

**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V
PRAZE**

Fakulta strojní

Ústav technické matematiky



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

**Určení rezonančních frekvencí akustické kavity
pomocí metody konečných prvků**

**Determination of resonant frequency of acoustic
cavity by finite element method**

Autor: Josef Dobřemysl
Vedoucí: Ing. Jan Valášek, Ph.D.
Akademický rok: 2023

Na toto místo přijde svázat **zadání bakalářské/diplomové práce!**
V jednom z výtisků musí být **originál** zadání, v ostatních kopie.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v příloženém seznamu.

V Praze

.....
Josef Dobřemysl

Poděkování

Děkuji Ing. Janu Valáškovvi, Ph.D. za jeho trpělivost ochotu, odborné rady, přátelský přístup, vedení a čas, který mi věnoval při zpracovávání této bakalářské práce.

Josef Dobřemysl

Název práce:

Určení rezonančních frekvencí akustické kavity pomocí metody konečných prvků

Autor: Josef Dobřemysl

Obor: bez oboru

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. Jan Valášek, Ph.D., Ústav technické matematiky

Abstrakt:

Tato bakalářská práce se zabývá řešením vlnové rovnice pomocí metody konečných prvků. Nejdříve je odvozena vlnová rovnice z Navierových-Stokesových rovnic. Dále je popsán princip a matematické základy metody konečných prvků, ta je následně realizována programem vytvořeným v jazyce Python. Funkčnost programu je ověřena na několika úlohách se známým analytickým řešením. Tento program je dále použit pro numerickou aproximaci vlnové rovnice v časové doméně. Nakonec byly pomocí programu určeny rezonanční frekvence modelu krytu ventilátoru. Získané výsledky jsou analyzovány pomocí diskrétní Fourierovy transformace a srovnány s výsledky modální analýzy.

Klíčová slova: Metoda konečných prvků, akustika, vlnová rovnice, diskrétní Fourierova transformace, Newmarkova metoda, modální analýza.

Title:

Determination of resonant frequency of acoustic cavity by finite element method

Author: Josef Dobřemysl

Abstract: This bachelor thesis deals with the solution of the wave equation using the finite element method. First, the wave equation is derived from the Navier-Stokes equations. Then the principle and mathematical foundations of the finite element method are described, which is then implemented by a program developed in Python. The functionality of the program is verified on several problems with known analytical solutions. This program is further used for the numerical approximation of the wave equation in the time domain. Finally, the resonant frequencies of the fan casing model were determined using the program. The results are analyzed using the discrete Fourier transform compared with the results of modal analysis.

Key words: Finite element method, acoustics, wave equation, discrete Fourier transform, Newmark method, modal analysis.

Obsah

Úvod	8
1 Matematický model	9
1.1 Odvození vlnové rovnice	9
1.2 Okrajové a počáteční podmínky	11
2 Numerický model	13
2.1 Modelový problém	13
2.2 Slabá formulace	13
2.3 Metoda konečných prvků	14
2.3.1 Diskretizace problému	15
2.3.2 Triangulace oblasti	16
2.3.3 Volba bázových funkcí	16
2.3.4 Referenční zobrazení	16
2.3.5 Odvození gradientu bázových funkcí	18
2.3.6 Numerická integrace	19
2.3.7 Výpočet matice tuhosti	20
2.3.8 Sestavení pravé strany	21
2.3.9 Dirichletova okrajová podmínka	21
3 Prostorová a časová diskretizace vlnové rovnice	23
3.1 Slabá formulace vlnové rovnice	23
3.1.1 Prostorová diskretizace	24
3.2 Matice hmotnosti	25
3.3 Sommerfeldova radiační podmínka	25
3.4 Časová diskretizace	25
3.4.1 Newmarkova metoda	26
3.4.2 Numerické řešení pomocí Newmarkovy metody	27
3.5 Modální analýza	27
3.6 Fourierova transformace	28

4	Numerické výsledky	30
4.1	Testovací úlohy	30
4.2	Řešení vlnové rovnice na obdélníkové oblasti	33
4.2.1	Analýza výsledků	35
4.2.2	Analýza akustické energie	37
4.3	Řešení vlnové rovnice na modelu krytu ventilátoru	38
4.3.1	Analýza výsledků	41
	Závěr	44

Úvod

V této práci se budeme zabývat numerickým řešením vlnové rovnice a určením rezonančních frekvencí akustické kavity pomocí metody konečných prvků. Vlnová rovnice je základní parciální diferenciální rovnice druhého řádu hyperbolického typu, která popisuje šíření zvuku. Kromě akustiky je důležitá také v optice, elektromagnetismu či mechanice. Její studium nachází uplatnění v architektuře, letectví či v medicíně. Simulace které pracují s vlnovými rovnicemi se používají například pro snižování vibrací a hlučnosti strojů, při řešení statiky budov nebo v seismologii.

Při řešení této rovnice budeme využívat metodu konečných prvků, která spočívá v diskretizaci spojitého kontinua do konečného počtu prvků. Metoda je výhodná pro své univerzální využití v mnoha inženýrských oborech. Lze pomocí ní možno řešit problémy i na složitých geometriích, což je výhodou oproti algoritmicky jednodušší metodě konečných diferencí.

V této práci využijeme pro získání rezonančních frekvencí dané oblasti dva různé přístupy – modální analýzu a Fourierovu diskrétní transformaci časového signálu. Modální analýza je podstatně méně náročná na výpočetní čas, ale můžeme ji použít pouze pro oblasti na jejichž hranici uvažujeme Neumannovu nebo Dirichletovu okrajovou podmínku. Zatímco přístup využívající Fourierovu diskrétní transformaci nám umožňuje uvažovat i jiné okrajové podmínky.

V první kapitole je odvozena vlnová rovnice popisující šíření akustických vln z Navierových-Stokesových rovnic a je následně doplněna o okrajové a počáteční podmínky. Ve druhé kapitole jsou popsány základní principy metody konečných prvků, na modelové úloze. Ve třetí kapitole je popsáno řešení vlnové rovnice pomocí metody konečných prvků a je zde odvozeno Newmarkovo schéma pro časovou diskretizaci. Ve čtvrté kapitole je nejdříve námi vyvinutý program otestovaný na několika jednoduchých úlohách. Následně pomocí něj určíme rezonanční frekvence zjednodušeného modelu krytu ventilátoru. Nakonec v závěru jsou zhodnoceny dosažené výsledky.

Kapitola 1

Matematický model

V této kapitole odvodíme vlnovou rovnici ze základních bilančních rovnic pro proudění stlačitelných tekutin. Následně ji doplníme vhodnými okrajovými a počátečními podmínkami, čímž získáme základní matematický model akustického problému.

1.1 Odvození vlnové rovnice

Při odvození vlnové rovnice budeme vycházet z Navierových-Stokesových rovnic pro proudění stlačitelné tekutiny. Ty se skládají z rovnic popisujících zákon zachování hmoty a zákon zachování hybnosti, případně i zákon zachování energie. Zákon zachování hmoty lze formulovat, viz [4]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.1)$$

kde $\rho(x, t)$ je hustota tekutiny a \mathbf{v} je vektor rychlosti.

Dále ze zákona zachování hybnosti, bez uvažování působení vnějších sil plyne [4]

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}, \quad (1.2)$$

symbol \otimes označuje tenzorový součin a $\boldsymbol{\tau}(x, t)$ je Cauchyho tenzor napětí v tekutině. Člen $\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v})$ lze rozepsat s použitím zákona zachování hmotnosti jako

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \underbrace{\mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})}_{=0} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}. \quad (1.3)$$

Dále při platnosti Stokesových postulátů má tenzor napětí tvar

$$\boldsymbol{\tau} = -p\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D}(\mathbf{v}), \quad (1.4)$$

kde $p(x, t)$ značí tlak a $\mathbb{I} = \delta_{ij}$ značí Kroneckerovo delta. Dále μ označuje viskozitu a $\mathbb{D}(\mathbf{v})$ je tenzor rychlosti deformace v tekutině. Viskozita vzduchu je však velmi malá a proto její vliv zanedbáme. Zákon zachování hybnosti budeme v návaznosti na rovnici (1.3) tedy uvažovat ve tvaru

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p = 0. \quad (1.5)$$

Dále můžeme předpokládat, že při průchodu zvukové vlny nedochází ke sdílení tepla s okolím. Vztah mezi tlakem a hustotou tedy můžeme získat z rovnice adiabatického děje

$$p\rho^{-\kappa} = konst, \quad (1.6)$$

kde κ je Poissonova konstanta, ta pro suchý vzduch nabývá hodnotu 1,4.

Pro šíření akustické vlny jsou typické malé fluktuace tlaku, hustoty a rychlosti oproti jejich střední hustotě. Proto můžeme psát

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p'(x, t), \\ \rho &= \rho_0 + \rho'(x, t), \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'(x, t), \end{aligned} \quad (1.7)$$

kde p_0 , ρ_0 a \mathbf{v}_0 jsou rovnovážné hodnoty a $p(x, t)'$, $\rho(x, t)'$ a v' jsou odchylky způsobené průchodem vlny. Předpokládáme, že

$$|p'(x, t)| \ll p_0, \quad |\rho'(x, t)| \ll \rho_0, \quad |\mathbf{v}'(x, t)| \ll 1. \quad (1.8)$$

Dále budeme předpokládat, že je tekutina v klidu a k pohybu dochází pouze vlivem průchodu vlny. Rovnovážná rychlost je tedy nulová a celková rychlost tekutiny je rovna hodnotě odchylky

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{v}'(x, t). \quad (1.9)$$

Za těchto předpokladů lze odvodit vztah mezi fluktuacemi tlaku a hustoty, viz [5]

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p'}{\partial t}, \quad (1.10)$$

kde $c = \sqrt{\frac{\kappa p_0}{\rho_0}}$ je rychlost zvuku pro model ideálního plynu. Při uvažování vzduchu a teploty $20^\circ C$ se rovná přibližně $343m/s$. Dosazením vztahů (1.7) do rovnice (1.1) a jednoduchou úpravou dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho') + \mathbf{v}' \cdot \nabla \rho' + \rho_0(\nabla \cdot \mathbf{v}') = 0. \quad (1.11)$$

Protože fluktuace jsou malé, můžeme nelineární členy zanedbat, čímž dostaneme

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0(\nabla \cdot \mathbf{v}') = 0, \quad (1.12)$$

Použitím rovnice (1.10) v rovnici (1.12) dostaneme

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0(\nabla \cdot \mathbf{v}') = 0. \quad (1.13)$$

Podobně použitím vztahů (1.7) v rovnici (1.5) dostaneme

$$(\rho_0 + \rho') \left(\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}' \right) - \nabla(p_0 + p') = \mathbf{0}. \quad (1.14)$$

Opět zanedbáním fluktuací druhého řádu a použitím aproximace $\rho_0 + \rho' \approx \rho_0$ nakonec získáme

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \nabla p' = \mathbf{0}. \quad (1.15)$$

Nyní převedeme soustavu parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu (1.13) a (1.15) pro neznámé funkce fluktuace tlaku a rychlosti na jednu skalární parciální diferenciální rovnici druhého řádu. Nejprve rovnici (1.13) parciálně zderivujeme podle času

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \rho_0 (\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t}) = 0. \quad (1.16)$$

A použitím operátoru divergence na obě strany rovnice (1.15) získáme

$$\rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \Delta p' = 0. \quad (1.17)$$

Když nyní odečteme rovnici (1.17) od rovnice (1.16) dostaneme výsledný tvar vlnové rovnice

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = 0, \quad (1.18)$$

kde Δ je Laplaceův operátor. Dále budeme neznámou funkci tlaku v rovnici (1.18) značit bez čárky, ale budeme tím mít na mysli fluktuaci tlaku. Rovnici (1.18) ještě doplníme o zdrojový člen

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = f, \quad (1.19)$$

kde f je reálná skalární funkce, z fyzikálního pohledu to může být například externí zdroj akustické vlny.

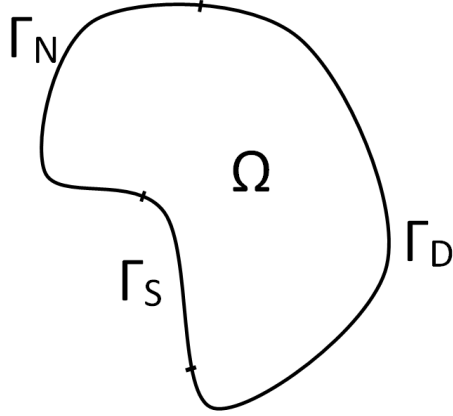
1.2 Okrajové a počáteční podmínky

Pro jednoduchost budeme řešit rovnici (1.19) na dvojrozměrné oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, viz Obrázek 1.1. Zde budeme uvažovat, že hranice oblasti Ω je tvořena třemi disjunktními částmi Γ_D , Γ_N a Γ_S , tedy platí že $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_S$. Pro úplnou formulaci úlohy na hranici oblasti Ω budeme uvažovat následující okrajové podmínky:

- Dirichletova okrajová podmínka předepisuje hodnotu neznámé funkce na části hranice oblasti Γ_D . Budeme ji uvažovat ve tvaru

$$p(x, t) = p_0 \quad \text{pro } x \in \Gamma_D, t \in (0, T). \quad (1.20)$$

Tato okrajová podmínka modeluje plně odrazivou hranici a používá se pro modelování akusticky otevřeného konce vlnovodu. Odražená vlna zde má opačnou fázi.



Obrázek 1.1: Schéma oblasti Ω .

- Neumannova okrajová podmínka předepisuje hodnotu derivace neznámé funkce podél vnější normály. Uvažujeme ji ve tvaru

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{pro } x \in \Gamma_D, t \in (0, T). \quad (1.21)$$

Tato okrajová podmínka se používá pro plně odrazivé stěny nebo při modelování symetrie úlohy.

- Sommerfeldova radiační podmínka se používá jako nejjednodušší model bezodrazové okrajové podmínky, tj. části hranice, která modeluje volný prostor. Zde bychom ideálně chtěli, aby dopadající akustická vlna opustila simulovanou oblast Ω bez odrazu nazpět dovnitř oblasti. Sommerfeldova okrajová podmínka se předepisuje ve tvaru

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial p(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (1.22)$$

používá se pro simulaci otevřené hranice. Tento tvar okrajové podmínky poskytuje přesné výsledky pro jednorozměrný případ, ale i pro vícerozměrný případ dává relativně dobré výsledky, viz [5].

Kromě okrajových podmínek je nutno vlnovou rovnici (1.19) také doplnit o počáteční podmínky. Ty uvažujeme pro jednoduchost nulové

$$\begin{aligned} p(x, 0) &= 0 \quad \text{pro } x \in \Omega, \\ \frac{\partial p(x, 0)}{\partial t} &= 0 \quad \text{pro } x \in \Omega. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Kapitola 2

Numerický model

V této kapitole budou vysvětleny základní principy metody konečných prvků na modelové úloze, včetně popisu realizace různých okrajových podmínek.

2.1 Modelový problém

Metodu konečných prvků ukážeme pro jednoduchost na řešení Poissonovy rovnice na oblasti Ω , viz Obrázek 2.1. Hledáme tedy dvakrát spojitě diferencovatelnou funkci $u(x, y) \in C^2(\Omega)$, která splňuje následující rovnici

$$-\Delta u = f \text{ v } \Omega, \quad (2.1)$$

pro zadané spojitě funkce f na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, spolu s okrajovými podmínkami

$$u = u_D \text{ na } \Gamma_D, \quad (2.2)$$

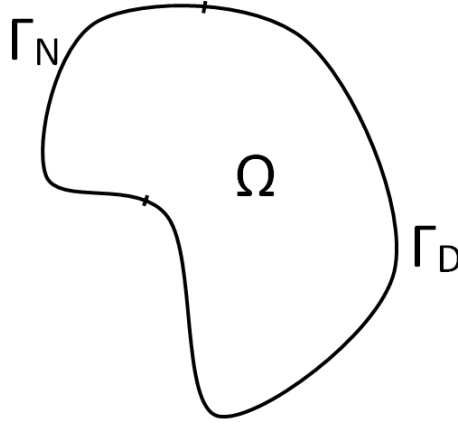
$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = u_N \text{ na } \Gamma_N. \quad (2.3)$$

O oblasti Ω předpokládáme, že je omezená a její hranice je tvořena množinami Γ_N a Γ_D . Na hranici $\partial\Omega$ předepisujeme Neumannovu okrajovou podmínku a na Γ_D Dirichletovu okrajovou podmínku. Pro hranici oblasti platí $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ a $\Gamma_D \neq \emptyset$, viz Obrázek 2.1.

Oproti klasickému řešení, které vyžaduje $u \in C^2(\Omega)$, je metoda konečných prvků založena na slabé formulaci uvažované úlohy, která tento požadavek zeslabuje.

2.2 Slabá formulace

Pro převedení modelové úlohy do slabé formulace nejprve vynásobíme rovnici (2.1) testovací funkcí φ z prostoru, který označíme jako V . Ten volíme jako Sobolevův prostor $W^{1,2}(\Omega)$ nad oblastí Ω s nulovými hodnotami funkcí na hranici Γ_D ve smyslu stop, tj. $V = \{f \in W^{1,2}(\Omega) | f = 0 \text{ na } \Gamma_D\}$, viz např. [2]. Sobolevův prostor je tvořen funkcemi f z Lebesgueova prostoru $L^2(\Omega)$, které mají integrovatelné první parciální derivace umocněné na druhou.



Obrázek 2.1: Schéma oblasti Ω s vyznačenými hranicemi Γ_N a Γ_D .

$$-\int_{\Omega} \Delta u \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx. \quad (2.4)$$

Levou stranu rovnice upravíme pomocí Greenovy věty

$$-\int_{\Omega} \Delta u \varphi \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \varphi \, dS, \quad (2.5)$$

kde \mathbf{n} je jednotkový vektor vnější normály k $\partial\Omega$. Integrál přes hranici můžeme rozepsat jako

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \varphi \, dS = \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \varphi \, dS + \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \varphi \, dS, \quad (2.6)$$

a protože testovací funkce $\varphi \in V$ je z definice nulová na hranici Γ_D , je i celý integrál $\int_{\Gamma_D} \nabla u \cdot \mathbf{n} \varphi \, dS$ roven nule. Následně po použití okrajové podmínky (2.3) v rovnici (2.6) můžeme rovnici (2.5) zapsat v konečné podobě

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx + \int_{\Gamma_N} u_N \varphi \, dS. \quad (2.7)$$

Slabým řešením rovnice (2.1) nazveme takovou funkci $u \in V$, která splňuje rovnost (2.7) pro $\forall \varphi \in V$ a také okrajovou podmínku (2.2). Z definice prostoru V je zřejmé, že nyní po hledané funkci u požadujeme pouze $u \in C^1(\Omega)$.

2.3 Metoda konečných prvků

Metoda konečných prvků je numerická metoda, která popisuje převod slabé formulace uvažovaného problému do jeho diskrétní podoby pomocí speciální volby polynomiální báze prostoru V . Numerické řešení pak získáme jako řešení výsledné soustavy lineárních rovnic.

2.3.1 Diskretizace problému

Zvolme podprostor $V_h \subset V$ s konečnou dimenzí $\dim V_h = N_h < \infty$. Pak budeme hledat numerické řešení jako funkci $u_h \in V_h$, která splňuje

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_h \, dx = \int_{\Omega} f \varphi_h \, dx + \int_{\Gamma_N} u_N \varphi \, dS \quad (2.8)$$

pro všechny $\varphi_h \in V_h$. V konečně dimenzionálním prostoru V_h můžeme zvolit bázové funkce $\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h}$. Potom lze funkci u_h zapsat jako lineární kombinaci prvků zvolené báze

$$u_h(x, y) = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \varphi_j(x, y). \quad (2.9)$$

Díky tomu, že libovolnou funkci $v_h \in V_h$ lze jednoznačně zapsat jako lineární kombinaci bázových funkcí, postačí když budeme požadovat platnost rovnice (2.8) pro všechny bázové funkce. To znamená

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_i \, dx = \int_{\Omega} f \varphi_i \, dx + \int_{\Gamma_N} u_N \varphi_i \, dS, \quad \text{pro } i \in \{1, \dots, N_h\}. \quad (2.10)$$

Dosazením za u_h ze vztahu (2.9) do rovnice (2.8) získáme

$$\int_{\Omega} \nabla \left(\sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \varphi_j \right) \cdot \nabla \varphi_i \, dx = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx = \int_{\Omega} f \varphi_i \, dx + \int_{\Gamma_N} u_N \varphi_i \, dS. \quad (2.11)$$

Tyto rovnice lze zapsat v maticové podobě jako

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{N_h 1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{N_h 2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1N_h} & a_{2N_h} & \dots & a_{N_h N_h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{N_h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{N_h} \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

neboli zkráceně

$$\mathbb{A} \alpha = \mathbf{b}, \quad (2.13)$$

kde prvky matice \mathbb{A} a vektoru $\mathbf{b} = \mathbf{b}^K + \mathbf{b}^N$ složeného z příspěvků od funkce f do vektoru \mathbf{b}^K a funkce u_N do vektoru \mathbf{b}^N jsou dány vztahy

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx, \quad (2.14)$$

$$b_i^K = \int_{\Omega} f \varphi_i \, dx, \quad b_i^N = \int_{\Gamma_N} u_N \varphi_i \, dS. \quad (2.15)$$

Matice \mathbb{A} je symetrická a pozitivně definitní, tedy i regulární. Tato matice se často nazývá matice tuhosti a v dalším textu ji budeme značit jako matici \mathbb{K} . Viz [2].

2.3.2 Triangulace oblasti

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená polygonální oblast a nechť τ_h je triangulace oblasti Ω . Říkáme, že triangulace je přípustná, pokud platí následující tři podmínky:

1. Triangulace τ_h je tvořena konečným počtem uzavřených trojúhelníků K .
2. $\bar{\Omega}_h = \bigcup_{K \in \tau_h} K$
3. Nechť $K_i, K_j \in \tau_h$, $K_i \neq K_j$. Pak pro $K_i \cap K_j$ existují tři přípustné možnosti, jsou buď disjunktní, nebo mají společný vrchol nebo mají společnou hranu.

Dále říkáme, že je systém triangulací $\{\tau_h\}_{h \in (0, h_0)}$ regulární, pokud existuje konstanta $c > 0$ taková, že

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq c \quad \text{pro všechna } K \in \tau_h, h \in (0, h_0), \quad (2.16)$$

kde ρ_K je poloměr největší kružnice vepsané do trojúhelníku K a h_K je délka nejdelší strany K . Dále parametr triangulace h definujeme jako $h = \max_{K \in \tau_h} h_K$.

2.3.3 Volba bázových funkcí

Při volbě bázových funkcí musíme brát zřetel na dva faktory, prvním je jednoduchost výpočtu a tím druhým je řešitelnost výsledné soustavy rovnic. Bázové funkce φ_i volíme tak, aby matice \mathbb{K} byla řídká, tedy aby byla většina mimodiagonálních prvků rovna nule. Abychom toho dosáhli je vhodné volit bázové funkce, které mají pokud možno navzájem disjunktní nosiče. Pro jednoduchost použijeme po částech lineární bázové funkce, tj. $V_h = \{v \in C(\Omega); v|_K \in P_1(K) \forall K \in \tau_h\}$, kde $C(\Omega)$ je množina spojitých funkcí na Ω a $P_1(K)$ je množina polynomů nejvýše prvního stupně na trojúhelníku K . Tyto bázové funkce volíme ve tvaru

$$\varphi_j(X_j) = 1, \quad (2.17)$$

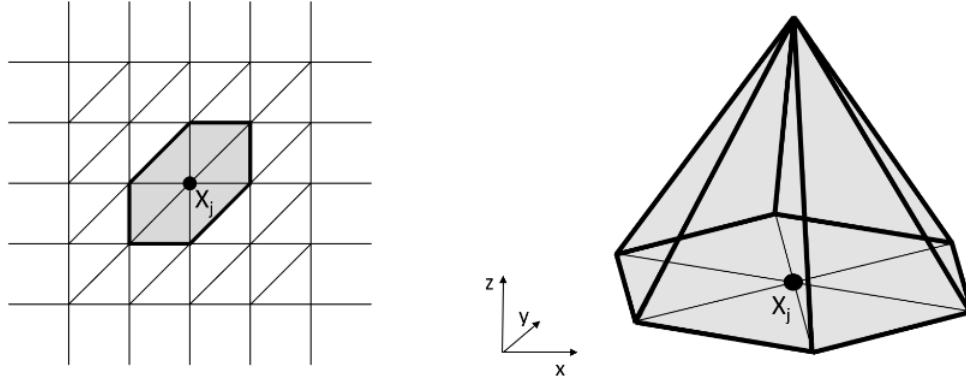
$$\varphi_j(X_i) = 0 \quad \text{pro } j \neq i, \quad (2.18)$$

kde X_i jsou vrcholy dané triangulace. Tím dosáhneme toho, že na trojúhelníku s vrcholem X_j dosahuje bázová funkce φ_j hodnoty jedna v bodě X_j a lineárně klesá k hodnotě nula, které je dosaženo právě ve zbývajících dvou vrcholech X_i . Ve všech ostatních trojúhelnících je funkční hodnota φ_j nulová, viz Obrázek 2.2.

2.3.4 Referenční zobrazení

Nyní když známe předpis pro jednotlivé bázové funkce, lze vypočítat prvky matice A dané integrály v rovnicích (2.12). Pro usnadnění jejich výpočtů, využijeme transformaci na referenční trojúhelník s pomocí bijektivního afinního zobrazení. Libovolný trojúhelník K z triangulace τ_h můžeme získat jako obraz referenčního trojúhelníku \hat{K} , viz Obrázek 2.3. Tuto transformaci definujeme předpisem:

$$F_K : \hat{K} \mapsto K, \quad F_K(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbb{B}_K \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_K, \quad (2.19)$$



Obrázek 2.2: Vlevo je vyznačen nosič lineární bázové funkce φ_j příslušící vrcholu X_j , vpravo je zobrazen její graf.

kde \mathbb{B}_K je regulární matice a \mathbf{b}_K je konstantní vektor.

Uvažujme libovolný trojúhelník K s vrcholy $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$. Nyní odvodíme hodnotu prvků matice \mathbb{B}_K a vektoru \mathbf{b}_K . Aby se vrchol $\hat{A} = [0, 0]$ zobrazil na vrchol A , musí platit:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \mathbf{b}_K + \mathbb{B}_K \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ tudíž } \mathbf{b}_K = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Vrchol B je obrazem vrcholu $\hat{B} = [1, 0]$:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \mathbb{B}_K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Stejně tak je vrchol C obrazem vrcholu $\hat{C} = [0, 1]$:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \mathbb{B}_K \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Odtud dostáváme všechny prvky matice \mathbb{B}_K

$$\mathbb{B}_K = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Je zřejmé, že leží-li všechny vrcholy trojúhelníku na jedné přímce a tedy vektory \vec{AB} a \vec{AC} jsou lineárně závislé, je matice \mathbb{B}_K singulární. V opačném případě je matice \mathbb{B}_K regulární. Jestliže je matice \mathbb{B}_K regulární, můžeme zavést inverzní zobrazení F_K^{-1} :

$$F_K^{-1} : K \mapsto \hat{K}, \quad F_K^{-1}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbb{B}_K^{-1}\hat{\mathbf{x}} - \mathbb{B}_K^{-1}\mathbf{b}_K. \quad (2.24)$$

Inverzní matici k \mathbb{B}_K můžeme vypočítat pomocí adjungované matice

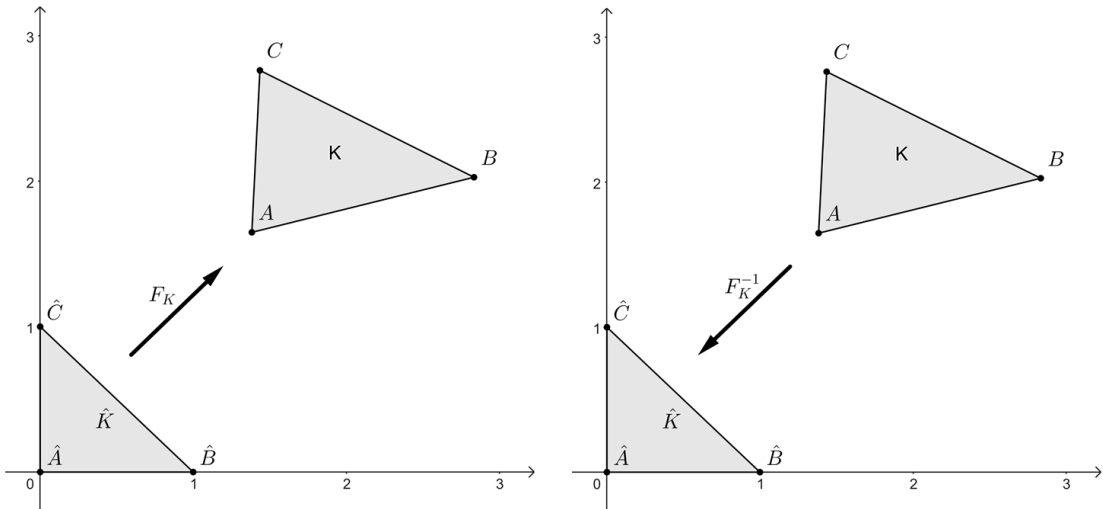
$$\mathbb{B}_K^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{B}_K} \begin{pmatrix} c_2 - a_2 & a_2 - b_2 \\ a_1 - c_1 & b_1 - a_1 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Dále vypočítáme Jakobián lineární transformace (2.19), který budeme potřebovat při substituci v integrálech

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial(b_{K11}\hat{x}+b_{K12}\hat{y}+a_1)}{\partial\hat{x}} & \frac{\partial(b_{K11}\hat{x}+b_{K12}\hat{y}+a_1)}{\partial\hat{y}} \\ \frac{\partial(b_{K21}\hat{x}+b_{K22}\hat{y}+a_2)}{\partial\hat{x}} & \frac{\partial(b_{K21}\hat{x}+b_{K22}\hat{y}+a_2)}{\partial\hat{y}} \end{vmatrix} = \det \mathbb{B}_K. \quad (2.26)$$

Ten využijeme při výpočtu obsahu trojúhelníku K pomocí substituce

$$S_K = \iint_K 1 \, dx dy = \iint_{\hat{K}} \det \mathbb{B}_K \, d\hat{x} d\hat{y} = \det \mathbb{B}_K \iint_{\hat{K}} 1 \, d\hat{x} d\hat{y} = \frac{\det \mathbb{B}_K}{2}. \quad (2.27)$$



Obrázek 2.3: Bijektivní afinní zobrazení F_K referenčního trojúhelníku \hat{K} na trojúhelník $K \in \tau_h$ a inverzní zobrazení F_K^{-1} .

2.3.5 Odvození gradientu báзовých funkcí

Jak je popsáno v předchozí kapitole, zvolené báзовé funkce jsou lineární na každém trojúhelníku. Báзовá funkce příslušející danému vrcholu je nenulová pouze na všech přilehlých trojúhelnících. Její hodnota v tomto vrcholu je rovna jedné a lineárně klesá, až ke dvěma zbývajícím vrcholům, ve kterých dosahuje nulové hodnoty. Definujme nyní funkce $\hat{\varphi}$ na \hat{K} tak, aby tato vlastnost zůstala zachována. Nechť tedy

$$\hat{\varphi}(\hat{x}, \hat{y}) = \varphi(x, y), \text{ kde } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F_K \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

Pro vrcholy referenčního trojúhelníku \hat{A} , \hat{B} a \hat{C} a jim příslušejícím báзовým funkcím bude tedy v souladu s rovnicemi (2.17) a (2.18) platit $\hat{\varphi}_{\hat{A}}(\hat{x}, \hat{y}) = 1 - \hat{x} - \hat{y}$, $\hat{\varphi}_{\hat{B}}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}$ a $\hat{\varphi}_{\hat{C}}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{y}$.

Nyní můžeme určit $\partial_x \varphi, \partial_y \varphi$ jako

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{x}} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \hat{x}}, \\ \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{y}} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \hat{y}}.\end{aligned}\tag{2.29}$$

Protože

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{K11} & b_{K21} \\ b_{K12} & b_{K22} \end{pmatrix} = \mathbb{B}_K^T,\tag{2.30}$$

lze vztahy (2.29) zapsat jako

$$\mathbb{B}_K^T \begin{pmatrix} \partial_x \varphi \\ \partial_y \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{\hat{x}} \hat{\varphi} \\ \partial_{\hat{y}} \hat{\varphi} \end{pmatrix}.\tag{2.31}$$

Pak pro regulární matici \mathbb{B}_K dostáváme výsledný vztah pro φ_x a φ_y

$$\begin{pmatrix} \partial_x \varphi \\ \partial_y \varphi \end{pmatrix} = (\mathbb{B}_K^T)^{-1} \begin{pmatrix} \partial_{\hat{x}} \hat{\varphi} \\ \partial_{\hat{y}} \hat{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbb{B}_K} \begin{pmatrix} b_{K22} & -b_{K21} \\ -b_{K12} & b_{K11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{\hat{x}} \hat{\varphi} \\ \partial_{\hat{y}} \hat{\varphi} \end{pmatrix}.\tag{2.32}$$

Nyní použijme tento vztah při výpočtu prvků matice tuhosti. Ty budeme počítat na referenčním trojúhelníku \hat{K} , s použitím referenčního zobrazení.

2.3.6 Numerická integrace

Při numerické integraci provádíme přibližné řešení určitého integrálu. V této práci budeme používat následující metody numerické integrace.

Numerická integrace na hraně Při výpočtu vektoru pravé strany budeme využívat Gaussovu numerickou kvadraturu. Ta při použití n kvadraturních uzlů dává přesné výsledky pro libovolný polynom, nejvýše stupně $2n - 1$. Pro spojitou funkci f na intervalu $[0,1]$ je dána obecným vzorcem

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i),\tag{2.33}$$

kde n je počet kvadraturních uzlů, x_i jsou kvadraturní uzly a w_i jsou váhy kvadratury. V této práci budeme potřebovat aproximovat polynomy prvního a druhého řádu. Použijeme tyto kvadratury:

$$\begin{aligned}n = 1, \quad x_1 &= \frac{1}{2}, \quad w_1 = 1, \\ n = 2, \quad x_1 &= \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{3}}}{2}, \quad w_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{3}}}{2}, \quad w_2 = \frac{1}{2}.\end{aligned}\tag{2.34}$$

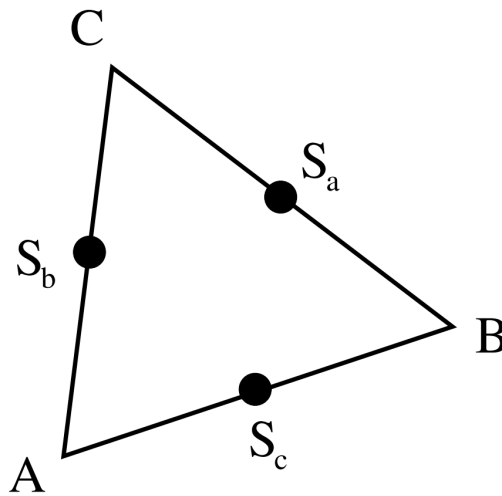
Numerická integrace na trojúhelníku Pro integraci spojitě funkce na obecném trojúhelníku K opět využijeme kvadraturní formuli

$$\int_K \psi(x) dx \approx \sum_{l=1}^M \omega_l \psi(\xi_l). \quad (2.35)$$

V této práci budeme používat integraci ve středech stran, která je přesná pro kvadratické funkce, tj.

$$\int_K \psi(x) dx \approx \frac{|K|}{3} (\psi(S_a) + \psi(S_b) + \psi(S_c)), \quad (2.36)$$

kde S_a, S_b, S_c jsou středy stran prvku K , viz Obrázek 2.4.



Obrázek 2.4: Kvadraturní uzly na trojúhelníku jsou zvoleny ve středech stran.

2.3.7 Výpočet matice tuhosti

Při sestavení matice tuhosti \mathbb{K} budeme vycházet z výše odvozené diskretizace, její prvky tedy vypočítáme jako

$$k_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx = \sum_{K \in \tau_h} \int_K \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i dx, \quad (2.37)$$

budeme je tedy počítat postupně po jednotlivých trojúhelnících z triangulace τ_h . Navíc díky použitým bázovým funkcím, bude součin gradientů na většině prvků nulový, nenulové budou na vybraném trojúhelníku pouze ty příspěvky, které přísluší jeho vrcholům.

Pro snadnější výpočet lokálního příspěvku do globální matice \mathbb{K} , použijeme zobrazení na referenční trojúhelník

$$k_{ij}^K = \int_{\hat{K}} \det \mathbb{B}_K (\hat{\nabla} \hat{\varphi}_j \mathbb{B}_K^{-1}) \cdot (\hat{\nabla} \hat{\varphi}_i \mathbb{B}_K^{-1}) d\hat{x}, \quad (2.38)$$

kde $\det \mathbb{B}$ je Jakobián transformace na referenční trojúhelník. Gradient lineární bázové funkce je konstantní, proto ho můžeme vytknout

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \sum_{K \in \tau_h} \det \mathbb{B}_K (\hat{\nabla} \hat{\varphi}_j \mathbb{B}_K^{-1}) \cdot (\hat{\nabla} \hat{\varphi}_i \mathbb{B}_K^{-1}) \int_{\hat{K}} d\hat{x} = \\ &= \sum_{K \in \tau_h} \frac{1}{2} \det \mathbb{B}_K (\hat{\nabla} \hat{\varphi}_j \mathbb{B}_K^{-1}) \cdot (\hat{\nabla} \hat{\varphi}_i \mathbb{B}_K^{-1}). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Pro uložení řídké matice je vhodné použít speciální datový typ, například formát triplet nebo CSC - Compressed Sparse Column Format, viz [10].

2.3.8 Sestavení pravé strany

První část příspěvku k pravé straně dostaneme integrací přes celou oblast Ω z výrazu

$$b_i^K = \int_{\Omega} f \varphi_i dx = \sum_{K \in \tau_h} \int_K f \varphi_i dx, \quad (2.40)$$

opět je budeme počítat postupně přes všechny trojúhelníky z triangulace τ_h . Pro výpočet integrálů využijeme numerickou kvadraturu s uzly ve středech stran trojúhelníku. Další část tvoří příspěvek od Neumannovy okrajové podmínky na hranici Γ_N . Ten vypočítáme dle vztahu

$$b_i^N = \int_{\Gamma_N} u_N \varphi_i dx \approx |S| \sum_{j=1}^n w_j u_N(X_j) \varphi(X_j), \quad (2.41)$$

kde $|S|$ značí délku hrany. Numerickou kvadraturu vybíráme podle toho, jakého stupně je funkce $u_N \varphi_i$, který potřebujeme aproximovat. Výsledný vektor pravé strany \mathbf{b} získáme jako součet výše vypočtených částí.

2.3.9 Dirichletova okrajová podmínka

Na hranici s Dirichletovou okrajovou podmínkou předepisujeme přímo hodnoty hledaného řešení. Existuje více možností, jak Dirichletovu okrajovou podmínku realizovat. První možností realizace je přímá úprava matice soustavy a vektoru pravé strany, aby byla Dirichletova okrajová podmínka splněna přesně. Přepíšeme tedy prvky vektoru pravé strany \mathbf{b}_i odpovídající vrcholům ležícím na Γ_D hodnotami zde vyčíslené funkce u_D . Poté vynulujeme odpovídající řádky matice tuhosti. Dále od vektoru pravé strany postupně odečteme součiny známých hodnot s příslušným sloupcem matice tuhosti \mathbb{K} a sloupec vynulujeme. Tím zajistíme, že matice \mathbb{K} zůstane symetrická. Nakonec diagonální prvky s indexy ii položíme rovny jedné, viz [2].

Další možnost je předepsat Dirichletovu okrajovou podmínku pomocí penalizace, kde je chyba vůči zadané Dirichletově okrajové podmínce penalizována penalizačním parametrem ϵ . Dirichletovu okrajovou podmínku nahradíme podmínkou

$$\frac{1}{\epsilon} (u - u_D)(x, y) = 0, \quad \text{pro } [x, y] \in \Gamma_D. \quad (2.42)$$

V tomto případě vede její realizace pomocí slabé formulace na dodatečnou rovnici

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{\Gamma_D} \varphi_j \varphi_i dS = \frac{1}{\epsilon} \int_{\Gamma_D} u_D \varphi_i dS, \quad (2.43)$$

kde členy z pravé strany rovnice (2.43) přičteme k vektoru pravé strany rovnice (2.12) a členy levé strany rovnice (2.43) přičteme do matice tuhosti \mathbb{K} . Dodatečný vektor pravé strany \mathbf{b}^D odpovídající vrcholům na hranici Γ_D vypočítáme stejně jako jsme počítali vektor \mathbf{b}^N , viz předešlá kapitola.

Kapitola 3

Prostorová a časová diskretizace vlnové rovnice

Nyní použijeme numerické schémata z předchozí kapitoly při řešení vlnové rovnice. Z tohoto důvodu převedeme vlnovou rovnici nejprve do slabé formulace a následně ukážeme, jak vypočítat všechny získané členy výsledného diskretizovaného problému. Pak představíme Newmarkovu metodu pro časovou diskretizaci. Na konci kapitoly je uveden popis modální analýzy a diskrétní Fourierovy transformace, tj. dvou možných metod k určení frekvenčního spektra uvažovaného problému.

3.1 Slabá formulace vlnové rovnice

Budeme postupovat obdobně jako u Poissonovy rovnice. Budeme uvažovat vlnovou rovnici (1.18) spolu s okrajovými podmínkami (1.19) až (1.21). Tu nejprve vynásobíme rovnici (1.19) testovací funkcí φ z prostoru V . Výslednou rovnost zintegrujeme na celé oblasti Ω

$$\int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \varphi \, dx - \int_{\Omega} \Delta p \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx. \quad (3.1)$$

Druhý člen rovnice upravíme pomocí Greenovy věty

$$- \int_{\Omega} \Delta p \varphi \, dx = \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \varphi \, dS, \quad (3.2)$$

kde \mathbf{n} je jednotkový vektor vnější normály k hranici $\partial\Omega$. Integrál přes hranici $\partial\Omega$ můžeme rozepsat jako

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \varphi \, dS = \int_{\Gamma_D} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \varphi \, dS + \int_{\Gamma_N} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \varphi \, dS + \int_{\Gamma_S} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \varphi \, dS, \quad (3.3)$$

a protože testovací funkce $\varphi \in V$ je z definice nulová na hranici Γ_D , je i celý integrál $\int_{\Gamma_D} \nabla p \cdot \mathbf{n} \varphi \, dS$ roven nule. Následně po použití okrajových podmínek (1.20) až (1.22) v rovnici (3.3) můžeme rovnici (3.1) zapsat v konečné podobě

$$\int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \varphi \, dx + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx + \int_{\Gamma_N} p_N \varphi \, dS - \int_{\Gamma_S} \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} \varphi \, dS, \quad (3.4)$$

kde požadujeme její platnost pro libovolnou testovací funkci $\varphi \in V$.

3.1.1 Prostorová diskretizace

Zvolme podprostor $V_h \subset V$ s konečnou dimenzí $\dim V_h = N_h < \infty$. Pak budeme hledat numerické řešení jako funkci $u_h \in V_h$, která pro všechny $\varphi_h \in V_h$ splňuje rovnici

$$\int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_h}{\partial t^2} \varphi_h \, dx + \int_{\Gamma_S} \frac{1}{c} \frac{\partial p_h}{\partial t} \varphi_h \, dS + \int_{\Omega} \nabla p_h \cdot \nabla \varphi_h \, dx = \int_{\Omega} f \varphi_h \, dx + \int_{\Gamma_N} p_N \varphi_h \, dS. \quad (3.5)$$

V prostoru V_h můžeme zvolit báze funkce $\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h}$. Potom lze funkci p_h zapsat jako lineární kombinaci prvků této zvolené báze

$$p_h(x, y, t) = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j(t) \varphi_j(x, y), \quad (3.6)$$

kde koeficienty lineární kombinace uvažujeme jako (dvakrát spojitě diferencovatelné) funkce času.

Díky tomu, že libovolnou funkci $v_h \in V_h$ lze jednoznačně zapsat jako lineární kombinaci báze funkce, postačí když budeme požadovat platnost rovnice (3.5) pro všechny báze funkce $\varphi_i \in V_h$. Tedy aby pro všechny $i \in \{1, \dots, N_h\}$ platilo

$$\int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_h}{\partial t^2} \varphi_i \, dx + \int_{\Gamma_S} \frac{1}{c} \frac{\partial p_h}{\partial t} \varphi_i \, dS + \int_{\Omega} \nabla p_h \cdot \nabla \varphi_i \, dx = \int_{\Omega} f \varphi_i \, dx + \int_{\Gamma_N} p_N \varphi_i \, dS. \quad (3.7)$$

Dosazením za p_h ze vztahu (3.6) do rovnice (3.7) získáme

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_h} \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \alpha_j}{\partial t^2} \varphi_j \varphi_i \, dx + \sum_{j=1}^{N_h} \int_{\Gamma_S} \frac{1}{c} \frac{\partial \alpha_j}{\partial t} \varphi_j \varphi_i \, dS + \sum_{j=1}^{N_h} \int_{\Omega} \alpha_j \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx = \\ = \int_{\Omega} f \varphi_i \, dx + \int_{\Gamma_N} p_N \varphi_i \, dS. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Tuto soustavu rovnic můžeme zapsat v maticovém tvaru

$$\frac{1}{c^2} \mathbb{M} \alpha'' + \frac{1}{c} \mathbb{C} \alpha' + \mathbb{K} = \mathbf{b}, \quad (3.9)$$

kde \mathbb{M} označujeme jako matici hmotnosti a \mathbb{C} je matice tlumení, pomocí které je zde realizována Sommerfeldova okrajová podmínka. Matice \mathbb{M} a \mathbb{C} jsou symetrické, matice \mathbb{M} je navíc ještě pozitivně definitní. Touto diskretizací jsme převedli parciální diferenciální rovnici (1.19) na obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu pro neznámé koeficienty α_j , kterou pro plnou řešitelnost doplníme o počáteční podmínky (1.23).

3.2 Matice hmotnosti

Matici hmotnosti \mathbb{M} sestavíme obdobně jako matici tuhosti \mathbb{K} . Součin bázových funkcí integrujeme přes celou oblast Ω

$$m_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx = \sum_{K \in \tau_h} \int_K \varphi_i \varphi_j dx, \quad (3.10)$$

kde m_{ij} jsou prvky matice hmotnosti \mathbb{M} . Použitím referenčního zobrazení lze integrál (3.10) přepsat jako

$$m_{ij} = \sum_{K \in \tau_h} \int_{\hat{K}} \det \mathbb{B}_K \hat{\varphi}_i \hat{\varphi}_j d\hat{x}. \quad (3.11)$$

Při volbě lineárních bázových funkcí je nutno integrovat přesně polynom druhého stupně. Proto k integraci opět využijeme numerickou kvadraturu

$$m_{ij} = \sum_{K \in \tau_h} |K| \sum_{k=1}^3 \frac{1}{3} \hat{\varphi}_i(\hat{X}_k) \hat{\varphi}_j(\hat{X}_k). \quad (3.12)$$

kde kvadraturní uzly \hat{X}_k jsou středy stran referenčního trojúhelníku a $|K| = \frac{\det \mathbb{B}}{2}$.

3.3 Sommerfeldova radiační podmínka

Sommerfeldova radiační podmínka je realizována rozšířením soustavy o matici tlumení \mathbb{C} . Prvky této matice vypočteme jako

$$c_{ij} = \int_{\Gamma_S} \varphi_i \varphi_j dS = \sum_{S \in \gamma_S} \int_S \varphi_i \varphi_j dS, \quad (3.13)$$

kde c_{ij} jsou prvky matice tlumení \mathbb{C} , γ_S je množina všech hran, které leží na hranici s předepsanou Sommerfeldovou okrajovou podmínkou Γ_S . Při výpočtu prvků matice \mathbb{C} , použijeme opět Gaussovu numerickou integraci na hraně.

3.4 Časová diskretizace

Časovou diskretizaci, kterou využijeme později při řešení vlnové rovnice, nyní představíme na jednoduchém skalárním modelovém problému druhého řádu. Ten bychom mohli převést na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu a pro jeho řešení použít například Collatzovu metodu nebo Rungeovy–Kuttovy metody vyššího řádu. My zde však použijeme Newmarkovu metodu, která je pro řešení rovnic nebo i soustav obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu výhodnější.

3.4.1 Newmarkova metoda

Zde odvodíme Newmarkovo schéma pro obecnou počáteční úlohu druhého řádu ve tvaru

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t)), \quad (3.14)$$

$$y(0) = y_0, \quad (3.15)$$

$$y'(0) = y'_0, \quad (3.16)$$

kde $f : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce a $y_0, y'_0 \in \mathbb{R}$. Volíme dělení $D = \{t_n\}_{n=1}^N$ intervalu $[0, T]$ tak, že $t_N = T$ a $t_{n+1} = t_n + \tau_n$, $n \in \{0, \dots, N-1\}$. Dále předpokládejme, že $y \in C^4([0, T])$. Pomocí Taylorova rozvoje třetího řádu vyjádříme hodnotu $y(t_{n+1})$ v čase t_n

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \tau_n y'(t_n) + \frac{1}{2} \tau_n^2 y''(t_n) + \frac{1}{6} \tau_n^3 y'''(t_n) + \mathcal{O}(\tau_n^4). \quad (3.17)$$

K pravé straně přičteme a odečteme výraz $\tau_n^2 \beta (y''(t_{n+1}) - y''(t_n))$, kde $\beta \in \mathbb{R}$ je parametr. Úpravou dostaneme výraz

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) = & y(t_n) + \tau_n y'(t_n) + \tau_n^2 \left(\beta y''(t_{n+1}) + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) y''(t_n) \right) - \\ & - \tau_n^2 (\beta y''(t_{n+1}) - \beta y''(t_n)) - \frac{1}{6} y''(t_n) \tau_n^3 y'''(t_n) + \mathcal{O}(\tau_n^4). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Z Taylorova rozvoje druhé derivace y podle t v čase t_n plyne vztah

$$y''(t_{n+1}) - y''(t_n) = \tau_n y'''(t_n) + \mathcal{O}(\tau_n^2). \quad (3.19)$$

Dosazením do rovnosti (3.18) dostaneme

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) = & y(t_n) + \tau_n y'(t_n) + \tau_n^2 \left(\beta y''(t_{n+1}) + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) y''(t_n) \right) + \\ & + \tau_n^3 \left(\frac{1}{6} - \beta \right) y'''(t_n) + \mathcal{O}(\tau_n^4), \end{aligned} \quad (3.20)$$

kde člen $\tau_n^3 (\frac{1}{6} - \beta) y'''(t_n) + \mathcal{O}(\tau_n^4)$ budeme považovat za chybu třetího řádu. Jelikož je $y(t)$ řešením uvedené počáteční úlohy (2.43) dosazením za $y''(t_{n+1})$ dostáváme rovnost

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) = & y(t_n) + \tau_n y'(t_n) + \\ & + \tau_n^2 \left(\beta f(t_{n+1}, y(t_{n+1}), y'(t_{n+1})) + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) f(t_n, y(t_n), y'(t_n)) \right) + \mathcal{O}(\tau_n^3). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Obdobně můžeme odvodit i vztah pro hodnotu první derivace v bodě t_{n+1} :

$$y'(t_{n+1}) = y'(t_n) + \tau_n y''(t_n) + \frac{1}{2} \tau_n^2 y'''(t_n) + \mathcal{O}(\tau_n^3). \quad (3.22)$$

Přičtením a odečtením výrazu $\gamma\tau_n(y''(t_{n+1}) - y''(t_n))$, kde $\gamma \in \mathbb{R}$ je parametr, dostaneme výraz

$$y'(t_{n+1}) = y'(t_n) + \tau_n((\gamma y''(t_{n+1}) + (1 - \gamma)y''(t_n)) + \tau_n^2\left(\frac{1}{2} - \gamma\right)y'''(t_n) + \mathcal{O}(\tau_n^3)), \quad (3.23)$$

kde člen $\tau_n^2\left(\frac{1}{2} - \gamma\right)y'''(t_n) + \mathcal{O}(\tau_n^3)$ budeme považovat za chybu druhého řádu. Zanedbáním diskretizační chyby a po zavedení aproximací $y_n = y_n(t_n)$, $y'_n = y'_n(t_n)$, $f_n = f(t_n, y_n, y'_n)$, dostaneme konečnou podobu Newmarkova schématu

$$y_{n+1} = y_n + \tau_n y'_n + \tau_n^2 \left(\beta f_{n+1} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) f_n \right), \quad (3.24)$$

$$y'_{n+1} = y'_n + \tau_n (\gamma f_{n+1} + (1 - \gamma) f_n). \quad (3.25)$$

Parametry budeme volit následovně, $\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{4}$. Pro tuto volbu dosahuje schéma druhého řádu přesnosti, nepodmíněně stabilní, ale je stále implicitní. Nevýhodou je, že vztahy (3.24), (3.25) obecně představují soustavu dvou nelineárních rovnic, viz [6].

3.4.2 Numerické řešení pomocí Newmarkovy metody

Přibližné řešení počátečního problému druhého řádu daného rovnicí (3.9) nalezneme pomocí Newmarkovy metody. Vyžadujeme platnost rovnice na každé časové vrstvě, pro časovou vrstvu $t = t_{n+1}$ platí

$$\mathbb{M}y''_{n+1} + \mathbb{C}y'_{n+1} + \mathbb{K}y_{n+1} = b_{n+1}. \quad (3.26)$$

Zde provedeme aproximaci pomocí vztahů (3.24), (3.25) a dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbb{M}y''_{n+1} + \mathbb{C}(y'_n + \tau_n(\gamma y''_{n+1} + (1 - \gamma)y''_n)) + \mathbb{K}(y_n + \tau_n y'_n + \\ + \tau_n^2 \left(\beta y''_{n+1} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) y''_n \right)) = \mathbf{b}_{n+1}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Převedením neznámých na nové časové vrstvě dostáváme

$$\mathbb{A}y''_{n+1} = b_{n+1} - \mathbb{C}y'_n - (1 - \gamma)\tau_n \mathbb{C}y''_n - \mathbb{K}y_n - \tau_n \mathbb{K}y'_n - \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \tau_n^2 \mathbb{K}y''_n, \quad (3.28)$$

kde \mathbb{A} je matice $\mathbb{A} = (\mathbb{M} + \gamma\tau_n \mathbb{C} + \beta\tau_n^2 \mathbb{K})$. V tomto případě je získaná soustava rovnic (3.28) lineární. Matice \mathbb{A} je symetrická a pozitivně definitní, což nám dovoluje při řešení soustavy rovnic (3.28) použít například metodu sdružených gradientů nebo LU rozklad.

3.5 Modální analýza

Pro získání vlastních frekvencí a tvarů kmitání akustické oblasti Ω vyjdeme z rovnice (3.9), pro jednoduchost bez uvažování matice tlumení a působení vnějších

zdrojů ve tvaru

$$\frac{1}{c^2} \mathbb{M} \mathbf{y}'' + \mathbb{K} \mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (3.29)$$

Obecné řešení této rovnice budeme hledat ve tvaru

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x} e^{\lambda t}, \quad (3.30)$$

kde λ je obecně komplexní číslo a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N_h}$. První a druhá časová derivace pak mají tvar

$$\mathbf{y}'(t) = \lambda \mathbf{x} e^{\lambda t}, \quad (3.31)$$

$$\mathbf{y}''(t) = \lambda^2 \mathbf{x} e^{\lambda t}. \quad (3.32)$$

Jejich dosazením do (3.29) získáme

$$\left(\frac{1}{c^2} \mathbb{M} \lambda^2 + \mathbb{K} \right) \mathbf{x} e^{\lambda t} = \mathbf{0}, \quad (3.33)$$

odtud

$$\left(\frac{1}{c^2} \mathbb{M} \lambda^2 + \mathbb{K} \right) \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (3.34)$$

Tato rovnice představuje kvadratický problém vlastních čísel. Tato soustava má netriviální řešení právě, když je její determinant roven nule. Rovnice

$$\det \left(\frac{1}{c^2} \mathbb{M} \lambda^2 + \mathbb{K} \right) = 0 \quad (3.35)$$

se nazývá charakteristická rovnice soustavy (3.34). Kořeny charakteristické rovnice označujeme jako vlastní čísla soustavy λ_j . V našem případě, kde matice \mathbb{M} i \mathbb{K} jsou symetrické a pozitivně definitní, platí, že jsou vlastní čísla λ_j ryze imaginární a tedy $\omega_j = \frac{|i\lambda_j|}{c}$. Kořenů rovnice N-tého stupně (3.34) je obecně N, ale nemůžeme vyloučit jejich násobnost. Další problém by mohl nastat, pokud by algebraická násobnost vybraného vlastního čísla byla větší než geometrická, ale toto nastává zřídka a tomuto problému se zde nebudeme věnovat.

Dosazením určených vlastních čísel do (3.34) získáme homogenní soustavu lineárních rovnic pro neznámý vektor \mathbf{x}_j . Každému netriviálnímu řešení \mathbf{x}_j této singulární soustavy rovnic říkáme vlastní vektor příslušící k vlastnímu číslu λ_j .

3.6 Fourierova transformace

Použijeme diskrétní Fourierovu transformaci pro vyšetření frekvenčního obsahu vybraných signálů. V podstatě se jedná o rozvoj signálu do báze tvořené funkcemi

$\sin k \frac{2\pi}{N+1}$ a $\cos k \frac{2\pi}{N+1}$, $k = 0, 1, \dots, N$. Diskrétní Fourierovu transformaci použitou na posloupnost $\{b_j\}_{j=0}^N$ definujeme vztahem

$$a_k = \sum_{j=0}^N b_j e^{-\frac{2\pi i}{N+1}jk}, \quad (3.36)$$

kde členy posloupnosti $\{a_k\}_{k=0}^N$ nám dovolují aproximovat původní posloupnost jako

$$b_j \approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N a_k e^{\frac{2\pi i}{N+1}jk}. \quad (3.37)$$

Obecně se jedná o zobrazení mezi dvěma obecně komplexními posloupnostmi $\{b_j\}_{j=0}^N$ a $\{a_k\}_{k=0}^N$, i je komplexní jednotka. V našem případě pro $b_j \in \mathbb{R}$ mohou být koeficienty a_k stále komplexní.

Členy posloupnosti a_k odpovídají frekvencím

$$f_j = j \frac{1}{\tau(N+1)}, \quad \text{kde } j = 0, 1, \dots, N, \quad (3.38)$$

kde τ je časový krok a $N+1$ je počet časových kroků simulace, tj. $T = N\tau$. Velikost absolutních hodnot a_k udává významnost příslušné frekvence, viz [8].

Kapitola 4

Numerické výsledky

V této kapitole budou uvedeny výsledky numerické simulace, která byla realizována pomocí programu napsaném v programovacím jazyce Python. Tento program načte trojúhelníkovou síť ze souboru ve formátu *MSH*, vyplní matici tuhosti \mathbb{K} i matici hmotnosti \mathbb{M} a vektor pravé strany \mathbf{b} . V případě použití Sommerfeldovy okrajové podmínky vyplní i matici tlumení \mathbb{C} . Dále dokáže realizovat i Neumannovu a Dirichletovu okrajovou podmínku. Poté vyřeší výsledný systém obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu pomocí Newmarkovy metody a výsledky uloží do textového souboru.

4.1 Testovací úlohy

Pro otestování numerického modelu jsme použili testovací úlohy, u kterých předem známe analytické řešení. Takto můžeme snadno ověřit správnost výsledků a rychlost konvergence.

Experimentální řád konvergence

Experimentálním řádem konvergence nazýváme koeficient α ze vztahu

$$\frac{E_n}{E_m} = \left(\frac{h_n}{h_m} \right)^\alpha, \quad (4.1)$$

kde h je parametr triangulace a E je chyba simulace. Pro výpočet chyby využijeme následující normy

$$\text{maximová norma: } \|u\|_{max} = \max_{(x,y) \in \Omega} \{|u|\}$$

$$\text{L}^2 \text{ norma: } \|u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} u^2 dx}$$

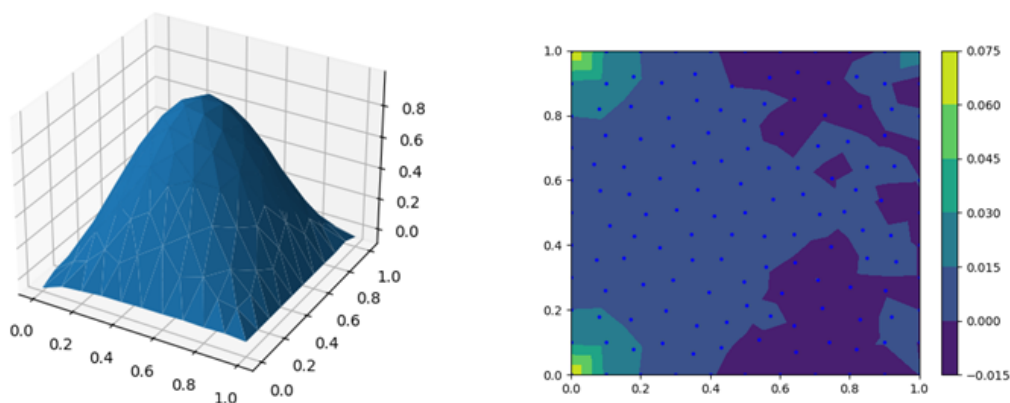
Pro všechny testovací úlohy jsme uvažovali Poissonovu rovnici (2.1) na oblasti Ω . Za tu byl zvolen čtverec $(0, 1) \times (0, 1)$. Dále jsme předepsali Dirichletovu okrajovou

podmínku (2.3) na pravé straně čtverce, tj. na straně s $x = 1$, a na zbylých hranicích čtverce jsou použity nulové Neumannovy okrajové podmínky. Dirichletova okrajová podmínka byla realizována prvním popsáním přístupem, viz první odstavec 2.3.9.

Pro testování jsme vzali předem známé řešení $u_{analyticke}$ a dopočítali jsme příslušnou funkci f na pravé straně. Výsledky numerického modelu jsme následně porovnali s analytickým řešením. Uvažovali jsme tyto dvě testovací úlohy:

1. $u_{analyticke}(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$, odtud $f = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ a $u_D = 0$ na celém Γ_D
2. $u_{analyticke}(x, y) = x(1 - x)y(1 - y)$, odtud $f = 2(x(1 - x) + y(1 - y))$ a $u_D = 0$ na celém Γ_D

Získané výsledky pro úlohu 1 jsou zobrazeny na Obrázku 4.1. Také byla ověřena rychlost konvergence na sérii postupně zjemňovaných sítí, výsledky jsou uvedeny v Tabulce 4.1. První vypočítaná hodnota experimentálního řádu konvergence α je zřejmě chybná. Nepřesnost je způsobena tím, že numerická kvadratura použitá při výpočtu chyby není vhodná pro aproximaci polynomů vyššího než druhého řádu. Pro jemnější síť není tato chyba tak významná. Hodnota experimentálního řádu konvergence α pro $h = 0,01$ už odpovídá teoretickému předpokladu.



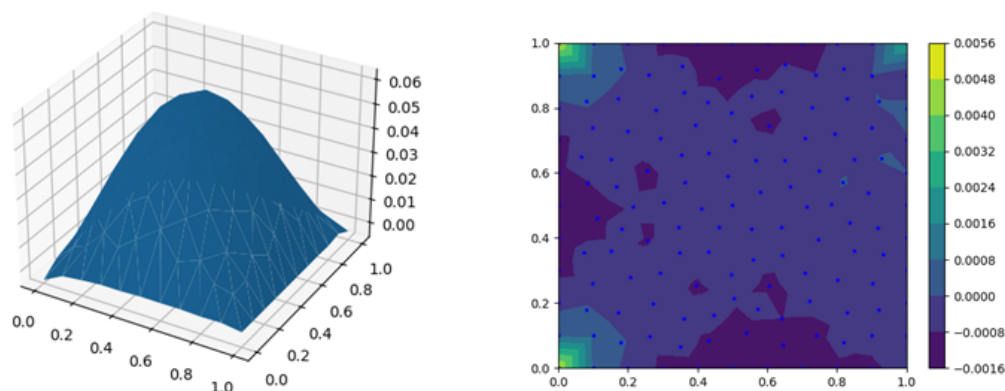
Obrázek 4.1: Numerické řešení a chyba oproti přesnému řešení pro úlohu 1.

Tabulka 4.1: Velikost chyby a řád konvergence α pro úlohu 1.

h_{max}	E_{max}	α_{max}	E_{L^2}	α_{L^2}
0,1	0,08757		0,0376	
0,07	0,02736	3,261	0,00436	6,037
0,05	0,01496	1,794	0,00244	1,729
0,01	0,0009473	1,715	0,0000883	2,061

Získané výsledky pro úlohu 2 jsou zobrazeny na Obrázku 4.2. Také byla ověřena rychlost konvergence na sérii postupně zjemňovaných sítí, výsledky jsou uvedeny v Tabulce 4.2. První vypočítaná hodnota experimentálního řádu konvergence α je

zřejmě chybná. Nepřesnost je způsobena tím, že numerická kvadratura použitá při výpočtu chyby není vhodná pro aproximaci polynomů vyššího než druhého řádu. Pro jemnější síť není tato chyba tak významná. Hodnota experimentálního řádu konvergence α pro $h = 0,01$ už odpovídá teoretickému předpokladu.



Obrázek 4.2: Numerické řešení a chyba oproti přesnému řešení pro úlohu 2.

Tabulka 4.2: Velikost chyby a řád konvergence α pro úlohu 2.

h_{max}	E_{max}	α_{max}	E_{L^2}	α_{L^2}
0,1	0,009821		0,004600	
0,07	0,001844	4,6889	0,00088	4,637
0,05	0,001014	1,777	0,0005148	1,594
0,01	0,0000755	1,614	0,0000198	2,024

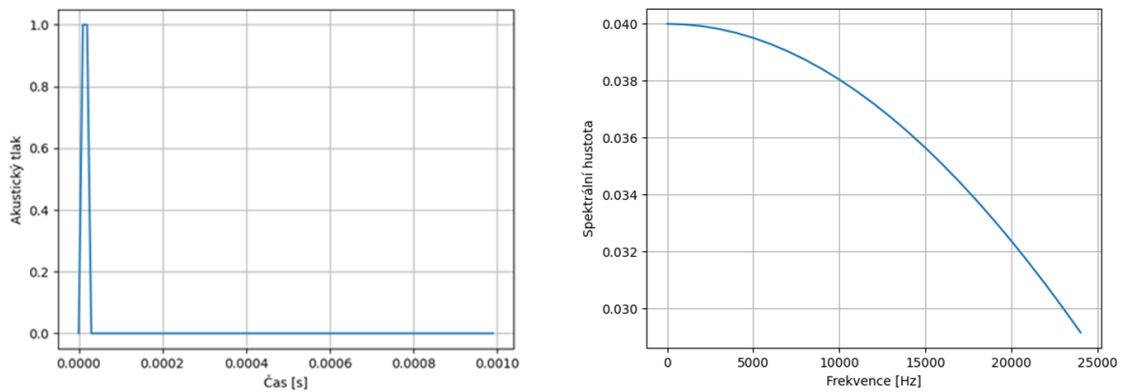
Výše byly uvedeny výsledky pro síť s maximální délkou hrany 0,1. Síť má tedy přibližně 240 trojúhelníků.

4.2 Řešení vlnové rovnice na obdélníkové oblasti

Budeme hledat řešení vlnové rovnice (1.19) na obdélníkové oblasti $\Omega = (0, 5) \times (0, 1)$. Řešíme vlnovou rovnici se zdrojovým členem $f(x, t)$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = f(x, t) \quad \text{na } \Omega \times (0, T). \quad (4.2)$$

Uvažujeme nulové počáteční podmínky. Dále předepíšeme Sommerfeldovu okrajovou podmínku na pravé straně obdélníka a na zbytku hranice Neumannovu okrajovou podmínku. Rychlost zvuku volíme $c = 343 \text{ m/s}$, což odpovídá rychlosti zvuku ve vzduchu o teplotě 20°C . Zdrojový člen uvažujeme jako $f(x, t) = h(x) \cdot g(t)$. Prostorový zdroj $h(x)$ umístíme do okolí bodu $[0,5; 0,5]$, tj. blízko levé hranice obdélníka. Jako zdrojový člen vlnění v čase je použit pulz s předpisem podle článku [9], viz Obrázek 4.3. Tento předpis napodobuje Diracovu delta funkci a její ideálně ploché frekvenční spektrum.



Obrázek 4.3: Vlevo graf časového průběhu pulzu, vpravo graf jeho Fourierovy transformace.

Na Obrázku 4.3 je zobrazen časový průběh pulzu a též jeho Fourierovu transformace. Impulz má ploché frekvenční spektrum přibližně do 5kHz. Díky volbě impulzu s plochým frekvenčním spektrem omezíme vliv dominantních frekvencí impulzu na výsledky simulace a naopak zvýrazníme rezonanční frekvence samotné oblasti, které nás zajímají.

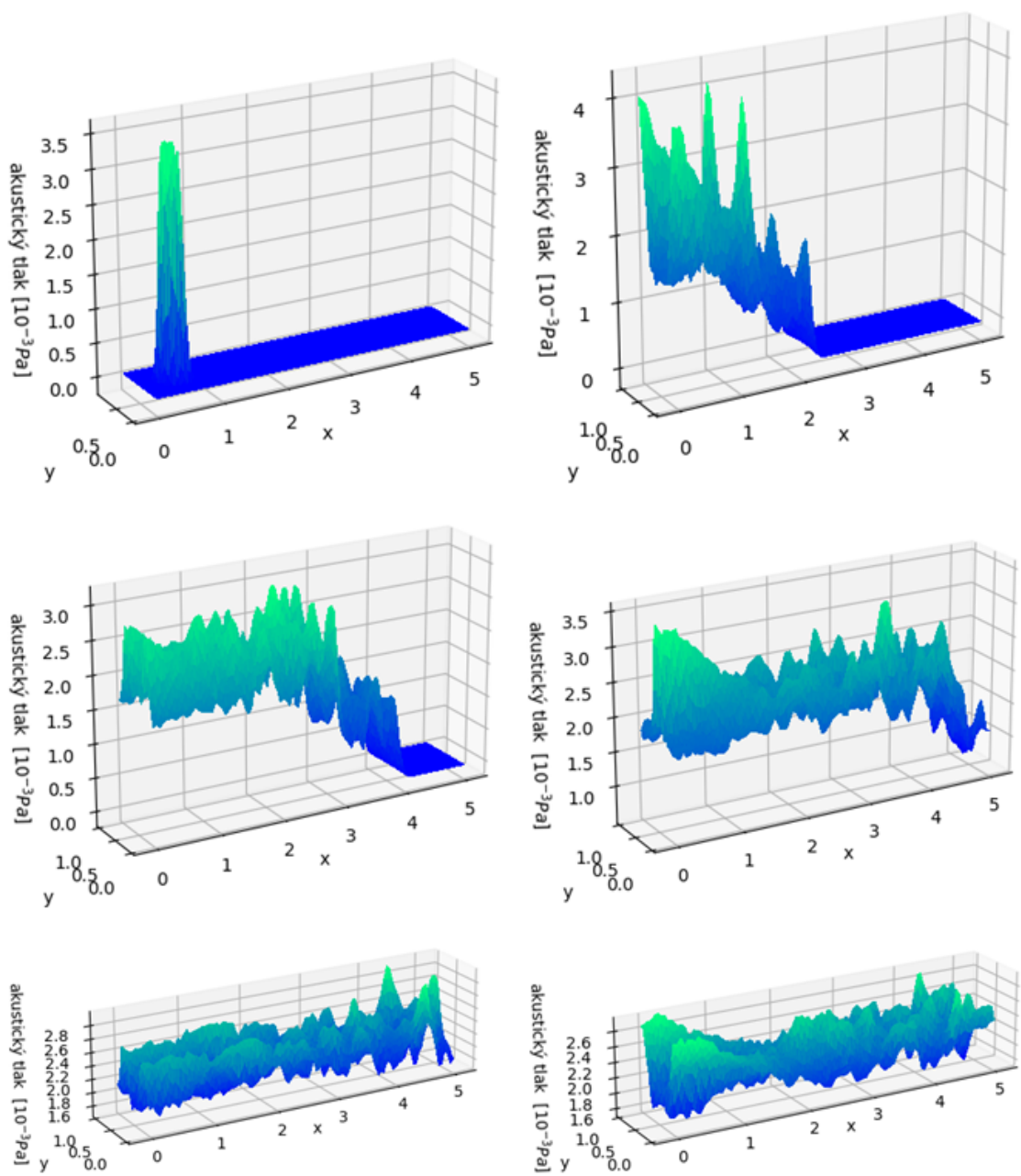
Časový krok Newmarkovy metody je zvolen jako $\tau = 10^{-4} \text{ s}$ a konečný čas simulace je $T = 0,5 \text{ s}$. Použili jsme síť s parametrem $h = 0,05$. Tento časový krok umožňuje získat řešení s dobře rozlišenou frekvencí

$$f_{max} \approx \frac{1}{20\tau} = 500 \text{ Hz} \quad (4.3)$$

a prostorový krok dobře aproximuje vlnění o frekvenci

$$\lambda_{min} \approx 20h = 1 \text{ m} \quad \implies \quad f_{max} = \frac{c}{\lambda_{min}} = 343 \text{ Hz}. \quad (4.4)$$

Získané řešení je znázorněno na Obrázku 4.4. Je zde vidět zdrojový člen a jím vyvolané vlnění. Mezi odrazy od stěn jsou patrné i vybuzené příčné módy, viz maxima akustického tlaku na stěnách.



Obrázek 4.4: Časový průběh řešení vlnové rovnice na obdélníkové oblasti o stranách 1×5 , zdrojový člen vlnění je umístěn v okolí bodu $[0,5;0,5]$. Obrázky jsou řazeny zleva doprava pro časové okamžiky $k \cdot 0,005s$, kde $k = 1, \dots, 6$.

4.2.1 Analýza výsledků

Budeme uvažovat model čtvrtvlnového rezonátoru, který je po teoretické stránce podobný našemu případu, ale není stejný. To znamená, že uvažujeme stejný obdélník, ale nahradíme zde Sommerfeldovu okrajovou podmínku Dirichletovou okrajovou. Rozdílnost spočívá již v tom, že model s Dirichletovou okrajovou podmínkou se nedá využít k časové simulaci, protože je plně odrazivá.

Pro tento jednoduchý model existuje i analytický vztah pro výpočet vlastních frekvencí, viz [7]

$$f_k = \frac{1}{4} \frac{c}{L} (2k - 1) \quad \text{pro } k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.5)$$

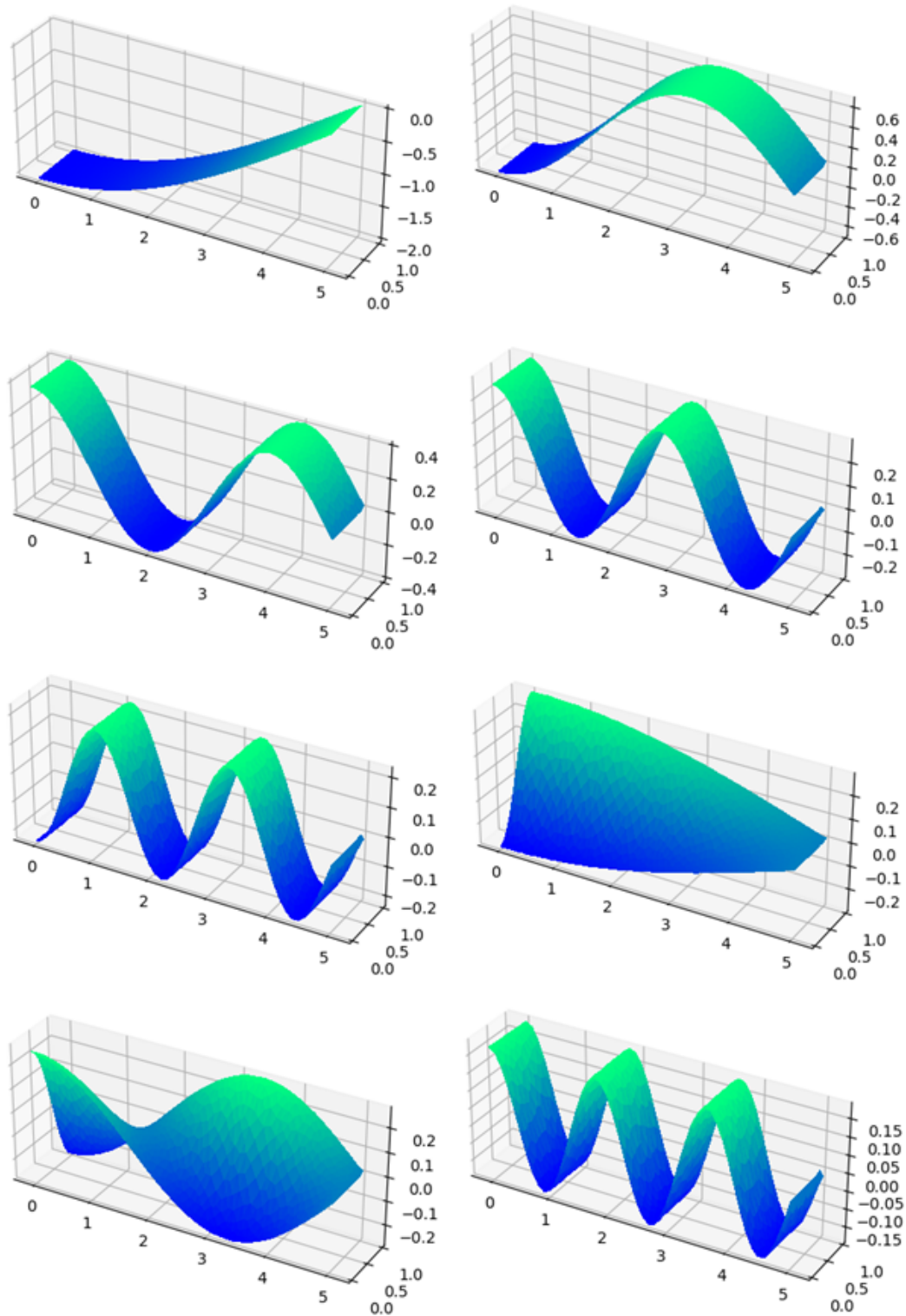
Prvních pět vlastních frekvencí je zobrazeno v Tabulce 4.3.

Modální analýza. Pomocí modální analýzy čtvrtvlnového rezonátoru jsme získali vlastní tvary kmitání a vlastní frekvence. Prvních osm vlastních tvarů kmitání je zobrazeno na Obrázku 4.5 a získané vlastní frekvence jsou uvedeny v taktě v Tabulce 4.3. Námi získané frekvence si velmi dobře odpovídají se vzorcem (4.5)

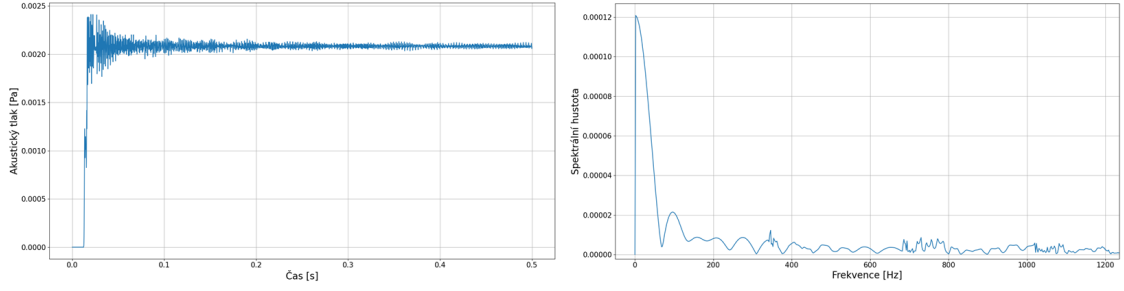
Fourierova analýza. Ve dvou bodech o souřadnicích [3,0.5] a [4,0.5] jsme zaznamenali časový vývoj akustického tlaku, získaného jako řešení vlnové rovnice s uvažovanou Sommerfeldovou okrajovou podmínkou, viz Obrázky 4.6 a 4.7. Je zde vidět, jak vlny postupně prochází těmito body. Následně jsme provedli diskrétní Fourierovu transformaci časového vývoje akustického tlaku. První tři dominantní frekvence jsou 96, 157 a 210 Hz, viz též Tabulka 4.3. Pomocí tohoto postupu se nám nepodařilo detekovat první dvě vlastní frekvence. Tyto dvě frekvence jsou s vysokou pravděpodobností v signálu přítomny, ale Fourierova transformace je v intervalu do cca 70 Hz nedokáže rozlišit. Hodnoty třetí a páté vlastní frekvence si poměrně dobře odpovídají. Nepřítomnost čtvrté vlastní frekvence může být způsobena tím, že poloha buzení je v místě kmitny čtvrtého módu kmitání, viz Obrázek 4.5.

Tabulka 4.3: Prvních pět vlastních frekvencí modelu čtvrtvlnového rezonátoru získaných třemi různými přístupy.

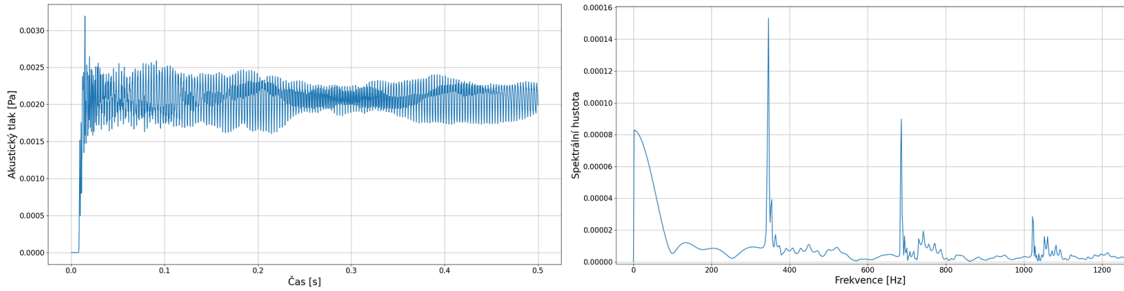
f_k	pomocí Fourierovy transformace	dle vzorce (4.5)	pomocí modální analýzy
f_1	-	17,15 Hz	17,15 Hz
f_2	-	51,45 Hz	51,46 Hz
f_3	96 Hz	85,75 Hz	85,8 Hz
f_4	-	120,05 Hz	120,21 Hz
f_5	157 Hz	154,35 Hz	154,72 Hz



Obrázek 4.5: Prvních osm vlastních tvarů kmitání na obdélníkové oblasti (1×5).
Obrázky jsou řazeny zleva doprava.



Obrázek 4.6: Vlevo graf časového průběhu akustického tlaku v bodě [3;0,5], vpravo graf příslušné Fourierovy transformace.



Obrázek 4.7: Vlevo graf časového průběhu akustického tlaku v bodě [4;0,5], vpravo graf příslušné Fourierovy transformace.

4.2.2 Analýza akustické energie

Pro ověření časové diskretizace pomocí Newmarkovy metody zanalyzujeme akustickou energii. Tu definujeme jako

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2c^2} \int_{\Omega} \dot{p}^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla p)^2 dx. \quad (4.6)$$

Kinetickou a potenciální energii E_k a E_p můžeme numericky aproximovat vztahem

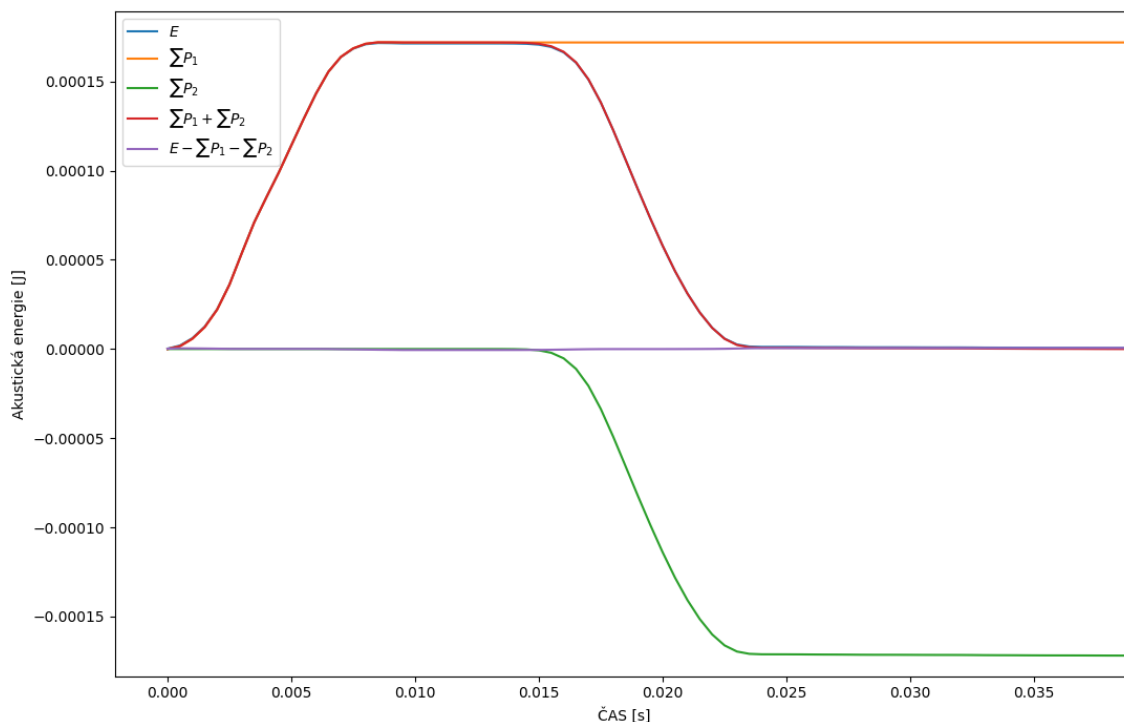
$$E_k \approx \frac{1}{2c^2} \dot{p}^T \mathbb{M} \dot{p}, \quad E_p \approx \frac{1}{2} p^T \mathbb{K} p. \quad (4.7)$$

Pokud v rovnici (3.4) dosadíme za testovací funkci φ časovou derivaci řešení \dot{p} lze přepsat jako

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2c^2} \int_{\Omega} \dot{p}^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla p)^2 dx \right) = \int_{\Omega} f \dot{p} dx - \frac{1}{c} \int_{\Gamma_S} (\dot{p})^2 dS. \quad (4.8)$$

tato rovnice popisuje změnu energie, tj. fyzikálně výkon, který ovlivňuje zdrojový člen a použitá Sommerfeldova okrajová podmínka. V našem případě zdrojový člen dodává výkon, označme ho jako $P_1 = \int_{\Omega} f \dot{p} dx$. Sommerfeldova okrajová podmínka naopak výkon odvádí, tento člen označme jako $P_2 = \frac{1}{c} \int_{\Gamma_S} (\dot{p})^2 dS$.

Během časového výpočtu na obdélníku jsme spočítali celkovou energii i včetně výkonu z pravé strany předchozí rovnice. Ty jsou zobrazeny na Obrázku 4.8. Z obrázku je vidět, že vlivem zdrojového členu dochází k nárůstu energie a naopak na Sommerfeldově okrajové podmínce po dopadu vlny dochází k vyzáření akustického výkonu mimo oblast obdélníku.



Obrázek 4.8: Časový průběh celkové akustické energie oblasti, energie přivedené zdrojovým členem a energie vyzářené Sommerfeldovou okrajovou podmínkou.

4.3 Řešení vlnové rovnice na modelu krytu ventilátoru

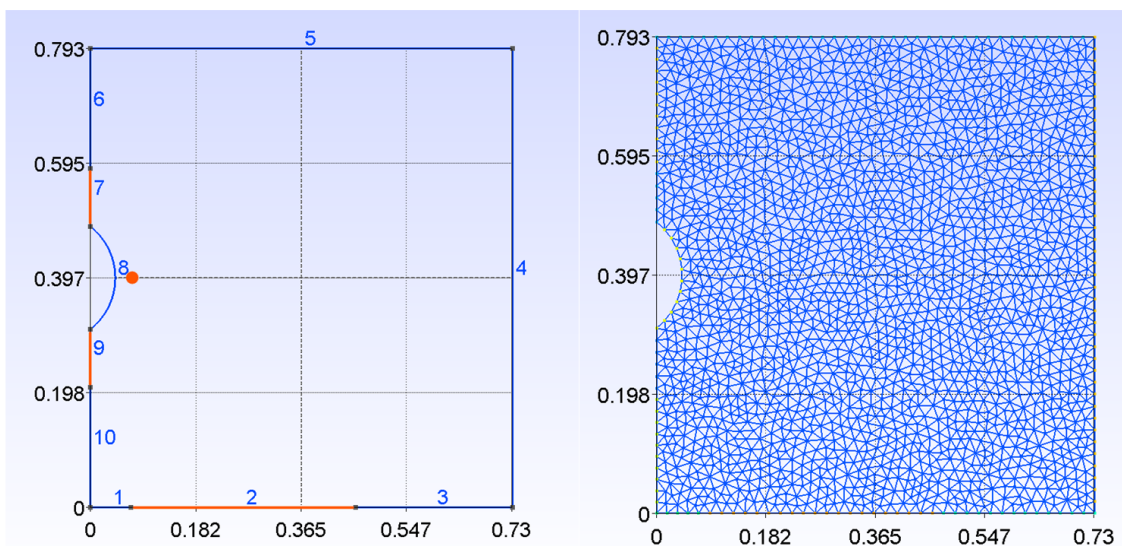
Stejně jako v předchozím případě, budeme hledat řešení vlnové rovnice (1.19). Tentokrát na oblasti, která je zjednodušeným modelem krytu ventilátoru, viz Obrázek 4.8. Řešíme tedy vlnovou rovnici se zdrojovým členem

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = f \quad \text{na } \Omega \times (0, T). \quad (4.9)$$

Uvažujeme nulové počáteční podmínky a $c = 343m/s$. U modelu krytu ventilátoru části hranice 1,3,4,5,6,8 a 10 představují pevnou stěnu, viz Obrázek 4.9, proto na nich předepíšeme Neumannovu okrajovou podmínku (1.21). Zatímco na částech hranice 2, 7 a 9, které představují otevřenou část hranice, předepisujeme Sommerfeldovu okrajovou podmínku (1.22). Jako zdrojový člen vlnění je opět použit časový pulz $g(t)$ (viz Obrázek 4.3) z minulé úlohy, který je tentokrát umístěn do okolí bodu $[0,07;0,397]$, tj. blízko levé hranice oblasti.

Časový krok Newmarkovy metody je zvolen jako $\tau = 5 \cdot 10^{-5}s$ a konečný čas simulace je $T = 0,2s$. Použili jsme síť s parametrem $h = 0,02$. Toto nastavení nám umožňuje získat řešení s dobře rozlišenou frekvencí

$$f_{max} \approx \frac{1}{20\tau} = 1000Hz, \quad (4.10)$$



Obrázek 4.9: Ukázka geometrie modelu krytu ventilátoru a triangulace vytvořená pomocí Gmsh včetně očíslování hranice a znázornění zdroje vlnění v bodě $[0,07;0,397]$.

a

$$\lambda_{min} \approx 20 \cdot h = 0,4m \quad \implies \quad f_{max} = \frac{c}{\lambda_{min}} = 857,7Hz. \quad (4.11)$$

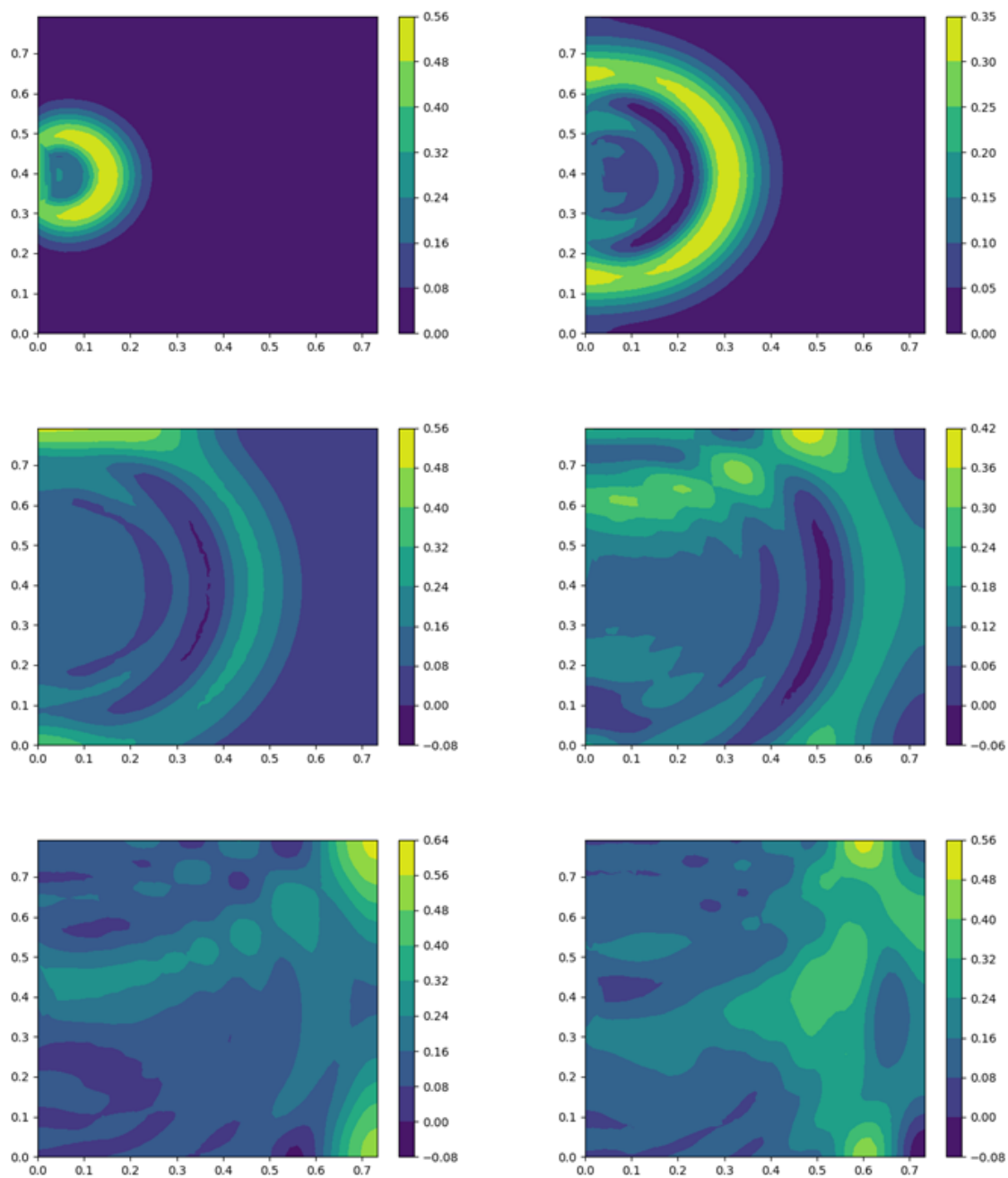
Z hlediska Fourierovy analýzy vychází frekvenční rozlišení

$$df \approx \frac{1}{T} = 5Hz \quad (4.12)$$

a maximální detekovatelná frekvence

$$f_{max} \approx \frac{1}{2 dt} = 10000Hz. \quad (4.13)$$

Získané řešení je znázorněno na Obr. 4.10. Je zde vidět, jak se úvodní vrchol časového pulzu šíří skrz uvažovanou oblast a jak se odráží od stěn. Následně je patrné, že odraz od horní stěny je plný, zatímco spodní stěnou velká část vlny utíká mimo vyšetřovanou oblast. Na posledním obrázku je vidět i odraz vlny v rozích daného modelu.



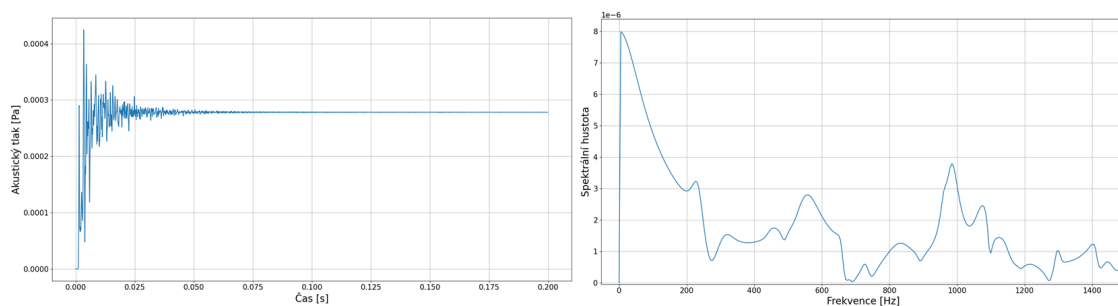
Obrázek 4.10: Časový průběh řešení vlnové rovnice na modelu krytu ventilátoru, zdrojový člen vlnění je umístěn v okolí bodu $[0,07;0,397]$. Obrázky jsou řazeny zleva doprava pro časové okamžiky $k \cdot 0,0005s$, kde $k = 1, \dots, 6$.

4.3.1 Analýza výsledků

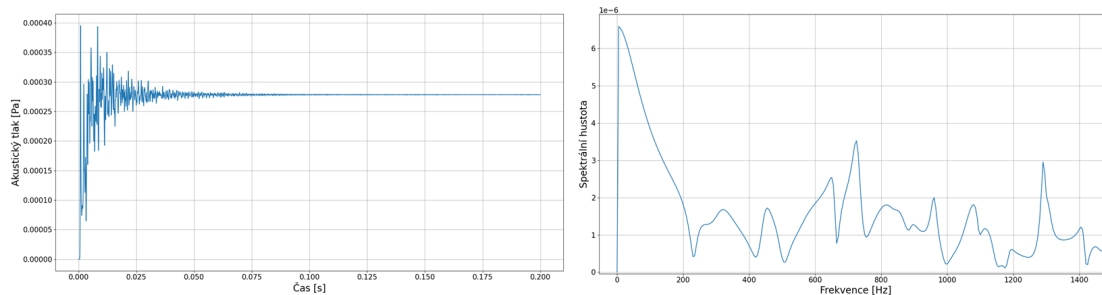
Pro tento případ neexistuje žádný analytický model, se kterým bychom mohli řešení porovnat. Proto porovnáme pouze výsledky modální analýzy a Fourierovy transformace.

Modální analýza podobného modelu Provedeme modální analýzu stejné oblasti, ale jako v předchozím případě tak i zde nahradíme Sommerfeldovu okrajovou podmínku na částech hranice 2, 7 a 9 Dirichletovou okrajovou podmínkou. Získané vlastní tvary jsou zobrazeny na Obr. 4.13. Je zde vidět, jak se postupně se vzrůstající vlastní frekvencí zkracuje vlnová délka. První mód má je rozložen přes diagonálu modelu, další módy pak jsou dominantně situovány podél stran atd. V Tab. 4.4 jsou pak shrnuty získané vlastní frekvence.

Fourierova analýza. Ve dvou bodech $A=[0,4;0,4]$ a $B=[0,6;0,4]$ jsme zaznamenali časový vývoj akustického tlaku, viz Obrázky 4.11 a 4.12. Je zde vidět, jak vlny postupně procházejí těmito body, vlivem ztráty energie přes Sommerfeldovy okrajové podmínky se amplituda vlnění postupně zmenšuje. Následně jsme provedli Fourierovu diskretní transformaci akustického tlaku celého časového průběhu. Porovnání frekvencí získaných oběma přístupy je vidět v Tabulce 4.4. Druhá, třetí a pátá vlastní frekvence získané oběma přístupy jsou velice podobné. To, že jejich hodnoty nejsou úplně schodné, je pravděpodobně dané různými okrajovými podmínkami. Bohužel první vlastní frekvence je v intervalu do 200 Hz, kde není možno rozlišit jednu specifickou frekvenci z Fourierovy transformace.



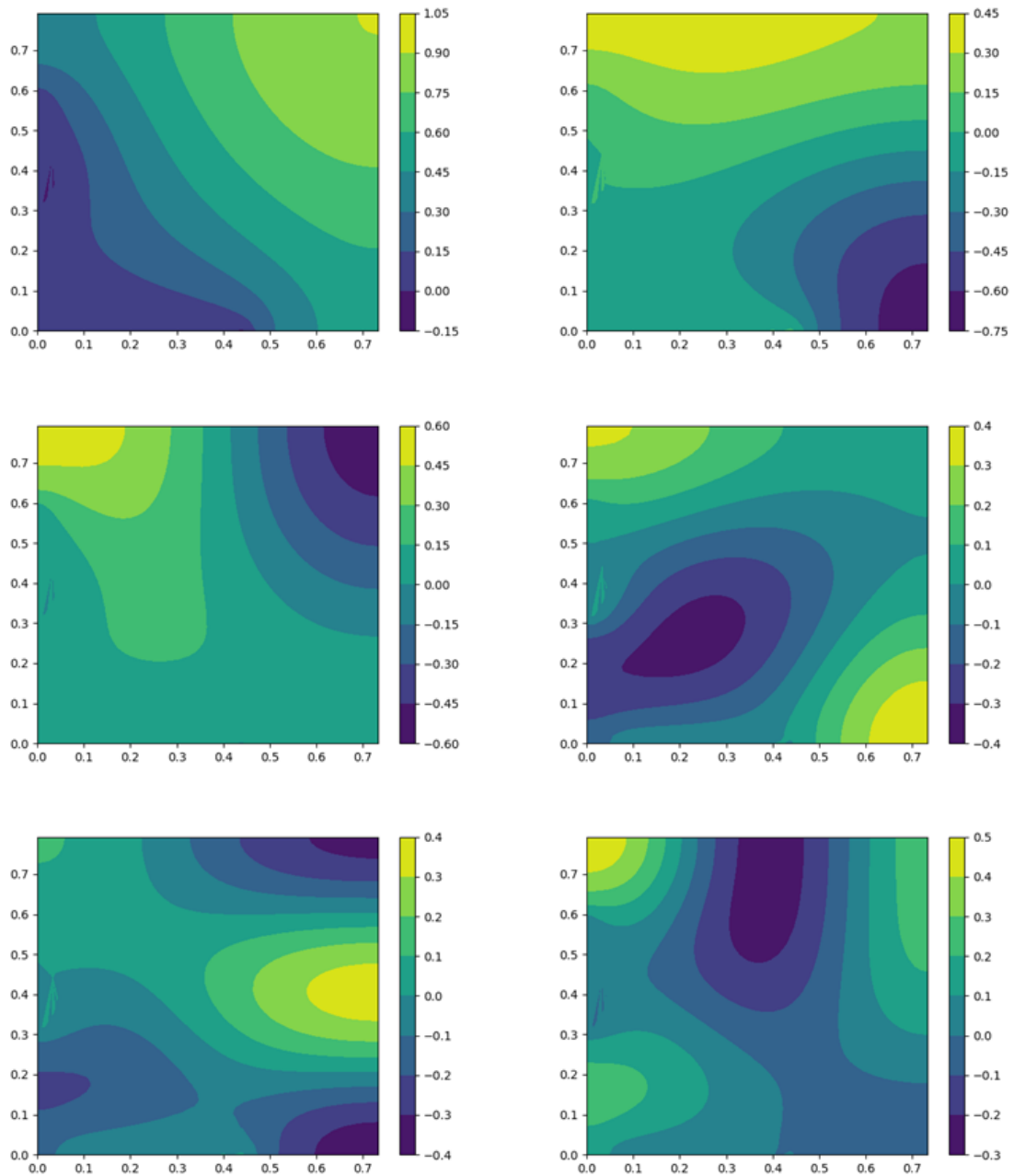
Obrázek 4.11: Vlevo graf časového průběhu akustického tlaku v bodě A, vpravo graf příslušné Fourierovy transformace.



Obrázek 4.12: Vlevo graf časového průběhu akustického tlaku v bodě B, vpravo graf příslušné Fourierovy transformace.

Tabulka 4.4: Prvních šest vlastních frekvencí modelu krytu ventilátoru.

f_k	pomocí Fourierovy transformace v bodě B	pomocí modální analýzy
f_1	-	137,05 Hz
f_2	260 Hz	277,64 Hz
f_3	320 Hz	329,77 Hz
f_4	-	407,65 Hz
f_5	456 Hz	479,81 Hz
f_6	-	513,78 Hz



Obrázek 4.13: Prvních šest vlastních tvarů kmitání. Obrázky jsou řazeny zleva doprava.

Závěr

V této práci jsme se zabývali úlohami z akustiky, které jsme řešili pomocí metody konečných prvků. Nejdříve jsme odvodili vlnovou rovnici z Navierových-Stokesových rovnic. Tu jsme následně doplnili o okrajové a počáteční podmínky.

Ve druhé kapitole jsme vysvětlili metody konečných prvků na modelové úloze – Poissonově rovnici. Tu jsme převedli do slabé formulace a její diskretizací ve vhodně zvoleném podprostoru polynomů získali soustavu lineárních rovnic. Vyřešením této soustavy pak získáme numerické, tj. přibližné řešení zadané úlohy. Tuto Poissonovu úlohu jsme později použili k ověření funkčnosti naimplementovaného programu. Numerické výsledky jsme porovnali se známým analytickým řešením a vypočítali jsme experimentální řád konvergence. Výsledky uvedené v práci ukazují správnost implementace metody a při zjemňování sítě lze pozorovat konvergenci metody.

Metodu konečných prvků jsme dále použili na prostorovou diskretizaci vlnové rovnice včetně uvažované Sommerfeldovy okrajové podmínky. Potom jsme odvodili numerické schéma pro časovou diskretizaci vlnové rovnice pomocí Newmarkovy metody. Řešení v časové doméně jsme nejdříve otestovali na jednoduché obdélníkové oblasti. Použitím Fourierovy analýzy časového průběhu akustického tlaku ve zvolených bodech jsme získali dominantní frekvence vlnění. Ty jsme porovnali s vlastními frekvencemi čtvrtvlnového rezonátoru, který je po teoretické stránce podobný našemu případu. Vlastní frekvence čtvrtvlnového rezonátoru jsme určili jednak ze známého analytického předpisu a také pomocí modální analýzy. Z jejich srovnání jsme zjistili, že výsledky získané všemi třemi přístupy jsou podobné. Frekvence, které jsme získali pomocí Fourierovy transformace singálu z řešení v časové doméně, se neshodují zcela, což je dáno rozdílným zadáním okrajových podmínek.

Na závěr jsme pomocí Fourierovy analýzy časové simulace a pomocí modální analýzy určili rezonanční frekvence modelu krytu ventilátoru. S uvažovaným nastavením numerického modelu jsme získali poměrně dobrou shodu u druhé, třetí a páté vlastní frekvence, ale první vlastní frekvence v grafu není dobře detekovatelná. V budoucnu plánujeme tento postup ještě porovnat s řešením Helmholtzovy rovnice.

Literatura

- [1] ŽENÍŠEK, A. *Matematické základy metody konečných prvků*. Fakulta strojní VUT v Brně, 1997. ISBN 80-214-0966-5.
- [2] SVÁČEK, P., FEISTAUER, M. *Metoda konečných prvků*. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2006. ISBN 80-01-03522-0.
- [3] LOGG, A., MARDAL, K., WELLS, G. N. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*. Berlin: Springer, 2012. ISBN 978-3-642-23099-8.
- [4] ZIENKIEWICZ, O., TAYLOR, R. L., NITHIARASU, P. *The finite element method for fluid dynamics*. OXFORD: Butterworth-Heinemann, 2014. ISBN 978-1-85617-635-4.
- [5] KALTENBACHER, M. *Numerical Simulation of Mechatronic Sensors and Actuators: finite elements for computational multiphysics*. Vídeň: Springer, 2015. ISBN 978-3-642-40169-5.
- [6] KOSÍK, A. *Interakce proudící tekutiny a elastického tělesa*. Diplomová práce, MFF UK, 2010. Dostupná v archivu MFF UK.
- [7] BRDLIČKA, M., SAMEK, L., SOPKO, B. *Mechanika kontinua*. Academia, 2005.
- [8] KLÍČ, A., VOLKA, K., DUBCOVÁ, M. *Fourierova transformace*. VŠCHT Praha, 2002.
- [9] VAMPOLA, T., HORÁČEK, J., RADOLF, V., ŠVEC, J.G., LAUKKANEN, A.M. Influence of nasal cavities on voice quality: Computer simulations and experiments The Journal of the Acoustical Society of America , Vol. 148, No. 5, 2020.
- [10] VAROQUAUX, G., GOUILLART, E., VAHTRAS, O., BUYL, P. Scipy Lecture Notes, 2020 [citováno 2023-6-6]. Dostupné na: <www.scipy-lectures.org>.

Přílohy

Popis geometrie modelu krytu ventilátoru ve formátu *.geo* souboru programu Gmsh.

```
c1=0.001;

//body
Point(1) = {0, 0, 0, c1};
Point(2) = {0.07, 0, 0, c1};
Point(3) = {0.46, 0, 0, c1};
Point(4) = {0.732, 0, 0, c1};
Point(5) = {0.732, 0.793, 0, c1};
Point(6) = {0, 0.793, 0, c1};
Point(7) = {0, 0.585, 0, c1};

Point(8) = {0, 0.485, 0, c1};
Point(9) = {-0.07, 0.3965, 0, c1};
Point(10) = {0, 0.308, 0, c1};

Point(11) = {0, 0.208, 0, c1};

//krivky
Line(1) = {1, 2};
Line(2) = {2, 3};
Line(3) = {3, 4};
Line(4) = {4, 5};
Line(5) = {5, 6};
Line(6) = {6, 7};
Line(7) = {7, 8};
Circle(8) = {8, 9, 10};
Line(9) = {10, 11};
Line(10) = {11, 1};

//uzavrena oblast
Line Loop(10) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10};
Plane Surface(11) = {10};

//fyzikalni oblasti
c2 = 100;
c3 = 200;
c4 = 300;
c5 = 400;
c6 = 500;
c7 = 600;
c8 = 700;
```

```
c9 = 800;  
c10 = 900;  
c11 = 1000;
```

```
Physical Line(c2) = {1};  
Physical Line(c3) = {2};  
Physical Line(c4) = {3};  
Physical Line(c5) = {4};  
Physical Line(c6) = {5};  
Physical Line(c7) = {6};  
Physical Line(c8) = {7};  
Physical Line(c9) = {8};  
Physical Line(c10) = {9};  
Physical Line(c11) = {10};  
Physical Surface(1000) = {11};
```

Soubor ve formátu .zip obsahující triangulace oblastí a program pro numerické řešení vlnové rovnice pomocí MKP. A animace časového průběhu řešení.