

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta strojní

Ústav technické matematiky  
Obor: Matematické modelování v technice



Numerické řešení vibroakustického  
problému pomocí metody konečných  
prvků

Numerical solution of vibroacoustic  
problem by finite element method

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vypracoval: Bc. Jiří Hubálek  
Vedoucí práce: Ing. Jan Valášek, Ph.D.  
Rok: 2023

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Hubálek** Jméno: **Jiří** Osobní číslo: **483156**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**  
Studijní program: **Aplikované vědy ve strojním inženýrství**  
Specializace: **Matematické modelování v technice**

## II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

**Numerické řešení vibroakustického problému pomocí metody konečných prvků**

Název diplomové práce anglicky:

**Numerical solution of vibroacoustic problem by finite element method**

Pokyny pro vypracování:

1. Na základě studia literatury formulujte matematický model popisující šíření zvuku a deformaci elastického tělesa včetně vhodných okrajových podmínek. Následně sestavte sdružený vibroakustický problém.
2. Popište metodu konečných prvků a její použití pro prostorovou diskretizaci akustického i elastického problému.
3. Numerickou metodu realizujte v programovacím prostředí Matlab a vyvinutý program otestujte na jednoduchých příkladech.
4. Popište podmínky sdružení obou podproblémů a jejich numerickou realizaci.
5. Vyvinutý program použijte na vybranou úlohu. Analyzujte získané řešení.

Seznam doporučené literatury:

1. P. Sváček, M. Feistauer, Metoda konečných prvků, skripta FS, Vydavatelství ČVUT, 2007
2. M. Brdička, L. Samek, B. Sopko: Mechanika kontinua, Academia 2005.
3. M. Kaltenbacher, Numerical simulation of mechatronic sensors and actuators: finite elements for computational multiphysics, Springer, 2015.
4. B. Davis, Techniques to assess acoustic-structure interaction in liquid rocket engines, Duke University, 2008.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

**Ing. Jan Valášek, Ph.D. ústav technické matematiky FS**

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

\_\_\_\_\_

Datum zadání diplomové práce: **14.04.2023**

Termín odevzdání diplomové práce: **13.08.2023**

Platnost zadání diplomové práce: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
Ing. Jan Valášek, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) práce

\_\_\_\_\_  
prof. Ing. Jiří Fůrst, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

\_\_\_\_\_  
doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

\_\_\_\_\_  
Datum převzetí zadání

\_\_\_\_\_  
Podpis studenta

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením Ing. Jana Valáška, Ph.D. a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

V Praze dne .....

.....  
Bc. Jiří Hubálek

## **Poděkování**

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu diplomové práce Ing. Janu Valáškoví, Ph.D. za odborné vedení, přátelský přístup, čas, který mi věnoval, a cenné rady, které byly nezbytné pro napsání této práce. Dále bych rád poděkoval svým nejbližším za jejich trpělivost a podporu při studiu.

Bc. Jiří Hubálek



*Název práce:*

**Numerické řešení vibroakustického problému pomocí metody konečných prvků**

*Autor:* Bc. Jiří Hubálek

*Studijní program:* Aplikované vědy ve strojním inženýrství

*Obor:* Matematické modelování v technice

*Druh práce:* Diplomová práce

*Vedoucí práce:* Ing. Jan Valášek, Ph.D.

Ústav technické matematiky, Fakulta strojní, České vysoké učení technické v Praze

*Abstrakt:*

Tato diplomová práce se zabývá úlohami akustiky, elastického tělesa a jejich vzájemnou interakcí. Jejich matematický popis je založen na vlnové rovnici a teorii lineární elasticity. Jsou uvedeny vhodné počáteční a okrajové podmínky a též je pojednáno o podmínkách na společném rozhraní, které sdružují oba problémy dohromady. Pro numerické řešení je použita metoda konečných prvků (MKP) a jsou popsány její základní principy. V programovacím jazyku *MATLAB* je vytvořen program založený na metodě konečných prvků, který realizuje výpočet rezonančních frekvencí akustického, elastického i sdruženého vibroakustického problému. Program je otestován na několika příkladech a získané výsledky jsou úspěšně porovnány s výpočtem pomocí komerčního softwaru. Na závěr jsou nalezeny rezonanční frekvence pomocí tří různých metod – modální analýzy, frekvenční přenosové funkce a projekce do modální báze.

*Klíčová slova:*

vlnová rovnice, lineární elasticita, sdružený problém, metoda konečných prvků, modální analýza, frekvenční přenosová funkce, vibroakustika vokálního traktu

*Title:*

## **Numerical solution of vibroacoustic problem by finite element method**

*Author:* Bc. Jiří Hubálek

*Abstract:*

This master's thesis addresses the challenges of acoustics, elastic bodies, and their mutual interaction. Their mathematical description relies on the wave equation and the theory of linear elasticity. Appropriate initial and boundary conditions are provided. They are elaborated on along with the conditions at the shared interface, which amalgamate both problems. The numerical solution employs the finite element method (FEM), and its fundamental principles are expounded. A program, developed in the *MATLAB* programming language, utilizes the finite element method to compute the resonant frequencies of acoustic, elastic, as well as coupled vibroacoustic problems. The program is tested by running multiple examples, and comparing its results against a commercially available software. Modal analysis, frequency transfer functions, and projection into a modal basis are used to determine resonant frequencies.

*Key words:*

wave equation, linear elasticity, coupled problem, finite element method, modal analysis, frequency transfer function, vibroacoustics of the vocal tract

# Obsah

Úvod	9
<b>1 Matematicko-fyzikální model akustického pole</b>	<b>11</b>
1.1 Odvození vlnové rovnice	11
1.1.1 Formulace vlnové rovnice pomocí potenciálu	14
1.2 Okrajové a počáteční podmínky	14
1.3 Popis ve frekvenční doméně	16
<b>2 Matematicko-fyzikální model elastického tělesa</b>	<b>17</b>
2.1 Statické rovnice elastického tělesa	17
2.1.1 Podmínky silové statické rovnováhy	19
2.1.2 Deformace tělesa	20
2.1.3 Zobecněný Hookeův zákon	21
2.1.4 Okrajové podmínky	22
2.2 Dynamické rovnice elastického tělesa	22
2.2.1 Okrajové a počáteční podmínky	23
2.3 Popis ve frekvenční doméně	23
2.4 Vibroakustický problém	24
2.4.1 Podmínky na rozhraní v časové doméně	24
2.4.2 Formulace vibroakustického problému v časové doméně	25
2.4.3 Podmínky na rozhraní ve frekvenční doméně	27
2.4.4 Formulace vibroakustického problému ve frekvenční doméně	27
<b>3 Prostorová diskretizace pomocí metody konečných prvků</b>	<b>29</b>
3.1 Slabá formulace Helmholtzovy rovnice	29
3.2 Prostorová diskretizace Helmholtzovy rovnice	30
3.3 Metoda konečných prvků	31
3.4 Sestavení jednotlivých matic a vektoru pravé strany	33
3.5 Slabá formulace elastického problému	36
3.6 Prostorová diskretizace elastického problému	36
3.7 Slabá formulace vibroakustického problému	38
3.8 Prostorová diskretizace vibroakustického problému	39
3.9 Numerická realizace vibroakustického problému	41
<b>4 Numerické výsledky</b>	<b>42</b>
4.1 Příklad 1 – deformace nosníku	42
4.1.1 Statické zatížení	43

4.1.2	Charakteristické frekvence . . . . .	46
4.2	Příklad 2 – akustický problém . . . . .	48
4.3	Příklad 3 – modelový vibroakustický problém . . . . .	49
4.4	Příklad 4 – vibroakustika lidského vokálního traktu . . . . .	52
	<b>Závěr</b>	<b>61</b>
	<b>Seznam použitých zdrojů</b>	<b>62</b>
	<b>Příloha</b>	<b>65</b>

# Úvod

Vibroakustika je obor, který spojuje akustiku s mechanikou a dynamikou elastických těles. Akustika je velmi obsáhlý vědní obor, který se zabývá vznikem zvuku přes jeho šíření až po jeho vnímání. Druhou zkoumanou oblastí je elastické těleso schopné deformace vlivem působení vnějších sil. Na první pohled jde tedy o dvě zdánlivě odlišné oblasti zájmu. Ale propojením těchto dvou oblastí získáme komplexní problém, jehož zkoumání je v zájmu celé řady oborů a má mnoho důležitých aplikací. Jmenujme například šíření hluku motoru skrz karoserii a kabinu auta (automobilový průmysl), strukturální životnost raketových motorů (letadlový průmysl) nebo správně navrženou tloušťku okenního skla potlačujícího přenos zvuku na dané frekvenci (stavební průmysl).

V mnoha aplikacích lze vibroakustický problém, který je ze své podstaty sdružený problém, zjednodušit na řešení akustického problému s předepsaným chováním elastického tělesa. To je dáno tím, že vliv akustického pole na strukturu je často minimální. Jednou z oblastí, kde je vhodné uvažovat vibroakustický problém v plné komplexitě, je například biomechanika lidského hlasu, respektive hlavně zajímavý případ fonace do brčka, které slouží pro regeneraci hlasového ústrojí. V této práci se tímto problémem motivujeme a navážeme na výsledky aktuálního výzkumu na tomto poli, viz článek [18].

V této práci budeme pracovat s vlnovou rovnicí pro tlakové fluktuace a s pohybovými rovnicemi elastického tělesa. Dále budeme uvažovat časově harmonické pole, tedy z časové domény přejdeme do domény frekvenční. Následnou analýzou lze získat základní charakteristické frekvence akustického pole a elastického tělesa, které z pohledu technické praxe hrají důležitou roli, jelikož při těchto frekvencích dochází k rezonanci kmitání. Tedy lze stanovit, jaké frekvence jsou žádoucí pro případy vybuzení systému, respektive nežádoucí při nezamýšleném buzení, což je nejčastější případ. Dobrým standardem pro řešení těchto problémů je metoda konečných prvků (MKP), kterou zde stručně představíme.

Tato práce je členěna do čtyř kapitol. V první kapitole je odvozena vlnová rovnice ze základních rovnic dynamiky tekutin. V druhé kapitole jsou uvedeny poznatky z matematické teorie elastických těles. Dále je pojednáno o vzájemné interakci akustického pole a elastického tělesa. Ve třetí kapitole jsou popsány základní principy metody konečných prvků. Metoda konečných prvků je aplikována při numerickém řešení odvozených rovnic z předchozích kapitol. Ve čtvrté kapitole jsou uvedeny numerické výsledky několika testovacích příkladů pomocí námi vyvinutého programu včetně porovnání s komerčním softwarem. Následně je uvedeno numerické řešení

modelu lidského hlasového ústrojí. Závěr obsahuje shrnutí a zhodnocení dosažených výsledků.

# Kapitola 1

## Matematicko-fyzikální model akustického pole

V první části této kapitoly odvodíme vlnovou rovnici ze základních rovnic dynamiky tekutin. Uvedeme také její formulaci pro akustický potenciál. Vlnovou rovnici popisující akustické pole následně doplníme o okrajové a počáteční podmínky. Nakonec odvozené vztahy převedeme do frekvenční domény.

### 1.1 Odvození vlnové rovnice

Základní rovnice dynamiky tekutin ve vektorovém tvaru tvoří tyto tři rovnice, u kterých budeme uvažovat navíc zdrojové členy:

- **zákon zachování hmoty**

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla \cdot \mathbf{v} + \dot{m}, \quad (1.1)$$

kde  $\frac{D}{Dt}$  má význam materiálové derivace,  $\rho$  je hustota,  $\mathbf{v}$  je vektor rychlosti a  $\dot{m}$  je zdrojový člen vyjadřující přibývání, respektive ubývání hmoty, viz [6],

- **zákon zachování hybnosti**

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f}, \quad (1.2)$$

kde  $p$  je tlak,  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{v}, \mu(T))$  je tenzor viskózního napětí, přičemž  $\mu$  je dynamická viskozita a  $T$  je termodynamická teplota, a  $\mathbf{f}$  je zdrojový člen vnějších objemových sil, viz [6],

- **zákon zachování energie**

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p\nabla \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \dot{\vartheta}, \quad (1.3)$$

kde  $e$  je měrná vnitřní energie,  $\mathbf{q}(T, k(T))$  je vektor tepelného toku, přičemž  $k$  je tepelná vodivost prostředí, a  $\dot{\vartheta}$  je zdroj tepla, viz [6].

Pro kompletní popis je obecně potřeba předchozí rovnice doplnit o závislosti hustoty a vnitřní energie na stavových veličinách teploty a tlaku, tj. o tepelnou a kalorickou stavovou rovnici

$$\rho = \rho(T, p) \quad a \quad e = e(T, p). \quad (1.4)$$

V této práci se omezíme pouze na ideální plyn, kdy lze tepelnou stavovou rovnici a kalorickou stavovou rovnici psát ve tvaru

$$\rho = \frac{p}{rT} \quad a \quad e = c_v T, \quad (1.5)$$

kde  $r$  je měrná plynová konstanta a  $c_v$  je měrná tepelná kapacita za konstantního objemu. Uveďme Mayerův vztah

$$c_p = r + c_v, \quad (1.6)$$

kde  $c_p$  je měrná tepelná kapacita za konstantního tlaku, viz [17]. Pomocí ní definujeme Poissonovu konstantu  $\kappa$  jako

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}. \quad (1.7)$$

Uveďme dále Gibbsovu rovnici v diferenciálním tvaru

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}, \quad (1.8)$$

kde  $s$  je měrná entropie, viz [6]. Dosazením do rovnice (1.8) za  $\frac{D\rho}{Dt}$  a  $\frac{De}{Dt}$  z rovnic (1.1) a (1.3) a následnou úpravou získáme

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T} \left( \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \dot{\vartheta} - \dot{m} \frac{p}{\rho} \right). \quad (1.9)$$

Eliminací vnitřní energie  $e$  nahradíme kalorickou stavovou rovnici vztahem  $\rho = \rho(p, s)$ . Totální diferenciál vyjádříme jako

$$\frac{D\rho}{Dt} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \frac{Dp}{Dt} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p \frac{Ds}{Dt}, \quad (1.10)$$

kde indexy  $s$  a  $p$  nám dávají informaci o stavových veličinách, které zůstávají při derivaci konstantní, viz [6]. Zaveďme označení

$$a^2 = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s^{-1}, \quad (1.11)$$

kde  $a$  je rychlost zvuku. Šíření zvukové vlny je proces izoentropický, tedy  $\frac{Ds}{Dt} = 0$ , při kterém platí Poissonův zákon

$$p\rho^{-\kappa} = \text{konst.} \quad (1.12)$$



Dosazením Poissonova zákona (1.12) do vztahu (1.11) získáme výsledný vztah pro rychlost zvuku v případě ideálního plynu jako

$$a = \sqrt{\kappa r T} = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}, \quad (1.13)$$

viz [17]. Dosazením do rovnice (1.10) za  $\frac{D\rho}{Dt}$  z rovnice (1.1), uvažováním  $\frac{Ds}{Dt} = 0$  a následnou úpravou získáváme

$$\frac{1}{a^2} \frac{Dp}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = \dot{m}. \quad (1.14)$$

Takto jsme nahradili časovou závislost hustoty pomocí tlaku. Dále již budeme pracovat pouze s rovnicemi (1.2) a (1.14).

Při šíření zvukové vlny dochází k malým fluktuacím tlaku, hustoty a teploty okolo rovnovážných hodnot. Lze tedy psát

$$p = p_0 + p'(x, t), \quad \rho = \rho_0 + \rho'(x, t), \quad T = T_0 + T'(x, t), \quad (1.15)$$

kde  $p_0$ ,  $\rho_0$  a  $T_0$  jsou rovnovážné hodnoty tlaku, hustoty a teploty a  $p'$ ,  $\rho'$  a  $T'$  jsou jejich změny způsobené průchodem zvukové vlny. Předpokládáme, že

$$|p'(x, t)| \ll p_0, \quad |\rho'(x, t)| \ll \rho_0, \quad |T'(x, t)| \ll T_0. \quad (1.16)$$

Dále předpokládáme, že tekutina je v klidu a pohyb je způsoben pouze šířením zvukové vlny, tedy

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{v}'(x, t), \quad (1.17)$$

kde  $\mathbf{v}'$  je akustická rychlost. Dosazením vztahů (1.15) a (1.17) do rovnic (1.2) a (1.14), zanedbáním nelineárních členů a členu  $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}'$  získáme

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \nabla p' = \mathbf{f}, \quad (1.18)$$

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}' = \dot{m}, \quad (1.19)$$

viz [6]. Tato soustava dvou parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu (1.18) a (1.19) pro akustickou rychlost  $\mathbf{v}'$  a fluktuace tlaku  $p'$  popisuje šíření akustické vlny pro případ ideálního plynu. Tuto soustavu prvního řádu pro obecně čtyři složky nyní přeformulujeme na jednu parciální diferenciální rovnici druhého řádu pro jednu neznámou skalární funkci – fluktuace tlaku  $p'$ . Aplikací operátoru divergence na rovnici (1.18) získáme

$$\rho_0 \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{v}')}{\partial t} = -\Delta p' + \nabla \cdot \mathbf{f}. \quad (1.20)$$

Časovou derivací rovnice (1.19) dostaneme

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{v}')}{\partial t} = \frac{\partial \dot{m}}{\partial t}. \quad (1.21)$$

Za výraz  $\rho_0 \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{v}')}{\partial t}$  v rovnici (1.21) dosadíme výraz z rovnice (1.20) a upravením získáme výsledný tvar vlnové rovnice ve tvaru pro tlakové fluktuace  $p'$

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \mathcal{F}, \quad (1.22)$$

kde funkce  $\mathcal{F} = \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{f}$  popisuje možné aeroakustické zdroje zvuku dané časovou změnou dodané hmoty anebo divergencí vnějších objemových sil. Další zde neuvedený aeroakustický zdroj představuje dodání tepla, ale odvození tohoto modelu je obtížnější kvůli porušení předpokladu izoentropického děje, viz [6].

### 1.1.1 Formulace vlnové rovnice pomocí potenciálu

Pomocí Helmholtzovy dekompozice lze vektorové pole rozložit na součet potenciálního a solenoidálního vektorového pole, viz [1]. Aplikací Helmholtzovy dekompozice na akustickou rychlost  $\mathbf{v}'$  a zdrojový člen vnějších objemových sil  $\mathbf{f}$  získáme

$$\mathbf{v}' = \nabla \times \mathbf{\Psi} + \nabla \psi, \quad (1.23)$$

$$\mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{\Psi}_f + \nabla \psi_f, \quad (1.24)$$

kde  $\mathbf{\Psi}$  a  $\mathbf{\Psi}_f$  jsou vektorové potenciály,  $\psi$  a  $\psi_f$  jsou skalární potenciály vektorových polí. Nazvěme potenciál  $\psi$  vektorového pole jako rychlostní potenciál. Dosazením vztahů (1.23) a (1.24) do rovnice (1.18) lze odvodit vztah pro fluktuace tlaku  $p'$ , viz [6], jako

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi_f. \quad (1.25)$$

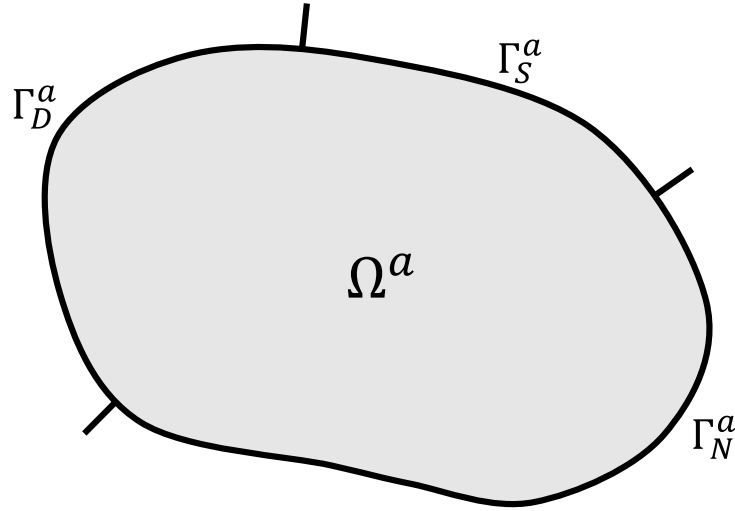
Následně dosazením vztahů (1.23) a (1.25) do rovnice (1.19) a následnou úpravou získáme vlnovou rovnici pro rychlostní potenciál  $\psi$  ve tvaru

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta \psi = -\frac{1}{\rho_0} \dot{m} + \frac{1}{\rho_0 a_0^2} \frac{\partial \psi_f}{\partial t}. \quad (1.26)$$

Ze vztahu (1.25) pro tlakové fluktuace  $p'$  a z výsledné rovnice (1.26) je zřejmé, že uvažování solenoidálního vektorového pole z hlediska akustiky je irelevantní a pro popis akustiky postačí pracovat pouze s potenciály  $\psi$  a  $\psi_f$ , podrobněji viz [6]. Formulace akustického problému pomocí rovnice (1.26) je ekvivalentní a velice se podobá rovnici (1.22). Rozdíl spočívá v numericky příznivější formulaci akustických zdrojů na pravé straně (odstranění derivace).

## 1.2 Okrajové a počáteční podmínky

Uvažujme oblast  $\Omega^a \subset \mathbb{R}^3$  s hranicí  $\partial\Omega^a$ , jež je složena ze tří disjunktních částí  $\Gamma_D^a$ ,  $\Gamma_N^a$  a  $\Gamma_S^a$ , tedy  $\partial\Omega^a = \bar{\Gamma}_D^a \cup \bar{\Gamma}_N^a \cup \bar{\Gamma}_S^a$ , viz obr. 1.1. Pro kompletní matematickou formulaci je třeba rovnici (1.22) doplnit o počáteční a okrajové podmínky.



Obrázek 1.1: Oblast  $\Omega^a$  s hranicemi  $\Gamma_D^a$ ,  $\Gamma_N^a$  a  $\Gamma_S^a$ .

- **Počáteční podmínky**

Pro čas  $t = 0$  předepíšeme počáteční podmínky pro hodnotu fluktuace tlaku  $p'$  a rychlost jeho změny, tedy

$$p'(x, 0) = p'_0(x) \quad \text{pro } x \in \overline{\Omega}^a, \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t}(x, 0) = p'_1(x) \quad \text{pro } x \in \overline{\Omega}^a. \quad (1.28)$$

- **Okrajové podmínky**

V této práci budeme uvažovat tyto okrajové podmínky:

- **Dirichletova okrajová podmínka**

Tato okrajová podmínka předepisuje určitou hodnotu neznámé funkce  $p'$  na hranici  $\Gamma_D^a$ , tedy

$$p'(x, t) = p'_D(x, t) \quad \text{pro } x \in \Gamma_D^a, \quad t \in (0, T). \quad (1.29)$$

V úlohách akustiky ji lze využít pro předepsání akusticky otevřeného konce vlnovodu, viz [2].

- **Neumannova okrajová podmínka**

Neumannova okrajová podmínka předepisuje hodnotu derivace hledaného řešení  $p'$  ve směru vnější normály  $\mathbf{n}^a$  na hranici  $\Gamma_N^a$ , tedy

$$\frac{\partial p'}{\partial \mathbf{n}^a}(x, t) = p'_N(x, t) \quad \text{pro } x \in \Gamma_N^a, \quad t \in (0, T). \quad (1.30)$$

V akustice nachází využití při předepisování akusticky uzavřeného konce vlnovodu jako modelu dokonale odrazivé zdi, viz [2].

- **Sommerfeldova radiační podmínka**

Poslední uvažovanou okrajovou podmínku je Sommerfeldova radiační podmínka, která se využívá pro úlohy na neomezené oblasti  $\Omega^a$ , viz [13].

Jelikož při numerickém řešení máme k dispozici pouze omezenou paměť počítače, a tedy i výpočetní oblast  $\Omega^a$  s hranicí  $\partial\Omega^a$  musí být omezená, tak na hranici  $\Gamma_S^a$  modelující (akusticky) otevřenou hranici předepíšeme základní Sommerfeldovu radiační podmínku ve tvaru

$$\frac{\partial p'}{\partial \mathbf{n}^a}(x, t) = -\frac{1}{a_0} \frac{\partial p'}{\partial t}(x, t) \quad \text{pro } x \in \Gamma_S^a, \quad t \in (0, T). \quad (1.31)$$

Při šíření vlny tato okrajová podmínka ve tvaru (1.31) předepsaná na hranici  $\Gamma_S^a$  pohlcuje pouze část vlny, která je rovnoběžná s vnější jednotkovou normálou  $\mathbf{n}^a$  hranice  $\Gamma_S^a$ , složka tečná se odráží. Tedy tuto podmínku lze aplikovat bez omezení na 1D úlohy. Při využití na vícedimenzionální úlohy ji lze využít pouze za předpokladu kolmo dopadajících vln na část hranice  $\Gamma_S^a$ . Pro pokročilejší realizaci Sommerfeldovy radiační podmínky viz [8].

### 1.3 Popis ve frekvenční doméně

Pro převod do frekvenční domény lze obecně využít Fourierovy transformace. My pro popis ve frekvenční doméně využijeme předpokladu časově harmonického akustického pole, které je charakterizováno pouze jednou kruhovou frekvencí  $\omega^a$ , viz [2]. Řešení rovnice (1.22) lze potom psát ve tvaru

$$p'(x, t) = \hat{p}(x, \omega) e^{-j\omega^a t}, \quad (1.32)$$

kde  $\hat{p}(x, \omega^a)$  je obecně komplexní funkce závisající na prostorové proměnné  $x$  a kruhové frekvenci  $\omega^a$  a  $j$  má význam imaginární jednotky. Dosazením vztahu (1.32) do rovnice (1.22) a následnou úpravou získáme Helmholtzovu rovnici

$$-\Delta \hat{p} - \left(\frac{\omega^a}{a_0}\right)^2 \hat{p} = \hat{\mathcal{F}}(x, \omega^a), \quad (1.33)$$

kde  $\hat{\mathcal{F}}(x, \omega^a)$  je obecný akustický zdroj, viz [10]. Jelikož se nacházíme ve frekvenční doméně, tak pro kompletní matematickou formulaci doplníme rovnici (1.33) pouze o okrajové podmínky. Dirichletovu okrajovou podmínku a Neumannovu okrajovou podmínku budeme uvažovat analogicky ke vztahům (1.29) a (1.30), tedy

$$\hat{p}(x, \omega^a) = \hat{p}_D(x, \omega^a) \quad \text{pro } x \in \Gamma_D^a, \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \mathbf{n}^a}(x, \omega^a) = \hat{p}_N(x, \omega^a) \quad \text{pro } x \in \Gamma_N^a. \quad (1.35)$$

Sommerfeldovu radiační podmínku pro frekvenční doménu získáme dosazením vztahu (1.32) do Sommerfeldovy okrajové podmínky pro časovou doménu (1.31). Po následné úpravě získáme

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \mathbf{n}^a}(x, \omega^a) = j \frac{\omega^a}{a_0} \hat{p}(x, \omega^a) \quad \text{pro } x \in \Gamma_S^a. \quad (1.36)$$

# Kapitola 2

## Matematicko-fyzikální model elastického tělesa

V této kapitole se budeme zabývat matematickou teorií elastických těles. Naším prvním cílem je získat rovnice statického problému, ze kterého přejdeme k rovnicím popisujícím problém dynamický. Tyto rovnice doplníme vhodnými okrajovými podmínkami. Dále převedeme popis elastického tělesa do frekvenční domény. Nakonec pojednáme o podmínkách na rozhraní při interakci s akustickým polem.

### 2.1 Statické rovnice elastického tělesa

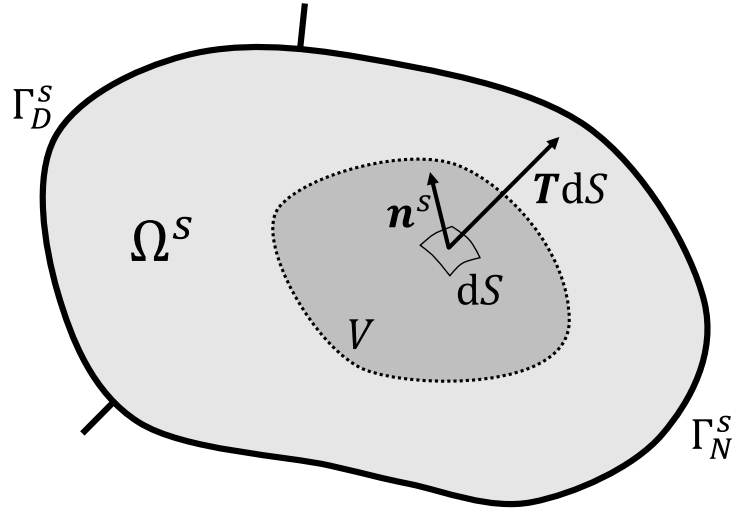
Uvažujme elastické těleso, které modelujeme kontinuem, viz [3], reprezentované oblastí  $\Omega^s \subset \mathbb{R}^3$ , které je vystaveno působení vnějších sil. Síly působící na kontinuum můžeme rozdělit do dvou skupin:

- **Síly objemové**

Objemové síly působí na každý hmotný element kontinua o určitém objemu přímo, nezávisle na silách působících na ostatní elementy tohoto kontinua. Tyto síly, které jsou přímo úměrné velikosti objemu a hmotnosti každého elementu, vztáhneme na jednotku objemu a zavedeme tzv. objemovou hustotu sil  $\mathbf{F}$  se složkami  $F_i$ . Typickým příkladem je gravitační, odstředivé nebo elektromagnetické pole.

- **Síly plošné**

Síly plošné na rozdíl od sil objemových působí na povrch kontinua v bezprostřední blízkosti s okolím. Řadí se mezi ně tahové a tlakové síly, kterým je povrch kontinua vystaven. Tyto síly vztažené na jednotku plochy, jejichž účinek se dále šíří kontinuem prostřednictvím vnitřních sil, označme  $\mathbf{T}$  se složkami  $T_i$  a nazvěme je vektorem napětí.



Obrázek 2.1: Oblast  $\Omega^s$  s hranicemi  $\Gamma_D^s$  a  $\Gamma_N^s$  a zobrazení působení plošných sil na povrch ohraničujícího objem  $V$ .

Rozvedme nyní myšlenku, kterou jsme zmínili výše, týkající se šíření účinků plošných sil kontinuem. Vyjměme libovolnou část kontinua o objemu  $V$ , který je ohraničen plochou  $S$ . Na tuto plochu působí také plošné síly  $\mathbf{T}$ , které se šíří po jednotlivých vrstvách molekul z povrchu kontinua. Zvolme si na ploše  $S$  bod  $P$  a elementární plošku  $dS$ , která obsahuje námi zvolený bod  $P$ . Na tuto elementární plošku působí síla  $\mathbf{T}dS$ . Zaveďme jednotkovou vnější normálu k elementární plošce  $dS$  a označme ji  $\mathbf{n}^s$ , viz obr. 2.1. Poznamenejme, že daným bodem  $P$  lze vést neomezený počet plošek  $dS$  v závislosti na volbě tvaru objemu  $V$ . Tedy i vektor napětí  $\mathbf{T}$  se obecně mění v závislosti na volbě plošky  $dS$ . Vektor napětí není funkcí pouze polohy elementární plošky  $dS$ , ale i její orientace. Zaveďme označení  $\mathbf{T}^i$  pro vektor napětí, který působí na plošku kolmo k ose  $x_i$  s normálou shodně orientovanou s touto osou. Dále pro složky vektoru napětí  $\mathbf{T}^i$  zavedeme označení

$$T_j^i = \tau_{ij}, \quad (2.1)$$

kde  $\tau_{ij}$  nazveme složkami tenzoru napětí. Složka  $\tau_{ij}$  tenzoru napětí je průmět vektoru napětí  $\mathbf{T}^i$  do osy  $x_j$ . Diagonální složky tenzoru napětí představují normálová napětí a mimodiagonální složky představují napětí smyková, viz [3]. Je to tenzor druhého řádu. Vyšetřením podmínek silové rovnováhy infinitesimálního čtyřstěnu, viz [3], lze ukázat, že složky  $T_i$  vektoru napětí působící na libovolně orientované elementární plošce  $dS$  s vnější jednotkovou normálou  $\mathbf{n}^s$  lze zapsat pomocí vztahu

$$T_i = \tau_{ji} n_j^s, \quad (2.2)$$

kde  $n_j^s$  jsou složky vnější jednotkové normály elementární plošky  $dS$ . Tedy ze znalosti jednotlivých složek  $\tau_{ji}$  tenzoru napětí v bodě  $P$  lze určit jednotlivé složky  $T_i$  vektoru napětí pro libovolnou orientaci plošky  $dS$  s vnější normálou  $\mathbf{n}^s$  obsahující bod  $P$ .

### 2.1.1 Podmínky silové statické rovnováhy

Pro dosažení silové rovnováhy kontinua musí být v silové rovnováze každá jeho část. Zabývejme se tedy libovolnou částí kontinua o objemu  $V$  a povrchu  $S$ . Součet sil objemových  $\mathbf{F}$  a plošných  $\mathbf{T}$  pro námi zvolenou část kontinua musí být roven nule, tedy

$$\int_V \mathbf{F} \, dV + \int_S \mathbf{T} \, dS = \mathbf{0}. \quad (2.3)$$

Rovnici (2.3) lze zapsat ve složkovém tvaru jako

$$\int_V F_i \, dV + \int_S T_i \, dS = 0. \quad (2.4)$$

Dosažením tenzoru napětí ze vztahu (2.2) do druhého integrálu rovnice (2.4) a následnou aplikací Gaussovy věty na tento člen, viz [3], dostáváme

$$\int_S T_i \, dS = \int_S \tau_{ji} n_j^s \, dS = \int_V \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \, dV. \quad (2.5)$$

Pak lze rovnici (2.4) po dosažení vztahu (2.5) přepsat do tvaru

$$\int_V \left( F_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \right) dV = 0. \quad (2.6)$$

Pokud má rovnice (2.6) platit pro libovolný objem  $V$ , pak musí být integrand identicky roven nule pro všechny  $x \in \Omega^s$ . Tím dostáváme diferenciální rovnici

$$F_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} = 0. \quad (2.7)$$

Další podmínkou rovnováhy je rovnováha momentů objemových a plošných sil působících na námi zvolenou část objemu, tedy

$$\int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \, dV + \int_S (\mathbf{r} \times \mathbf{T}) \, dS = \mathbf{0}, \quad (2.8)$$

kde  $\mathbf{r}$  je polohový vektor se složkami  $x_i$ . Rovnici (2.8) lze uvést také ve složkovém tvaru jako

$$\int_V \varepsilon_{ijk} x_j F_k \, dV + \int_S \varepsilon_{ijk} x_j T_k \, dS = 0, \quad (2.9)$$

kde  $\varepsilon_{ijk}$  je Levi-Civitův symbol. Následné úpravy by byly analogické úpravám pro silovou rovnováhu, viz [3], a získali bychom pak výslednou rovnici

$$\varepsilon_{ijk} \tau_{jk} = 0. \quad (2.10)$$

Rovnice (2.10) je splněna pokud

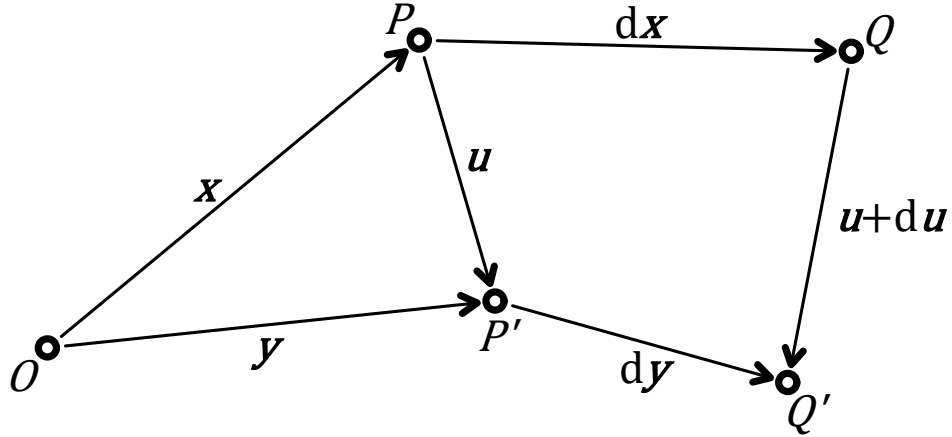
$$\tau_{ij} = \tau_{ji}. \quad (2.11)$$

Tedy rovnováha momentů objemových a plošných sil je splněna, pokud tenzor napětí je tenzorem symetrickým, viz [3].

## 2.1.2 Deformace tělesa

Uvažujme libovolný bod  $P$  elastického tělesa. Poloha tohoto bodu je určena polohovým vektorem  $\mathbf{x}$  se složkami  $x_i$ . Působením vnějších sil dochází k posunu bodu  $P$  o vektor  $\mathbf{u}$  se složkami  $u_i$  do bodu  $P'$ , jehož poloha je určena polohovým vektorem  $\mathbf{y}$  se složkami  $y_i$ , viz obr. 2.2. Pro složky polohového vektoru  $\mathbf{y}$  platí

$$y_i = x_i + u_i(x_j). \quad (2.12)$$



Obrázek 2.2: Deformace bodů  $P$  a  $Q$  vůči bodu  $O$ .

Předpokládejme, že funkce  $y_i$  jsou nejenom spojité, ale i spojitě diferencovatelné do potřebných řádů. Pro určení lokální deformace v bodě  $P$  uvažujme nekonečně blízký bod  $Q$ , jenž je charakterizován polohovým vektorem se složkami  $x_i + dx_i$ . Vlivem vnějších sil se tento bod posune do bodu  $Q'$ , jenž je popsán polohovým vektorem o složkách  $y_i + dy_i$ , kde  $dy_i$  lze zapsat za pomoci vztahu (2.12) a Einsteinova sumačního pravidla jako

$$dy_i = dx_i + du_i(x_j) = dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_j, \quad (2.13)$$

kde  $\delta_{ij}$  je Kroneckerovo delta. Zavedeme-li označení vzdálenosti bodů před deformací jako  $ds_0 = |PQ| = |d\mathbf{x}|$  a po deformaci jako  $ds = |P'Q'| = |d\mathbf{y}|$ , lze zapsat kvadrát těchto vzdáleností jako

$$ds_0^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dx_i dx_i = \delta_{jk} dx_j dx_k \quad (2.14)$$

a

$$ds^2 = d\mathbf{y} \cdot d\mathbf{y} = dy_i dy_i = \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left( \delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) dx_j dx_k. \quad (2.15)$$

Vztah (2.15) můžeme dále upravit jako

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left( \delta_{ij} \delta_{ik} + \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \delta_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) dx_j dx_k = \\ &= \delta_{jk} dx_j dx_k + \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) dx_j dx_k. \end{aligned} \quad (2.16)$$



Rozdíl kvadrátů vzdáleností bodů před deformací a po ní lze zapsat jako

$$ds^2 - ds_0^2 = \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) dx_j dx_k = 2\epsilon_{jk} dx_j dx_k, \quad (2.17)$$

kde jednotlivé složky veličiny  $\epsilon_{jk}$  jsou dány předpisem

$$\epsilon_{jk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right). \quad (2.18)$$

Tuto veličinu nazveme tenzorem konečné deformace  $\epsilon$ , viz [3]. Tento tenzor je symetrický tenzor druhého řádu. Při uvažování pouze malých deformací lze nelineární člen zanedbat. Linearizací vztahu (2.18) získáme tenzor malých deformací  $e$ , jehož jednotlivé složky jsou definované vztahem

$$e_{jk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \quad (2.19)$$

Tenzor malých deformací je také symetrickým tenzorem druhého řádu. Oproti tenzoru konečné deformace má přímý geometrický význam. Diagonální složky tenzoru malých deformací vyjadřují relativní změnu délek elementů, které byly před deformací rovnoběžné se souřadnicovými osami, a mimodiagonální složky představují poloviny smykových úhlů, viz [3].

### 2.1.3 Zobecněný Hookeův zákon

Jak jsme uvedli výše, vlivem vnějších sil dochází k deformaci elastického tělesa. Přestanou-li působit na elastické těleso vnější síly, dojde k obnově původní konfigurace. V této práci se dále omezíme na lineární elastické těleso, kdy deformace popsané tenzorem malých deformací a napětí jsou přímo úměrné. Tuto závislost popisuje zobecněný Hookeův zákon

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}, \quad (2.20)$$

kde  $C_{ijkl}$  jsou složky tenzoru čtvrtého řádu, které nazýváme elastickými koeficienty, viz [3]. Celkový počet těchto koeficientů je 81. Tyto koeficienty mohou být obecně funkcemi souřadnic. Dále budeme uvažovat homogenní těleso, jehož elastické vlastnosti jsou ve všech jeho bodech shodné, tedy elastické koeficienty budou konstantní. Ze symetrie tenzoru malých deformací a napětí plyne

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad \text{a} \quad C_{ijkl} = C_{ijlk}. \quad (2.21)$$

Tím se počet nezávislých elastických koeficientů zredukuje na 36, viz [3]. Dále z energetických úvah plyne

$$C_{ijkl} = C_{klij}, \quad (2.22)$$

tedy nejobecnější anizotropní materiál je popsán 21 nezávislými elastickými koeficienty, viz [3]. Za předpokladu izotropního materiálu, tedy materiálu, který vykazuje

ve všech směrech stejné vlastnosti, počet nezávislých elastických koeficientů klesne na dva. Vztah (2.20) lze přepsat do tvaru

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu e_{ij}, \quad (2.23)$$

kde  $\lambda$  a  $\mu$  jsou Lamého konstanty. Tyto konstanty lze stanovit ze znalosti Youngova modulu pružnosti  $E$  a Poissonova čísla  $\nu$  jako

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{a} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (2.24)$$

viz [3].

### 2.1.4 Okrajové podmínky

Uvažujme hranici  $\partial\Omega^s$  oblasti  $\Omega^s$  elastického tělesa složenou ze dvou disjunktních částí  $\Gamma_D^s$  a  $\Gamma_N^s$ , kde  $\partial\Omega^s = \bar{\Gamma}_D^s \cup \bar{\Gamma}_N^s$ , viz obr. 2.1. Jelikož rovnice (2.7), kde jednotlivé složky  $\tau_{ij}$  tenzoru napětí závisí na funkci posunutí  $\mathbf{u}$  díky uvažování vztahu (2.23), je nezávislá na čase, tak pro kompletní matematickou formulaci je třeba ji doplnit pouze o okrajové podmínky na celé hranici  $\partial\Omega^s$ . V této práci budeme uvažovat kombinaci těchto okrajových podmínek:

- **Dirichletova okrajová podmínka**

Tato okrajová podmínka předepisuje určitou hodnotu hledané funkce  $\mathbf{u}$  na hranici  $\Gamma_D^s$ , tedy

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}_D(x) \quad \text{pro } x \in \Gamma_D^s. \quad (2.25)$$

Dirichletova okrajová podmínka se používá v úlohách pružnosti pro vynucení určitého posuvu  $\mathbf{u}_D$  na hranici  $\Gamma_D^s$ .

- **Neumannova okrajová podmínka**

Neumannovu okrajovou podmínku předepisujeme na hranici  $\Gamma_N^s$  ve tvaru

$$\tau_{ij}(x) n_j^s(x) = T_i(x) \quad \text{pro } x \in \Gamma_N^s. \quad (2.26)$$

Má význam působení plošných sil pomocí vektoru napětí  $\mathbf{T}$  ve směru jednotkové vnější normály  $\mathbf{n}^s$  k hranici  $\Gamma_N^s$ .

## 2.2 Dynamické rovnice elastického tělesa

Uvažujme nyní elastické těleso, které se pohybuje. Pak funkce  $u_i$ ,  $\tau_{ij}$  a  $F_i$  již nejsou pouze funkcí souřadnic  $x_i$ , ale i funkcí času  $t$  a je nutno uvažovat i účinek setrvačných sil. Velikost setrvačné síly se rovná součinu hmoty a zrychlení, tedy na každý objemový element  $V$  působí setrvačná síla o velikosti  $\int_V \rho^s \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dV$ , kde  $\rho^s$  je hustota

tělesa. Tato síla se tedy řadí mezi síly objemové. Za pomoci d'Alembertova principu lze přidáním setrvačné síly, která působí proti objemovým a plošným silám, do rovnic statické rovnováhy (2.6) získat pohybové rovnice elastického tělesa, viz [3]. Pohybové rovnice elastického tělesa lze zapsat ve složkovém tvaru jako

$$\int_V \left( F_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) dV = \int_V \rho^s \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dV. \quad (2.27)$$

Stejně jako u rovnic statické rovnováhy musí rovnice (2.27) platit pro libovolný objem  $V$ , lze tedy psát

$$F_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \rho^s \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (2.28)$$

kde složky  $\tau_{ij}$  tenzoru napětí jsou funkcí posunutí  $\mathbf{u}$ .

### 2.2.1 Okrajové a počáteční podmínky

Pro kompletní matematickou formulaci dynamického problému musíme rovnice (2.28) doplnit nejenom o okrajové podmínky na celé hranici  $\partial\Omega^s$ , ale i o podmínky počáteční.

- **Počáteční podmínky**

Pro čas  $t = 0$  předepíšeme počáteční podmínky pro polohu a rychlost elastického tělesa

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) \quad \text{pro } x \in \bar{\Omega}^s, \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, 0) = \mathbf{u}_1(x) \quad \text{pro } x \in \bar{\Omega}^s. \quad (2.30)$$

- **Okrajové podmínky**

Stejně jako u stacionárního problému i nyní okrajové podmínky popisují posuny na části hranice  $\Gamma_D^s$  a rozložení plošných sil na části hranice  $\Gamma_N^s$ . Dirichletova okrajová podmínka je tedy analogická vztahu (2.25), respektive Neumannova okrajová podmínka vztahu (2.26), tedy

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_D(x, t) \quad \text{pro } x \in \Gamma_D^s, \quad t \in (0, T), \quad (2.31)$$

respektive

$$\tau_{ij}(x, t) n_j^s(x) = T_i(x, t) \quad \text{pro } x \in \Gamma_N^s, \quad t \in (0, T). \quad (2.32)$$

## 2.3 Popis ve frekvenční doméně

Při popisu elastického tělesa ve frekvenční doméně využijeme stejného přístupu jako při popisu akustického pole. Za předpokladu časově harmonického vektorového pole lze posunutí  $\mathbf{u}$  psát ve tvaru

$$\mathbf{u}(x, t) = \hat{\mathbf{u}}(x, \omega^s) e^{-j\omega^s t}, \quad (2.33)$$

kde  $\hat{\mathbf{u}}(x, \omega^s)$  je obecně komplexní funkce závislá na prostorové proměnné  $x$  a kruhové frekvenci  $\omega^s$ . Dosazením vztahu (2.33) do rovnic dynamického problému (2.28) a následnou úpravou získáme

$$-\frac{\partial \hat{\tau}_{ij}}{\partial x_j} - (\omega^s)^2 \rho^s \hat{u}_i = \hat{F}_i(x, \omega), \quad (2.34)$$

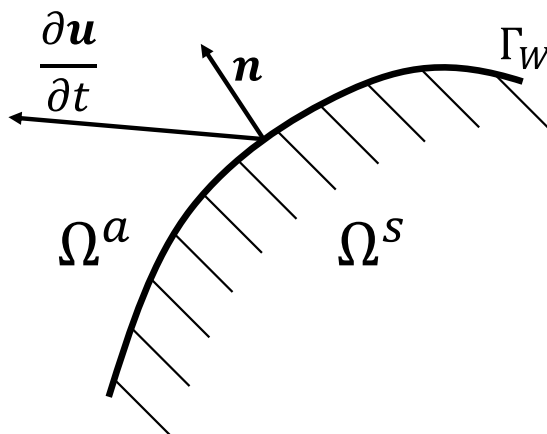
kde jednotlivé složky  $\hat{\tau}_{ij}$  tenzoru napětí jsou závislé na funkci  $\hat{\mathbf{u}}$ . Jelikož se nacházíme ve frekvenční doméně, tak pro kompletní matematickou formulaci doplníme rovnici (2.34) pouze o okrajové podmínky analogicky ke vztahům (2.31) a (2.32), tedy

$$\hat{\mathbf{u}}(x, \omega^s) = \hat{\mathbf{u}}_D(x, \omega^s) \quad \text{pro } x \in \Gamma_D^s, \quad (2.35)$$

$$\hat{\tau}_{ij}(x, \omega^s) n_j^s(x) = \hat{T}_i(x, \omega^s) \quad \text{pro } x \in \Gamma_N^s. \quad (2.36)$$

## 2.4 Vibroakustický problém

Uvažované problémy akustického pole a elastického tělesa nebudeme řešit pouze odděleně, ale budeme uvažovat také jejich vzájemnou interakci, viz [14]. Poté mluvíme o tzv. sdruženém problému. Nechť tedy existuje společná část hranice  $\Gamma_W = \partial\Omega^a \cap \partial\Omega^s$ . Tuto společnou část  $\Gamma_W$  nazveme rozhraním, přes které dochází k vzájemné interakci, viz obr. 2.3.



Obrázek 2.3: Část rozhraní akustického pole a elastického tělesa, kde  $\mathbf{n}$  je jednotková normála a  $\mathbf{u}$  je posunutí.

### 2.4.1 Podmínky na rozhraní v časové doméně

Na tomto rozhraní vyžadujeme, aby normálová složka akustické rychlosti byla rovna normálové složce rychlosti povrchu elastického tělesa

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}' - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}) = 0, \quad (2.37)$$

kde  $\mathbf{n}$  je jednotková normála<sup>1</sup> k hranici  $\Gamma_W$ . Pomocí rovnice (1.18) bez zdrojového členu  $\mathbf{f}$  lze vztah (2.37) přepsat do tvaru

$$\frac{\partial p'}{\partial \mathbf{n}}(x, t) = -\rho_0 \mathbf{n}(x) \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(x, t) \quad \text{pro } x \in \Gamma_W, \quad t \in (0, T). \quad (2.38)$$

Tuto podmínku (2.38) předepisujeme jako okrajovou podmínku pro akustický problém.

Z pohledu elastického tělesa musíme vzít v potaz, že tlakové fluktuace  $p'$  způsobují na povrchu elastického tělesa mechanické napětí. To lze na základně požadavku rovnosti normálových napětí na rozhraní popsat pomocí tenzoru napětí jako

$$\tau_{ij}(x, t) n_j(x) = -p'(x, t) n_i(x) \quad \text{pro } x \in \Gamma_W, \quad t \in (0, T), \quad (2.39)$$

kde  $n_i$  jsou složky jednotkové normály k hranici  $\Gamma_W$ , viz [14].

Podmínky na rozhraní (2.38) a (2.39) předepisujeme jako Neumannovy okrajové podmínky pro rovnice (1.22) a (2.28).

## 2.4.2 Formulace vibroakustického problému v časové doméně

Nyní shrneme výsledné rovnice, které využijeme k popisu vibroakustického problému.

Jedná se o složitý problém, kde nyní funkce  $p'$  závisí na neznámé funkci  $\mathbf{u}$  a naopak funkce  $\mathbf{u}$  závisí na funkci  $p'$ . Takto je zároveň zřejmé, že akustické ani elastické rovnice nelze řešit odděleně, ale oba problémy i jejich řešení na sobě vzájemně závisí.

### • Akustické pole

Hledáme neznámou funkci fluktuace tlaku  $p' : \Omega^a \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , kde oblast  $\Omega^a \subset \mathbb{R}^3$  je omezená s lipschitzovsky spojitou hranicí  $\partial\Omega^a$ , splňující parciální diferenciální rovnici

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \mathcal{F} \quad \text{v } \Omega^a \times (0, T), \quad (2.40)$$

spolu s počátečními podmínkami v čase  $t = 0$

$$p'(x, 0) = p'_0(x) \quad \text{pro } x \in \overline{\Omega}^a, \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t}(x, 0) = p'_1(x) \quad \text{pro } x \in \overline{\Omega}^a \quad (2.42)$$

---

<sup>1</sup>V tomto případě není podstatné, k jaké doméně uvažujeme vnější jednotkovou normálu.

a okrajovými podmínkami

$$p'(x, t) = p'_D(x, t) \quad \text{pro } x \in \Gamma_D^a, \quad t \in (0, T), \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial \mathbf{n}^a}(x, t) = p'_N(x, t) \quad \text{pro } x \in \Gamma_N^a, \quad t \in (0, T), \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial \mathbf{n}^a}(x, t) = -\frac{1}{a_0} \frac{\partial p'}{\partial t}(x, t) \quad \text{pro } x \in \Gamma_S^a, \quad t \in (0, T), \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial \mathbf{n}^a}(x, t) = -\rho_0 \mathbf{n}^a(x) \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(x, t) \quad \text{pro } x \in \Gamma_W, \quad t \in (0, T). \quad (2.46)$$

Předpokládáme spojitost  $\mathcal{F}$ , tj. přesněji  $\mathcal{F}(x, t) \in C(\overline{\Omega}^a \times [0, T])$  a dále  $p'_D(x, t) \in C(\Gamma_D^a \times [0, T])$ ,  $p'_N(x, t) \in C(\Gamma_N^a \times [0, T])$  a  $p'_0(x), p'_1(x) \in C(\overline{\Omega}^a)$ .

Pak klasickým řešením akustických rovnic (2.40) až (2.45) nazveme funkci  $p'(x, t) \in C^{(2)}(\Omega^a \times (0, T)) \cap C^{(1)}(\overline{\Omega}^a \times (0, T))$  splňující rovnici (2.40) spolu s počátečními a okrajovými podmínkami (2.41) až (2.45).

#### • Elastické těleso

Hledáme neznámou funkci posunutí  $\mathbf{u} : \Omega^s \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , kde oblast  $\Omega^s \subset \mathbb{R}^3$  je omezená s lipschitzovskými spojitou hranicí  $\partial\Omega^s$ , splňující parciální diferenciální rovnice

$$\rho^s \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial \tau_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} = F_i \quad \text{v } \Omega^s \times (0, T), \quad (2.47)$$

kde závislost složek  $\tau_{ij}$  tenzoru napětí na funkci posunutí  $\mathbf{u}$  je dána Hookeovým zákonem (2.23). Dále požadujeme, aby funkce  $\mathbf{u}$  splňovala počáteční podmínky

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) \quad \text{pro } x \in \overline{\Omega}^s, \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, 0) = \mathbf{u}_1(x) \quad \text{pro } x \in \overline{\Omega}^s \quad (2.49)$$

a okrajové podmínky

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_D(x, t) \quad \text{pro } x \in \Gamma_D^s, \quad t \in (0, T), \quad (2.50)$$

$$\tau_{ij}(x, t) n_j^s(x) = T_i(x, t) \quad \text{pro } x \in \Gamma_N^s, \quad t \in (0, T), \quad (2.51)$$

$$\tau_{ij}(x, t) n_j^s(x) = -p'(x, t) n_i^s(x) \quad \text{pro } x \in \Gamma_W, \quad t \in (0, T). \quad (2.52)$$

Dále předpokládejme, že platí  $F_i(x, t) \in C(\overline{\Omega}^s \times [0, T])$ ,  $\mathbf{u}_D(x, t) \in [C(\Gamma_D^s \times [0, T])]^2$ ,  $T_i(x, t) \in C(\Gamma_N^s \times [0, T])$ ,  $\mathbf{u}_0(x), \mathbf{u}_1(x) \in [C(\overline{\Omega}^s)]^2$  a  $\rho^s$  je konstantní.

Pak klasickým řešením elastických rovnic (2.47) až (2.51) nazveme funkci  $\mathbf{u}(x, t) \in [C^{(2)}(\Omega^s \times (0, T)) \cap C^{(1)}(\overline{\Omega}^s \times (0, T))]^3$  splňující rovnice (2.47) spolu s počátečními a okrajovými podmínkami (2.48) až (2.51).

Za klasické řešení vibroakustické úlohy dané rovnicemi (2.40) a (2.47) považujeme dvojici funkcí  $p'(x, t) \in C^{(2)}(\Omega^a \times (0, T)) \cap C^{(1)}(\overline{\Omega^a} \times (0, T))$  a  $\mathbf{u}(x, t) \in \left[ C^{(2)}(\Omega^s \times (0, T)) \cap C^{(1)}(\overline{\Omega^s} \times (0, T)) \right]^3$  splňující rovnice (2.40) a (2.47) spolu s počátečními a okrajovými podmínkami (2.41) až (2.46) a (2.48) až (2.52).

### 2.4.3 Podmínky na rozhraní ve frekvenční doméně

Ve frekvenční doméně uvažujeme v akustickém poli fluktuace tlaku  $p'$  ve tvaru (1.32), respektive pole posuvů  $\mathbf{u}$  elastického tělesa ve tvaru (2.33). Tyto vztahy dosadíme do podmínek na rozhraní, které byly formulovány pro časovou doménu, tedy do vztahů (2.38) a (2.39). Po úpravě lze podmínku (2.38), respektive podmínku (2.39), přepsat do tvaru

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \mathbf{n}}(x, \omega) = \rho_0 \omega^2 \mathbf{n}(x) \cdot \hat{\mathbf{u}}(x, \omega) \quad \text{pro } x \in \Gamma_W, \quad (2.53)$$

respektive

$$\hat{\tau}_{ij}(x, t) n_j(x) = -\hat{p}(x, \omega) n_i(x) \quad \text{pro } x \in \Gamma_W, \quad (2.54)$$

kde  $\omega$  je zvolená kruhová frekvence charakterizující vibroakustický systém.

### 2.4.4 Formulace vibroakustického problému ve frekvenční doméně

Při formulaci vibroakustického problému ve frekvenční doméně je postup analogický jako v předchozích odstavcích.

- **Akustické pole**

Hledáme pro zadanou kruhovou frekvenci  $\omega$  neznámou funkci  $\hat{p} : \Omega^a \rightarrow \mathbb{R}$  splňující parciální diferenciální rovnici

$$-\Delta \hat{p} - \left( \frac{\omega}{a_0} \right)^2 \hat{p} = \hat{\mathcal{F}}(x, \omega) \quad \text{v } \Omega^a, \quad (2.55)$$

spolu s okrajovými podmínkami

$$\hat{p}(x, \omega) = \hat{p}_D(x, \omega) \quad \text{pro } x \in \Gamma_D^a, \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \mathbf{n}^a}(x, \omega) = \hat{p}_N(x, \omega) \quad \text{pro } x \in \Gamma_N^a, \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \mathbf{n}^a}(x, \omega) = j \frac{\omega}{a_0} \hat{p}(x, \omega) \quad \text{pro } x \in \Gamma_S^a, \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \mathbf{n}^a}(x, \omega) = \rho_0 \omega^2 \mathbf{n}^a(x) \cdot \hat{\mathbf{u}}(x, \omega) \quad \text{pro } x \in \Gamma_W. \quad (2.59)$$

- **Elastické těleso**

Hledáme neznámou funkci  $\hat{\mathbf{u}} : \Omega^s \rightarrow \mathbb{R}^3$  splňující parciální diferenciální rovnice

$$-\frac{\partial \hat{\tau}_{ij}(\hat{\mathbf{u}})}{\partial x_j} - \omega^2 \rho^s \hat{u}_i = \hat{F}_i(x, \omega) \quad \text{v } \Omega^s, \quad (2.60)$$

spolu s okrajovými podmínkami

$$\hat{\mathbf{u}}(x, \omega) = \hat{\mathbf{u}}_D(x, \omega) \quad \text{pro } x \in \Gamma_D^s, \quad (2.61)$$

$$\hat{\tau}_{ij}(x, \omega) n_j^s(x) = \hat{T}_i(x, \omega) \quad \text{pro } x \in \Gamma_N^s, \quad (2.62)$$

$$\hat{\tau}_{ij}(x, \omega) n_j^s(x) = -\hat{p}(x, \omega) n_i^s(x) \quad \text{pro } x \in \Gamma_W. \quad (2.63)$$



# Kapitola 3

## Prostorová diskretizace pomocí metody konečných prvků

V této kapitole převedeme Helmholtzovu rovnici do slabé formulace a popíšeme zde základní principy metody konečných prvků. Do slabé formulace převedeme také rovnice popisující elastický problém. Dále uvedeme slabou formulaci sduženého problému a jeho numerickou realizaci.

V této práci budeme realizovat 2D výpočet, a proto dále budeme uvažovat  $\Omega^a \subset \mathbb{R}^2$ , respektive  $\Omega^s \subset \mathbb{R}^2$ . Popis uvedený v předchozích kapitolách zůstává v platnosti.

### 3.1 Slabá formulace Helmholtzovy rovnice

Pro potřeby metody konečných prvků převedeme Helmholtzovu rovnici (1.33) spolu s okrajovými podmínkami do slabé formulace. Tuto rovnici pro jedno pevně zvolené  $\omega \in \mathbb{R}$  vynásobíme testovací funkcí  $v \in V = \{f \in H^1(\Omega^a) \mid f = 0 \text{ na } \Gamma_D^a\}$ , kde prostor  $H^1(\Omega^a)$  je Sobolevův prostor na množině  $\Omega^a$ , viz [20]. Tento prostor je tvořen takovými funkcemi  $f$  z Lebesgueova prostoru  $L^2(\Omega^a)$ , které mají navíc integrovatelné s kvadrátem i první parciální derivace, tj.  $\int_{\Omega^a} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 dx < +\infty$ . Rovnost  $f = 0$  na části hranici  $\Gamma_D^a$ , kde předepisujeme Dirichletovu okrajovou podmínku, je myšlena ve smyslu stop, viz [20]. Násobením rovnice (1.33) funkcí  $v$  a následnou integrací přes celou oblast  $\Omega^a$  dostáváme

$$-\int_{\Omega^a} \Delta \hat{p} v \, dx - \int_{\Omega^a} \left(\frac{\omega^a}{a_0}\right)^2 \hat{p} v \, dx = \int_{\Omega^a} \hat{\mathcal{F}} v \, dx, \quad (3.1)$$

kde člen  $\Delta \hat{p}$  lze zapsat pomocí Einsteinovy sumační konvence jako  $\Delta \hat{p} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i}\right)$ . Na první člen rovnice (3.1) aplikujeme Greenovu větu, viz [20],

$$-\int_{\Omega^a} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i}\right) v \, dx = -\int_{\partial \Omega^a} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \mathbf{n}^a} v \, dS + \int_{\Omega^a} \nabla \hat{p} \cdot \nabla v \, dx, \quad (3.2)$$

kde integrál přes hranici  $\partial\Omega^a$  lze rozepsat jako

$$-\int_{\partial\Omega^a} \frac{\partial\hat{p}}{\partial\mathbf{n}^a} v \, dS = -\int_{\Gamma_D^a} \frac{\partial\hat{p}}{\partial\mathbf{n}^a} v \, dS - \int_{\Gamma_N^a} \frac{\partial\hat{p}}{\partial\mathbf{n}^a} v \, dS - \int_{\Gamma_S^a} \frac{\partial\hat{p}}{\partial\mathbf{n}^a} v \, dS. \quad (3.3)$$

Jelikož je testovací funkce  $v$  z prostoru  $V$  definovaného výše, tak na části hranice  $\Gamma_D^a$  je tato testovací funkce rovna nule, tedy  $\int_{\Gamma_D^a} \frac{\partial\hat{p}}{\partial\mathbf{n}^a} v \, dS = 0$ . Na části hranice  $\Gamma_N^a$  uvažujeme Neumannovu okrajovou podmínku ve tvaru (1.35), tedy  $\frac{\partial\hat{p}}{\partial\mathbf{n}^a} = \hat{p}_N$ , a ze Sommerfeldovy okrajové podmínky (1.36) plyne, že výraz  $\frac{\partial\hat{p}}{\partial\mathbf{n}^a}$  je na části hranice  $\Gamma_S$  roven  $j\frac{\omega^a}{a_0}\hat{p}$ . Získáváme tak výslednou rovnici ve tvaru

$$\int_{\Omega^a} \nabla\hat{p} \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Gamma_S^a} j\frac{\omega^a}{a_0}\hat{p}v \, dS - \int_{\Omega^a} \left(\frac{\omega^a}{a_0}\right)^2 \hat{p}v \, dx = \int_{\Omega^a} \hat{\mathcal{F}}v \, dx + \int_{\Gamma_N^a} \hat{p}_N v \, dS. \quad (3.4)$$

Slabým řešením Helmholtzovy rovnice (1.33) pro pevně zvolené  $\omega^a$  nazveme takovou funkci  $\hat{p} \in H^1(\Omega^a)$ , pro kterou je rovnice (3.4) splněna pro každou funkci  $v \in V$  a zároveň funkce  $\hat{p}$  splňuje Dirichletovu okrajovou podmínku (1.34) na části hranice  $\Gamma_D^a$ .

## 3.2 Prostorová diskretizace Helmholtzovy rovnice

Jelikož hledáme přibližné řešení problému (3.4) pomocí metody konečných prvků, tak nekonečně dimenzionální prostor testovacích funkcí  $V$  nahradíme konečně dimenzionálním prostorem  $V_h$  s dimenzí  $N_h^a$ , kde navíc platí, že  $V_h \subset V$ . Hledáme tedy numerické řešení  $\hat{p}_h \in H_h$ , kde  $H_h \subset H^1(\Omega^a)$ , takové, že pro všechny testovací funkce  $v_h \in V_h$  platí

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^a} \nabla\hat{p}_h \cdot \nabla v_h \, dx - \int_{\Gamma_S^a} j\frac{\omega^a}{a_0}\hat{p}_h v_h \, dS - \int_{\Omega^a} \left(\frac{\omega^a}{a_0}\right)^2 \hat{p}_h v_h \, dx = \\ = \int_{\Omega^a} \hat{\mathcal{F}}v_h \, dx + \int_{\Gamma_N^a} \hat{p}_N v_h \, dS. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Nechť konečně dimenzionální prostor  $V_h$  je generován bází s prvky  $\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h^a}$ , které budeme nazývat bázovými funkcemi. Potom každou funkci z prostoru  $V_h$  lze zapsat pomocí lineární kombinace těchto bázových funkcí, tedy i hledané řešení. To budeme uvažovat ve tvaru

$$\hat{p}_h(x, \omega^a) = \sum_{j=1}^{N_h^a} \alpha_j(\omega^a) \varphi_j(x), \quad (3.6)$$

kde  $\alpha_j \in \mathbb{C}$  jsou neznámé koeficienty.<sup>1</sup> Jelikož rovnice (3.5) platí pro všechny testovací funkce  $v_h$  z prostoru  $V_h$ , tak za testovací funkci  $v_h$  lze postupně volit bázové funkce, tedy

$$v_h = \varphi_i \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, N_h^a. \quad (3.7)$$

<sup>1</sup>Neznámé koeficienty  $\alpha_j$  uvažujeme obecně komplexní, jelikož z předchozího textu plyne předpoklad  $\hat{p}_h \in \mathbb{C}$ .

Dosazením vztahů (3.6) a (3.7) do rovnice (3.5) a následným upravením získáváme

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N_h^a} \alpha_j \underbrace{\int_{\Omega^a} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx}_{k_{ij}^a} - j \frac{\omega^a}{a_0} \sum_{j=1}^{N_h^a} \alpha_j \underbrace{\int_{\Gamma_S^a} \varphi_j \varphi_i \, dS}_{c_{ij}^a} - \\ & - \left( \frac{\omega^a}{a_0} \right)^2 \sum_{j=1}^{N_h^a} \alpha_j \underbrace{\int_{\Omega^a} \varphi_j \varphi_i \, dx}_{m_{ij}^a} = \underbrace{\int_{\Omega^a} \hat{\mathcal{F}} \varphi_i \, dx + \int_{\Gamma_N^a} \hat{p}_N \varphi_i \, dS}_{b_i^a}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Soustavu rovnic (3.8) lze přepsat do maticové podoby jako

$$\left( \mathbb{K}^a - j \frac{\omega^a}{a_0} \mathbb{C}^a - \left( \frac{\omega^a}{a_0} \right)^2 \mathbb{M}^a \right) \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}^a, \quad (3.9)$$

kde  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_j)_{j=1}^{N_h^a}$  je neznámý vektor koeficientů a prvky matice tuhosti  $\mathbb{K}^a = (k_{ij}^a)_{i,j=1}^{N_h^a}$ , matice tlumení  $\mathbb{C}^a = (c_{ij}^a)_{i,j=1}^{N_h^a}$ , matice hmotnosti  $\mathbb{M}^a = (m_{ij}^a)_{i,j=1}^{N_h^a}$  a vektoru pravé strany  $\mathbf{b}^a = (b_i^a)_{i=1}^{N_h^a}$  jsou dány následujícími vztahy

$$k_{ij}^a = \int_{\Omega^a} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx, \quad (3.10)$$

$$c_{ij}^a = \int_{\Gamma_S^a} \varphi_j \varphi_i \, dS, \quad (3.11)$$

$$m_{ij}^a = \int_{\Omega^a} \varphi_j \varphi_i \, dx, \quad (3.12)$$

$$b_i^a = \int_{\Omega^a} \hat{\mathcal{F}} \varphi_i \, dx + \int_{\Gamma_N^a} \hat{p}_N \varphi_i \, dS. \quad (3.13)$$

Matice tuhosti  $\mathbb{K}^a$ , matice tlumení  $\mathbb{C}^a$  a matice hmotnosti  $\mathbb{M}^a$  jsou symetrické a navíc matice tuhosti  $\mathbb{K}^a$  a matice hmotnosti  $\mathbb{M}^a$  jsou pozitivně definitní, viz [15].

### 3.3 Metoda konečných prvků

V této podkapitole popíšeme základní principy metody konečných prvků a navážeme tak na předchozí práci [10], kde je uveden podrobnější popis a odvození.

- **Triangulace**

Předpokládejme, že oblast  $\Omega^a$  je omezená a polygonální. Tuto oblast  $\Omega^a$  pak lze pokrýt triangulací  $\tau_h^a$ , kde  $h$  je parametr charakterizující velikost trojúhelníků. Dále budeme předpokládat, že vytvořená triangulace  $\tau_h^a$  je přípustná a regulární, viz [10], [20]. Zavedme označení  $K$  pro trojúhelníky triangulace  $\tau_h^a$ , pro které platí  $\bar{\Omega}^a = \bigcup_{K \in \tau_h^a} K$ . Dále symbolem  $S$  označíme strany trojúhelníků  $K$ . Symboly  $\gamma_D^a$ ,  $\gamma_N^a$  a  $\gamma_S^a$  označíme množinu všech stran  $S$  trojúhelníků  $K$ ,

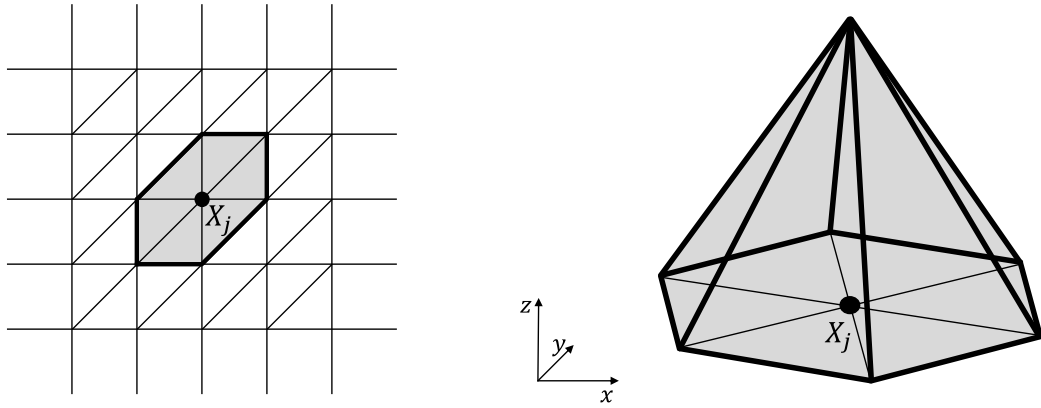
kteří leží na části hranice  $\Gamma_D^a$ ,  $\Gamma_N^a$  a  $\Gamma_S^a$ , tedy  $\Gamma_D^a = \bigcup_{S \in \gamma_D^a} S$ ,  $\Gamma_N^a = \bigcup_{S \in \gamma_N^a} S$   
a  $\Gamma_S^a = \bigcup_{S \in \gamma_S^a} S$ .

- **Volba báze**

Pro snadnější řešitelnost maticového systému (3.9) i pro velký počet neznámých požadujeme, aby jednotlivé matice byly matice řídké. Tohoto požadavku dosáhneme volbou takových bazových funkcí, jejichž nosič bude co nejmenší. V této práci zvolíme konečné prvky jako Lagrangeovské lineární, viz [20]. Tedy uvažujme prostor  $V_h = \{\varphi \in C(\Omega^a) : \varphi|_K \in P_1(K) \forall K \in \tau_h^a\}$ , kde  $C(\Omega^a)$  je množina spojitých funkcí na  $\Omega^a$ ,  $P_1(K)$  je množina polynomů nejvýše prvního stupně na  $K$ . Bazové funkce pak volíme ve tvaru

$$\varphi_i(X_j) = \delta_{ij}, \quad (3.14)$$

kde  $X_j$  je  $j$ -tý vrchol dané triangulace. V trojúhelnících, které neobsahují vrchol  $X_j$ , je funkční hodnota bazové funkce  $\varphi_j$  rovna nule. Na trojúhelníku s vrcholem  $X_j$  klesá bazová funkce lineárně z funkční hodnoty jedna až k hodnotě nula, viz obr. 3.1.



Obrázek 3.1: Vlevo je vyznačen nosič bazové funkce  $\varphi_j$  příslušící vrcholu  $X_j$ , vpravo je zobrazen její graf.

- **Referenční zobrazení**

Jelikož budeme používat při numerické realizaci metody konečných prvků ne-  
strukturovanou triangulaci oblasti  $\Omega^a$ , využijeme bijektivní afinní zobrazení  
referenčního trojúhelníku  $\hat{K}$  s vrcholy  $\hat{A} = [0, 0]$ ,  $\hat{B} = [1, 0]$  a  $\hat{C} = [0, 1]$  na  
libovolný trojúhelník  $K$  s vrcholy  $A = [a_1, a_2]$ ,  $B = [b_1, b_2]$  a  $C = [c_1, c_2]$ . Toto  
zobrazení lze definovat předpisem

$$F_K : \hat{K} \mapsto K, \quad F_K(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbb{B}_K \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_K, \quad (3.15)$$

kde  $\mathbb{B}_K$  je regulární matice a  $\mathbf{b}_K$  je konstantní vektor. Jednotlivé prvky matice  
 $\mathbb{B}_K$  a vektoru  $\mathbf{b}_K$  jsou dány vztahy

$$\mathbb{B}_K = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_K = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Zavedme inverzní zobrazení

$$F_K^{-1} : K \mapsto \hat{K}, \quad F_K^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbb{B}_K^{-1} \mathbf{x} - \mathbb{B}_K^{-1} \mathbf{b}_K. \quad (3.17)$$

Dále při výpočtu jednotlivých integrálů pomocí substituce je zapotřebí Jakobian  $J$  této lineární transformace, který vypočteme jako

$$J = |\det \mathbb{B}_K| = \frac{|K|}{|\hat{K}|}, \quad (3.18)$$

kde  $|K|$  a  $|\hat{K}|$  značí obsah trojúhelníků  $K$  a  $\hat{K}$ , viz [20]. Bázové funkce příslušící referenčnímu trojúhelníku  $\hat{K}$  s předpisem

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{\hat{A}}(\hat{x}, \hat{y}) &= 1 - \hat{x} - \hat{y}, \\ \hat{\varphi}_{\hat{B}}(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{x}, \\ \hat{\varphi}_{\hat{C}}(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{y} \end{aligned} \quad (3.19)$$

transformujeme na bázové funkce příslušící libovolnému trojúhelníku  $K$  pomocí vztahu

$$\varphi_j(x, y) = \hat{\varphi}_j(\hat{x}, \hat{y}). \quad (3.20)$$

Gradienty na libovolném trojúhelníku  $K$  pak lze vyjádřit jako

$$\nabla \varphi_j(x, y) = \hat{\nabla} \hat{\varphi}_j(\hat{x}, \hat{y}) \mathbb{B}_K^{-1}, \quad (3.21)$$

kde gradienty  $\hat{\nabla} \hat{\varphi}_j$  na referenčním trojúhelníku  $\hat{K}$  lze jednoduše určit ze znalosti bázových funkcí (3.19). Pro podrobnější popis, viz předchozí práce [10] anebo [20].

### 3.4 Sestavení jednotlivých matic a vektoru pravé strany

Pokračujme dále sestavením jednotlivých matic jako v práci [10].

- **Sestavení matice tuhosti**

Jednotlivé prvky  $k_{ij}^a$  matice tuhosti  $\mathbb{K}^a$  vypočteme jako

$$k_{ij}^a = \int_{\Omega^a} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx = \sum_{K \in \tau_h^a} \underbrace{\int_K \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx}_{k_{ij}^{a,K}} = \sum_{K \in \tau_h^a} k_{ij}^{a,K}. \quad (3.22)$$

Za použití referenčního zobrazení lze lokální příspěvky  $k_{ij}^{a,K}$  z trojúhelníku  $K$  do globálního prvku matice tuhosti  $k_{ij}^a$  přepsat do tvaru

$$k_{ij}^{a,K} = \int_{\hat{K}} |\det \mathbb{B}_K| \left( \hat{\nabla} \hat{\varphi}_j \mathbb{B}_K^{-1} \right) \cdot \left( \hat{\nabla} \hat{\varphi}_i \mathbb{B}_K^{-1} \right) \, d\hat{x}. \quad (3.23)$$

Jelikož  $\det \mathbb{B}_K$  je konstanta a z důvodu volby lineárních bázevých funkcí jsou gradienty bázevých funkcí také konstantní, lze předpis (3.23) zjednodušit na tvar

$$\begin{aligned} k_{ij}^{aK} &= |\det \mathbb{B}_K| \left( \hat{\nabla} \hat{\varphi}_j \mathbb{B}_K^{-1} \right) \cdot \left( \hat{\nabla} \hat{\varphi}_i \mathbb{B}_K^{-1} \right) \int_{\hat{K}} 1 \, d\hat{x} = \\ &= |K| \left( \hat{\nabla} \hat{\varphi}_j \mathbb{B}_K^{-1} \right) \cdot \left( \hat{\nabla} \hat{\varphi}_i \mathbb{B}_K^{-1} \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

- **Sestavení matice hmotnosti**

Při výpočtu jednotlivých prvků  $m_{ij}^a$  matice hmotnosti  $\mathbb{M}^a$  budeme postupovat analogicky jako při výpočtu prvků matice tuhosti, tedy

$$m_{ij}^a = \int_{\Omega^a} \varphi_j \varphi_i \, dx = \sum_{K \in \tau_h^a} \int_K \varphi_j \varphi_i \, dx = \sum_{K \in \tau_h^a} m_{ij}^{aK}. \quad (3.25)$$

Lokální příspěvek  $m_{ij}^{aK}$  do matice hmotnosti  $\mathbb{M}^a$  za použití referenčního zobrazení můžeme zapsat jako

$$m_{ij}^{aK} = \int_{\hat{K}} |\det \mathbb{B}_K| \hat{\varphi}_j \hat{\varphi}_i \, d\hat{x}. \quad (3.26)$$

Provedením součinu mezi dvěma lineárními bázevými funkcemi získáme polynom druhého stupně. Pro integraci na trojúhelníku  $\hat{K}$  využijeme numerické kvadratury přesné až pro polynomy druhého stupně. Tu lze obecně zapsat jako

$$m_{ij}^{aK} = |K| \sum_{m=1}^3 \omega_m \hat{\varphi}_j(\hat{X}_m) \hat{\varphi}_i(\hat{X}_m), \quad (3.27)$$

kde  $\omega_m$  jsou váhy a  $\hat{X}_m$  jsou uzly numerické kvadratury. Zde jsou zvoleny jako

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{3}, & \hat{X}_1 &= \left[ \frac{1}{2}, 0 \right], \\ \omega_2 &= \frac{1}{3}, & \hat{X}_2 &= \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right], \\ \omega_3 &= \frac{1}{3}, & \hat{X}_3 &= \left[ 0, \frac{1}{2} \right], \end{aligned} \quad (3.28)$$

viz [20].

- **Sestavení matice tlumení**

Stejných kroků jako při výpočtu prvků matice hmotnosti využijeme i při výpočtu jednotlivých prvků  $c_{ij}^a$  matice tlumení  $\mathbb{C}^a$ , tedy

$$c_{ij}^a = \int_{\Gamma_S^a} \varphi_j \varphi_i \, dS = \sum_{S \in \gamma_S^a} \int_S \varphi_j \varphi_i \, dS = \sum_{S \in \gamma_S^a} c_{ij}^{aS}. \quad (3.29)$$

Použitím referenčního zobrazení lze lokální příspěvek  $c_{ij}^{a,S}$  do matice tlumení  $\mathbb{C}^a$  zapsat jako

$$c_{ij}^{a,S} = \int_{\hat{S}} |S| \hat{\varphi}_j \hat{\varphi}_i \, d\hat{S}, \quad (3.30)$$

kde  $|S|$  značí velikost úsečky  $S$  a  $\hat{S}$  je referenční strana trojúhelníka  $\hat{K}$  mezi vrcholy  $\hat{A}$  a  $\hat{B}$ . Jelikož součinem básových funkcí získáme opět polynom druhého stupně, pro integraci na referenční straně  $\hat{S}$  využijeme opět numerické kvadratury, v tomto případě přesné pro polynomy až třetího stupně. Tedy

$$c_{ij}^{a,S} = |S| \sum_{n=1}^2 \omega_n \hat{\varphi}_j(\hat{X}_n) \hat{\varphi}_i(\hat{X}_n), \quad (3.31)$$

kde váhy  $\omega_n$  a uzly numerické kvadratury  $\hat{X}_n$  volíme jako

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2}, & \hat{X}_1 &= \left[ \frac{3 - \sqrt{3}}{6}, 0 \right], \\ \omega_2 &= \frac{1}{2}, & \hat{X}_2 &= \left[ \frac{3 + \sqrt{3}}{6}, 0 \right], \end{aligned} \quad (3.32)$$

viz [20].

#### • Sestavení vektoru pravé strany

K výpočtu jednotlivých prvků  $b_i^a$  vektoru pravé strany  $\mathbf{b}^a$  budeme přistupovat analogicky jako při výpočtu jednotlivých prvků matice hmotnosti  $\mathbb{M}^a$  a matice tlumení  $\mathbb{C}^a$ , tedy

$$b_i^a = \int_{\Omega^a} \hat{\mathcal{F}} \varphi_i \, dx + \int_{\Gamma_N^a} \hat{p}_N \varphi_i \, dS = \sum_{K \in \tau_n^a} \int_K \hat{\mathcal{F}} \varphi_i \, dx + \sum_{S \in \gamma_N^a} \int_S \hat{p}_N \varphi_i \, dS. \quad (3.33)$$

Použitím referenčního zobrazení lze lokální příspěvky  $b_i^{a,K+S}$  psát jako

$$b_i^{a,K+S} = \int_{\hat{K}} |\det \mathbb{B}_K| \hat{\mathcal{F}}(\hat{x}) \hat{\varphi}_i \, d\hat{x} + \int_{\hat{S}} |S| \hat{p}_N(\hat{x}) \hat{\varphi}_i \, d\hat{S}, \quad (3.34)$$

kde  $\hat{\mathcal{F}}(\hat{x}) = \hat{\mathcal{F}}(x)$ ,  $\hat{p}_N(\hat{x}) = \hat{p}_N(x)$  a  $x = F_K(\hat{x})$ . Pro výpočet integrálu na referenčním trojúhelníku  $\hat{K}$ , respektive na referenční straně  $\hat{S}$ , využijeme stejné numerické kvadratury, které jsme využili při výpočtu integrálu pro lokální příspěvek  $m_{ij}^{a,K}$  do matice hmotnosti  $\mathbb{M}^a$ , respektive pro lokální příspěvek  $c_{ij}^{a,K}$  do matice tlumení  $\mathbb{C}^a$ . Můžeme tedy psát

$$b_i^{a,K+S} = |K| \sum_{m=1}^3 \omega_m \hat{\mathcal{F}}(\hat{X}_m) \hat{\varphi}_i(\hat{X}_m) + |S| \sum_{n=1}^2 \omega_n \hat{p}_N(\hat{X}_n) \hat{\varphi}_i(\hat{X}_n). \quad (3.35)$$

### 3.5 Slabá formulace elastického problému

Stejně jako tomu bylo v případě Helmholtzovy rovnice, tak pro potřeby metody konečných prvků převedeme rovnice (2.34) popisující elastické těleso ve frekvenční doméně do slabé formulace. Tuto rovnici vynásobíme pro jedno pevně zvolené  $\omega^s \in \mathbb{R}$  testovací funkcí  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ , kde  $\mathbf{V} = V^s \times V^s$ , kde prostor  $V^s = \{f \in H^1(\Omega^s) \mid f = 0 \text{ na } \Gamma_D^s\}$ . Násobením rovnic (2.34) testovací funkcí  $\mathbf{v}$ , následnou integrací přes oblast  $\Omega^s$  a aplikací Greenovy věty získáváme

$$\int_{\Omega^s} \hat{\tau}_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \int_{\partial\Omega^s} \hat{\tau}_{ij} n_j^s v_i dS - \int_{\Omega^s} (\omega^s)^2 \rho^s \hat{u}_i v_i dx = \int_{\Omega^s} \hat{F}_i v_i dx, \quad (3.36)$$

kde

$$- \int_{\partial\Omega^s} \hat{\tau}_{ij} n_j^s v_i dS = - \int_{\Gamma_D^s} \hat{\tau}_{ij} n_j^s v_i dS - \int_{\Gamma_N^s} \hat{\tau}_{ij} n_j^s v_i dS. \quad (3.37)$$

Jelikož jsou obě složky testovací funkce  $v_i$  na části hranice  $\Gamma_D^s$  rovny nule, tak i integrál  $\int_{\Gamma_D^s} \hat{\tau}_{ij} n_j^s v_i dS$  je roven nule. Neumannovu okrajovou podmínku uvažujeme ve tvaru (2.36) na části hranice  $\Gamma_N^s$ , tedy  $\hat{\tau}_{ij} n_j^s = \hat{T}_i$ . Navíc využitím symetrie tenzoru napětí lze člen  $\int_{\Omega^s} \hat{\tau}_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx$  psát jako

$$\int_{\Omega^s} \hat{\tau}_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega^s} \frac{1}{2} \left( \hat{\tau}_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \hat{\tau}_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dx = \int_{\Omega^s} \hat{\tau}_{ij} e_{ij}(\mathbf{v}) dx. \quad (3.38)$$

Dále do výsledného vztahu (3.38) dosadíme vztah (2.23), tedy

$$\int_{\Omega^s} \hat{\tau}_{ij} e_{ij}(\mathbf{v}) dx = \int_{\Omega^s} (\lambda \delta_{ij} \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}} + 2\mu e_{ij}(\hat{\mathbf{u}})) e_{ij}(\mathbf{v}) dx. \quad (3.39)$$

Těmito úpravami získáváme výslednou rovnici ve tvaru

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^s} (\lambda \delta_{ij} \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}} + 2\mu e_{ij}(\hat{\mathbf{u}})) e_{ij}(\mathbf{v}) dx - \int_{\Omega^s} (\omega^s)^2 \rho^s \hat{u}_i v_i dx = \\ = \int_{\Omega^s} \hat{F}_i v_i dx + \int_{\Gamma_N^s} \hat{T}_i v_i dS. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Slabým řešením rovnic elastického tělesa (2.34) pro pevně zvolené  $\omega^s$  nazveme takovou funkci  $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}^1(\Omega^s)$ , kde  $\mathbf{H}^1(\Omega^s) = H^1(\Omega^s) \times H^1(\Omega^s)$ , pro kterou je rovnice (3.40) splněna pro každou funkci  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  a zároveň funkce  $\hat{\mathbf{u}}$  splňuje Dirichletovu okrajovou podmínku (2.35) na hranici  $\Gamma_D^s$ .

### 3.6 Prostorová diskretizace elastického problému

Budeme pokračovat analogicky jako v případě diskretizace Helmholtzovy rovnice, tedy nekonečně dimenzionální prostor  $\mathbf{V}$  testovacích funkcí nahradíme konečně dimenzionálním prostorem  $\mathbf{V}_h = V_h^s \times V_h^s$ , kde  $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$ . Prostor  $V_h^s$  je konečně



dimenzionální prostor s konečnou dimenzí  $N_h^s$ . Hledané numerické řešení  $\mathbf{u}_h \in \mathbf{H}_h$ , kde  $\mathbf{H}_h \subset \mathbf{H}^1(\Omega^s)$ , musí splňovat pro všechny testovací funkce  $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$  rovnici

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^s} (\lambda \delta_{ij} \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}}_h + 2\mu e_{ij}(\hat{\mathbf{u}}_h)) e_{ij}(\mathbf{v}_h) \, dx - \int_{\Omega^s} (\omega^s)^2 \rho^s \hat{u}_{h_i} v_{h_i} \, dx = \\ = \int_{\Omega^s} \hat{F}_i v_{h_i} \, dx + \int_{\Gamma_N^s} \hat{T}_i v_{h_i} \, dS. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Rozepsáním rovnice (3.41) pro sčítací indexy  $i, j$  a následnou úpravou získáváme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^s} \left( \lambda \left( \frac{\partial \hat{u}_{h_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{u}_{h_2}}{\partial x_2} \right) + 2\mu \frac{\partial \hat{u}_{h_1}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial v_{h_1}}{\partial x_1} \, dx + \\ + \int_{\Omega^s} \left( \lambda \left( \frac{\partial \hat{u}_{h_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{u}_{h_2}}{\partial x_2} \right) + 2\mu \frac{\partial \hat{u}_{h_2}}{\partial x_2} \right) \frac{\partial v_{h_2}}{\partial x_2} \, dx + \\ + \int_{\Omega^s} \mu \left( \frac{\partial \hat{u}_{h_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \hat{u}_{h_2}}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial v_{h_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial v_{h_2}}{\partial x_1} \right) \, dx - \\ - \int_{\Omega^s} (\omega^s)^2 \rho^s \hat{u}_{h_1} v_{h_1} \, dx - \int_{\Omega^s} (\omega^s)^2 \rho^s \hat{u}_{h_2} v_{h_2} \, dx = \\ = \int_{\Omega^s} \hat{F}_1 v_{h_1} \, dx + \int_{\Gamma_N^s} \hat{T}_1 v_{h_1} \, dS + \int_{\Omega^s} \hat{F}_2 v_{h_2} \, dx + \int_{\Gamma_N^s} \hat{T}_2 v_{h_2} \, dS. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Konečně dimenzionální prostor  $V_h^s$  je generován bází s prvky  $\phi_1, \dots, \phi_{N_h^s}$ , tedy přibližné řešení  $\hat{\mathbf{u}}_h$  budeme hledat ve tvaru

$$\hat{\mathbf{u}}_h(x, \omega^s) = \sum_{j=1}^{N_h^s} \beta_j(\omega^s) \begin{pmatrix} \phi_j(x) \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{j=N_h^s+1}^{2N_h^s} \beta_j(\omega^s) \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_j(x) \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Za testovací funkci  $\mathbf{v}_h$  budeme postupně volit bázové funkce ve tvaru

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} \phi_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \Phi_{i+N_h} = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_{i+N_h} \end{pmatrix} \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, N_h^s, \quad (3.44)$$

kde  $\phi_i = \phi_{i+N_h^s}$ . Dosazením vztahu (3.43) do rovnice (3.42), postupnou volbou bázových funkcí (3.44) za testovací funkci  $\mathbf{v}_h$  a následným upravením dostáváme

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_h^s} \beta_j \underbrace{\int_{\Omega^s} \left( (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} \right) + \mu \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2} \right) \right) dx}_{k_{ij}^s} + \\ + \sum_{j=N_h^s+1}^{2N_h^s} \beta_j \underbrace{\int_{\Omega^s} \left( \lambda \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} \right) + \mu \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2} \right) \right) dx}_{k_{ij}^s} - \\ - (\omega^s)^2 \rho^s \sum_{j=1}^{N_h^s} \beta_j \underbrace{\int_{\Omega^s} \phi_j \phi_i \, dx}_{m_{ij}^s} = \underbrace{\int_{\Omega^s} \hat{F}_1 \phi_i \, dx}_{b_i^s} + \underbrace{\int_{\Gamma_N^s} \hat{T}_1 \phi_i \, dS}_{b_i^s} \end{aligned} \quad (3.45)$$

a

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=N_h^s+1}^{2N_h^s} \beta_j \int_{\Omega^s} \underbrace{\left( (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2} \right) + \mu \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} \right) \right)}_{k_{(i+N_h)j}^s} dx + \\
& + \sum_{j=1}^{N_h^s} \beta_j \int_{\Omega^s} \underbrace{\left( \lambda \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2} \right) + \mu \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} \right) \right)}_{k_{(i+N_h)j}^s} dx - \\
& - (\omega^s)^2 \rho^s \sum_{j=N_h^s+1}^{2N_h^s} \beta_j \int_{\Omega^s} \underbrace{\phi_j \phi_i}_{m_{(i+N_h)j}^s} dx = \int_{\Omega^s} \underbrace{F_2 \phi_i}_{b_{i+N_h}^s} dx + \int_{\Gamma_N^s} \hat{T}_2 \phi_i dS.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Soustavy rovnic (3.45) a (3.46) lze přepsat do maticové podoby jako

$$(\mathbb{K}^s - (\omega^s)^2 \rho^s \mathbb{M}^s) \boldsymbol{\beta} = \mathbf{b}^s, \tag{3.47}$$

kde  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_j)_{j=1}^{2N_h^s}$  je neznámý vektor koeficientů,  $\mathbb{K}^s$  je matice tuhosti dána prvky  $(k_{ij}^s)_{i,j=1}^{2N_h^s}$ ,  $\mathbb{M}^s$  je matice hmotnosti s prvky  $(m_{ij}^s)_{i,j=1}^{2N_h^s}$  a  $\mathbf{b}^s$  je vektor pravé strany s prvky  $(b_i^s)_{i=1}^{2N_h^s}$ . I v tomto případě matice tuhosti  $\mathbb{K}^s$  a matice hmotnosti  $\mathbb{M}^s$  jsou symetrické a pozitivně definitní, viz [15]. Při praktické realizaci volíme opět lineární báze funkce a sestavení jednotlivých matic probíhá stejným způsobem jako v předchozí kapitole.

### 3.7 Slabá formulace vibroakustického problému

Nyní převedeme vibroakustický problém daný rovnicemi (2.55) až (2.63) do slabé formulace. V tomto případě postupujeme analogicky jako při převodu Helmholtzovy rovnice a rovnic popisujících elastické těleso ve frekvenční doméně do slabých formulací pouze s tím rozdílem, že budeme navíc uvažovat část společné hranice  $\Gamma_W$ , přes kterou dochází k vzájemné interakci. Tedy integrál (3.3) přes hranici  $\partial\Omega^a$  lze rozepsat jako

$$\begin{aligned}
- \int_{\partial\Omega^a} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \mathbf{n}^a} v dS &= - \int_{\Gamma_D^a} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \mathbf{n}^a} v dS - \int_{\Gamma_N^a} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \mathbf{n}^a} v dS - \\
& - \int_{\Gamma_S^a} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \mathbf{n}^a} v dS - \int_{\Gamma_W} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \mathbf{n}^a} v dS
\end{aligned} \tag{3.48}$$

a integrál (3.37) přes hranici  $\partial\Omega^s$

$$- \int_{\partial\Omega^s} \hat{\tau}_{ij} n_j^s v_i dS = - \int_{\Gamma_D^s} \hat{\tau}_{ij} n_j^s v_i dS - \int_{\Gamma_N^s} \hat{\tau}_{ij} n_j^s v_i dS - \int_{\Gamma_W} \hat{\tau}_{ij} n_j^s v_i dS. \tag{3.49}$$

Na společné hranici  $\Gamma_W$  předeepisujeme z pohledu akustiky podmínku (2.59), tedy  $\frac{\partial \hat{p}}{\partial \mathbf{n}^a} = \rho_0 \omega^2 \mathbf{n}^a \cdot \hat{\mathbf{u}}$ , respektive z pohledu elastického tělesa podmínku (2.63), tedy  $\hat{\tau}_{ij} n_j^s = -\hat{p} n_i^s$ . Poté výsledné rovnice dostáváme ve tvarech

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^a} \nabla \hat{p} \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Gamma_S^a} j \frac{\omega}{a_0} \hat{p} v \, dS - \int_{\Omega^a} \left( \frac{\omega}{a_0} \right)^2 \hat{p} v \, dx - \\ - \int_{\Gamma_W} \rho_0 \omega^2 \mathbf{n}^a \cdot \hat{\mathbf{u}} v \, dS = \int_{\Omega^a} \hat{\mathcal{F}} v \, dx + \int_{\Gamma_N^a} \hat{p}_N v \, dS \end{aligned} \quad (3.50)$$

a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^s} (\lambda \delta_{ij} \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}} + 2\mu e_{ij}(\hat{\mathbf{u}})) e_{ij}(\mathbf{v}) \, dx - \int_{\Omega^s} \omega^2 \rho^s \hat{u}_i v_i \, dx + \int_{\Gamma_W} \hat{p} n_i^s v_i \, dS = \\ = \int_{\Omega^s} \hat{F}_i v_i \, dx + \int_{\Gamma_N^s} \hat{T}_i v_i \, dS. \end{aligned} \quad (3.51)$$

### 3.8 Prostorová diskretizace vibroakustického problému

Opět hledáme přibližné řešení pomocí metody konečných prvků dvou podproblémů (3.50) a (3.51), které řešíme současně. Postup diskretizace a následné úpravy jsou stejné jako v předchozích případech výše, tedy přibližná řešení  $\hat{p}$  a  $\hat{\mathbf{u}}$  budeme hledat v konečně dimenzionálních prostorech  $H_h$  a  $\mathbf{H}_h$ . Zde řešení budeme uvažovat analogicky tvarům (3.6) a (3.43). Za testovací funkce budeme postupně volit bázevé funkce ve tvarech (3.7) a (3.44). Tímto postupem a následným upravením získáme pro akustické pole rovnici

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_h^a} \alpha_j \underbrace{\int_{\Omega^a} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx}_{k_{ij}^a} - j \frac{\omega}{a_0} \sum_{j=1}^{N_h^a} \alpha_j \underbrace{\int_{\Gamma_S^a} \varphi_j \varphi_i \, dS}_{c_{ij}^a} - \\ - \left( \frac{\omega}{a_0} \right)^2 \sum_{j=1}^{N_h^a} \alpha_j \underbrace{\int_{\Omega^a} \varphi_j \varphi_i \, dx}_{m_{ij}^a} - \rho_0 \omega^2 \sum_{j=1}^{N_h^s} \beta_j \underbrace{\int_{\Gamma_W} \phi_j \varphi_i n_1^a \, dS}_{c_{ij}^{W_a}} - \\ - \rho_0 \omega^2 \sum_{j=N_h^s+1}^{2N_h^s} \beta_j \underbrace{\int_{\Gamma_W} \phi_j \varphi_i n_2^a \, dS}_{c_{ij}^{W_a}} = \underbrace{\int_{\Omega^a} \hat{\mathcal{F}} \varphi_i \, dx}_{b_i^a} + \underbrace{\int_{\Gamma_N^a} \hat{p}_N \varphi_i \, dS}_{b_i^a}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Pro elastické těleso získáváme rovnice

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{N_h^s} \beta_j \int_{\Omega^s} \underbrace{\left( (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} \right) + \mu \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2} \right) \right)}_{k_{ij}^s} dx + \\
& + \sum_{j=N_h^s+1}^{2N_h^s} \beta_j \int_{\Omega^s} \underbrace{\left( \lambda \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} \right) + \mu \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2} \right) \right)}_{k_{ij}^s} dx - \\
& - \omega^2 \rho^s \sum_{j=1}^{N_h^s} \beta_j \int_{\Omega^s} \underbrace{\phi_j \phi_i}_{m_{ij}^s} dx + \sum_{j=1}^{N_h^a} \alpha_j \int_{\Gamma_W} \underbrace{\varphi_j \phi_i n_1^s}_{c_{ij}^{W_s}} dS = \\
& = \underbrace{\int_{\Omega^s} \hat{F}_1 \phi_i dx + \int_{\Gamma_N^s} \hat{T}_1 \phi_i dS}_{b_i^s}
\end{aligned} \tag{3.53}$$

a

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=N_h^s+1}^{2N_h^s} \beta_j \int_{\Omega^s} \underbrace{\left( (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2} \right) + \mu \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} \right) \right)}_{k_{(i+N_h)j}^s} dx + \\
& + \sum_{j=1}^{N_h^s} \beta_j \int_{\Omega^s} \underbrace{\left( \lambda \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2} \right) + \mu \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} \right) \right)}_{k_{(i+N_h)j}^s} dx - \\
& - \omega^2 \rho^s \sum_{j=N_h^s+1}^{2N_h^s} \beta_j \int_{\Omega^s} \underbrace{\phi_j \phi_i}_{m_{(i+N_h)j}^s} dx + \sum_{j=1}^{N_h^a} \alpha_j \int_{\Gamma_W} \underbrace{\varphi_j \phi_i n_2^s}_{c_{(i+N_h)j}^{W_s}} dS = \\
& = \underbrace{\int_{\Omega^s} F_2 \phi_i dx + \int_{\Gamma_N^s} \hat{T}_2 \phi_i dS}_{b_{i+N_h}^s}.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Výsledný systém lze zapsat v maticové podobě jako

$$\left( \begin{pmatrix} \mathbb{K}^a & \mathbf{0} \\ \mathbb{C}^{W_s} & \mathbb{K}^s \end{pmatrix} - \omega \begin{pmatrix} j \frac{1}{a_0} \mathbb{C}^a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{a_0^2} \mathbb{M}^a & \rho_0 \mathbb{C}^{W_a} \\ \mathbf{0} & \rho^s \mathbb{M}^s \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^a \\ \mathbf{b}^s \end{pmatrix}, \tag{3.55}$$

kde matice  $\mathbb{C}^{W_a}$ , respektive matice  $\mathbb{C}^{W_s}$ , jsou matice sdružení dány prvky  $(c_{ij}^{W_a})_{i=1, j=1}^{N_h, 2N_h^s}$ , respektive prvky  $(c_{ij}^{W_s})_{i=1, j=1}^{2N_h^s, N_h}$ . Značení ostatních matic a vektorů již bylo zmíněno výše. Při praktické realizaci opět volíme lineární báze funkce a sestavení jednotlivých matic probíhá stejným způsobem. Rovnici (3.55) lze dále přepsat do tvaru

$$(\mathbb{K} - \omega \mathbb{C} - \omega^2 \mathbb{M}) \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{b}, \tag{3.56}$$

kde  $\mathbb{K} = \begin{pmatrix} \mathbb{K}^a & \mathbf{0} \\ \mathbb{C}^{W_s} & \mathbb{K}^s \end{pmatrix}$  je matice tuhosti,  $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} j \frac{1}{a_0} \mathbb{C}^a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$  je matice tlumení,  $\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_0^2} \mathbb{M}^a & \rho_0 \mathbb{C}^{W_a} \\ \mathbf{0} & \rho^s \mathbb{M}^s \end{pmatrix}$  je matice hmotnosti,  $\boldsymbol{\zeta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}$  je neznámý vektor a  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^a \\ \mathbf{b}^s \end{pmatrix}$  je vektor pravé strany vibroakustického problému.

**Poznámka.** Při praktické realizaci je možné definovat jeden směr normály na rozhraní, např.  $\mathbf{n} = \mathbf{n}^a$ , a následně při výpočtu prvků matice sdružení upravit znaménko dle této definice, tj. využít rovnost  $\mathbf{n}^s = -\mathbf{n}^a$ . Proto se konečné rovnice v [5] nebo [14] liší o znaménko u matice sdružení oproti našim rovnicím (3.55).

### 3.9 Numerická realizace vibroakustického problému

Jak již bylo popsáno výše, při vibroakustickém problému nelze řešit rovnice akustického pole a elastického tělesa odděleně. Oba podproblémy se navzájem ovlivňují přes společnou část hranice  $\Gamma_W$ . Na této hranici předepisujeme podmínky (2.59) a (2.63), které realizujeme v metodě konečných prvků pomocí matic sdružení  $\mathbb{C}^{W_s}$  a  $\mathbb{C}^{W_a}$ . Ty zajišťují vzájemné propojení jednotlivých podproblémů.

Při praktické realizaci vibroakustického problému máme k dispozici dvě výpočetní sítě, jednu pro akustické pole a jednu pro elastické těleso. Tyto sítě jsou konformní, tj. vrcholy na společném rozhraní jsou totožné. Dále je ke každému vrcholu jednotlivé výpočetní sítě přiřazen index. Při realizaci sdruženého problému je obtížné zajistit, aby bodům ze společné části hranice  $\Gamma_W$  byl přiřazen správný index, protože mají obecně odlišné indexy v triangulaci domén  $\Omega^a$  a  $\Omega^s$ . Kvůli tomu na začátku výpočtu identifikujeme v našem vytvořeném programu odpovídající si body z rozhraní a uložíme si jejich indexy z obou triangulací.

Pak vypočítáme lokální příspěvky do matice sdružení  $\mathbb{C}^{W_a}$  a zapíšeme je na  $i$ -tý řádek, který přísluší  $i$ -tému vrcholu výpočetní sítě pro akustické pole, a do  $j$ -tého sloupce, který přísluší  $j$ -tému vrcholu výpočetní sítě pro elastické těleso. Analogicky postupujeme i při zapisování lokálních příspěvků do matice sdružení  $\mathbb{C}^{W_s}$ . Tímto postupem zajistíme propojení jednotlivých podproblémů.

**Poznámka.** Matice sdružení jsou submaticemi globálních matic vibroakustického problému, tedy například prvek  $c_{ij}^{W_a}$  je zapsaný na pozici  $i(j + N_h^a)$  globální matice hmotnosti  $\mathbb{M}$ .

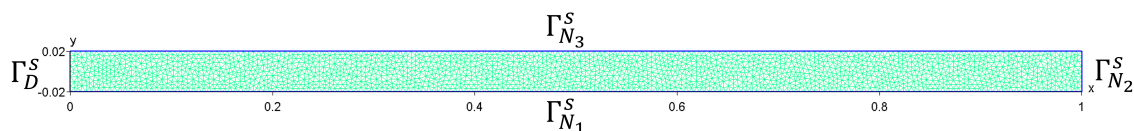
# Kapitola 4

## Numerické výsledky

V této kapitole představíme výsledky získané pomocí námi vytvořeného programu v programovacím jazyku *MATLAB*, viz [16], včetně porovnání se softwarem *COMSOL Multiphysics*, viz [4]. Funkčnost akustické části programu byla otestována v předchozí práci, viz [10]. Námi vytvořený program načte síť vytvořenou v programu *Gmsh*, viz [7], a následně sestaví požadované matice, případně i vektor pravé strany. Nakonec vytvořenou maticovou soustavu vyřeší. V této kapitole ukážeme numerická řešení několika úloh.

### 4.1 Příklad 1 – deformace nosníku

Mějme oblast  $\Omega^s = (0, 1) \times (-0,02, 0,02)$  reprezentující nosník spolu s Dirichletovou okrajovou podmínkou na levé straně a Neumannovy okrajové podmínky na všech zbývajících stranách, viz obr. 4.1.



Obrázek 4.1: Oblast  $\Omega^s$  s ukázkou triangulace  $\tau_h^s$ . Hranice  $\partial\Omega^s$  je volena jako  $\Gamma_D^s$  a  $\Gamma_N^s$ .

Definujme dále materiálové vlastnosti ocelového nosníku:

- **Youngův modul pružnosti:**  $E = 210 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ ,
- **Poissonovo číslo:**  $\nu = 0,3$ ,
- **hustota materiálu:**  $\rho^s = 7850 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

### 4.1.1 Statické zatížení

Řešme rovnice statického problému (2.7) pomocí metody konečných prvků na oblasti  $\Omega^s$  s hranicí  $\partial\Omega^s$  popsané výše. V tomto případě na hranici  $\partial\Omega^s$  předepíšeme Dirichletovu okrajovou podmínku a Neumannovy okrajové podmínky ve tvarech

$$\mathbf{u}_D = \mathbf{0} \text{ m} \quad \text{na } \Gamma_D^s, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_3 = \mathbf{0} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \quad \text{na } \Gamma_{N_1}^s \cup \Gamma_{N_3}^s, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{T}_2 = (0, -1500000) \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \quad \text{na } \Gamma_{N_2}^s. \quad (4.3)$$

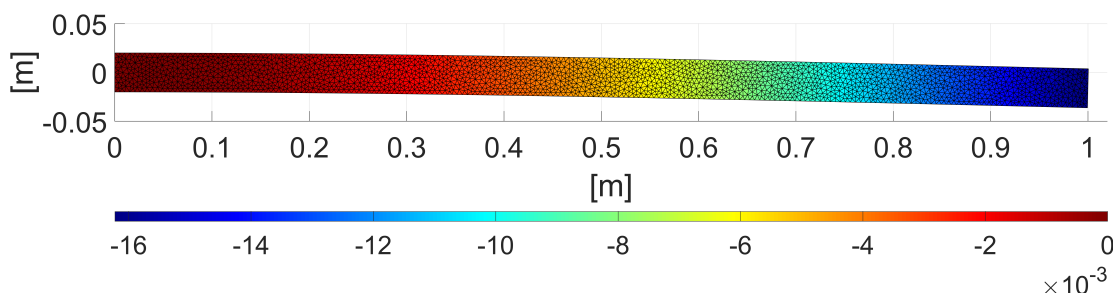
Dále budeme uvažovat působení gravitačního pole

$$\mathbf{g} = (0, -9,81) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (4.4)$$

Jelikož se jedná o statický problém, program sestaví pouze matici tuhosti  $\mathbb{K}^s$  a vektor pravé strany  $\mathbf{b}^s$  následující soustavy rovnic

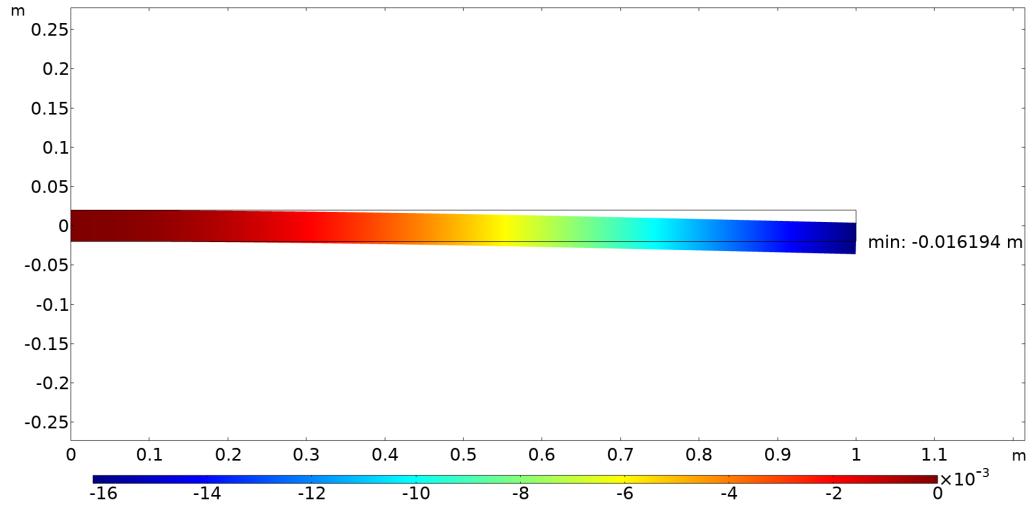
$$\mathbb{K}^s \boldsymbol{\beta} = \mathbf{b}^s. \quad (4.5)$$

Řešením této maticové rovnice (4.5) jsou posuny jednotlivých vrcholů triangulace  $\tau_h^s$  ve směru osy  $x$  a osy  $y$ , které získáme pomocí programovacího jazyka *MATLAB* zadáním příkazu  $\boldsymbol{\beta} = \mathbb{K}^s \setminus \mathbf{b}^s$ , který pomocí LU rozkladu matice tuhosti  $\mathbb{K}$  získá řešení, viz [16]. Výsledná deformace nosníku vlivem působení plošných sil a gravitačního pole spolu s posuvy ve směru osy  $y$  je zobrazena na obr. 4.2.



Obrázek 4.2: Deformace nosníku vlivem působení plošných sil a gravitačního pole se zobrazením posuvů ve směru osy  $y$ .

Pro ověření dosažených výsledků pomocí našeho vyvinutého programu provedeme výpočet se stejnými parametry pomocí softwaru *COMSOL Multiphysics*. Na obr. 4.3 je zobrazena deformace nosníku a pomocí barevné škály zobrazen průhyb nosníku ve směru osy  $y$ .



Obrázek 4.3: Deformace nosníku vlivem působení plošných sil a gravitačního pole se zobrazením posuvů ve směru osy  $y$  dle softwaru *COMSOL Multiphysics*.

V tabulce 4.1 jsou uvedeny maximální průhyby  $u_{y_{max}}$  ve směru osy  $y$  vypočtené pomocí našeho programu a softwaru *COMSOL Multiphysics*. Je vidět, že získané maximální průhyby ve směru osy  $y$  si jsou velmi blízké a rozdíl maximálního průhybu  $u_{y_{max}}$  vypočítaného pomocí námi vyvinutého programu a pomocí softwaru *COMSOL Multiphysics* je 0,2 %.

	dle našeho programu	dle softwaru <i>COMSOL Multiphysics</i>
$u_{y_{max}}$ [m]	-0,016225	-0,016194

Tabulka 4.1: Maximální průhyb ve směru osy  $y$  vypočítaný pomocí našeho programu a pomocí softwaru *COMSOL Multiphysics*.

Dále z pohledu inženýrské praxe jsou zajímavá napětí. V tomto případě nás bude zajímat napětí  $\tau_{xx}$ , které za pomoci vzorce (2.23) lze spočítat jako

$$\tau_{xx} = \lambda \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + 2\mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right). \quad (4.6)$$

Kdybychom k vyčíslení napětí  $\tau_{xx}$  použili získané numerické řešení a dosadili ho do vztahu (4.6), dostali bychom nespojitý průběh napětí. Proto budeme postupovat analogicky jako v předchozích případech, tedy rovnici (4.6) převedeme do slabé formulace. Přitom budeme hledat neznámou veličinu  $\tau_{xx}$  ve tvaru

$$\tau_{xx} = \sum_{j=1}^{N_h^s} \gamma_j \phi_j, \quad (4.7)$$

kde  $\gamma_j$  jsou zatím neznámé koeficienty, které plně určují průběh normálového napě-



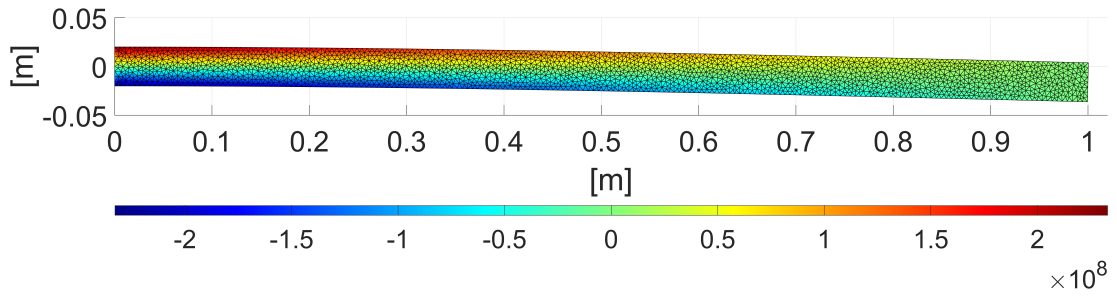
tí  $\tau_{xx}$ , a  $\phi_j$  jsou lineární báze funkce. Dále uvažováním vztahu (3.43) získáme

$$\sum_{j=1}^{N_h^s} \gamma_j \underbrace{\int_{\Omega^s} \phi_j \phi_i dx}_{m_{ij}} = \underbrace{\int_{\Omega^s} \left( (\lambda + 2\mu) \sum_{j=1}^{N_h^s} \beta_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \lambda \sum_{j=N_h^s+1}^{2N_h^s} \beta_j \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) \phi_i dx}_{b_i^{\tau_{xx}}}. \quad (4.8)$$

Soustavu rovnic (4.8) lze přepsat do maticové podoby jako

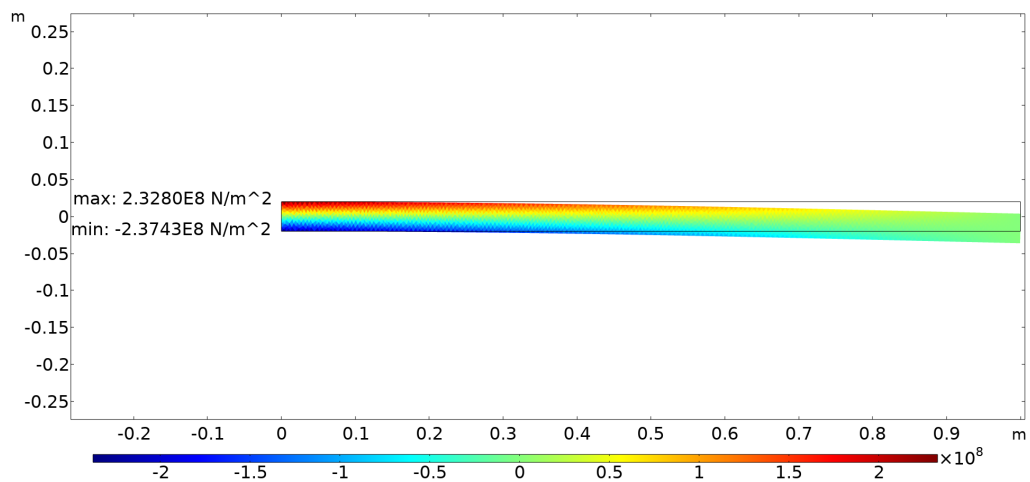
$$\mathbb{M}\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{b}^{\tau_{xx}}, \quad (4.9)$$

kde  $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_j)_{j=1}^{N_h^s}$  je neznámý vektor koeficientů,  $\mathbb{M}$  je matice hmotnosti dána prvky  $(m_{ij})_{i,j=1}^{N_h^s}$  a  $\mathbf{b}^{\tau_{xx}}$  je vektor pravé strany s prvky  $(b_i^{\tau_{xx}})_{i=1}^{N_h^s}$  spočítaných na základě známého pole posuvů  $\boldsymbol{\beta}$ . Vyřešením maticové rovnice pomocí programovacího jazyka *MATLAB* získáme spojitý průběh normálového napětí  $\tau_{xx}$  v jednotlivých vrcholech, které je zobrazeno na obr. 4.4.



Obrázek 4.4: Deformace nosníku vlivem působení plošných sil a gravitačního pole se zobrazením normálového napětí  $\tau_{xx}$  v jednotkách  $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ .

Na obr. 4.5 je pak zobrazeno normálové napětí  $\tau_{xx}$  získané pomocí softwaru *COMSOL Multiphysics* a v tabulce 4.2 je srovnán interval hodnot normálových napětí  $\tau_{xx}$  získaných oběma přístupy. Opět je vidět, že se hodnoty téměř shodují, největší rozdíl normálových napětí  $\tau_{xx}$  dosahuje 2 % v místě vetknutí nosníku.



Obrázek 4.5: Deformace nosníku vlivem působení plošných sil a gravitačního pole se zobrazením normálového napětí  $\tau_{xx}$  v jednotkách  $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$  dle softwaru *COMSOL Multiphysics*.

	dle našeho programu	dle softwaru <i>COMSOL Multiphysics</i>
$\tau_{xx_{max}}$ [N · m <sup>-2</sup> ]	$2,3297 \cdot 10^8$	$2,3280 \cdot 10^8$
$\tau_{xx_{min}}$ [N · m <sup>-2</sup> ]	$-2,3286 \cdot 10^8$	$-2,3743 \cdot 10^8$

Tabulka 4.2: Extrémní hodnoty normálových napětí  $\tau_{xx}$  vypočítaných pomocí našeho programu a pomocí softwaru *COMSOL Multiphysics*.

### 4.1.2 Charakteristické frekvence

Řešme rovnice popisující elastické těleso ve frekvenční doméně (2.34) na oblasti  $\Omega^s$  s hranicí  $\partial\Omega^s$ , která byla popsána výše. Nyní předepíšeme nulovou Dirichletovu a Neumannovu okrajovou podmínku ve tvaru

$$\mathbf{u}_D = \mathbf{0} \text{ m} \quad \text{na } \Gamma_D^s, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{0} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \quad \text{na } \Gamma_N^s = \Gamma_{N_1}^s \cup \Gamma_{N_2}^s \cup \Gamma_{N_3}^s \quad (4.11)$$

a budeme uvažovat  $\hat{F}_i = 0$ . Tímto se nám rovnice (3.47) zjednoduší na tvar

$$(\mathbb{K}^s - (\omega^s)^2 \rho^s \mathbb{M}^s) \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}. \quad (4.12)$$

Tato rovnice je základní rovnicí modální analýzy a představuje tzv. zobecněný problém vlastních čísel, viz [11]. Rovnice (4.12) má netriviální řešení právě tehdy, je-li matice  $(\mathbb{K}^s - (\omega^s)^2 \rho^s \mathbb{M}^s)$  singulární, tedy když

$$\det(\mathbb{K}^s - (\omega^s)^2 \rho^s \mathbb{M}^s) = 0. \quad (4.13)$$

Kořeny rovnice (4.13) nazýváme zobecněná vlastní čísla  $\lambda^s = (\omega^s)^2 \rho^s$ . Jelikož matice tuhosti  $\mathbb{K}^s$  a matice hmotnosti  $\mathbb{M}^s$  jsou matice symetrické a pozitivně definitní, tak lze dokázat, viz [9], že zobecněná vlastní čísla  $\lambda^s$  jsou reálná kladná čísla. Dále lze psát

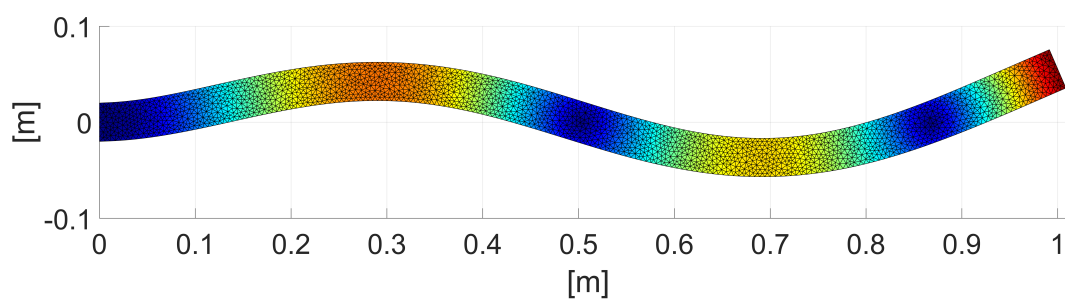
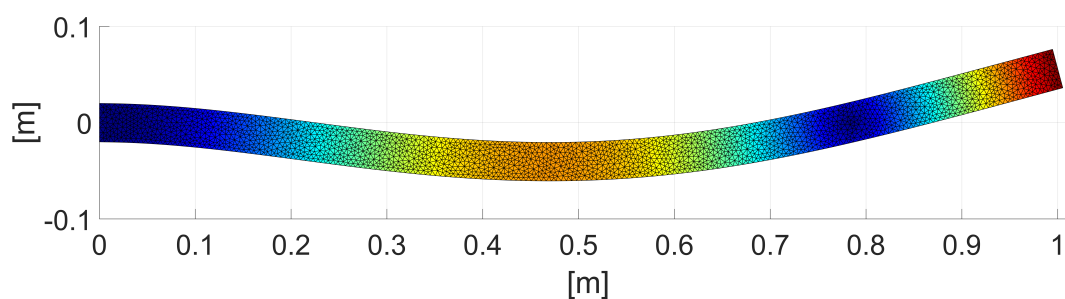
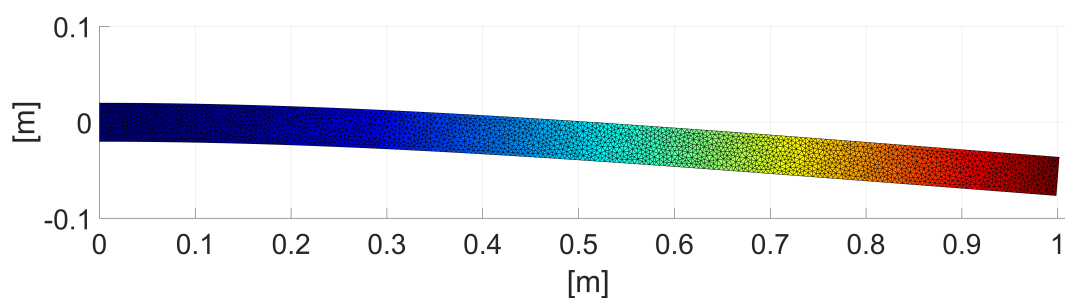
$$\omega^s = \sqrt{\frac{\lambda^s}{\rho^s}}, \quad (4.14)$$

kde  $\omega^s \in \mathbb{R}^+$  představují vlastní kruhové frekvence soustavy. Každému zobecněnému vlastnímu číslu  $\lambda^s$  přísluší zobecněný vlastní vektor  $\boldsymbol{\beta}$ , který reprezentuje vlastní tvar kmitání elastického tělesa na příslušné kruhové frekvenci. Pomocí programovacího jazyka *MATLAB* příkazem *eigs*( $\mathbb{K}^s, \mathbb{M}^s$ ) získáme nejmenší vlastní čísla  $\lambda^s$  a k nim příslušící vlastní vektory. Následně dle vztahu (4.14) spočítáme vlastní kruhovou frekvenci  $\omega^s$ , kterou lze pomocí vztahu  $f^s = \frac{\omega^s}{2\pi}$  přepočítat na frekvenci  $f^s$ .

V tabulce 4.3 jsou uvedeny nejnižší vlastní frekvence uvažovaného nosníku získané pomocí našeho programu a pomocí softwaru *COMSOL Multiphysics*. Z této tabulky je vidět, že získané frekvence jsou téměř totožné. Největší rozdíl těchto hodnot je 0,1 %. Vybrané vlastní tvary kmitání nosníku jsou zobrazeny na obr. 4.6.

$f_k^s$ [Hz]	dle našeho programu	dle softwaru <i>COMSOL Multiphysics</i>
$f_1^s$	35,4	35,4
$f_2^s$	220,0	220,2
$f_3^s$	608,6	609,0
$f_4^s$	1172,3	1172,7
$f_5^s$	1356,9	1357,0
$f_6^s$	1896,8	1897,9

Tabulka 4.3: Prvních 6 nejnižších vlastních frekvencí  $f^s$  spočítaných pomocí našeho programu a softwaru *COMSOL Multiphysics*.

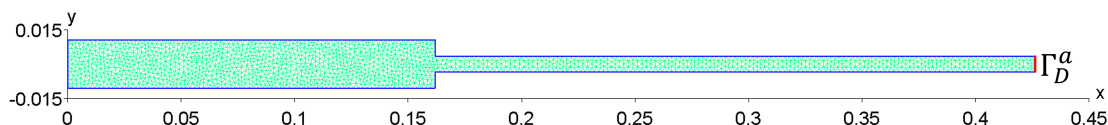


Obrázek 4.6: První tři vlastní tvary kmitání nosníku získané naším programem.

## 4.2 Příklad 2 – akustický problém

V tomto příkladě se zaměříme na akustický problém ve frekvenční doméně, který je motivovaný vibroakustickým problémem. Vyšetření chování čistě akustického problému nám pak pomůže s další analýzou sdruženého problému.

Řešme Helmholtzovu rovnici (1.33) na oblasti  $\Omega^a = (0, 0,162) \times (-0,010585, 0,010585) \cup (0,162, 0,426) \times (-0,003385, 0,003385)$  spolu s Dirichletovou okrajovou podmínkou na pravé hraně, která modeluje otevřený konec kavity, a Neumannovou okrajovou podmínkou na všech zbylých hranách reprezentujících pevné stěny kavity, viz obr. 4.7. Oblast  $\Omega^a$  je shodná s akustickou doménou jednoduchého vibroakustického problému uvažovaného v článku [18].



Obrázek 4.7: Oblast  $\Omega^a$  s ukázkou triangulace  $\tau_h^a$ . Hranice  $\partial\Omega^a$  je volena jako  $\Gamma_D^a$  (červená) a  $\Gamma_N^a$ .

Tyto okrajové podmínky předepíšeme ve tvarech

$$\hat{p}_D = 0 \text{ Pa} \quad \text{na } \Gamma_D^a, \quad (4.15)$$

$$\hat{p}_N = 0 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{na } \Gamma_N^a. \quad (4.16)$$

Budeme pracovat s následujícími parametry vzduchu:

- **rychlost zvuku:**  $a_0 = 353 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,
- **hustota vzduchu:**  $\rho_0 = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

Dále budeme uvažovat  $\hat{\mathcal{F}} = 0$ . Jako v předchozím případě dojde na zjednodušení rovnice (3.9) na tvar

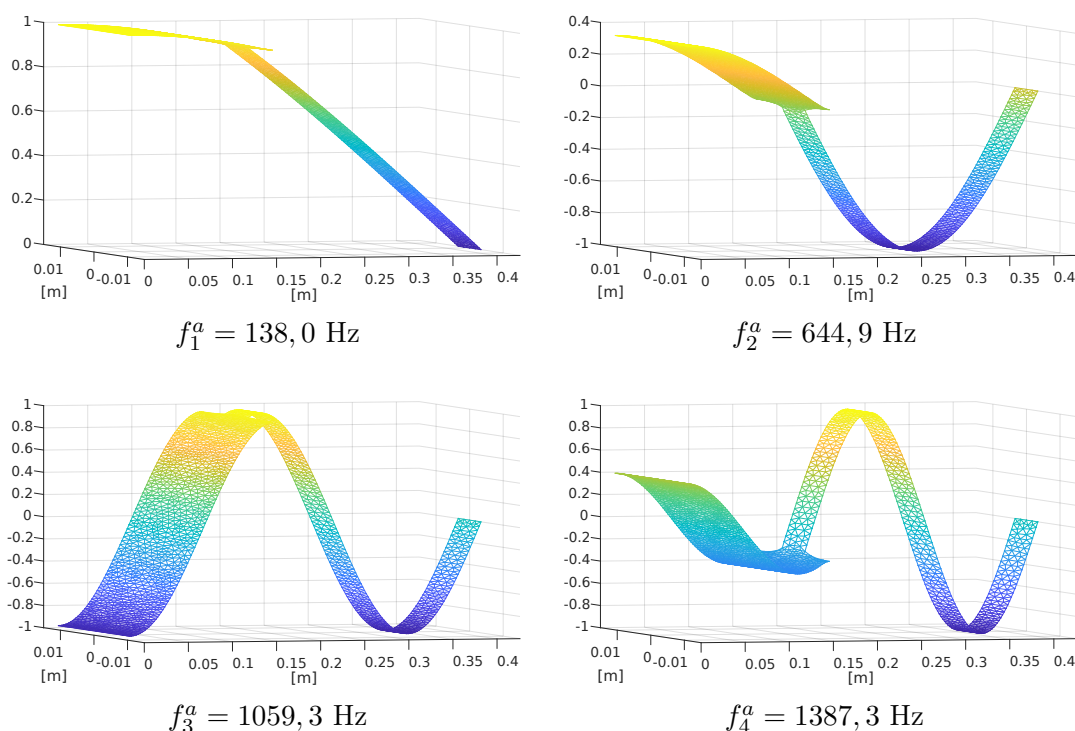
$$\left( \mathbb{K}^a - \left( \frac{\omega^a}{a_0} \right)^2 \mathbb{M}^a \right) \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \quad (4.17)$$

kteřá opět představuje tzv. zobecněný problém vlastních čísel. Nejmenší vlastní čísla  $\lambda^a$  a k nim příslušící vlastní vektory  $\boldsymbol{\alpha}$  a následně frekvence  $f^a$  získáme analogicky jako při výpočtu v předchozím příkladě.

Získaná řešení pomocí námi vyvinutého programu pro zajímavost srovnáme se softwarem *COMSOL Multiphysics*, viz tabulka 4.4, kde jsou uvedeny nejnižší vlastní frekvence  $f^a$ . Tyto hodnoty se téměř shodují. Maximální rozdíl těchto hodnot je zanedbatelných 0,02 %. Vybrané akustické vlastní tvary kmitání jsou zobrazeny na obr. 4.8.

$f_k^a$ [Hz]	pomocí našeho programu	pomocí softwaru <i>COMSOL Multiphysics</i>
$f_1^a$	138,0	138,0
$f_2^a$	644,9	645,0
$f_3^a$	1059,3	1059,3
$f_4^a$	1387,3	1387,5
$f_5^a$	1924,2	1924,5
$f_6^a$	2236,2	2236,3

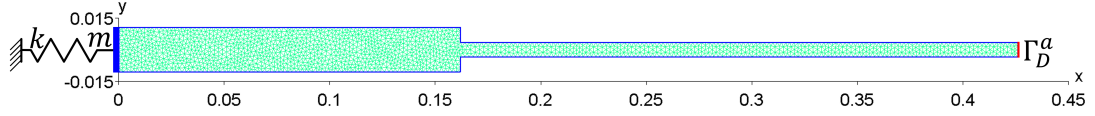
Tabulka 4.4: Prvních 6 nejnižších vlastních frekvencí  $f^a$  spočítaných pomocí našeho programu a softwaru *COMSOL Multiphysics*.



Obrázek 4.8: První čtyři vlastní tvary kmitání akustického tlaku získané naším programem.

### 4.3 Příklad 3 – modelový vibroakustický problém

Nyní přejdeme k řešení modelového vibroakustického problému, který představuje rozšíření 1D vibroakustického modelu publikovaného v článku [18]. Uvažujme stejné parametry vzduchu a stejnou oblast  $\Omega^a$  jako výše, na které budeme opět řešit Helmholtzovu rovnici. Nyní ale na levé hraně akustické komory místo plně odrazivé zdi budeme uvažovat poddajnou stěnu s označením  $\Gamma_W$ , kterou budeme modelovat za pomoci mechanického oscilátoru s jedním stupněm volnosti, viz [18], o určité hmotnosti  $m$ , která je spojena s pružinou o dané tuhosti  $k$ , viz obr. 4.9.



Obrázek 4.9: Oblast  $\Omega^a$  s ukázkou triangulace  $\tau_h^a$ . Hranice  $\partial\Omega^a$  je volena jako  $\Gamma_D^a$  (červená),  $\Gamma_N^a$  a  $\Gamma_W$  (silně modrá).

## Popis modelu

Tento modelový vibroakustický problém je tedy tvořen akustickým polem, které je popsáno rovnicemi (2.55) až (2.59), a mechanickým oscilátorem s jedním stupněm volnosti. Tento mechanický oscilátor je charakterizován pohybovou rovnicí

$$m\ddot{w} + kw = g, \quad (4.18)$$

kde  $w$  je výchylka<sup>1</sup> a  $g$  je budicí síla, s vlastní kruhovou frekvencí

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (4.19)$$

viz [18]. Jelikož se zajímáme o řešení ve frekvenční doméně, lze využít předpokladu časově harmonického pole a řešení psát ve tvaru

$$w(t) = \hat{w}(\omega)e^{-j\omega t}, \quad (4.20)$$

kde  $\hat{w}(\omega)$  je obecně komplexní funkce závisující na zvolené kruhové frekvenci  $\omega$  charakterizující tento zjednodušený vibroakustický problém. Dosazením vztahu (4.20) do rovnice (4.18) a následnou úpravou získáme

$$\hat{w}k - \omega^2\hat{w}m = \hat{g}. \quad (4.21)$$

## Podmínky na rozhraní a matice soustavy

Tlakové fluktuace  $p'$  uvažované ve tvaru (1.32) na rozhraní  $\Gamma_W$  způsobují buzení mechanického oscilátoru, lze tedy psát

$$\hat{g} = - \int_{\Gamma_W} \hat{p} \, dS. \quad (4.22)$$

Sdružení výchylek mechanického oscilátoru s akustikou popisuje rovnice (2.59).

Rovnici (4.21) budeme řešit dohromady s rovnicí popisující akustické pole. Po převedení rovnic do slabé formulace, použití okrajových podmínek a následné diskretizaci lze výsledný systém zapsat analogicky maticové podobě (3.55) jako

$$\left( \begin{pmatrix} \mathbb{K}^a & \mathbf{0} \\ \mathbb{C}^{W_s} & k \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{a_0^2} \mathbb{M}^a & \rho_0 \mathbb{C}^{W_a} \\ \mathbf{0} & m \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \hat{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

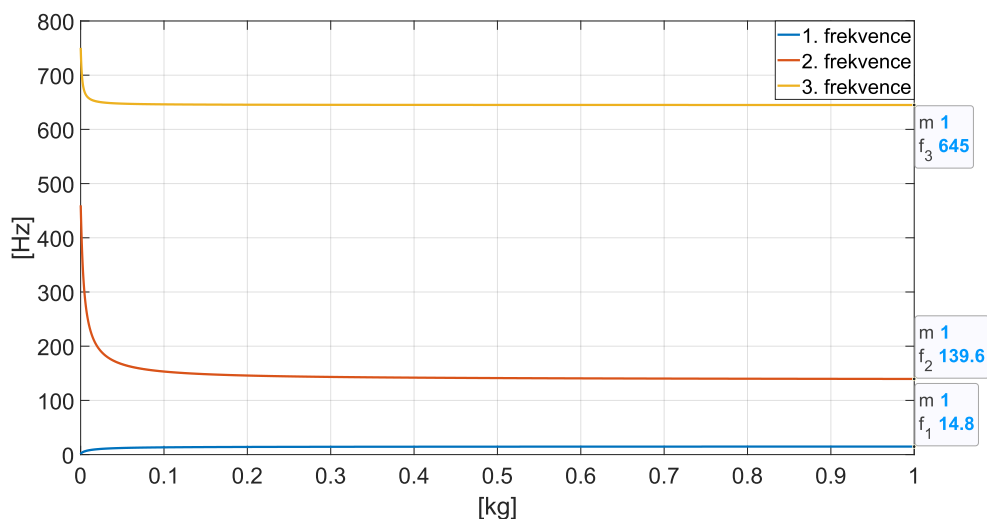
<sup>1</sup>Výchylku uvažujeme v kladném směru osy  $x$ .

## Numerické výsledky

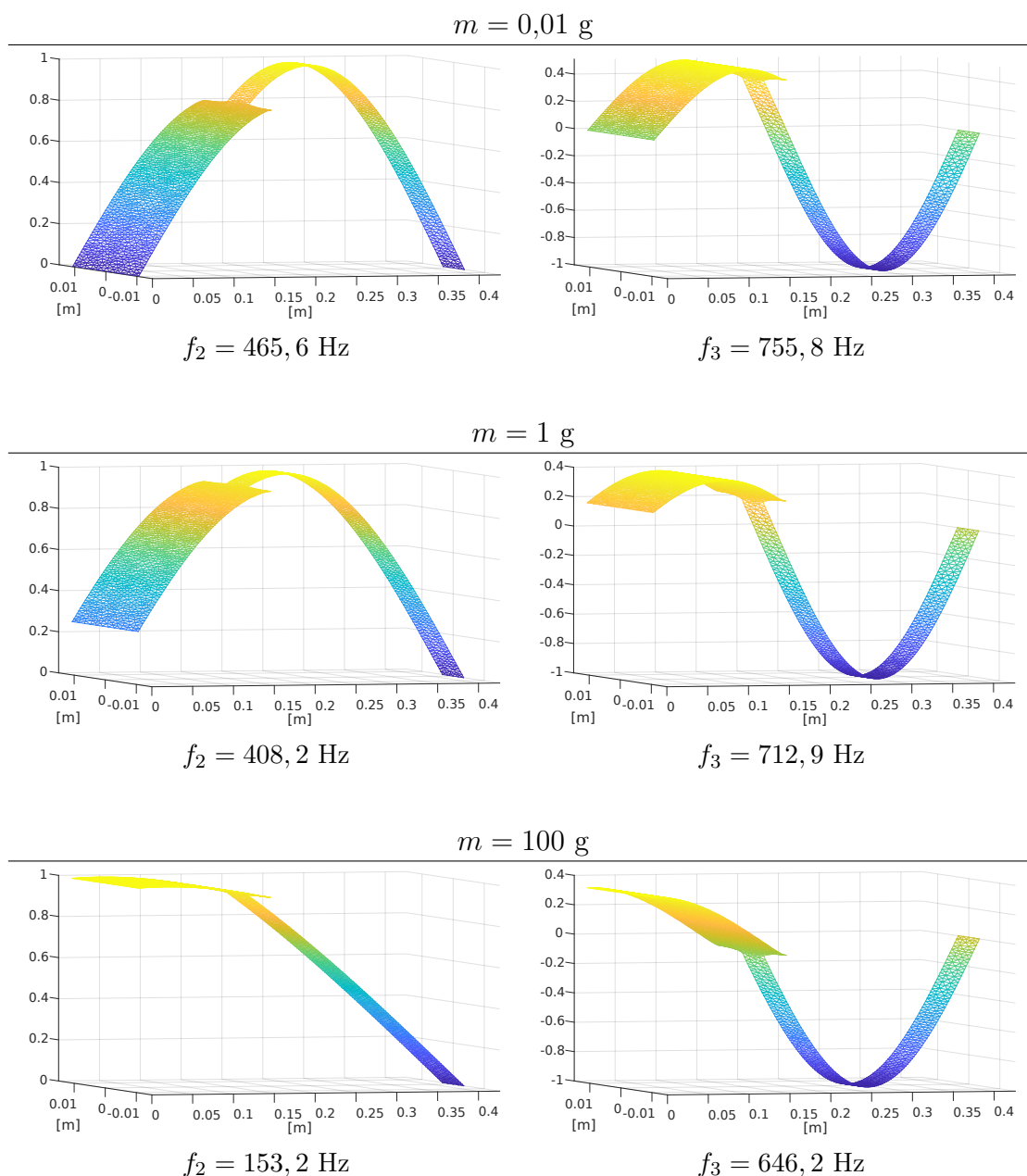
Pro tento příklad budeme uvažovat mechanický oscilátor se stálou vlastní kruhovou frekvencí  $\omega_0 = 2\pi \cdot 15 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  jako ve [18]. Dále budeme uvažovat rozsah hmotností  $m$  od 0,01 g do 1000 g. Z tohoto rozsahu vybereme konečný počet hmotností  $m$ , které postupně budeme dosazovat spolu s tuhostí  $k = \omega_0^2 m$  do rovnice (4.23).

I v tomto případě pro výpočet rezonančních frekvencí tohoto systému využijeme opět modální analýzy, tj. budeme řešit zobecněný problém vlastních čísel rovnice (4.23). Na obr. 4.10 je zobrazen vývoj třech nejnižších vlastních frekvencí tohoto modelového sdruženého problému v závislosti na volbě hmotnosti  $m$ . Z tohoto obrázku je vidět, že první vlastní frekvence našeho systému je dominantně dána chováním mechanického oscilátoru a její hodnota se při zvyšování hmotnosti  $m$  blíží vlastní frekvenci mechanického oscilátoru, respektive při snižování hmotnosti  $m$  postupně klesá k nule. Druhá a třetí vlastní frekvence již odpovídá prvním dvěma vlastním frekvencím akustického pole a se zvyšující se hmotností  $m$  mechanického oscilátoru se tyto vlastní frekvence přibližují prvním dvěma vlastním frekvencím předchozího problému uvedených v tabulce 4.4.

Dále na obr. 4.11 jsou zobrazeny první dva vlastní tvary kmitání akustického tlaku pro různé hmotnosti  $m$ . Z tohoto obrázku je vidět, že při uvažování malé hmotnosti  $m$  mechanického oscilátoru se rozhraní chová jako akusticky otevřený konec vlnovodu, tj. jako při předepsání nulové Dirichletovy okrajové podmínky (4.15). Se zvyšující se hmotností  $m$  se první dva vlastní tvary kmitání sdruženého problému s dominantní akustickou složkou tvarem přibližují prvním a druhému vlastnímu tvaru kmitání čistě akustického problému zobrazeného na obr. 4.8. Tedy při uvažování vyšší hmotnosti  $m$  se rozhraní chová jako akusticky uzavřený konec vlnovodu, tj. jako při předepsání nulové Neumannovy okrajové podmínky (4.16). Tímto jsme dosáhli výsledků charakterem velmi dobře odpovídajících výsledkům v článku [18], i když průběhy a finální hodnoty získaných frekvencí jsou mírně posunuté. To lze připsat rozdílnosti 1D a 2D modelu akustické kavity.



Obrázek 4.10: Vývoj třech nejnižších vlastních frekvencí modelového sdruženého problému v závislosti na volbě hmotnosti  $m$ .



Obrázek 4.11: Vývoj prvního a druhého vlastního tvaru kmitání sruženého problému s dominantní akustickou složkou. Výsledky jsou zobrazeny pro tři různé volby hmotnosti  $m$  mechanického oscilátoru.

## 4.4 Příklad 4 – vibroakustika lidského vokálního traktu

Po otestování námi vytvořeného programu přistoupíme k numerickému řešení vzájemné interakce akustického pole a elastického tělesa ve frekvenční doméně. Tento příklad je motivován zjednodušeným matematicko-fyzikálním modelem reálného lidského vokálního traktu prodlouženého úzkou trubičkou vloženou do úst užívanou pro



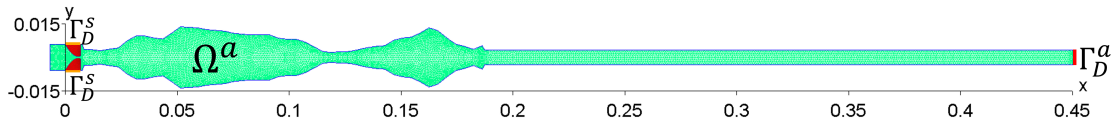
regeneraci hlasového ústrojí, viz [18]. Vokální trakt včetně trubičky je nyní reprezentován oblastí  $\Omega^a$  a oblast  $\Omega^s$  představuje lidské hlasivky, viz obr. 4.12. Geometrie vokálního traktu byla vytvořena jako 2D analogie rozměrů získaných magnetickou rezonancí při vyslovování samohlásky [u:], viz [19].

Budeme tedy řešit společně Helmholtzovu rovnici (2.55) na oblasti  $\Omega^a$  a rovnice popisující elastické těleso ve frekvenční doméně (2.60) na oblasti  $\Omega^s$ . Tyto dvě oblasti  $\Omega^a$  a  $\Omega^s$  mají společnou část hranice  $\Gamma_W$ , na které předepisujeme podmínky (2.59) a (2.63). Na dalších částech hranic  $\partial\Omega^a$  a  $\partial\Omega^s$  budeme předepisovat následující Dirichletovy a Neumannovy okrajové podmínky (viz obr. 4.12):

$$\hat{p}_D = 0 \text{ Pa} \quad \text{na } \Gamma_D^a, \quad (4.24)$$

$$\hat{p}_N = 0 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{na } \Gamma_N^a, \quad (4.25)$$

$$\mathbf{u}_D = \mathbf{0} \text{ m} \quad \text{na } \Gamma_D^s. \quad (4.26)$$



Obrázek 4.12: Oblast  $\Omega^a$  (zelená) modelující vokální trakt a  $\Omega^s$  (červená) reprezentující lidské hlasivky. Hranice  $\partial\Omega^a$  je volena jako  $\Gamma_D^a$  (červená),  $\Gamma_N^a$  (modrá) a  $\Gamma_W$ . Hranice  $\partial\Omega^s$  je volena jako  $\Gamma_D^s$  (oranžová) a  $\Gamma_W$ . Jejich společné rozhraní tvoří hranice  $\Gamma_W$  (neznačená).

Parametry vzduchu volíme stejné jako v předchozích úlohách, tedy:

- **rychlost zvuku:**  $a_0 = 353 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,
- **hustota vzduchu:**  $\rho_0 = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

Materiálové vlastnosti lidských hlasivek a jejich tvar zvolíme v souladu s [22] jako:

- **Youngův modul pružnosti:**  $E = 8000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ ,
- **Poissonovo číslo:**  $\nu = 0,4$ ,
- **hustota materiálu:**  $\rho^s = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

Nejdříve vyšetříme chování čistě akustického problému a čistě elastického problému. Tedy pro tyto případy na jinak společném rozhraní  $\Gamma_W$  předepíšeme nulové Neumannovy okrajové podmínky. Numerický výpočet vlastních čísel a k nim příslušících vlastních vektorů a následný výpočet vlastních frekvencí je analogický jako v příkladu 1, respektive v příkladu 2. V tabulce 4.5 jsou uvedeny nejnižší vlastní frekvence čistě akustického problému a v tabulce 4.6 nejnižší vlastní frekvence čistě elastického problému. Povšimněme si, že v tabulce 4.6 je vždy dvojice stejných nebo velmi podobných vlastních frekvencí. Je to z důvodu symetrie úlohy, kdy uvažujeme

dvě hlasivky stejných rozměrů. Malá odchylka vlastních frekvencí mezi uvažovanými dvojicemi je způsobena mírně odlišnou triangulací. Získané akustické vlastní frekvence jsou podobné výsledkům z článku [21], kde byla jinak volena rychlost zvuku. Obdobně vlastní frekvence hlasivek spočítané pomocí našeho programu se téměř shodují s výsledky z článku [22].

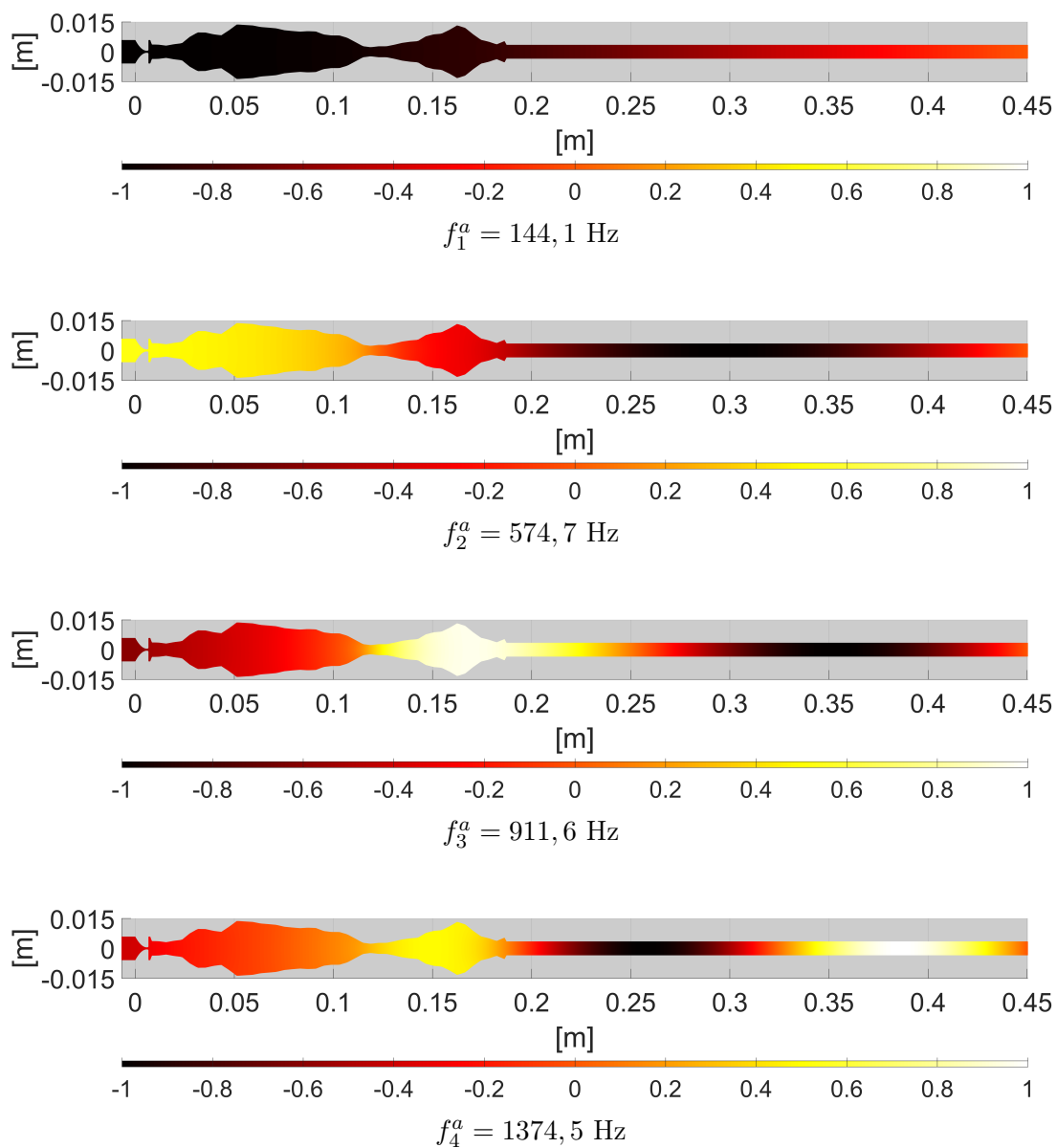
Vybrané vlastní tvary akustického kmitání vokálního traktu jsou zobrazeny na obr. 4.13. Vybrané vlastní tvary kmitání hlasivek jsou zobrazeny na obr. 4.14. Zde je nejdříve vlevo nahoře zobrazen první vlastní tvar kmitání příslušící frekvenci  $f_1^s$ , kde kmitá pouze jedna ze dvojice hlasivek. Dále jsou zobrazeny vlastní tvary kmitání příslušící dvojici stejných nebo velmi podobných vlastních frekvencí v jednom obrázku. Vlastní tvary jsou velice podobné výsledkům z článku [22].

Frekvence [Hz] – čistě akustický problém	
$f_1^a$	144,1
$f_2^a$	574,7
$f_3^a$	911,6
$f_4^a$	1374,5
$f_5^a$	1750,5
$f_6^a$	1978,7

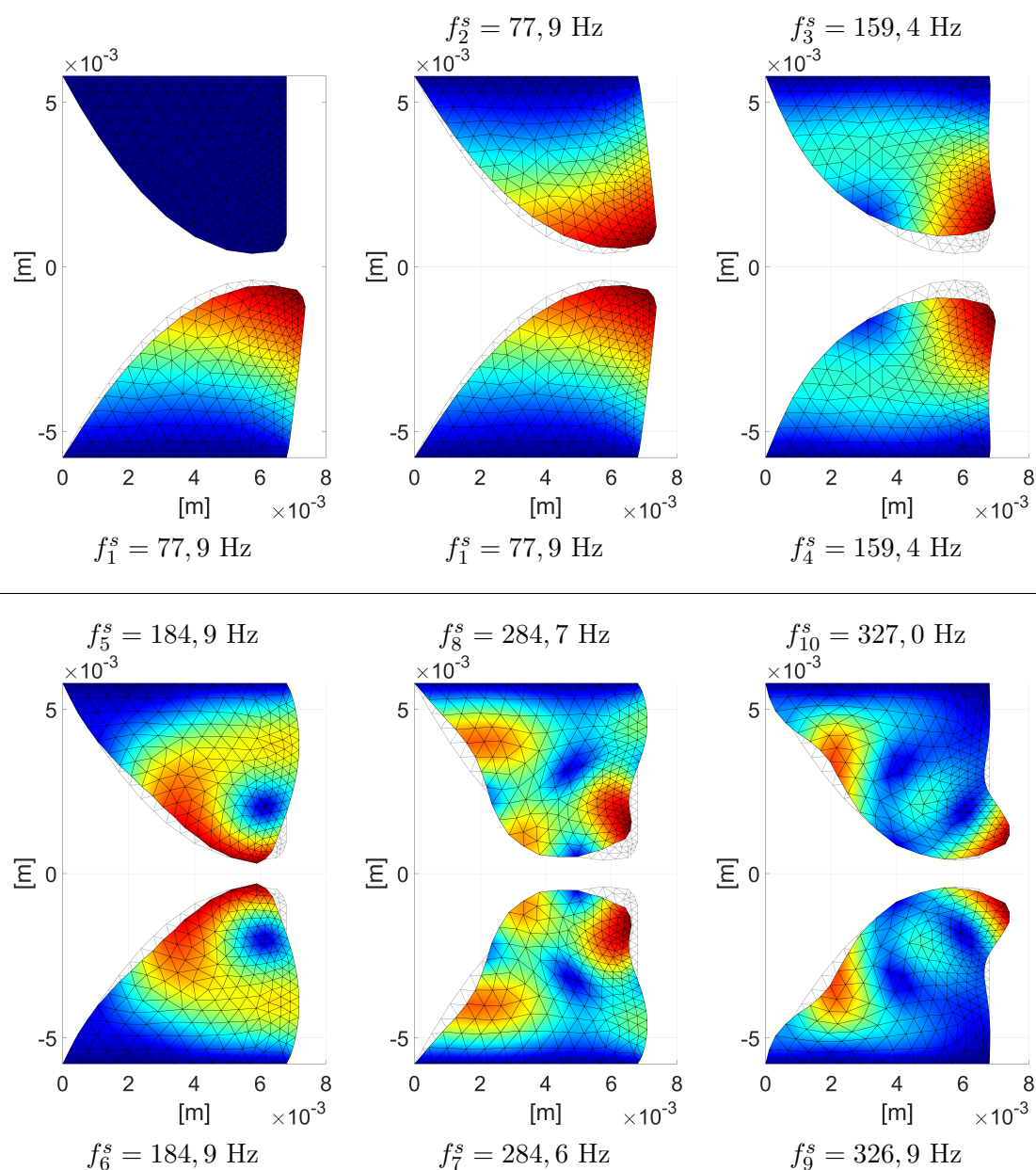
Tabulka 4.5: Prvních 6 nejnižších vlastních frekvencí čistě akustického problému spočítaných pomocí našeho programu.

Frekvence [Hz] – čistě elastický problém					
$f_1^s$	77,9	$f_{11}^s$	349,7	$f_{21}^s$	521,4
$f_2^s$	77,9	$f_{12}^s$	349,7	$f_{22}^s$	521,7
$f_3^s$	159,4	$f_{13}^s$	402,5	$f_{23}^s$	557,1
$f_4^s$	159,4	$f_{14}^s$	402,8	$f_{24}^s$	557,6
$f_5^s$	184,9	$f_{15}^s$	427,0	$f_{25}^s$	567,1
$f_6^s$	184,9	$f_{16}^s$	427,3	$f_{26}^s$	567,3
$f_7^s$	284,6	$f_{17}^s$	450,6	$f_{27}^s$	615,8
$f_8^s$	284,7	$f_{18}^s$	450,6	$f_{28}^s$	617,2
$f_9^s$	326,9	$f_{19}^s$	480,1	$f_{29}^s$	648,7
$f_{10}^s$	327,1	$f_{20}^s$	480,7	$f_{30}^s$	649,3

Tabulka 4.6: Prvních 30 nejnižších vlastních frekvencí čistě elastického problému spočítaných pomocí našeho programu.



Obrázek 4.13: První čtyři vlastní tvary kmitání akustického tlaku získané naším programem.



Obrázek 4.14: Vybrané vlastní tvary kmitání hlasivek. První obrázek zobrazuje první mód kmitání, další obrázky jsou pak kombinace dvou módů s podobnou frekvencí.

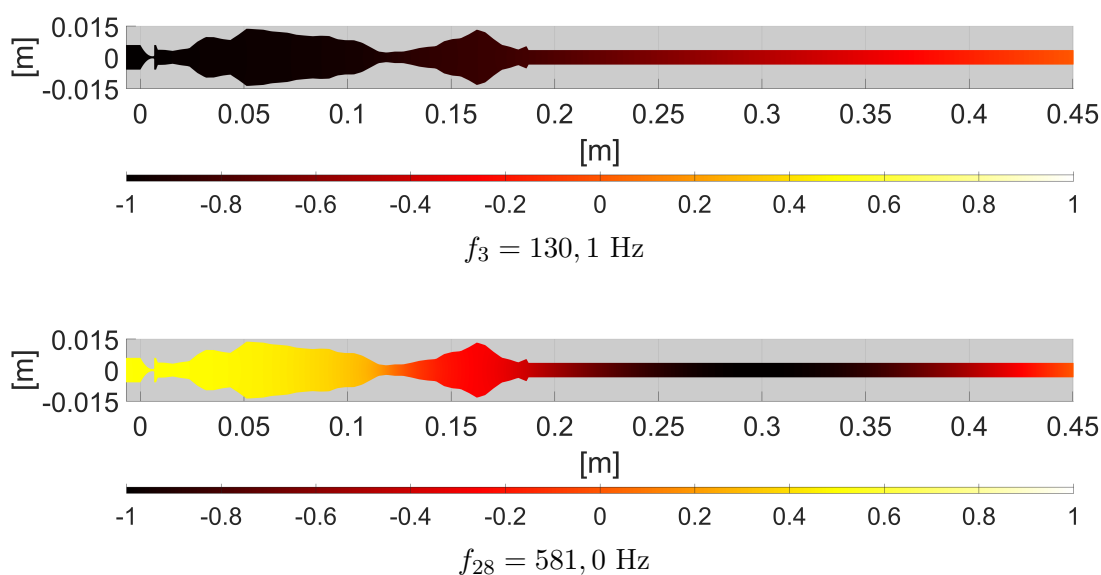
## Řešení sdruženého problému pomocí modální analýzy

Nyní přejdeme k řešení sdruženého problému reprezentovaného oblastmi  $\Omega^a$  a  $\Omega^s$ . Pro výpočet rezonančních frekvencí tohoto sdruženého problému využijeme nejprve modální analýzy, tedy budeme řešit opět zobecněný problém vlastních čísel (3.56). V tabulce 4.7 jsou uvedeny nejnižší vlastní frekvence tohoto sdruženého problému. Z této tabulky je vidět, že drtivá většina vlastních frekvencí sdruženého problému odpovídá vlastním frekvencím čistě elastického problému, tedy na těchto vlastních frekvencích mají vlastní tvary dominantní složku kmitání v oblasti elastického tělesa. Vlastní tvary kmitání sdruženého problému příslušné frekvencím  $f_3$

a  $f_{28}$  mají dominantní akustické části a jsou zobrazeny na obr. 4.15. Z tohoto obrázku je vidět, že tyto vlastní tvary kmitání víceméně odpovídají prvním dvěma vlastním tvarům čistě akustického problému a z důvodu interakce s hlasivkami došlo k malému posunu těchto vlastních frekvencí.

Frekvence [Hz] – sdružený problém					
$f_1$	77,6	$f_{11}$	327,0	$f_{21}$	480,4
$f_2$	77,8	$f_{12}$	349,6	$f_{22}$	515,5
$f_3$	130,1	$f_{13}$	350,2	$f_{23}$	521,4
$f_4$	159,4	$f_{14}$	402,4	$f_{24}$	555,4
$f_5$	161,9	$f_{15}$	402,6	$f_{25}$	557,2
$f_6$	184,8	$f_{16}$	421,8	$f_{26}$	564,2
$f_7$	186,6	$f_{17}$	426,8	$f_{27}$	567,1
$f_8$	284,5	$f_{18}$	450,3	$f_{28}$	581,0
$f_9$	284,9	$f_{19}$	450,5	$f_{29}$	616,1
$f_{10}$	326,9	$f_{20}$	479,8	$f_{30}$	618,5

Tabulka 4.7: Prvních 30 nejnižších vlastních frekvencí sdruženého problému získaných modální analýzou.



Obrázek 4.15: První dva vlastní tvary sdruženého problému s dominantním kmitáním akustického tlaku získané pomocí modální analýzy.

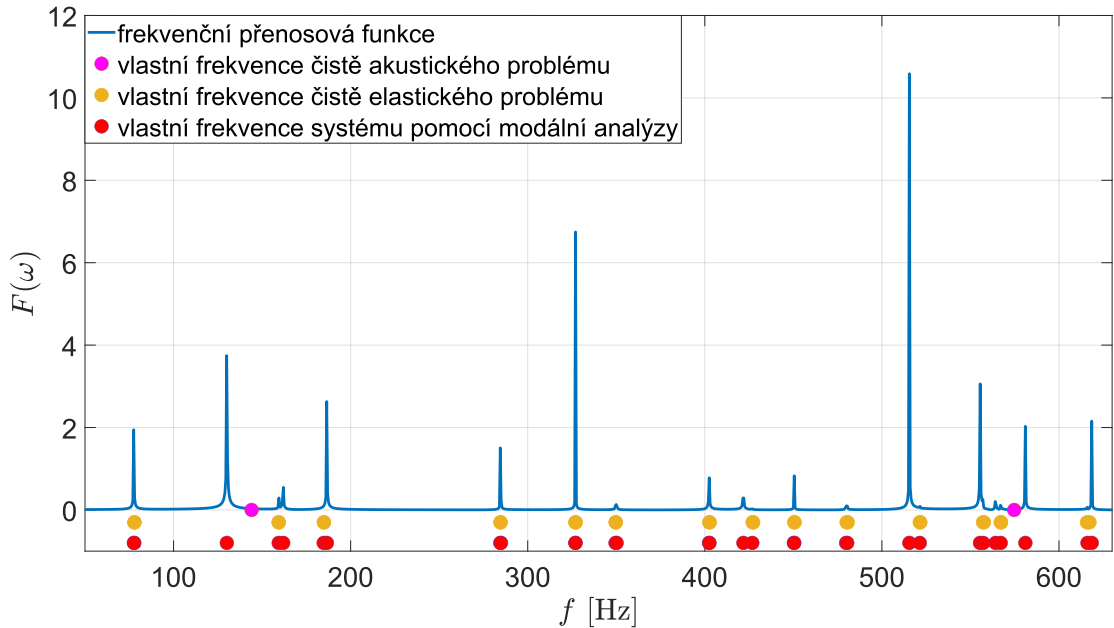
## Řešení sdruženého problému pomocí numerického výpočtu frekvenční přenosové funkce

Jako další metodu pro nalezení vlastních frekvencí uvažovaného sdruženého systému lze využít numerického výpočtu frekvenční přenosové funkce  $F(\omega)$ . Pomocí ní lze najít odezvu systému  $\zeta$  na vstupní buzení  $\mathbf{b}$  pro námi zvolený rozsah kruhových frekvencí  $\langle \omega_a, \omega_b \rangle$ , viz předchozí práce [10] anebo [14].

V tomto případě budeme hledat řešení rovnice (3.56) v rozsahu kruhových frekvencí  $\omega_a = 2\pi \cdot 50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  až  $\omega_b = 2\pi \cdot 630 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  s krokem  $d\omega = 0,5$  s předepsaným jednotkovým bodovým zdrojem v akustické doméně v  $\epsilon$ -okolí bodu o souřadnicích  $[0, 0]$  a v elastickém tělesu v  $\epsilon$ -okolí bodů o souřadnicích  $[0,006, -0,001]$  a  $[0,006, 0,001]$ . Výsledná frekvenční přenosová funkce, která je vypočítána jako

$$F(\omega) = \frac{\sqrt{\zeta^H \mathbb{M} \zeta}}{\|\mathbf{b}\|}, \quad (4.27)$$

je zobrazena na obr. 4.16.



Obrázek 4.16: Odezva sdruženého problému v závislosti na volbě kruhové frekvence, která byla následně přepočítána na frekvenci. Dále jsou zobrazeny vlastní frekvence sdruženého (červená), čistě akustického (fialová) a čistě elastického problému (žlutá) spočítané modální analýzou.

Z obr. 4.16 je vidět, že rezonanční frekvence sdruženého problému vypočítané pomocí frekvenční přenosové funkce a pomocí modální analýzy (červeně) si odpovídají. Dále na tomto obrázku jsou zaznačeny vlastní frekvence čistě akustického problému (fialově) a elastického problému (žlutě). Tedy i s přístupem frekvenční přenosové funkce je patrné, že první frekvence sdruženého problému s dominantní akustickou složkou je nižší než první frekvence čistě akustického problému. Oproti tomu druhá frekvence sdruženého problému s dominantní akustickou složkou je v porovnání s druhou frekvencí čistě akustického problému vyšší opět v souladu s výsledky modální analýzy.

## Řešení sdruženého problému pomocí přístupu přes projekci do modální báze

Poslední přístup, kterého využijeme v této práci, je přístup přes projekci do modální báze. Tedy místo plně diskretizovaného popisu obou složek vibroakustického problému, viz postup výše, budeme předpokládat, že náš lineární systém je dostatečně dobře popsán několika nejnižšími vlastními tvary kmitání akustického tlaku a elastického tělesa. Tímto přístupem pak můžeme výrazně zredukovat počet stupňů volnosti sdruženého systému, tj. získáme menší rozměry matic. Následně nejsou potřeba specializované řešiče pro řídké matice a řešení lze spočítat rychleji, viz [12].

Převod do modální báze budeme realizovat následovně:

1. Zvolíme prvních  $N^a$  vlastních vektorů  $\boldsymbol{\alpha}$  čistě akustického problému a prvních  $N^s$  vlastních vektorů  $\boldsymbol{\beta}$  čistě elastického problému. Tyto vektory normalizujeme, tedy

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i = \frac{\boldsymbol{\alpha}_i}{\sqrt{\boldsymbol{\alpha}_i^T \boldsymbol{\alpha}_i}} \quad \text{pro } i = 1, \dots, N^a, \quad (4.28)$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_j = \frac{\boldsymbol{\beta}_j}{\sqrt{\boldsymbol{\beta}_j^T \boldsymbol{\beta}_j}} \quad \text{pro } j = 1, \dots, N^s, \quad (4.29)$$

a uspořádáme do modální matice  $\mathbf{V}$ , tedy

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_1 \cdots \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{N^a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\boldsymbol{\beta}}_1 \cdots \hat{\boldsymbol{\beta}}_{N^s} \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

2. Matice tuhosti a hmotnosti sdruženého systému vynásobíme zleva a zprava modální maticí (4.30), tedy

$$\tilde{\mathbb{K}} = \mathbf{V}^T \mathbb{K} \mathbf{V} \quad a \quad \tilde{\mathbb{M}} = \mathbf{V}^T \mathbb{M} \mathbf{V}. \quad (4.31)$$

Takto jsme získali matici tuhosti  $\tilde{\mathbb{K}}$  a matici hmotnosti  $\tilde{\mathbb{M}}$  o podstatně menších rozměrech.

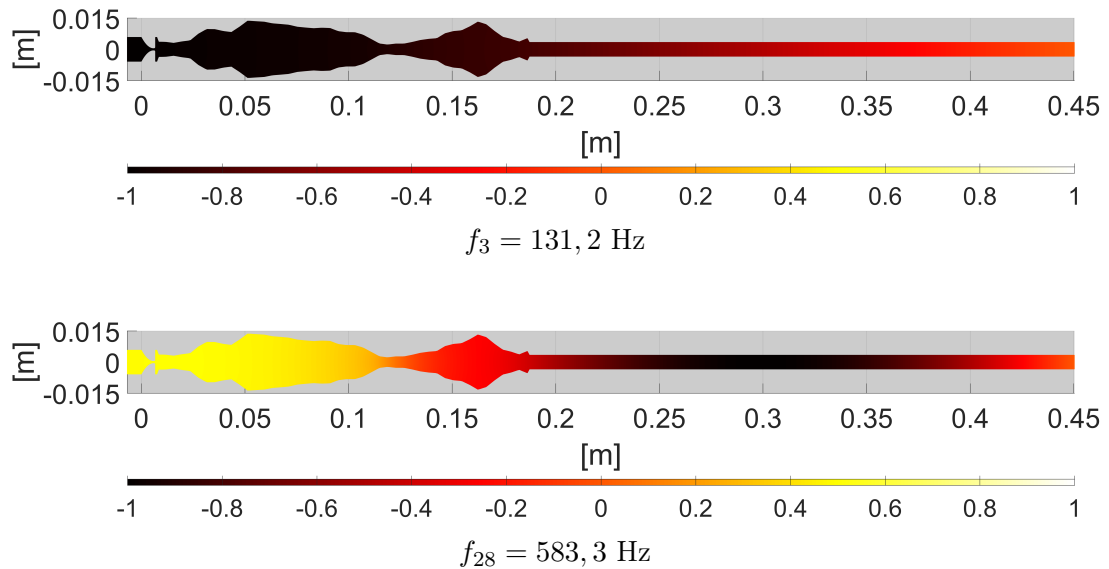
Dále postupujeme analogicky jako v předchozích případech, tedy hledaná zobecněná vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory od matic  $\tilde{\mathbb{K}}$  a  $\tilde{\mathbb{M}}$  získáme opět pomocí programovacího jazyka *MATLAB*, ale nyní příkazem  $\text{eig}(\tilde{\mathbb{K}}, \tilde{\mathbb{M}})$ . Tímto způsobem dostaneme  $N^a + N^s$  vlastních čísel a k nim příslušné vlastní vektory. Pro zobrazení výsledných vlastních tvarů kmitání výchozího systému je třeba se vrátit na původní rozměr. Toto provedeme vynásobením získaných zobecněných vlastních vektorů příslušících maticím  $\tilde{\mathbb{K}}$  a  $\tilde{\mathbb{M}}$  zleva modální maticí (4.30).

Nejnižší vlastní frekvence uvažovaného systému získané pomocí projekce do modální báze pro volbu  $N^a = 20$  a  $N^s = 100$  jsou uvedeny v tabulce 4.8. Z této tabulky je opět vidět, že drtivá většina vlastních frekvencí sdruženého problému odpovídá vlastním frekvencím čistě elastického problému. Získané vlastní frekvence pomocí přístupu

přes projekci do modální báze jsou srovnatelné s řešením získaným pomocí modální analýzy. Největší rozdíl (cca 0,9 %) je u frekvencí  $f_3$  a  $f_{28}$ , jejichž vlastní tvary kmitání sdruženého problému mají opět dominantní akustickou část, viz obr. 4.17. I z tohoto obrázku je vidět, že tyto vlastní tvary kmitání poměrně dobře odpovídají prvním dvěma vlastním tvarům čistě akustického problému.

Frekvence [Hz] – sdružený problém					
$f_1$	77,6	$f_{11}$	327,1	$f_{21}$	480,5
$f_2$	77,9	$f_{12}$	349,7	$f_{22}$	516,0
$f_3$	131,2	$f_{13}$	350,4	$f_{23}$	521,6
$f_4$	159,4	$f_{14}$	402,5	$f_{24}$	555,8
$f_5$	162,1	$f_{15}$	402,7	$f_{25}$	557,4
$f_6$	184,9	$f_{16}$	422,2	$f_{26}$	564,6
$f_7$	186,7	$f_{17}$	427,2	$f_{27}$	567,2
$f_8$	284,6	$f_{18}$	450,5	$f_{28}$	583,3
$f_9$	285,0	$f_{19}$	450,6	$f_{29}$	616,3
$f_{10}$	326,9	$f_{20}$	479,9	$f_{30}$	618,7

Tabulka 4.8: Prvních 30 nejnižších vlastních frekvencí sdruženého problému spočítaných pomocí přístupu přes projekci do modální báze.



Obrázek 4.17: První dva vlastní tvary sdruženého problému s dominantním kmitáním akustického tlaku získané pomocí přístupu přes projekci do modální báze.



# Závěr

V této práci jsme se zabývali úlohami akustiky, elastického tělesa a následně i jejich vzájemnou interakcí. Ze základních rovnic dynamiky tekutin, u kterých jsme uvažovali zdrojové členy, jsme odvodili vlnovou rovnici popisující šíření akustických vln, doplnili ji o vhodné počáteční a okrajové podmínky a uvedli jsme popis ve frekvenční doméně. Dále jsme se zabývali matematickou teorií elastických těles. Získali jsme rovnice statické rovnováhy, ze kterých jsme za pomoci d'Alembertova principu přešli na pohybové rovnice elastického tělesa. Tyto rovnice jsme opět doplnili o vhodné počáteční a okrajové podmínky a uvedli jsme jejich popis ve frekvenční doméně. Následně jsme odvodili podmínky na společném rozhraní, které sdružují oba problémy dohromady.

Pro potřeby metody konečných prvků jsme získané rovnice převedli do slabé formulace a diskretizovali. Popsali jsme základní principy metody konečných prvků a sestavení jednotlivých matic, včetně matic sdružení zajišťujících vzájemné propojení jednotlivých podproblémů, a výpočet vektorů pravých stran. Tyto postupy založené na metodě konečných prvků jsme realizovali v programovacím jazyku *MATLAB*. Námi vytvořený program načte jednotlivé sítě vytvořené v programu *Gmsh*, sestaví příslušné matice, včetně matic sdružení při řešení sdruženého problému, a též vektory pravých stran. Dále umožňuje aplikovat všechny okrajové podmínky zmíněné v této práci.

Námi vytvořený program jsme použili k nalezení numerického řešení čtyř příkladů. Výsledky prvních dvou příkladů věnujících se deformaci nosníku a určení akustických rezonančních frekvencí jsme porovnali s výsledky získaných komerčním softwarem *COMSOL Multiphysics*, ve všech případech jsme dosáhli dobré shody, včetně výpočtu napětí v nosníku. Dále jsme řešili dva vibroakustické problémy. Charakter získaných výsledků (tj. závislost rezonančních frekvencí na hmotnosti oscilátoru) prvního modelového problému se dobře shoduje s výsledky publikovaných v článku [18]. Nakonec jsme pomocí našeho vytvořeného programu řešili zjednodušený matematicko-fyzikální model lidského hlasového ústrojí, které bylo složeno z hlasivek a vokálního traktu prodlouženého brčkem. Pomocí tří různých přístupů – modální analýzy, frekvenční přenosové funkce a projekce do modální báze, jsme získali vzájemně si odpovídající výsledky. Pro zvolené parametry má uvažované vibroakustické sdružení zanedbatelný vliv na akustické vlastnosti celého systému v porovnání s čistě akustickým problémem. Potenciálně silnějšího sdružení, a tedy i výraznějšího posunu akustických rezonančních frekvencí, je pravděpodobně možné dosáhnout snížením hmotnosti kmitající elastické části, viz výsledky modelového vibroakustického problému.

# Seznam použitých zdrojů

- [1] ARFKEN, George B., Hans J. WEBER a Frank E. HARRIS. *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*. 7th ed. Waltham: Academic Press, 2012. ISBN 978-0123846549.
- [2] BLACKSTOCK, David T. *Fundamentals of Physical Acoustics*. Austin, Texas: JOHN WILEY & SONS, INC., 2000. ISBN 978-0-471-31979-5.
- [3] BRDIČKA, Miroslav, Ladislav SAMEK a Bruno SOPKO. *Mechanika kontinua*. Vyd. 3., rev. Praha: Academia, 2005. Česká matice technická (Academia). ISBN 80-200-1344-X.
- [4] COMSOL INC. *COMSOL Multiphysics* [software]. Verze 6.0. Sweden [cit. 2023-07-01]. Dostupné z: <https://www.comsol.com/product-download>
- [5] DAVIS, R. Benjamin. *Techniques to assess acoustic-structure interaction in liquid rocket engines* [online]. Durham, 2008 [cit. 2023-07-10]. Dostupné z: [https://dukespace.lib.duke.edu/dspace/bitstream/handle/10161/601/D\\_Davis\\_Robert\\_a\\_200805.pdf;jsessionid=F9D770454DF85D741362027C7ABAA7E0?sequence=1](https://dukespace.lib.duke.edu/dspace/bitstream/handle/10161/601/D_Davis_Robert_a_200805.pdf;jsessionid=F9D770454DF85D741362027C7ABAA7E0?sequence=1). Disertační práce. Duke University.
- [6] DELFS, Jan. *Basics of Aeroacoustics* [online]. Braunschweig, 2021 [cit. 2023-05-30]. Dostupné z: [https://dlr.de/as/Portaldata/5/Resources/dokumente/abteilungen/abt\\_ta/Notes\\_Basics\\_of\\_Aeroacoustics\\_Delfs.pdf](https://dlr.de/as/Portaldata/5/Resources/dokumente/abteilungen/abt_ta/Notes_Basics_of_Aeroacoustics_Delfs.pdf)
- [7] GEUZAINÉ, Christophe a Jean-François REMACLE. *Gmsh* [software]. Verze 2.8.4. Belgie, 7. února 2014 [cit. 2023-7-6]. Dostupné z: <https://gmsh.info/>.
- [8] GIVOLI, Dan. *Absorbing Boundary Conditions*. SPICE [online]. Venice, 2004 [cit. 2023-7-6]. Dostupné z: [http://www.spice-rtn.org/events/workshops/venice2004/downloads/theabcofabcs.pdf/attachment\\_download/theabcofabcs.pdf](http://www.spice-rtn.org/events/workshops/venice2004/downloads/theabcofabcs.pdf/attachment_download/theabcofabcs.pdf)
- [9] HORÁČEK, Lukáš. *Použití metody konečných prvků pro modální analýzu elastického tělesa* [online]. Praha, 2015 [cit. 2023-7-10]. Dostupné z: [https://dspace.cvut.cz/bitstream/handle/10467/63596/F2-DP-2015-Horacek-Lukas-Lukas\\_Horacek\\_Diploma\\_Theisis\\_2015.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://dspace.cvut.cz/bitstream/handle/10467/63596/F2-DP-2015-Horacek-Lukas-Lukas_Horacek_Diploma_Theisis_2015.pdf?sequence=1&isAllowed=y). Diplomová práce. ČVUT, Fakulta strojní.

- [10] HUBÁLEK, Jiří. *Numerické řešení Helmholtzovy rovnice pomocí metody konečných prvků* [online]. Praha, 2021 [cit. 2023-05-27]. Dostupné z: [https://dspace.cvut.cz/bitstream/handle/10467/97140/F2-BP-2021-Hubalek-Jiri-BP\\_jiri\\_hubalek.pdf?sequence=-1&isAllowed=y](https://dspace.cvut.cz/bitstream/handle/10467/97140/F2-BP-2021-Hubalek-Jiri-BP_jiri_hubalek.pdf?sequence=-1&isAllowed=y). Bakalářská práce. ČVUT, Fakulta strojní.
- [11] CHALUPA, Jakub. *Zobecněný problém vlastních čísel* [online]. Brno, 2012 [cit. 2023-7-2]. Dostupné z: <https://is.muni.cz/th/lxul/diplomka.pdf>. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta.
- [12] CHOPRA, Anil K. *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*. 4th ed. New Jersey: Pearson, 2011. ISBN 978-0-13-285803-8.
- [13] IHLENBURG, Frank. *Finite element analysis of acoustic scattering*. New York: Springer, 1998. ISBN 978-0387983196.
- [14] KALTENBACHER, Manfred. *Numerical Simulation of Mechatronic Sensors and Actuators: Finite Elements for Computational Multiphysics*. 3rd edition. Vienna: Springer, 2015. ISBN 978-3-642-40169-5.
- [15] LARSON, Mats G. a Fredrik BENGZON. *The finite element method: theory, implementation, and applications*. Heidelberg: Springer, 2013. ISBN 978-3-642-33286-9.
- [16] MATHWORKS. *Matlab* [software]. Verze R2019b. USA, 17. září 2019 [cit. 2021-7-6]. Dostupné z: [https://www.mathworks.com/products/get-matlab.html?s\\_tid=gn\\_getml](https://www.mathworks.com/products/get-matlab.html?s_tid=gn_getml).
- [17] NOŽIČKA, Jiří. *Základy termomechaniky*. Vyd. 2. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2008. ISBN 978-80-01-04022-5.
- [18] RADOLF, Vojtěch, Jaromír HORÁČEK, Pavel DLASK, Zdeněk OTČENÁŠEK, Ahmed GENEID a Anne-Maria LAUKKANEN. *Measurement and mathematical simulation of acoustic characteristics of an artificially lengthened vocal tract*. Journal of Sound and Vibration [online]. 2016, 366, 556-570 [cit. 2023-07-19]. ISSN 0022460X. Dostupné z: doi:10.1016/j.jsv.2015.12.018
- [19] STORY, Brad H., Ingo R. TITZE a Eric A. HOFFMAN. *Vocal tract area functions from magnetic resonance imaging*. The Journal of the Acoustical Society of America [online]. 1996, 1996-07-01, 100(1), 537-554 [cit. 2023-08-03]. ISSN 0001-4966. Dostupné z: doi:10.1121/1.415960
- [20] SVÁČEK, Petr a Miloslav FEISTAUER. *Metoda konečných prvků*. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2006. ISBN 80-010-3522-0.
- [21] VALÁŠEK, Jan a Jiří HUBÁLEK. *Comparison of different approaches to determination of resonant frequencies of coupled vibro-acoustic systems*. In: STARÝ, Jiří, Stanislav SYSALA a Dagmar SYSALOVÁ, ed. Seminar on Numerical Analysis: Modelling and Simulation of Challenging Engineering Problems [online]. Ostrava: Institute of Geonics of the Czech Academy of Sciences,

2023, s. 73–77 [cit. 2023-08-10]. ISBN 978-80-86407-85-2. Dostupné z: <https://ugn.cas.cz/event/2023/sna/files/sna23-sbornik.pdf>

- [22] VALÁŠEK, Jan, Petr SVÁČEK a Jaromír HORÁČEK. *On suitable inlet boundary conditions for fluid-structure interaction problems in a channel*. *Applications of Mathematics* [online]. 2019, 64(2), 225-251 [cit. 2023-08-09]. Dostupné z: [doi:10.21136/AM.2019.0267-18](https://doi.org/10.21136/AM.2019.0267-18)

# Příloha

Soubor ve formátu *.zip* obsahující triangulace oblastí ve formátech *.msh*.