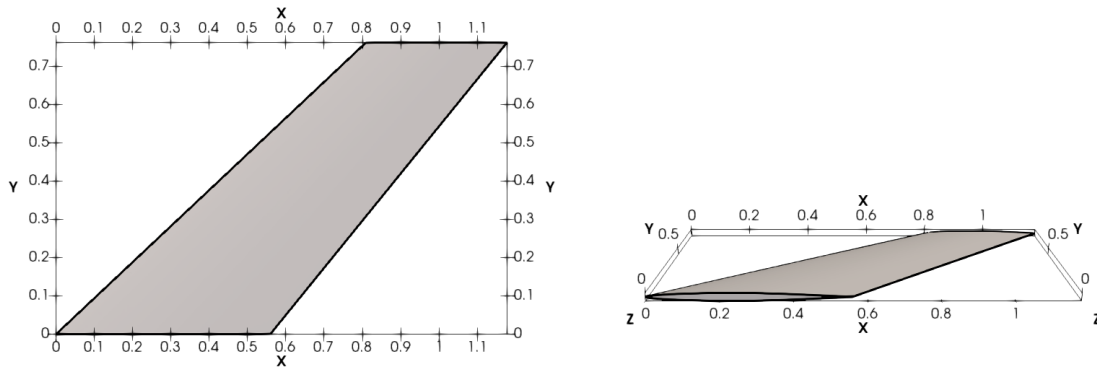
popisující útlum kmitu do obrázku 7. Z obrázku je zřejmé, že vypočítaný útlum odpovídá útlumu výchylky získaného z nestacionárního výpočtu.



Obr. 7: Dynamická odezva na vychýlení nosníku, obrysem znázorněna počáteční výchylka (nalevo), graf časového průběhu výchylky v koncovém bodě nosníku a funkce $f(t)$ popisující útlum (napravo).

5.2 Vyšetřování vlastních frekvencí modelu křídla

Problém hledání vlastních tvarů a vlastních frekvencí pružného tělesa budeme také vyšetřovat na známém testovacím modelu křídla AGARD 445.6, viz 8. Jedná se o modelové křídlo s příčným profilem NACA 65A004. Materiál křídla je *mahagonové dřevo* s materiálovými konstantami závislými na směru, viz Tabulka 3. Jeho mechanické vlastnosti jsou tedy nezávislé ve třech vzájemně kolmých směrech. Jedná se tak o takzvaně ortotropní materiál.



Obr. 8: Geometrie křídla AGARD 445.6 s profilem NACA 65A004.

E_{11}	9238.9 MPa
E_{11}	604.72 MPa
E_{11}	1010.7 MPa
G_{12}	623.40 MPa
G_{13}	794.33 MPa
G_{23}	264.77 MPa
ν_{12}	0.034
ν_{13}	0.033
ν_{23}	0.326

Tab. 3: Materiálové konstanty mahagonového dřeva, indexy 1,2,3 značí podélný, tangenciální a radiální směr.

5.2.1 Řešení rovnic pro ortotropní materiály

Pro trojrozměrný ortotropní materiál nabývá zobecněný Hookův zákon ve Voightově notaci pro malé deformace tvar

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{13} \\ 2e_{12} \end{pmatrix}, \quad (143)$$

kde pro konstanty C_{ij} platí vztahy

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{23}}{E_{22}E_{33}D}, & C_{12} &= \frac{\nu_{12} - \nu_{13}\nu_{23}}{E_{22}E_{33}D}, & C_{13} &= \frac{\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{23}}{E_{22}E_{33}D}, \\ C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{13}}{E_{11}E_{33}D}, & C_{23} &= \frac{\nu_{23} - \nu_{13}\nu_{12}}{E_{11}E_{33}D}, & C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{12}}{E_{11}E_{22}D}, \\ C_{44} &= G_{23}, & C_{55} &= G_{13}, & C_{66} &= G_{12}, \end{aligned} \quad (144)$$

$$D = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{12} - \nu_{23}\nu_{23} - \nu_{13}\nu_{13} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{13}}{E_{11}E_{22}E_{33}}. \quad (145)$$

Ve vyšetřovaném modelu křídla jsou směry materiálových vlastností odlišné od os souřadnicového systému, ve kterém je definována geometrie. Je tedy dále zapotřebí příslušná transformace tenzoru \mathbf{C} popisujícího ortotropní materiál, viz [22]. Transformaci vlastností materiálu v materiálových souřadnicích do souřadnic definovaných geometrií, a tedy i souřadnic jednotlivých elementů realizujeme skrze transformační matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}. \quad (146)$$

Při transformaci souřadnicového systému v problémech elasticity je opět výhodné pracovat ve Voightově notaci.

Transformační matice pak přechází do tvaru

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} \end{pmatrix}, \quad (147)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{11} &= \begin{pmatrix} A_{11}^2 & A_{12}^2 & A_{13}^2 \\ A_{21}^2 & A_{22}^2 & A_{23}^2 \\ A_{31}^2 & A_{32}^2 & A_{33}^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{T}_{12} &= \begin{pmatrix} A_{11}A_{13} & A_{12}A_{13} & A_{11}A_{12} \\ A_{21}A_{23} & A_{22}A_{23} & A_{21}A_{22} \\ A_{31}A_{33} & A_{32}A_{33} & A_{31}A_{32} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{T}_{21} &= \begin{pmatrix} 2A_{11}A_{21} & 2A_{12}A_{22} & 2A_{13}A_{23} \\ 2A_{21}A_{31} & 2A_{22}A_{32} & 2A_{23}A_{33} \\ 2A_{11}A_{31} & 2A_{12}A_{32} & 2A_{13}A_{33} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{T}_{22} &= \begin{pmatrix} A_{13}A_{21} + A_{11}A_{23} & A_{13}A_{22} + A_{12}A_{23} & A_{12}A_{21} + A_{11}A_{22} \\ A_{23}A_{31} + A_{21}A_{33} & A_{23}A_{32} + A_{22}A_{33} & A_{22}A_{31} + A_{21}A_{32} \\ A_{13}A_{31} + A_{11}A_{33} & A_{13}A_{32} + A_{12}A_{33} & A_{12}A_{31} + A_{11}A_{32} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (148)$$

Pro tenzor malé deformace v materiálovém souřadnicovém systému ve Voightově notaci platí

$$\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{T}\mathbf{e}, \quad (149)$$

a pro tenzor Cauchyho napětí

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{T}^T)^{-1}\boldsymbol{\sigma}. \quad (150)$$

Tenzor \mathbf{C} je tenzorem čtvrtého řádu přecházející ve Voightově zápisu v matici 6×6 . Pro transformaci této matice pak platí

$$\mathbf{C} = \mathbf{T}^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{T}, \quad (151)$$

kde $\tilde{\mathbf{C}}$ je matice formulovaná v materiálových souřadnicích daná rovnicí (143) a \mathbf{C} je formulovaná v souřadnicovém systému, ve kterém byla definována geometrie, a ve kterém tak provádíme výpočty na jednotlivých elementech.

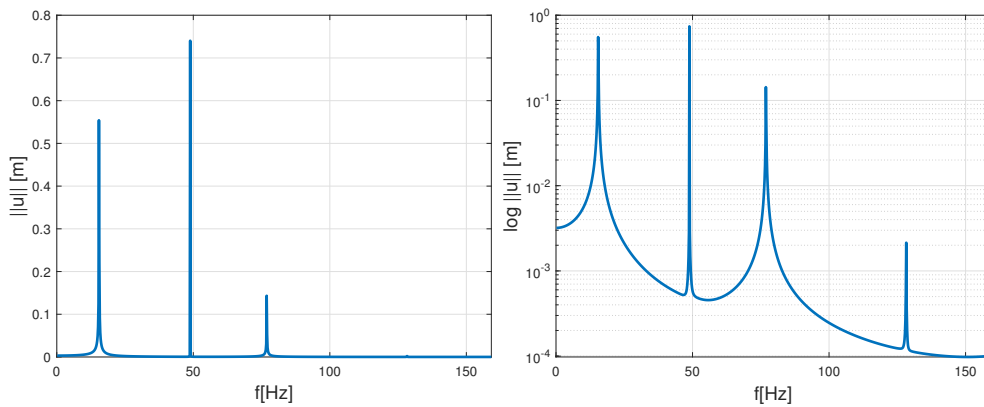
Ve vyšetřovaném modelu křídla je zapotřebí rotace osy x do podélného směru křídla, tedy o 45° . Transformační matice \mathbf{A} má tedy tvar

$$\mathbf{A} = A_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} & 0 \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (152)$$

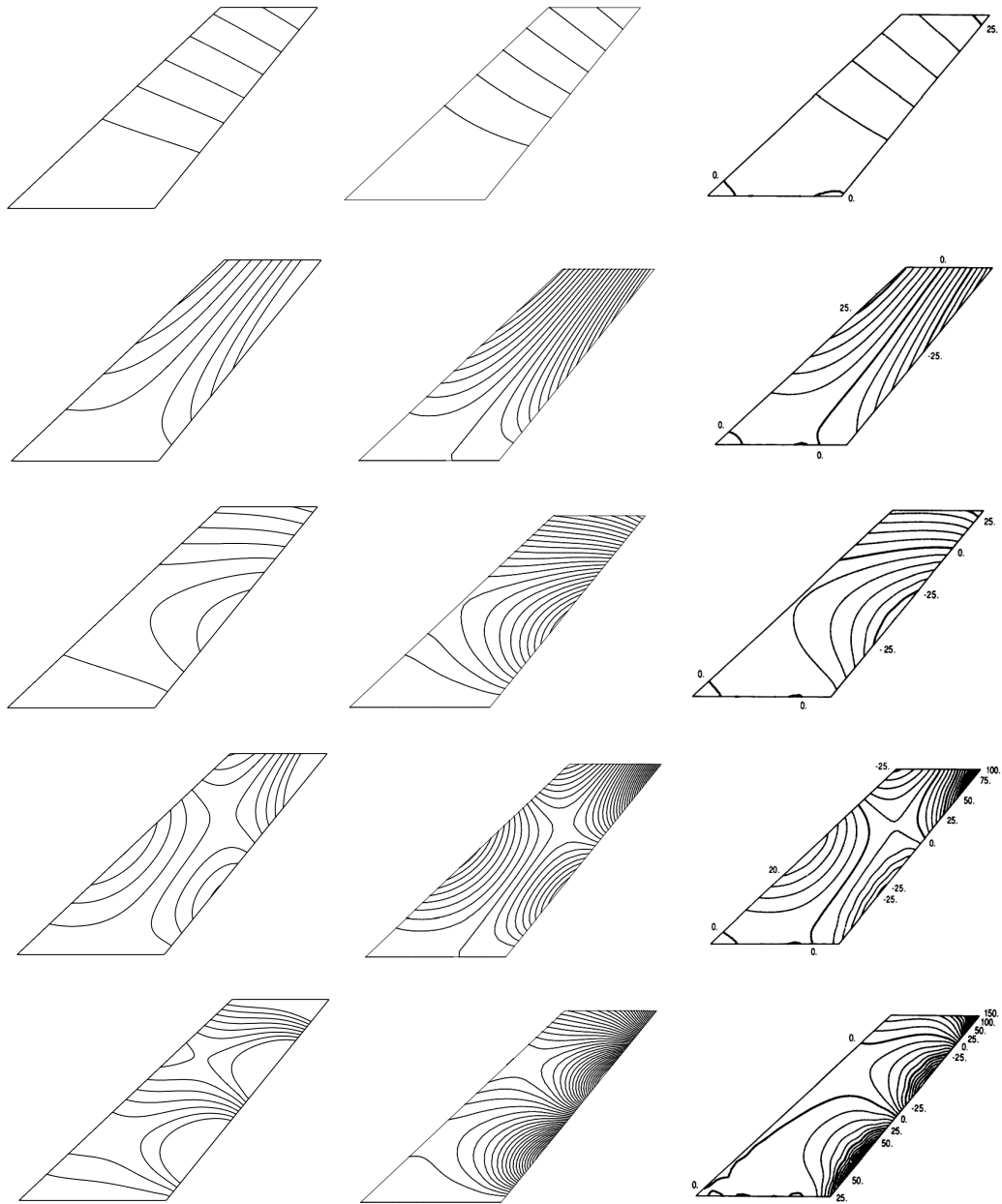
Pomocí výše uvedených vztahů provedeme výpočet na transformovaných osách ortotropie a spočítáme vlastní frekvence a tomu odpovídající vlastní tvary modelu křídla, a to na dvou MKP sítích $M1$ (258926 čtyřstěnů) a $M2$ (455932 čtyřstěnů). Výsledky porovnáme s výpočty z [5] a výpočty na 2D modelu z [2]. Dále řešení porovnáme s výpočtem na stejné síti v programu CalculiX, který také podporuje transformaci os ortotropie. Pro ověření zjištěných vlastních frekvencí také vyneseme přenosovou funkci spočítanou na síti $M1$, viz Obrázek 9.

Frekvence[Hz]	$M1$	$M2$	CalculiX	3D model z [5]	2D model z [2]
f_1	15.4837	14.9784	15.0633	13.3645	14.1201
f_2	48.8612	44.6819	44.8963	45.6225	50.9125
f_3	76.9148	73.2843	73.5406	64.7223	68.9416
f_4	128.2472	117.3314	117.932	113.5130	122.25576

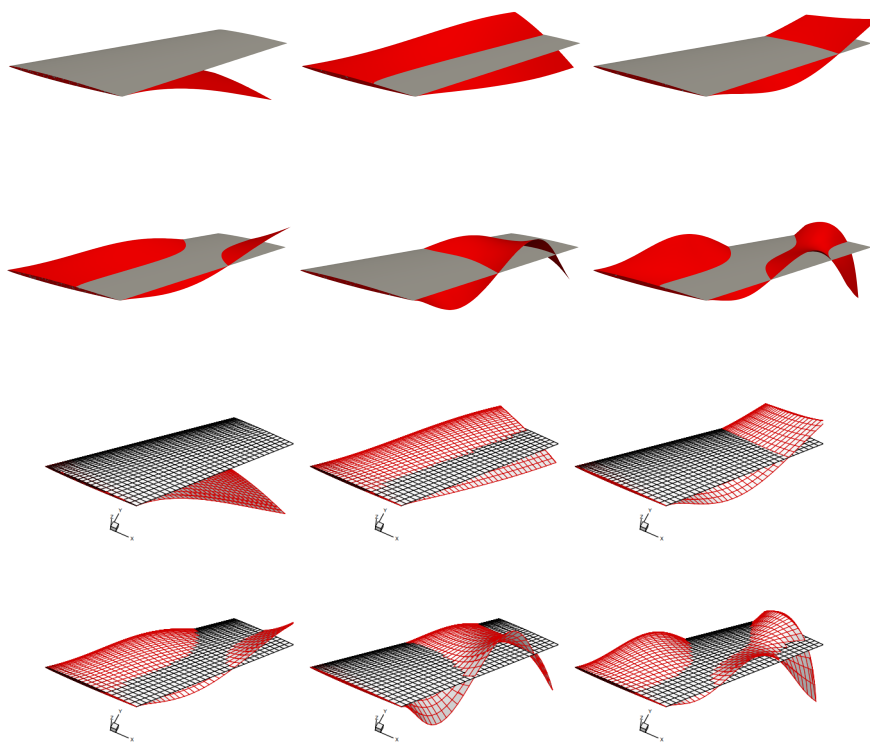
Tab. 4: Vlastní frekvence modelu křídla na MKP sítích $M1$, $M2$ spočítané naším řešičem, porovnání s výpočtem na síti $M2$ pomocí softwaru CalculiX a srovnání s dvěma modely křídla z literatury



Obr. 9: Přenosová funkce, lokální extrémy odpovídají frekvencím $f_1 = 15.438\text{Hz}$, $f_2 = 48.861\text{Hz}$, $f_3 = 76.872\text{Hz}$ a $f_4 = 128.279\text{Hz}$.



Obr. 10: Srovnání izočar průhybu ve směru z pro prvních pět vlastních tvarů. Výsledky našeho řešiče (nalevo), 3D modelu z [5](uprostřed) a 2D modelu z [2](napravo).

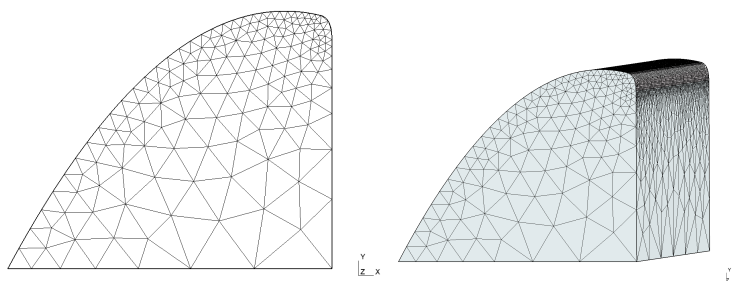


Obr. 11: Srovnání prvních šesti vlastních tvarů s 3D modelem z [5].

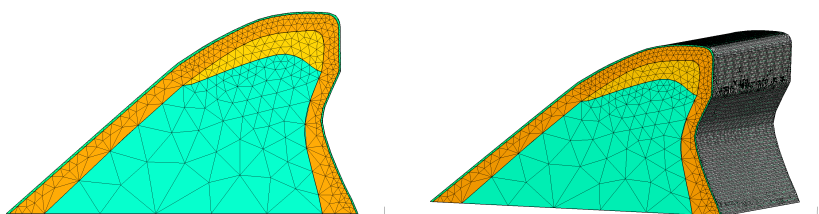
Výsledky hodnot vlastních frekvencí (zjištěných jak řešením problému zobecněných vlastních čísel, tak vynesemím přenosové funkce) zřejmě řádově odpovídají 3D modelu z [5]. Odlišnosti mohou být způsobeny diametrálně odlišnou MKP sítí popřípadě jinými faktory, jako je volená numerická integrace, či stupeň polynomu elementů. Frekvence se řádově shodují i s 2D modelem [2], u kterého lze mírné hodnotové odlišnosti očekávat. Z porovnání izochar průhybu ve směru z na obrázku 10 je zřejmé že vlastní tvary našeho modelu odpovídají modelům [2] a [5], stejně tak potvrzuje obrázek 11 shodu s modelem z [5]. Výsledky z výpočtu na stejné síti v programu CalculiX se pak shodují s výsledky získanými použitím našeho programu.

5.3 Vyšetřování kmitů modelu lidské hlasivky

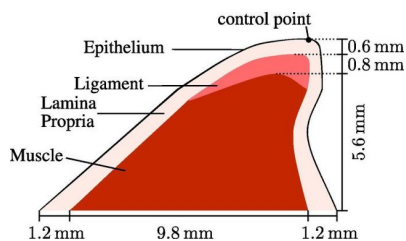
Vyvinutý program nakonec využijeme ke komplexní analýze modelu lidské hlasivky, a to zejména k vyšetřování vlastních frekvencí hlasivky, dynamické odezvy na tlakový vzruch a vlivu předpětí. Budeme pracovat se dvěma modely hlasivky. První model, viz Obrázek 12, je jednoduchý model hlasivky uvažující homogenní materiál s elastickými konstantami $E = 8 \text{ kPa}$, $\mu = 0.4$ a s hustotou $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ (v práci budeme označovat názvem MALE). Pro analýzu kmitů uvažujeme v modelu bod $B[0.00657, 0.0058, 0.0058]$ odpovídající vrcholu uprostřed hlasivky. Druhý složitější model na obrázku 13 uvažuje nehomogenní těleso a jeho elastické konstanty jsou popsány, viz Tabulka 14. Výsledky modální analýzy můžeme porovnávat s výpočty na 2D modelech představených v [21].



Obr. 12: Trojrozměrná výpočetní oblast s MKP sítí, model hlasivky MALE. Rozměry modelu $x = 6.8 \text{ mm}$, $y = 5.8 \text{ mm}$, $z = 11.6 \text{ mm}$.



Obr. 13: Trojrozměrná výpočetní oblast s MKP sítí, model hlasivky ZORNER. Rozměry modelu $x = 12.2 \text{ mm}$, $y = 8 \text{ mm}$, $z = 20 \text{ mm}$.



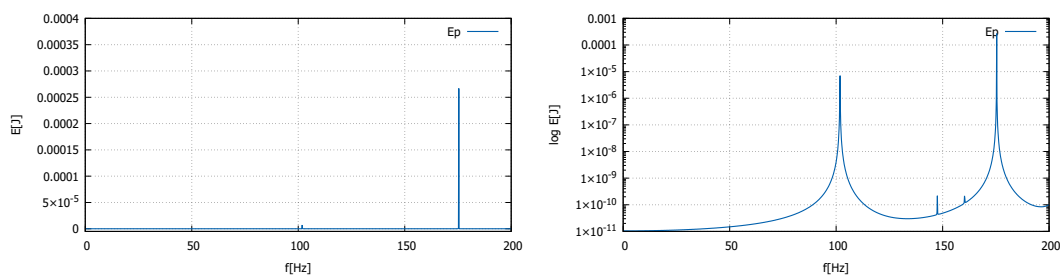
	E [kPa]	μ	ρ [kg/m ³]
Epithelium	50	0.45	1000
Lamina propria	20	0.45	1000
Ligament	25	0.45	1000
Muscle	30	0.45	1000

Obr. 14: Definice materiálových konstant nehomogenního modelu ZORNER [23].

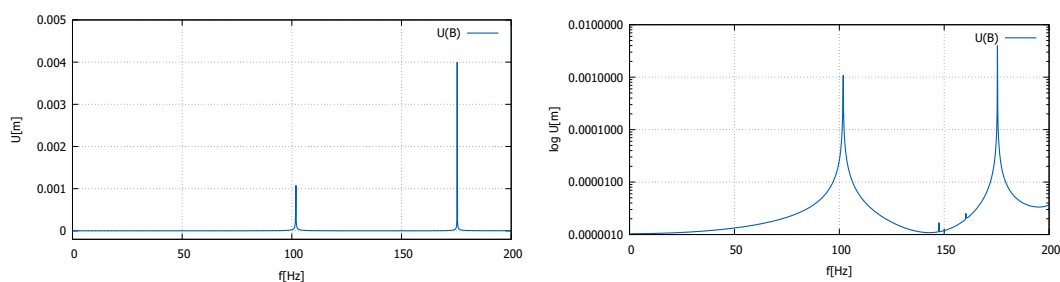
5.3.1 Modální analýza

Vyšetřování vlastních frekvencí a tvarů provedeme nejprve na jednodušším modelu lidské hlasivky MALE.

Nejprve spočítáme přenosovou funkci cyklickým řešením rovnice (97). Model zatěžeme plošnou silou lineárně rostoucí podél osy x , simulující podtlak respektive přetlak vznikající prouděním vzduchu okolo hlasivky.

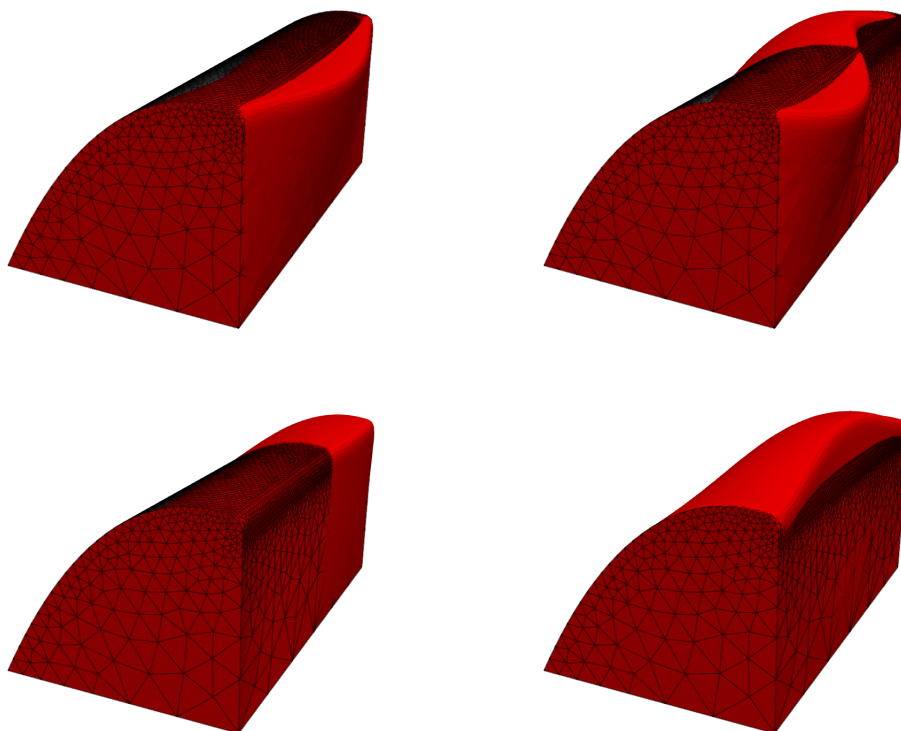


Obr. 15: Deformační energie v závislosti na budící frekvenci

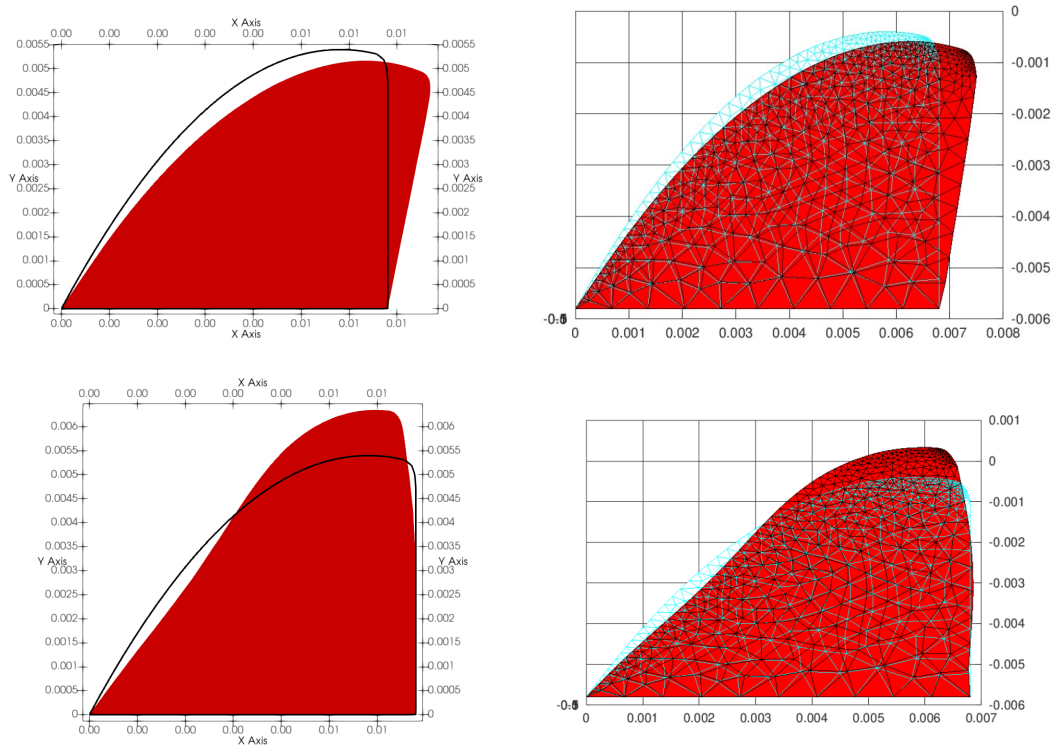


Obr. 16: Posuv v bodě B v závislosti na budící frekvenci

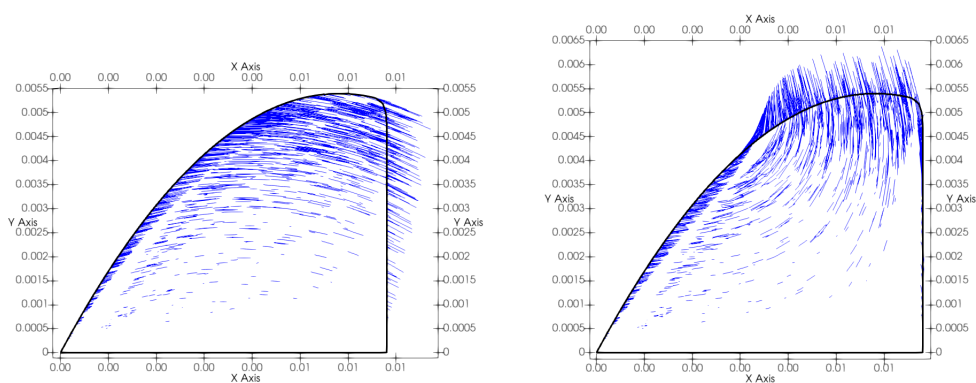
Z obrázků 15 a 16 vyplývá, že k největší odezvě dochází při zatěžování budící silou o frekvencích 101 Hz a 175 Hz, charakter deformace při zatěžování těmito frekvencemi odpovídá vlastním tvarům zjištěných řešením zobecněného problému vlastních čísel. Vlastní tvary získané z řešení vyneseme, viz Obrázek 17, 18. Vlastní tvary při frekvencích $f = 101$ Hz a $f = 175$ Hz odpovídají vertikálnímu a laterálnímu směru, jak je vidět na obrázku 19. Z porovnání frekvencí zachycených výpočtem přenosové funkce a frekvencí získaných řešením problému zobecněných vlastních čísel, viz Tabulka 6, je zřejmé že si frekvence odpovídají.



Obr. 17: První 4 vlastní tvary, model hlasivky MALE.



Obr. 18: Vlastní tvary modelu MALE odpovídající frekvencím 101.8 Hz a 175.4 Hz (vlevo), porovnaná s 2D modelem z [21](vpravo).

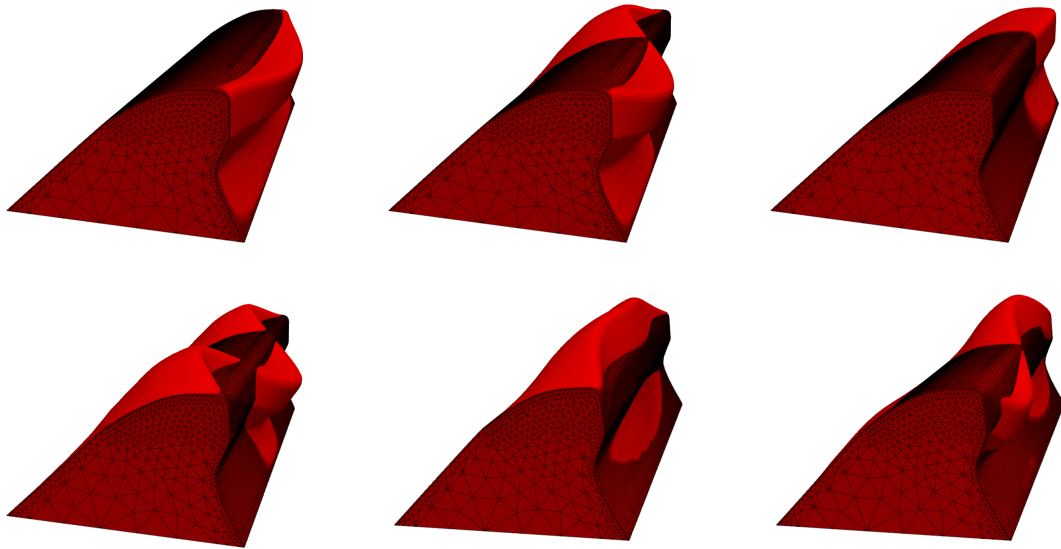


Obr. 19: Vertikální a laterální charakter deformace vlastních tvarů modelu MALE odpovídající frekvencím 101.8 Hz (nalevo) a 175.4 Hz (napravo).

Frekvence [Hz]	Vlastní čísla	Přenosová funkce
f_1	101.8159	101.859
f_2	147.5051	147.537
f_3	160.3396	160.269
f_4	175.3797	234.4768

Tab. 5: Vlastní frekvence vypočítané řešením problému zobecněných vlastních čísel a frekvence zjištěné z přenosové funkce.

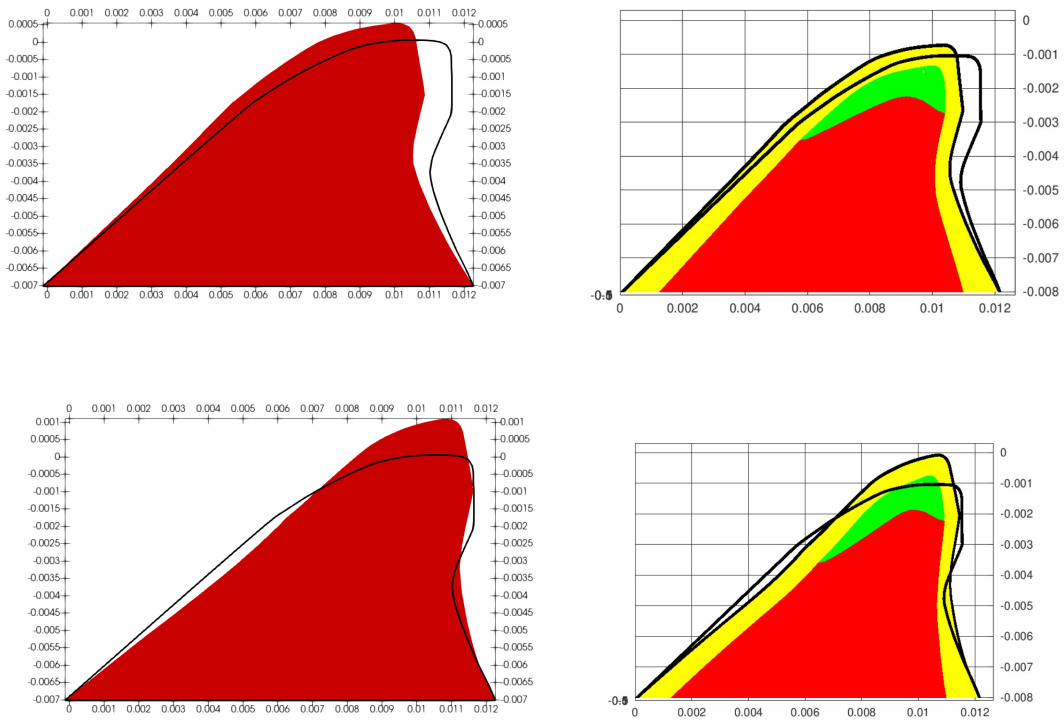
Obdobnou analýzu provedeme i na druhém nehomogenním modelu hlasivky ZORNER. Vlastní tvary opět vyneseme, viz Obrázek 20. Frekvencím 134.4 Hz a 234.5 Hz opět odpovídají vertikální a laterální kmity jak je vidět na obrázku 21, 22.



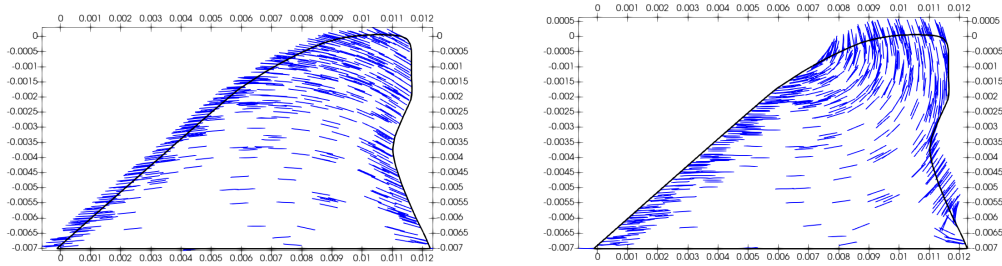
Obr. 20: Prvních 6 vlastních tvarů, model hlasivky ZORNER.

Frekvence [Hz]	Vlastní čísla	Přenosová funkce
f_1	134.3717	134.327
f_2	167.0914	167.113
f_3	192.2036	192.259
f_4	217.2226	217.246
f_5	234.4768	234.435
f_6	253.9309	253.852

Tab. 6: Vlastní frekvence vypočítané řešením problému zobecněných vlastních čísel a frekvence zjištěné z přenosové funkce na modelu hlasivky ZORNER.



Obr. 21: Vlastní tvary modelu MALE odpovídající frekvencím 134.4 Hz a 234.5 Hz (nalevo), porovnaná s 2D modelem z [21](napravo).



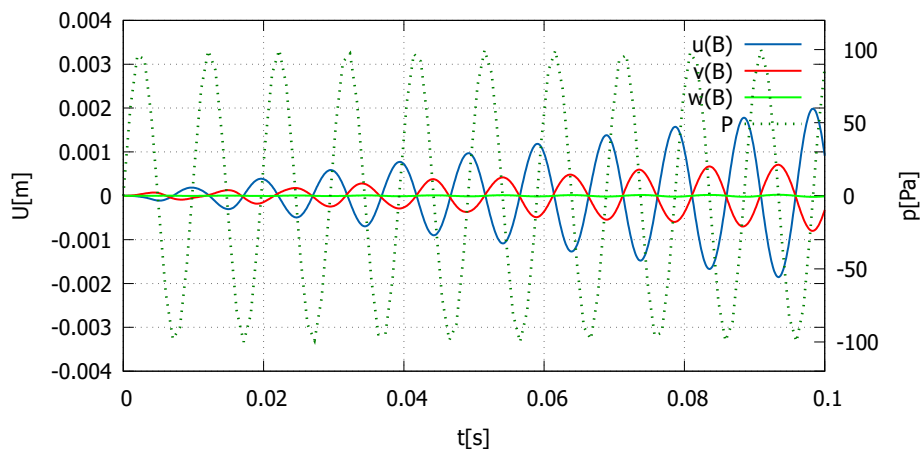
Obr. 22: Vertikální a laterální charakter deformace vlastních tvarů modelu ZORNER odpovídající frekvencím 134.4 Hz a 234.5 Hz.

5.3.2 Dynamická odezva na tlakový vzruch

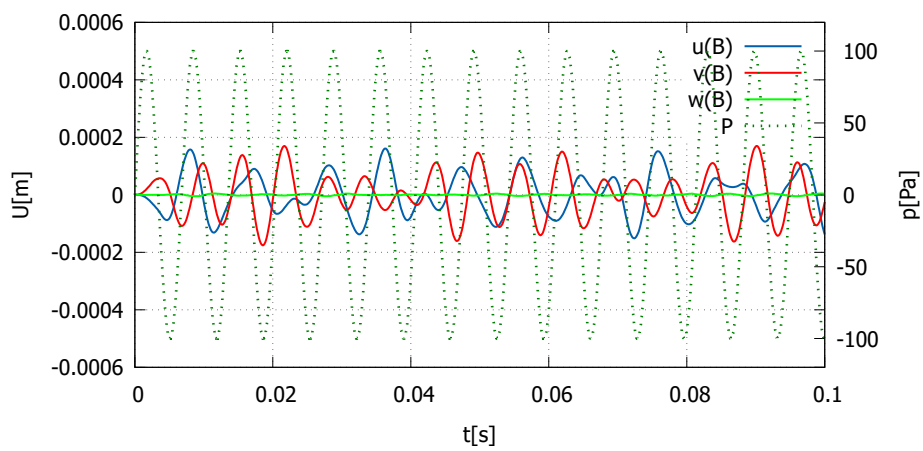
Nestacionární výpočet na modelu MALE budeme nejprve provádět zatěžováním plošnou silou $P(x, y, z, t)$ o frekvencích f_i zjištěných výpočtem přenosové funkce. Budící tlak uvažujeme alternující harmonický ve tvaru

$$P(x, y, z, t) = \frac{100x}{0.0068} \sin(2\pi ft). \quad (153)$$

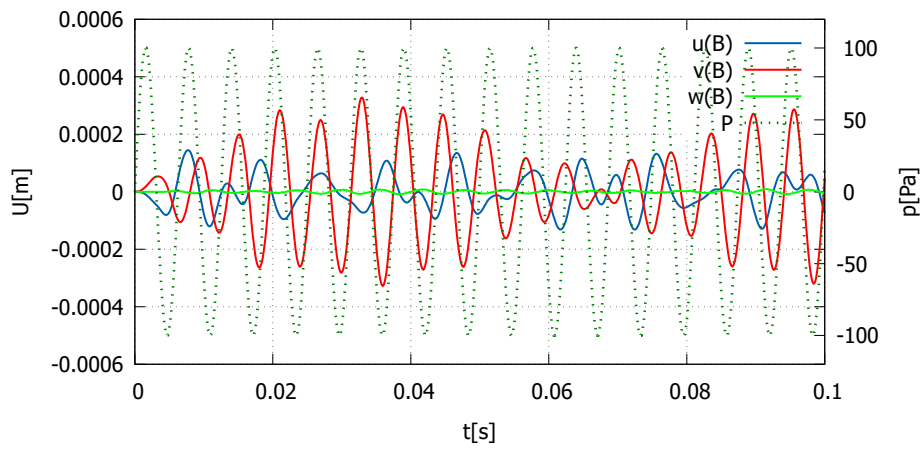
Řešení získáváme ve tvaru $\mathbf{u} = (u, v, w)$ kde u, v, w jsou posuvy ve směru souřadnicových os x, y, z . Dynamická odezva na frekvence je vynesena, viz Obrázek 23, 24, 25, 26. Z obrázků je zřejmé, že při buzení frekvencí $f = 101$ Hz a $f = 175$ Hz, které odpovídají vertikálnímu (dominantní výchylka ve směru x) a laterálnímu (dominantní výchylka ve směru y) směru kmitů, dosahuje netlumený systém rezonance. To odpovídá zjištěné odezvě z výpočtu přenosové funkce.



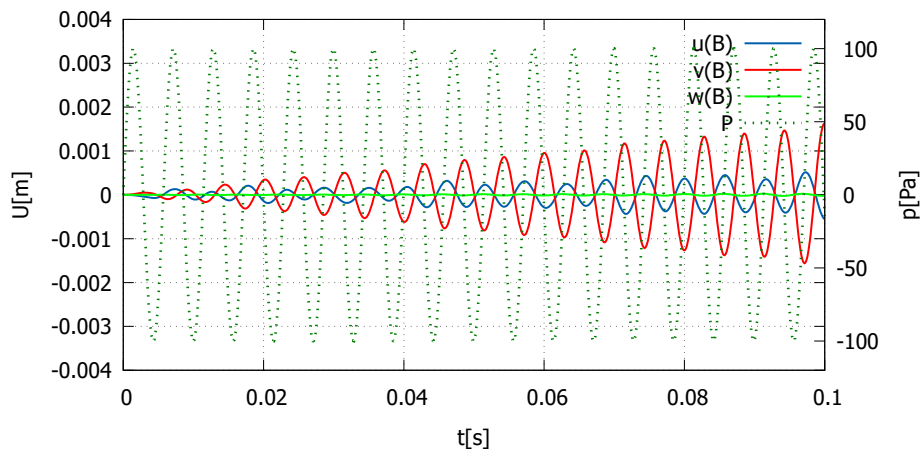
Obr. 23: Hodnoty posuvů v bodě B při frekvenci budícího tlaku $f = 101.8$ Hz a budící tlak P .



Obr. 24: Hodnoty posuvů v bodě B při frekvenci budícího tlaku $f = 147.5$ Hz a budící tlak P .

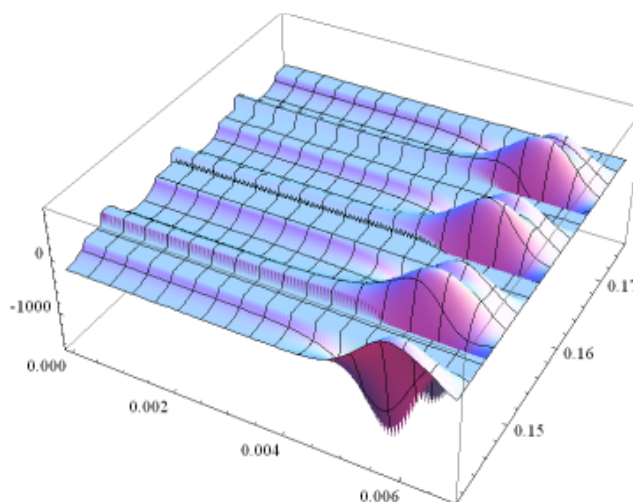


Obr. 25: Hodnoty posuvů v bodě B při frekvenci budícího tlaku $f = 160.3396$ Hz a budící tlak P .

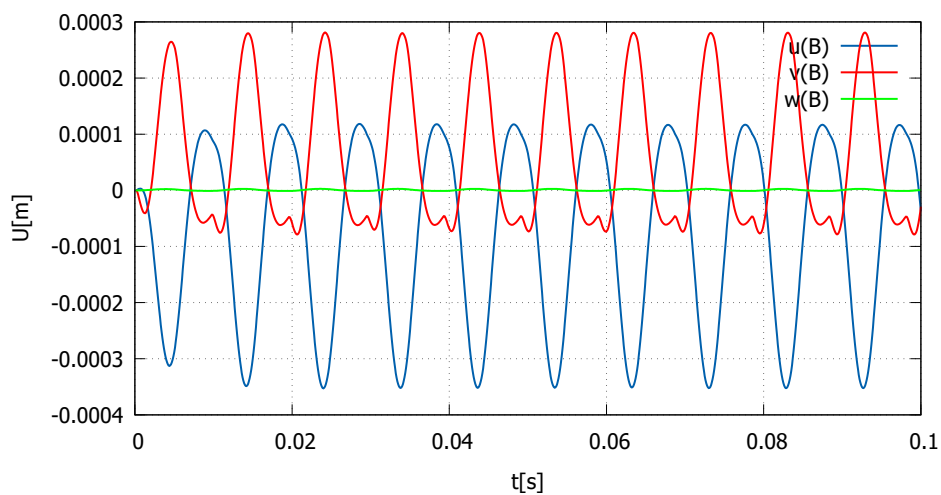


Obr. 26: Hodnoty posuvů v bodě B při frekvenci budícího tlaku $f = 175.3797$ Hz a budící tlak P .

Následně budeme vyšetřovat dynamickou odezvu modelu MALE na průběh tlakového zatížení získaným z externích dat získaných z aeroelastické analýzy 2D proudění okolo hlasivek v [10]. Pro výpočet převezmeme z externích dat i hodnoty tlumících koeficientů $\varepsilon_1 = 31, \varepsilon_2 = 0.001$. Budící tlak je vizualizovaný na obrázku 27. Odezvu na budící tlak zobrazíme, viz Obrázek 28.

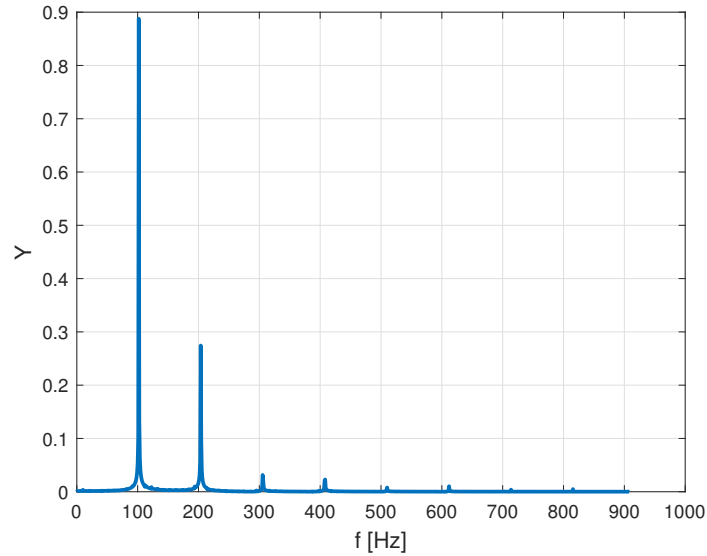


Obr. 27: Průběh budícího tlaku, převzato z [10].



Obr. 28: Hodnoty posuvů v bodě B při zatížení budícím tlakem z [10].

Časovou závislost můžeme přenést do frekvenční oblasti užitím nástrojů Fourierovy analýzy popsanými v kapitole 3.4. Pro příklad vynesme frekvenční závislost pro výchylku ve směru y v bodě B , viz Obrázek 29.



Obr. 29: Fourierova analýza výchylky $v(B)$ (výchylka ve směru y).

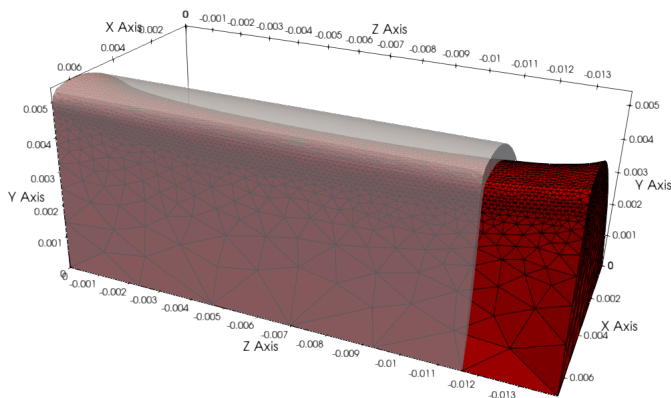
Z obrázku 29 vyplývající dominantní frekvence 100 Hz odpovídá první vlastní frekvenci modelu.

5.3.3 Vliv přepětí na vlastní frekvence

Pro zahrnutí vlivu předpětí budeme uvažovat tři předepjaté stavy modelu MALE, viz Obrázek 30. Provedeme tedy nelineární výpočet do deformovaného stavu (vynucením posuvu na jednom z okrajů hlasivky) a budeme opět vyšetřovat vlastní frekvence. Předepíšeme tak přepětí protažením modelu hlasivky o 3%, 5% a 7% ve směru z . Následně řešíme rovnici

$$(\mathbb{K}_k - \omega^2 \mathbb{M})\mathbf{V} = 0, \quad (154)$$

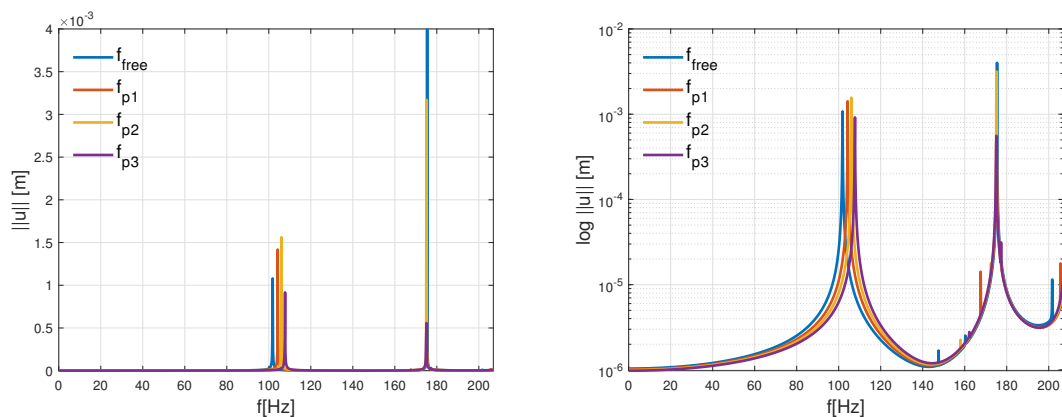
kde \mathbb{K}_k značí iterační matici tuhosti získanou nelineární analýzou popsanou v kapitole 3.5. Matice hmotnosti \mathbb{M} je invariantní vzhledem k deformaci a předpětí je tak zapotřebí uvažovat pouze při výpočtu matice tuhosti \mathbb{K}_k .



Obr. 30: Příklad předepjatého stavu hlasivky.

Frekvence [Hz]	Bez předpětí	Předpětí 3%	Předpětí 5%	Předpětí 7%
f_1	101.8159	104.2790	105.9680	107.6985
f_2	147.5051	153.8020	158.0216	162.2643
f_3	160.3396	167.6086	172.4604	175.0046
f_4	175.3797	175.1723	175.0716	177.3287

Tab. 7: Srovnání vlastních frekvencí nepředepjatého a dvou předepjatých modelů.



Obr. 31: Přenosové funkce zobrazující hodnoty vlastních frekvencí v závislosti na předpětí.

Z výsledků viz Tabulka 7 a Obrázek 31 vyplývá, že vlivem předpětí dochází ke zvýšení vlastních frekvencí a to zejména pro první frekvenci odpovídající vertikálním kmitům. Naopak první laterální frekvence, která pro nepředepjatý model odpovídala čtvrté frekvenci, zachovává svojí frekvenci okolo 175 Hz a pro předepjatý model p_3 se laterální frekvence kmitů objevuje jako třetí vlastní mód. Obecně pozorujeme zvyšování vlastních frekvencí se zvyšováním míry předpětí.

6 Závěr

V práci jsme se zabývali úlohami trojrozměrné elastické deformace, a to zejména v úlohách kmitání pružných těles. Formulovali jsme matematický model popisující deformaci elastického tělesa pomocí tenzorů deformace, tenzorů napětí, vnějších sil a vztahů mezi nimi. Pomocí těchto definic jsme získali systém parciálních diferenciálních rovnic rovnováhy. Zabývali jsme se problematikou deformované a nedeformované oblasti a transformacemi fyzikálních veličin mezi nimi. Pomocí rovnic rovnováhy jsme formulovali takzvaný slabý problém, který je výchozím bodem pro řešení problémů pomocí metody konečných prvků. Popsali jsme tak diskretizaci pomocí MKP, a to jak pro úlohy statické deformace, tak pro úlohy deformace dynamické. Pro problémy s velkými deformacemi, rotacemi či předpětím bylo formulováno numerické řešení geometricky nelineárního problému. Převedli jsme tak původní systém parciálních diferenciálních rovnic na soustavu lineárních algebraických rovnic pro problémy statiky, či soustavu obyčejných diferenciálních rovnic pro problémy dynamiky. Soustavu obyčejných diferenciálních rovnic jsme pak diskretizovali pomocí Newmarkovy metody. Dále jsme se věnovali možnostem numerického vyšetřování dominantních frekvencí kmitajícího systému pomocí nástrojů modální analýzy.

K praktickému řešení problémů elastické deformace a problémů kmitajících těles jsme vytvořili multifunkční program v jazyce C. Popsali jsme programové aspekty implementace numerických výpočtů pomocí MKP a nástrojů modální analýzy. Vytvořený program je schopný řešit problémy lineární a geometricky nelineární deformace, problémy dynamické deformace a problémy modální analýzy, včetně vlivu přepětí a to obecně pro homogenní i nehomogenní, izotropní či ortotropní elastické materiály.

Pomocí vytvořeného programu jsme pak nejprve řešili úlohu statického ohybu prizmatického nosníku, a to zejména za účelem porovnání lineárního a nelineárního modelu deformace. Výsledky jsme následně porovnávali s volně dostupným softwarem CalculiX. Následně jsme vyšetřovali vlastní frekvence a vlastní tvary modelu leteckého křídla z materiálu s ortotropními vlastnostmi. Výsledky jsme mohli porovnávat s obdobnými modely z literatury. Nakonec jsme program využili ke komplexní analýze kmitání dvou modelů lidské hlasivky. Nejprve jsme vyšetřovali vlastní frekvence a vlastní tvary obou modelů a to jak pomocí řešení problému zobecněných vlastních čísel, tak pomocí výpočtu přenosové funkce. Získané tvary jsme porovnávali s dvojrozměrnými modely z literatury. Následně jsme vyšetřovali dynamickou odezvu modelu na budící tlak, o frekvencích odpovídajícím vlastním frekvencím modelu, popřípadě odezvu na buzení časově závislým průběhem tlaku získaným z aeroelastické 2D analýzy hlasivky v literatuře. Nakonec provedli analýzu posuvu hodnot vlastních frekvencí v závislosti na předpětí modelu hlasivky.

Literatura

- [1] BRDLIČKA, M., SAMEK, L., SOPKO, B. *Mechanika kontinua*. Academia, Praha, 2005.
- [2] CARSON YATES, J. E. *AGARD standard aeroelastic configurations for dynamic response, Candidate configuration I.-Wing 445.6*. Technical Memorandum 100492, NASA, 1987, 182 - 189.
- [3] CIARLET, P. G. *Mathematical Elasticity: Three-Dimensional Elasticity*. SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics, 2021, Vol. 1.
- [4] CLOUGH, R., W., PENZIEN, J. *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill Publishing Company, New York, 1993, 2nd Ed.
- [5] DOBEŠ, J. *Numerical Algorithms for the Computation of Steady and Unsteady Compressible Flow over Moving Geometries – Application to Fluid-Structure Interaction*. Praha 2007. Disertační práce, ČVUT, Fakulta strojní, Ústav technické matematiky. Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Sint-Genesius-Rode, Belgium, Université Libre de Bruxelles, Bruxelles, Belgium.
- [6] DOKAINISH, M., A., SUBBRAJ, K. *A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics*. Explicit methods In Computers & Structures, 1989, Vol. 32, Issue 6, 1371 - 1386.
- [7] FIREY, W., J. *Remainder Formulae in Taylor's Theorem*. Amer. Math. Monthly, 1960, Vol. 67, 903 - 905.
- [8] GEUZAINEL, Ch., REMACLE, J. *Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2009, Vol. 79, 1309 - 1331. doi:10.1002/nme.2579.
- [9] HOARE, C., A., R. *Algorithm 64: Quicksort*. Association for Computing Machinery, New York, 1961. Vol. 4, Issue 7. doi:10.1145/366622.366644.
- [10] HORÁČEK, J., ŠIDLOF, P., ŠVEC, J.G. *Numerical simulation of self-oscillations of human vocal folds with Hertz model of impact forces*. Journal of Fluids and Structures, Vol. 20, Issue 6, 2005, 853 - 869.
- [11] JIMIN, H., ZHI-FANG, F. *Modal analysis*. Butterworth-Heinemann, 2001, 1st Ed.
- [12] KASSAIMALI, A.. *Structural Analysis*. CL Engineering, 1998, 2nd Ed.
- [13] KOSÍK, A. *Fluid-structure interaction*. Praha 2016. Disertační práce, Karlova univerzita, Katedra numerické matematiky.
- [14] LAI, W., M., RUBIN, D., KREMPL, E. *Introduction to Continuum Mechanics*. Butterworth-Heinemann, 2010, 4th Ed., 69-153.

- [15] LINDFIELD, G., PENNY, J. *Numerical Methods: Using MATLAB*. Academic Press, 2019, 4th Ed.
- [16] NAM-HO, K. *Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*. Springer, New York, 2014.
- [17] NEUSTUPA, J. *Matematika II*. Nakladatelství ČVUT v Praze, 2015.
- [18] PETYT, M. *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*. Cambridge University Press, 2015, 2nd Ed.
- [19] RATHOD, H. T., GOVINDA RAO, H. S. *Integration of polynomials over an arbitrary tetrahedron in Euclidean three-dimensional space*. Computers & Structures, 1996, Vol. 59, Issue 1, 55 - 65.
- [20] SVÁČEK, P., FEISTAUER, M. *Metoda konečných prvků*. Nakladatelství ČVUT v Praze, 2006.
- [21] VALÁŠEK, J. *Numerical Simulation of Fluid-Structure-Acoustic Interaction in Human Phonation*. Praha 2021. Disertační práce, ČVUT, Fakulta strojní, Ústav technické matematiky.
- [22] WEI, C., LUAN, L., XIAOHUA, R., ENHUA, W. *Deformation Simulation of Non-orthotropic Materials*. Conference: the 16th ACM SIGGRAPH International Conference, New York, 2018.
- [23] ZÖRNER, S., KALTENBACHER, M., DÖLLINGER, M. *Investigation of prescribed movement in fluid-structure interaction simulation for the human phonation process*. Computers & Fluids, 2013, Vol. 86, 133 – 140.
- [24] *Suite Sparse* dostupné z <https://people.engr.tamu.edu/davis/suitesparse.html>, v 16:00 15.7.2023.
- [25] *Gmsh* dostupné z <https://gmsh.info>, v 16:00 15.7.2023.
- [26] *Paraview* dostupné z <https://www.paraview.org/>, v 16:00 15.7.2023.
- [27] *CalculiX* dostupné z <http://www.calculix.de/>, v 16:00 15.7.2023.