



**FAKULTA
STROJNÍ
ČVUT V PRAZE**

ÚSTAV TECHNICKÉ MATEMATIKY

**Metoda konečných prvků pro aproximaci proudění
nestlačitelné tekutiny a v akustických úlohách**

**Finite Element Method for Approximation of Incompressible
Flow Problems and in Acoustic Problems**

DIPLOMOVÁ PRÁCE

2023

AUTOR PRÁCE Bc. Tomáš Marhan

VEDOUCÍ PRÁCE doc. RNDr. Petr Sváček, Ph.D.

PROGRAM Aplikované vědy ve strojním inženýrství

SPECIALIZACE Matematické modelování v technice

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Marhan** Jméno: **Tomáš** Osobní číslo: **483992**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**
Studijní program: **Aplikované vědy ve strojním inženýrství**
Specializace: **Matematické modelování v technice**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Metoda konečných prvků pro aproximaci proudění nestlačitelné tekutiny a v akustických úlohách

Název diplomové práce anglicky:

Finite Element Method for Approximation of Incompressible Flow Problems and in Acoustic Problems

Pokyny pro vypracování:

Fyzikální popis a formulace akustického problému.
Numerické řešení ve frekvenční i časové oblasti pomocí metody konečných prvků.
Popis problému proudění nestlačitelné tekutiny.
Matematická popis a matematická formulace úlohy.
Popis numerické aproximace pomocí metody konečných prvků
Realizace numerických výpočtů.

Seznam doporučené literatury:

P. Sváček, M. Feistauer, Metoda konečných prvků, Vydavatelství ČVUT, 2007
Miroslav Brdička, Ladislav Samek, Bruno Sopko, Mechanika kontinua, Academia 2005
Feistauer, M. (1993) Mathematical Methods in Fluid Dynamics. Longman Scientific & Technical, New York. 1992
P. Ciarlet, Numerical analysis of the finite element method 1976, Montreal, Canada.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

doc. RNDr. Petr Sváček, Ph.D. ústav technické matematiky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **13.04.2023**

Termín odevzdání diplomové práce: **13.08.2023**

Platnost zadání diplomové práce: _____

doc. RNDr. Petr Sváček, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

prof. Ing. Jiří Fůrst, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité podklady v seznamu použitých zdrojů na konci práce.

V Praze dne 29.07.2023

.....

Poděkování

Děkuji svému vedoucímu práce, panu doc. RNDr. Petru Sváčkovi, Ph.D., za odborný dohled, trpělivé vedení a čas, který mi věnoval při tvorbě celé této práce. Také děkuji všem lidem, kteří mě při tvoření této práci podporovali.

Abstrakt

Předmětem této práce je metoda konečných prvků a její využití při řešení akustických úloh a úloh proudění nestlačitelné tekutiny. Okrajové, resp. smíšené úlohy pro parciální diferenciální rovnice řešíme ve slabém smyslu. Součástí práce je vlastní implementace metody konečných prvků, která byla použita k numerickému řešení vlnové rovnice v oblasti vokálního traktu ve 3D a Navierových–Stokesových rovnic v místě proudění s protisměrným schodem a při obtékání leteckého profilu NACA 0012 ve 2D.

Abstract

The subject of this thesis is the finite element method and its application in solving acoustic problems and incompressible fluid flow problems. Boundary, or rather mixed problems for partial differential equations are solved in a weak sense. The thesis includes own implementation of the finite element method, which was used for the numerical solution of the wave equation in the vocal tract region in 3D and the Navier–Stokes equations in region of backward-facing step flow and around the NACA 0012 airfoil in 2D.

Klíčová slova

Metoda konečných prvků, vlnová rovnice, Helmholtzova rovnice, Navierovy–Stokesovy rovnice, proudění nestlačitelné tekutiny, Lighthillova analogie, mini element, vokální trakt, proudění s protisměrným schodem, NACA 0012.

Key words

Finite element method, wave equation, Helmholtz equation, Navier–Stokes equations, incompressible flow, Lighthill analogy, mini element, vocal tract, backward-facing step flow, NACA 0012.

Obsah

Úvod	8
1 Matematický aparát	9
1.1 Lineární a bilineární forma	9
1.2 Sobolevovy a Lebesgueovy prostory funkcí	11
1.3 Stopa funkce	13
1.4 Bochnerovy prostory	14
1.5 Další matematické nástroje	15
2 Matematicko-fyzikální popis	16
2.1 Popis šíření akustických poruch pomocí vlnové rovnice	16
2.2 Navierovy–Stokesovy rovnice pro proudění nestlačitelné tekutiny	18
2.3 Charakteristická čísla proudění	19
2.4 Aeroakustika a Lighthillova rovnice	19
3 Vlnová rovnice pro akustické poruchy	22
3.1 Slabá formulace	22
3.2 Diskretizace MKP	23
3.2.1 Volba prostoru	24
3.2.2 Transformace na referenční element	25
3.2.3 Transformace hraničních elementů	31
3.3 Časová diskretizace	32
3.4 Numerické výsledky	33
3.4.1 Testovací úloha	34
3.4.2 Vokální trakt	37
3.5 Akustický problém ve frekvenční oblasti, Helmholtzova rovnice	40
3.5.1 Slabá formulace	40
3.5.2 Diskretizace MKP	41
3.5.3 Numerické výsledky pro vokální trakt	41
3.6 Lightillova akustická analogie	43
4 Numerická aproximace proudění nestlačitelné tekutiny	45
4.1 Stokesův problém	45
4.1.1 Slabá formulace	45
4.1.2 Diskretizace MKP	46
4.1.3 Nestacionární úloha	50
4.1.4 Numerický výpočet problému se známým řešením	51
4.2 Navierovy–Stokesovy rovnice	53
4.2.1 Slabá formulace	53

4.2.2	Diskretizace MKP	55
4.2.3	Nestacionární problém	56
4.3	Obtékání tělesa	57
4.4	Stabilizace	58
4.5	Numerické výsledky	59
4.5.1	Proudění s protisměrným schodem	60
4.5.2	Obtékání válce	64
4.5.3	Obtékání profilu křídla NACA 0012	72
	Závěr	77
	Příloha A	82
	Příloha B	83

Úvod

V současné době se výzkum a aplikace proudění tekutin a aeroakustiky stávají stále důležitějšími v oblastech, jako jsou letecký průmysl, automobilový průmysl, energetika a další odvětví, kde jsou zvýšené nároky na snižování hluku a vibrací. Tato diplomová práce se zaměřuje na výzkum proudění tekutiny a aeroakustických jevů v reálném prostředí. Cílem této práce je zlepšit pochopení těchto jevů a vytvořit nástroje pro jejich kontrolu.

Metoda konečných prvků (MKP) je prostředek pro řešení okrajových a smíšených úloh parciálních diferenciálních rovnic (PDR), které právě tyto hydrodynamické a aerodynamické jevy popisují. Hlavní charakteristikou MKP je rozdělení kontrolní oblasti do buněk, známých jako elementy. Elementy tvoří síť, která může být nestrukturovaná a tím je umožněno zpracovávat složité geometrie. Na rozdíl od metody konečných diferencí (MKD) sdílí stejnou vlastnost i metoda konečných objemů (MKO). Druhou klíčovou vlastností je volba funkčních podprostorů, které mají konečnou dimenzi. Báze těchto prostorů jsou na daném elementu mezi jednotlivými uzlovými body konstruovány specifickým způsobem tak, aby vhodně (např. lineárně nebo kvadraticky) aproximovaly hledané řešení. V kombinaci s reprezentací řešení v zeslabeném integrálním smyslu má MKP rigorózní matematický základ, viz [1].

Proto je úvodní kapitola věnována matematickému aparátu, který je zaměřený na prostory užívané při řešení PDR. Vycházíme z vektorového prostoru, který postupně specifikujeme až na Banachův prostor. Na Banachově prostoru definujeme variační problém prostřednictvím bilineární a lineární formy, který představuje okrajovou úlohu pro obecnou PDR. Při analýze slabých formulací PDR požadujeme, aby řešení existovalo a bylo jednoznačné, k tomu definujeme Laxovu–Milgramovu větu. V Laxově–Milgramově větě vystupuje Hilbertův prostor, uvádíme také Lebesgueovy a Sobolevovy prostory.

Ve druhé kapitole se zaměříme na matematicko-fyzikální modely, které budeme v rámci hydrodynamiky a aeroakustiky řešit. Vycházíme ze zákonů zachování hmoty, hybnosti a energie. Uvážením několika předpokladů postupně odvodíme vlnovou rovnici pro propagaci zvuku, Helmholtzovu rovnici, Navierovy–Stokesovy rovnice, Stokesův problém a Lighthillovu rovnici.

Následující kapitoly jsou postupně věnovány uvedeným rovnicím, resp. jejich okrajovým, nebo smíšeným úlohám. Úloha je nejprve převedena do slabého smyslu, následně je diskretizována konečnými prvky a aby ji bylo možné numericky řešit, je přepsána do algebraického tvaru. Pro danou úlohu jsou zkonstruovány prostory konečných prvků a pomocí transformace na referenční element a numerické kvadratury získáme finální tvar úlohy pro numerický výpočet. V případě smíšené úlohy je ještě provedena časová diskretizace. Na závěr je vlastní implementace MKP ověřována a použita k numerickému řešení několika problémů.

1 Matematický aparát

Symboly \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n značíme prostor n -rozměrných reálných, resp. komplexních vektorů. Vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ nazýváme lineárně závislé, pokud existují koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, z nichž alespoň jeden je nenulový a platí

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = 0. \quad (1.1)$$

V opačném případě jsou vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ lineárně nezávislé a tvoří bázi daného prostoru. Dimenze vektorového prostoru odpovídá počtu prvků báze, v případě \mathbb{R}^n je $\dim \mathbb{R}^n = n$, viz např. [2].

O reálném vektorovém prostoru mluvíme jako o lineárním, pokud jsou na něm definovány operace sčítání vektorů, přičemž tento součet je opět prvkem vektorového prostoru. Totéž platí i pro násobení vektoru reálným číslem. Říkáme, že reálný lineární prostor V je normovaný, pokud existuje zobrazení $\|\cdot\|_V$, které označujeme jako norma a které každému $\mathbf{v} \in V$ přiřadí číslo $\|\mathbf{v}\|_V \in \langle 0, +\infty \rangle$ (zkr. zn. $\|\cdot\|_V : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, kde \mathbb{R}_0^+ jsou reálná nezáporná čísla) a navíc pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí

- I. $\|\mathbf{v}\|_V \geq 0, \quad (\|\mathbf{v}\|_V = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = 0),$
- II. $\|\alpha \mathbf{v}\|_V = |\alpha| \|\mathbf{v}\|_V, \quad \alpha \in \mathbb{R},$
- III. $\|\mathbf{v} + \mathbf{u}\|_V \leq \|\mathbf{v}\|_V + \|\mathbf{u}\|_V, \quad (\text{trojúhelníková nerovnost}).$

Prostor V je úplný, je-li každá Cauchyovská posloupnost prvků z V konvergentní. Normovaný lineární prostor, který je úplný nazýváme Banachův prostor (podobně definujeme komplexní prostory), viz např. [3],[4].

1.1 Lineární a bilineární forma

Zobrazení L na Banachově prostoru, které každému $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ přiřadí reálné číslo (zkr. zn. $L : V \rightarrow \mathbb{R}$), potom nazveme lineární formou, pokud

- I. $L(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = L(\mathbf{v}) + L(\mathbf{u}),$
- II. $L(\alpha \mathbf{v}) = \alpha L(\mathbf{v}), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

Pokud je prostor V komplexní, označujeme formu $L : V \rightarrow \mathbb{C}$ jako antilineární, viz [3],[5]. Jestliže

$$\exists C > 0 : |L(\mathbf{v})| \leq C \|\mathbf{v}\|_V,$$

pro libovolné $\mathbf{v} \in V$, forma L je omezená a následující tvrzení jsou ekvivalentní

- I. L je spojitá forma,
- II. L je omezená forma.

Takto definovaná spojitá forma L (pro reálná a komplexní čísla) se také nazývá spojitým funkcionálem na prostoru V , viz např. [5]. Množina všech spojitých funkcionálů na prostoru V potom tvoří duální prostor V' s normou

$$\|L\|_{V'} = \sup_{0 \neq \mathbf{v} \in V} \frac{|L(\mathbf{v})|}{\|\mathbf{v}\|_V}.$$

Jestliže $\mathbf{f} \in V'$ a $\mathbf{v} \in V$, může být výsledné číslo $\mathbf{f}(\mathbf{v})$ ekvivalentně zapsáno jako $\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{V' \times V}$, kde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V' \times V}$ značí dualitu mezi V' a V , viz [3],[5].

Na prostoru V pracujeme také se zobrazením a . Zobrazení a nazýváme bilineární formou, jestliže součinu dvou lineárních prostorů $V \times V$ přiřadí reálné číslo (zkr. zn. $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$) a pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ platí

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + a(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \\ a(\alpha \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \alpha a(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Jestliže je v součinu první prostor lineární a druhý sdruženě lineární, mluvíme o seskvilineární formě $a : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, viz [5]. Forma a je symetrická v případě, že $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ a omezená, jestliže

$$\exists M > 0 : \quad |a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq M \|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{v}\|_V ,$$

pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Forma a je pozitivně semi-definitní, pokud platí

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0 .$$

V případě, že

$$\exists m > 0 : \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq m \|\mathbf{u}\|_V$$

říkáme formě a V -eliptická (koercivní), viz např. [4],[5].

Definujme variační problém, hledáme $\mathbf{u} \in V$ takové, že splňuje

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) , \tag{1.2}$$

pro libovolné $\mathbf{v} \in V$, kde a je symetrická bilineární forma a L je lineární forma (lze definovat i pro komplexní prostor, více viz [5]). Tento problém představuje okrajovou úlohu pro obecnou PDR. K ověření existence a jednoznačnosti řešení této úlohy (bilineární forma nemusí být nutně symetrická, viz [4]) formulujeme Laxovu–Milgramovu, viz např. [3].

Věta (Laxova–Milgramova věta)

Nechť V je Banachův prostor, L je lineární forma na V a a je symetrická bilineární forma na V a nechť existují konstanty $M > 0$, $m > 0$, $C > 0$ takové, že pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí následující nerovnosti

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &\leq M \|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{v}\|_V , \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &\geq m \|\mathbf{u}\|_V^2 , \\ |L(\mathbf{v})| &\leq C \|\mathbf{v}\|_V , \end{aligned}$$

potom existuje právě jedno $\mathbf{u}^ \in V$ takové, že*

$$a(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) ,$$

pro všechna $\mathbf{v} \in V$ a navíc platí

$$\|\mathbf{u}^*\|_V \leq \frac{C}{m} .$$

1.2 Sobolevovy a Lebesgueovy prostory funkcí

V Laxově–Milgramově větě (kap. 1.1) uvažujeme, že V je Hilbertův prostor a $L \in V'$, viz [4]. Tento předpoklad je možné zeslabit a uvažovat V jako Banachův prostor. V teorii parciálních diferenciálních rovnic využíváme prostory Lebesgueovy a Sobolevovy.

Lebesgueovy prostory. Uvažujeme omezenou oblast $U \subset \mathbb{R}^n$. Lebesgueovy prostory $L^p(U)$ jsou definovány pomocí Lebesgueovy míry $|\cdot|$ a integrálu pro $p \in \langle 1, +\infty \rangle$, viz např. [3],[4]. Prostor $L^p(U)$ lze tedy charakterizovat jako množinu funkcí

$$L^p(U) = \left\{ u : U \rightarrow \mathbb{R}, \int_U |u|^p dx < +\infty \right\},$$

s normou

$$\|u\|_{L^p(U)} = \|u\|_{0,p,U} = \left(\int_U |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ve variační formulaci (1.2) nevystupují derivace v bodovém smyslu, místo toho se zde vyskytují pouze derivace, které lze interpretovat jako funkce v $L^p(U)$. Zavádíme proto tzv. zobecněnou derivaci, viz např. [4].

Pro vymezení pojmu zobecněné derivace nejprve definujeme prostor nekonečně diferencovatelných funkcí

$$C^\infty(U) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(U),$$

kde $C^k(U)$ značí prostor všech funkcí, které mají spojitou parciální derivaci až do řádu k a \mathbb{N}_0 značí množinu všech přirozených čísel včetně nuly. V prostoru $C^\infty(U)$ se zaměříme na množinu funkcí s kompaktním nosičem $\{\phi : U \rightarrow \mathbb{R} : \text{supp} \subset U\}$, kde nosič funkce ϕ uvažujeme jako $\text{supp} \phi = \overline{\{x \in U : \phi(x) \neq 0\}}$. Mimo nosič je tedy ϕ na U nulová a je ekvivalentní říct, že u hranice ∂U se blíží nule, viz [4]. Prostor značíme $\mathcal{D}(U) = C_0^\infty(U)$ a mluvíme o prostoru testovacích funkcí. Funkcionál je na $\mathcal{D}(U)$ spojitý, pokud pro každou posloupnost $\{\phi_k\} \in \mathcal{D}(U)$ platí, že konverguje k $\phi \in \mathcal{D}(U)$. Každý spojitý lineární funkcionál na $\mathcal{D}(U)$ se nazývá distribuce (zobecněná funkce), množina všech distribucí potom tvoří lineární prostor $\mathcal{D}'(U)$, viz [3],[4]. Příkladem distribuce je známá delta funkce $\delta \in \mathcal{D}'(U)$,

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0), \tag{1.3}$$

pro libovolné $\phi \in \mathcal{D}(U)$. Prvkem prostoru $\mathcal{D}'(U)$ jsou například integrovatelné funkce $u \in L^1(U)$, příslušný funkcionál $v \in \mathcal{D}'(U)$ reprezentovaný u je pak dán pomocí integrace

$$\langle u, \phi \rangle = \int_U u \phi dx. \tag{1.4}$$

Každá funkce $u \in L^1(U)$ lze tedy chápat jako distribuce (zobecněná funkce) $u \in \mathcal{D}'(U)$.

Předpokládejme, že $u \in C^1(U)$ a $\phi \in \mathcal{D}(U)$, integrací per partes potom získáme

$$-\left\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle = - \int_U u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = \int_U \frac{\partial u}{\partial x_i} \phi dx = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \phi \right\rangle, \tag{1.5}$$

pro libovolné ϕ a libovolné $i = 1, \dots, n$, kde kvůli kompaktnímu nosiči ϕ vymizí integrál přes hranici ∂U . Vztahem (1.5) lze rozšířit pojem derivace pro $u \in \mathcal{D}'(U)$, podobný postup je možné

užít pro derivace vyšších řádů. Uvažujeme $u \in C^k(U)$, kde $k \in \mathbb{N}$. Užitím multiindexu zavedeme zkrácenou notaci pro parciální derivaci

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{|\alpha|} \phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

kde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ je multiindex s výškou $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = k$, viz např. [3]. Potom platí

$$(-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_U u D^\alpha \phi \, dx = \int_U D^\alpha u \phi \, dx = \langle D^\alpha u, \phi \rangle. \quad (1.6)$$

Dále definujeme prostor funkcí, které jsou integrabilní na každé kompaktní podmnožině $K \subset U$

$$L_{loc}^1(U) = \{v \in L^1(K) : \forall \text{ kompaktní } K \subset U\}.$$

Pokud o v mluvíme jako o zobecněné (zeslabené) derivaci řádu $|\alpha|$ funkce $u \in L_{loc}^1(U)$, platí pro $v \in L_{loc}^1(U)$

$$(-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \phi \rangle = \langle v, \phi \rangle, \quad (1.7)$$

pro libovolné $\phi \in \mathcal{D}(U)$, viz [3],[4] a pak

$$D^\alpha u = v.$$

Sobolevovy prostory. Pomocí zobecněné derivace lze zobecnit Lebesgueovy normy a prostory tak, aby obsahovaly i derivace. Sobolevovy prostory $W^{k,p}(U)$ pro $k \in \mathbb{N}_0$ a $p \in \langle 1, +\infty \rangle$ definují množinu lokálně integrabilních funkcí $u : U \rightarrow \mathbb{R}$, u kterých existuje derivace $D^\alpha u$ v zobecněném smyslu a patří do prostoru $L^p(U)$, viz [3],[4], tedy

$$W^{k,p}(U) = \{u \in L_{loc}^1(U) : D^\alpha u \in L^p(U), |\alpha| \leq k\}.$$

Norma na prostoru $W^{k,p}$ je dána předpisem

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} = \|u\|_{k,p,U} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(U)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

a seminorma potom jako

$$|u|_{W^{k,p}(U)} = |u|_{k,p,U} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L^p(U)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Speciální případem Sobolevova prostoru pro $p = 2$ je prostor **Hilbertův** $H^k(U)$, tj. $H^k(U) = W^{k,2}(U)$, kde $k \in \mathbb{N}_0$. Pro $k = 0$ lze potom ztotožnit Lebesgueův, Sobolevův a Hilbertův prostor jako

$$L^2(U) = W^{0,2}(U) = H^0(U).$$

Hilbertův prostor je Banachův prostor, na kterém je definováno zobrazení $(\cdot, \cdot)_U : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ a navíc pro libovolné $u, v \in U$ platí

- I. $(u, u)_U \geq 0, \quad (u, u)_U = 0 \Leftrightarrow u = 0,$
- II. $(\alpha u, u)_U = \alpha (u, u)_U, \quad \alpha \in \mathbb{R},$
- III. $(u, v)_U = (v, u)_U.$

Zobrazení $(\cdot, \cdot)_U$ nazýváme skalární součin, viz např. [2],[3]. Pro Lebesgueův prostor $L^2(U)$ a Sobolevův prostor $W^{1,2}(U)$ je definován jako

$$\begin{aligned}(u, v)_{L^2(U)} &= (u, v)_{H^0(U)} = \int_U u v \, dx, \\ (u, v)_{W^{1,2}(U)} &= (u, v)_{H^1(U)} = \int_U (u v + \nabla u \cdot \nabla v) \, dx,\end{aligned}$$

pro $u, v \in U$. Skalární součin je spojený s normou a seminormou následovně

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2(U)} &= \|u\|_{H^0(U)} = \left(\int_U |u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = (u, u)_{L^2(U)}^{\frac{1}{2}}, \\ \|u\|_{W^{1,2}(U)} &= \|u\|_{H^1(U)} = \left(\int_U (|u|^2 + |\nabla u|^2) \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = (u, u)_{W^{1,2}(U)}^{\frac{1}{2}}, \\ |u|_{W^{1,2}(U)} &= |u|_{H^1(U)} = \left(\int_U |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = (\nabla u, \nabla u)_{L^2(U)}^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

pro $u \in U$, viz [3]. Normy, resp. seminormy na prostoru $H^k(\Omega)$ zkráceně značíme $\|\cdot\|_{H^k(U)} = \|\cdot\|_{k,U}$ a $|\cdot|_{H^k(U)} = |\cdot|_{k,U}$.

Z uvedených norem pozorujeme, že

$$\|u\|_{L^2(U)} < \|u\|_{W^{1,2}(U)}. \quad (1.8)$$

Zároveň je zřejmé, že pro Sobolevovy prostory platí

$$W^{m,p}(U) \subset W^{k,p}(U), \quad (1.9)$$

pro $k \leq m$, kde $k, m \in \mathbb{N}_0$ a $p \in \langle 1, +\infty \rangle$, viz [4]. Speciálně pro $m = 1$ a $k = 0$

$$W^{1,2}(U) \subset L^2(U).$$

Z (1.8) a (1.9) vyplývá, že prostor $W^{1,2}(U)$ je spojitě vnořen do prostoru $L^2(U)$, tedy

$$W^{1,2}(U) \hookrightarrow L^2(U).$$

Více věta o vnoření, viz např. [3],[4].

1.3 Stopa funkce

Při řešení okrajových úloh PDR je nutné na Sobolevových prostorech interpretovat také okrajové podmínky. Uvažujeme, že U je omezená oblast s hranicí ∂U a hranice ∂U je C^1 . Pro uzavřen U platí $\bar{U} = U \cup \partial U$. Potom předpokládáme, že funkce $u \in W^{1,p}(U)$, která je na uzavěři oblasti spojitá, tj. $u \in C(\bar{U})$ má na hranici ∂U nějaké hodnoty. Pokud ale funkce $u \in W^{1,p}$ na U spojitá není, není potom jasné, v jakém smyslu má funkce splňovat okrajové podmínky. Tento problém řeší operátor stop, viz např. [3],[5].

Věta (Věta o stopách)

Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast a její hranice ∂U je C^1 . Potom existuje právě jeden lineární spojitý operátor

$$T : W^{1,p}(U) \rightarrow L^p(\partial U)$$

takový, že

$$Tu = u|_{\partial U}, \text{ pro libovolnou funkci } u \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$$

a platí

$$\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)},$$

pro libovolné $u \in W^{1,p}(U)$.

Funkci Tu nazýváme stopou funkce u na ∂U . Na základě věty o stopách definujeme prostor funkcí s nulovými stopami, nebo-li prostor funkcí, které jsou na hranici ∂U ve smyslu stop nulové, tj.

$$W_0^{1,p}(U) = \{u \in W^{1,p}(U) : Tu = 0 \text{ na } \partial U\}.$$

Pro $p = 2$ platí $H_0^1(U) = W_0^{1,2}(U)$, viz [3]. Duální prostor k $H_0^1(U)$ označujeme $H^{-1}(U)$ a platí

$$H_0^1(U) \subset L^2(U) \subset H^{-1}(U).$$

Dualitu mezi prostory $H_0^1(U)$ a $H^{-1}(U)$ označujeme $\langle \cdot, \cdot \rangle_U$ (podobně jako v kap. 1.1). Mějme $f \in L^2(U) \subset H^{-1}(U)$, potom lze ukázat

$$(f, v)_{L^2(U)} = \langle f, v \rangle_U,$$

pro libovolné $v \in H_0^1(U)$, viz [3],[5].

1.4 Bochnerovy prostory

Při konstrukci slabé formulace časově závislé PDR pracujeme s $U_T = U \times [0, T]$, kde $T > 0$. Abychom mohli definovat Sobolevovy prostory na U_T , zavedeme Bochnerovy prostory. Uvažujeme zobrazení f , které každému $t \in [0, T]$ přiřadí $f(t) = v \in X$ (zkr. zn. $f : [0, T] \rightarrow X$), kde X je Hilbertův prostor, viz [3]. Bochnerovy prostory $L^p(0, T; X)$, pro $p \in \langle 1, +\infty \rangle$ potom definují množinu funkcí f , které jsou tzv. silně měřitelné, tedy

$$L^p(0, T; X) = \{f(t) \in X : \forall t \in [0, T]\},$$

s normou

$$\|f\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

více viz [3].

1.5 Další matematické nástroje

Definice (Lipschitzovská funkce)

Funkce $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá Lipschitzovsky spojitá, pokud platí

$$|u(x) - u(y)| \leq C |x - y|$$

pro libovolnou konstantu $C > 0$ a pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}^n$, viz např. [3].

Věta (Greenova věta)

Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s Lipschitzovsky spojitou hranicí a funkce $u, v \in H^1(U)$. Pak platí

$$\int_U \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = \int_{\partial U} u v n_i \, dS - \int_U u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx,$$

kde $\mathbf{n} = \{n_i\}$ je jednotková vnější normála k hranici ∂U , viz např. [3].

2 Matematicko-fyzikální popis

Existují tři základní principy, na kterých je založeno modelování dynamiky tekutin, a to zákon zachování hmoty, zákon zachování hybnosti a zákon zachování energie, viz např. [1],[6]. Matematicky jsou tyto fundamentální zákony vyjádřeny v diferenciálním tvaru postupně jako rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.1)$$

pohybová rovnice

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{f} = 0, \quad (2.2)$$

energetická rovnice

$$\frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) + \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0, \quad (2.3)$$

kde ρ představuje hustotu, \mathbf{u} vektor rychlosti, $\boldsymbol{\sigma}$ tenzor napětí, \mathbf{f} vektor objemového zrychlení, e celkovou měrnou energii tekutiny a $\dot{\mathbf{q}}$ vektor hustoty tepelného toku, viz [1],[6]. Tenzor napětí lze pro tekutinu rozepsat jako

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}, \quad (2.4)$$

kde p je tlak, \mathbf{I} jednotková matice a $\boldsymbol{\tau}$ je deviátor tenzoru napětí, viz [1],[6]. Tekutiny, u kterých platí lineární závislost mezi deviátorem tenzoru napětí a anizotropní částí tenzoru rychlosti deformace nazýváme Newtonské, viz [6]. Matematicky je tento vztah vyjádřen jako

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} \right), \quad (2.5)$$

kde μ je dynamická viskozita a $\boldsymbol{\varepsilon}$ je tenzor rychlosti deformace v podobě

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right), \quad \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (2.6)$$

Za předpokladu, že jde o nevazké proudění, tj. $\mu = 0$ je deviátor napětí zanedbán a pohybová rovnice (2.2) se redukuje na

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p - \rho \mathbf{f} = 0.$$

Uplatněním (2.1) a podělením rovnice hustotou dostaneme Eulerovy pohybové rovnice ve tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f}. \quad (2.7)$$

2.1 Popis šíření akustických poruch pomocí vlnové rovnice

Při zkoumání šíření akustických jevů v tekutině předpokládáme, že hodnoty hustoty $\rho(\mathbf{x}, t)$, tlaku $p(\mathbf{x}, t)$ a rychlosti $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a v čase $t \in \mathbb{R}$ jsou jen malé odchylky od statických hodnot. Toto vyjádříme vztahem

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) &= \rho_0 + \rho'(\mathbf{x}, t), \\ p(\mathbf{x}, t) &= p_0 + p'(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t), \end{aligned}$$

kde $\rho_0, p_0, \mathbf{u}_0$ značí konstantní rovnovážné hodnoty a ρ', p', \mathbf{u}' jejich fluktuace takové, že $|\rho'| \ll \rho_0, |p'| \ll p_0$ a $|\mathbf{u}'| \ll c$, viz [7],[8], c je rychlost šíření zvuku v daném médiu. Speciálně o p' mluvíme jako o akustickém tlaku. Dále uvažujeme, že pro rovnovážnou hodnotu \mathbf{u}_0 platí $\mathbf{u}_0 = 0$. Linearizací (zanedbáním fluktuací vyššího řádu) rovnice kontinuity (2.1) a homogenní Eulerovy pohybové rovnice (2.7) okolo rovnovážných hodnot potom obdržíme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}' &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p' &= 0, \end{aligned} \tag{2.8}$$

kde byla užita aproximace

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0 \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right)} \approx \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right).$$

V případě fluktuace tlaku uvažujeme adiabatický proces, nedochází tedy k přenosu tepla a tlak je tak pouze funkcí hustoty, tj. $p = f(\rho)$, resp. $p_0 = f(\rho_0)$, viz [8]. K aproximaci $p_0 + p'$ můžeme použít Taylorova rozvoje, tím dostaneme

$$p_0 + p' \approx f(\rho_0 + \rho') = f(\rho_0) + \frac{df(\rho_0)}{d\rho} \rho'.$$

Vidíme, že

$$p' \approx \frac{df(\rho_0)}{d\rho} \rho'$$

a pokud nahradíme $c^2 = \frac{df(\rho_0)}{d\rho}$, získáme

$$p' \approx c^2 \rho'. \tag{2.9}$$

Rovnice (2.8) společně s (2.9) popisují šíření akustické vlny v tekutině, viz [8]. Parciální derivací první rovnice v (2.8) podle času, aplikací operátoru divergence na druhou rovnici a užitím (2.9) lze akustické tlakové pole po dosazení popsat jedinou vlnovou rovnicí v podobě

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = 0. \tag{2.10}$$

V případě, že se v tekutině nachází akustický zdroj, má vlnová rovnice nehomogenní tvar

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = f(\mathbf{x}, t). \tag{2.11}$$

Helmholtzova rovnice. Za předpokladu, že je skalární pole $p'(\mathbf{x}, t)$ časově harmonické, lze funkci akustického tlaku zapsat jako

$$p'(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \{ \tilde{p}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \}, \tag{2.12}$$

pro kruhovou frekvenci $\omega > 0$ a imaginární jednotku $i = \sqrt{-1}$. Komplexní pole $\tilde{p}(\mathbf{x})$ závisí pouze na prostorové proměnné \mathbf{x} . Výraz (2.12) tak dvakrát zderivujeme podle času

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = -\omega^2 \tilde{p} e^{-i\omega t}$$

a dosazením do vlnové rovnice (2.10) získáme

$$-\frac{\omega^2}{c^2} \tilde{p} e^{-i\omega t} - e^{-i\omega t} \Delta \tilde{p} = 0. \tag{2.13}$$

Po úpravě nazýváme rovnici (2.13) jako Helmholtzovu rovnici v podobě

$$\Delta \tilde{p} + \lambda^2 \tilde{p} = 0, \quad (2.14)$$

kde $\lambda = \omega/c > 0$ značí vlnové číslo, viz [5]. V případě nehomogenní vlnové rovnice (2.11) uvažujeme harmonickou i pravou stranu

$$f(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \left\{ \tilde{f}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \right\}. \quad (2.15)$$

Helmholtzova rovnice potom nabývá podoby

$$-\Delta \tilde{p} - \lambda^2 \tilde{p} = \tilde{f}(\mathbf{x}). \quad (2.16)$$

Helmholtzova rovnice popisuje všechny časově harmonické řešení vlnové rovnice. Čím vyšší je kruhová frekvence ω a vlnové číslo λ , tím řešení více osciluje. Zároveň pokud bude kruhová frekvence nulová ω , bude nulové i vlnové číslo λ a z Helmholtzovy rovnice (2.16) se stane rovnice Poissonova, viz např. [9]. Vynásobíme-li řešení výrazem $e^{-i\omega t}$ podle (2.12) a vezmeme reálnou část, dostaneme skalární pole časově závislé, viz [5].

2.2 Navierovy–Stokesovy rovnice pro proudění nestlačitelné tekutiny

Substitucí výrazů (2.4), (2.5) a (2.6) do pohybové rovnice (2.2) obdržíme

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) + \nabla p - \nabla \cdot \left\{ \mu \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \right] \right\} - \rho \mathbf{f} = 0. \quad (2.17)$$

Dynamickou viskozitu μ je důležité uvažovat jako funkci polohy tehdy, když je v proudovém poli značný gradient teploty. Dynamická viskozita tekutin je totiž velmi často závislá na teplotě. Často jsou ale změny teploty v tekutině malé natolik, aby se dala uvažovat dynamická viskozita μ konstantní, viz [6]. Pohybová rovnice (2.17) se potom zredukuje do tvaru

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) + \nabla p - \mu \left(\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right) - \rho \mathbf{f} = 0. \quad (2.18)$$

V případě, že hustota tekutiny ρ není funkcí polohy a času a je v celé tekutině konstantní, mluvíme o proudění nestlačitelné tekutiny. Rovnice kontinuity (2.1) se pro nestlačitelnou tekutinu zjednoduší do podoby

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.19)$$

O tenzoru (2.5) potom mluvíme jako o tenzoru smykových napětí ve tvaru

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.20)$$

Dosazením výrazu (2.19) do pohybové rovnice (2.18) dostaneme Navierovy–Stokesovy rovnice pro proudění nestlačitelné Newtonské tekutiny

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) + \nabla p - \mu \Delta \mathbf{u} - \rho \mathbf{f} = 0. \quad (2.21)$$

Běžně Navierovy–Stokesovy rovnice upravujeme do podoby

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \bar{p} - \nu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (2.22)$$

kde $\nu = \mu/\rho$ značí kinematickou viskozitu a $\bar{p} = p/\rho$ kinematický tlak, viz např. [1],[6].

2.3 Charakteristická čísla proudění

Reynoldsovo číslo. K popisu proudového pole užíváme bezrozměrná čísla, které vystihují jeho charakter. Nelze totiž ve všech případech jednoznačně určit podmínky, při kterých bude proudění tekutiny stabilní, anebo začne nepravidelně oscilovat a eventuálně se stane turbulentní. Obecně ale platí, že dynamický charakter proudu závisí zejména na rychlosti proudění U_∞ , charakteristickém rozměru dané úlohy L_{char} a kinematické viskozitě tekutiny ν , které společně ve vztahu

$$\text{Re} = \frac{U_\infty L_{\text{char}}}{\nu} = \frac{\rho U_\infty L_{\text{char}}}{\mu}, \quad (2.23)$$

představují Reynoldsovo číslo Re , viz např. [6]. Reynoldsovo číslo lze také chápat jako podobnostní číslo, které udává poměr mezi setrvačnými a vazkými silami, viz [1] ve tvaru

$$\text{Re} \equiv \frac{\text{setrvačné síly}}{\text{vazké síly}}. \quad (2.24)$$

Stokesův problém. Pro velmi malá Reynoldsova čísla, tj. $\text{Re} \ll 1$, typická pro malé rychlosti tekutiny, mluvíme o viskózním proudění. Při tomto proudění potom v Navierových–Stokesových rovnicích (2.22) převládá difúze hybnosti $\nu \Delta \mathbf{u}$ nad konvektivním přenosem hybnosti $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$, viz [10]. Konvektivní složku tak lze zanedbat a získáme nestacionární Stokesův problém

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \bar{p} - \nu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (2.25)$$

Pécletovo číslo. V kontextu konvektivního a difuzního přenosu hybnosti lze definovat Pécletovo číslo

$$\text{Pe} = \frac{U_\infty L_{\text{char}}}{\chi} \equiv \frac{\text{konvektivní přenos}}{\text{difuzivní přenos}}, \quad (2.26)$$

kde χ značí difuzivitu, viz [7].

Strouhalovo číslo. V případě, že se během proudění vyskytují oscilující dynamické jevy, vyvstává pro popis proudového pole další užitečné bezrozměrné číslo. Takové proudění může nastat například při obtékání válce a popisujeme ho Strouhalovým číslem

$$\text{St} = \frac{f L_{\text{char}}}{U_\infty}, \quad (2.27)$$

kde f značí frekvenci periodického jevu, viz [6].

2.4 Aeroakustika a Lighthillova rovnice

Aerodynamické síly působící na obtékané těleso, anebo periodicky se měnící proudění mohou být příčinou buzení zvuku. Vycházíme z rovnice kontinuity (2.1) a homogenní pohybové rovnice (2.2) ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= 0. \end{aligned}$$

Rovnici kontinuity vynásobíme rychlostí \mathbf{u} a přičteme k pohybové rovnici, po úpravě dostaneme

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma}) = 0. \quad (2.28)$$

K rovnici dále přičteme člen $c^2 \nabla \rho$ a obdržíme

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + c^2 \nabla \rho = -\nabla \cdot \mathbf{T}, \quad (2.29)$$

kde

$$\mathbf{T} = \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma} - c^2 \rho \mathbf{I} = \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + (p - c^2 \rho) \mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}$$

značí Lighthillův tenzor napětí, viz [11],[12]. Na rovnici (2.29) aplikujeme operátor divergence a odečteme jí od rovnice kontinuity, kterou parciálně derivujeme podle času. Výsledný tvar představuje Lighthillovu rovnici aeroakustiky

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c^2 \Delta \rho = (\nabla \otimes \nabla) \cdot \mathbf{T}. \quad (2.30)$$

Uvažujeme dále relativně malou oblast tekutiny, ve které vlivem neustáleného charakteru proudění dochází ke generaci a propagaci zvuku. Tato zdrojová oblast je vnořená do nekonečné homogenní tekutiny s konstantní rychlostí zvuku c a rovnovážnou hustotou ρ_0 . Podle Lighthillovy analogie [11] splňují fluktuace hustoty $\rho' = \rho - \rho_0$ vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c^2 \Delta \rho' = 0, \quad (2.31)$$

v dostatečné vzdálenosti od zdrojové oblasti, kde je médium ustálené. V oblasti, kde je proudění tekutiny neustálené, popisuje propagaci zvuku Lighthillova rovnice (užitím sumační konvence)

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c^2 \Delta \rho' = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (2.32)$$

kde

$$T_{ij} = \rho u_i u_j + [(p - p_0) - c^2 (\rho - \rho_0)] \delta_{ij} - \tau_{ij}.$$

Uplatněním náhrady (2.9) lze (2.32) přepsat ve tvaru pro akustický tlak p' jako

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Lighthillova rovnice tak představuje nehomogenní vlnovou rovnici se zdrojovým členem na pravé straně. Obvykle $\rho u_i u_j$ představuje dominantní příspěvek do T_{ij} , způsobený neustáleným proudem. Mnohem menší podíl má složka smykového napětí τ_{ij} a přenos tepla, který způsobuje odchylku $p - p_0$ od $c^2 (\rho - \rho_0)$, viz [11]. Tyto jevy způsobují tlumení v důsledku přeměny akustické energie na teplo a mají významný efekt pouze na velmi velké vzdálenosti, viz [13]. Předpokládáme tedy, že v proudící tekutině je T_{ij} roven přibližně $\rho u_i u_j$ a přibližně nule mimo tuto oblast. Za předpokladu, že fluktuace hustoty je v proudící tekutině zanedbatelná, obdržíme pro Lighthillův tenzor napětí odhad $T_{ij} \simeq \rho_0 u_i u_j$, dosazením do (2.32) potom získáme lineární problém

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c^2 \Delta \rho' = \rho_0 \frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Podobně jako v případě vlnové rovnice, lze Lighthillovu rovnici převést do frekvenční domény za předpokladu harmonických fluktuací $\rho'(\mathbf{x}, t)$, tj.

$$\rho'(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \{ \tilde{\rho}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \} .$$

Lighthillovu rovnici (2.32) potom dostaneme ve tvaru

$$\Delta \tilde{\rho} + \lambda^2 \tilde{\rho} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{T}_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} , \tag{2.33}$$

kde $\lambda = \omega/c > 0$ značí vlnové číslo, více viz [14].

3 Vlnová rovnice pro akustické poruchy

V této části se budeme zabývat numerickým řešením problému ve 3D. Nejprve matematicky formulujeme řešenou úlohu. Uvažujeme omezenou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ s hranicí $\partial\Omega$, která je po částech Lipschitzovsky hladká. Oblast Ω je vyplněna vzduchem. Označme $u = u(\mathbf{x}, t)$ a $\Omega_T = \Omega \times [0, T]$. V takto definované oblasti hledáme funkci $u \in C^2(\overline{\Omega}_T)$, která řeší vlnovou rovnici (2.11) v klasickém smyslu

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u &= f && \text{v } \Omega_T, \\ u &= g && \text{na } \Gamma_D \times [0, T], \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= \phi && \text{na } \Gamma_N \times [0, T], \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} && \text{na } \Gamma_S \times [0, T], \\ u(\mathbf{x}, 0) &= \mu_1(\mathbf{x}) && \text{pro } \mathbf{x} \in \Omega \times \{t = 0\}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) &= \mu_2(\mathbf{x}) && \text{pro } \mathbf{x} \in \Omega \times \{t = 0\}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

kde $u : \overline{\Omega}_T \rightarrow \mathbb{R}$ představuje v našem případě akustický tlak. Konstanta $c > 0$ je rychlost zvukové vlny v daném prostředí, $f : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$ je předepsaný akustický zdroj, $g : \Gamma_D \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ je známý akustický tlak na hranici Γ_D , $\phi : \Gamma_N \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ předepisuje normálovou složku gradientu akustického tlaku na hranici Γ_N , $\mu_1, \mu_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jsou počáteční podmínky a $T > 0$ je konečný čas, viz [3]. Pro Neumannovu a radiační Sommerfeldovu okrajovou podmínku na Γ_N , resp. Γ_S uvažujeme jednotkovou vnější normálu \mathbf{n} . Dílčí hranice společně s Γ_D , pro Dirichletovu okrajovou podmínku, jsou navzájem disjunktní části takové, že $\Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_S = \partial\Omega$.

3.1 Slabá formulace

Úlohu převedeme do slabé formulace. Volíme prostor testovacích funkcí jako podprostor Sobolevova prostoru $H_1(\Omega)$, tedy

$$\mathcal{V} = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ na } \Gamma_D\}.$$

Rovnici (3.1) násobíme testovací funkcí $v \in \mathcal{V}$ a integrujeme přes celou oblast. Užitím Greenovy věty (kap. 1.5) získáme

$$\int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \, dB + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega. \tag{3.2}$$

Uplatněním jednotlivých okrajových podmínek (ve smyslu stop) potom obdržíme slabou formulaci problému (3.1) pro libovolné $v \in \mathcal{V}$ ve tvaru

$$\int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v \, d\Omega + \int_{\Gamma_S} \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} v \, dB + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \phi v \, dB, \tag{3.3}$$

kde $u : [0, T] \rightarrow \mathcal{V}$, $f : [0, T] \rightarrow L^2(\Omega)$ a $\phi : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_N)$. Počáteční podmínky uvažujeme $\mu_1 \in \mathcal{V}$ a $\mu_2 \in L^2(\Omega)$, viz [3]. Dále zavedeme časově závislou bilineární formu $a : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ a lineární formu $L : \mathcal{V} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. Rovnici (3.3) lze potom pro

$u \in L^2(0, T; \mathcal{V})$, $\partial u / \partial t = \dot{u} \in L^2(0, T; H^0(\Omega))$, $\partial^2 u / \partial t^2 = \ddot{u} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ a $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ přepsat jako

$$\frac{1}{c^2} \langle \ddot{u}, v \rangle_\Omega + \frac{1}{c} (\dot{u}, v)_{\Gamma_S} + a(u, v; t) = L(v; t), \quad (3.4)$$

kde \dot{u} , resp. \ddot{u} označují 1., resp. 2. derivaci podle času a $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$ představuje dualitu mezi $H^{-1}(\Omega)$ a \mathcal{V} . Bilineární a lineární forma má podobu

$$\begin{aligned} a(u, v; t) &= (\nabla u, \nabla v)_\Omega, \\ L(v; t) &= (f, v)_\Omega + (\phi, v)_{\Gamma_N}, \end{aligned}$$

kde $(\cdot, \cdot)_\Omega$, $(\cdot, \cdot)_{\Gamma_S}$, $(\cdot, \cdot)_{\Gamma_N}$ značí skalární součiny v $L^2(\Omega)$, $L^2(\Gamma_S)$, resp. $L^2(\Gamma_N)$ s počátečníma podmínkami $u(\mathbf{x}, 0) = \mu_1$, $\dot{u}(\mathbf{x}, 0) = \mu_2$, viz [3]. Existenci právě jednoho řešení slabé formulace (3.4) nelze jednoduše přímo ukázat pomocí Laxovy–Milgramovy věty (kap. 1.1), je nutné použít tzv. energetické odhady, viz [3].

V případě, že $f = 0$, $\phi = 0$ a $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ lze totiž pro úlohu (3.3) úpravami získat základní energetický odhad

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma_S} \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} dB + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) d\Omega &= 0, \\ \frac{1}{c^2} \int_\Omega \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right) d\Omega + \int_\Omega \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla u \cdot \nabla u) d\Omega &= -\frac{1}{c} \int_{\Gamma_S} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} dB. \end{aligned}$$

Bez Sommerfeldovy okrajové podmínky představuje rovnice

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{c^2} \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 d\Omega + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u d\Omega \right] = 0 \quad (3.5)$$

zákon zachování energie, kde $\frac{1}{c^2} \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 d\Omega$ odpovídá kinetické energii a $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u d\Omega$ energii potenciální, viz [2]. V případě Sommerfeldovy okrajové podmínky

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{c^2} \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 d\Omega + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u d\Omega \right] = -\frac{1}{c} \int_{\Gamma_S} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dB \quad (3.6)$$

je změna energie záporná a celková energie tak v čase klesá. Sommerfeldova okrajová podmínka totiž představuje tlumení systému a akustické vlny jsou tak částečně hranicí pohlceny a neodrážejí se zpět do domény.

3.2 Diskretizace MKP

MKP využíváme k prostorové diskretizaci při řešení variačních problémů, které reprezentují úlohy pro PDR ve slabém smyslu. K nalezení aproximace řešení variačního problému musíme nejprve zkonstruovat podprostory s konečnou dimenzí, viz [15]. Uvažujeme proto podprostor $V_h \subset \mathcal{V}$ s dimenzí $\dim V_h = n$. Jeho bázi tvoří množina lineárně nezávislých funkcí $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in V_h$. Semiskrétní problém potom formulujeme tak, že hledáme $u_h \in V_h$ v libovolném $t \in [0, T]$, které splňuje

$$\frac{1}{c^2} \langle \ddot{u}_h, v_h \rangle_\Omega + \frac{1}{c} (\dot{u}_h, v_h)_{\Gamma_S} + a(u_h, v_h; t) = L(v_h; t), \quad (3.7)$$

pro libovolné $v_h \in V_h$ a počáteční podmínky u_{0h}, \dot{u}_{0h} , viz [2], kde \dot{u}_h , resp. \ddot{u}_h označují 1., resp. 2. derivaci podle času. Aby bylo možné rovnici (3.7) numericky řešit, je nutné jí převést do algebraického tvaru. Aproximaci u_h tak vyjádříme jako lineární kombinaci bázových funkcí v podobě

$$u_h = U_1\varphi_1 + \cdots + U_n\varphi_n = \sum_{j=1}^n U_j \varphi_j \quad (3.8)$$

a testovací funkce v_h volíme postupně jako bázové funkce

$$v_h = \varphi_1, \cdots, \varphi_n = \varphi_i. \quad (3.9)$$

Vztahy (3.8), (3.9) dosadíme do (3.7) a dostaneme

$$\frac{1}{c^2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U_j(t)}{\partial t^2} (\varphi_j, \varphi_i)_\Omega + \frac{1}{c} \sum_{j=1}^n \frac{\partial U_j(t)}{\partial t} (\varphi_j, \varphi_i)_{\Gamma_S} + \sum_{j=1}^n U_j(t) a(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i; t), \quad (3.10)$$

pro $i = 1, \cdots, n$, viz [2],[15]. Rovnici (3.10) přepíšeme jako soustavu obyčejných diferenciálních rovnic v maticovém tvaru

$$\frac{1}{c^2} \mathbb{M} \vec{U}(t) + \frac{1}{c} \mathbb{D} \vec{U}(t) + \mathbb{A} \vec{U}(t) = \vec{b}. \quad (3.11)$$

Prvky matic $\mathbb{A} = \{a_{ij}\}$, $\mathbb{D} = \{d_{ij}\}$, $\mathbb{M} = \{m_{ij}\}$ a vektoru $\vec{b} = \{b_i\}$ známe jako

$$\begin{aligned} a_{ij} &= (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i)_\Omega = \int_\Omega \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, d\Omega, \\ d_{ij} &= (\varphi_j, \varphi_i)_{\Gamma_S} = \int_{\Gamma_S} \varphi_j \varphi_i \, dB, \\ m_{ij} &= (\varphi_j, \varphi_i)_\Omega = \int_\Omega \varphi_j \varphi_i \, d\Omega, \\ b_i &= (f, \varphi_i)_\Omega + (\phi, \varphi_i)_{\Gamma_N} = \int_\Omega f \varphi_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \phi \varphi_i \, dB. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že matice jsou symetrické. Lze ukázat, že jsou i pozitivně definitní a je možné nalézt numerické řešení, viz [16]. Vyřešením soustavy (3.10) potom získáme časově závislé akustické tlakové pole v oblasti Ω . MKP se vyznačuje volbou konečného prostoru V_h a jeho báze.

3.2.1 Volba prostoru

Dále uvažujeme, že oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je polyhedrální a lze rozdělit na polygonální elementy K_1, \cdots, K_J tak, aby platilo

- I. $K_j \cap K_i = \emptyset$ pro $i \neq j$,
- II. $\bar{\Omega} = \bigcup_{j=1}^J K_j$,
- III. $\partial K_j \cap \partial K_i = \emptyset$ pro $i \neq j$, kromě společné strany nebo vrcholu.

Mluvíme potom o přípustné triangulaci τ_h na Ω , které je tvořena elementy K , viz [2],[15]. Prostor V_h volíme jako

$$V_h = \{\varphi \in C(\bar{\Omega}) : \varphi|_K \in P_K \quad \forall K \in \tau_h\} \cap \mathcal{V},$$

kde P_K obsahuje $\mathcal{P}_1(K)$, $\mathcal{P}_1(K)$ označuje prostor všech polynomů nejvýše prvního stupně na elementu K . Volba P_K závisí na geometrii K a bude specifikována volbou bázových funkcí dále.

Bázové funkce volíme tak, aby byla zaručena spojitost konečných prvků a současně, aby pro uzlové body $x_j \in \tau_h$ platilo platilo

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij},$$

pro $i, j = 1, \dots, n$. Bázové funkce φ_i tedy nabývají hodnoty jedna pouze v příslušných uzlových bodech a všech ostatních jsou nulové, viz [2].

Na přípustné triangulace τ_h lze integrál přes Ω zapsat jako integrál přes $K \in \tau_h$

$$\int_{\Omega} \eta(\mathbf{x}) \, d\Omega = \sum_{K \in \tau_h} \int_K \eta(\mathbf{x}) \, dK, \quad (3.12)$$

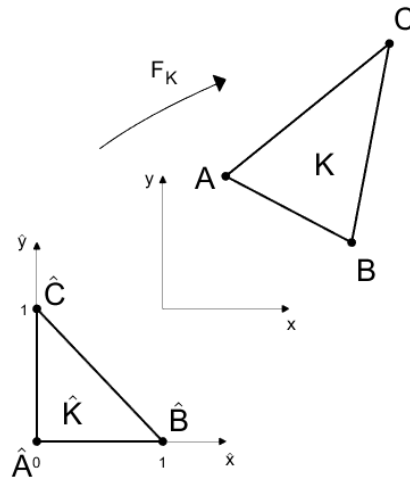
kde funkce $\eta(\mathbf{x})$ je libovolná integrovatelná funkce na Ω , viz [2]. Aplikací vztahu (3.12) zapíšeme prvky matic $\mathbb{A}, \mathbb{D}, \mathbb{M}$ a vektoru \vec{b} jako

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{K \in \tau_h} \int_K \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dK = \sum_{K \in \tau_h} a_{ij}^K, \\ d_{ij} &= \sum_{B \in \Gamma_S} \int_B \varphi_j \varphi_i \, dB = \sum_{B \in \Gamma_S} d_{ij}^S, \\ m_{ij} &= \sum_{K \in \tau_h} \int_K \varphi_j \varphi_i \, dK = \sum_{K \in \tau_h} m_{ij}^K, \\ b_i &= \sum_{K \in \tau_h} \int_K f \varphi_i \, dK + \sum_{B \in \Gamma_N} \int_B \phi \varphi_i \, dB = \sum_{K \in \tau_h} b_i^K + \sum_{B \in \Gamma_N} b_i^N, \end{aligned}$$

kde $a_{ij}^K, d_{ij}^S, m_{ij}^K, b_i^K, b_i^N$ značí lokální příspěvky do matic, resp. vektoru z elementu K a z hranice B . K výpočtu lokálních příspěvků na K využijeme tzv. transformaci na referenční element \hat{K} .

3.2.2 Transformace na referenční element

Při diskretizaci ve 3D obecně pracujeme s různými prvky: čtyřstěn, pyramida, prizmatický hranol a šestistěn. Při realizaci je použit obecný postup pro všechny zvolené prvky. Referenční elementy \hat{K} užíváme pro ekvivalentní afinní zobrazení na $K \in \tau_h$, viz obr. 1.



Obrázek 1: Příklad afinního zobrazení referenčního elementu \hat{K} na obecný element $K \in \tau_h$ ve 2D

Afinní transformaci $F_K : \hat{K} \rightarrow K$ uvažujeme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = F_K \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

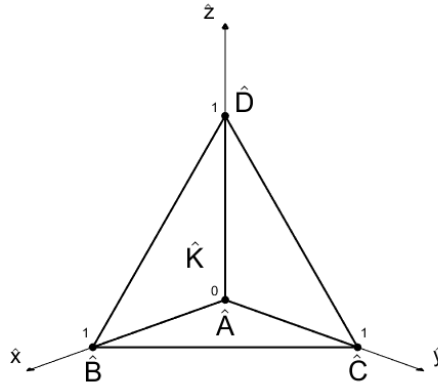
Pro obecný typ elementu s vrcholy $V(K) = \{A, B, C, \dots\}$ zapíšeme $F_K : \hat{K} \rightarrow K$ pomocí báзовých funkcí na daném elementu jako

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \hat{\varphi}_A(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) + \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} \hat{\varphi}_B(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) + \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix} \hat{\varphi}_C + \dots = \sum_{w \in V(K)} \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix} \hat{\varphi}_w(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}).$$

Bázové funkce jsou na referenčních elementech definovány následovně pro:

I. čtyřstěn s $V(K) = \{A, \dots, D\}$

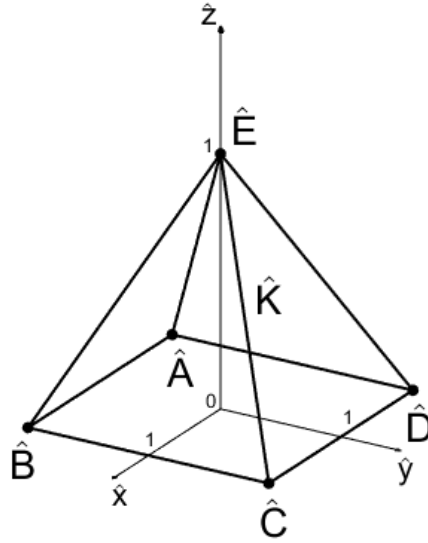
$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{\hat{A}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}, \\ \hat{\varphi}_{\hat{B}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \hat{x}, \\ \hat{\varphi}_{\hat{C}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \hat{y}, \\ \hat{\varphi}_{\hat{D}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \hat{z}, \end{aligned} \quad (3.14)$$



Obrázek 2: Referenční čtyřstěn

II. pyramidu s $V(K) = \{A, \dots, E\}$

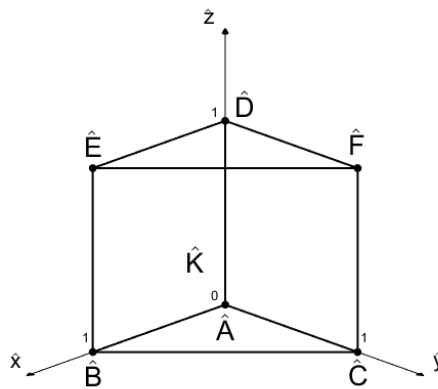
$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{\hat{A}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \frac{1}{4} \left(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z} + \frac{\hat{x} \hat{y}}{1 - \hat{z}} \right), \\ \hat{\varphi}_{\hat{B}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \frac{1}{4} \left(1 + \hat{x} - \hat{y} - \hat{z} - \frac{\hat{x} \hat{y}}{1 - \hat{z}} \right), \\ \hat{\varphi}_{\hat{C}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \frac{1}{4} \left(1 + \hat{x} + \hat{y} - \hat{z} + \frac{\hat{x} \hat{y}}{1 - \hat{z}} \right), \\ \hat{\varphi}_{\hat{D}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \frac{1}{4} \left(1 - \hat{x} + \hat{y} - \hat{z} - \frac{\hat{x} \hat{y}}{1 - \hat{z}} \right), \\ \hat{\varphi}_{\hat{E}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \hat{z}, \end{aligned} \quad (3.15)$$



Obrázek 3: Referenční pyramida

III. prizmatický hranol s $V(K) = \{A, \dots, F\}$

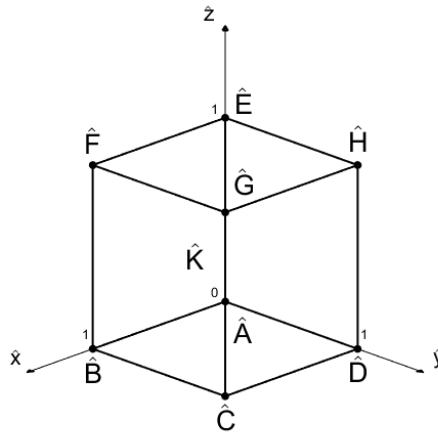
$$\begin{aligned}
 \hat{\varphi}_A(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= (1 - \hat{x} - \hat{y})(1 - \hat{z}), \\
 \hat{\varphi}_B(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \hat{x}(1 - \hat{z}), \\
 \hat{\varphi}_C(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \hat{y}(1 - \hat{z}), \\
 \hat{\varphi}_D(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= (1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{z}, \\
 \hat{\varphi}_E(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \hat{x}\hat{z}, \\
 \hat{\varphi}_F(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \hat{y}\hat{z},
 \end{aligned} \tag{3.16}$$



Obrázek 4: Referenční prizmatický hranol

IV. šestistěn s $V(K) = \{A, \dots, H\}$:

$$\begin{aligned}
 \hat{\varphi}_{\hat{A}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= (1 - \hat{x})(1 - \hat{y})(1 - \hat{z}), \\
 \hat{\varphi}_{\hat{B}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \hat{x} (1 - \hat{y})(1 - \hat{z}), \\
 \hat{\varphi}_{\hat{C}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \hat{x} \hat{y} (1 - \hat{z}), \\
 \hat{\varphi}_{\hat{D}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= (1 - \hat{x}) \hat{y} (1 - \hat{z}), \\
 \hat{\varphi}_{\hat{E}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= (1 - \hat{x})(1 - \hat{y}) \hat{z}, \\
 \hat{\varphi}_{\hat{F}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \hat{x} (1 - \hat{y}) \hat{z}, \\
 \hat{\varphi}_{\hat{G}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \hat{x} \hat{y} \hat{z}, \\
 \hat{\varphi}_{\hat{H}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= (1 - \hat{x}) \hat{y} \hat{z}.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$



Obrázek 5: Referenční šestistěn

Inverzní zobrazení

Pro účely transformace gradientů bázevých funkcí pracujeme také s inverzní transformací $F_K^{-1} : K \rightarrow \hat{K}$, tedy

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = F_K^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Bázevých funkce na K vyjádříme prostřednictvím bázevých funkcí na \hat{K} pro $w \in V(K)$, viz [2] jako

$$\varphi_w(x, y, z) = \hat{\varphi}_{\hat{w}}(F_K^{-1}(x, y, z)). \tag{3.19}$$

Gradient bázevých funkce potom spočítáme v podobě

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi_w}{\partial x} &= \frac{\partial \hat{\varphi}_{\hat{w}}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\varphi}_{\hat{w}}}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\varphi}_{\hat{w}}}{\partial \hat{z}} \frac{\partial \hat{z}}{\partial x}, \\
 \frac{\partial \varphi_w}{\partial y} &= \frac{\partial \hat{\varphi}_{\hat{w}}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\varphi}_{\hat{w}}}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\varphi}_{\hat{w}}}{\partial \hat{z}} \frac{\partial \hat{z}}{\partial y}, \\
 \frac{\partial \varphi_w}{\partial z} &= \frac{\partial \hat{\varphi}_{\hat{w}}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\varphi}_{\hat{w}}}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\varphi}_{\hat{w}}}{\partial \hat{z}} \frac{\partial \hat{z}}{\partial z}.
 \end{aligned}$$

Členy $\frac{\partial \hat{\varphi}_w}{\partial \hat{x}}$, $\frac{\partial \hat{\varphi}_w}{\partial \hat{y}}$, $\frac{\partial \hat{\varphi}_w}{\partial \hat{z}}$ získáme parciální derivací příslušných bázeových funkcí. Zbývající neznámé nalezneme parciální derivací soustavy rovnic (3.13) podle souřadnic

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \sum_{w \in V(K)} \left(\begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_w}{\partial \hat{x}}, \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_w}{\partial \hat{y}}, \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_w}{\partial \hat{z}} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{z}}{\partial x} \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial}{\partial y} : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \sum_{w \in V(K)} \left(\begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_w}{\partial \hat{x}}, \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_w}{\partial \hat{y}}, \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_w}{\partial \hat{z}} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{z}}{\partial y} \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial}{\partial z} : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \sum_{w \in V(K)} \left(\begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_w}{\partial \hat{x}}, \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_w}{\partial \hat{y}}, \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_w}{\partial \hat{z}} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial z} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial z} \\ \frac{\partial \hat{z}}{\partial z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vztahy přepíšeme do jedné maticové rovnice a vidíme, že platí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \sum_w \underbrace{\left(\begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_w}{\partial \hat{x}}, \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_w}{\partial \hat{y}}, \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_w}{\partial \hat{z}} \right)}_{\mathbb{B}_K(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})} \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial z} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial z} \\ \frac{\partial \hat{z}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial y} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{B}_K(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial z} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial z} \\ \frac{\partial \hat{z}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial y} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial z} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbb{B}_K(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ je tzv. transformační matice, viz [2]. Z rovnosti (3.20) potom pozorujeme, že hledané členy tvoří inverzní matici $\mathbb{B}_K^{-1}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ v podobě

$$\mathbb{B}_K^{-1}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial z} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial z} \\ \frac{\partial \hat{z}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial y} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Gradient bázeové funkce $\nabla \varphi_w$ pro $w \in V(K)$ tak zapíšeme ve tvaru

$$\nabla \varphi_w(x, y, z) = \hat{\nabla} \hat{\varphi}_w(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \mathbb{B}_K^{-1}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}). \quad (3.21)$$

Numerická kvadratura

Transformaci integrálu z K na \hat{K} provedeme užitím věty o substituci, viz např. [2]. Libovolnou funkci $\eta(\mathbf{x})$ definovanou na K zapíšeme

$$\int_K \eta(\mathbf{x}) dK = \int_{\hat{K}} \hat{\eta}(\hat{\mathbf{x}}) |\det \mathbb{B}_K(\hat{\mathbf{x}})| d\hat{K}. \quad (3.22)$$

Integraci na \hat{K} potom provedeme přibližně, pomocí numerické kvadratury. Obecná numerická kvadratura je dána vztahem

$$\int_{\hat{K}} \hat{\eta}(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{K} \approx |\hat{K}| \sum_{m=1}^M \hat{\omega}_m \hat{\eta}(F_K(\hat{\mathbf{x}}_m)), \quad (3.23)$$

kde $\hat{\mathbf{x}}_m = [\hat{x}_m, \hat{y}_m, \hat{z}_m]$ jsou uzly dané numerické kvadratury, $\hat{\omega}_m$ jsou váhy jejich hodnot, M je počet uzlů kvadratury a $|\hat{K}|$ je objem \hat{K} , viz [2]. Aplikací vztahu (3.23) v (3.22) získáme

$$\int_K \eta(\mathbf{x}) dK \approx |\hat{K}| \sum_{m=1}^M |\det \mathbb{B}_K(\hat{\mathbf{x}}_m)| \hat{\omega}_m \hat{\eta}(F_K(\hat{\mathbf{x}}_m)). \quad (3.24)$$

Rovnici (3.24) zjednodušíme do podoby

$$\int_K \eta(\mathbf{x}) dK \approx \sum_{m=1}^M |\det \mathbb{B}_K(\hat{\mathbf{x}}_m)| \omega_m \hat{\eta}(F_K(\hat{\mathbf{x}}_m)),$$

kde $\omega_m = |\hat{K}| \hat{\omega}_m$. Při výpočtech je numerická kvadratura volena tak, aby byla vždy přesná pro polynom báze funkce příslušného elementu.

Uplatněním vztahů z rovnic (3.21) a (3.22) vypočteme lokální příspěvky a_{ij}^K

$$\begin{aligned} a_{ij}^K &= \int_K \nabla \varphi_j(x, y, z) \cdot \nabla \varphi_i(x, y, z) dK = \\ &= \int_{\hat{K}} |\det \mathbb{B}_K(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})| \left(\hat{\nabla} \hat{\varphi}_j(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \mathbb{B}_K^{-1}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \right) \cdot \left(\hat{\nabla} \hat{\varphi}_i(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \mathbb{B}_K^{-1}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \right) d\hat{K} = \\ &= \int_{\hat{K}} |\det \mathbb{B}_K(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})| \left(\left(\frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{x}}, \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{y}}, \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{z}} \right) \mathbb{B}_K^{-1} \right) \cdot \left(\left(\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}}, \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{y}}, \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{z}} \right) \mathbb{B}_K^{-1} \right) d\hat{K} = \\ &= \int_{\hat{K}} |\det \mathbb{B}_K(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})| \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{z}} \frac{\partial \hat{z}}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{z}} \frac{\partial \hat{z}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{z}} \frac{\partial \hat{z}}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{z}} \frac{\partial \hat{z}}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{z}} \frac{\partial \hat{z}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{z}} \frac{\partial \hat{z}}{\partial z} \end{pmatrix} d\hat{K}. \end{aligned}$$

Výraz dále řešíme pomocí obecné numerické kvadratury (3.23), aplikací obdržíme

$$\begin{aligned} a_{ij}^K &\approx \sum_{m=1}^M |\det \mathbb{B}_K(\hat{\mathbf{x}}_m)| \omega_m \cdot \\ &\cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{x}}(\hat{\mathbf{x}}_m) \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{y}}(\hat{\mathbf{x}}_m) \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{z}}(\hat{\mathbf{x}}_m) \frac{\partial \hat{z}}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{x}}(\hat{\mathbf{x}}_m) \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{y}}(\hat{\mathbf{x}}_m) \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{z}}(\hat{\mathbf{x}}_m) \frac{\partial \hat{z}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{x}}(\hat{\mathbf{x}}_m) \frac{\partial \hat{x}}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{y}}(\hat{\mathbf{x}}_m) \frac{\partial \hat{y}}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{z}}(\hat{\mathbf{x}}_m) \frac{\partial \hat{z}}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}}(\hat{\mathbf{x}}_m) \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{y}}(\hat{\mathbf{x}}_m) \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{z}}(\hat{\mathbf{x}}_m) \frac{\partial \hat{z}}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}}(\hat{\mathbf{x}}_m) \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{y}}(\hat{\mathbf{x}}_m) \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{z}}(\hat{\mathbf{x}}_m) \frac{\partial \hat{z}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}}(\hat{\mathbf{x}}_m) \frac{\partial \hat{x}}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{y}}(\hat{\mathbf{x}}_m) \frac{\partial \hat{y}}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{z}}(\hat{\mathbf{x}}_m) \frac{\partial \hat{z}}{\partial z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Obdobně získáme lokální příspěvky m_{ij}^K, b_i^K na K v podobě

$$\begin{aligned} m_{ij}^K &= \int_K \varphi_j(x, y, z) \varphi_i(x, y, z) dK = \\ &= \int_{\hat{K}} |\det \mathbb{B}_K(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})| \hat{\varphi}_j(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \hat{\varphi}_i(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) d\hat{K} \approx \\ &\approx \sum_{m=1}^M |\det \mathbb{B}_K(\hat{\mathbf{x}}_m)| \omega_m \hat{\varphi}_j(\hat{\mathbf{x}}_m) \hat{\varphi}_i(\hat{\mathbf{x}}_m), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_i^K &= \int_K f(x, y, z) \varphi_i(x, y, z) dK = \\ &= \int_{\hat{K}} |\det \mathbb{B}_K(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})| f(F_K(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})) \hat{\varphi}_i(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) d\hat{K} \approx \\ &\approx \sum_{m=1}^M |\det \mathbb{B}_K(\hat{\mathbf{x}}_m)| \omega_m f(F_K(\hat{\mathbf{x}}_m)) \hat{\varphi}_i(\hat{\mathbf{x}}_m). \end{aligned}$$

3.2.3 Transformace hraničních elementů

Obdobný postup použitý pro objemové prvky v kap. 3.2.2 je použit i pro hraniční prvky, zde uvažujeme buď trojúhelníkové nebo čtyřúhelníkové prvky. K výpočtu lokálních příspěvků d_{ij}^S, b_i^N z hranice $B \subset \mathbb{R}^2$ využíváme větu o parametrizaci jednoduché po částech hladké plochy. Příspěvky potom vypočteme ve tvaru

$$\int_B \psi(x, y, z) dB = \int_{\hat{B}} \psi(P(\hat{x}, \hat{y})) \|P_{\hat{x}}(\hat{x}, \hat{y}) \times P_{\hat{y}}(\hat{x}, \hat{y})\| d\hat{x}d\hat{y}, \quad (3.25)$$

kde parametrizaci volíme analogicky k transformaci F_K (3.13), tedy

$$P(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{w \in V(B)} \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix} \hat{\varphi}_{\hat{w}}(\hat{x}, \hat{y}), \quad (3.26)$$

kde $V(B)$ jsou vrcholy hraničního elementu. Parciální derivací (3.26) obdržíme

$$P_{\hat{x}}(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{w \in V(B)} \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_{\hat{w}}}{\partial \hat{x}},$$

$$P_{\hat{y}}(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{w \in V(B)} \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_{\hat{w}}}{\partial \hat{y}}.$$

Opět použijeme obecnou numerickou kvadraturu (3.23) a dostaneme

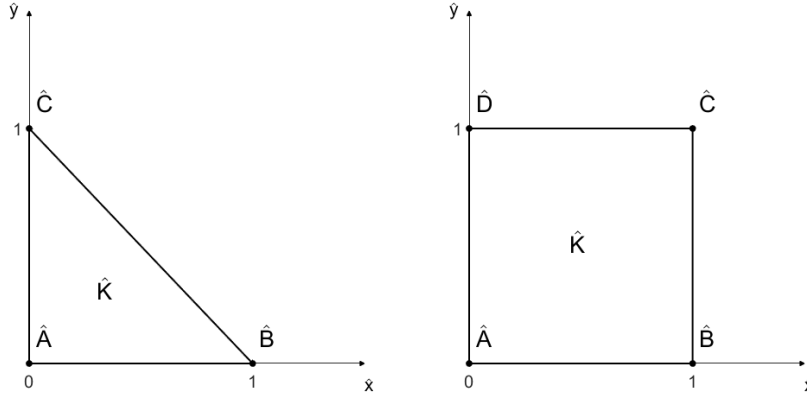
$$\int_{\hat{B}} \psi(P(\hat{x}, \hat{y})) \|P_{\hat{x}}(\hat{x}, \hat{y}) \times P_{\hat{y}}(\hat{x}, \hat{y})\| d\hat{x}d\hat{y} \approx \sum_{m=1}^M \omega_m \psi(P(\hat{\mathbf{x}}_m)) \|P_{\hat{x}}(\hat{\mathbf{x}}_m) \times P_{\hat{y}}(\hat{\mathbf{x}}_m)\|,$$

kde $\hat{\mathbf{x}}_m = [\hat{x}_m, \hat{y}_m]$ a $\omega_m = |\hat{B}| \hat{\omega}_m$, $|\hat{B}|$ je plocha \hat{B} . Na hranici pracujeme s referenčním trojúhelníkem a čtyřúhelníkem, viz obr. 6 s bázovými funkcemi

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{\hat{A}}(\hat{x}, \hat{y}) &= 1 - \hat{x} - \hat{y}, \\ \hat{\varphi}_{\hat{B}}(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{x}, \\ \hat{\varphi}_{\hat{C}}(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{y}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

resp.

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{\hat{A}}(\hat{x}, \hat{y}) &= (1 - \hat{x})(1 - \hat{y}), \\ \hat{\varphi}_{\hat{B}}(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{x}(1 - \hat{y}), \\ \hat{\varphi}_{\hat{C}}(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{x}\hat{y}, \\ \hat{\varphi}_{\hat{D}}(\hat{x}, \hat{y}) &= (1 - \hat{x})\hat{y}. \end{aligned} \quad (3.28)$$



Obrázek 6: Referenční hraniční elementy

Lokální příspěvky d_{ij}^S, b_i^N potom vypočteme jako

$$\begin{aligned} d_{ij}^S &= \int_B \varphi_j(x, y) \varphi_i(x, y) dB = \\ &= \int_{\hat{B}} \varphi_j(P(\hat{x}, \hat{y})) \varphi_i(P(\hat{x}, \hat{y})) \|P_{\hat{x}}(\hat{x}, \hat{y}) \times P_{\hat{y}}(\hat{x}, \hat{y})\| d\hat{x}d\hat{y} \approx \\ &\approx \sum_{m=1}^M \omega_m \varphi_j(P(\hat{\mathbf{x}}_m)) \varphi_i(P(\hat{x}_m, \hat{y}_m)) \|P_{\hat{x}}(\hat{x}_m, \hat{y}_m) \times P_{\hat{y}}(\hat{x}_m, \hat{y}_m)\| , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_i^N &= \int_S \phi(x, y, z) \varphi_i(x, y) dB = \\ &= \int_{\hat{S}} \phi(F_K(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})) \varphi_i(P(\hat{x}, \hat{y})) \|P_{\hat{x}}(\hat{x}, \hat{y}) \times P_{\hat{y}}(\hat{x}, \hat{y})\| d\hat{x}d\hat{y} \approx \\ &\approx \sum_{m=1}^M \omega_m \phi(F_K(\hat{x}_m, \hat{y}_m, \hat{z}_m)) \varphi_i(P(\hat{x}_m, \hat{y}_m)) \|P_{\hat{x}}(\hat{x}_m, \hat{y}_m) \times P_{\hat{y}}(\hat{x}_m, \hat{y}_m)\| . \end{aligned}$$

3.3 Časová diskretizace

Abychom získali plně diskretizovaný systém, je nutné ještě provést časovou diskretizaci soustavy (3.11), tj.

$$\frac{1}{c^2} \mathbb{M} \vec{U}(t) + \frac{1}{c} \mathbb{D} \vec{U}(t) + \mathbb{A} \vec{U}(t) = \vec{b}.$$

Interval $[0, T]$ rozdělíme na N ekvidistantních podintervalů. Každý dílčí interval je vymezen dělicími body $t_n = n \Delta t$ pro $n = 0, 1, 2, \dots, N$, kde Δt značí časový krok. V každé časové vrstvě t_n potom hledáme aproximace $\vec{U}^n \approx \vec{U}(t_n)$. Nejprve uvažujeme metodu centrální diference, viz [17], časové derivace potom nahradíme jako

$$\begin{aligned} \vec{U}''(t_n) &\approx \frac{\vec{U}^{n+1} - 2\vec{U}^n + \vec{U}^{n-1}}{\Delta t^2}, \\ \vec{U}'(t_n) &\approx \frac{\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^{n-1}}{2\Delta t}, \\ \vec{U}(t_n) &\approx \frac{\vec{U}^{n+1} + \vec{U}^{n-1}}{2}. \end{aligned}$$

Jedná se o explicitní metodu, která je v čase druhého řádu přesnosti. Výrazy dosadíme zpět do semidiskrétní formulace

$$\frac{1}{c^2} \mathbb{M} \frac{\vec{U}^{n+1} - 2\vec{U}^n + \vec{U}^{n-1}}{\Delta t^2} + \frac{1}{c} \mathbb{D} \frac{\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^{n-1}}{2\Delta t} + \mathbb{A} \frac{\vec{U}^{n+1} + \vec{U}^{n-1}}{2} = \vec{b}. \quad (3.29)$$

Rovnici (3.29) upravíme tak, že všechny členy v nové časové vrstvě $\vec{U}^{(n+1)}$ ponecháme na levé straně a zbytek převedeme na pravou stranu. Dostaneme tak tvar

$$\left(\mathbb{M} + \frac{c}{2} \Delta t \mathbb{D} + \frac{c^2}{2} \Delta t^2 \mathbb{A} \right) \vec{U}^{n+1} = c^2 \Delta t^2 \vec{b} + 2\mathbb{M}\vec{U}^n - \left(\mathbb{M} - \frac{c}{2} \Delta t \mathbb{D} + \frac{c^2}{2} \Delta t^2 \mathbb{A} \right) \vec{U}^{n-1},$$

který lze opakovaně řešit pro $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Řešení na prvních dvou časových vrstvách, tj. \vec{U}^0 a \vec{U}^1 známe z počátečních podmínek.

Kromě metody centrální diference používáme také Newmarkovu metodu, viz [18]. Uvažujeme větu o střední hodnotě diferenciálního počtu, existuje koeficient β takový, že splňuje

$$\vec{U}(t + \beta\Delta t) = \frac{\vec{U}(t + \Delta t) - \vec{U}(t)}{\Delta t}, \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

Metoda potom spočívá v rozvoji členů \vec{U}^{n+1} a \vec{U}^{n+1} pomocí Taylorovy řady

$$\begin{aligned} \vec{U}^{n+1} &= \vec{U}^n + \vec{U}^n \Delta t + \vec{U}^n \frac{\Delta t^2}{2!}, \\ \vec{U}^{n+1} &= \vec{U}^n + \vec{U}^n \Delta t, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} \vec{U}_\beta &= (1 - 2\beta)\vec{U}^n + 2\beta\vec{U}^{n+1}, \quad 0 \leq 2\beta \leq 1, \\ \vec{U}_\gamma &= (1 - \gamma)\vec{U}^n + \gamma\vec{U}^{n+1} \quad 0 \leq \gamma \leq 1. \end{aligned}$$

Z původní rovnice (3.11) potom vyjádříme $\vec{U}^{(n+1)}$ jako

$$\mathbb{M}\vec{U}^{(n+1)} = c^2 \vec{b} - c \mathbb{D}\vec{U}^{(n+1)} - c^2 \mathbb{A}\vec{U}^{(n+1)}$$

a za $\vec{U}^{(n+1)}$, $\vec{U}^{(n+1)}$ dosadíme

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\vec{U}^{(n+1)} &= c^2 \vec{b} - c \mathbb{D} \left[\vec{U}^{(n)} + \vec{U}^{(n)}(1 - \gamma)\Delta t + \vec{U}^{(n+1)}\gamma\Delta t \right] + \\ &- c^2 \mathbb{A} \left[\vec{U}^{(n)} + \vec{U}^{(n)}\Delta t + \vec{U}^{(n)}(1 - 2\beta)\frac{\Delta t^2}{2} + \vec{U}^{(n+1)}\beta\Delta t \right]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Rovnici (3.30) upravíme pro hledané $\vec{U}^{(n+1)}$ do tvaru

$$\begin{aligned} (\mathbb{M} + c \mathbb{D}\gamma\Delta t + c^2 \mathbb{A}\beta\Delta t^2)\vec{U}^{(n+1)} &= c^2 \vec{b} - c \mathbb{D} \left[\vec{U}^{(n)} + \vec{U}^{(n)}(1 - \gamma)\Delta t \right] + \\ &- c^2 \mathbb{A} \left[\vec{U}^{(n)} + \vec{U}^{(n)}\Delta t + \vec{U}^{(n)}(1 - 2\beta)\frac{\Delta t^2}{2} \right]. \end{aligned}$$

Pokud $\vec{U}^{(n+1)}$ známe, známě i $\vec{U}^{(n+1)}$, $\vec{U}^{(n+1)}$ a výpočet opakujeme dokud $n\Delta t < T$. Koeficienty volíme $\beta = \frac{1}{4}$ a $\gamma = \frac{1}{2}$, implicitní Newmarkova metoda je potom bezpodmínečně stabilní, viz [18].

3.4 Numerické výsledky

V práci řešíme dvě úlohy pro vlnovou rovnici. Na první úloze demonstrujeme vliv Neumannovy a Sommerfeldovy okrajové podmínky a diskutujeme rozdíly mezi centrálním a Newmarkovým schématem. Ve druhém případě analyzujeme nalezené řešení úlohy pro vlnovou rovnici v lidském vokálním traktu, mimo jiné pomocí DFT.

3.4.1 Testovací úloha

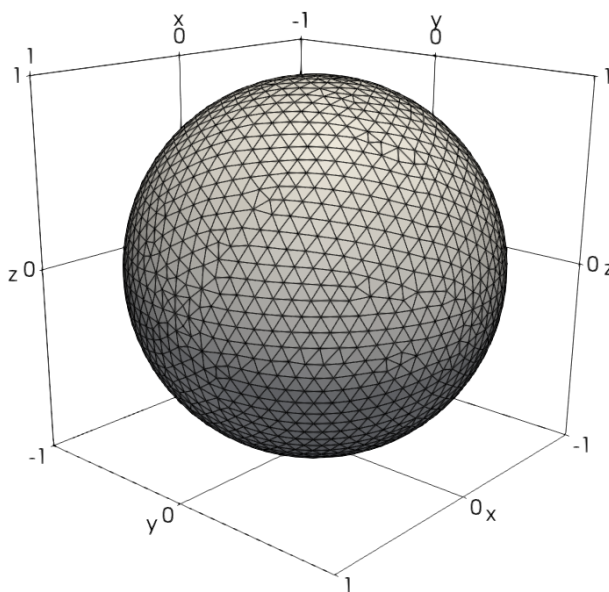
Uvažujeme kouli o poloměru jedna, tj. $\Omega = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ m}\}$. Řešíme homogenní vlnovou rovnici (3.1) s $c = 343,2 \text{ ms}^{-1}$. V kouli vybudíme jednotkový signál prostřednictvím počátečních podmínek

$$u(\mathbf{x}, 0) = \mu_1(\mathbf{x}) = 1, \quad \text{pro } \{x, y, z \in \Omega : [x^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}} < 0,15 \text{ m}\},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \mu_2(\mathbf{x}) = 0.$$

Úlohu doplníme nejprve o nulovou Neumannovu okrajovou podmínku na celé hranici $\partial\Omega$ a po té o Sommerfeldovu. Pozorujeme průběh akustického tlaku do času $T = 5 \text{ ms}$ s časovým krokem $\Delta t = 5/343,2 \text{ ms}$ pro centrální a Newmarkovo schéma.

Při řešení MKP vytvoříme triangulaci oblasti, viz obr. 7 v programu *Gmsh*¹. Pomocí triangulace sestavíme² matice, viz kap. 3.2 a časově diskretizovanou algebraickou soustavu rovnic vyřešíme pomocí knihovny *UMFPACK*³.



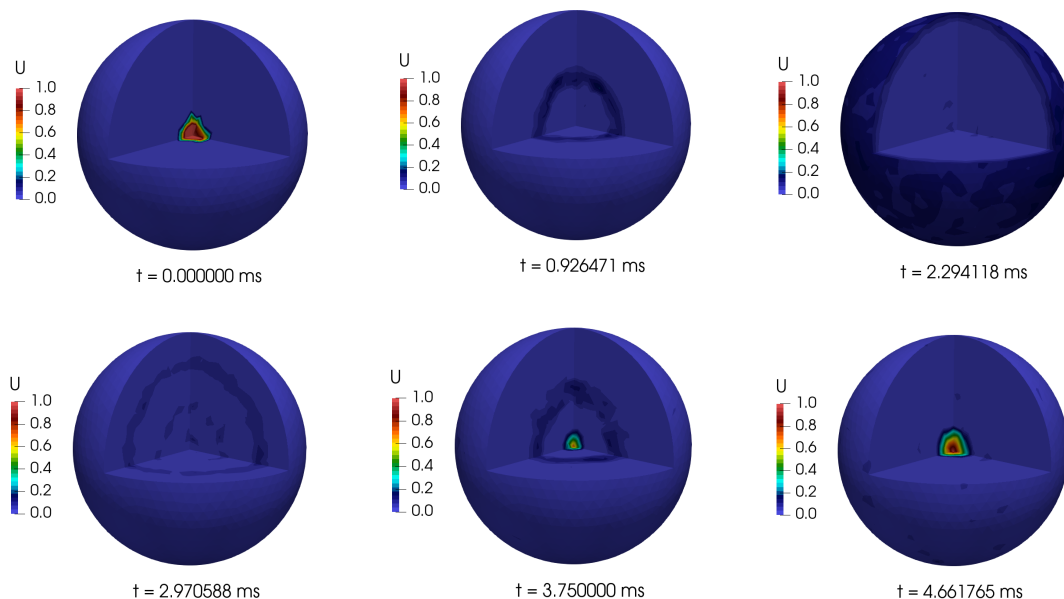
Obrázek 7: Triangulace v oblasti koule o poloměru jedna

Průběh akustického tlaku v čase je zobrazen pro Neumannovu okrajovou podmínku na obr. 8. Z průběhu pozorujeme, že přibližně kolem $t = 2.3 \text{ ms}$ akustická vlna dorazí na hranici kontrolní oblasti a odrazí se zpět. Toto chování očekáváme, protože nulová Neumannova okrajová podmínka představuje nulovou normálovou složku gradientu akustického tlaku na hranici oblasti. Nedojde tak k žádnému pohlcení akustické vlny a je odražena zpět dovnitř oblasti.

¹*Gmsh* je generátor konečně prvkových sítí, více viz [19].

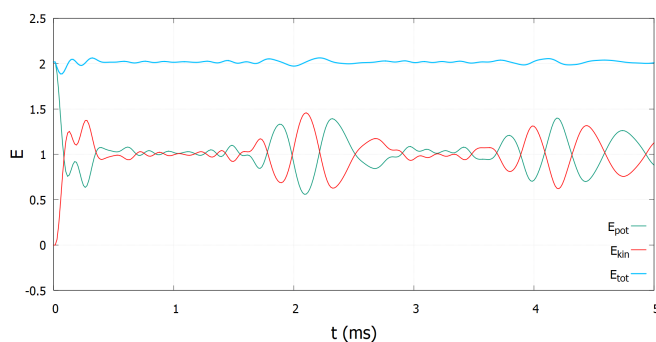
²Vlastní implementace je provedena v programovacím jazyce *C*, viz příloha B.

³*UMFPACK* obsahuje sadu algoritmů pro řešení řídkých soustav lineárních algebraických rovnic, více viz [20].

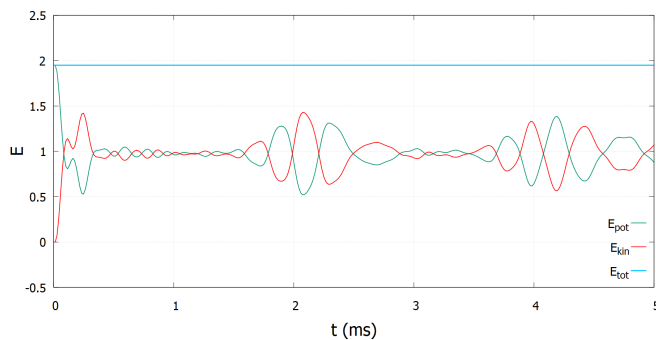


Obrázek 8: Časový průběh akustického tlaku pro testovací úlohu s nulovou Neumannovou okrajovou podmínkou

Z průběhu energie na obr. 9 potom vidíme, že hodnoty kinetické E_{kin} a potenciální E_{pot} energie (viz vztah (3.5)) oscilují jak pro Newmarkovo schéma tak pro centrální schéma okolo hodnoty jedna. Z vývoje celkové energie E_{tot} ale pozorujeme, že Newmarkovo schéma zachovává oproti centrálnímu celkovou energii po celou dobu konstantní.



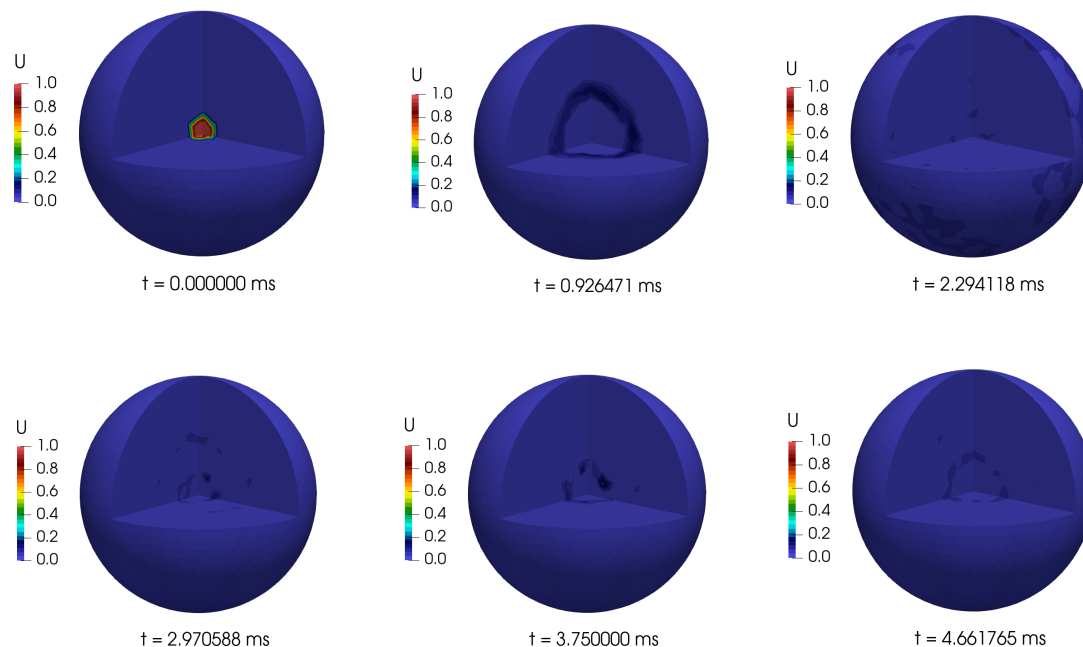
(i) centrální schéma



(ii) Newmarkovo schéma

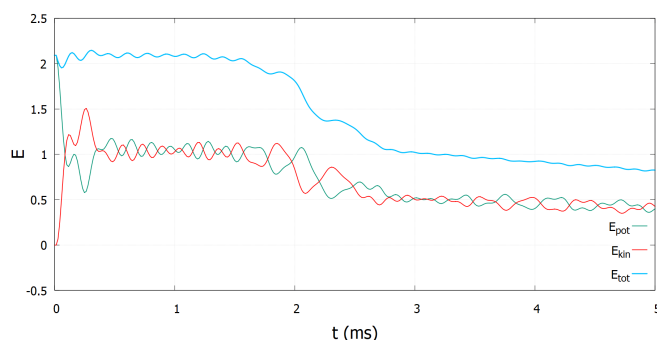
Obrázek 9: Energetický průběh pro testovací úlohu s Neumannovou okrajovou podmínkou

Podobně analyzujeme i případ se Sommerfeldovou okrajovou podmínkou. Z průběhu na obr. 10 pozorujeme, že akustická vlna se na hranici neodrazí a z velké části se pohltí. Sommerfeldova okrajová podmínka totiž představuje schopnost hranice absorbovat akustické vlny k ní kolmé.

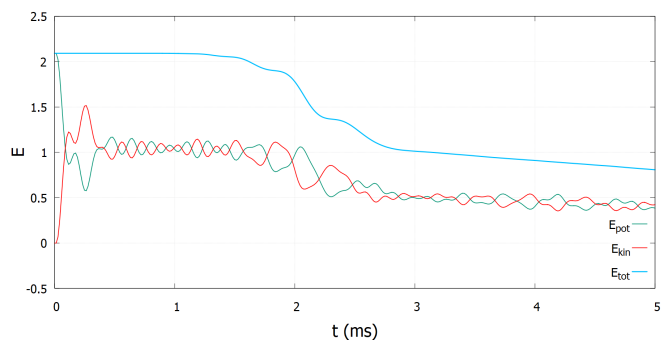


Obrázek 10: Časový průběh akustického tlaku pro testovací úlohu se Sommerfeldovou okrajovou podmínkou

Na obr. 11, kde je zobrazen průběh kinetické E_{kin} , potenciální E_{pot} a celkové E_{tot} energie je vidět, že dojde k utlumení kolem času $t = 2.3$ ms, kdy akustická vlna dorazí na hranici oblasti. Od té doby potom celková energie systému v čase klesá. V případě centrálního schématu pozorujeme v průběhu celkové energie E_{tot} malé oscilace na rozdíl od Newmarkova schématu, u kterého se žádné nevyskytují.



(i) centrální schéma

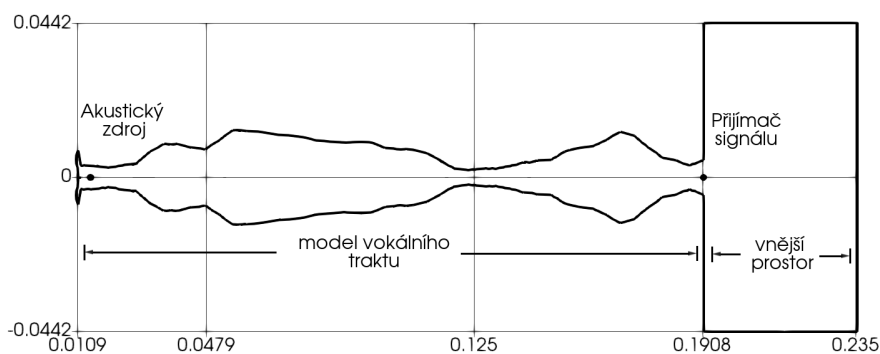


(ii) Newmarkovo schéma

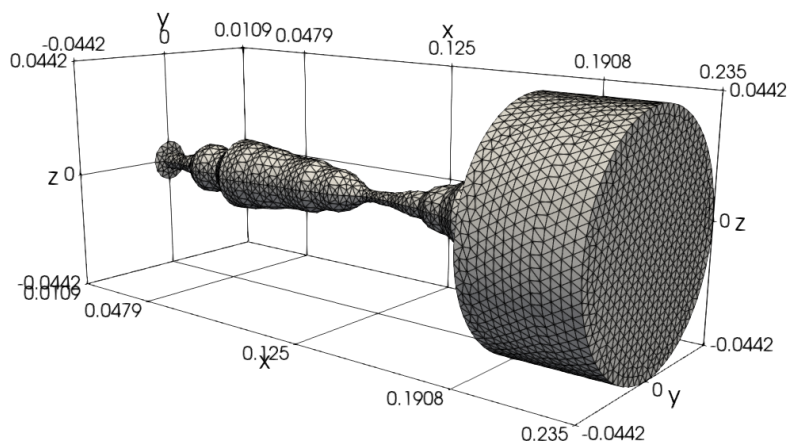
Obrázek 11: Energetický průběh pro testovací úlohu se Sommerfeldovou okrajovou podmínkou

3.4.2 Vokální trakt

V této úloze zkoumáme propagaci zvuku v lidském vokálním traktu. Používáme přibližný model vokálního traktu pro samohlásku [u:] podle studie [21]. Hledáme rezonanční frekvence, které mají důležitou roli při tvorbě zvuku. V oblasti, kde se nachází hlasivky, předepíšeme v jednom uzlovém bodě jednotkový akustický zdroj. V oblasti, kde vokální trakt ústí do vnějšího prostoru, zaznamenáváme v dalším uzlovém bodě fluktuační akustického tlaku, viz obr. 12. Na části oblasti, kterou představuje vokální trakt je předepsána Neumannova okrajová podmínka, pro vnější prostor potom uvažujeme Sommerfeldovu okrajovou podmínku. Triangulace oblasti je zobrazena na obr. 13. Úlohu řešíme v čase pomocí Newmarkova schématu do $T = 100$ ms s časovým krokem $\Delta t = 5/343,2$ ms a $c = 343,2$ ms⁻¹.

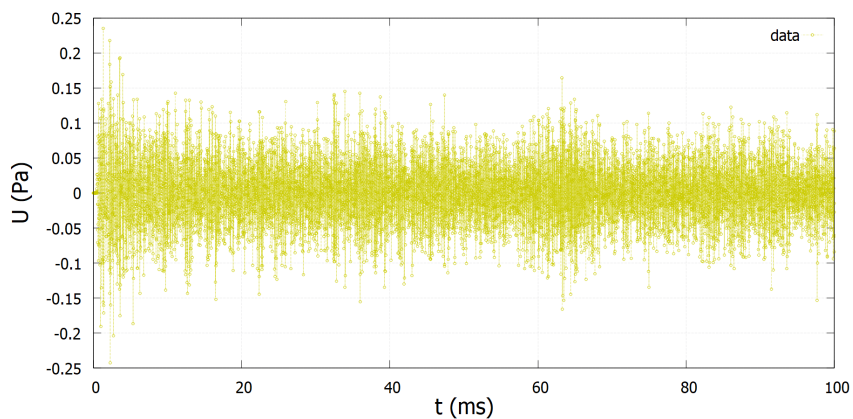


Obrázek 12: Schéma úlohy pro vokální trakt

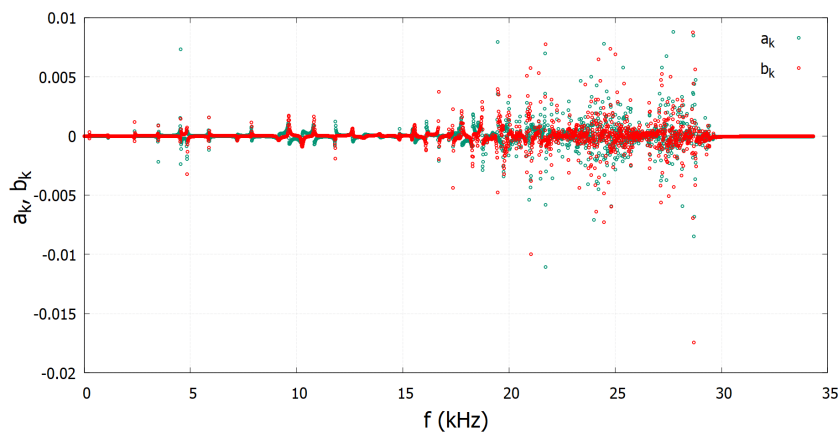


Obrázek 13: Triangulace vokálního traktu a vnější oblasti

Na obr. 14 je zobrazen průběh akustického tlaku v jednom uzlovém bodě na výstupu z vokálního traktu. Na soubor dat aplikujeme DFT⁴, viz příloha A a získáme Fourierovy koeficienty a_k a b_k , které jsou vykresleny na obr. 15.



Obrázek 14: Průběh akustického tlaku v jednom uzlovém bodě na výstupu z vokálního traktu



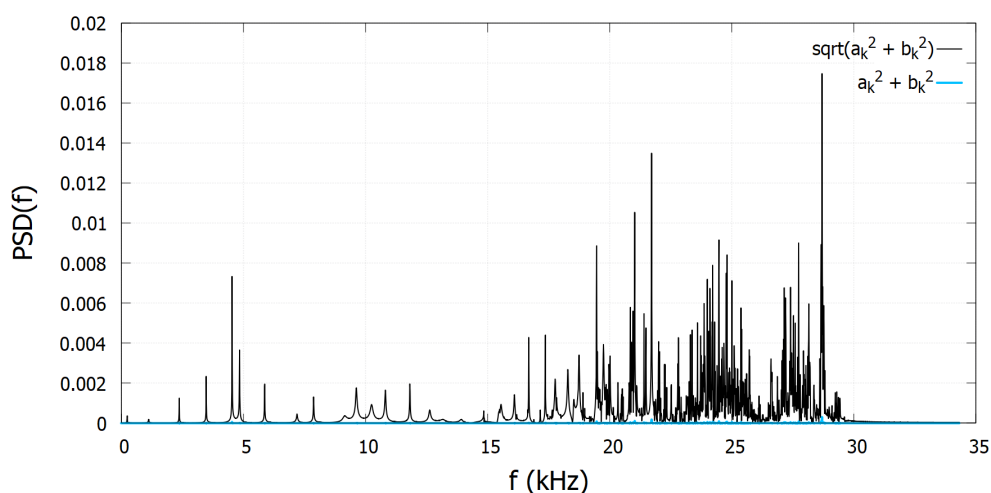
Obrázek 15: Fourierovy koeficienty pro signál v oblasti výstupu z vokálního traktu

⁴K výpočtu DFT používáme knihovnu *FFTW*, více viz [22].

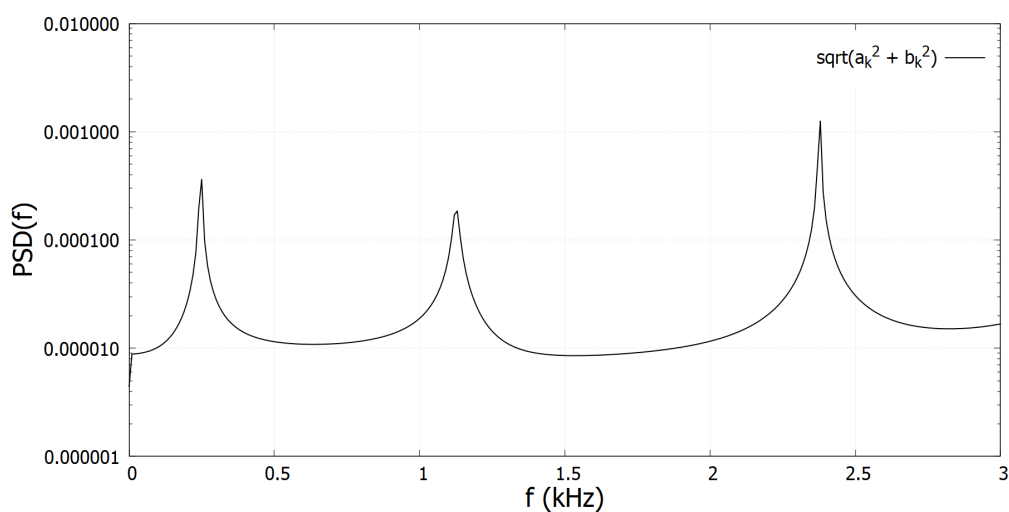
Rozložení výkonu (energie) signálu v různých frekvenčních složkách dostaneme pomocí tzv. výkonové spektrální hustoty, nebo-li *power spectral density* (PSD) jako

$$PSD = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}.$$

Celé amplitudové spektrum je potom zakresleno na obr. 16. Jako oblast zájmu považujeme frekvence do 3 kHz, odpovídající spektrum je v logaritmickém měřítku zobrazeno na obr. 17. Z amplitudového spektra pozorujeme pro rozmezí $f = 0 - 3$ kHz tři rezonanční frekvence, a to pro 249,96 Hz, 1129,83 Hz a 2379,65 Hz. První dvě nalezené frekvence jsou od 389 Hz, 987 Hz (referenční frekvence podle [21]) vzdáleny přibližně o 140 Hz. Poslední rezonanční frekvence je od referenční frekvence 2299 Hz vzdálena o necelých 81 Hz. Je nutno uvést, že pro ověření těchto výsledků by bylo dále vhodné provést výpočet zejména na jemnější triangulaci a dále zmenšit vzorkovací periodu, tj. zmenšit časový krok, popřípadě vycházet z většího počtu vzorků, tj. delší časový interval.



Obrázek 16: Frekvenční amplitudové spektrum pro signál v oblasti vokálního traktu



Obrázek 17: Frekvenční amplitudové spektrum pro frekvence do 3 kHz v oblasti vokálního traktu

3.5 Akustický problém ve frekvenční oblasti, Helmholtzova rovnice

Jak bylo uvedeno v kap. 2.1 lze akustický problém převést na řešení Helmholtzovy rovnice. Zde nejprve zformulujeme okrajovou úlohu, kterou následně numericky aproximujeme pomocí MKP. Na omezené oblasti Ω s Lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega$ říkáme, že $\tilde{u} = \tilde{u}(\mathbf{x})$ řeší nehomogenní okrajovou Helmholtzovu úlohu (2.16) pokud platí

$$\begin{aligned} -\Delta\tilde{u} - \lambda^2 \tilde{u} &= \tilde{f} & \text{v } \Omega, \\ \tilde{u} &= \tilde{g} & \text{na } \Gamma_D, \\ \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\mathbf{n}} &= \tilde{\phi} & \text{na } \Gamma_N, \\ \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\mathbf{n}} &= i\lambda\tilde{u} & \text{na } \Gamma_S. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Neznámá $\tilde{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ představuje v úloze (3.31) komplexní proměnnou, $\lambda = \omega/c$ značí vlnové číslo, $\omega > 0$ zvolenou kruhovou frekvenci, $\tilde{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ je zdroj, $\tilde{g} : \Gamma_D \rightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{\phi} : \Gamma_N \rightarrow \mathbb{C}$ jsou okrajové podmínky, analogicky k problému vlnové rovnice (3.1) a $i = \sqrt{-1}$ je imaginární jednotka. Dílčí hranice Γ_D , Γ_N , Γ_S tvoří celkovou hranici $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_S$ orientovanou jednotkovou vnější normálou \mathbf{n} a představují části, kde je předepsána Dirichletova, Neumannova a Sommerfeldova okrajová podmínka, viz [9].

3.5.1 Slabá formulace

Jelikož je Helmholtzova úloha (3.31) kvůli Sommerfeldově okrajové podmínce komplexní problém, uvažujeme prostor \mathcal{V} komplexní. Rovnici (3.31) potom násobíme testovací funkcí $v \in \mathcal{V}$ a integrujeme přes celou oblast. Aplikací Greenovy věty (kap. 1.5) potom obdržíme

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\mathbf{n}} \bar{v} \, dB + \int_{\Omega} (\nabla\tilde{u} \cdot \bar{\nabla}v - \lambda^2 \tilde{u} \bar{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \tilde{f} \bar{v} \, d\Omega. \tag{3.32}$$

Uplatněním jednotlivých okrajových podmínek (ve smyslu stop) potom dostaneme slabou formulaci úlohy (3.31) pro zvolenou kruhovou frekvenci ω a libovolné $v \in \mathcal{V}$ v podobě

$$-\int_{\Gamma_S} i\lambda \tilde{u} \bar{v} \, dB + \int_{\Omega} (\nabla\tilde{u} \cdot \bar{\nabla}v - \lambda^2 \tilde{u} \bar{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \tilde{f} \bar{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \tilde{\phi} \bar{v} \, dB, \tag{3.33}$$

kde $\tilde{u} \in \mathcal{V}$, $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$ a $\tilde{\phi} \in L^2(\Gamma_N)$. Slabou formulaci převedeme do variační formulace $a(\tilde{u}, v) = L(v)$, kde $a : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ je seskvilineární forma definovaná jako

$$a(\tilde{u}, v) = -\int_{\Gamma_S} i\lambda \tilde{u} \bar{v} \, dB + \int_{\Omega} (\nabla\tilde{u} \cdot \bar{\nabla}v - \lambda^2 \tilde{u} \bar{v}) \, d\Omega$$

a $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ je antilineární forma definovaná jako

$$L(v) = \int_{\Omega} \tilde{f} \bar{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \tilde{\phi} \bar{v} \, dB,$$

pro libovolné $\tilde{u}, v \in \mathcal{V}$, viz [5],[9]. K ověření existence a jednoznačnosti není možné použít Laxovu–Milgramovu větu (kap. 1.1), jelikož nelze pro všechna vlnová čísla λ prokázat V -eliptičnost, viz [9]. Existenci řešení lze ale ověřit prostřednictvím kompaktních operátorů a Fredholmovy teorie, více viz [5].

3.5.2 Diskretizace MKP

Při diskretizaci MKP uvažujeme konečně prvkový prostor $V_h \in \mathcal{V}$ s dimenzí $\dim V_h = n$ a hledáme $u_h \in V_h$ takové, které splňuje

$$a(\tilde{u}_h, v_h) = L(v_h), \quad (3.34)$$

pro libovolné $v_h \in V_h$, viz [9]. Aproximaci řešení u_h hledáme, viz kap. 3.2 ve tvaru

$$\tilde{u}_h = U_1\varphi_1 + \cdots + U_n\varphi_n = \sum_{j=1}^n U_j \varphi_j,$$

kde U_n jsou tentokrát neznámé komplexní koeficienty, viz [5]. Volbou $v_h = \varphi_1, \dots, \varphi_n = \varphi_k$ obdržíme soustavu rovnic

$$\sum_{j=1}^n U_j a(\varphi_j, \varphi_k) = L(\varphi_k),$$

pro $k = 1, \dots, n$. Soustavu přepíšeme pomocí matic $\mathbb{A} = \{a_{kj}\}$, $\mathbb{D} = \{d_{kj}\}$, $\mathbb{M} = \{m_{kj}\}$ a vektoru $\vec{b} = \{b_k\}$ potom jako

$$(-i\lambda\mathbb{D} + \mathbb{A} - \lambda^2\mathbb{M})\vec{U} = \vec{b} \quad (3.35)$$

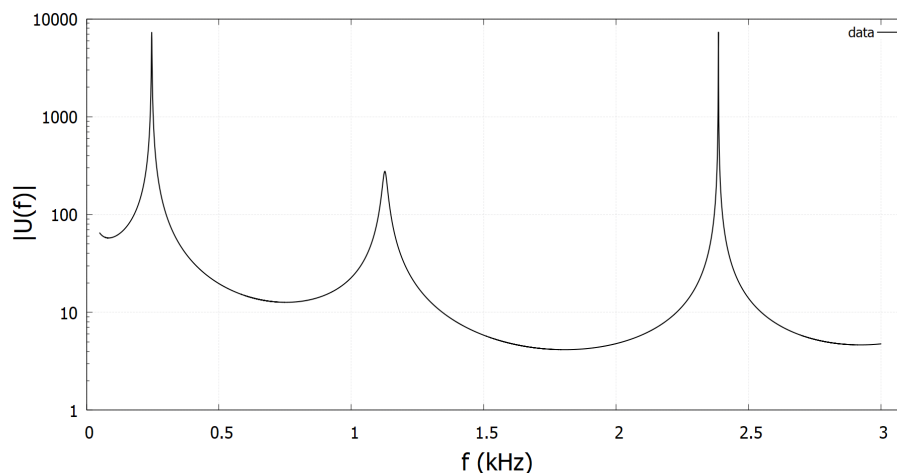
s prvky

$$\begin{aligned} a_{kj} &= (\nabla\varphi_j, \nabla\varphi_k)_\Omega = \int_\Omega \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_k \, d\Omega, \\ m_{kj} &= (\varphi_j, \varphi_k)_\Omega = \int_\Omega \varphi_j \varphi_k \, d\Omega, \\ d_{kj} &= (\varphi_j, \varphi_k)_{\Gamma_S} = \int_{\Gamma_S} \varphi_j \varphi_k \, dB, \\ b_k &= (f, \varphi)_\Omega + (\phi, \varphi_k)_\Omega = \int_\Omega f \varphi_k \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \phi \varphi_k \, dB. \end{aligned}$$

Vidíme, že matice jsou identické k úloze pro vlnovou rovnici, viz kap. 3.2. Prostor V_h volíme potom analogicky a prostřednictvím přípustné triangulace τ_h postupujeme při jejich sestavení stejným způsobem.

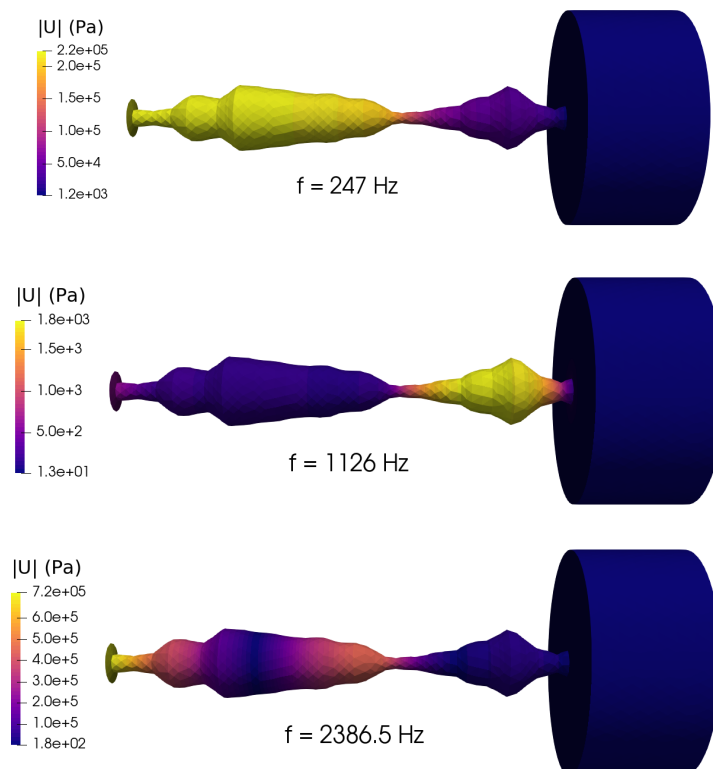
3.5.3 Numerické výsledky pro vokální trakt

V této úloze navážeme na kap. 3.4.2, kde jsme řešili vlnovou rovnici v časové oblasti. Tentokrát úlohu vyřešíme ve frekvenční oblasti. Uvažujeme stejnou geometrii a stejné okrajové podmínky, viz obr. 12. Akustický zdroj uvažujeme jako jednotkový harmonický signál daný vektorem pravé strany \vec{b} . Úlohu řešíme v rozsahu frekvencí 50 – 3000 Hz s krokem 0,5 Hz a sledujeme průběh řešení v uzlovém bodě na výstupu z vokálního traktu. Celé spektrum v závislosti na frekvenci je zakresleno na obr. 18. Pověšme si velké shody s nalezeným spektrem prostřednictvím DFT na obr. 17. Rezonanční frekvence 247 Hz, 1126 Hz a 2386,5 Hz se v porovnání s kap. 3.4.2 neliší více než o 7 Hz.

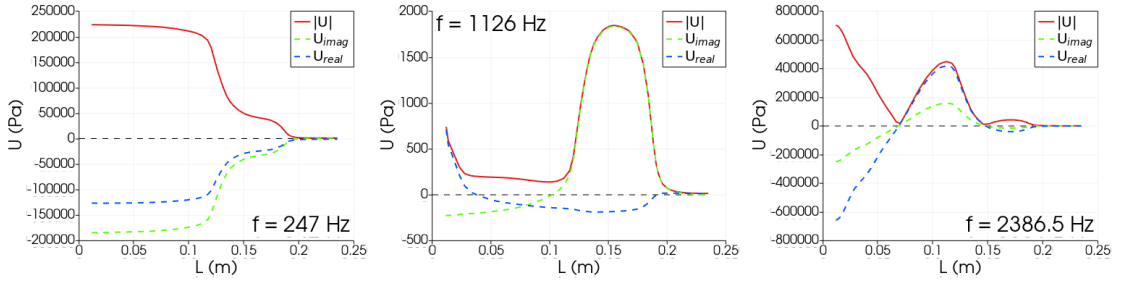


Obrázek 18: Řešení vlnové rovnice ve vokálním traktu ve frekvenční oblasti

Z řešení na obr. 19 vidíme, že pro jednotlivé rezonanční frekvence se rozložení tlaku v kontrolní oblasti mění jen ve směru x a ne y nebo z . Řešení proto charakterizujeme pouze průběhem tlaku podél rotační osy, to je zakresleno na obr. 20. Pozorujeme, že reálná složka neprotne pro frekvenci 247 Hz osu ani jednou, pro 1126 Hz jednou a pro 2386,5 Hz dvakrát. Toto chování lze připodobnit k čtvrtvlnnému rezonátoru (*quarter-wave resonator*), což je trubka uzavřená na jednom konci a otevřená na druhém, více viz. [23].

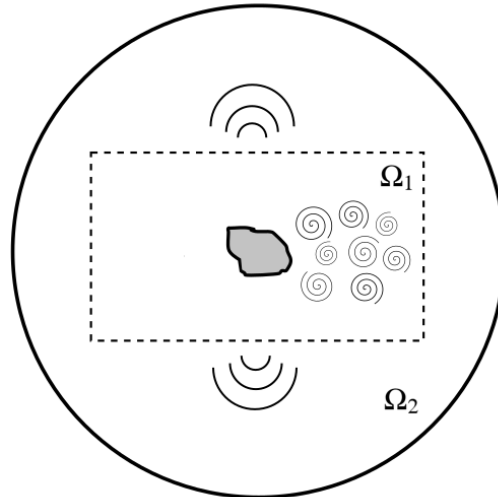


Obrázek 19: Průběh řešení pro rezonanční frekvence


 Obrázek 20: Rozložení tlaku podél x -ové osy pro rezonanční frekvence

3.6 Lighthillova akustická analogie

Lighthillova analogie [11] propojuje téma Navierových–Stokesových rovnic pro proudění stlačitelné tekutiny a šíření akustických poruch. Uvažujeme oblast Ω_1 , ve které proudí tekutina, viz obr. 21. V důsledku obtékání tělesa umístěného v Ω_1 je proudové pole neustálené. Skrz tekutinu se potom generuje zvuk, který se šíří až do akustické domény Ω_2 . V Ω_2 se tekutina nachází v rovnovážném stavu a k propagaci zvuku dochází pouze vlivem fluktuace veličin, viz [24].



Obrázek 21: Obecný aeroakustický problém

Pro takto definovaný problém formulujeme smíšenou úlohu. V klasickém smyslu potom hledáme funkci $\rho' \in C^2(\overline{\Omega}_\tau)$, která řeší úlohu pro Lighthillovu rovnici (2.32) ve tvaru

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c^2 \Delta \rho' &= \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} & \text{v } \Omega_\tau = \Omega \times [0, \tau], \\
 \frac{\partial \rho'}{\partial \mathbf{n}} &= b & \text{na } \partial\Omega_2 \times [0, \tau], \\
 \rho'(\mathbf{x}, 0) &= \rho'_0(\mathbf{x}) & \text{pro } \mathbf{x} \in \Omega \times \{t = 0\}, \\
 \frac{\partial \rho'}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) &= \rho'_{t0}(\mathbf{x}) & \text{pro } \mathbf{x} \in \Omega \times \{t = 0\},
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

kde $T_{ij} : \Omega_\tau \rightarrow \mathbb{R}$ jsou složky Lighthillova tenzoru v podobě $T_{ij} \simeq \rho_0 u_i u_j$, $\rho' : \overline{\Omega}_\tau \rightarrow \mathbb{R}$ představuje fluktuaci hustoty, c rychlost zvukové vlny v daném mediu a b je okrajová podmínka, viz [25].

V této práci pouze naznačíme postup při řešení sdruženého problému akustiky a proudění tekutin. Aeroakustický problém často umožňuje výpočet proudového pole separátně od akustického, viz [26]. Proudové pole je potom použito jako zdroj pro akustiku, kdežto vliv akustického pole na proudící tekutinu je zanedbán.

V doméně Ω_1 řešíme úlohu pro Navierovy–Stokesovy rovnice a výsledkem je rychlostní pole, prostřednictvím kterého získáme akustické uzlové zdroje. Ty jsou potom integrovány přes jednotlivé elementy a přičteny do vektoru pravé strany pro výpočet akustických poruch. Často je ale potřeba speciální algoritmus, který výsledné veličiny vhodně interpoluje mezi výpočetní doménou pro proudění a pro akustiku, viz [25]. Akustická simulace je totiž provedena v celé doméně $\Omega_1 \cup \Omega_2$ a obvykle je triangulace pro akustický výpočet hrubší. Pro akustickou simulaci preferujeme elementy se stejnou velikostí, aby byly zachyceny akustické vlny v celé doméně. V kontrastu, proudění tekutin vyžaduje zjemnění triangulace zejména u stěn, viz [26].

Důležitou roli má při akustickém výpočtu okrajová podmínka b , která na hranici $\partial\Omega_2$ napodobuje neomezenou oblast. Požadujeme tak, aby se akustické vlny na hranici výpočetní domény absorbovaly a neodrážely zpět. Mezi nejčastěji používané patří absorpční okrajová podmínka, kde $b = -\frac{1}{c} \frac{\partial \rho'}{\partial t}$, viz [25] a technika PML (*perfectly matched layer*) s $b = 0$. PML je tvořena několika vrstvami elementů, které vlny tlumí a neodráží zpět, více viz [25], [26].

4 Numerická aproximace proudění nestlačitelné tekutiny

4.1 Stokesův problém

V této části uvažujeme stacionární úlohu pro Stokesův problém (2.25). Úloha je definována v omezené oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, vyplněné tekutinou, s Lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega$. V klasickém smyslu hledáme dvojici neznámých $\mathbf{u} \in [C^2(\overline{\Omega})]^2$ a $p \in C^1(\overline{\Omega})$, které splňují

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} & \text{v } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & \text{v } \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (4.1)$$

kde $\mathbf{u} : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ značí rychlost proudění tekutiny, $p : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ je kinematický tlak, $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ představuje objemový zdroj působící na tekutinu a $\nu > 0$ je kinematická viskozita. Na hranici $\partial\Omega$ obvykle předepisujeme homogenní Dirichletovu okrajovou podmínku. V případě proudění tekutin mluvíme o tzv. *no slip* okrajové podmínce, která zajišťuje nulovou normálovou a tečnou rychlost tekutiny na hranici $\partial\Omega$, viz např. [27].

4.1.1 Slabá formulace

K nalezení slabé formulace definujeme prostor testovacích funkcí $\mathcal{V} = [H_0^1(\Omega)]^2$. Libovolnou testovací funkcí $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ násobíme pohybovou rovnicí v (4.1) a integrujeme přes oblast Ω . Užitím Greenovy věty (kap. 1.5) obdržíme

$$\nu \left(\int_{\partial\Omega} -\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \, dS + \int_{\Omega} \nabla\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{v} \, d\Omega \right) + \int_{\partial\Omega} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dS - \int_{\Omega} p (\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega, \quad (4.2)$$

kde \mathbf{n} značí jednotkovou vnější normálu k hranici $\partial\Omega$. Jelikož $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, jsou integrály přes hranici $\partial\Omega$ nulové (ve smyslu stop). Rovnice (4.2) se zjednoduší do podoby

$$\nu \int_{\Omega} \nabla\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Omega} p (\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega. \quad (4.3)$$

Rovnici kontinuity v (4.1) násobíme testovací funkcí $q \in L^2(\Omega)$, $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a integrujeme přes celou oblast

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) q \, d\Omega = 0. \quad (4.4)$$

Tlak řešící Stokesovu úlohu je však v prostoru $L^2(\Omega)$ jednoznačně určený až na konstantu, viz [2],[28], proto definujeme Lebesgueův prostor

$$\mathcal{Q} = L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q \, d\Omega = 0 \right\}.$$

Slabým řešením Stokesova problému (4.1) potom nazveme takové $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ a $p \in \mathcal{Q}$, které splňují

$$\begin{aligned} \nu (\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v})_{\Omega} - (p, \nabla \cdot \mathbf{v})_{\Omega} &= (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Omega}, \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}, q)_{\Omega} &= 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

pro libovolné $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ a $q \in \mathcal{Q}$, kde $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$, $(\cdot, \cdot)_{\Omega}$ značí skalární součin v $L^2(\Omega)$ a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega}$ představuje dualitu mezi $[H^{-1}(\Omega)]^2$ a \mathcal{V} , viz [28]. Slabou formulaci (4.5) převedeme do variační

identity

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= L(\mathbf{v}), \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0, \end{aligned} \tag{4.6}$$

kde $a : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ a $b : \mathcal{V} \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou bilineární formy definovány jako

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{\Omega}, \\ b(\mathbf{v}, q) &= -(\nabla \cdot \mathbf{v}, q)_{\Omega} \end{aligned}$$

a $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ je lineární forma ve tvaru

$$L(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega},$$

pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ a $p, q \in \mathcal{Q}$, viz [15]. Hlavní obtíž při řešení Stokesova problému a později Navierových–Stokesových rovnic je sdruženost tlaku a rychlosti. Jedná se o tzv. úlohu sedlového bodu (*saddle point system*), viz [27],[28]. Podmínka existence řešení takového systému je známá jako inf–sup podmínka

$$\inf_{q \in \mathcal{Q}} \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}} \frac{|b(\mathbf{v}, q)|}{\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}} \|q\|_{\mathcal{Q}}} = \beta > 0, \tag{4.7}$$

viz např. [15]. K ověření jednoznačnosti řešení volíme testovací funkce s nulovou divergencí, viz [2],[15]. Definujeme proto podprostor $\mathcal{V}_{\sigma} \subset \mathcal{V}$ jako

$$\mathcal{V}_{\sigma} = \left\{ \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2 : \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \right\}.$$

Důsledkem volby podprostoru je ze soustavy rovnic (4.6) eliminován tlak a problém se pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\sigma}$ zredukuje na $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v})$. Předpoklady Laxovy–Milgramovy věty jsou pro redukováný problém splněny, viz [2]. Existence a jednoznačnost řešení formulace s tlakem je potom zajištěna volbou prostoru \mathcal{Q} a splněním inf–sup podmínky(4.7), více viz [2],[28].

4.1.2 Diskretizace MKP

Uvažujme prostory $V_h \subset \mathcal{V}$ a $Q_h \subset \mathcal{Q}$ s konečnou dimenzí. Hledáme potom $\mathbf{u}_h \in V_h$ a $p_h \in Q_h$ takové, které splňují

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) &= L(\mathbf{v}_h) & \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0 & \forall q_h \in Q_h. \end{aligned} \tag{4.8}$$

O (4.8) mluvíme jako o Galerkinově variační formulaci pro Stokesův problém, viz např. [15],[27]. Bázové funkce prostoru V_h s $\dim V_h = n_v$ označíme $\varphi_1, \dots, \varphi_{n_v} \in V_h$, pro prostor Q_h s $\dim Q_h = n_q$ potom jako $\theta_1, \dots, \theta_{n_q} \in Q_h$. Aproximaci \mathbf{u}_h vyjádříme jako lineární kombinaci bázových funkcí

$$\mathbf{u}_h = U_1 \varphi_1 + \dots + U_{n_v} \varphi_{n_v} = \sum_{j=1}^{n_v} U_j \varphi_j.$$

Testovací funkce \mathbf{v}_h volíme postupně jako bázové funkce

$$\mathbf{v}_h = \varphi_1, \dots, \varphi_{n_v} = \varphi_i.$$

Analogicky vyjádříme p_h a q_h jako

$$p_h = P_1 \theta_1 + \cdots + P_{n_q} \theta_{n_q} = \sum_{j=1}^{n_q} P_j \theta_j,$$

$$q_h = \theta_1, \cdots, \theta_{n_q} = \theta_i.$$

Vztahy dosadíme zpět do (4.8) a viz [2],[27] obdržíme

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_v} U_j a(\varphi_j, \varphi_i) + \sum_{j=1}^{n_q} P_j b(\varphi_i, \theta_j) &= L(\varphi_i) & \text{pro } i = 1, \cdots, n_v, \\ \sum_{j=1}^{n_v} U_j b(\varphi_j, \theta_i) &= 0 & \text{pro } i = 1, \cdots, n_q. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Soustavu rovnic (4.9) přepíšeme v maticovém tvaru, viz [2]

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B}^T \\ \mathbb{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U} \\ \vec{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{F} \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde prvky matic $\mathbb{A} = \{a_{ij}\}$, $\mathbb{B} = \{b_{ij}\}$ a vektoru $\vec{F} = \{f_i\}$ známe ve tvaru

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \nu (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i)_\Omega = \int_\Omega \nu \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, d\Omega, \\ b_{ij} &= -(\nabla \cdot \varphi_j, \theta_i)_\Omega = - \int_\Omega \nabla \cdot \varphi_j \theta_i \, d\Omega, \\ f_i &= \langle \mathbf{f}, \varphi_i \rangle_\Omega = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \varphi_i \, d\Omega. \end{aligned}$$

Vyřešením soustavy získáme rychlosti a tlakové pole v oblasti Ω .

Volba prostoru

Na oblasti Ω uvažujeme přípustnou triangulaci τ_h s elementy K . Prostory V_h a Q_h potom volíme tak, aby splňovaly diskrétní inf-sup podmínku, viz [15],[29]

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{|b(\mathbf{v}_h, q_h)|}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathcal{V}} \|q_h\|_{\mathcal{Q}}} = \beta > 0. \quad (4.10)$$

Podmínka (4.10) je splněna jen pro speciální dvojice prostorů konečných prvků, ty definujeme jako

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k(\tau_h) &= \{ \varphi \in C(\bar{\Omega}) : \varphi|_K \in \mathcal{P}_k(K) \quad \forall K \in \tau_h \}, \\ \mathcal{P}_k(\tau_h) &= \{ \theta \in C(\bar{\Omega}) : \theta|_K \in \mathcal{P}_k(K) \quad \forall K \in \tau_h \}. \end{aligned}$$

O $(\mathcal{P}_k, \mathcal{P}_k)$ potom říkáme, že složky rychlosti jsou po částech polynomy k -tého stupně, to samé platí pro tlak, viz [2],[28]. Mezi dvojice splňující podmínku (4.10) patří Taylorovy-Hodovy elementy $(\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_1)$, které aproximují rychlost po částech kvadratickými funkcemi a tlak po částech lineárními. Taylorovy-Hoodovy elementy lze obecně rozšířit jako $(\mathcal{P}_{k+1}, \mathcal{P}_k)$ pro $k \geq 1$, více viz [28]. V této práci užíváme tzv. mini element $(\mathcal{P}_1 + \mathcal{B}_3, \mathcal{P}_1)$, který nahrazuje rychlost a tlak po částech lineárními funkcemi. Navíc je ale oproti nestabilnímu páru $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_1)$ přidána do rychlostního prostoru tzv. kubická *bubble* funkce, která na elementu v závislosti na barycentrických souřadnicích pár stabilizuje, viz [28],[29]. Konečné prostory V_h a Q_h tak volíme jako

$$\begin{aligned} V_h &= [\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{B}_3]^2 \cap \mathcal{V}, \\ Q_h &= \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{Q}. \end{aligned}$$

Transformace na referenční element

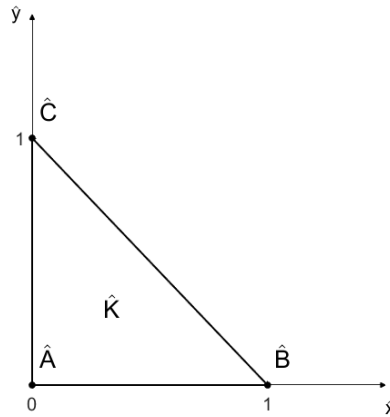
Jako v případě skalárního problému (viz kap. 3.2 a kap. 3.5.2) uijeme přípustné triangulace τ_h a prvky a_{ij} , b_{ij} , f_i spočítáme na jednotlivých elementech $K \in \tau_h$ v podobě

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{K \in \tau_h} \int_K \nu \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dK = \sum_{K \in \tau_h} a_{ij}^K, \\ b_{ij} &= - \sum_{K \in \tau_h} \int_K \nabla \cdot \varphi_j \, \theta_i \, dK = - \sum_{K \in \tau_h} b_{ij}^K, \\ f_i &= \sum_{K \in \tau_h} \int_K \mathbf{f} \cdot \varphi_i \, dK = \sum_{K \in \tau_h} f_i^K, \end{aligned}$$

kde $a_{ij}^K, b_{ij}^K, f_i^K$ značí lokální příspěvky do matic, resp. vektoru.

Uvažujeme afinní transformaci $F_K : \hat{K} \rightarrow K$ z referenčního elementu \hat{K} na obecný element $K \in \tau_h$. Na rozdíl od skalárního problému používáme v triangulaci pouze jeden typ elementů, tj. trojúhelníky, viz obr. 22. Vzájemné zobrazení mezi \hat{K} a K je potom popsáno pomocí bázových funkcí $\hat{\varphi}_{\hat{A}}, \hat{\varphi}_{\hat{B}}, \hat{\varphi}_{\hat{C}}$ na \hat{K} vztahem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} \hat{\varphi}_{\hat{A}} + \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} \hat{\varphi}_{\hat{B}} + \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} \hat{\varphi}_{\hat{C}}.$$



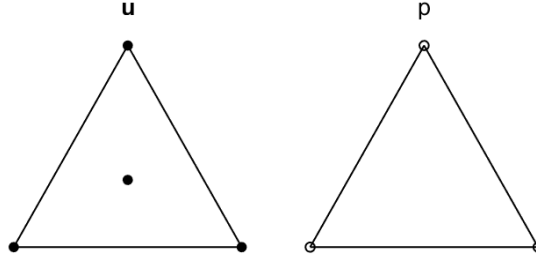
Obrázek 22: Referenční trojúhelník

Bázové funkce pro aproximaci \mathbf{u}_h definujeme v případě mini elementu ve tvaru

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{\hat{A}}(\hat{x}, \hat{y}) &= 1 - \hat{x} - \hat{y}, \\ \hat{\varphi}_{\hat{B}}(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{x}, \\ \hat{\varphi}_{\hat{C}}(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{y}, \\ \hat{\varphi}_{bbi}(\hat{x}, \hat{y}) &= 27 \hat{\varphi}_{\hat{A}} \hat{\varphi}_{\hat{B}} \hat{\varphi}_{\hat{C}} = 27 (1 - \hat{x} - \hat{y}) \hat{x} \hat{y}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Hodnoty p_h potom nahrazujeme pomocí bázových funkcí definovaných na \hat{K} jako $\hat{\theta}_{\hat{A}}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{\varphi}_{\hat{A}}(\hat{x}, \hat{y})$, $\hat{\theta}_{\hat{B}}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{\varphi}_{\hat{B}}(\hat{x}, \hat{y})$ a $\hat{\theta}_{\hat{C}}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{\varphi}_{\hat{C}}(\hat{x}, \hat{y})$, viz [30]. Stupně volnosti na $K \in \tau$

zahrnují pro \mathbf{u}_h tři vektorové hodnoty ve vrcholech a jednu vektorovou hodnotu v barycentru a pro p_h tři skalární hodnoty ve vrcholech, viz obr. 23.



Obrázek 23: Stupně volnosti pro mini element

Z inverzního zobrazení $F_K^{-1} : K \rightarrow \hat{K}$ obdržíme gradient bázové funkce $\varphi_w(x, y)$ pro $w \in \{A, B, C, bbl\}$, viz kap. 3.2.3 v podobě

$$\nabla \varphi_w(x, y) = \hat{\nabla} \hat{\varphi}_w(\hat{x}, \hat{y}) \mathbb{B}_K^{-1}(\hat{x}, \hat{y}),$$

kde $\mathbb{B}_K^{-1}(\hat{x}, \hat{y})$ je inverzní transformační matice

$$\mathbb{B}_K^{-1}(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Numerická kvadratura

Provedeme transformaci integrálu z K na \hat{K} aplikací věty o substituci, viz kap. 3.2.2. Pro lokální příspěvky a_{ij}^K , b_{ij}^K a, f_i^K tak dostaneme

$$\begin{aligned} a_{ij}^K &= \int_K \nu \nabla \varphi_j(x, y) \cdot \nabla \varphi_i(x, y) dK = \\ &= \int_{\hat{K}} |\det \mathbb{B}_K(\hat{x}, \hat{y})| \nu \left(\hat{\nabla} \hat{\varphi}_j(\hat{x}, \hat{y}) \mathbb{B}_K^{-1}(\hat{x}, \hat{y}) \right) \cdot \left(\hat{\nabla} \hat{\varphi}_i(\hat{x}, \hat{y}) \mathbb{B}_K^{-1}(\hat{x}, \hat{y}) \right) d\hat{K}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{ij}^K &= \int_K \nabla \cdot \varphi_j(x, y) \theta_i(x, y) dK = \\ &= \int_{\hat{K}} |\det \mathbb{B}_K(\hat{x}, \hat{y})| \hat{\nabla} \cdot \hat{\varphi}_j(\hat{x}, \hat{y}) \hat{\theta}_i(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{K}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_i^K &= \int_K \mathbf{f}(x, y) \cdot \varphi_i(x, y) dK = \\ &= \int_{\hat{K}} |\det \mathbb{B}_K(\hat{x}, \hat{y})| \mathbf{f}(F_K(\hat{x}, \hat{y})) \cdot \hat{\varphi}_i(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{K}. \end{aligned}$$

Integraci na \hat{K} potom provedeme přibližně pomocí numerické kvadratury

$$\begin{aligned} a_{ij}^K &\approx \sum_{m=1}^M |\det \mathbb{B}_K(\hat{x}_m, \hat{y}_m)| \omega_m \nu \left(\hat{\nabla} \hat{\varphi}_j(\hat{x}_m, \hat{y}_m) \mathbb{B}_K^{-1}(\hat{x}_m, \hat{y}_m) \right) \cdot \left(\hat{\nabla} \hat{\varphi}_i(\hat{x}_m, \hat{y}_m) \mathbb{B}_K^{-1}(\hat{x}_m, \hat{y}_m) \right), \\ b_{ij}^K &\approx \sum_{m=1}^M |\det \mathbb{B}_K(\hat{x}_m, \hat{y}_m)| \omega_m \left(\hat{\nabla} \hat{\varphi}_j(\hat{x}_m, \hat{y}_m) \mathbb{B}_K^{-1}(\hat{x}_m, \hat{y}_m) \right) \cdot \hat{\theta}_i(\hat{x}_m, \hat{y}_m), \\ f_i^K &\approx \sum_{m=1}^M |\det \mathbb{B}_K(\hat{x}_m, \hat{y}_m)| \omega_m \mathbf{f}(F_K(\hat{x}_m, \hat{y}_m)) \cdot \hat{\varphi}_i(\hat{x}_m, \hat{y}_m), \end{aligned}$$

kde $\omega_m = |\hat{K}| \hat{\omega}_m$. Kvůli kubické *bubble* funkci volíme uzly \hat{x}_m, \hat{y}_m a váhy $\hat{\omega}_m$ numerické kvadratury tak, aby byla numerická integrace přesná alespoň pro polynom čtvrtého stupně.

4.1.3 Nestacionární úloha

V případě, že řešíme nestacionární Stokesův problém, vycházíme při odvození slabé formulace a její následné diskretizace z rovnice (2.25). Označme $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), p = p(\mathbf{x}, t)$ a $\Omega_T = \Omega \times [0, T]$. Úloha je potom v klasickém smyslu definována pro $\mathbf{u} \in [C^2(\bar{\Omega}_T)]^2$ a $p \in C^1(\bar{\Omega}_T)$ jako

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} & \text{v} & \Omega_T, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & \text{v} & \Omega_T, \\ \mathbf{u} &= 0 & \text{na} & \partial\Omega \times [0, T], \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) & \text{pro} & \mathbf{x} \in \Omega \times \{t = 0\}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

kde $\mathbf{u} : \bar{\Omega}_T \rightarrow \mathbb{R}^2$ značí rychlost proudění tekutiny, $p : \bar{\Omega}_T \rightarrow \mathbb{R}$ je kinematický tlak, $\nu > 0$ je kinematická viskozita a $\mathbf{f} : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}^2$ představuje objemový zdroj působící na tekutinu. Symbolem \mathbf{n} značíme jednotkovou vnější normálu. Na hranici $\partial\Omega \times [0, T]$ je předepsána *no slip* okrajová podmínka. Jelikož je systém nestacionární je předepsána také počáteční podmínka $\mathbf{u}_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ v čase $t = 0$ a konečný čas $T > 0$.

Obdobným postupem, jako v kap. 4.1.1, nalezneme slabou formulaci problému (4.12) pro libovolné $\mathbf{v} \in \mathcal{V}, q \in \mathcal{Q}$ v podobě

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Omega} p (\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega, \\ \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) q \, d\Omega &= 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

kde $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow \mathcal{V}, \mathbf{f} : [0, T] \rightarrow [L^2(\Omega)]^2$. Počáteční podmínku uvažujeme $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{V}$ a předpokládáme, že splňuje $\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0$, viz [31]. Slabou formulaci (4.13) převedeme na variační problém, kde hledáme $\mathbf{v} \in \mathcal{V}, q \in \mathcal{Q}$ v libovolném $t \in [0, T]$ takové, že splňují

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{\Omega} + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= L(\mathbf{v}), \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

pro libovolné $\mathbf{v} \in \mathcal{V}, q \in \mathcal{Q}$ a počáteční podmínku $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$. Oproti úloze pro stacionární Stokesův problém (4.6) se vyskytuje v (4.14) derivace podle času (značíme $\dot{\mathbf{u}}$) ve skalárním součinu $(\cdot, \cdot)_{\Omega}$ v $L^2(\Omega)$. Existence a jednoznačnost řešení je dokázána např. v [32].

Semidiskrétní problém definujeme tak, že hledáme $\mathbf{u}_h \in V_h$ a $p_h \in Q_h$ takové, které splňují

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h)_{\Omega} + a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) &= L(\mathbf{v}_h) & \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0 & \forall q_h \in Q_h, \end{aligned} \quad (4.15)$$

Abychom získali plně diskrétní problém, musíme provést časovou diskretizaci. Interval $[0, T]$ rozdělíme rovnoměrně body $t_n = n \cdot \Delta t$ pro $n = 0, 1, 2, \dots, N$, kde Δt je časový krok a hledáme $\mathbf{u}_h^n \approx \mathbf{u}_h(t_n)$,

$p_h^n \approx p_h(t_n)$. Uvažujeme implicitní Eulerovo schéma

$$\begin{aligned} (d_t \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h)_\Omega + a(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h^{n+1}) &= (\mathbf{f}(t_{n+1}), \mathbf{v}_h)_\Omega & \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \\ b(\mathbf{u}_h^{n+1}, q_h) &= 0 & \forall q_h \in Q_h, \end{aligned} \quad (4.16)$$

s počáteční podmínkou $\mathbf{u}_h^0 = \mathbf{u}_{0h}$, kde

$$d_t \mathbf{u}_h^{n+1} = \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t}.$$

Potom, co převedeme soustavu do algebraického tvaru, lze získat maticovou podobu

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{M} + \mathbb{A} & \mathbb{B}^T \\ \mathbb{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}^{n+1} \\ \vec{P}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{F} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\Delta t} \mathbb{M} \begin{pmatrix} \vec{U}^n \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde se oproti stacionárnímu problému navíc objevuje matice $\mathbb{M} = \{m_{ij}\}$ s prvky

$$m_{ij} = (\varphi_j, \varphi_i)_\Omega = \int_\Omega \varphi_j \cdot \varphi_i \, d\Omega.$$

K diskretizaci je možné použít i jiné schéma, např. Crankovo-Nicolsonovo, viz [33] ve tvaru

$$\begin{aligned} (d_t \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h)_\Omega + a(\bar{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h^{n+1}) &= (\bar{\mathbf{f}}(t_{n+1}), \mathbf{v}_h)_\Omega & \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \\ b(\bar{\mathbf{u}}_h^{n+1}, q_h) &= 0 & \forall q_h \in Q_h, \end{aligned} \quad (4.17)$$

kde

$$\begin{aligned} d_t \mathbf{u}_h^{n+1} &= \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t}, \\ \bar{\mathbf{u}}_h^{n+1} &= \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n}{2}, \\ \bar{\mathbf{f}}(t_{n+1}) &= \frac{\mathbf{f}(t_{n+1}) + \mathbf{f}(t_n)}{2}. \end{aligned}$$

Obě uvedená schémata jsou bezpodmínečně stabilní, Crankovo-Nicolsonovo schéma je navíc v čase druhého řádu přesnosti, viz [33].

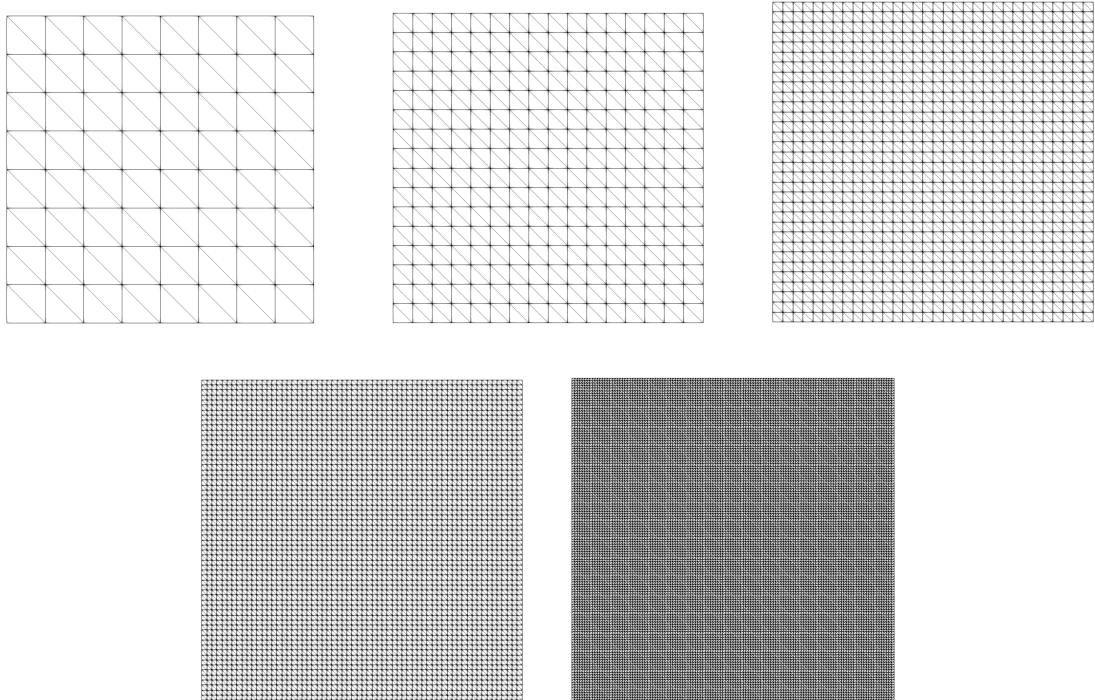
4.1.4 Numerický výpočet problému se známým řešením

Uvažujeme Stokesův problém (4.1) s homogenní okrajovou podmínkou definovaný na čtvercové oblasti $(0,1) \times (0,1)$. Analytické řešení na oblasti známe ve tvaru

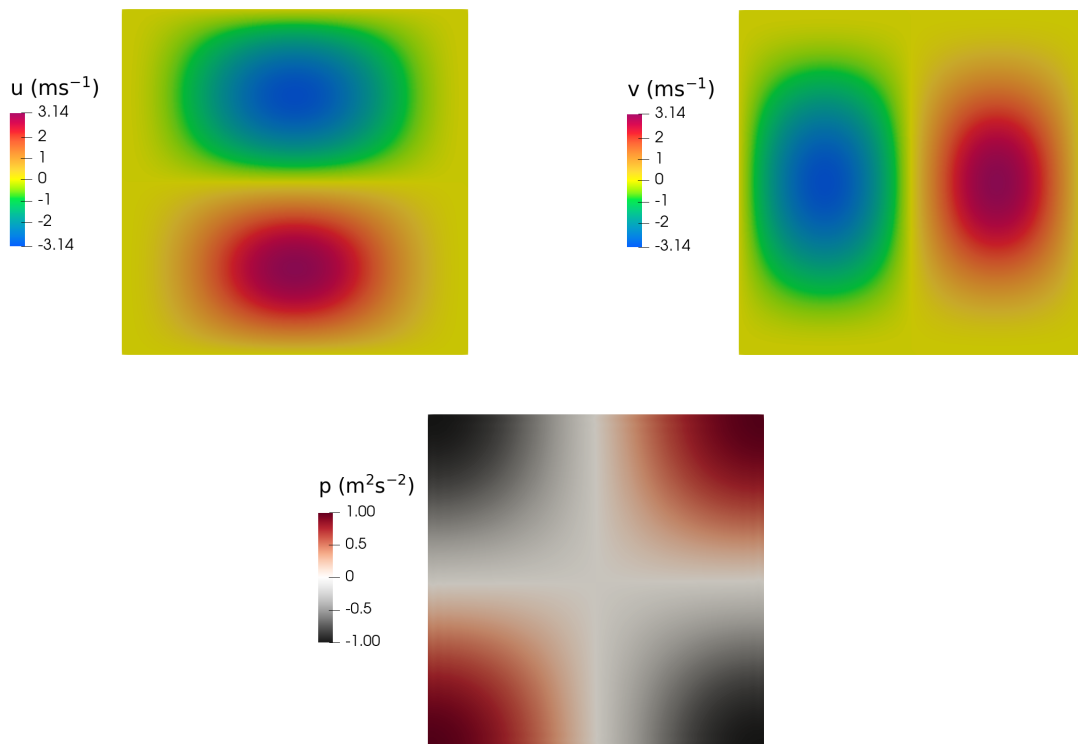
$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2\pi \sin(\pi x) \sin(\pi x) \cos(\pi y) \sin(\pi y) \\ -2\pi \sin(\pi x) \sin(\pi y) \cos(\pi x) \sin(\pi y) \end{pmatrix},$$

$$p = \cos(\pi x) \cos(\pi y).$$

Dosazením do (4.1) získáme objemový zdroj \mathbf{f} . Stokesův problém potom řešíme na čtvercové oblasti s předepsaným \mathbf{f} pro pět různých strukturovaných triangulací $\tau_{h_1} - \tau_{h_5}$, které jsou zobrazeny na obr. 24. Z obr. 24 je vidět, že parametr h , který charakterizuje jemnost triangulace je zvolen postupně jako $h = 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, 1/128$. Na obr. 25 je referenční numerické řešení na triangulaci τ_{h_4} .



Obrázek 24: Triangulace τ_{h_1} až τ_{h_5} na čtvercové oblasti $(0,1) \times (0,1)$



Obrázek 25: Numerické řešení analytického problému na τ_{h_4} ve čtvercové oblasti $(0,1) \times (0,1)$

Numerické výsledky porovnáváme se studií [27], kde provedli identický výpočet na stejně strukturovaných triangulacích. V [27] používají nespojitě konečné prvkové prostory a tzv.

zeslabený Galerkinův element, více viz [27],[34], který umožňuje volit prostory jako $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_0)$, tj. rychlost a tlak jsou aproximovány po částech konstantními funkcemi. Numerické výsledky jsou potom prezentovány v tab. 1. Z výsledků vidíme, že rychlost je v H^1 –normě prvního řádu přesnosti a v L^2 –normě druhého řádu přesnosti, podobně jako v [27]. Tlak ale pozorujeme v L^2 –normě druhého řádu přesnosti, na rozdíl od [27], kde je tlak prvního řádu přesnosti.

h	$\ \mathbf{u}_h - \mathbf{u}\ _{H^1}$	$\ \mathbf{u}_h - \mathbf{u}\ _{L^2}$	$\ p_h - p\ _{L^2}$	u_{H^1} -řád	u_{L^2} -řád	p_{L^2} -řád
1/8	2.565208e+00	1.839492e-01	3.354345e-01	—	—	—
1/16	1.321869e+00	4.860058e-02	9.204024e-02	0.9564966	1.920262	1.865694
1/32	6.660701e-01	1.231494e-02	2.367585e-02	0.9888333	1.980564	1.958849
1/64	3.336834e-01	3.088325e-03	5.941663e-03	0.9971941	1.995513	1.994478
1/128	1.669229e-01	7.725823e-04	1.484014e-03	0.9992980	1.999064	2.001362

Tabulka 1: Výsledky pro normy, které porovnávají numerické a analytické řešení na čtvercové oblasti $(0,1) \times (0,1)$

4.2 Navierovy–Stokesovy rovnice

V případě, že uvažujeme ve Stokesově problému (4.1) i konvektivní člen, řešíme stacionární úlohu pro Navierovy–Stokesovy rovnice (2.22) v podobě

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} & \text{v } \Omega, \\
 \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & \text{v } \Omega, \\
 \mathbf{u} &= 0 & \text{na } \Gamma_D, \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{g} & \text{na } \Gamma_{in}, \\
 -\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + p \mathbf{n} &= 0 & \text{na } \Gamma_{out}.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

V klasické formulaci hledáme $\mathbf{u} \in [C^2(\overline{\Omega})]^2$ a $p \in C^1(\overline{\Omega})$ na stejné oblasti Ω jako u Stokesova problému v kap. 4.1. V úloze (4.18) $\mathbf{u} : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ značí rychlost proudění tekutiny, $p : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ je kinematický tlak, $\nu > 0$ je kinematická viskozita a $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ představuje objemový zdroj působící na tekutinu. Symbolem \mathbf{n} značíme jednotkovou vnější normálu. Mimo *no slip* okrajové podmínky na hranici Γ_D předepisujeme rychlost tekutiny \mathbf{g} na vstupu Γ_{in} do oblasti Ω a výstupní okrajovou podmínku na Γ_{out} . Dílčí hranice jsou navzájem disjunktní hranice, takové, že $\Gamma_D \cup \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} = \partial\Omega$, viz [2],[35].

4.2.1 Slabá formulace

Slabou formulaci problému (4.18) odvodíme podobně, jako u Stokesova problému (4.1). Definujeme proto

$$\mathcal{V} = \{ \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2 : \mathbf{v} = 0 \text{ na } \Gamma_D \cup \Gamma_{in} \}.$$

Prostor \mathcal{Q} tentokrát volíme jako $\mathcal{Q} = L^2(\Omega)$, jelikož je tlak kvůli okrajové podmínce na Γ_{out} určen jednoznačně. Pohybovou rovnici vynásobíme libovolnou testovací funkcí $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, rovnicí

kontinuity násobíme testovací funkcí $q \in \mathcal{Q}$, $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a integrujeme přes celou oblast. Užitím Greenovy věty (kap. 1.5) získáme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \nu \left(\int_{\partial\Omega} -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \, dS + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\Omega \right) + \\ + \int_{\partial\Omega} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dS - \int_{\Omega} p (\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega, \quad (4.19) \\ \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) q \, d\Omega = 0. \end{aligned}$$

Uplatněním jednotlivých okrajových podmínek (ve smyslu stop) rozepíšeme integrál přes hranici $\partial\Omega$ jako

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \left(-\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + p \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{v} \, dS = \int_{\Gamma_D} \left(-\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + p \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{v} \, dS + \\ + \int_{\Gamma_{in}} \left(-\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + p \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{v} \, dS + \int_{\Gamma_{out}} \left(-\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + p \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{v} \, dS. \end{aligned}$$

Vzhledem k volbě prostoru \mathcal{V} je integrál přes Γ_D a Γ_{in} roven nule. To samé platí o integrálu přes Γ_{out} kvůli volbě okrajové podmínky. Podmínka na výstupu Γ_{out} se přirozeně objevuje při odvození variační formulace v případě, že není na výstupu předepsána rychlost. Často se tak podmínka na Γ_{out} nazývá tzv. *do-nothing* okrajová podmínka, viz [35]. Soustava (4.19) se pro nulový integrál přes hranici potom zjednoduší na

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Omega} p (\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega, \quad (4.20) \\ \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) q \, d\Omega = 0. \end{aligned}$$

Slabým řešením Navierovy–Stokesovy úlohy (4.18) potom nazveme takové $\mathbf{u} \in \mathbf{g} + \mathcal{V}$ a $p \in \mathcal{Q}$, které splňují

$$\begin{aligned} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega} + \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{\Omega} - (p, \nabla \cdot \mathbf{v})_{\Omega} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega}, \quad (4.21) \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}, q)_{\Omega} = 0. \end{aligned}$$

pro libovolné funkce $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ a $q \in \mathcal{Q}$, kde $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$, $(\cdot, \cdot)_{\Omega}$ značí skalární součin v $L^2(\Omega)$ a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega}$ představuje dualitu mezi $[H^{-1}(\Omega)]^2$ a \mathcal{V} , viz [2],[35]. Slabou formulaci (4.21) převedeme pro $\mathbf{u} \in \mathbf{g} + \mathcal{V}$, $p \in \mathcal{Q}$ do variační identity

$$\begin{aligned} c(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = L(\mathbf{v}), \quad (4.22) \\ b(\mathbf{u}, q) = 0, \end{aligned}$$

kde $a : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ a $b : \mathcal{V} \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou bilineární formy definovány jako

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{\Omega}, \\ b(\mathbf{v}, q) &= -(\nabla \cdot \mathbf{v}, q)_{\Omega} \end{aligned}$$

a $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ je lineární forma ve tvaru

$$L(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega},$$

pro libovolné $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ a $q \in \mathcal{Q}$, viz [35]. Navíc je v (4.22) oproti Stokesovu problému (4.6) trilineární forma $c : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, viz [2], ta je definovaná pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ jako

$$c(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} ((\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \quad (4.23)$$

a platí

$$c(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = -c(\mathbf{w}; \mathbf{v}, \mathbf{u}),$$

$$c(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0.$$

K ověření existence a jednoznačnosti řešení opět definujeme prostor funkcí s nulovou divergencí

$$\mathcal{V}_\sigma = \left\{ \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2 : \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \right\}.$$

Řešením zredukované soustavy $c(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = L(\mathbf{v})$ je potom $\mathbf{u} \in \mathbf{g} + \mathcal{V}_\sigma$ pro libovolné $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_\sigma$. Abychom vyřadili z problému nelinearitu, volíme $\mathbf{w} \in \mathcal{V}_\sigma$ a předpoklady Laxovy–Milgramovy věty ověřujeme pro bilineární formu v podobě $a_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v})$. Za dodatečných předpokladů je potom možné existenci a jednoznačnost řešení dokázat, více viz [2], [35].

4.2.2 Diskretizace MKP

Prostory s konečnou dimenzí $V_h \subset \mathcal{V}$, $Q_h \subset \mathcal{Q}$ volíme stejné jako pro Stokesův problém, aby byla splněna diskrétní inf-sup podmínka

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{|b(\mathbf{v}_h, q_h)|}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathcal{V}} \|q_h\|_{\mathcal{Q}}} = \beta > 0,$$

tj.

$$V_h = [\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{B}_3]^2 \cap \mathcal{V},$$

$$Q_h = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{Q}.$$

Galerkinova variační formulace Navierova–Stokesova problému (4.18) potom pro $\mathbf{u}_h \in \mathbf{g}_h + V_h$ a $p_h \in Q_h$ vyhovuje

$$\begin{aligned} c(\mathbf{u}_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) &= L(\mathbf{v}_h) & \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0 & \forall q_h \in Q_h, \end{aligned} \quad (4.24)$$

kde \mathbf{g}_h označuje vhodnou aproximaci okrajové podmínky, viz [35]. Je zřejmé, že se jedná o nelineární problém. Linearizaci členu $c(\mathbf{u}_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v})$ provedeme tak, že libovolně zvolíme $\mathbf{u}_h^0 \in \mathbf{g}_h + V_h$ a postupně pro $n = 0, 1, \dots, N$ hledáme \mathbf{u}_h^{n+1} a p_h^{n+1} tak, aby platilo

$$\begin{aligned} c(\mathbf{u}_h^n; \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) + \nu (\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_h)_\Omega - (p_h^{n+1}, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)_\Omega &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_\Omega, & \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1}, q_h)_\Omega &= 0, & \forall q_h \in Q_h. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Aby bylo možné Navierův–Stokesův problém (4.25) vyřešit numericky, je nutné ho převést do algebraického tvaru. Aproximaci \mathbf{u}_h a p_h vyjádříme prostřednictvím bázových funkcí $\varphi_1, \dots, \varphi_{n_v} \in V_h$, resp. $\theta_1, \dots, \theta_{n_q} \in Q_h$, viz kap. 4.1.2 jako

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{g}_h + U_1 \varphi_1 + \dots + U_{n_v} \varphi_{n_v} = \mathbf{g}_h + \sum_{j=1}^{n_v} U_j \varphi_j,$$

$$\mathbf{v}_h = \varphi_1, \dots, \varphi_{n_v} = \varphi_i,$$

$$p_h = P_1 \theta_1 + \dots + P_{n_q} \theta_{n_q} = \sum_{j=1}^{n_q} P_j \theta_j,$$

$$q_h = \theta_1, \dots, \theta_{n_q} = \theta_i.$$

Vztahy dosadíme zpět do (4.25) a obdržíme

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_v} U_j^{(n+1)} c(\mathbf{u}_h^{(n)}; \boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_i) + \sum_{j=1}^{n_v} U_j a(\boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_i) + \sum_{j=1}^{n_q} P_j b(\boldsymbol{\varphi}_i, \theta_j) &= L(\boldsymbol{\varphi}_i) \quad \text{pro } i = 1, \dots, n_v, \\ \sum_{j=1}^{n_v} U_j b(\boldsymbol{\varphi}_j, \theta_i) &= 0 \quad \text{pro } i = 1, \dots, n_q. \end{aligned}$$

Soustavu rovnic přepíšeme v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A}(\mathbf{u}_h^{(n)}) & \mathbb{B}^T \\ \mathbb{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U} \\ \vec{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{F} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Prvky matice $\mathbb{B} = \{b_{ij}\}$ a vektoru $\vec{F} = \{f_i\}$ jsou identické jako u Stokesova problému v kap. 4.1.2, v matici $\mathbb{A} = \{a_{ij}\}$ se navíc objevuje trilineární člen, tedy

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \left((\mathbf{u}_h^{(n)} \cdot \nabla) \boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_i \right)_\Omega + \nu (\nabla \boldsymbol{\varphi}_j, \nabla \boldsymbol{\varphi}_i)_\Omega = \\ &= \int_\Omega \left((\mathbf{u}_h^{(n)} \cdot \nabla) \boldsymbol{\varphi}_j \right) \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \, d\Omega + \int_\Omega \nu \nabla \boldsymbol{\varphi}_j \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}_i \, d\Omega. \end{aligned}$$

Na přípustné triangulaci τ_h rozepíšeme integrál přes jednotlivé trojúhelníky $K \in \tau_h$ a prvky a_{ij} vypočteme jako

$$a_{ij} = \sum_{K \in \tau_h} \int_K \left[\left((\mathbf{u}_h^{(n)} \cdot \nabla) \boldsymbol{\varphi}_j \right) \cdot \boldsymbol{\varphi}_i + \nu \nabla \boldsymbol{\varphi}_j \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}_i \right] dK = \sum_{K \in \tau_h} a_{ij}^K.$$

Provedeme transformaci integrálu na referenční trojúhelník \hat{K} . Lokální příspěvky a_{ij}^K do matice \mathbb{A} získáme potom v podobě

$$\begin{aligned} a_{ij}^K &= \int_K \left[\left((\mathbf{u}_h^{(n)}(x, y) \cdot \nabla) \boldsymbol{\varphi}_j(x, y) \right) \cdot \boldsymbol{\varphi}_i(x, y) + \nu \nabla \boldsymbol{\varphi}_j(x, y) \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}_i(x, y) \right] dK = \\ &= \int_{\hat{K}} |\det \mathbb{B}_K(\hat{x}, \hat{y})| \left[\left((\mathbf{u}_h^{(n)}(\hat{x}, \hat{y}) \cdot \hat{\nabla}) \hat{\boldsymbol{\varphi}}_j(\hat{x}, \hat{y}) \mathbb{B}_K^{-1}(\hat{x}, \hat{y}) \right) \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}}_i(\hat{x}, \hat{y}) + \right. \\ &\quad \left. + \nu \left(\hat{\nabla} \hat{\boldsymbol{\varphi}}_j(\hat{x}, \hat{y}) \mathbb{B}_K^{-1}(\hat{x}, \hat{y}) \right) \cdot \left(\hat{\nabla} \hat{\boldsymbol{\varphi}}_i(\hat{x}, \hat{y}) \mathbb{B}_K^{-1}(\hat{x}, \hat{y}) \right) \right] d\hat{K}. \end{aligned}$$

Integraci na \hat{K} provedeme přibližně pomocí numerické kvadratury

$$\begin{aligned} a_{ij}^K &\approx \sum_{m=1}^M |\det \mathbb{B}_K(\hat{\mathbf{x}}_m)| \omega_m \left[\left((\mathbf{u}_h^{(n)}(\hat{\mathbf{x}}_m) \cdot \hat{\nabla}) \hat{\boldsymbol{\varphi}}_j(\hat{\mathbf{x}}_m) \mathbb{B}_K^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_m) \right) \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}}_i(\hat{\mathbf{x}}_m) + \right. \\ &\quad \left. + \nu \left(\hat{\nabla} \hat{\boldsymbol{\varphi}}_j(\hat{\mathbf{x}}_m) \mathbb{B}_K^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_m) \right) \cdot \left(\hat{\nabla} \hat{\boldsymbol{\varphi}}_i(\hat{\mathbf{x}}_m) \mathbb{B}_K^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_m) \right) \right], \end{aligned}$$

kde $\omega_m = |\hat{K}| \hat{\omega}_m$ a $\hat{\mathbf{x}}_m = [\hat{x}_m, \hat{y}_m]$. Uzly $\hat{\mathbf{x}}_m$ a váhy $\hat{\omega}_m$ numerické kvadratury volíme obdobně, jako u Stokesova problému, viz kap. 4.1.2.

4.2.3 Nestacionární problém

Nestacionární úlohu definujeme pro rovnici

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad (4.26)$$

podobně jako pro nestacionární Stokesův problém (4.12). Semidiskrétní tvar potom získáme v libovolném $t \in [0, T]$ jako

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h)_\Omega + c(\mathbf{u}_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) &= (\mathbf{f}_h, \mathbf{v}_h)_\Omega \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0 \quad \forall q_h \in Q_h, \end{aligned} \quad (4.27)$$

pro $\mathbf{u}_h \in \mathbf{g}_h + V_h$ a $p_h \in Q_h$ a počáteční podmínku $\mathbf{u}_h(0) = \mathbf{u}_{0h}$, kde $\dot{\mathbf{u}}_h$ značí derivaci podle času, viz [31],[35]. Provedeme linearizaci a časovou diskretizaci pomocí Eulerova implicitního schématu

$$\begin{aligned} (d_t \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h)_\Omega + c(\mathbf{u}_h^n; \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) + a(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h^{n+1}) &= (\mathbf{f}(t_{n+1}), \mathbf{v}_h)_\Omega & \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \\ b(\mathbf{u}_h^{n+1}, q_h) &= 0 & \forall q_h \in Q_h, \end{aligned}$$

kde

$$d_t \mathbf{u}_h^{n+1} = \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t}.$$

Potom co převedeme soustavu do algebraického tvaru, lze získat maticovou podobu

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{M} + \mathbb{A}(\mathbf{u}_h^n) & \mathbb{B}^T \\ \mathbb{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}^{n+1} \\ \vec{P}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{F} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\Delta t} \mathbb{M} \begin{pmatrix} \vec{U}^n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

V případě Crankova–Nicolsonova schématu, viz [31] řešíme systém

$$\begin{aligned} (d_t \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h)_\Omega + c(\mathbf{u}_h^n; \bar{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) + a(\bar{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h^{n+1}) &= (\bar{\mathbf{f}}(t_{n+1}), \mathbf{v}_h)_\Omega & \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \\ b(\bar{\mathbf{u}}_h^{n+1}, q_h) &= 0 & \forall q_h \in Q_h, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} d_t \mathbf{u}_h^{n+1} &= \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t}, \\ \bar{\mathbf{u}}_h^{n+1} &= \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n}{2}, \\ \bar{\mathbf{f}}(t_{n+1}) &= \frac{\mathbf{f}(t_{n+1}) + \mathbf{f}(t_n)}{2}. \end{aligned}$$

4.3 Obtékání tělesa

V dalším postupu se omezíme na stacionární problém. Uvažujeme, že v Ω se nachází těleso, které je obtékáno tekutinou. Sílu působící na těleso spočteme

$$(F_d, F_l) = \int_B \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_B \, dB, \quad (4.28)$$

kde B značí hranici tělesa, $\mathbf{n}_B = (n_x, n_y)$ jednotkovou normálu směřující dovnitř tělesa a složky F_d, F_l nazýváme jako odporovou, resp. vzlakovou sílu. Tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$ známe pro Newtonskou nestlačitelnou tekutinu, viz kap. 2 ve tvaru

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) - p \mathbf{I}.$$

Dosazením do (4.28) a po ne tak jednoznačné úpravě, viz [36] dostaneme pro složky síly vztahy

$$\begin{aligned} F_d &= \int_B \left(\mu \frac{\partial u_t}{\partial \mathbf{n}_B} n_y - p n_x \right) dB, \\ F_l &= - \int_B \left(\mu \frac{\partial u_t}{\partial \mathbf{n}_B} n_x + p n_y \right) dB, \end{aligned} \quad (4.29)$$

kde u_t značí projekci rychlosti $\mathbf{u} = (u, v)$ do tečného směru $\mathbf{t} = (n_y, -n_x)$, tedy $u_t = \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}$, viz [36]. Na hranici B předpokládáme *no slip* okrajovou podmínku, tj. $\mathbf{u}|_B = \mathbf{0}$. Další úpravou s tímto předpokladem získáme finální tvar pro výpočet sil jako

$$\begin{aligned} F_d &= \int_B (\mu \nabla u \cdot \mathbf{n}_B - p n_x) \, dB = \int_B \left[\rho \nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) - p n_x \right] \, dB, \\ F_l &= \int_B (\mu \nabla v \cdot \mathbf{n}_B - p n_y) \, dB = \int_B \left[\rho \nu \left(\frac{\partial v}{\partial x} n_x + \frac{\partial v}{\partial y} n_y \right) - p n_y \right] \, dB. \end{aligned}$$

Křivkový integrál lze spočítat přímo, pomocí numerické integrace, anebo je možné integrál přes hranici B převést na integrál přes elementy K . Vycházíme ze slabé formulace momentové rovnice Navierových–Stokesových rovnic (4.19), tj.

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \nu \left(\int_{\partial\Omega} -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \, dS + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\Omega \right) + \int_{\partial\Omega} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dS - \int_{\Omega} p (\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega.$$

Rozepíšeme integrál přes hranici $\partial\Omega$ a po úpravě dostaneme

$$\int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \nu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} - p (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}] \, d\Omega = \int_B \left(\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} - p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \right) \, dB. \quad (4.30)$$

V případě odporové síly volíme vodorovnou složku testovací funkce \mathbf{v} rovnou jedné, pouze pro elementy, které s hranicí sdílí alespoň jeden vrchol. V ostatních případech je \mathbf{v} nulový vektor, tedy

$$\mathbf{v}_d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{pro } \mathbf{x} \in B, \quad \mathbf{v}_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{pro } \mathbf{x} \notin B.$$

Člen na pravé straně v (4.30) potom obdržíme ve tvaru

$$\int_B \left(\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}_d - p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_d \right) \, dB = \int_B \left[\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) - p n_x \right] \, dB = F_d.$$

Dosazením do (4.30) získáme vztah pro výpočet odporové síly, viz [36]

$$F_d = \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_d + \nu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}_d - p (\nabla \cdot \mathbf{v}_d) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_d] \, d\Omega. \quad (4.31)$$

Analogicky vypočteme vztlakovou sílu, jako

$$F_l = \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_l + \nu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}_l - p (\nabla \cdot \mathbf{v}_l) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_l] \, d\Omega, \quad (4.32)$$

kde

$$\mathbf{v}_l = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{pro } \mathbf{x} \in B, \quad \mathbf{v}_l = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{pro } \mathbf{x} \notin B.$$

4.4 Stabilizace

Pro vyšší Reynoldsova čísla se mohou modely, tvořené konečnými prvky, stát nestabilními. Nestabilita se typicky projevuje nárůstem výpočetního času, popřípadě selháním iterativního procesu při řešení algebraických problémů. V některých případech může numerické řešení naopak obsahovat oscilace, které nemají žádné fyzikální opodstatnění. Abychom se vyhnuli těmto problémům, je potřeba zavést tzv. numerické tlumení, viz [2],[35]. Existuje několik postupů jak toho docílit, uvedeme např. metodu *streamline upwind/Petrov Galerkin (SUPG)*, více viz [35]. V této práci používáme metodu *streamline diffusion*.

Metoda spočívá v zavedení umělé difuze (vazkosti), která působí pouze ve směru proudu. Toho docílíme přidáním nového členu do slabé formulace (4.24), ve které hledáme $\mathbf{u}_h \in \mathbf{g}_h + V_h$ a $p_h \in Q_h$ takové, že

$$\begin{aligned} c(\mathbf{u}_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + s(\{\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h\}, \{\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h\}) + b(\mathbf{v}_h, p_h) &= L(\mathbf{v}_h) & \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0 & \forall q_h \in Q_h, \end{aligned} \quad (4.33)$$

kde

$$s(\{\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h\}, \{\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h\}) = \sum_{K \in \tau_h} \delta_K ((\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h, (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{v}_h)_K .$$

Stabilizační parametry $\delta_K \geq 0$ volíme pomocí lokálního Péceletova čísla

$$\delta_K = \frac{h_K}{|\bar{\mathbf{u}}|_K} \xi(\text{Pe}_K), \quad (4.34)$$

kde h_K je velikost nejdelší strany elementu K a $\bar{\mathbf{u}}$ je referenční rychlost, viz [2],[35]. Absolutní hodnotu $|\bar{\mathbf{u}}|_K$ počítáme jako

$$|\bar{\mathbf{u}}|_K = \max_{\mathbf{x} \in K} |\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})| \approx \max \{|\bar{\mathbf{u}}(A)|, |\bar{\mathbf{u}}(B)|, |\bar{\mathbf{u}}(C)|\} .$$

Funkci $\xi(\text{Pe}_K)$ uvažujeme v podobě

$$\xi(\text{Pe}_K) = \min \left\{ 1, \frac{\text{Pe}_K}{3} \right\} ,$$

kde Pe_K vypočteme, viz (2.26) jako

$$\text{Pe}_K = \frac{\max_i |\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i|}{2\nu} ,$$

kde \mathbf{e}_i odpovídá směrovým vektorům stran daného elementu K . Linearizaci vztahu (4.33) provedeme podobně jako v (4.25) tak, aby platilo

$$\begin{aligned} c(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) + a(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h)_\Omega + s(\{\mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^{n+1}\}, \{\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h\}) + b(\mathbf{v}_h, p_h^{n+1})_\Omega &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_\Omega , \\ b(\mathbf{u}_h^{n+1}, q_h)_\Omega &= 0 . \end{aligned} \quad (4.35)$$

4.5 Numerické výsledky

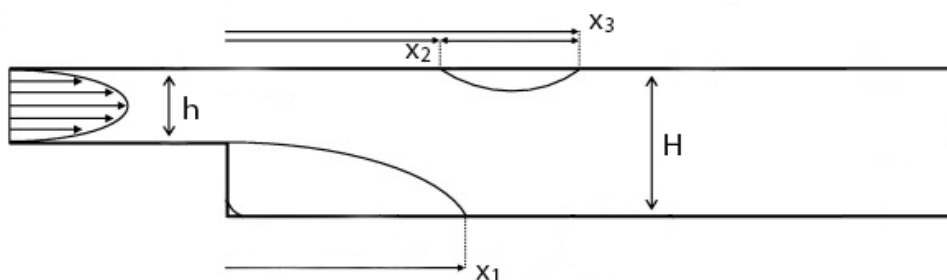
Navierovy–Stokesovy rovnice řešíme jak ve stacionárním (4.18), tak nestacionárním (4.26) tvaru. V první úloze s protisměrných schodem měříme délku odtržení proudu při proudění v oblasti zpětného schodu. Ve druhé úloze řešíme obtékání válce, nejprve stacionárně a následně nestacionárně a sledujeme hodnoty součinitele odporu c_d a součinitele vztlaku c_l . V poslední úloze ukážeme vliv stabilizace při obtékání profilu křídla NACA 0012 s větším Reynoldsovým číslem a zjistíme závislost c_l na úhlu náběhu.

Často používáme při řešení úloh ke kontrole výpočtu program *OpenFOAM*⁵. *OpenFOAM* je založený na MKO a na tzv. *cell centered* přístupu, u kterého jsou diskrétní hodnoty vztaženy k elementům triangulace (na rozdíl od MKP, kde jsou vztaženy k vrcholům). Navierovy–Stokesovy rovnice řešíme pomocí algoritmu SIMPLE (*Semi-implicit method for pressure linked equations*), který spočívá v sekvenčním řešení rovnic pro rychlost a tlak a v jejich následné korekci, více viz [38]. Konkrétně pracujeme s variantou SIMPLEC (*C - consistent*), která na elementu předpokládá téměř konstantní korekce rychlosti. Ve všech případech pracujeme s laminárním typem proudění.

⁵ *OpenFOAM* je CFD (*computational fluid dynamics*) výpočetní software, více viz [37].

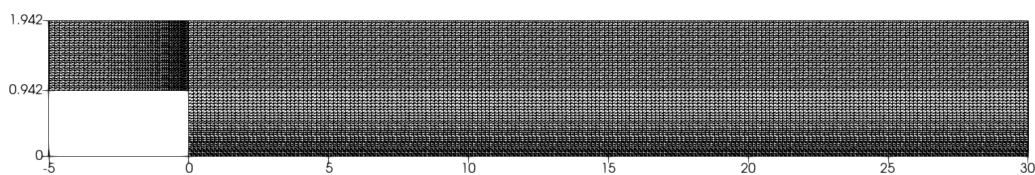
4.5.1 Proudění s protisměrným schodem

Uvažujeme oblast s protisměrným schodem na obr. 26. Výška oblasti je definována v závislosti na expanzním poměru $ER = H/h$, kde h je výška kanálu před schodem a H je výška kanálu za schodem, viz obr. 26. Délka horního kanálu je zvolena jako $5h$ a spodního kanálu jako $30h$, aby byly zachyceny veškeré hydrodynamické jevy. Na vstupu předepisujeme parabolický profil rychlosti s maximální rychlostí U_{\max} . Na stěnách oblasti uvažujeme *no slip* okrajovou podmínku a na výstupu *do-nothing* podmínku. Cílem úlohy je nalézt vzdálenosti x_1, x_2, x_3 na spodní a vrchní straně kanálu, které popisují oblasti odtržení proudu v závislosti na Reynoldsově čísle Re .



Obrázek 26: Schéma oblasti s protisměrným schodem

Abychom byli schopni porovnat výsledky s experimentálním řešením od Armalyho [39], uvažujeme $ER = 1,942$ a $h = 1$ m. Triangulace oblasti v měřítku 2:5 v x -ovém směru je zobrazena na obr. 27. Triangulace je dostatečně zjemněna tak, aby byl zachycen parabolický profil rychlosti, v oblasti dolního kanálu je potom lokálně zjemněna směrem ke spodní hraně k co nejpřesnějšímu zachycení vzdálenosti x_1 . Celkově je triangulace tvořena 12735 uzlovými body a 24864 trojúhelníky. Délka nejdelší strany elementů v dolním kanále je 0,15 m.

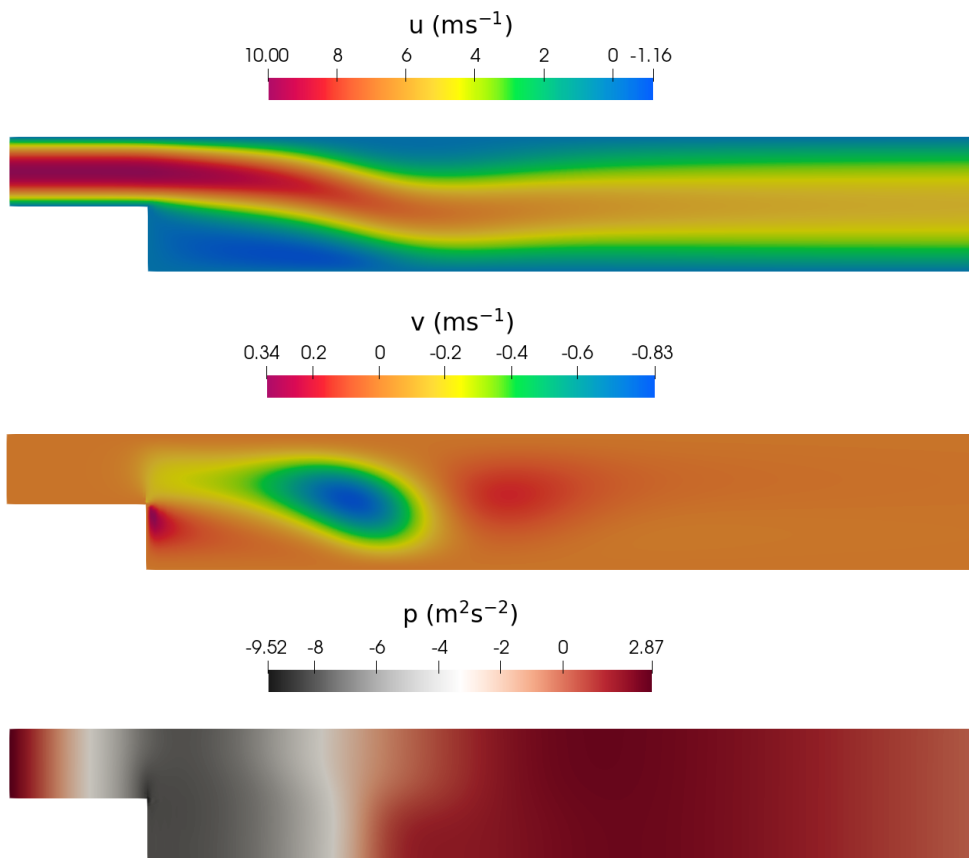


Obrázek 27: Triangulace oblasti s protisměrným schodem

Úlohu řešíme v rozsahu $Re = 100 - 1000$. Parabolická rychlost na vstupu odpovídá $U_{\max} = 10 \text{ ms}^{-1}$. Reynoldsovo číslo potom pro Navierovy–Stokesovy rovnice splňuje

$$Re = \frac{U_{\text{stř}} L_{\text{char}}}{\nu},$$

kde $U_{\text{stř}}$ je střední hodnota rychlosti na vstupu a pro parabolický profil je rovna $2/3 U_{\max}$. Charakteristický rozměr úlohy L_{char} je dán hydraulickým průměrem jako dvojnásobná výška vstupního kanálu, tj. $L_{\text{char}} = 2h$. Na obr. 28 je pro ukázkou v měřítku zobrazeno řešení úlohy pro $Re = 500$. V tab. 2 jsou potom uvedeny hodnoty naměřených vzdáleností x_1, x_2, x_3 v porovnání s výpočtem v *OpenFOAM*.

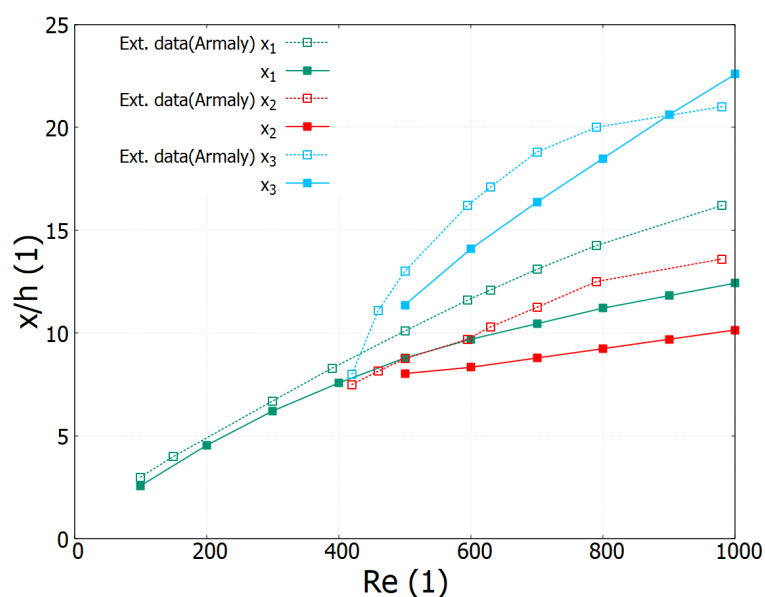
Obrázek 28: Řešení úlohy s protisměrným schodem pro $Re = 500$

Z tab. 2 pozorujeme několik věcí. K druhému odtržení proudu dochází zřejmě pro Re kolem 500 a vyšší. Výsledky pro vzdálenost prvního odtržení, tj. x_1 jsou ve velmi dobré shodě s výsledky z *OpenFOAM*. Nejvíce se odlišuje vzdálenost pro $Re = 200$ a to o přibližně 0,14 m. Délka druhého odtržení ($x_3 - x_2$) se oproti *OpenFOAM* průměrně liší o přibližně 0,6 m. Řešení v *OpenFOAM* začalo být pro Re vyšší než 800 nestabilní. To by mohlo být způsobeno např. nedostatečnou jemností sítě, viz [40], kde pozorují pro vyšší Re oscilace v numerickém řešení. S jemnější triangulací oscilace vymizely a bylo možné nalézt stacionární řešení. Obecně se potom pro tento typ úlohy, tj. proudění v oblasti s protisměrných schodem vedou diskuze, jestli je možné získat stacionární řešení pro Re větší než 800, více viz [40].

Na obr. 29 jsou do grafu vyneseny hodnoty získané numerickým výpočtem a experimentálním měřením z [39]. Nutno poznamenat, že experimentální hodnoty jsou odečteny z grafu v [39] pouze přibližně, takže je možné, že se reálné naměřené hodnoty mírně odlišují. Pro nízká Re vidíme, že se data dobře shodují s experimentálními. Pro vyšší Re , zhruba od 500 se potom numerická data od experimentu oddalují. Toto chování bude zřejmě důsledkem trojrozměrnosti úlohy, která byla v experimentu pozorována pro Re kolem 400 a větší, viz [39]. Numerické řešení by také mohlo být ovlivněno délkou kontrolní oblasti, resp. okrajovou podmínkou na výstupu, více viz [40]. Z obr. 30, na kterém jsou vyznačeny proudnice, totiž pozorujeme, že se oblasti odtržení pro vyšší Re k výtoku z oblasti přibližují.

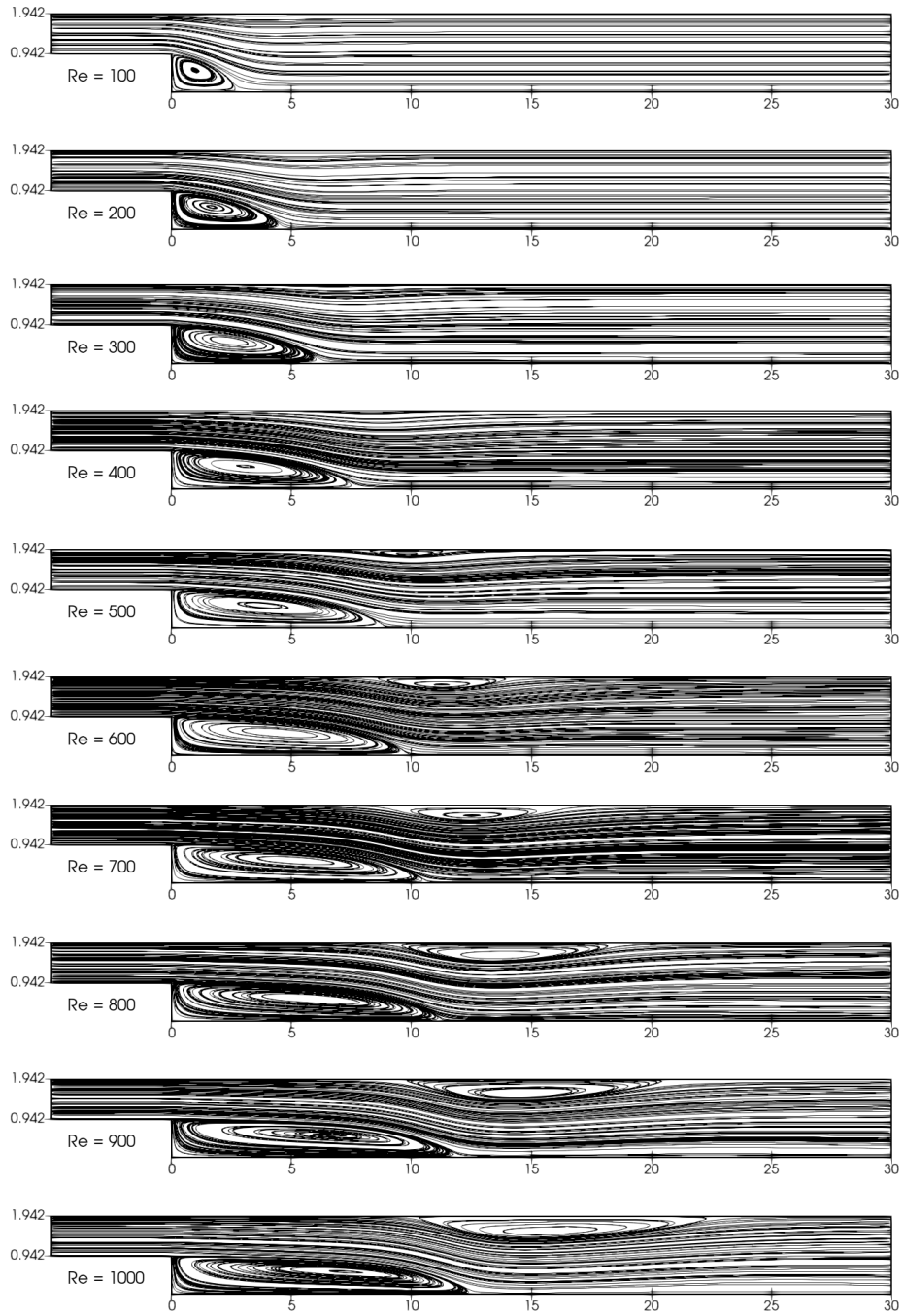
Re	x_1	$x_1 _{\text{OpenFOAM}}$	x_2	$x_2 _{\text{OpenFOAM}}$	x_3	$x_3 _{\text{OpenFOAM}}$
100	2.57950	2.56186	—	—	—	—
200	4.54361	4.39994	—	—	—	—
300	6.21943	6.07821	—	—	—	—
400	7.58169	7.57474	—	—	—	—
500	8.77657	8.78760	8.03361	8.33953	11.3668	10.9262
600	9.71456	9.71341	8.33603	8.49452	14.0778	13.7761
700	10.4677	10.5869	8.77676	8.94570	16.3673	16.0586
800	11.2011	11.2056	9.25133	9.24242	18.5020	18.0190
900	11.8036	—	9.69788	—	20.5851	—
1000	12.4292	—	10.1452	—	22.5637	—

Tabulka 2: Vzdálenosti odtržení proudu při proudění v kanále s protisměrným schodem

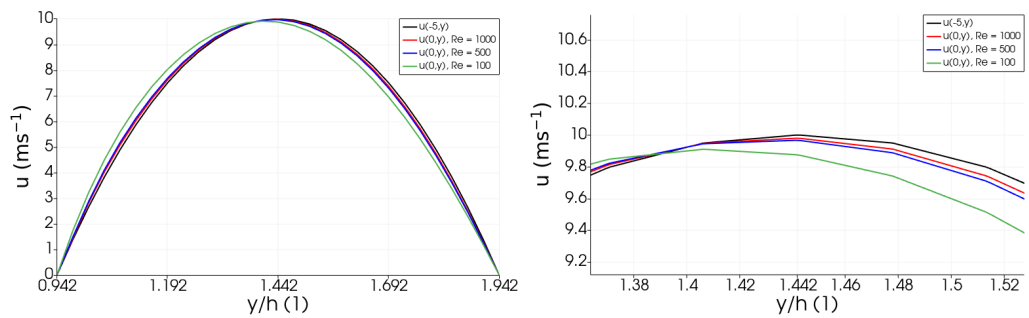


Obrázek 29: Závislost vzdáleností x_1, x_2, x_3 na Re v oblasti s protisměrným schodem

Za důležité považujeme také zmínit změnu profilu rychlosti v místě protisměrného schodu pro nízká Re . Na obr. 31 je vyneseno rychlostní profil na vstupu a potom v místě protisměrného schodu pro $Re = 100, 500$ a 1000 . Pro nízká Re pozorujeme, že se rychlostní profil mírně odchyluje od parabolického profilu na vstupu. Pro vyšší Re , u kterých převládá konvektivní přenos nad difúzním, tento efekt vymizí.



Obrázek 30: Proudnic v oblasti s protisměrným schodem v závislosti na Re



Obrázek 31: Rychlostní profil na vstupu do oblasti a v místě s protisměrným schodem

4.5.2 Obtékání válce

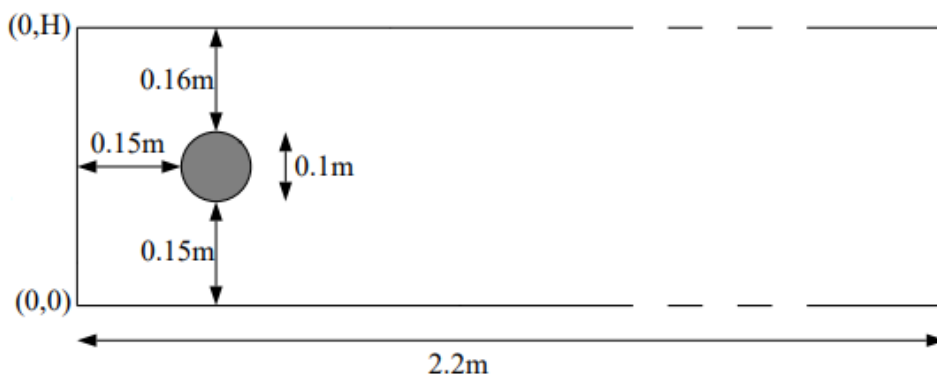
V další úloze řešíme proudění v kanále s výškou $H = 0,41$ m, uvnitř kterého je umístěn válec s průměrem $D = 0,1$ m, viz schéma na obr. 32, na kterém jsou uvedeny rozměry úlohy. Válec se nachází v místě $(0,2; 0,2)$ m. Na vstupu do oblasti je opět předepsán parabolický profil rychlosti s maximální rychlostí U_{\max} . Na hranici kanálu a na válci uvažujeme *no slip* okrajovou podmínku a na výstupu *do nothing* podmínku. Úlohu řešíme nejprve pro Reynoldsovo číslo $Re = 20$ a očekáváme stacionární řešení, po té pro $Re = 100$ a sledujeme nestacionární průběh. Stejně jako v předchozí úloze splňuje Re pro bezrozměrné Navierovy–Stokesovy rovnice vztah

$$Re = \frac{U_{\text{stř}} L_{\text{char}}}{\nu},$$

kde $U_{\text{stř}} = 2/3 U_{\max}$ a $L_{\text{char}} = D$. Zároveň na válci počítáme součinitele odporu c_d a vztlaku c_l jako

$$\begin{aligned} c_d &= \frac{2}{U_{\text{stř}}^2 D} F_d, \\ c_l &= \frac{2}{U_{\text{stř}}^2 D} F_l, \end{aligned} \tag{4.36}$$

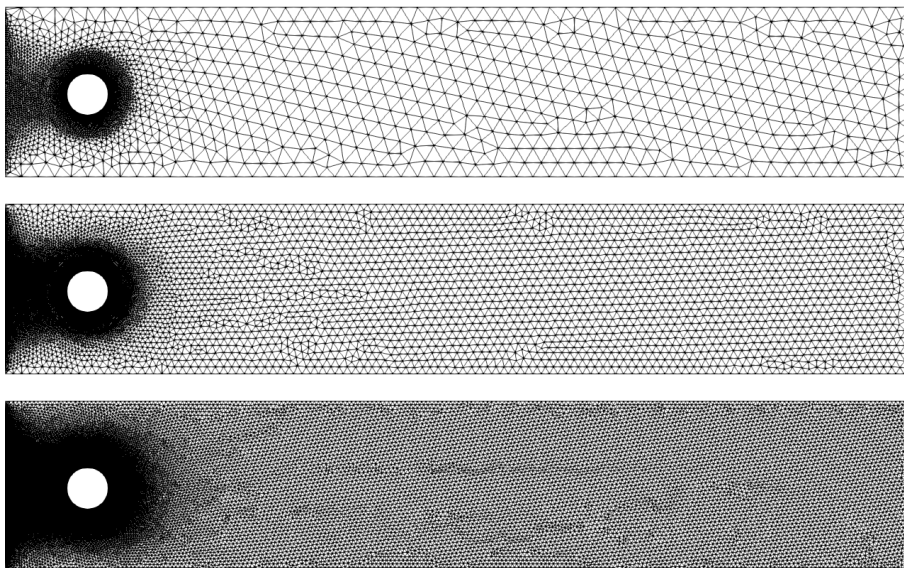
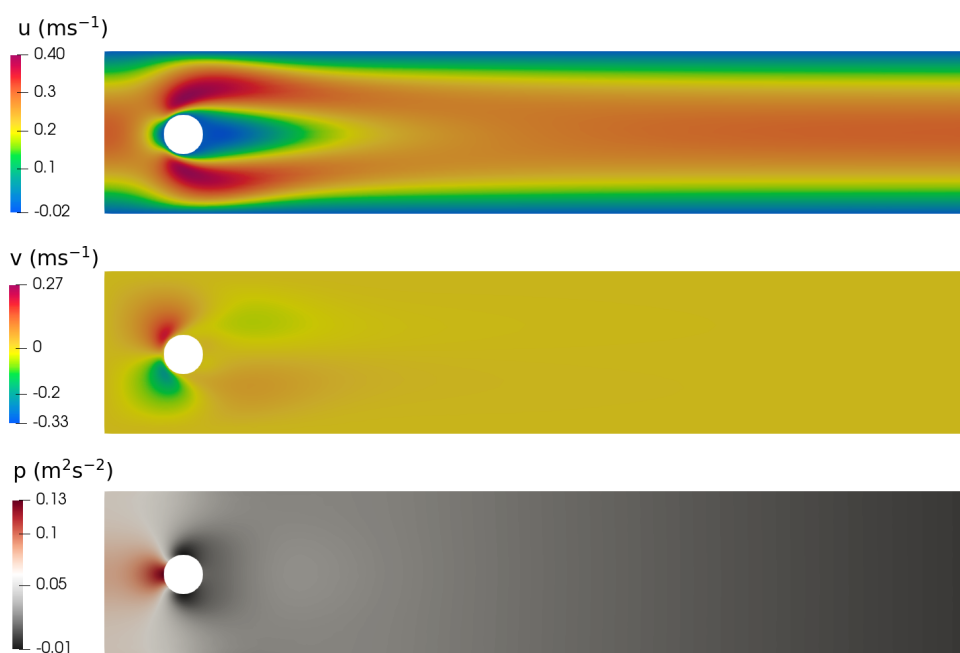
kde F_d, F_l je odporová resp. vztlaková síla, viz kap. 4.3.



Obrázek 32: Schéma kanálu s obtékaným válcem

I) Stacionární výpočet pro $Re = 20$

V prvním případě uvažujeme $Re = 20$ a $U_{\max} = 0,3 \text{ ms}^{-1}$. Mimo c_d, c_l počítáme také změnu tlaku Δp mezi přední a zadní stranou válce, tj. mezi místy $(0,15; 0,2)$ m a $(0,25; 0,2)$ m. Úlohu řešíme na třech triangulacích $\tau_{h_1} - \tau_{h_3}$, které jsou zobrazeny na obr. 33. Triangulace jsou lokálně zjemněné na vstupu, abychom byli schopni zachytit parabolický profil rychlosti a potom kolem obtékaného válce. Řešení úlohy je na triangulaci τ_{h_2} zobrazeno na obr. 34. V tab. 3, 4 uvádíme vypočítané hodnoty c_d a c_l prostřednictvím integrálu přes elementy K , viz (4.31), integrálu přes hranici B , viz (4.29) a v *OpenFOAM*.

Obrázek 33: Triangulace $\tau_{h_1}, \tau_{h_2}, \tau_{h_3}$ na kontrolní oblasti - kanál s válcemObrázek 34: Stacionární řešení úlohy obtékání válce pro $Re = 20$ na τ_{h_2}

V [41] byly pro tuto úlohu získány hledané hodnoty pomocí spektrální metody vyššího řádu, a to

$$c_d = 5.57953523384, \quad c_l = 0.010618948146, \quad \Delta p = 0.11752016697.$$

Tyto hodnoty považujeme za referenční. Z výsledků pozorujeme, že na jemnějších triangulacích dosahujeme přesnějších výsledků. Nejlepší shody c_d s referenční hodnotou potom bylo dosaženo integrací po hranici B . Zbylé dvě metody se potom od referenční hodnoty liší na nejjemnější triangulaci přibližně o 0,003. Naopak c_l je prostřednictvím integrace přes B vzdáleno od referenční hodnoty nejdále. Nejlepší shodu c_l potom vidíme pro *OpenFOAM* výpočet. V dalším postupu tak

volíme výpočet c_d, c_l integrací přes elementy K . V tab. 5 je porovnání Δp . Nejpřesnější výsledek na nejjemnější triangulaci se od referenční hodnoty Δp liší o přibližně 0,0001.

počet vrcholů	počet trojúhelníků	$c_d _{\text{integrál přes } K}$	$c_d _{\text{integrál přes } B}$	$c_d _{\text{OpenFOAM}}$
4334	8351	5.625095	5.599554	5.481330
17317	33997	5.590336	5.586899	5.554673
49126	96975	5.582684	5.579340	5.575898

Tabulka 3: Výsledky c_d pro stacionární řešení úlohy obtékání válce s $Re = 20$

počet vrcholů	počet trojúhelníků	$c_l _{\text{integrál přes } K}$	$c_l _{\text{integrál přes } B}$	$c_l _{\text{OpenFOAM}}$
4334	8351	0.015627	0.05686	0.007182
17317	33997	0.013142	0.032040	0.009886
49126	96975	0.011695	0.021211	0.010155

Tabulka 4: Výsledky c_l pro stacionární řešení úlohy obtékání válce s $Re = 20$

počet vrcholů	počet trojúhelníků	Δp	$\Delta p _{\text{OpenFOAM}}$
4334	8351	0.118878	0.1143391
17317	33997	0.117783	0.1172126
49126	96975	0.117624	0.1173897

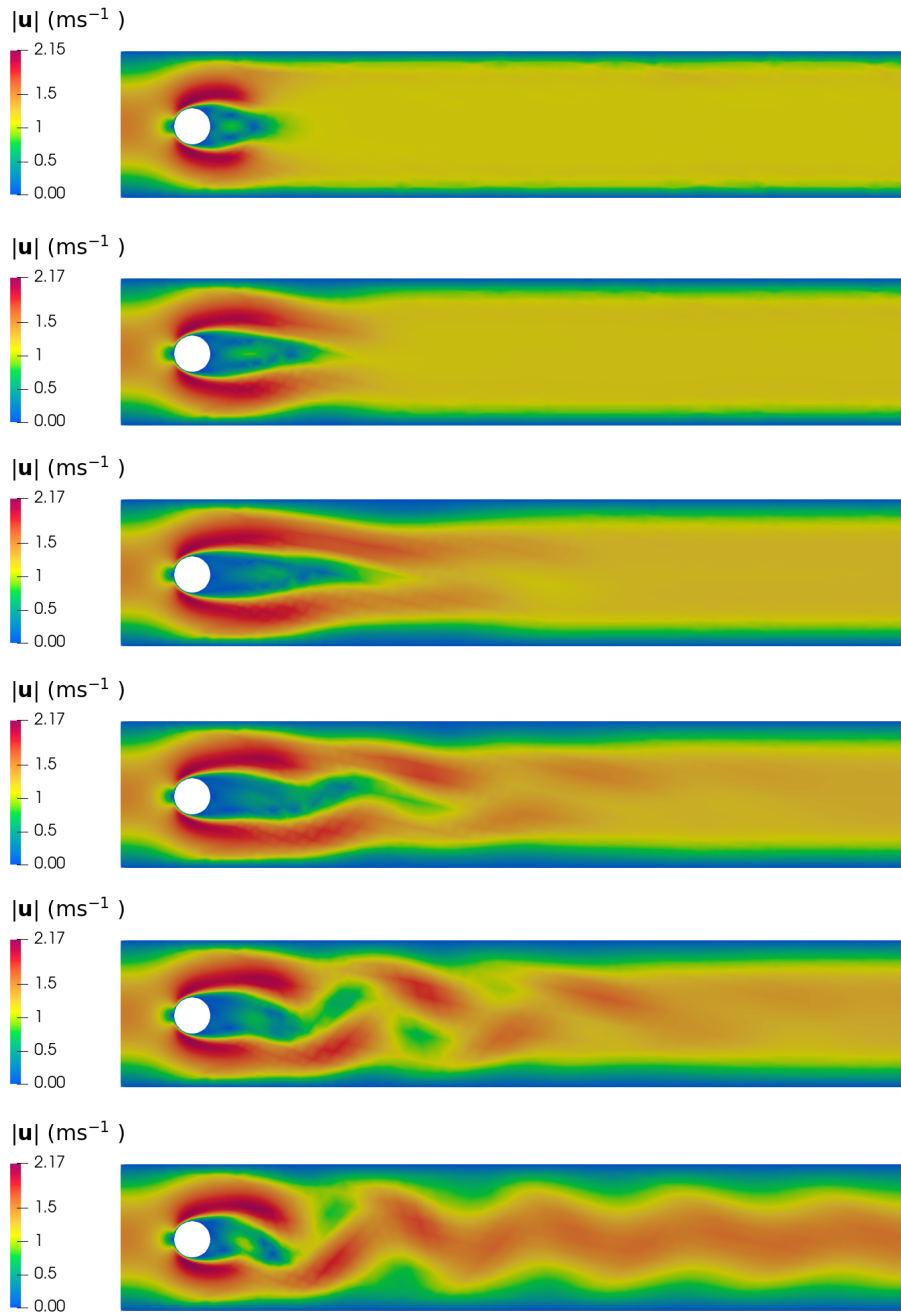
Tabulka 5: Výsledky Δp pro stacionární řešení úlohy obtékání válce s $Re = 20$

II) Nestacionární výpočet pro $Re = 100$, periodický průběh

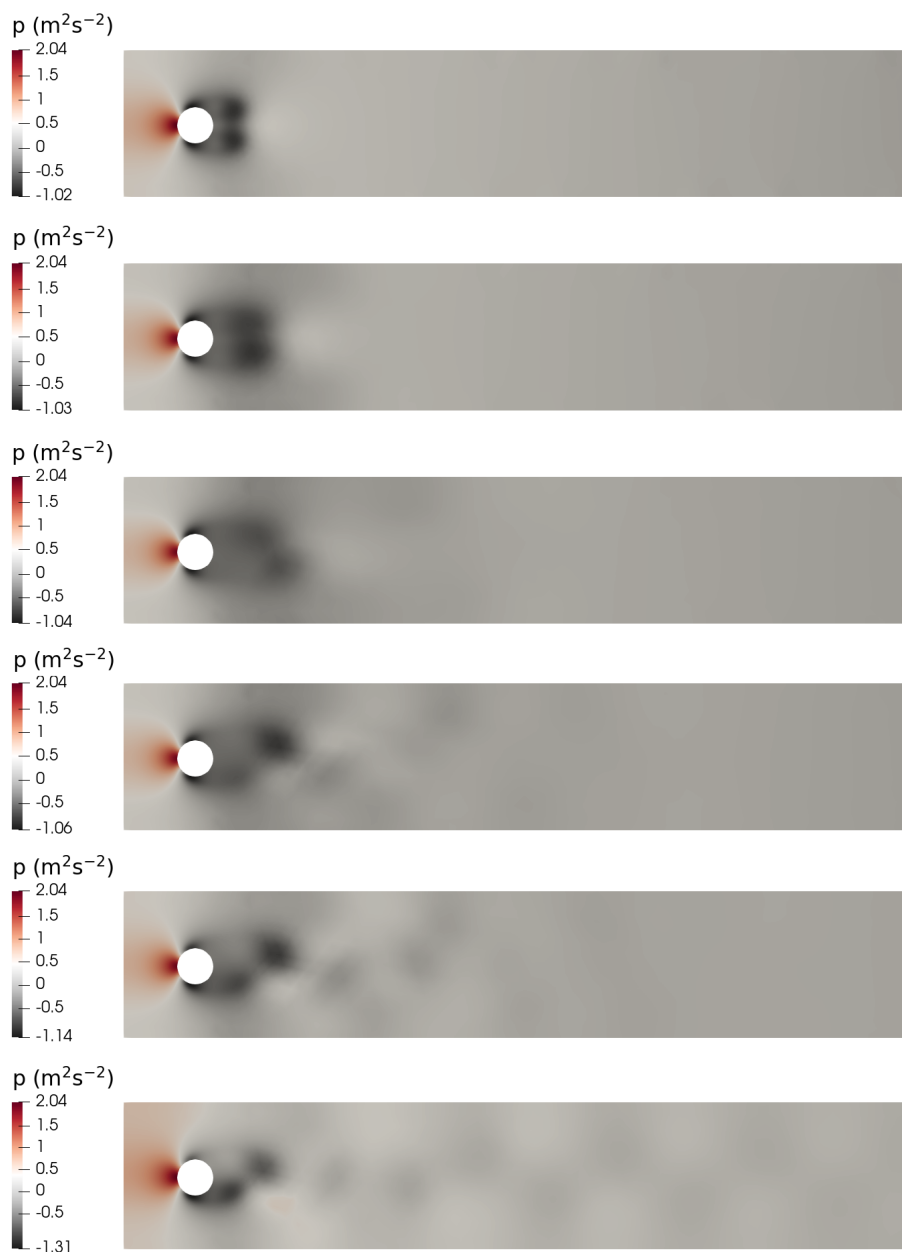
Dále úlohu řešíme pro $Re = 100$ a $U_{\max} = 1,5 \text{ ms}^{-1}$ a očekáváme nestacionární chování. Tentokrát hledáme maximální a minimální koeficient odporu $c_{d,\max}$ a $c_{d,\min}$, podobně i koeficient vztlaku $c_{l,\max}$, $c_{l,\min}$. Pro periodu, která začíná časem, kdy je c_l nejmenší a končí časem, kdy je c_l znovu nejmenší, dostaneme frekvenci f . Tu potom použijeme pro výpočet Strouhalova čísla St , viz (2.27) jako

$$St = \frac{f D}{U_{\text{stř}}}.$$

Při časové diskretizaci používáme implicitní Eulerovo schéma (IE) se třemi různými časovými kroky, a to $\Delta t = 1/100 \text{ s}, 1/200 \text{ s}$ a $1/400 \text{ s}$. Výsledky porovnááme s numerickými daty Dortmundské univerzity [42]. Jejich řešič je založen na prostorové diskretizaci pomocí konečných prvků ($\mathcal{Q}_2, \mathcal{P}_1^{\text{disc}}$), více viz [36]. Jejich výpočetní triangulace měla 33696 uzlových bodů a 33280 elementů. My řešíme úlohu na triangulaci τ_{h_1} se 4334 uzlovými body a 8351 trojúhelníky. K časové diskretizaci používají v [42] Crankovo–Nicolsonovo schéma. Na obr. 35 a obr. 36 je zobrazen vývoj rychlostního, resp. tlakového pole v kontrolní oblasti. Z časového průběhu vidíme, že za válcem vzniká vírová stezka.

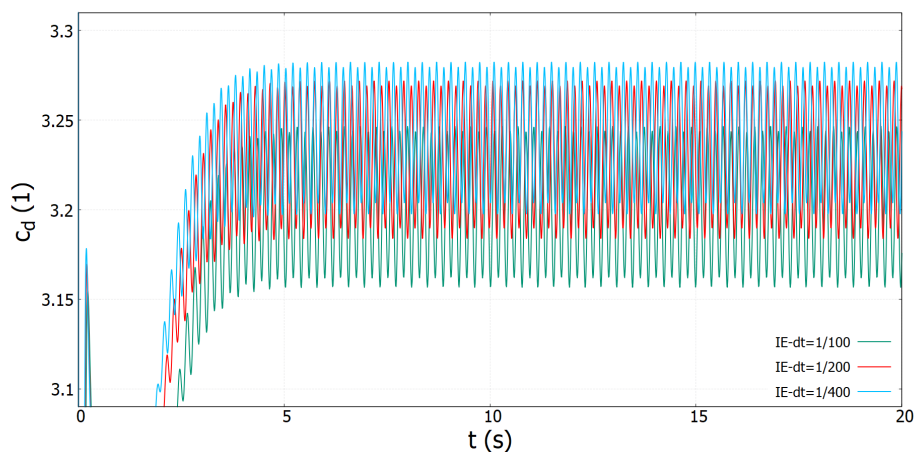


Obrázek 35: Vývoj rychlostního pole při nestacionárním řešení pro $\Delta t = 1/400$ s na τ_{h_1} , $\text{Re} = 100$

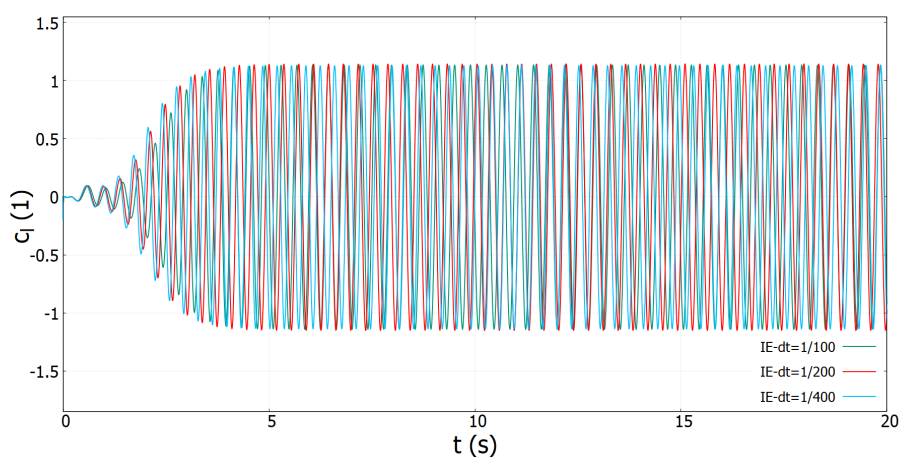


Obrázek 36: Vývoj tlakového pole při nestacionárním řešení pro $\Delta t = 1/400$ s na τ_{h1} , $Re = 100$

Na obr. 37 a 38 je vynesena průběh c_d a c_l pro různá Δt . Z průběhu jsou potom do tab. 6 a tab. 7 odečteny maximální a minimální hodnoty pro c_d, c_l . Porovnáním hodnot c_d s externími daty z [42] pozorujeme, že nejméně se odlišují výsledky pro největší časový krok, a to o 0,0073 pro $c_{d,\min}$ a o 0,0336 pro $c_{d,\max}$. Neočekávaně se nejvíce odlišují hodnoty pro nejmenší časový krok. Pro hodnoty $c_{l,\min}$ a $c_{l,\max}$ pozorujeme chování opačné. V případě St v tab. 8 se hodnoty pro menší Δt přibližují externím hodnotám z [42]. K jasnějšímu výsledku by napověděly další výpočty s menším časovým krokem, především ale potom řešení na jemnější triangulaci.



Obrázek 37: Průběh c_d při nestacionárním řešení pro různé Δt , $Re = 100$



Obrázek 38: Průběh c_l při nestacionárním řešení pro různé Δt , $Re = 100$

Δt	$c_{d,min}$	$c_{d,min} _{Ext. data}$	$c_{d,max}$	$c_{d,max} _{Ext. data}$
1/100	3.157	3.1497	3.246	3.2124
1/200	3.184	3.1494	3.272	3.2122
1/400	3.198	3.1493	3.282	3.2122

Tabulka 6: Min/max c_d pro nestacionární řešení pro různé Δt , $Re = 100$

Δt	$c_{l,min}$	$c_{l,min} _{Ext. data}$	$c_{l,max}$	$c_{l,max} _{Ext. data}$
1/100	-1.142	-1.0169	1.134	0.9859
1/200	-1.149	-1.0211	1.141	0.9818
1/400	-1.136	-1.0206	1.127	0.9860

Tabulka 7: Min/max c_l pro nestacionární řešení pro různé Δt , $Re = 100$

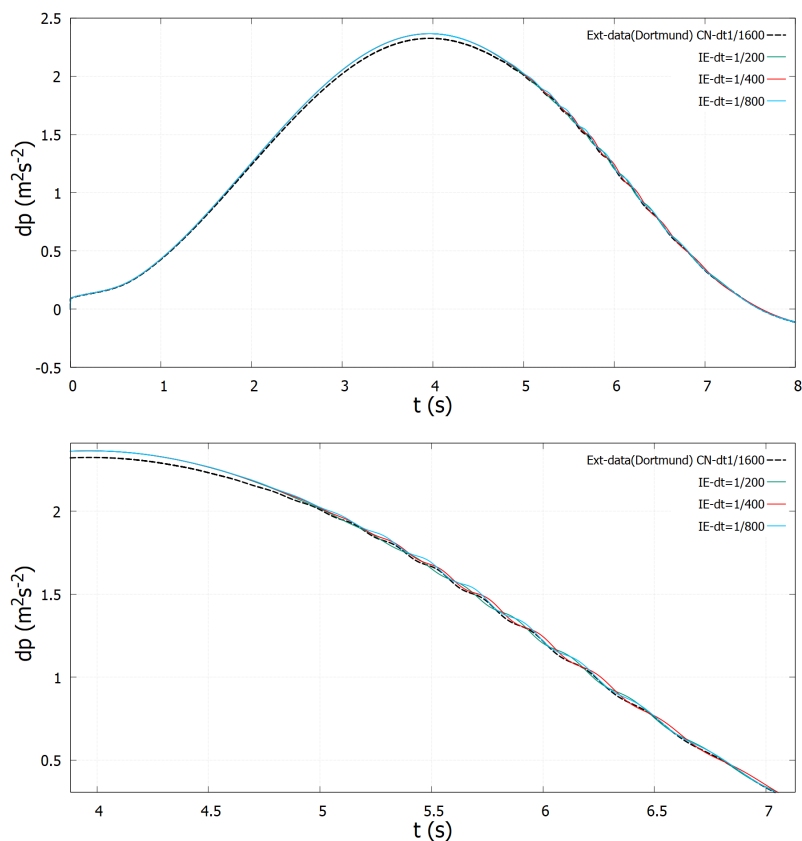
Δt	$1/f$	$1/f _{Ext. data}$	St	St $ _{Ext. data}$
1/100	0.38	0.33	0.263	0.303
1/200	0.36	0.33	0.278	0.303
1/400	0.35	0.33	0.286	0.303

Tabulka 8: Délka periody $1/f$ a St pro nestacionární řešení pro různé Δt , $Re = 100$

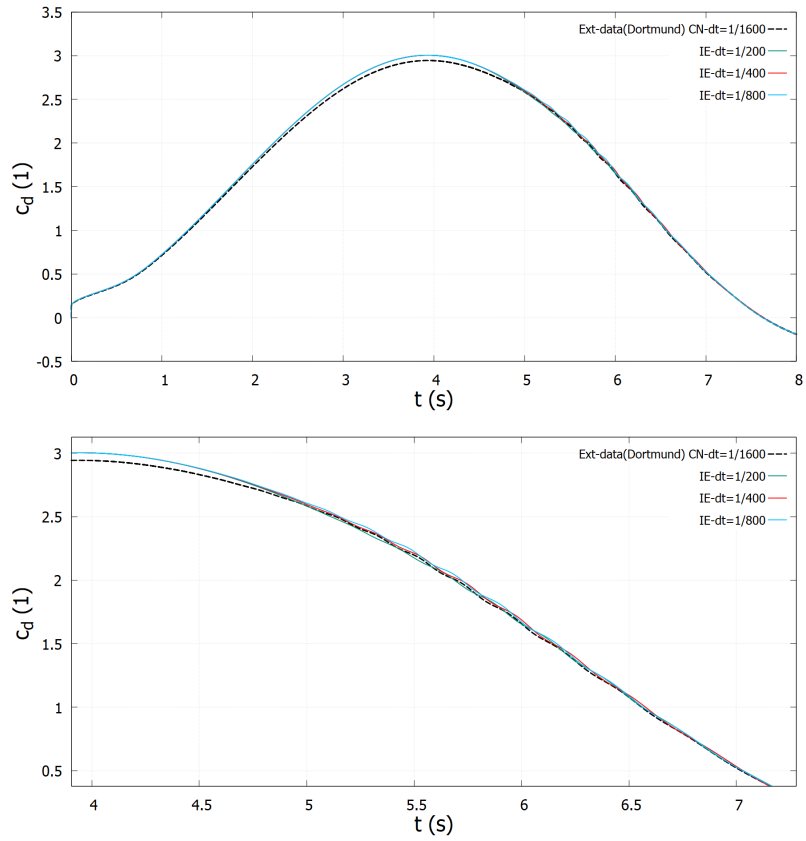
III) Nestacionární výpočet pro $Re = 100$, časově závislá okrajová podmínka

Kontrolní oblast s obtékaným válcem na závěr využijeme k výpočtu, kde se rychlost na vstupu mění s časem, tj. $U_{\max}(t) = 1,5 \sin(\pi t/8)$. Úlohu řešíme pro $Re = 100$ v časovém intervalu do $T = 8$ s a hledáme $c_{d,\max}$, $c_{l,\max}$ a časy $t(c_{d,\max})$, $t(c_{l,\max})$, kdy jich bylo dosaženo. Stejně jako ve stacionárním případě navíc hledáme Δp v konečném čase. Výsledky opět porovnáváme s numerickými daty od Dortmundské univerzity [43], kterých bylo dosaženo na triangulaci s konečnými prvky (\mathcal{Q}_2 , $\mathcal{P}_1^{\text{disc}}$) o 133952 uzlových bodů a 133120 elementech (oproti triangulaci τ_{h_1} se 4334 uzlovými body a 8351 trojúhelníky). K časové diskretizaci bylo v [43] použito Crankovo–Nicolsonovo schéma (CN) pro $\Delta t = 1/1600$ s, v porovnání s implicitním Eulerovým schématem (IE), které jsme použili k výpočtu postupně pro $\Delta t = 1/100$ s, $1/200$ s a $1/400$ s.

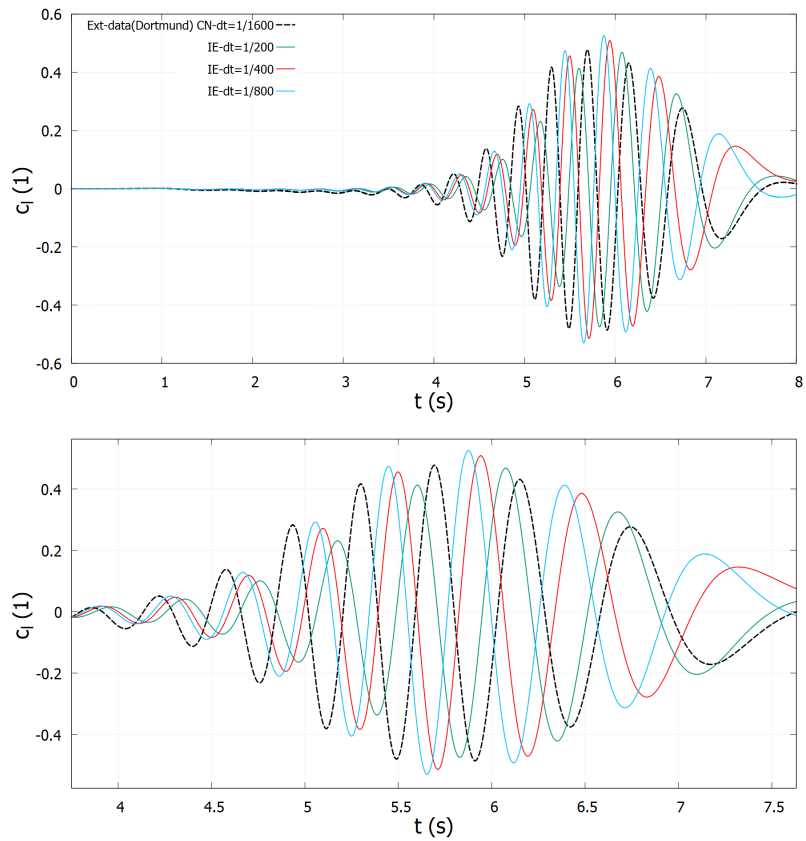
Z průběhu Δp na obr. 39 a průběhu c_d na obr. 40 pozorujeme, že vypočtené řešení se velmi dobře shoduje s externími daty. Největší odlišnosti nastávají pro časový interval $t = 4–7,5$ s, což je nejvíce vidět na průběhu c_l na obr. 41. Se zmenšujícím Δt se blížíme k numerickým hodnotám c_l z [43]. To dokazují i hodnoty $c_{l,\max}$ v tab. 9. Naopak se zmenšujícím Δt se $c_{d,\max}$ mírně od referenčních hodnot vzdaluje. Toto chování považujeme jako důsledek hrubé triangulace. Hodnoty Δp v $t = 8$ s jsou pro malé Δt ve velmi dobré shodě s referenčními.



Obrázek 39: Průběh Δp při nestacionárním řešení pro různé Δt do $t = 8$ s, $Re = 100$



Obrázek 40: Průběh c_d při nestacionárním řešení pro různé Δt do $t = 8$ s, $Re = 100$



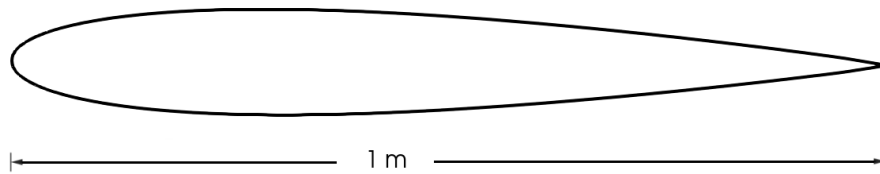
Obrázek 41: Průběh c_l při nestacionárním řešení pro různé Δt do $t = 8$ s, $Re = 100$

Δt	$t(c_{d,\max})$	$c_{d,\max}$	$t(c_{l,\max})$	$c_{l,\max}$	$\Delta p(t = 8)$
1/200	3.935000	3.003909	6.075000	0.468311	-0.109763
1/400	3.935000	3.004006	5.940000	0.508502	-0.109617
1/800	3.933750	3.004064	5.875000	0.524998	-0.111318
1/1600 _{Ext. data}	3.9365625	2.943764	5.6928125	0.477488	-0.111541

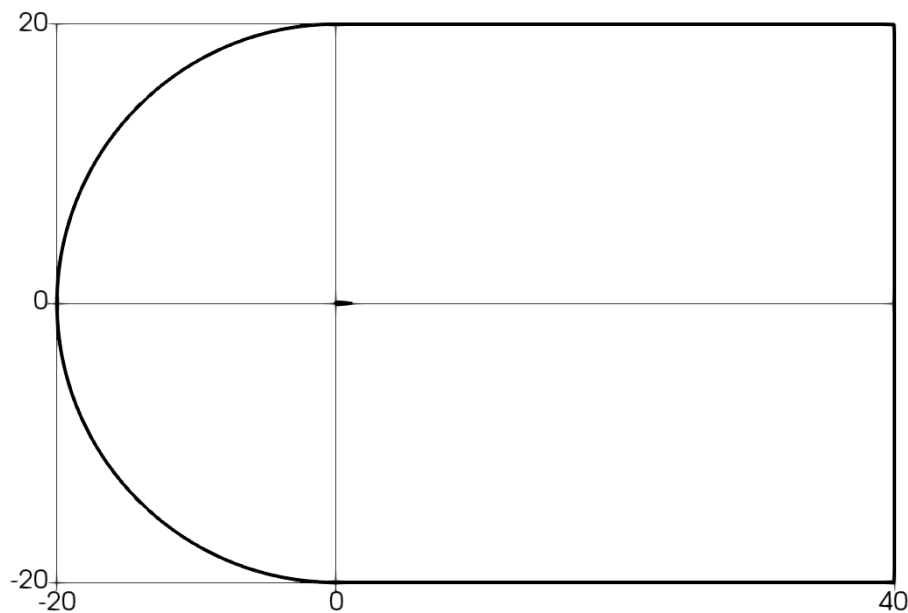
Tabulka 9: Max c_d, c_l a $\Delta p(t = 8)$ pro nestacionární řešení pro různé Δt , $Re = 100$

4.5.3 Obtékání profilu křídla NACA 0012

V poslední úloze studujeme obtékání kolem symetrického profilu křídla NACA 0012 s délkou tělivity $c = 1$ m, viz obr. 42. Sledujeme závislost výsledků na stabilizaci pomocí *streamline diffusion*, viz kap. 4.4. Pokusíme se zjistit vliv úhlu náběhu α na součiniteli vztlaku c_l . Výpočetní oblast je zobrazena na obr. 43. Na půlkruhové vstupní části předepíšeme konstantní rychlost $U_\infty = 10 \text{ ms}^{-1}$, na výstupu potom *do-nothing* okrajovou podmínku. Na profilu křídla aplikujeme *no slip* okrajovou podmínku. Na spodní a horní části oblasti uvažujeme tzv. *free slip* okrajovou podmínku, tj. rychlost má na hranici nulovou pouze normálovou složku (na rozdíl od *no slip*, kdy má nulovou i tečnou složku).



Obrázek 42: Profil křídla NACA 0012

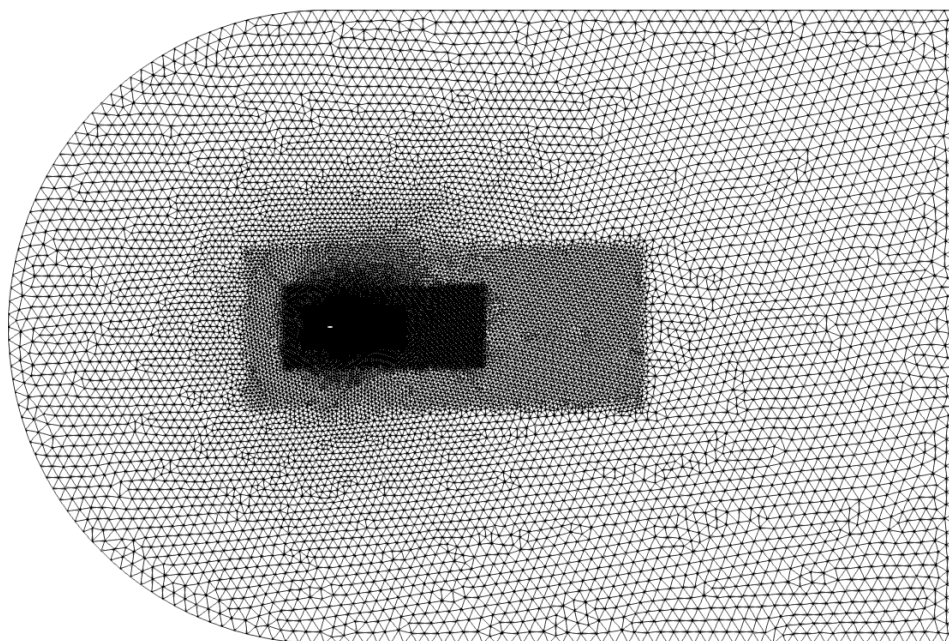


Obrázek 43: Kontrolní oblast pro obtékání profilu křídla NACA 0012

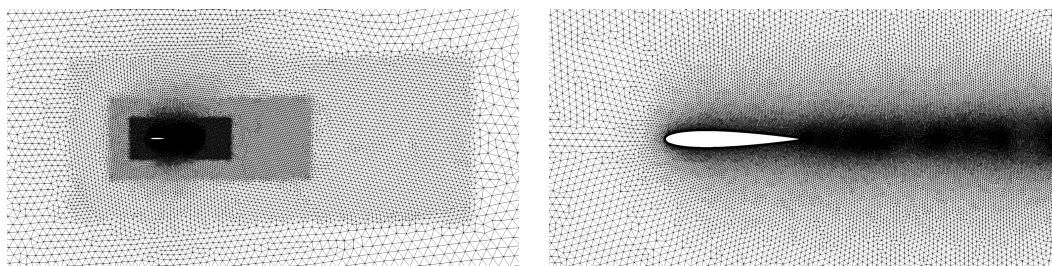
Úlohu nejprve řešíme na čtyřech různých triangulacích $\tau_{h_1} - \tau_{h_4}$, z nichž nejjemnější triangulace τ_{h_4} je zobrazena na obr. 44 a její detail na obr. 45. Vlastnosti tekutiny odpovídají $Re = 3000$, tj.

$$Re = \frac{U_\infty L_{\text{char}}}{\nu},$$

kde $L_{\text{char}} = c$. Úhel náběhu nejprve volíme $\alpha = 0$ a na triangulacích $\tau_{h_1} - \tau_{h_4}$ počítáme c_l . Kvůli symetrickému profilu křídla očekáváme hodnoty blízké nule.



Obrázek 44: Triangulace τ_{h_4} pro úlohu obtékání křídla NACA 0012

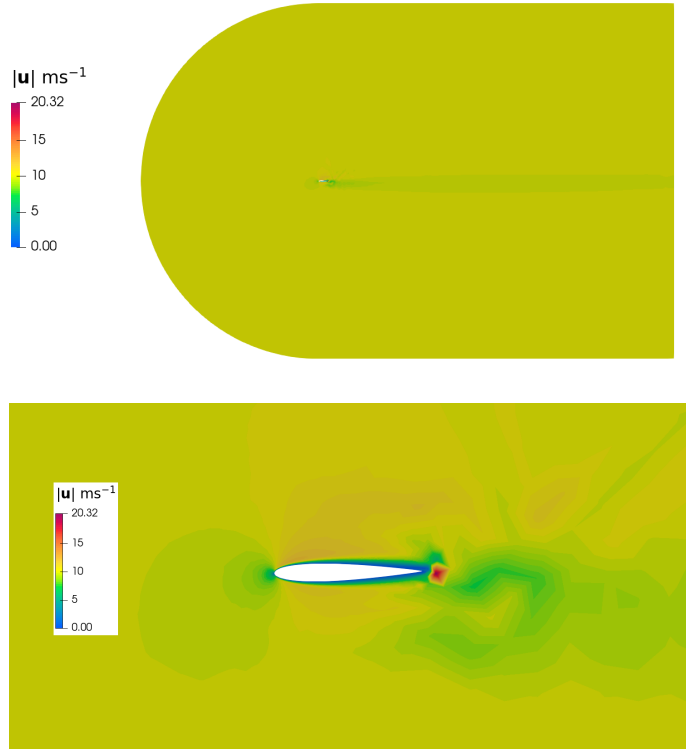


Obrázek 45: Zjemnění triangulace τ_{h_4} v blízkosti profilu křídla NACA 0012

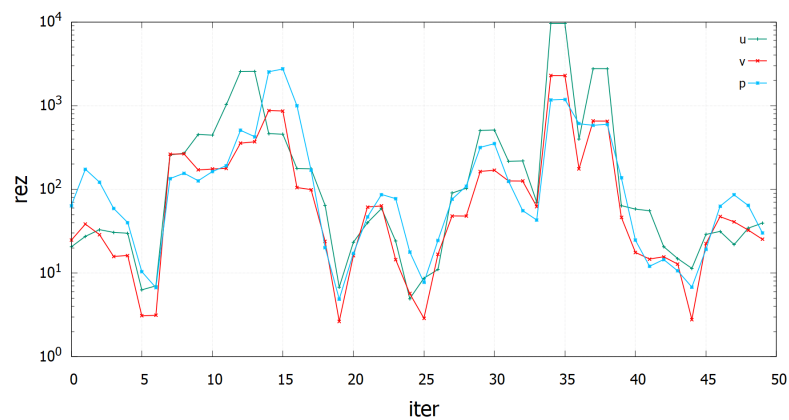
Z tab. 10 vidíme, že hodnoty c_l se skutečně k nule na symetrickém profilu přibližují. Výjimkou je nejhrubší triangulace, kde pozorujeme vliv stabilizace. Výpočet c_l bez stabilizace je na τ_{h_1} zřejmě nepřesný. Rychlostní pole bez stabilizace na obr. 46 totiž není symetrické a v řešení se objevují numerické artefakty, viz průběh reziduí pro řešení bez stabilizace na obr. 47. Oproti tomu stabilizované řešení konverguje a na obr. 48 vykazuje výraznější shodu s reálným chováním. Je ale zřejmé, že i stabilizované řešení na hrubé síti je málo přesné. Z tab. 10 potom vidíme, že s jemnější triangulací se význam stabilizace vytratí. Přesnější řešení rychlostního a tlakového pole, zejména v oblasti úplavu je zobrazeno na nejjemnější triangulaci na obr. 49.

počet vrcholů	počet trojúhelníků	$c_l _{\text{bez stabilizace}}$	$c_l _{\text{stabilizace SD}}$	$c_l _{\text{OpenFOAM}}$
7385	14000	0.115340	0.016701	-0.000808
14756	28669	0.000276	-0.000113	0.004260
29734	58580	-0.000308	0.000280	0.000962
59521	118154	-0.000029	0.000731	0.003337

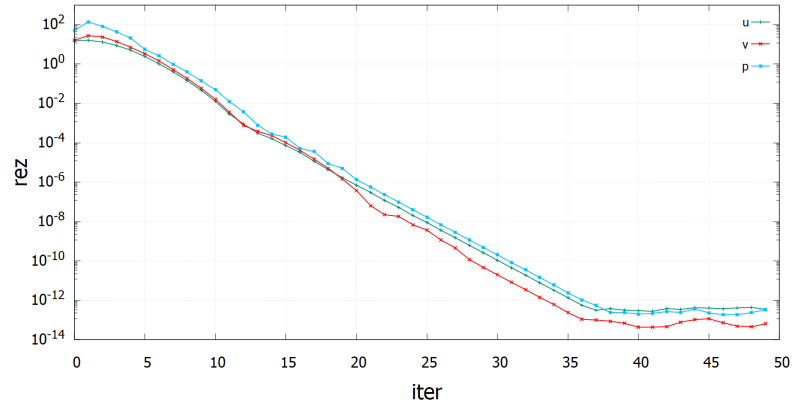
Tabulka 10: Výsledky c_l pro triangulace $\tau_{h_1} - \tau_{h_4}$ v oblasti obtékání profilu křídla NACA 0012, $Re = 3000$



Obrázek 46: Řešení obtékání profilu křídla NACA 0012 na triangulaci τ_{h_1} bez stabilizace, $Re = 3000$

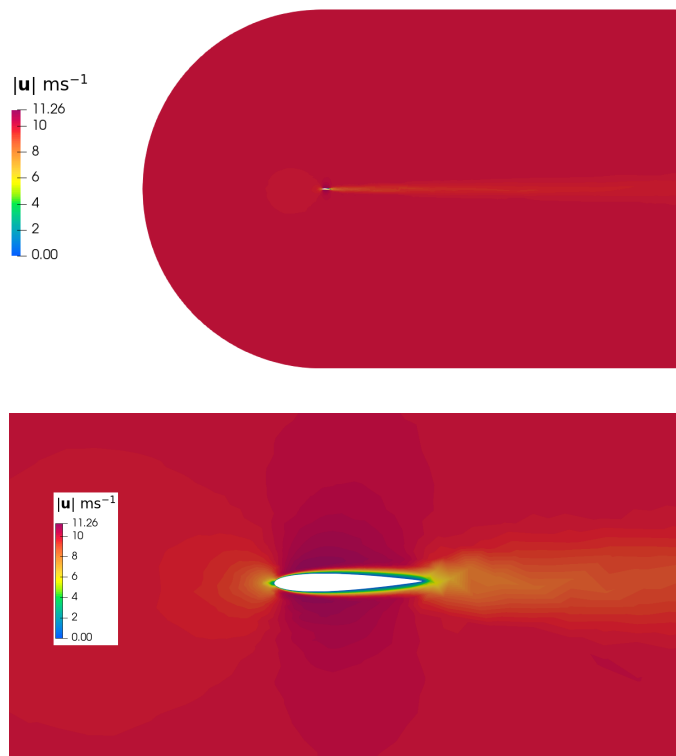


(i) bez stabilizace

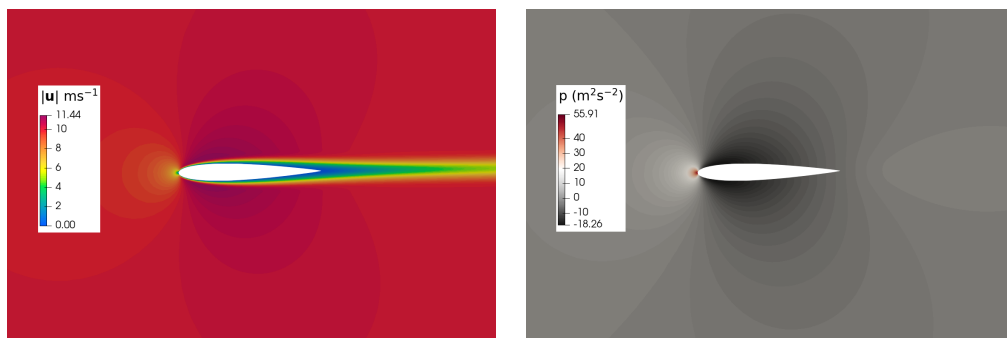


(ii) se stabilizací

Obrázek 47: Reziduum pro úlohu obtékání křídla NACA 0012 na τ_{h_1} , $Re = 3000$



Obrázek 48: Řešení obtékání profilu křídla NACA 0012 na triangulaci τ_{h_1} se stabilizací, $Re = 3000$

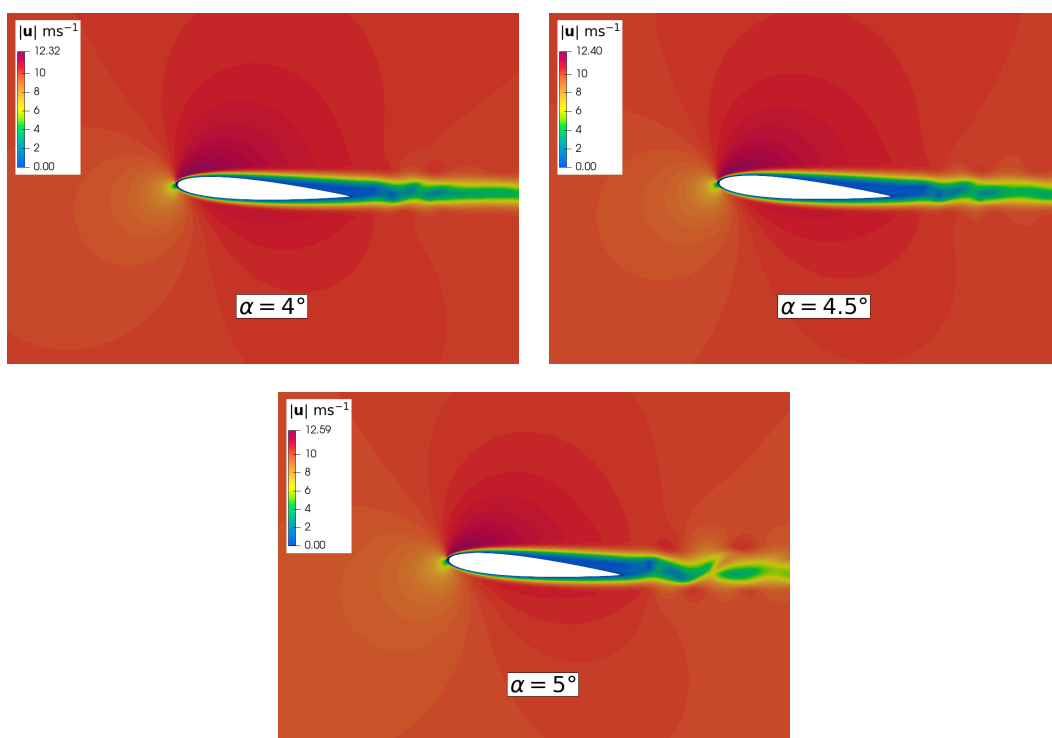


Obrázek 49: Rychlostní a tlakové pole v oblasti obtékání profilu křídla NACA 0012 na τ_{h_4} , $Re = 3000$

V dalším postupu bylo studováno několik konfigurací změnou úhlu náběhu α . Pro výpočet uvažujeme triangulaci τ_{h_4} , viz obr. 44. V tab. 11 jsou uvedeny hodnoty c_l pro $\alpha < 4^\circ$. Z výsledků pozorujeme, že podle očekávání s rostoucím α roste c_l . Nejmenší rozdíl vidíme mezi výsledky c_l bez stabilizace a výsledky z *OpenFOAM*, průměrně 7%. Pro výpočet c_l se stabilizací je potom rozdíl průměrně 15%. Přidáním stabilizačního členu tak vnášíme do výpočtu určitou chybu. Stacionární řešení přestala pro $\alpha > 3.5^\circ$ konvergovat. To jsme ověřili výpočtem v *OpenFOAM*, kdy se řešení začalo stávat nestacionárním, viz obr. 50.

α	$c_l _{\text{bez stabilizace}}$	$c_l _{\text{stabilizace SD}}$	$c_l _{\text{OpenFOAM}}$
0.5°	0.022995	0.021142	0.026597
1°	0.045403	0.042206	0.049702
1.5°	0.067234	0.060641	0.072579
2°	0.087731	0.081978	0.092172
2.5°	0.107157	0.099344	0.117331
3°	0.124184	0.112302	0.133256
3.5°	0.139003	0.124498	0.147471

Tabulka 11: Závislost c_l na α pro profil křídla NACA 0012, $Re = 3000$



Obrázek 50: Vznik nestabilního řešení v *OpenFOAM* pro $\alpha > 3.5^\circ$ při obtékání profilu křídla NACA 0012, $Re = 3000$

Závěr

Postupně byly v práci pomocí MKP odvozeny diskrétní formulace vlnové rovnice pro akustické poruchy, vlnové rovnice ve frekvenční oblasti, tj. Helmholtzovy rovnice, Stokesova problému a Navierových–Stokesových rovnic. Cílem práce bylo si tyto rovnice, které popisují akustické a hydrodynamické jevy osvojit a vytvořit nástroj pro jejich kontrolu. K tomu byla použita vlastní implementace MKP v programovacím jazyce C, která mimo jiné využívá volně dostupného softwaru *Gmsh* pro tvorbu sítě, knihovny *UMFPACK* pro řešení soustav algebraických rovnic a softwaru *Paraview* pro vizualizaci výsledků.

Prostory konečných prvků jsou diskutovány pro skalární problém ve 3D a pro vektorový problém ve 2D. V akustických úlohách jsme jako elementy použili pro numerické výpočty čtyřstěny s lineárními bázovými funkcemi. V úlohách proudění nestlačitelné tekutiny jsme uvažovali mini element, který pro sdružený problém splňuje tzv. inf-sup podmínku.

Na úloze pro vlnovou rovnici nejprve demonstrujeme vliv nulové Neumannovy okrajové podmínky, která akustické vlny odráží a radiační Sommerfeldovy okrajové podmínky, která vlny na hranici částečně absorbuje. Této znalosti jsme potom využili při zkoumání lidského vokálního traktu, kde jsme pomocí DFT získali ze signálu frekvenční spektrum a našli rezonanční frekvence. Rezonanční frekvence se ve spektru do 3 kHz vyskytly v našem modelu tři, a to pro $f = 250, 1130$ a 2380 Hz. Obdobnou úlohu jsme potom řešili ve frekvenční doméně pomocí Helmholtzovy rovnice a dosáhli jsme podobných výsledků.

Implementaci MKP pro vektorový Stokesův problém jsme otestovali na úloze s předem známým řešením. Pro mini element pozorujeme rychlost v H^1 -normě prvního řádu přesnosti, tlak potom v L^2 -normě druhého řádu přesnosti. V kontextu Navierových–Stokesových rovnic řešíme standardizované úlohy, jako je proudění v oblasti se zpětným schodem, kde hledáme délku odtržení v závislosti na Reynoldsově čísle až do $Re = 1000$ a výsledky porovnáváme s experimentálními daty. Další taková úloha je obtékání válce v kanále, kde počítáme zejména odporový a vztlakový součinitel c_d, c_l . Uvažujeme konfiguraci pro $Re = 20$, při které jsme pozorovali ustálený charakter proudění a pro $Re = 100$, kdy se za válcem vytvořila vírová stezka se Strouhalovým číslem $St = 0,286$. Výpočty byly často současně provedeny i s pomocí *OpenFOAM*. Na závěr jsme řešili obtékání symetrického profilu křídla NACA 0012 pro $Re = 3000$, u kterého komentujeme vliv stabilizace pomocí *streamline diffusion*. Z výsledků pozorujeme, že stabilizace hraje roli pro hrubé síť, pro dostatečně jemné síť potom vnáší do výpočtu určitou chybu. Měřili jsme také závislost c_l na úhlu náběhu α do $\alpha \leq 3,5^\circ$, pro větší úhly jsme pozorovali neustálené proudění.

Seznam použitých zdrojů

- [1] J. D. Anderson. „Governing Equations of Fluid Dynamics“. In: *Computational Fluid Dynamics: An Introduction*. Springer Berlin Heidelberg, 1992. ISBN: 978-3-662-11350-9. DOI: 10.1007/978-3-662-11350-9_2. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-662-11350-9_2.
- [2] P. Sváček a M. Feistauer. *Metoda konečných prvků*. Nakladatelství ČVUT, 2006.
- [3] C. Evans Lawrence. „Partial Differential Equations: Second Edition“. In: *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 2010. ISBN: 0821849743.
- [4] S. C. Brenner a L. S. Ridgway. „Sobolev Spaces“. In: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. New York, NY: Springer New York, 2008. ISBN: 978-0-387-75934-0. DOI: 10.1007/978-0-387-75934-0_2. URL: https://doi.org/10.1007/978-0-387-75934-0_2.
- [5] Frank Ihlenburg. „Finite Element Analysis of Acoustic Scattering“. In: *Applied Mathematical Sciences*. Springer New York, 1998. ISBN: 978-0-387-98319-6. DOI: 10.1007/b98828. URL: <https://doi.org/10.1007/b98828>.
- [6] G. K. Batchelor. „An Introduction to Fluid Dynamics“. In: *Cambridge Mathematical Library*. Cambridge University Press, 2000. ISBN: 9780511800955. DOI: 10.1017/CB09780511800955.
- [7] L. D. Landau a E. M. Lifshitz. „Fluid Mechanics“. In: *Course of Theoretical Physics, Volume 6*. Pergamon, 2013. ISBN: 978-0080339337.
- [8] J. Billingham a A. C. King. „Wave Motion“. In: *Cambridge Texts in Applied Mathematics*. Cambridge University Press, 2001. DOI: 10.1017/CB09780511841033.
- [9] Euan A. Spence. „“When all else fails, integrate by parts” – an overview of new and old variational formulations for linear elliptic PDEs“. In: 2014. URL: <https://people.bath.ac.uk/eas25/ibps.pdf>.
- [10] D. J. Acheson. „Elementary Fluid Dynamics“. In: *Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series*. Clarendon Press, 1990. ISBN: 978-0198596790.
- [11] M. J. Lighthill. „On Sound Generated Aerodynamically. I. General Theory“. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 211 (1952). ISSN: 00804630. URL: <http://www.jstor.org/stable/98943>.
- [12] J. E. Ffowcs Williams. „The Acoustic Analogy—Thirty Years On“. In: *IMA Journal of Applied Mathematics* 32.1-3 (1984), s. 113–124. ISSN: 0272-4960. DOI: 10.1093/imamat/32.1-3.113. URL: <https://doi.org/10.1093/imamat/32.1-3.113>.
- [13] M.E. Goldstein. *Aeroacoustics*. Advanced book program. McGraw-Hill International Book Company, 1976. ISBN: 9780070236851.
- [14] Stephane Caro, Paul Ploumhans a Xavier Gallez. „Implementation of Lighthill’s Acoustic Analogy in a Finite/Infinite Elements Framework“. In: *10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. 2012. DOI: 10.2514/6.2004-2891. URL: <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2004-2891>.

- [15] S. C. Brenner a L. S. Ridgway. „Mixed Methods“. In: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer New York, 2008. ISBN: 978-0-387-75934-0. DOI: 10.1007/978-0-387-75934-0_13. URL: https://doi.org/10.1007/978-0-387-75934-0_13.
- [16] D. Boffi, F. Brezzi a M. Fortin. *Mixed Finite Element Methods and Applications*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2013. ISBN: 9783642365188. URL: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~knobloch/FILES/Boffi-Brezzi-Fortin-Mixed_FEMs_and_Applications.pdf.
- [17] M.A. Dokainish a K. Subbaraj. „A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics—I. Explicit methods“. In: *Computers & Structures* 32 (1989). ISSN: 0045-7949. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(89\)90314-3](https://doi.org/10.1016/0045-7949(89)90314-3). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045794989903143>.
- [18] George Lindfield a John Penny. „Chapter 5 - Solution of Differential Equations“. In: *Numerical Methods (Fourth Edition)*. Academic Press, 2019. ISBN: 978-0-12-812256-3. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-812256-3.00014-2>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128122563000142>.
- [19] *Gmsh Reference Manual*. 2022. URL: <http://gmsh.info/doc/texinfo/gmsh.pdf>.
- [20] *UMFPACK User Guide*. 2011. URL: <https://users.ensc.concordia.ca/~krzyzak/R%20Code-Communications%20in%20Statistics%20and%20Simulation%202014/Zubeh%F6r/SuiteSparse/UMFPACK/Doc/UserGuide.pdf>.
- [21] Brad H. Story, Ingo R. Titze a Eric A. Hoffman. „Vocal tract area functions from magnetic resonance imaging“. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 100 (1996). ISSN: 0001-4966. DOI: 10.1121/1.415960. eprint: <https://pubs.aip.org/asa/jasa/article-pdf/100/1/537/11401346/537\1\online.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1121/1.415960>.
- [22] *FFTW 3.3.10*. 2007. URL: https://www.fftw.org/fftw3_doc/.
- [23] C.D. Field a F.R. Fricke. „Theory and applications of quarter-wave resonators: A prelude to their use for attenuating noise entering buildings through ventilation openings“. In: *Applied Acoustics* 53 (1998). ISSN: 0003-682X. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0003-682X\(97\)00035-2](https://doi.org/10.1016/S0003-682X(97)00035-2). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003682X97000352>.
- [24] Assad A Oberai, Farzam Roknaldin a Thomas J.R Hughes. „Computational procedures for determining structural-acoustic response due to hydrodynamic sources“. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190 (2000). ISSN: 0045-7825. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(00\)00206-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(00)00206-1). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782500002061>.
- [25] Max Escobar. „Finite Element Simulation of Flow-Induced Noise using Lighthill’s Acoustic Analogy“. Dis. pr. 2007. URL: https://www.researchgate.net/publication/267995529_Finite_Element_Simulation_of_Flow-Induced_Noise_using_Lighthill's_Acoustic_Analogy.

- [26] Jan Valášek. „Numerical simulation of fluid-structure-acoustic interaction in human phonation“. Dis. pr. 2021. URL: <https://dspace.cvut.cz/handle/10467/97143>.
- [27] L. Mu a X. Ye. „A simple finite element method for the Stokes equations“. In: *Advances in Computational Mathematics* 43.6 (2017). ISSN: 1019-7168. DOI: 10.1007/s10444-017-9526-z. URL: <https://doi.org/10.1007/s10444-017-9526-z>.
- [28] L. Chen. *Finite element method for stokes equation*. URL: <https://www.math.uci.edu/~chenlong/226/FEMStokes.pdf>.
- [29] D. N. Arnold, F. Brezzi a M. Fortin. „A stable finite element for the stokes equations“. In: *Calcolo* (1984). ISSN: 1126-5434. DOI: 10.1007/BF02576171. URL: <https://doi.org/10.1007/BF02576171>.
- [30] F. Auricchio et al. „Mixed Finite Element Methods“. In: *Encyclopedia of Computational Mechanics Second Edition*. John Wiley a Sons, Ltd, 2017. ISBN: 9781119176817. DOI: <https://doi.org/10.1002/9781119176817.ecm2004>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781119176817.ecm2004>.
- [31] Y. He a W. Sun. „Stabilized finite element method based on the Crank–Nicolson extrapolation scheme for the time-dependent Navier–Stokes equations“. In: *Mathematics of Computation*. American Mathematical Society, 2007. DOI: 10.1090/S0025-5718-06-01886-2. URL: <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-06-01886-2>.
- [32] Giovanni P. Galdi. „An Introduction to the Navier-Stokes Initial-Boundary Value Problem“. In: *Fundamental Directions in Mathematical Fluid Mechanics*. Birkhäuser Basel, 2000, s. 1–70. ISBN: 978-3-0348-8424-2. DOI: 10.1007/978-3-0348-8424-2_1. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8424-2_1.
- [33] Pengzhan Huang, Xinlong Feng a Demin Liu. „A stabilized finite element method for the time-dependent Stokes equations based on Crank–Nicolson Scheme“. In: *Applied Mathematical Modelling* 37.4 (2013). ISSN: 0307-904X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.04.057>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X12002922>.
- [34] Lin Mu, Xiaoshen Wang a Xiu Ye. „A modified weak Galerkin finite element method for the Stokes equations“. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 275 (2015). ISSN: 0377-0427. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.08.006>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037704271400363X>.
- [35] Rolf Rannacher. „Finite Element Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations“. In: *Fundamental Directions in Mathematical Fluid Mechanics*. Birkhäuser Basel, 2000. DOI: 10.1007/978-3-0348-8424-2_6. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8424-2_6.
- [36] Volker John. „Higher order finite element methods and multigrid solvers in a benchmark problem for the 3D Navier–Stokes equations“. In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 40 (2002). DOI: 10.1002/flid.377. URL: <https://doi.org/10.1002/flid.377>.

- [37] Christopher Greenshields. *OpenFOAM v11 User Guide*. The OpenFOAM Foundation, 2023. URL: <https://doc.cfd.direct/openfoam/user-guide-v11>.
- [38] Maciej Matyka. „Solution to two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations with simple, simpler and vorticity-stream function approaches. driven-lid cavity problem: Solution and visualization“. In: *arXiv preprint physics/0407002* (2004).
- [39] B. F. Armaly et al. „Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow“. In: *Journal of Fluid Mechanics* 127 (1983). DOI: 10.1017/S0022112083002839.
- [40] Ercan Erturk. „Numerical solutions of 2-D steady incompressible flow over a backward-facing step, Part I: High Reynolds number solutions“. In: *Computers & Fluids* 37 (2008). ISSN: 0045-7930. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2007.09.003>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793007001545>.
- [41] G. Nabh. *On High Order Methods for the Stationary Incompressible Navier-Stokes Equations*. Interdisziplinäres Zentrum für Wissenschaftliches Rechnen der Universität Heidelberg, SFB 359, Reaktive Strömungen, Diffusion und Transport. IWR, 1998. URL: <https://ganymed.math.uni-heidelberg.de/Paper/Preprint1998-14.pdf>.
- [42] *DFG flow around cylinder benchmark 2D-2, time-periodic case Re=100*. URL: https://wwold.mathematik.tu-dortmund.de/~featflow/en/benchmarks/cfdbenchmarking/flow/dfg_benchmark2_re100.html.
- [43] *DFG flow around cylinder benchmark 2D-3, fixed time interval Re = 100*. URL: https://wwold.mathematik.tu-dortmund.de/~featflow/en/benchmarks/cfdbenchmarking/flow/dfg_benchmark3_re100.html.
- [44] Peter J. Olver. „Finite Elements and Weak Solutions“. In: *Introduction to Partial Differential Equations*. Springer International Publishing, 2014. ISBN: 978-3-319-02099-0. DOI: 10.1007/978-3-319-02099-0_10. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-02099-0_10.
- [45] Peter J. Olver a Chehrzad Shakiban. „Inner Products and Norms“. In: *Applied Linear Algebra*. Springer International Publishing, 2018. ISBN: 978-3-319-91041-3. DOI: 10.1007/978-3-319-91041-3_3. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-91041-3_3.

Příloha A

Diskrétní Fourierova transformace

Uvažujeme řešení vlnové rovnice (3.11) v jednom uzlovém bodě. Řešení na j -té časové vrstvě označíme (t_j, U_j) . Interpolovanou periodickou funkci $U(t)$, která prochází všemi body (t_j, U_j) pro $j = 0, 1, 2, \dots, N$ a má periodu $N\Delta t$, potom vyjádříme pomocí Fourierovy řady (viz např. [44]) ve tvaru

$$U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{N\Delta t}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{N\Delta t}\right) \right], \quad (4.37)$$

kde a_n, b_n jsou Fourierovy koeficienty. Pomocí Eulerova vzorce (viz např. [44]) lze (4.37) přepsat jako

$$U(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(-\frac{i2\pi kt}{N\Delta t}\right), \quad (4.38)$$

kde $i = \sqrt{-1}$ je imaginární jednotka a $a_k = c_k + c_{-k}$, $b_n = i(c_k + c_{-k})$. V případě diskretních hodnot se omezíme na rozsah $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ a obdržíme

$$U_j = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \exp\left(\frac{-i2\pi kt_j}{N\Delta t}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{-i2\pi kj/N} \quad (4.39)$$

Abychom vyjádřili koeficienty c_k , násobíme rovnici (4.39) výrazem $e^{-i2\pi k'j/N}$ a obě strany rovnice sečteme přes j , tedy

$$\sum_{j=0}^{N-1} U_j e^{-i2\pi k'j/N} = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{i2\pi(k-k')j/N}.$$

Pravá strana je nulová až na případ, kdy $k = k'$, viz [45]. Pro tento případ je potom pravá strana rovna Nc_k a Fourierovy koeficienty získáme v podobě

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} U_j e^{-i2\pi kj/N}, \quad (4.40)$$

které říkáme diskretní Fourierova transformace (DFT).

Příloha B

Implementace MKP v programovacím jazyce C

K práci je přiložen soubor ve formátu *.rar*, ve kterém jsou uloženy všechny zdrojové soubory s příponou *.c* a hlavičkové soubory s příponou *.h*, které byly vytvořeny při implementaci MKP. Pro skalární problém ve 3D a vektorový problém ve 2D byly použity dva separátní algoritmy.