

**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE**

FAKULTA STAVEBNÍ  
KATEDRA MECHANIKY



**Modelování vodního chlazení masivních  
betonových konstrukcí**

**Modeling of water cooling in massive  
concrete structures**

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Studijní program: Stavební inženýrství  
Studijní obor: Konstrukce a dopravní stavby  
Vedoucí práce: prof. Ing. Vít Šmilauer, Ph.D., DSc.

**Milan Macho**  
**Praha, 2023**



## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

### I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: Macho Jméno: Milan Osobní číslo: 491155  
Zadávající katedra: K132  
Studijní program: Stavební inženýrství  
Studijní obor/specializace: Konstrukce a dopravní stavby

### II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce: Modelování vodního chlazení masivních betonových konstrukcí  
Název bakalářské práce anglicky: Modeling of water cooling in massive concrete structures  
Pokyny pro vypracování:  
Cílem bakalářské práce je implementace úlohy nestacionárního vedení tepla se započtením vlivu vodního chlazení a hydratace betonu. Úloha bude řešena pomocí metody konečných prvků s implementací v otevřených softwarech. Výsledkem bude simulace a aproximace chlazení masivních částí betonových konstrukcí, které lze využít ve stavební praxi.  
Seznam doporučené literatury:  
E. M. R. Fairbairn a M. Azenha: Thermal Cracking of Massive Concrete Structures, Springer 2019.  
Z. Bofang: Thermal Stresses and Temperature Control of Mass Concrete, Elsevier, 2014.  
Jméno vedoucího bakalářské práce: Prof. Ing. Vít Šmilauer, Ph.D., DSc.  
Datum zadání bakalářské práce: 20.2.2023 Termín odevzdání BP v IS KOS: 22.5.2023  
Údaj uveďte v souladu s datem v časovém plánu příslušného ak. roku  
Podpis vedoucího práce Podpis vedoucího katedry

### III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

*Beru na vědomí, že jsem povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je nutné uvést v bakalářské práci a při citování postupovat v souladu s metodickou příručkou ČVUT „Jak psát vysokoškolské závěrečné práce“ a metodickým pokynem ČVUT „O dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací“.*

Datum převzetí zadání

Podpis studenta(ky)



## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou bakalářskou práci vypracoval samostatně pod odborným vedením prof. Ing. Víta Šmilauera, Ph.D., DSc., a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem ČVUT O dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze, dne 22.5.2023

.....  
Milan Macho



## Poděkování

Těmito řádky bych chtěl vyjádřit svůj dík všem, bez nichž by tato práce nemohla vzniknout.

Mé poděkování patří zejména vedoucímu této bakalářské práce panu prof. Ing. Vítu Šmilauerovi, Ph.D., DSc., který mi byl vždy velice ochoten poradit, odpovědět na veškeré otázky, pomoci najít řešení technických problémů a seznámit mě s veškerým použitým softwarem.

Poděkovat bych chtěl také své rodině za veškerou poskytnutou podporu během celého studia.

Tato práce byla podpořena Grantovou agenturou České republiky (GAČR) projektem GA21-03118S.





## Abstrakt

Zaměřením této bakalářské práce je modelování vodního chlazení masivních betonových konstrukcí. Úloha je řešena pomocí metody konečných prvků v otevřených softwarech. V práci je popsána a vysvětlena charakteristická problematika masivních betonových konstrukcí, základní fyzikální popis úlohy a princip použité metody konečných prvků. Cílem práce je implementace úlohy nestacionárního vedení tepla s uvažováním vlivu hydratace cementu. Výsledkem práce je simulace teplotního pole v průběhu procesu vodního chlazení a porovnání řešení s různou jemností prvků metody konečných prvků.

## Klíčová slova

hydratace cementu, hydratační teplo, masivní betonové konstrukce, metoda konečných prvků, modelování, vodní chlazení

## Abstract

This bachelor thesis covers modeling of water cooling in massive concrete structures. The assignment is solved in open-source software by finite element method. Characteristic problems of massive concrete structures are described and explained in this thesis as well as physics background and main principle of finite element method. The aim of this thesis is implementation of transient heat conduction with influence of cement hydration. Results of the thesis are heat field simulation during process of water cooling and comparison of solutions differing with mesh element sizes.

## Key words

finite element method, heat of hydration, hydration of cement, massive concrete structures, modeling, water cooling



# Obsah

<b>Motivace .....</b>	<b>13</b>
<b>1 Masivní betonové konstrukce.....</b>	<b>15</b>
1.1 Problematika masivních betonových konstrukcí .....	15
1.1.1 Hydratační teplo .....	16
1.1.2 Opožděný vznik ettringitu.....	19
1.1.3 Teplotní namáhání a vnější omezení .....	19
1.2 Požadavky na masivní betonové konstrukce .....	21
1.2.1 ČSN EN 13670 .....	21
1.2.2 ČSN EN 206 .....	22
1.2.3 ČSN 73 1208 .....	22
1.2.4 TKP Kapitola 18 Betonové konstrukce a mosty (ŘSD ČR) .....	23
1.2.5 TKP Kapitola 17 Beton pro konstrukce (SŽ).....	23
1.2.6 TKP Kapitola 18 Betonové mosty a konstrukce (SŽ).....	24
1.2.7 Předpisy American Concrete Institute.....	24
<b>2 Příklady vodního chlazení.....</b>	<b>25</b>
2.1 Hooverova přehrada .....	25
2.2 Most přes Oparenské údolí.....	27
2.3 Lávka Holešovice-Karlín (HolKa).....	30
<b>3 Transport tepla .....</b>	<b>32</b>
3.1 Tepelné vlastnosti betonu .....	32
3.2 Podstata transportu tepla.....	33
3.3 Nestacionární vedení tepla.....	35
3.4 Rotačně symetrický popis.....	36
3.5 Okrajové a počáteční podmínky .....	39
3.6 Řešení s využitím Besselových funkcí .....	40
<b>4 Numerické řešení MKP.....</b>	<b>41</b>
4.1 Diskretizace rovnice vedení tepla .....	41
4.2 Časová diskretizace.....	43
4.3 Diskretizace geometrie .....	44
4.3.1 Dvourozměrné prvky.....	45
4.3.2 Trojúhelníkový prvek.....	45

<b>5</b>	<b>Teplotní analýza masivních konstrukcí .....</b>	<b>47</b>
5.1	Proces teplotní analýzy.....	47
5.2	Geometrie a síť modelu .....	48
5.3	Řešení rovnice vedení tepla .....	50
5.4	Verifikace modelu.....	53
5.5	Aproximace hydratace cementu exponenciálním modelem a započtení hydratace v simulaci.....	58
5.6	Zpracování a vyhodnocení výsledků .....	61
	<b>Závěr .....</b>	<b>67</b>
	<b>Seznam použité literatury.....</b>	<b>69</b>
	<b>Seznam obrázků .....</b>	<b>71</b>
	<b>Seznam tabulek.....</b>	<b>73</b>
	<b>Příloha A – Zdrojový kód pro řešení teplotního pole dutého válce .....</b>	<b>75</b>

# Motivace

Hydratační teplo cementů představuje vnitřní zdroj tepla, které zejména v masivních betonových konstrukcích může vést k vážným následkům. Jedním z nejzávažnějších důsledků je vznik trhlin způsobený dosažením tahové pevnosti nevyzrálého betonu. Trhliny způsobují nejen zhoršení celkové pohledovosti konstrukce, ale také snížení její trvanlivosti, odolnosti, spolehlivosti a funkčnosti. Vzniklé trhliny je potřeba často sanovat. Otázkou však zůstává, jakou životnost může tento způsob opravy mít. Efektivnější proto je vzniku trhlin a následné sanaci předcházet účinným návrhem betonové směsi či doplněním vodního chlazení do hydratující betonové konstrukce.

Historickým milníkem v této oblasti je aplikace vodního chlazení při výstavbě Hooverovy přehrady v letech 1931-1936. V Československu se problematika vývoje a následné disipace hydratačního tepla řešila zejména při výstavbě vojenského opevnění v 30. letech 20. století a následně v 50. a 60. letech při výstavbě přehradních hrází (VD Slapy, VD Lipno, VD Orlický). Pro výstavbu se používaly betony s nízkým obsahem cementu a směsné cementy s pomalým vývinem hydratačního tepla. V současné době se problematika netýká pouze masivních betonových konstrukcí jako jsou již zmíněné typy konstrukcí, nosné konstrukce mostů, mostní pilíře a základové konstrukce, ale dotýká se i subtilnějších konstrukcí zhotovených z dnes již poměrně hojně využívaných vysokopevnostních a vysokohodnotných betonů s vysokým obsahem cementu a vývinem hydratačního tepla.

Ke zdárným výsledkům na poli výzkumu je zapotřebí široké spektrum znalostí z různých oborů – transportní procesy, chemie, termo-mechanika, hydraulika, numerické metody, modelování, programování. Důležitým výsledkem je i následné využití v praxi, kde taktéž dochází ke spolupráci mezi projektantem, technologem betonárny, zhotovitelem, vědci a investorem. Na první pohled je zcela zřejmé, že se jedná o velice komplexní tematiku. Spojení těchto znalostí a široký přesah oborů vypovídá nejen o náročnosti, ale také o zajímavosti tohoto oboru.

Cílem této práce je získat elementární znalosti problematiky vodního chlazení, obeznámit se s fyzikálními souvislostmi nevšední problematiky, stanovit přehled požadavků na masivní konstrukce a porozumět principu metody konečných prvků (MKP). Načerpané znalosti budou využity k tvorbě 2D simulace vodního chlazení výseku betonové konstrukce se započtením vlivu hydratace a vodního chlazení. Pro výpočet simulace bude využit software OOFEM [1], vyvíjený na katedře mechaniky FSv ČVUT.



# 1 Masivní betonové konstrukce

Přesná definice pojmu masivní betonová konstrukce se v jednotlivých normách a předpisech odlišuje uvažovanými hraničními rozměry. Rozsah hraničních rozměrů je poměrně široký. Dle Kapitoly 18 Betonové konstrukce a mosty Technických kvalitativních podmínek staveb pozemních komunikací je masivní konstrukce uvažována již od tloušťky 0,6 m [2]. Norma ČSN EN 13670 Provádění betonových konstrukcí uvažuje masivní konstrukce od tloušťky 1,0 m [3] a norma ČSN 73 1208 Navrhování betonových konstrukcí vodohospodářských objektů specifikuje masivní konstrukce až od tloušťky 2,0 m [4]. Z pohledu praxe se jedná o konstrukce s tloušťkou zhruba od 0,6 m a více. Nejvýstižněji tento pojem popisuje American Concrete Institute (ACI): „*Masivní betonová konstrukce je konstrukce o jakémkoliv objemu s dostatečně velkými rozměry k tomu, aby z důvodu vývoje hydratačního tepla cementu a s ním spojených objemových změn byla potřeba opatření minimalizující vznik trhlin.*“ [5].

## 1.1 Problematika masivních betonových konstrukcí

Z definice masivní betonové konstrukce dle ACI je patrné, že hraniční rozměry nejsou jediným určujícím kritériem. Rozhodujícím kritériem je zhodnocení, zda při návrhu je potřeba posoudit vliv vývoje hydratačního tepla betonu a provést případnou termo-mechanickou analýzu. Stavby, u kterých je nutné zhodnotit vliv vývoje hydratačního tepla a jeho disipaci, lze rozdělit podle druhu:

- Mostní konstrukce – plné průřezy nosné konstrukce, pilíře, opěry
- Vodohospodářské konstrukce – přehradní hráze, jezy
- Pozemní konstrukce – subtilní konstrukce, vysokohodnotné betony
- Základové konstrukce – mohutné plošné základy, bílé vany
- Inženýrské konstrukce – kontejnmenty, gravitační opěrné zdi

Z přehledu vyplývá, že problematika vývoje a disipace hydratačního tepla má poměrně široký přesah a není doménou pouze masivních konstrukcí. Problematika je propojena s řadou dalších souvislostí:

- Nerovnoměrné rozdělení teploty po průřezu konstrukce a s tím spojené riziko vzniku trhlin od teplotního gradientu
- Nerovnoměrné odpařování vody
- Podmínky vnějšího prostředí – teplota a relativní vlhkost vzduchu
- Teplota ukládané čerstvé betonové směsi, volba druhu bednění
- Vyšší nároky na ošetřování konstrukce během tvrdnutí
- Časová závislost vývoje pevnosti a modulu pružnosti betonu

Mezi základní opatření využívané při realizaci betonových konstrukcí, u kterých je zapotřebí zohlednit vliv vývoje hydratačního tepla, patří:

- Úprava receptury betonu
- Snížení teploty ukládané čerstvé betonové směsi předchlazením
- Členění konstrukce na jednotlivé betonážní takty
- Systém vodního chlazení s či bez regulace
- Monitorování dosažených teplot konstrukce během hydratace
- Modelování a predikce termomechanického chování konstrukce
- Kombinace výše zmíněných opatření

Zaměřením této práce je modelování vodního chlazení, které je obsaženo v předposledním bodě výčtu možných způsobů, v kontextu ostatních zmíněných bodů.

Během prvotního návrhu betonové konstrukce je neméně důležité zvážit základní požadavky:

- Proveditelnost, spolehlivost a trvanlivost konstrukce
- Statické chování konstrukce ve všech fázích výstavby
- Hospodárnost návrhu konstrukce
- Časová závislost vývoje pevnosti a modulu pružnosti betonu

### 1.1.1 Hydratační teplo

Určení průběhu a množství uvolňovaného hydratačního tepla je závislé na typu použitého cementu. Zásadní je znalost složek a chemického složení cementu. Hlavní složkou běžně používaných cementů je rozemletý portlandský slínek. Portlandský slínek je výsledkem procesu výpalu jemně namletého vápence a jílových minerálů v rotačních pecích při teplotě 1300–1450 °C [6]. Mineralogické složení portlandského slínku a cementu je ovlivněno nejen vstupními surovinami, ale také samotným technologickým procesem zpracování.

V portlandském slínku je možné identifikovat přibližně dvacet slínkových minerálů [7], ale nejvýznamnější z nich jsou:

- $C_3S$  – trikalcium silikát (alit)
- $C_2S$  – dikalcium silikát (belit)
- $C_3A$  – trikalcium aluminát (celit)
- $C_4AF$  – tetrakalcium aluminátferit

Slínkové minerály ovlivňují průběh hydratace a výsledné vlastnosti cementového tmelu. Průběh rychlosti hydratace, množství uvolňovaného hydratačního tepla a orientační hmotnostní procentuální zastoupení jednotlivých minerálů v portlandském slínku je tabulkově porovnáno (viz *Tabulka 1*).

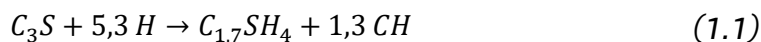


Název slín. minerálu	Vzorec	Hm. obsah (%)	Hyd. teplo (J g <sup>-1</sup> )	Průběh hydratace
Trikalciium silikát	C <sub>3</sub> S	3575	500	rychlá
Dikalciium silikát	C <sub>2</sub> S	540	250	střední
Trikalciium aluminát	C <sub>3</sub> A	315	910	velmi rychlá
Tetrakalciium aluminátferit	C <sub>4</sub> AF	914	420	rychlá

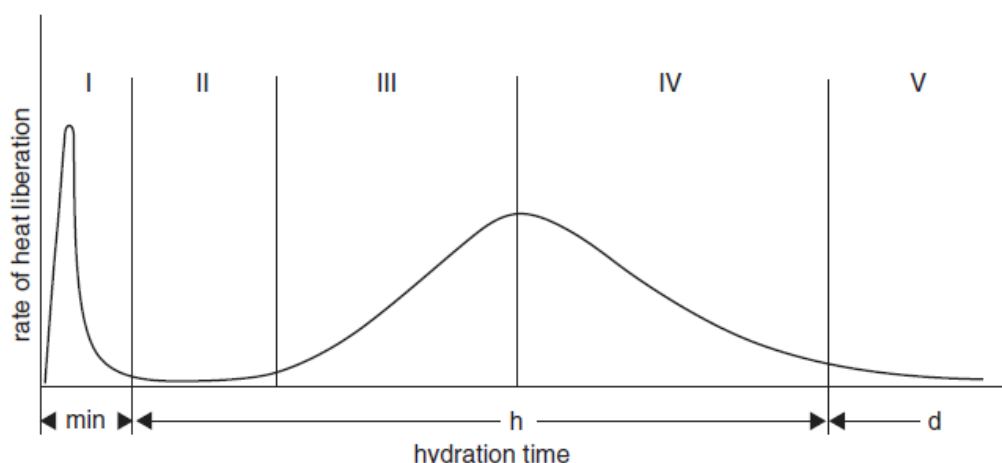
**Tabulka 1:** Přehled základních slínkových minerálů [7]

Průběh hydratace cementu a s ním spojené uvolňování tepla je velice komplexní a složitý fyzikálně-chemický proces. Z tohoto důvodu je popis celkového mechanismu hydratace cementu obtížný a ani řada výzkumů nepřináší jednoznačné výsledky [6]. Teoretický popis se zejména rozchází v popisu prvotní indukční fáze hydratace [8].

V literatuře (např. [6], [7], [8]) se lze často setkat s popisem hydratace jednotlivých minerálních slínek. Zvláštní pozornost je přisuzována zejména hydrataci alitu, jelikož tento minerál je nejvíce zastoupen v portlandském slínku a vytváří největší část uvolňovaného hydratačního tepla. Výsledkem hydratace alitu C<sub>3</sub>S je vznik portlanditu CH a hydrosilikátového C-S-H gelu, jehož složení je v průběhu hydratace proměnné [7]. Výslednou chemickou rovnici je možné v cementářské notaci zapsat:



Průběh hydratace lze rozdělit do jednotlivých fází (viz Obrázek 1) [8].



**Obrázek 1:** Časový vývoj tepelného výkonu při hydrataci alitu [8]

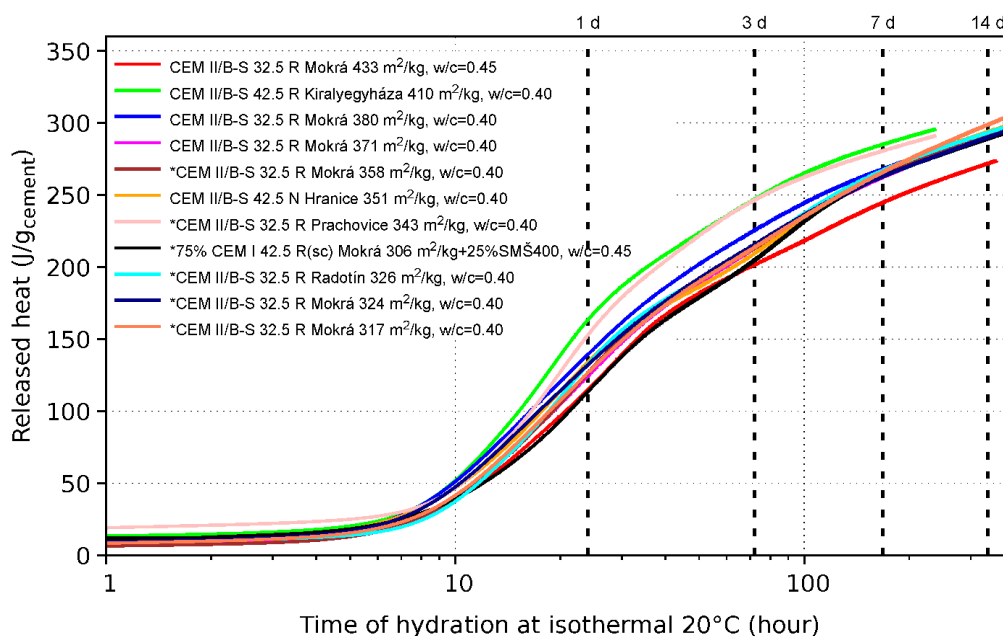
V prvních minutách dochází k rychlé a krátké hydrataci (I) způsobené uvolňováním vápenných kationtů, zrna alitu jsou smáčena a vytváří se tak tenká silikátová vrstva zrn. Následuje klidová fáze (II) a opětovný nárůst

hydratace (III), při které vzniká C-S-H gel. Rychlost uvolňování tepla se zpomaluje (IV). Poslední fází je označen závěr hydratace (V).

Rychlost průběhu hydratace cementu kromě mineralogického složení závisí také na jemnosti mletí slínku, množství použité záměsové vody, teplotě a případných přísadách cementu. Cementy používané pro betony masivních betonových konstrukcí se vyznačují nižším obsahem alitu a celitu, které bývají nahrazeny latentně hydraulickými přísadami [6].

Při nahrazení slínku přísadami jsou tyto cementy označovány jako cementy směsné. Zejména využívanou přísadou cementů je granulovaná vysokopecní struska. Vlastností těchto cementů je nižší počáteční pevnost, v dlouhodobém horizontu se však pevnostně vyrovnají čistým portlandským cementům. Jejich výhodou je nižší množství a pozvolnější uvolňování hydratačního tepla.

Experimentálně lze stanovit uvolňované hydratační teplo kalorimetrickou zkouškou. Existují celkem tři normové postupy, které se principiálně odlišují typem použitého kalorimetru. Nejvhodnější je izotermní zkouška, při které se zaznamenává potřebný teplotní tok pro zachování konstantní teploty zkušebních vzorků [9]. V *Obrázku 2* jsou vyhodnoceny a srovnány izotermní kalorimetrické zkoušky dostupných portlandských struskových cementů (CEM II/B-S) v České republice [10]. Dle normy ČSN EN 197-1 [11] se jedná o cementy s obsahem granulované vysokopecní strusky mezi 21–35 %.

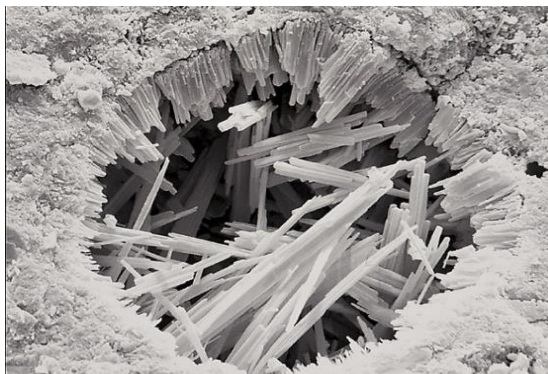


**Obrázek 2:** Srovnání celkového uvolněného tepla běžně dostupných směsných portlandských cementů v České republice [10]

### 1.1.2 Opožděný vznik ettringitu

Opožděný vznik ettringitu (angl. delayed ettringite formation, DEF) je proces, jehož následkem je snížení celkové odolnosti a trvanlivosti konstrukce. Primární ettringit vzniká během prvotní fáze hydratace cementu a je výsledkem reakce slídkového minerálu trikalciualuminátu s vodou a sádrovcem. Ettringit vzniklý v počáteční fázi hydratace obaluje zrna trikalciualuminátu a tím zpomaluje průběh jeho hydratace [8]. Dochází tak k rozložení uvolňovaného množství hydratačního tepla do delšího časového období.

Při teplotě nad 70 °C se ettringit začne rozkládat, ale později v řádu měsíců až let může dojít k jeho zpětné rekrystalizaci [8]. Ke zpětné rekrystalizaci ettringitu postačuje vyšší vlhkost vzduchu. Vzniklý sekundární ettringit vyplní vzduchové póry betonu, následně dochází k rozpínání ettringitu i do okolního prostředí. Důsledkem jsou objemové změny a vznik trhlin. V nově vzniklých trhlinách dochází ke stejnému procesu jako v pórech betonu. Tímto mechanismem se trhliny rozšiřují a způsobují postupný rozpad betonu.



**Obrázek 3:** Mikroskopický snímek vyplnění vzduchového póru ettringitem [33]

### 1.1.3 Teplotní namáhání a vnější omezení

Teplo vznikající při hydrataci cementu se postupně uvolňuje a disipuje do okolního prostředí. Nízká tepelná vodivost betonu způsobuje poměrně pomalé vedení tepla. Ve vnitřní (jádrové) oblasti konstrukce dochází ke značnému zvýšení teploty, naproti tomu okraj konstrukce je chladnější. Teplota okraje konstrukce je ovlivněna i teplotou vnějšího prostředí. Tento problém je zejména pozorovatelný při nižších venkovních teplotách. Konstrukce je tak zatížena nerovnoměrným průběhem teploty po průřezu. Výsledkem tohoto teplotního zatížení je tlak v jádrové oblasti a tahové namáhání povrchového betonu. Dosažení tahové pevnosti betonu je doprovázeno vznikem trhlin.

V některých publikacích [12] se lze setkat s hodnotou mezního tahového přetvoření, které udává poměr tahové pevnosti a modulu pružnosti. Z tahového přetvoření lze vyjádřit maximální rozdíl teplot:

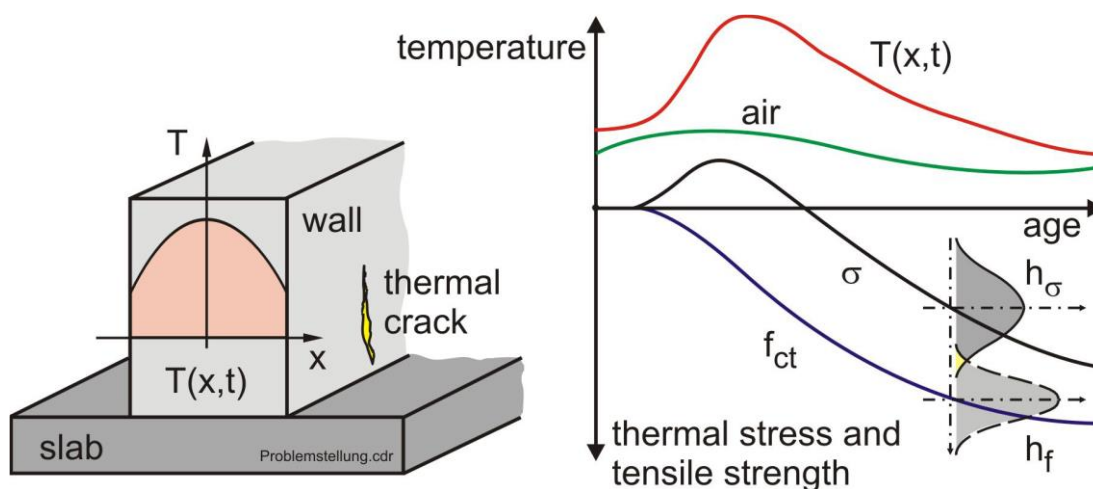
$$\Delta T = \frac{3,7 \varepsilon_{ctu}}{\alpha} \quad (1.2)$$

$\varepsilon_{ctu}$  .....kapacita tahového přetvoření ( $\varepsilon_{ctu} = 70 \times 10^{-6}$ )

$\alpha$  .....teplotní součinitel délkové roztažnosti ( $\alpha = 13 \times 10^{-6} K^{-1}$ )

Při dosazení uvažovaných hodnot do (1.2) je maximální rozdíl teplot roven  $19,9^\circ C$  [12].

Výrazný vliv na vznik teplotních trhlin má také spojení nově betonovaného úseku se stávajícím podkladem. Příčinou je zamezení možnosti volné deformace a rozdíl teplot mezi jednotlivými povrchy. Samotný proces, ale i materiálové vlastnosti hydratujícího betonu jsou časově závislé. V obrázku je znázorněn průběh teploty po průřezu a v grafu je zaznamenána časová souvislost mezi teplotou konstrukce, vzduchu, tahovou pevností a napětím.



**Obrázek 4:** Pravděpodobný vznik teplotní trhliny v místě spojení stěnové a deskové konstrukce [34]

## 1.2 Požadavky na masivní betonové konstrukce

V této části budou zhodnoceny požadavky jednotlivých českých norem a technicky kvalitativních podmínek investorů k problematice masivních betonových konstrukcí a vodního chlazení. Konkrétně půjde o příslušné kapitoly podmínek Ředitelství silnic a dálnic České republiky (ŘSD ČR) a Správy železnic (SŽ). Obsah českých norem a předpisů bude porovnán s požadavky ACI.

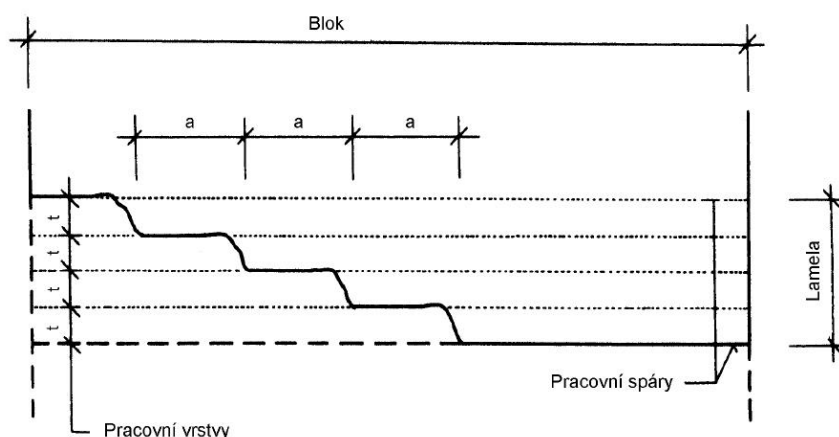
Z důvodu absence českých norem zaměřených přímo na danou problematiku je potřeba zjistit požadavky hlavních českých norem v oblasti betonových konstrukcí. Jedná se především o normy:

- ČSN EN 13670 Provádění betonových konstrukcí [3]
- ČSN EN 206 Beton – Specifikace, vlastnosti, výroba a shoda [13]
- ČSN 73 1208 Navrhování betonových konstrukcí vodohospodářských objektů [4]

### 1.2.1 ČSN EN 13670

V normě ČSN EN 13670 je specifikována maximální teplota betonu uvnitř betonované konstrukce na 70 °C [3]. Tento požadavek souvisí s možným rozkladem ettringitu a jeho opožděnou rekrystalizací.

V národní příloze (článek NA.12) této normy jsou specifikovány požadavky pro provádění vodohospodářských a masivních konstrukcí. V příloze je popsán postup betonáže konstrukce po jednotlivých lamelách. Masivní bloky se rozdělí v souladu s konstrukčními požadavky pracovními spárami na jednotlivé lamely tak, aby bylo možné betonovat lamelu ve vrstvách tloušťky od 300 do 500 mm. Celková výška lamely nemá být v letních měsících větší než 2,0 m a v zimních měsících větší než 3,0 m [3]. Tloušťka betonované vrstvy je omezena z důvodu, aby došlo k řádnému zhutnění betonu a propojení jednotlivých vrstev.



vzdálenost mezi čelami vrstev  $a \geq 1,5$  m

**Obrázek 5:** Schéma postupu betonování masivní konstrukce [3]

V článku přílohy normy jsou také uvedeny způsoby snížení teplotního spádu. Dle normy se zejména jedná o úpravu složení a využití cementů s nízkým hydratačním teplem, snížení množství použitého cementu, snížení teploty čerstvého betonu a možné způsoby bednění. Přímo o využití vodního chlazení se norma nezmiňuje. V této části je také stanovený požadavek na uvolněné množství tepla použitého cementu, které nemá překročit hodnotu  $290 \text{ kJ kg}^{-1}$  za 7 dní [3].

### 1.2.2 ČSN EN 206

Norma ČSN EN 206 určuje požadavky na složení a specifikaci betonu, vlastnosti čerstvého a ztvrdlého betonu, zkoušení a podmínky dodání čerstvého betonu. V úvodu připouští doplňkové požadavky, které mohou být specifikovány pro masivní konstrukce. V samotné normě však požadavky nejsou určeny a ani nejsou součástí národní aplikační přílohy.

Norma uvádí, že při volbě cementu by se měl uvážit vliv rozměru konstrukce a v případě masivní konstrukce by se měl použít cement s velmi nízkým hydratačním teplem [13].

Norma specifikuje minimální teplotu čerstvého betonu v době dodání a ukládání na  $5 \text{ °C}$  [13]. Při této teplotě dochází k výraznému zpomalení hydratace betonu, při teplotách okolo  $0 \text{ °C}$  by mohlo dojít až k zastavení hydratace. Požadavky na chlazení a maximální teplotu čerstvé betonové směsi norma nspecifikuje, připouští, že mohou být předem dohodnuty mezi výrobcem a odběratelem. Norma dále umožňuje specifikaci dodatečných podmínek na vývin hydratačního tepla.

### 1.2.3 ČSN 73 1208

Z hlediska českého prostředí norem je s problematikou nejvíce spjatá tato norma, nicméně zaměřením normy jsou masivní konstrukce vodohospodářských objektů. V definicích a termínech je rozlišen rozdíl mezi obalovým a jádrovým betonem masivních konstrukcí. Obalový beton je přímo vystaven vlivům vnějšího prostředí [4]. Z tohoto důvodu jsou na obalový beton také kladeny požadavky na mechanickou, chemickou a biologickou odolnost vůči vnějšímu prostředí. Norma specifikuje požadavky při provádění masivních betonových konstrukcí shodně s normou ČSN EN 13670.

Norma uvádí i požadavky na použitý beton a cement. Pro masivní konstrukce vylučuje využití portlandského cementu třídy I (CEM I) a zároveň upravuje podmínky pro složení betonu, kdy maximální hmotnost cementu dle normy nemá překročit  $320 \text{ kg m}^{-3}$  [4]. V případě možných způsobů snížení teplotního spádu se vyskytuje zmínka o využití

chladicí soustavy zabudované v betonové konstrukci. V příloze normy je podrobně uveden postup výpočtu adiabatického zvýšení teploty betonu způsobeného hydratačním teplem a výpočet tahových napětí od teplotních změn. Dle normy [4] se jedná o přibližný výpočet.

#### 1.2.4 TKP Kapitola 18 Betonové konstrukce a mosty (ŘSD ČR)

Při výstavbě masivních staveb, jejímž investorem je ŘSD ČR je nutné dodržovat nejen normy, ale také příslušné předpisy Ministerstva dopravy. V tomto případě se právě jedná o Technické kvalitativní podmínky staveb pozemních komunikací Kapitulu 18 Betonové konstrukce a mosty (TKP 18).

Z hlediska návrhu a výstavby masivních betonových konstrukcí se TKP 18 převážně odvolávají na normu ČSN 73 1208 a ČSN EN 13670. V TKP 18 jsou rovněž specifikována opatření postupu betonáže a chlazení betonové směsi. Oproti zmíněným normám TKP 18 navíc určují maximální možný teplotní rozdíl mezi jádrem a povrchem konstrukce při hydrataci cementu na 20 °C [2].

#### 1.2.5 TKP Kapitola 17 Beton pro konstrukce (SŽ)

Požadavky Technicky kvalitativních podmínek staveb státních drah Kapitoly 17 Beton pro konstrukce [14] (TKP 17) popisují především požadavky na složení betonu, ve kterých specifikují i materiálové požadavky na masivní betonové konstrukce. Maximální přípustná teplota konstrukce během hydratace dle TKP 17 je rovněž 70 °C. TKP 17 specifikují i podmínku rychlosti časového nárůstu a poklesu teploty. V obecném případě nesmí změna teploty překročit 15 °C/hod a zároveň během chladnutí betonu by pokles teploty neměl být vyšší než 10 °C/hod [14].

TKP 17 dále doporučují využití směsných cementů pevnostní třídy 32,5 s minimálním obsahem slínku a minimalizací dávky. Maximální množství uvolněného hydratačního tepla cementu by nemělo za 7 dní překročit hodnotu 280 kJ kg<sup>-1</sup>, respektive 300 kJ kg<sup>-1</sup> za 28 dní [14]. V TKP 17 jsou specifikovány i mezní teploty betonu při jeho ukládání v závislosti na klimatických podmínkách.

Teplotní klimatické podmínky		Minimální teplota prostředí	Maximální teplota prostředí	Mezní teplota betonu
Normální klimatické podmínky		+5 °C	+25 °C	max. +30 °C
Nízké a záporné teploty		-10 °C	+5 °C	min. +10 °C
Horké a suché prostředí	masivní konstrukce	+20 °C	+30 °C	max. +25 °C
	ostatní konstrukce	+25 °C	+35 °C	max. +30 °C

**Tabulka 2:** Požadavky na teplotu čerstvého betonu při dodání a v závislosti na klimatických podmínkách (Tabulka 9 TKP 17) [14]

### 1.2.6 TKP Kapitola 18 Betonové mosty a konstrukce (SŽ)

Kapitola 18 Betonové mosty a konstrukce Technicky kvalitativních podmínek staveb státních drah [15] definuje pojem masivní konstrukce a určuje podmínky pro jejich provádění. Podmínky této kapitoly pro masivní konstrukce jsou shodné s Kapitolou 17 Beton pro konstrukce, a navíc rozšiřují požadavky. Dále je doporučeno konstrukci osadit čidly a provádět monitoring po dobu betonáže a tvrdnutí betonu. Monitorovací systém je možno využít pro aktivní regulaci navrženého systému chlazení [15].

Povinností zhotovitele je zpracovat technologický předpis (TePř) předpokladu vývoje hydratačního tepla v závislosti na konkrétních podmínkách a navržených opatřeních. U významných staveb je také nutné ověřit správnost návrhu na zkušební vzorku ve skutečné velikosti (měřítko 1 : 1), případně navržená opatření upravit [15].

### 1.2.7 Předpisy American Concrete Institute

S problematikou jsou nejvíce spjaty předpisy ACI 207.1-21: Mass Concrete-Guide [5], ACI 207.4-20: Cooling and Insulating Systems for Mass Concrete [16] a ACI 207.2-07: Report on Thermal and Volume Change Effects on Cracking of Mass Concrete [17]. Oproti českým předpisům jsou tyto zmíněné předpisy významně obsahově rozsáhlejší a obsahují značné množství užitečných informací.

V předpise ACI 207.1-21 je popsán historický vývoj v oblasti masivních konstrukcí, požadavky na jednotlivé složky betonu a jeho výsledné vlastnosti, technologický postup pro výrobu, ukládání a ošetřování. Obsahem předpisu je také popis termálně-mechanického chování, objemových změn, vývoje hydratačního tepla, jeho šíření a způsoby měření.

Ve druhém zmíněném předpise ACI 207.4-20 jsou detailně popsány požadavky na izolované bednění, a především metody chlazení, které jsou rozděleny na metody realizované před vlastní betonáží a metody realizované v průběhu a po betonáži. V závěru je nastíněn očekávaný vývoj této problematiky.

Předpis ACI 207.2-07 podrobně popisuje tepelné vlastnosti betonu s mnohými příklady, souvisle objasňuje princip vedení tepla v betonových konstrukcích, popisuje zjednodušené metody výpočtu času chlazení pro specifické případy a také popisuje vnější a vnitřní omezení, která vedou ke vzniku trhlin.



## 2 Příklady vodního chlazení

Nejvíce zkušeností s výstavbou masivních betonových konstrukcí a s využitím vodního chlazení v praxi má Čína a USA. Tomuto faktu nasvědčuje vysoký počet realizovaných projektů i skutečnost, že značná část světově uznávané literatury v tomto oboru pochází právě z těchto zemí.

V našich podmínkách běžně nedochází k potřebě aplikace vodního chlazení, přesto při realizaci některých staveb je nutno vývoj hydratačního tepla brát v úvahu a stanovit případná opatření. S touto problematikou se určitě budou muset potýkat některé připravované stavby, například půjde o výstavbu přehradní hráze poldru na řece Krounka u Kutřína [18], nebo o výstavbu nového bloku jaderné elektrárny Dukovany. Některé zajímavé příklady aplikace vodního chlazení jsou dále popsány.

### 2.1 Hooverova přehrada

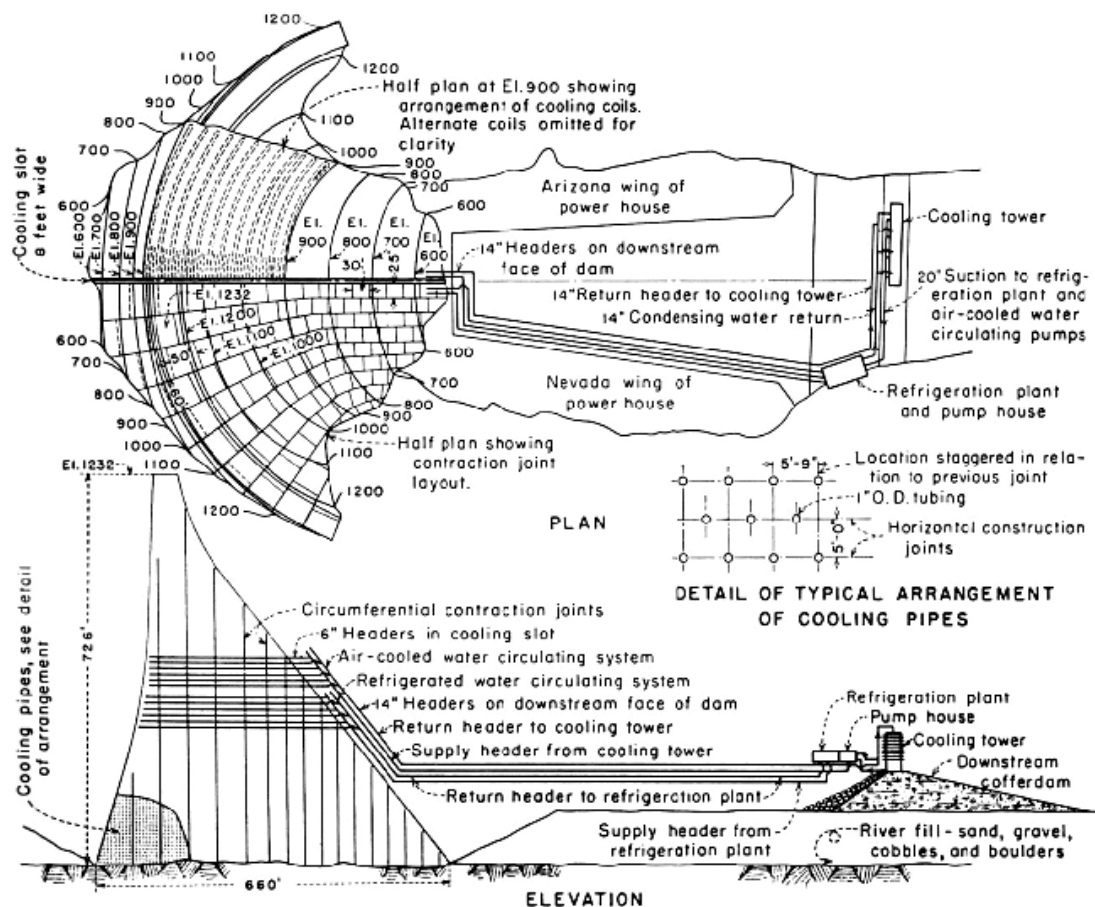
Za první známou stavbu, při jejíž realizaci bylo využito vodní chlazení, je považována Hooverova přehrada na řece Colorado v USA. V době svého vzniku se jednalo o největší přehradu na světě. Přehrada je vysoká 221 m, šířka koruny přehrady je 379 m, tloušťka přehrady v patní části dosahuje 201 m a směrem ke koruně se zužuje na 14 m [19]. Na výstavbu přehrady bylo spotřebováno 3,33 mil. m<sup>3</sup> betonu [20].



**Obrázek 6:** Pohled na betonáž jednotlivých bloků [35]

Z výše uvedených rozměrů přehrady a množství spotřebovaného betonu je zřejmé, že se jedná o masivní konstrukci. Výrazný vliv na výstavbu měla také teplota na staveništi, která v létě mohla překročit i 40 °C [20]. Z těchto okolností jasně vyplývá, že vývoj hydratačního tepla měl značný vliv na výstavbu přehrady.

S těmito obtížnými okolnostmi si však federální úřad U.S. Bureau of Reclamation dokázal poradit a vyvinul metodu sledování teploty konstrukce na základě potrubního chlazení a členění konstrukce na jednotlivé bloky. Konstrukce přehrady byla betonována po blocích, které dosahovaly rozměrů až 15 m<sup>2</sup> a výšky 1,5 m [20]. Pro betonovou směs byl použit cement s pozvolným vývinem hydratačního tepla, rozměr použitého kameniva se lišil na základě polohy bloku. Jednotlivé bloky byly chlazeny soustavou ocelových trubek s vnějším průměrem 25 mm a tloušťkou stěny 1,5–1,8 mm [21]. Pro prvotní ochlazení bloku byla využívána voda z řeky Colorado, následně probíhalo chlazení vodou ochlazenou až na 4 °C pomocí chladicího zařízení. Po ukončení chlazení bylo potrubí vyplněno maltou. Na závěr došlo ke spojení jednotlivých bloků ocelovými trny a zaplněním mezer maltou [19].

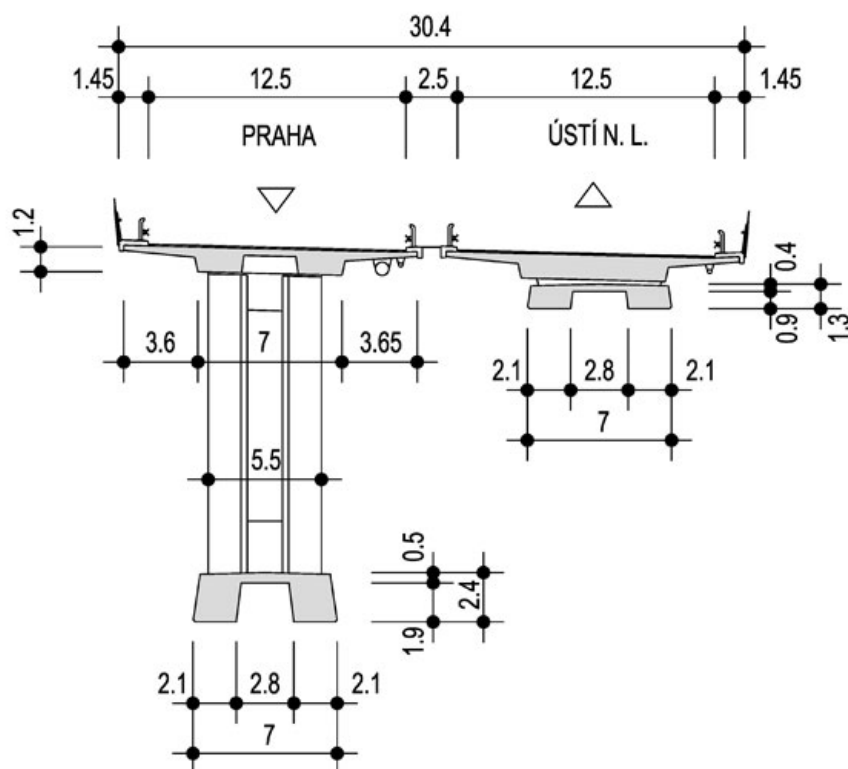


Obrázek 7: Schéma chladicího systému při výstavbě Hooverovy přehrady [36]

## 2.2 Most přes Oparenské údolí

Most (resp. soumostí) přes Oparenské údolí se nachází na dálnici D8 v oblasti III. zóny CHKO České středohoří. Z důvodu vyloučení výstavby v údolí, krajinářského hlediska a následné údržby byla již při územním rozhodnutí schválena koncepce obloukového mostu s komorovým průřezem.

Během projektové fáze došlo ke změně konstrukčního řešení oblouku, místo komorového průřezu tloušťky 2,4–3,5 m byl navrhnout plnostěnný dvoutrámový průřez s šířkou 7 m a proměnnou tloušťkou od 2,4 m v patní části až po 1,3 m ve vrcholu [22]. K této změně došlo především z estetického hlediska a z důvodu jednodušší realizace oblouku. Na základě geotechnických podmínek bylo rozpětí oblouku stanoveno na 135 m [22], jedná se tak v současné době dle rozpětí o druhý největší betonový obloukový most v České republice (prvním je Podolský most).



**Obrázek 8:** Příčný řez mostu nad podporou a v poli [22]

Oblouk byl betonován symetricky po lamelách s délkou až 5,6 m. Vznikající konzoly mostního oblouku byly dočasně zavěšeny na pylonech a poté došlo uprostřed oblouku k jejich zmonolitnění. Během ověřovacích zkoušek betonáže bylo zjištěno, že došlo k překročení teploty 75 °C uvnitř trámu oblouku [23]. Přijatými opatřeními byla úprava složení betonové směsi a předchlazení záměsové vody. Efektivní by však zejména bylo předchlazení kameniva, ale to bohužel nemohlo být realizováno z důvodu



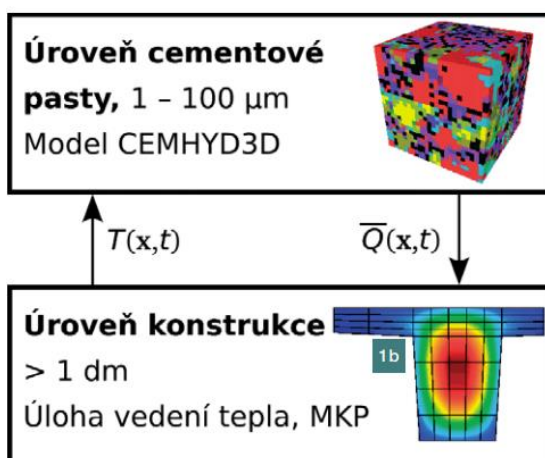
nedostatečného technického vybavení výrobce betonu. Opatření byla vyhodnocena jako nedostatečná a došlo k rozhodnutí o využití vodního chlazení uložené betonové směsi [23]. Návrh a optimalizace vodního chlazení probíhal na katedře mechaniky Fakulty stavební ČVUT v Praze.



**Obrázek 9:** Pohled na výstavbu oblouku mostu [22]

Prvotní návrh vodního chlazení byl stanoven na základě zjednodušených výpočtů, tento návrh byl ověřen modelem a upraven. Pro následnou optimalizaci návrhu byl vytvořen víceúrovňový model. Globální úroveň modelu představoval tvar konstrukce, na kterém probíhalo řešení nestacionárního vedení tepla. K jednotlivým bodům globálního modelu byly přiřazeny jednotlivé modely mikrostruktury cementové pasty, ve kterých docházelo k popisu kinetiky hydratace cementu [23].

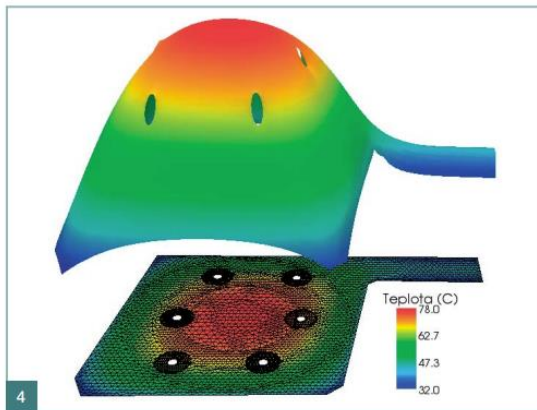
Popis mikrostruktury je umožněn převážně na základě znalosti přesného mineralogického složení cementu. Pro popis mikroskopické struktury byl využit model CEMHYD3D, který byl implementován do programu OOFEM [1].



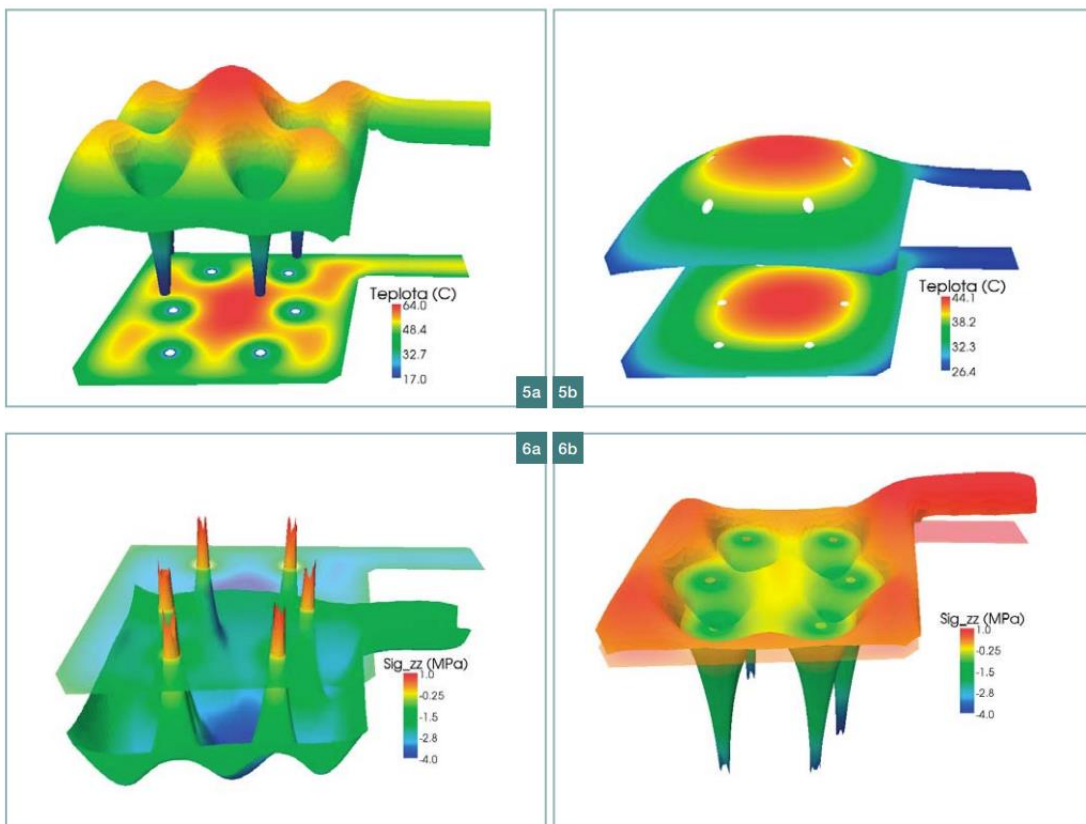
**Obrázek 10:** Propojení úrovní modelu [23]

Výsledek globálního modelu pole teplot byl následně využit k výpočtu deformací a přírůstku napětí způsobeného teplotním namáháním od vývoje hydratačního tepla. Při výpočtu napětí byl uvažován i vliv dotvarování a smršťování betonu modelem B3 [23].

Díky vodnímu chlazení došlo ke snížení maximální teploty konstrukce z původních 78 °C v čase 43 h na 64 °C v čase 22 h [23]. Výsledky zjištěné modelem byly následně ověřeny realizací, která potvrdila velice dobrou shodu [23].



**Obrázek 11:** Pole teplot bez vodního chlazení v čase 43 h [23]



**Obrázek 12:** Srovnání průběhu pole teplot a napětí v čase 22 h (označení 5a, 6a) a 100 h (označení 5b, 6b) tvrdnutí betonu [23]

## 2.3 Lávka Holešovice-Karlín (HolKa)

Jedná se o lávku, která spojí pražské Holešovice a Karlín s ostrovem Štvanice. Jejím zhotovením se zkrátí pěším a cyklistům cesta přes řeku Vltavu a usnadní se jim přístup na ostrov, který by měl projít také celkovou úpravou a stát se vyhledávanou lokalitou pro trávení volného času [24]. K jeho napojení na lávku byla vybudována bezbariérová rampa.

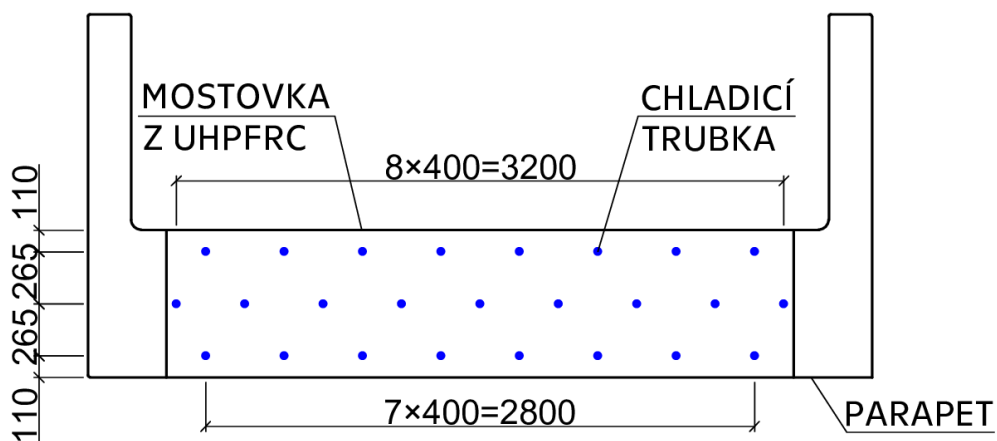


**Obrázek 13:** Pohled na rozplet lávky HolKa (foto poskytl prof. Ing. V. Šmilauer, Ph.D., DSc.)

Konstrukčně je lávka řešena jako segmentový trám s parapetními nosíky. Vyrobené segmenty lávky byly dopraveny na místo, kde byly osazeny do správné polohy, poté spojeny a předepruty předpínacími lany.

Spojení lávky s rampou na ostrov Štvanice bylo řešeno částečně monolitickou betonáží. Navržený postup byl takový, že nejprve došlo k osazení parapetních nosníků a až poté k následné betonáži mostovky. Tento technologický postup vedl k zamezení volného smrštění desky, nárůstu tahového napětí v desce a vzniku trhlin, přičemž maximální limit šířky trhlin je 0,2 mm. Dalším nepříznivým vlivem byl předpokládaný letní termín betonáže, kdy teplota ukládané betonové směsi a okolí je poměrně vysoká. Pro betonáž mostovky byl využit vysokohodnotný beton UHPFRC C110/130 - XF4 + XD3 + XC4 s bílým cementem CEM I 52,5 R a dávkováním přibližně  $750 \text{ kg m}^{-3}$  [25]. Z důvodu těchto zmíněných nepříznivých faktorů si nechala společnost Skanska a. s. vypracovat termomechanickou simulaci výstavby a návrh vodního chlazení [25].

Nejprve byl navržen model části konstrukce, který vystihoval chování materiálu konstrukce a okrajové podmínky. Následovalo stanovení rozmístění chladicího potrubí. Z důvodu vývoje vysokého množství hydratačního tepla betonu bylo potrubí zvoleno hustší, než je zvykem v případě běžných masivních konstrukcí. Potrubí bylo navrženo ve třech vzájemně posunutých rovinách. Ve vodorovném směru bylo potrubí od sebe vzdáleno 400 mm, ve svislém směru 265 mm. Pro názornost je rozmístění potrubí ilustrováno (viz Obrázek 14).



**Obrázek 14:** Návrh rozmístění chladicího potrubí v mostovce [25]

V simulaci došlo k porovnání účinku chlazení s případem, že by konstrukce nebyla ochlazována (viz Tabulka 3). Hlavním hodnotícím kritériem byla šířka vzniklých trhlin a maximální teplota konstrukce během hydratace. Bez chlazení by maximální teplota v jádru mostovky mohla dosáhnout až hodnoty 100 °C. Dle výsledků simulace vede dlouhé chlazení ke vzniku větších trhlin než v případě, že by konstrukce ochlazována nebyla. Větší trhliny jsou způsobeny na základě vyššího rozdílu teplot při chlazení a tím dochází snadněji k jejich vzniku a šíření. Pro mechanickou simulaci došlo k odhadnutí autogenního smrštění a funkce dotvarování na základě složení podobných betonů [25].

Varianta simulace	Max. teplota (°C)	Max. šířka trhlin (mm)
Bez chlazení	100	0,02
Potrubní chlazení	86	0,22

**Tabulka 3:** Porovnání výsledků simulací [25]

## 3 Transport tepla

V této kapitole je popsán a formulován transport tepla v souvislosti s vodním chlazením. Z hlediska požadavků teplotní analýzy na výstavbu masivních konstrukcí je výsledkem simulace určení teplotního pole v závislosti na čase. Úlohu je možné definovat jako nestacionární vedení tepla s vnitřním zdrojem, který představuje hydratace cementu. V této kapitole budou zohledněny uvažované předpoklady a idealizace, bez kterých se při jakémkoliv reálném řešení nelze obejít.

### 3.1 Tepelné vlastnosti betonu

Beton je kompozitní materiál, který je v modelu kontinua uvažován jako homogenní a izotropní. Mezi tepelné vlastnosti betonu patří objemová hmotnost ( $\rho$ ), měrná tepelná kapacita ( $c$ ) a součinitel tepelné vodivosti ( $\lambda$ ), někdy též označován jako tepelná konduktivita. Tyto vlastnosti je možné získat experimentálním měřením, nebo výpočtem na základě znalosti receptury betonu a vlastnostech použitých materiálů (viz. *Tabulka 3*). Stanovení objemové hmotnosti a tepelné kapacity pak probíhá pomocí váženého průměru, kde váha je dána hmotnostním zastoupením složek betonu. Určení součinitele tepelné vodivosti je obtížnější z důvodu kompozitní struktury betonu. Další vlastností betonu je tepelná difuzivita ( $\alpha$ ). Tepelnou difuzivitu lze získat na základě výpočtu. Stanovení tepelných vlastností má klíčový vliv na správnost následných výsledků.

**Měrná tepelná kapacita ( $c$ )** vyjadřuje množství tepelné energie, které je potřeba dodat k ohřátí 1 kg materiálu o 1 K. Měrná tepelná kapacita betonu se pohybuje v rozmezí 800–1 170 J kg<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup> [7].

$$c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT} \quad (3.1)$$

**Součinitel tepelné vodivosti ( $\lambda$ )** vyjadřuje schopnost materiálu vést teplo. V případě betonu se pohybuje v rozmezí přibližně 1,2–3,5 W m<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup> dle složení a vlhkosti ztvrdlého betonu [7]. Experimentálně bylo zjištěno, že součinitel tepelné vodivosti v průběhu hydratace poklesne zhruba o 20 až 30 % oproti jeho hodnotě při počátku hydratace [26].

Tento vliv lze matematicky vyjádřit:

$$\lambda = \lambda_{\infty} (1,33 - 0,33 \alpha) \quad (3.2)$$



$\lambda_{\infty}$ ..... hodnota součinitele tepelné vodivosti ztvrdlého betonu

$\alpha$  ..... poměr uvolněného hydratačního tepla a celkového hydratačního tepla

**Teplotní difuzivita ( $\alpha$ )** vyjadřuje schopnost materiálu vyrovnávat rozdílné teploty při nestacionárním vedení tepla. Je definována podle vztahu:

$$a = \frac{\lambda}{\rho c} \quad (m^2 s^{-1}) \quad (3.3)$$

Tepelné vlastnosti betonu jsou zejména závislé na složení, ale také na teplotě (viz *Tabulka 3*). Vzhledem k rozpětí teplot, ve kterém výpočet probíhá, lze však s jistou mírou chyby tepelné vlastnosti betonu považovat za konstantní.

Material	Density $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Conductivity $\lambda$ (kJ/(m h °C))				Specific Heat $c$ (kJ/(kg °C))			
		21°C	32°C	43°C	54°C	21°C	32°C	43°C	54°C
Water	1000	2.160	2.160	2.160	2.160	4.187	4.187	4.187	4.187
Cement	3100	4.446	4.593	4.735	4.865	0.456	0.536	0.662	0.825
Quartz sand	2660	11.129	11.099	11.053	11.036	0.699	0.745	0.795	0.867
Basalt gravel	2660	6.891	6.871	6.858	6.837	0.766	0.758	0.783	0.837
Dolomite gravel	2660	15.533	15.261	15.014	14.336	0.804	0.821	0.854	0.888
Granite gravel	2680	10.505	10.467	10.442	10.379	0.716	0.708	0.733	0.775
Lime gravel	2670	14.528	14.193	13.917	13.657	0.749	0.758	0.783	0.821
Quartz gravel	2660	16.910	16.777	16.638	16.475	0.691	0.724	0.758	0.791
Rhyolite gravel	2660	6.770	6.812	6.862	6.887	0.766	0.775	0.800	0.808

**Tabulka 4:** Přehled tepelných vlastností jednotlivých složek [21]

## 3.2 Podstata transportu tepla

Za běžných okolností dochází vždy ke sdílení tepla a hmoty mezi jednotlivými termodynamickými systémy a jedná se často o otevřenou soustavu s okolím. V případě, že výměna hmoty je omezena, lze použít soustavu uzavřenou. Adiabatickou soustavu je možné zvolit, pokud výměna tepla s okolním prostředím je nevýrazná vůči vnitřnímu šíření tepla. S určitými úpravami lze tuto soustavu využít i pro vnitřní oblast masivního betonového průřezu. Nutné je však zahrnout vliv vznikajícího hydratačního tepla a případný odvod tepla navrženým vodním chlazením.

Výměna tepla probíhá třemi možnými způsoby:

- sáláním (radiací)
- prouděním (konvekci)
- vedením (kondukcí)

Ve skutečnosti dochází téměř vždy k přenosu tepla všemi možnými způsoby. Není tomu jinak, ani v případě vodního chlazení. Při návrhu délky chladicího potrubí má zásadní vliv přenos tepla mezi vodou a stěnou potrubí, které je přenášeno vedením. Uvnitř potrubí však následně dochází k přenosu tepla zejména prouděním. Také povrch vybetonované konstrukce je ovlivněn vnějšími klimatickými podmínkami. Zejména je vystaven povětrnostním vlivům, kdy je povrch konstrukce ochlazován proudícím větrem. Tento jev je známý pod pojmem „windchill effect“. Dalším klimatickým vlivem je sluneční záření. V případě slunečního záření dochází k ohřátí povrchu konstrukce sluneční radiací.

V této aplikaci je přenos tepla uskutečněn zejména vedením, při němž dochází dle druhého termodynamického zákona k přenosu kinetické energie (tepla) částic hmoty s vyšší kinetickou energií (tj. vyšší teplota) na částice hmoty s nižší kinetickou energií (tj. nižší teplota) z důsledku snahy o vyrovnání energií.

Největší směr nárůstu rozdílu teplot je popsán v příslušných směrech os rovinného souřadného systému **teplotním gradientem**:

$$\text{grad } T(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} T(\mathbf{x}, t) = \nabla T(\mathbf{x}, t) \quad (K \text{ m}^{-1}) \quad (3.4)$$

Na základě znalosti teplotního gradientu, vlastností materiálu a při uvážení infinitezimální plochy lze **Fourierovým zákonem** vyjádřit **tepelný tok**:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -\lambda \frac{dT(\mathbf{x}, t)}{dx} = -\lambda \nabla T(\mathbf{x}, t) \quad (W \text{ m}^{-2}) \quad (3.5)$$

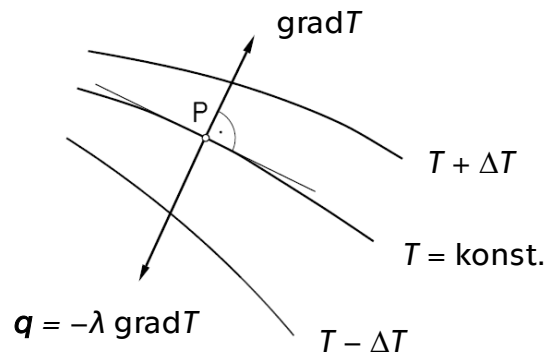
$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$  .....vektor tepelného toku v závislosti na čase

$\nabla T(\mathbf{x}, t)$  .....vektor teplotních gradientů v závislosti na čase

$\lambda$  .....součinitel tepelné vodivosti

Tepelný tok vyjadřuje množství tepla, které projde plochou za jednotku času. Z vyjádření Fourierova zákona (3.5) vyplývá, že tepelný

tok  $q(x, t)$  je lineárně závislý na teplotním gradientu  $\nabla T(x, t)$ , ale se záporně uvažovanou hodnotou. Tato skutečnost je dána tím, že teplotní gradient vyjadřuje největší směr nárůstu teploty, přičemž směr přestupu tepla je vůči směru teplotního gradientu opačný. Skutečnost je graficky znázorněna (viz Obrázek 15).



**Obrázek 15:** Znázornění teplotního gradientu a tepelného toku vůči izotermám [27]

### 3.3 Nestacionární vedení tepla

Rovnici nestacionárního vedení tepla je možné odvodit na základě bilance energie (resp. tepelných toků) v jednotlivých směrech elementárního prvku. Odvození vychází ze zákona zachování celkové energie, který stanovuje rovnováhu mezi energií dodanou, uvolněnou a spotřebovanou elementárním prvkem s energií z něho odvedenou. V odvození rovnice je nutné zohlednit i vliv času, pomocí kterého je vyjádřena spotřebovaná energie na změnu teploty elementu.

Výsledná rovnice nestacionárního vedení tepla má v rovině tvar:

$$\rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial y^2} \right) + Q(x, t) \quad (3.6)$$

$Q(x, t)$  ..... funkce popisující tepelný zdroj (teplo uvolněné hydratací cementu)

Ve zkrácené formě lze rovnici nestacionárního vedení tepla zapsat:

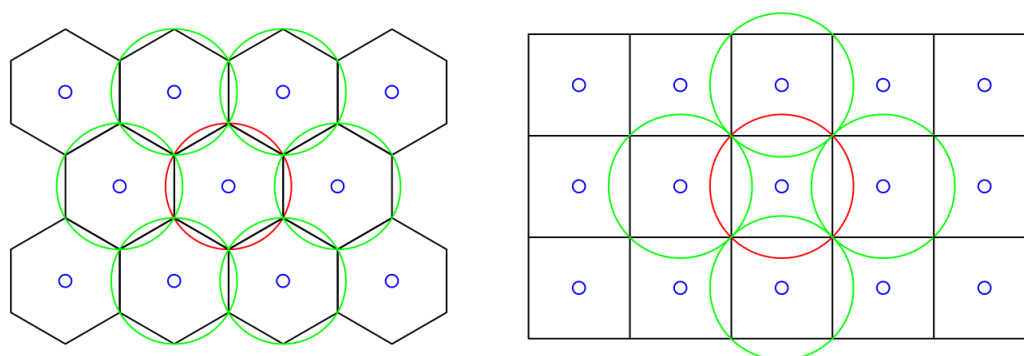
$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \Delta T(x, t) + Q(x, t) \quad (3.7)$$

Jedná se o parciální diferenciální rovnici parabolického typu. Řešení rovnice je možné pro jednoduché případy provést analyticky, při řešení praktických problémů dochází nejčastěji k využití numerických metod.

Analytické řešení využívá separaci proměnných nebo metody založené na principu integrální transformace (Besselovy funkce). Nejznámější a nejvyužívanější numerickou metodou je metoda konečných prvků, která je naimplementována v řadě výpočetních programů.

### 3.4 Rotačně symetrický popis

Rozmístění chladicího potrubí v příčném řezu se nejčastěji uvažuje jako hexagonální nebo čtvercové. Průřez konstrukce je rozdělen na plochy stejné velikosti [21]. Chladicí potrubí kruhového průřezu je umístěno v jednotlivých centrech těchto ploch. Teplo je tak z plochy odváděno nejkratším směrem k potrubí, ve své podstatě se tak jedná o rotačně symetrickou úlohu. Výhoda tohoto uspořádání je zřejmá z grafického vyjádření (viz *Obrázek 16*). Oproti čtvercovému uspořádání je nejvzdálenější bod hexagonálního uspořádání blíže k potrubí a také dochází k nižší míře ovlivnění mezi jednotlivými plochami. Prvky čtvercového a hexagonálního uspořádání v obrázku mají shodně velký obsah.



**Obrázek 16:** Srovnání hexagonální a čtvercové sítě

Vyjádření rovnice vedení tepla (3.6) pro rotačně symetrický popis lze upravit využitím transformace kartézských souřadnic do polárního souřadnicového systému.

Vztah mezi kartézskými a polárními souřadnicemi (polární transformace):

$$\begin{aligned} x &= r \cos\varphi \\ y &= r \sin\varphi \end{aligned} \tag{3.8}$$

V rovnici (3.6) je obsažena druhá derivace teploty podle proměnných  $x$  a  $y$ , které lze vyjádřit:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y}$$

Derivaci teploty  $T$  podle souřadnic  $x, y$  lze vyjádřit pomocí derivace složené funkce:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Parciální derivace polárních souřadnic  $r, \varphi$  podle  $x$  lze odvodit řešením soustavy rovnic, které jsou výsledkem parciální derivace zavedené substituce (3.8) právě podle  $x$ :

$$\begin{aligned} 1 &= \cos\varphi \frac{\partial r}{\partial x} - r \sin\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ 0 &= \sin\varphi \frac{\partial r}{\partial x} + r \cos\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Roznásobením rovnic (3.11) goniometrickými členy (1. rovnice  $\cos\varphi$ , 2. rovnice  $\sin\varphi$ ) a následným sečtením roznásobených rovnic lze získat řešení soustavy rovnic:

$$\cos\varphi = \frac{\partial r}{\partial x} \quad (3.12)$$

Podobným způsobem úpravy lze z této soustavy rovnic také odvodit:

$$-\sin\varphi \frac{1}{r} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (3.13)$$

Výše popsaný postup úprav pro proměnnou  $x$  je také využit obdobně pro proměnnou  $y$ , výsledkem je vyjádření parciálních derivací polárních souřadnic  $r, \varphi$  podle  $y$ :

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{\partial r}{\partial y} \\ \cos\varphi \frac{1}{r} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Odvozené členy (3.12), (3.13), (3.14) lze zapsat v maticovém zápisu, výsledkem odvození je inverzní Jacobiho matice polárního zobrazení:

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \frac{1}{r} \\ \sin\varphi & \cos\varphi \frac{1}{r} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Nyní lze zpětně dosadit do (3.10) s využitím odvozené Jacobiho inverzní matice  $J^{-1}$  (3.15):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \cos\varphi \frac{\partial T}{\partial r} - \sin\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \sin\varphi \frac{\partial T}{\partial r} + \cos\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Postupnou derivací je možné odvodit druhé parciální derivace teploty  $T$  podle souřadnic  $x, y$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \left( \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \sin\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left( \cos\varphi \frac{\partial T}{\partial r} - \sin\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) = \\ &= \cos^2\varphi \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} - 2 \sin\varphi \cos\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \varphi} + \sin^2\varphi \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \\ &\quad + 2 \sin\varphi \cos\varphi \frac{1}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \sin^2\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \left( \sin\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \cos\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left( \sin\varphi \frac{\partial T}{\partial r} + \cos\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) = \\ &= \sin^2\varphi \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + 2 \sin\varphi \cos\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \varphi} + \cos^2\varphi \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \\ &\quad - 2 \sin\varphi \cos\varphi \frac{1}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \cos^2\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Po dosazení (3.17) a (3.18) do rovnice (3.6) a uvážení rotační symetrie lze získat výsledný tvar rovnice vedení tepla v polárních souřadnicích:

$$\rho c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + Q(r, t) \quad (3.19)$$

### 3.5 Okrajové a počáteční podmínky

Pro vyřešení diferenciálních rovnic a určení jednoznačného řešení je klíčová znalost okrajových podmínek. V obecném případě nemusí být podmínky po celou dobu konstantní, ale mohou být časově proměnné, případně periodicky se opakovat. Pro správné určení průběhu teplotního pole je třeba znát příslušné okrajové podmínky.

**Počáteční rozložení teplot** popisuje výchozí stav teplotního pole. Teplotní pole v tomto okamžiku může být různé, nejjednodušším příkladem je konstantní teplota v rámci celého systému. Tato podmínka vyjadřuje teplotu  $T_0$  čerstvého betonu v době uložení do bedně.

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0 \quad (3.20)$$

**Dirichletova okrajová podmínka** předepisuje hodnotu teploty na hranici  $\Gamma$ . Oproti ostatním okrajovým podmínkám je tato podmínka hlavní a numericky stabilní.

$$T(\mathbf{x}, t) = T_\Gamma(t) \quad (3.21)$$

**Neumannova okrajová podmínka** je přirozenou (vedlejší) podmínkou a předepisuje hodnotu tepelného toku  $q(t)$  ve směru normály  $n$  k hranici  $\Gamma$ .

$$-\lambda \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial n} = q_\Gamma(\mathbf{x}, t) \quad (3.22)$$

$n$ ..... vnější normála k povrchu

**Newtonova okrajová podmínka** popisuje přestup tepla z povrchu tělesa uskutečněný prouděním okolního vzduchu.

$$-\lambda \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial n} = \alpha(T_s - T_a) \quad (3.23)$$

$\alpha$  ..... součinitel přestupu tepla mezi prostředím

$T_s$  ..... teplota povrchu betonu

$T_a$  ..... teplota vzduchu

### 3.6 Řešení s využitím Besselových funkcí

Při uvážení rotační symetrie úlohy, je rovnice vedení tepla zapsaná v polárních souřadnicích závislá pouze na poloměru  $r$  a čase  $t$ . Jistým zjednodušením je také zanedbání členu popisující množství uvolňovaného hydratačního tepla  $Q(r, t)$ .

Předpokládaný tvar diferenciální rovnice vedení tepla je:

$$\rho c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (3.24)$$

Řešení této parciální diferenciální rovnice vedení tepla je možné odvodit užitím Laplaceovy transformace, která vede k Besselově rovnici. Řešení této rovnice lze zapsat pomocí Besselových funkcí.

Výsledný tvar analytického vyjádření lze dohledat v odborné literatuře (např. Thermal Stresses and Mass Concrete [21]). Z této publikace je popis teplotního pole následovný:

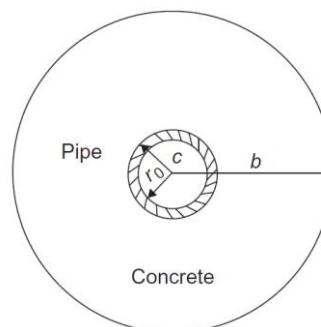
$$T(r, t) = T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-\alpha_n^2 at}}{\alpha_n b} \cdot \frac{J_1(\alpha_n b) Y_0(\alpha_n r) - Y_1(\alpha_n b) J_0(\alpha_n r)}{R(\alpha_n b)} \quad (3.25)$$

$$R(\alpha_n b) = \left( \frac{b}{c} \right) [J_1(\alpha_n b) Y_1(\alpha_n c) - J_1(\alpha_n c) Y_1(\alpha_n b)] + [J_0(\alpha_n c) Y_0(\alpha_n b) - J_0(\alpha_n b) Y_0(\alpha_n c)]$$

$J_0, J_1$  .....první druh Besselových funkcí nultého a prvního řádu  
 $Y_0, Y_1$  .....druhý druh Besselových funkcí nultého a prvního řádu  
 $\alpha_n b$  .....kořen následné charakteristické rovnice

$$J_1(\alpha_n b) Y_0(\alpha_n c) - J_0(\alpha_n c) Y_1(\alpha_n b) = 0 \quad (3.26)$$

Uvedený vztah pro vyjádření teplotního pole bude využit k verifikaci výpočetního modelu. V případě uvedeného popisu teplotního pole analytickým řešením (3.25) je uvažován dutý homogenní betonový válec. Teplota vnější stěny chladicího potrubí je uvažována shodně s teplotou vody. Parametr  $b/c$  vyjadřuje poměr vnějšího poloměru betonového válce  $b$  a poloměru vnější stěny chladicího potrubí  $c$ . Při verifikaci modelu MKP se proto musí chladicí potrubí uvažovat se stejnými parametry jako beton.



Obrázek 17: Výpočetní model dle [21]



## 4 Numerické řešení MKP

Základní myšlenka MKP byla formulována již v roce 1943 matematikem R. Courantem [28] a také stavebními inženýry M. J. Turner a kol. [29] v roce 1956. Následné praktické uplatnění MKP bylo umožněno technickým vývojem osobních počítačů. MKP je přibližnou numerickou metodou a při vhodné volbě parametrů výpočetního modelu a zobecnění lze získat výsledky, které téměř vystihují přesné řešení. Na základě současného vývoje CAD (Computer Aided Design) programů je možné MKP využít i při řešení rozložení fyzikálních veličin tvarově komplikovaných objektů.

MKP může být v širším smyslu chápána jako efektivní nástroj pro řešení praktických technických problémů popsanych parciálními diferenciálními rovnicemi. Základním principem MKP je nahrazení skutečné geometrie modelem sítě vytvořené z konečného počtu tvarově jednoduchých prvků. V jednotlivých uzlech sítě jsou definovány parametry, které vyjadřují hodnotu výsledné veličiny a mezi jednotlivými uzly je definována funkční závislost. Dochází tak k aproximaci spojité funkce hledané veličiny pomocí konečného počtu prvků neznámých parametrů, které jsou následně vyřešeny soustavou lineárních rovnic.

Výsledky získané numerickým řešením by měly být verifikovány pomocí zjednodušených metod nebo analytickým vyjádřením. Předností numerického modelování a MKP je i možná grafická prezentace získaných výsledků, jejich názornost a srozumitelnost pro širokou veřejnost.

### 4.1 Diskretizace rovnice vedení tepla

Nejprve je potřeba odvodit slabou formulaci diferenciální rovnice vedení tepla (3.6). Pro odvození slabé formulace je nejprve nutné rovnici vedení tepla (3.6) vynásobit váhovou funkcí  $\delta T$  a integrovat přes oblast  $\Omega$ . Výsledkem této operace je:

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \delta T d\Omega = \int_{\Omega} \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \delta T d\Omega + \int_{\Omega} Q(x, t) \delta T d\Omega \quad (4.1)$$

Aplikací Greenovy věty lze druhý integrál rovnice (4.1) upravit na tvar:

$$\int_{\Omega} \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \delta T d\Omega = \int_{\partial\Omega} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \delta T d\Gamma - \int_{\Omega} \lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \delta T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \delta T}{\partial y} \right) d\Omega \quad (4.2)$$

Integrál  $\int_{\partial\Omega} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \delta T d\Gamma$  je závislý na volbě okrajových podmínek. V případě, že je předepsána teplota na hranici, je váhová funkce na hranici  $\delta T = 0$ . Při zpětném dosazení (4.2) do rovnice (4.1) lze získat slabou formulaci:

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \delta T d\Omega + \int_{\Omega} \lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \delta T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \delta T}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Omega} Q(x, t) \delta T d\Omega \quad (4.3)$$

Následným krokem odvození je vyjádření neznámých veličin, kterými jsou teplota  $T$ , váhová funkce  $\delta T$  a také jejich derivace, užitím Galerkinovy aproximace:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= T \approx \mathbf{N}(x) \mathbf{r}(t) & \delta T(x, t) &= \delta T \approx \mathbf{N}(x) \delta \mathbf{r}(t) \\ \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{\partial \mathbf{N}(x)}{\partial x} \mathbf{r}(t) & \frac{\partial \delta T(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial \delta T}{\partial x} \approx \frac{\partial \mathbf{N}(x)}{\partial x} \delta \mathbf{r}(t) \\ \frac{\partial T(x, t)}{\partial y} &= \frac{\partial T}{\partial y} \approx \frac{\partial \mathbf{N}(x)}{\partial y} \mathbf{r}(t) & \frac{\partial \delta T(x, t)}{\partial y} &= \frac{\partial \delta T}{\partial y} \approx \frac{\partial \mathbf{N}(x)}{\partial y} \delta \mathbf{r}(t) \\ \frac{dT}{dx} &\approx \frac{d\mathbf{N}(x)}{dx} \mathbf{r}(t) = \mathbf{B}(x) \mathbf{r}(t) & \frac{d\delta T}{dx} &\approx \frac{d\mathbf{N}(x)}{dx} \delta \mathbf{r}(t) = \mathbf{B}(x) \delta \mathbf{r}(t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Neznámé veličiny jsou aproximovány lineární kombinací báze funkce  $\mathbf{N}(x)$ , případně její derivací  $\mathbf{B}(x)$  a diskrétními hodnotami  $\mathbf{r}(t)$  a  $\delta \mathbf{r}(t)$ . Po dosazení aproximací neznámých veličin z (4.4) do slabého řešení (4.3) lze obdržet:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial \mathbf{r}(t) \mathbf{N}(x)^T}{\partial t} \mathbf{N}(x) \delta \mathbf{r}(t) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda \delta \mathbf{r}(t) \mathbf{B}(x)^T \mathbf{B}(x) \mathbf{r}(t) d\Omega = \\ = \int_{\Omega} \delta \mathbf{r}(t) \mathbf{N}(x)^T Q(x, t) d\Omega \end{aligned} \quad (4.5)$$

Rovnici lze dále upravit do kompaktního maticového tvaru:

$$\mathbf{C} \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{f} \quad (4.6)$$

Kde  $\mathbf{C}$  je **globální matice kapacity**, kterou lze vyjádřit:

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \rho c \mathbf{N}(x)^T \mathbf{N}(x) d\Omega \quad (4.7)$$

Globální matici vodivosti  $K$  lze definovat:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \lambda \mathbf{B}(\mathbf{x})^T \mathbf{B}(\mathbf{x}) d\Omega \quad (4.8)$$

Vektor tepelných zdrojů  $f$  je možné zapsat:

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega} \mathbf{N}(\mathbf{x})^T Q(\mathbf{x}, t) d\Omega \quad (4.9)$$

Výsledkem diskretizace je soustava lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu. Z diskretizace je patrné, že hodnota konstant je závislá i na čase. Z tohoto důvodu je nutné provést časovou diskretizaci rovnice a určit hodnotu konstant v jednotlivých časech.

## 4.2 Časová diskretizace

Z důvodu časové závislosti pole výsledných teplot je nutné provést nejen prostorovou, ale také časovou diskretizaci rovnice. Časový interval  $(0; t)$ , na kterém je diferenciální rovnice řešena, je rozdělen na konečný počet  $n$  úseků délky  $\Delta t$ . Soustava rovnic je vyřešena pouze v určitých časových krocích.

Řešení v určitém časovém kroku lze zapsat:

$$T^i(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}, t_i) \quad (4.10)$$

Hodnotu řešení v obecném čase  $t$  lze aproximovat:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}, t) &\approx \left(1 - \frac{t - t_{i-1}}{\Delta t}\right) T^i(\mathbf{x}) + \frac{t - t_{i-1}}{\Delta t} T^{i+1}(\mathbf{x}) = \\ &= (1 - \tau) T^i(\mathbf{x}) + \tau T^{i+1}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Obdobně lze aproximovat i časový průběh zdroje tepla  $Q(\mathbf{x}, t)$ .

Časovou derivaci teploty  $\frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$  je možné vyjádřit:

$$\frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} (T^{i+1}(\mathbf{x}) - T^i(\mathbf{x})) \quad (4.12)$$

Pro vyjádření formulace metody konečných prvků je nezbytná aproximace neznámých veličin a jejich derivací:

$$T^{i+1}(x) \approx N(x) r^{i+1}$$

$$\frac{dT^{i+1}(x)}{dx} \approx \frac{dN(x)}{dx} r^{i+1} = B(x) r^{i+1} \quad (4.13)$$

Po dosazení do maticového zápisu (4.6) lze získat:

$$\left( \tau K + \frac{1}{\Delta t} C \right) r^{i+1} = (1 - \tau) f^i + \tau f^{i+1} + \left( \frac{1}{\Delta t} C - (1 - \tau) K \right) r^i \quad (4.14)$$

Parametr  $\tau$  ovlivňuje přesnost řešení a stabilitu. S ohledem na stabilitu je vhodné volit  $\tau$  v intervalu  $\tau \in \langle 0,5; 1 \rangle$  [30].

Pro následující hodnoty parametru  $\tau$  se jedná o metody:

- 0..... explicitní Eulerova metoda
- 0,5..... Crank-Nicholsonova metoda
- 1 ..... implicitní Eulerova metoda.

### 4.3 Diskretizace geometrie

Jak již bylo uvedeno, základním principem MKP je diskretizace spojitě oblasti geometrickou sítí. Tvorba geometrické sítě je možná s využitím širokého spektra softwarů. Výsledná volba výpočetní sítě MKP není zcela jednoduchou záležitostí a vyžaduje určitou zkušenost a cit [30].

Vytvořená výpočetní síť pro 2D oblast by měla splňovat následující vlastnosti [31]:

- Síť je tvořena konečným počtem uzavřených prvků.
- Sjednocení všech prvků sítě je vyjádřením oblasti.
- Průnikem dvou libovolných prvků sítě je buď prázdná množina, nebo je průnik tvořen společným vrcholem či společnou stranou.

V případě, že jsou splněny všechny tři uvedené podmínky, lze síť považovat za přípustnou [31]. Neznamená to však, že vytvořená síť bude podávat věrohodné výsledky. Členění sítě by z tohoto důvodu mělo být voleno tak, aby výsledky byly v souladu s požadovanou přesností. Při nedostatečném členění sítě lze s vysokou pravděpodobností očekávat numerickou nepřesnost výsledků, naopak v případě příliš hustého členění bude výpočet neúměrně časově náročný nebo dokonce nebude moci proběhnout z důvodu nedostatku paměti procesoru počítače.

Síť musí nejen vystihnout geometrický tvar nahrazovaného objektu, ale také by měla vhodně zohlednit okrajové podmínky. Faktorem, který má zásadní vliv na čas výpočtu je i způsob číslování jednotlivých prvků a uzlů. Neméně důležitá je i volba tvaru základních geometrických prvků sítě a aproximace neznámých veličin. Všechny uvedené vlastnosti mají zásadní vliv na podobu globálních matic (4.7; 4.8), které jsou výsledkem lokalizace dílčích matic jednotlivých prvků.

#### 4.3.1 Dvourozměrné prvky

Nejjednodušším rovinným prvkem je obecný trojúhelník s bilineární aproximací. Obecný trojúhelník je zejména vhodný pro složitou rovinnou geometrii. Proces tvorby trojúhelníkové sítě je označován triangulací. Existují různé způsoby triangulace, nejznámější je Delaunayova triangulace. Delaunayova triangulace vytváří trojúhelníky, které se nejvíce přibližují rovnostranným trojúhelníkům. Rovnostranné trojúhelníky podávají přesnější výsledky a výpočet je stabilnější.

Vrcholy trojúhelníku tvoří jednotlivé uzly, ke kterým jsou přiřazeny stupně volnosti. Stupně volnosti představují hodnoty neznámých veličin. V případě vedení tepla je stupeň volnosti každého uzlu jeden a tím je teplota. Konvekce číslování uzlů prvku je proti směru hodinových ručiček.

Pro diskretizaci geometrie je možné použít také obecný čtyřúhelník, v případě pravidelné geometrie je vhodné využít čtverec. Užitím čtverců lze dosáhnout poměrně dobré přesnosti řešení a snížit čas výpočtu. Dalším příkladem velice často užívaných prvků jsou izoparametrické prvky. Prvek lze označit za izoparametrický v případě, že geometrie prvku je vyjádřena shodným způsobem jako bázové funkce reprezentující hledané veličiny a současně geometrické a interpolační uzly jsou identické.

Všechny uvedené prvky mohou obsahovat aproximace polí pomocí kvadratických funkcí. Kvadratická funkce je určena třemi body, a proto musí být do středu každé hrany vložen uzel. Trojúhelník je možné aproximovat i kubickou funkcí. Tento trojúhelník, v literatuře označován jako hermitovský, je tvořen uzly ve vrcholech a těžišti. Hermitovskému trojúhelníku jsou předepsány funkční hodnoty i hodnoty derivací ve vrcholech a dále funkční hodnota v těžišti [31].

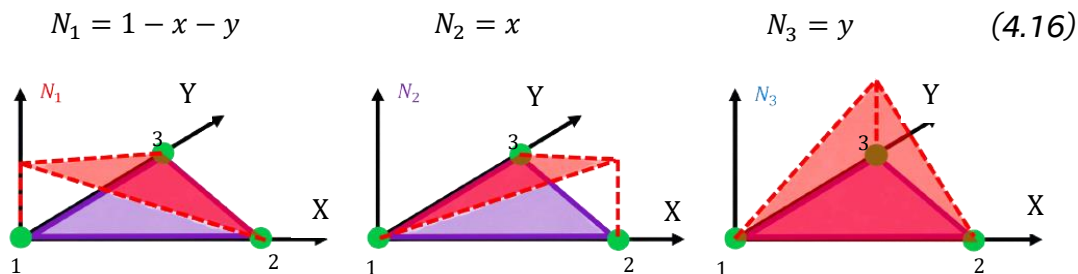
#### 4.3.2 Trojúhelníkový prvek

Základním uvažovaným prvkem je pravoúhlý trojúhelník s vrcholy  $1 = (0,0)$ ;  $2 = (1,0)$  a  $3 = (0,1)$ . Neznámá teplota  $T$  lze vyjádřit lineární kombinací bázových funkcí  $N_i$  a neznámých konstant  $r_i$  v uzlech prvku:

$$T = \{r_1 N_1 + r_2 N_2 + r_3 N_3\} = \mathbf{N} \mathbf{r} \quad (4.15)$$

$r_1, r_2, r_3$  .....neznámé koeficienty v uzlech prvku  
 $N_1, N_2, N_3$  ....bázové funkce prvku

Počet bázových funkcí (v tomto případě 3) vyjadřuje dimenzi prostoru.  
 Bázové funkce lze pro základní trojúhelník vyjádřit:



**Obrázek 18:** Grafické znázornění bázových funkcí

Vlastností bázových funkcí je, že funkční hodnota funkce v příslušném uzlu je rovna jedné, v ostatních uzlech nabývá nulové hodnoty (viz *Obrázek 18*). Libovolný trojúhelník je možné využitím transformace upravit na základní a vyjádřit příspěvky jednotlivých prvků, které jsou následně uskupeny do globální matice kapacity  $\mathbf{C}$  a vodivosti  $\mathbf{K}$  a vektoru tepelných zdrojů pravé strany  $\mathbf{f}$  [31].

	Lineární aproximace (trojúhelník) $T = \{a_1 + a_2x + a_3y\}$
	Kvadratická aproximace (trojúhelník) $T = \{a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2\}$
	Lineární aproximace (čtverec) $T = \{a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy\}$
	Kvadratická aproximace (čtverec) $T = \{a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7x^2y + a_8xy^2\}$

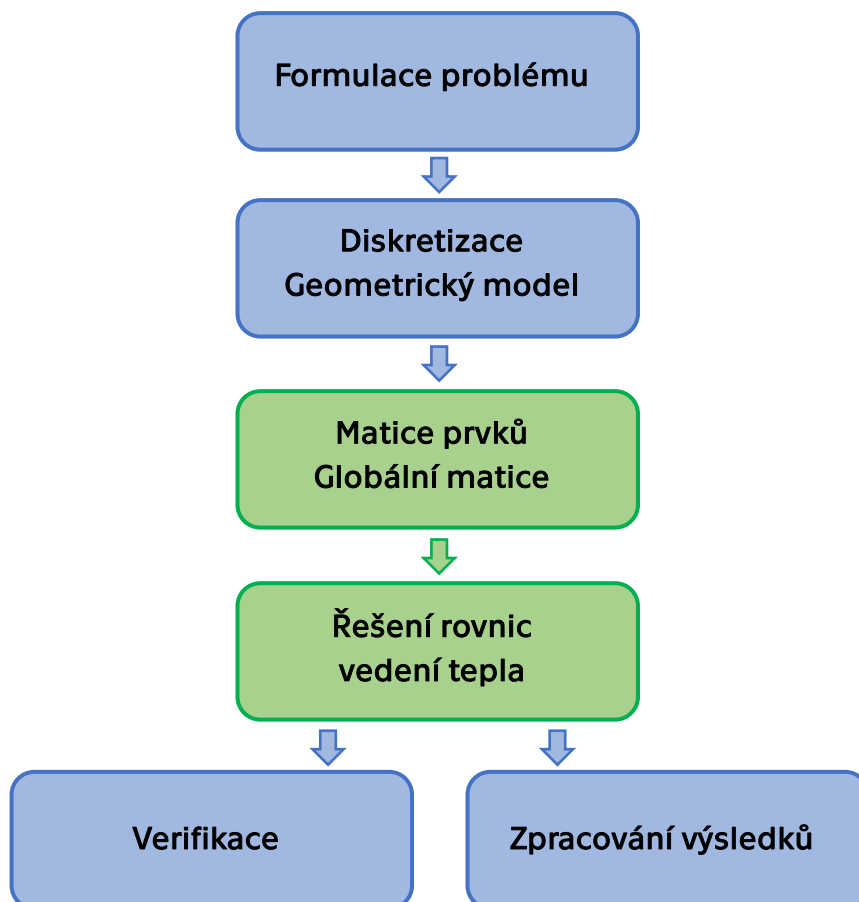
**Tabulka 5:** Přehled základních plošných prvků a vyjádření aproximace teploty

## 5 Teplotní analýza masivních konstrukcí

Hlavním cílem teplotní analýzy je sledování vývoje maximální teploty betonové konstrukce během průběhu hydratace betonu. Dalším cílem je její propojení s mechanickou simulací vývoje trhlin. Z tohoto důvodu bývá spojení také označováno jako termo-mechanická simulace. Zaměření této práce je určení teplotního pole v závislosti na čase a vliv volby sítě MKP na přesnost výsledků.

### 5.1 Proces teplotní analýzy

Teplotní analýzu pomocí MKP je možné provést v řadě komerčních softwarů (např. ANSYS, ATENA Science, COMSOL), v této práci budou využity pouze otevřené a volně dostupné softwary. Za možnou výhodu komerčních softwarů lze považovat jednotné prostředí v průběhu analýzy, na druhou stranu tato jednotnost způsobuje značná omezení uživatelských přizpůsobení a adaptaci pro speciální případy. Výhodou otevřených softwarů je také vyšší míra porozumění problematice při jejich užívání a kontrolovatelnost dílčích kroků celkového řešení.



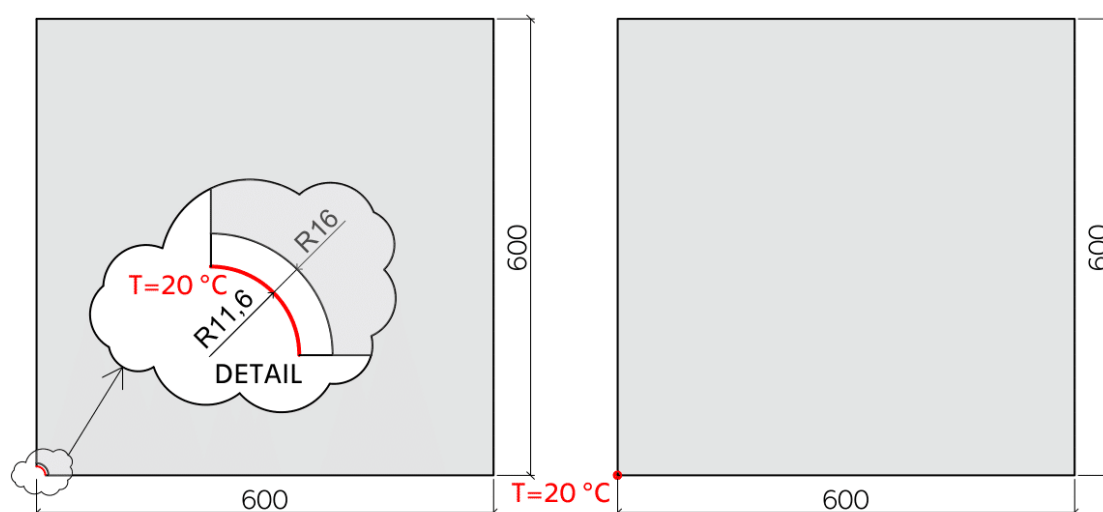
Obrázek 19: Schéma fází procesu MKP

Proces průběhu teplotní analýzy MKP se dá rozdělit do dílčích fází (viz Obrázek 19). Fáze vyznačené v modrých polích lze významně ovlivnit lidským úsudkem a zkušeností. Naproti tomu zelená pole představují čistě matematické operace, které lze díky vhodné softwarové volbě vyřešit pouze s numerickými chybami reprezentace čísel. Některé fáze již byly probrány v předchozích kapitolách, případně budou specifikovány pro konkrétní model definovaný v této kapitole.

## 5.2 Geometrie a síť modelu

Stanovení geometrie modelu je prvním, ale zcela zásadním krokem. Model je vytvořen ve 2D prostoru, konkrétně v rovině kolmé na chladicí potrubí. Uvažován je typický výřez z vnitřní části masivní betonové konstrukce. Tvarově se tak jedná o čtverec s délkou hrany 0,6 m. Mezilehlá vzdálenost trubek se tedy uvažuje 1,2 m, což je přibližná vzdálenost chladicího potrubí při výstavbě masivních přehradních betonových hrází. V literatuře je možné dohledat i vyšší mezilehlou vzdálenost potrubí, publikace [21] uvádí přibližnou vzdálenost až 1,5–3,0 m.

Podrobnost modelu je přímo závislá na požadované přesnosti řešení. Z důvodu porovnání přesnosti řešení jsou vytvořeny dva podobné modely. U prvního z nich je v rohu modelu umístěna výseč  $\frac{1}{4}$  chladicího potrubí o rozměrech  $32 \times 4,4$  mm. Předpokládaný materiál potrubí je polyetylen s nízkou hustotou (LDPE). Vliv chlazení je zohledněn teplotou  $20^\circ\text{C}$  na vnitřní stěně potrubí. V druhém modelu je zcela zanedbán vliv geometrie a materiálu potrubí, tento model více odpovídá reálnému způsobu modelování masivních betonových konstrukcí. Chlazení je zahrnuto předepsanou teplotou  $20^\circ\text{C}$  ve vrcholu čtverce.



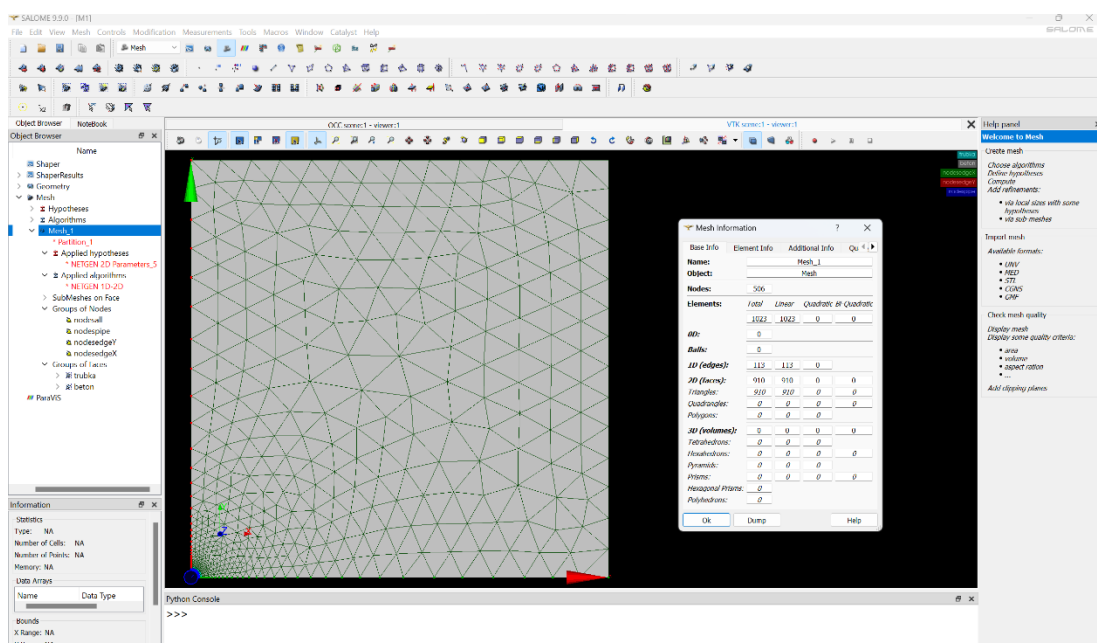
**Obrázek 20:** Porovnání geometrie modelů (rozměry okótovány v mm)



Pro vytvoření geometrie modelu a výpočetní sítě MKP je využit software Salome 9.6, který je vyvíjen ve Francii. Salome je volně dostupný pro operační systém Linux i Windows. Využíván je zejména pro tvorbu geometrie a sítí v širokém spektru inženýrských a technických simulací. Jeho výhodou je uživatelská přívětivost prostředí (grafické zadávání), modulárnost, rozšiřitelnost a kompatibilita mezi různými formáty geometrie a sítí.

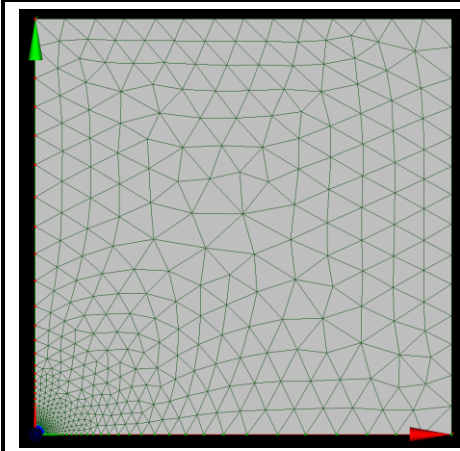
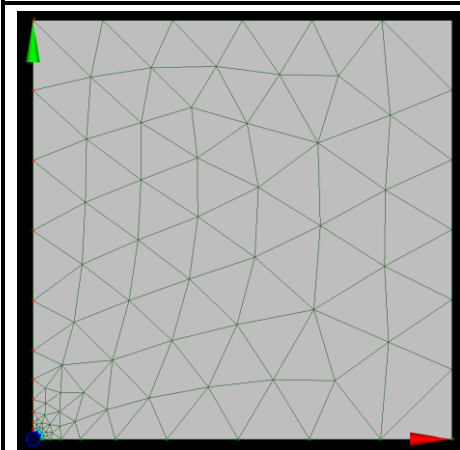
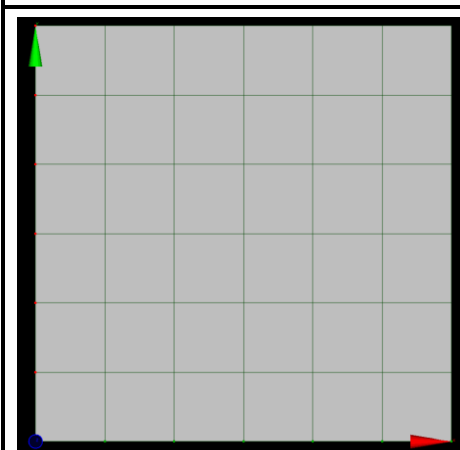
Geometrie modelu je definována v modulu *Shaper*, který umožňuje mimo jiné i tvorbu velice komplikovaných 3D objektů. Jedná se o výkonný CAD software určený pro tvorbu výpočetních modelů. Nejprve je načrtnut přibližný tvar, kterému jsou postupně dodefinovány všechny stupně volnosti (degrees of freedom DoF). Stupně volnosti jsou odebírány přiřazením délek, předepsáním horizontální a vertikální orientace nebo určením polohy. Následně jsou definovány uzly, hrany a plochy modelu. Takto připravený model je možné exportovat do modulu *Geometry*, ve kterém je vytvořena celková skupina, případně zde také mohou být definovány dílčí skupiny geometrie.

V modulu *Mesh* jsou vytvořeny výpočetní sítě modelů pomocí algoritmu *NETGEN 1D – 2D*, které se liší nastavením parametrů sítě. Celkem jsou uvažovány tři sítě MKP. Dvě sítě s proměnlivou velikostí prvků jsou vytvořeny pro tvarově složitější model a hrubá síť s čtvercovými prvky pro druhý model. Síť chladicího potrubí je definována využitím funkce *sub-mesh*. Definovány jsou také skupiny elementů a uzlů, které je možné vytvořit pomocí již vzniklých geometrických skupin nebo manuálním výběrem. Vytvořený model je exportován do souboru typu název .unv.



**Obrázek 21:** Prostředí modulu Mesh softwaru Salome se sítí M1

Použité sítě MKP a jejich parametry jsou srovnány do následující tabulky:

	<b>M1 – jemná síť trojúhelníková</b>	
	0,1 growth factor	506 uzlů
	velikost hran 1,8–84,8 mm	1 023 prvků – 113 hran – 910 ploch
	<b>M2 – hrubá síť trojúhelníková</b>	
	0,5 growth factor	93 uzlů
	velikost hran 50–100 mm	189 prvků – 41 hran – 148 ploch
	<b>M3 – velmi hrubá síť čtvercová</b>	
		49 uzlů
	velikost hran 100 mm	60 prvků – 24 hran – 36 ploch

**Tabulka 6:** Přehled výpočetních sítí a jejich parametrů

### 5.3 Řešení rovnice vedení tepla

Výpočet je proveden programem OOFEM [1], který je volně dostupný a otevřený. Jedná se o univerzální řešič metody konečných prvků s objektovou strukturou, jenž umožňuje řešení inženýrských úloh stavební mechaniky, transportních jevů a mechaniky kontinua [32].

V tomto případě je využit *Transport problem (tm)*, což je v souladu s typem řešené úlohy (nestacionární vedení tepla). Nejprve je vytvořen kontrolní soubor název `.ctrl`, ve kterém jsou specifikovány parametry výpočtu, přiřazení geometrie, ukládaná data řešení a výstupní soubory řešení. Nejdůležitější části kontrolního souboru jsou vysvětleny na kontrolním souboru pro síť M1 bez uvážení vlivu hydratace (`M1LDPEtm.ctrl`).

Na prvním řádku je definován název výstupního souboru, druhý řádek umožňuje zadat popis řešené úlohy:

```
M1LDPEtm.out
Test M1 from Salome-heat conduction
```

Dále je definována úloha, předepsané časy řešení, parametr časové diskretizace, uvažovaná přesnost, počet exportních modulů:

```
TransientTransport nsteps 81 prescribedtimes 81 1.e-4 ... 3600. ...
36000. ... 360000. ... 720000. ... 1800000. ... 3600000. rtol 1.e-4
alpha 0.6 lstype 1 lstol 1e-5 lsiter 200 lsprecond 1 renumber 1
exportfields 1 5 nmodules 1
```

Využit je exportní modul *vtkxml*, který umožňuje interpretaci v programu Paraview. V souboru jsou uloženy informace o použité výpočetní síti a příslušné výsledky. Stanoven je také výstup přímo příkazového řádku:

```
vtkxml tstep_all domain_all primvars 1 6 vars 2 39 56 stype 1
timescale 2.7777778e-4
domain HeatTransfer
OutputManager tsteps_out { 34 43 59 65 72 81 } dofman_output { 2 3 6
17 (67 96) 4 5 7 8 (40 66) }
```

Tepelné vlastnosti betonu jsou uvažovány konstantní hodnotou s ohledem na normu ČSN 73 1208:

*Objemová hmotnost* ..... 2 400 kg m<sup>-3</sup>  
*Součinitel tepelné vodivosti* ..... 1,9 W m<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>  
*Měrná tepelná kapacita* ..... 870 J kg<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>

Z ekonomického hlediska je vybráno potrubí LDPE 32×4,4 mm, které je primárně určeno pro venkovní rozvod pitné vody. Potrubí je poměrně dobře tvarovatelné a vyznačuje se nízkým součinitelem tepelné vodivosti, který v případě tohoto použití není však žádoucí. Tepelné vlastnosti LDPE potrubí nejsou prodejci a výrobci často uváděny, proto došlo k odhadu vlastností dle podkladů zahraničních výrobců:

*Objemová hmotnost* ..... 920 kg m<sup>-3</sup>  
*Součinitel tepelné vodivosti* ..... 0,3 W m<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>  
*Měrná tepelná kapacita* ..... 1 900 J kg<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>

Materiálové vlastnosti jsou v kontrolním souboru OOFEM vyjádřeny:

```
SimpleTransportCS 1 thickness 1.0 mat 1 set 1
SimpleTransportCS 2 thickness 1.0 mat 2 set 2
#Concrete
IsoHeat 1 d 2400 k 1.9 c 870
#Cooling pipe quarter
IsoHeat 2 d 920 k 0.3 c 1900
```

Chlazení je vyjádřeno Dirichletovou okrajovou podmínkou, uzlům vnitřní stěny chladicího potrubí je předepsána konstantní teplota 20 °C:

```
BoundaryCondition 1 loadTimeFunction 1 dofs 1 10 values 1 20.0 set 4
```

Počáteční podmínku představuje teplota, která je z důvodu hydratace cementu uvažována hodnotou 50 °C:

```
InitialCondition 1 Conditions 1 u 50.0 dofs 1 10 set 3
```

Materiály a podmínky jsou přiřazeny skupinám set, které je potřeba typově definovat a přiřadit geometrickým skupinám z programu Salome. V případě prvku je definován použitý typ – trojúhelník pro teplotní analýzu.

```
set 1 elements
set 2 elements
set 3 nodes
set 4 nodes

group beton
elemprop set 1
etype[41] Tr1ht
group trubka
elemprop set 2
etype[41] Tr1ht

group nodesall
nodeprop set 3

group nodespipe
nodeprop set 4
```

Následně pomocí skriptu *unv2oofem.py* je z kontrolního souboru společně se souborem popisujícím geometrii (název .unv) vytvořen vstupní soubor název.in pro program OOFEM. Data obsažená ve vstupním souboru jsou zapsaná v čitelné struktuře programu, který je po jejich přečtení vyřeší v definovaných modulech OOFEM [32]. Spuštění programu probíhá pomocí příkazového řádku, ve kterém je uveden příkaz s cestou programu OOFEM (lze nastavit uživatelská zkratka) a zadat příkaz pro zahájení řešení vstupního souboru:

```
C:\Users\macho\M1>%oofem% -f M1LDPEtm.in
```

## 5.4 Verifikace modelu

Verifikace modelu je provedena na základě srovnání výsledků MKP a analytického řešení s využitím Besselových funkcí (viz Kapitola 3.6). Uvedené analytické řešení předpokládá použití potrubí s vysokým součinitelem tepelné vodivosti. Teplota na vnější stěně potrubí je předpokládána shodně s teplotou chladicí vody. Tento předpoklad není pro potrubí z materiálu LDPE splněn, a proto musí být geometrie modelu MKP upravena.

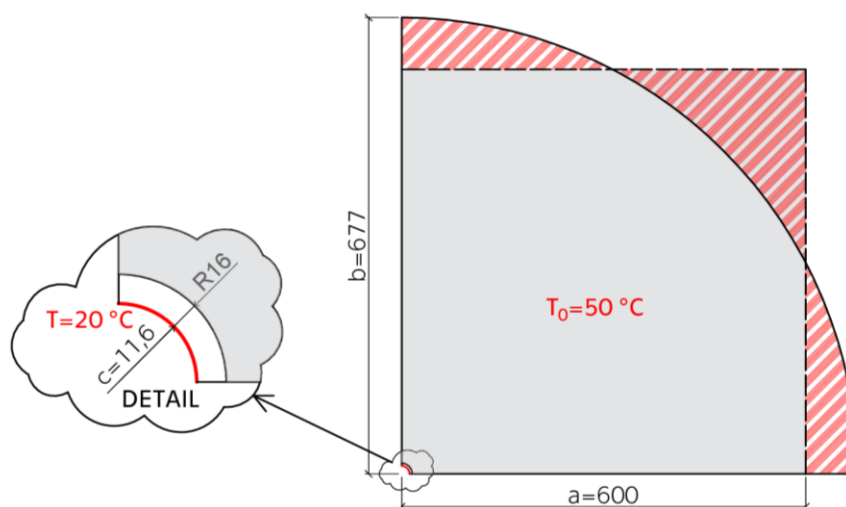
Průřez chladicího potrubí je nahrazen betonem. Původní poloměr vnitřní stěny LDPE potrubí  $r_0$  při idealizaci představuje poloměr vnější stěny chladicí trubky  $c$ . Poloměr  $c$  je uvažován hodnotou 0,0116 m. Vnější poloměr betonového válce  $b$  byl určen na základě zachování celkové tepelné kapacity výseku a uvažovaného dutého betonového válce. Důsledkem tohoto předpokladu je rovnost ploch, ze které je možné vyjádřit vnější poloměr  $b$ :

$$b = \sqrt{\frac{4 a^2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,6^2}{\pi}} \quad (5.1)$$
$$b = 0,677 \text{ m}$$

Poměr vnějšího a vnitřního poloměru uvažovaného dutého betonového válce lze dopočítat:

$$b/c = 58,364 \quad (5.2)$$

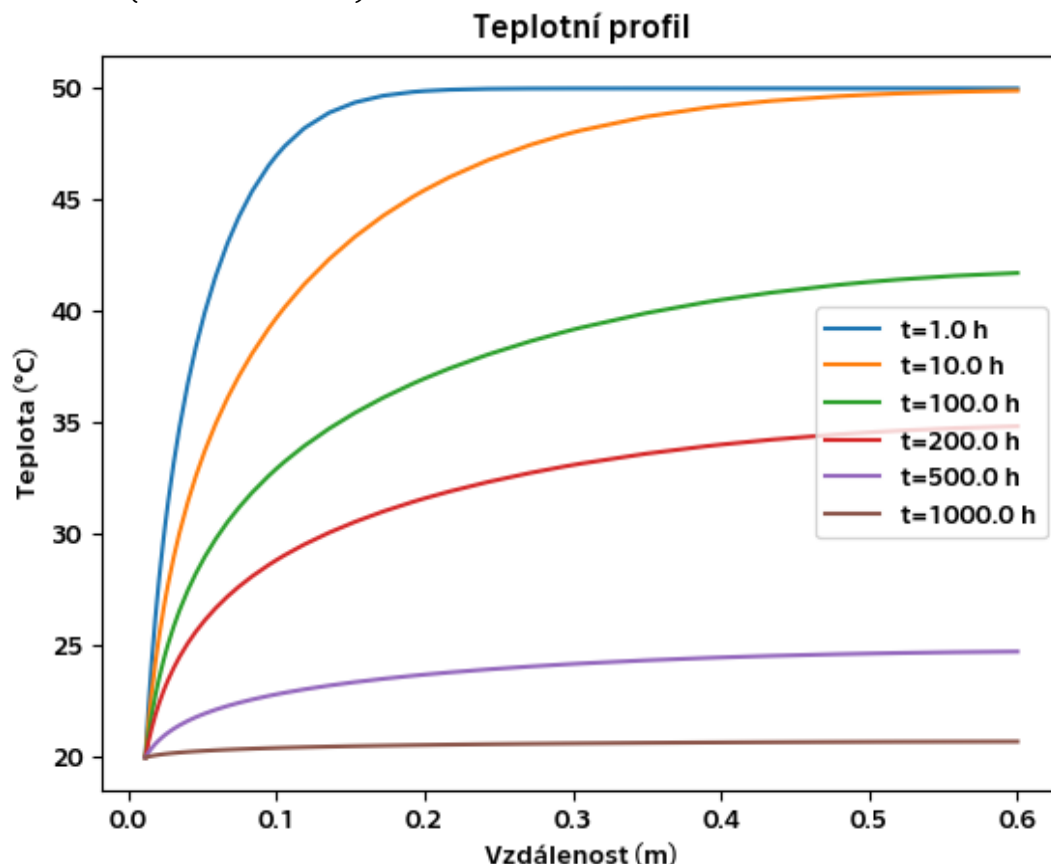
Geometrie uvažovaného analytického modelu (dutý betonový válec) je graficky porovnána s výpočtním modelem MKP (viz Obrázek 22).



**Obrázek 22:** Porovnání geometrie modelů (rozměry okótovány v mm)

Pro uvedený poměr  $b/c$  je třeba vyřešit charakteristickou rovnicí (3.26) a dohledat kořeny řešení. Použito je prvních 10 kořenů rovnice. Tento počet kořenů je možné považovat za dostatečný, řešení v čase 1 h je stabilní a neprojevuje fluktuaci.

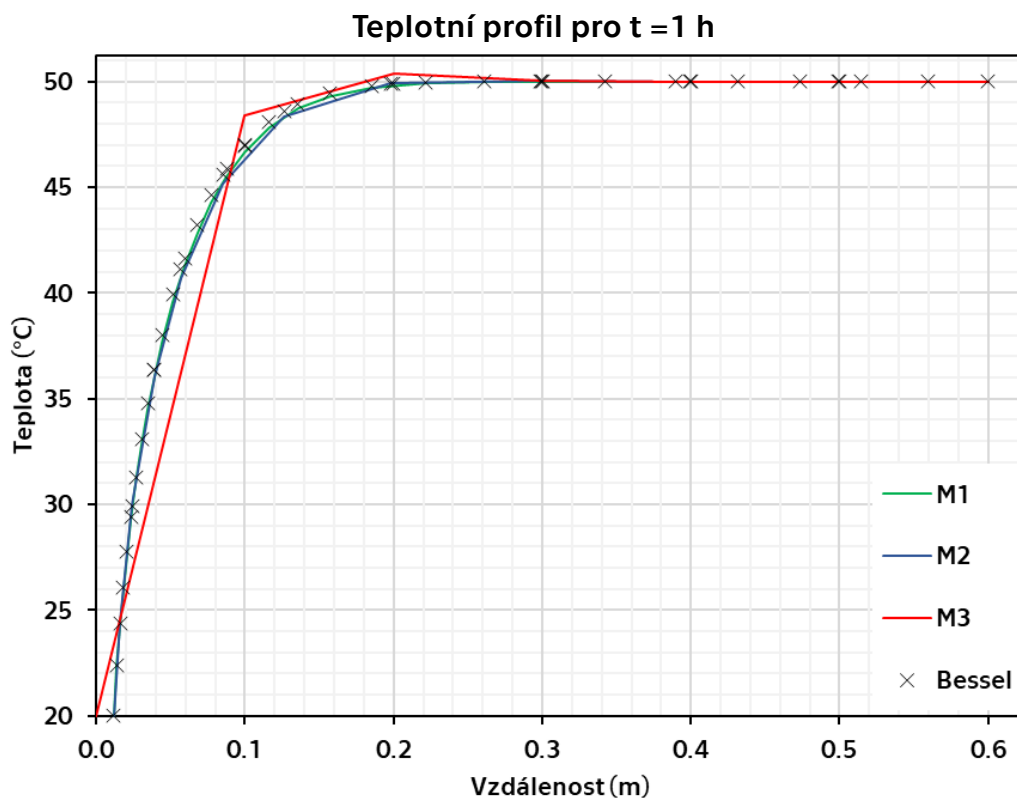
Hodnoty teploty analytického řešení jsou vyjádřeny v závislosti na vzdálenosti od středu potrubí a čase. Analytické řešení je implementováno v programovacím jazyce Python a je obsahem přílohy práce (viz Příloha A). Analytické řešení v časech  $t=1, 10, 100, 200, 500, 1\,000$  h je graficky shrnuto (viz Obrázek 23).



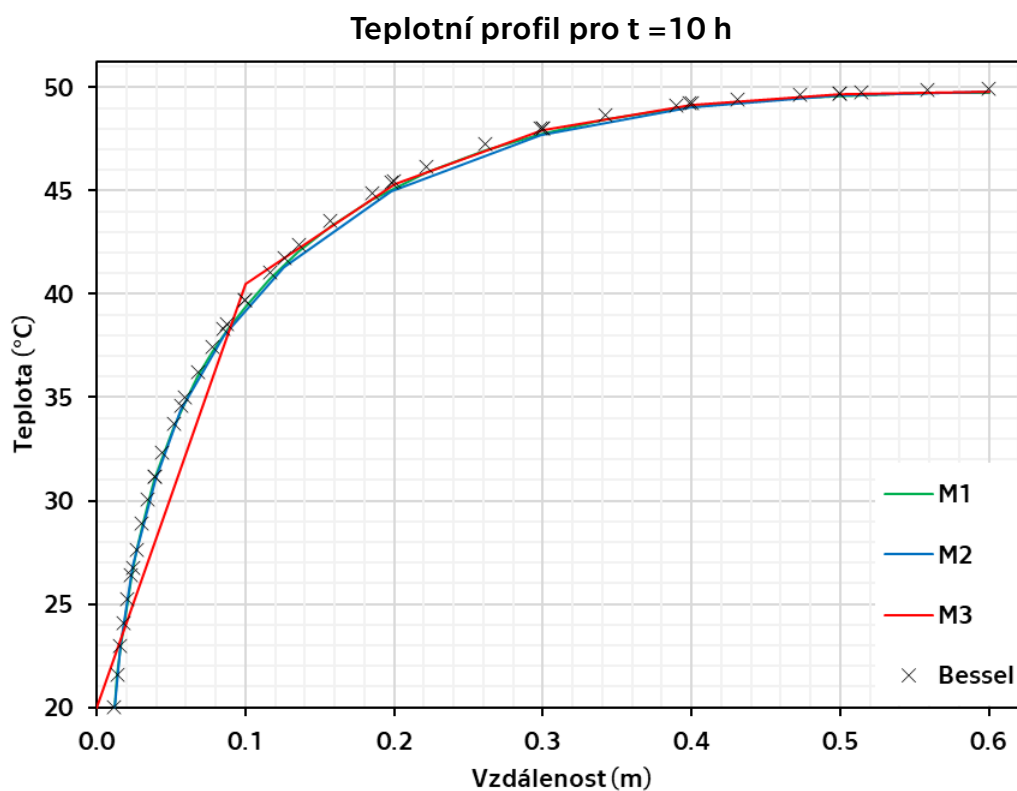
**Obrázek 23:** Srovnání teplotních profilů analytického řešení v různých časech

Uvažované vzdálenosti pro vyjádření analytického řešení jsou rovny souřadnici Y uzlů sítě MKP příslušejících ose Y. Tyto body jsou zvoleny z důvodu porovnání přesnosti numerického řešení MKP s analytickým vyjádřením v časech  $t=1, 10, 100, 200, 500$  a  $1\,000$  h (viz Obrázek 24–29).

Výsledky získané MKP dosahují velice dobré shody s analytickým řešením. Ze simulace vyplývá, že zjemnění sítě M2 v místě okrajové podmínky je dostatečné a získaný teplotní průběh je poměrně přesný ve všech vzdálenostech a časech. Teplotní profily získané ze sítě M1 a M2 jsou téměř identické. Síť M3 se poměrně dobře shoduje s analytickým řešením. V případě této sítě je výrazná aproximace do vzdálenosti 0,1 m, která je způsobená absencí uzlů. Tato skutečnost se projevuje zejména v čase  $t=1$  h, kdy je odváděno teplo v blízkosti trubky.

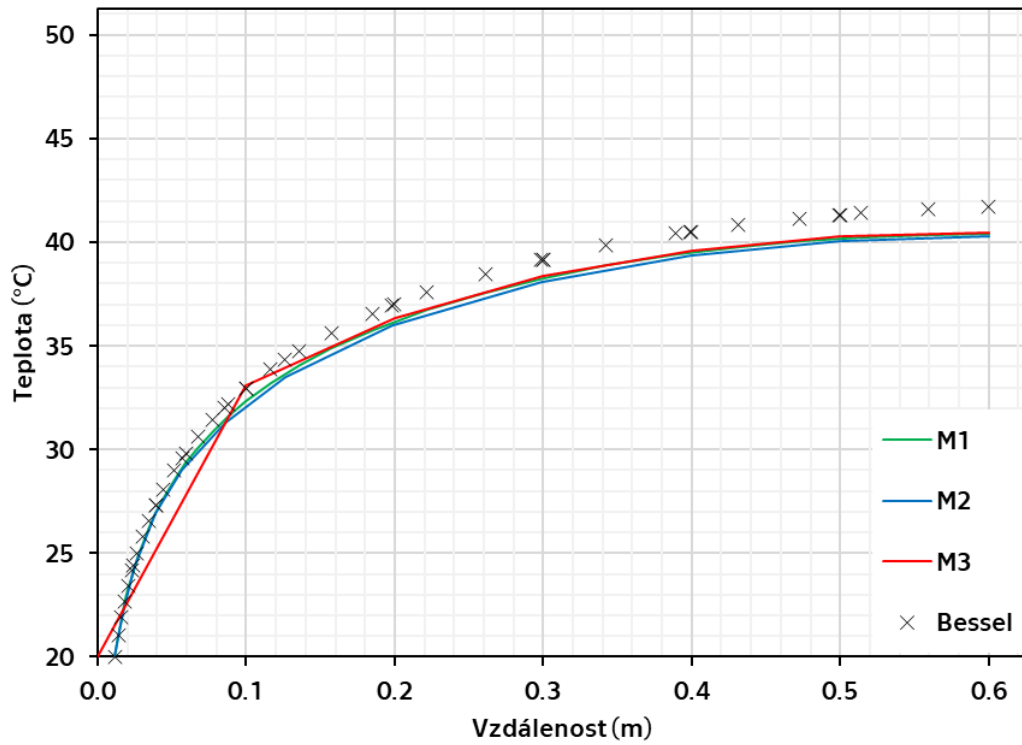


Obrázek 24: Porovnání výsledků MKP s analytickým řešením v čase 1 h



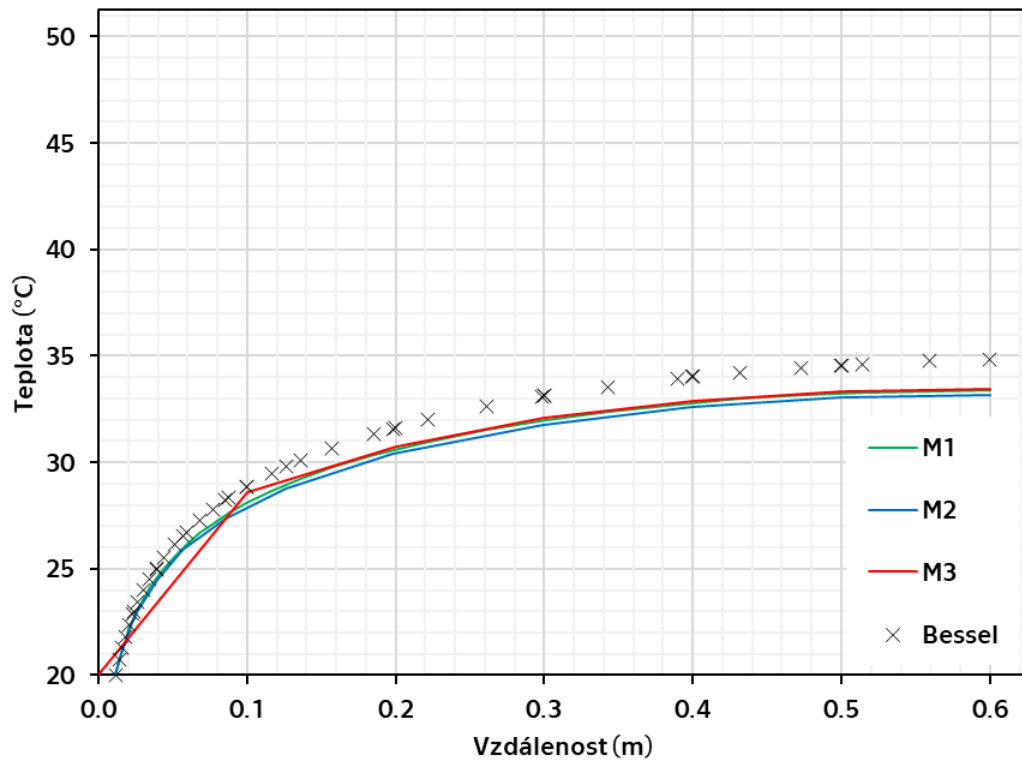
Obrázek 25: Porovnání výsledků MKP s analytickým řešením v čase 10 h

**Teplotní profil pro t = 100 h**



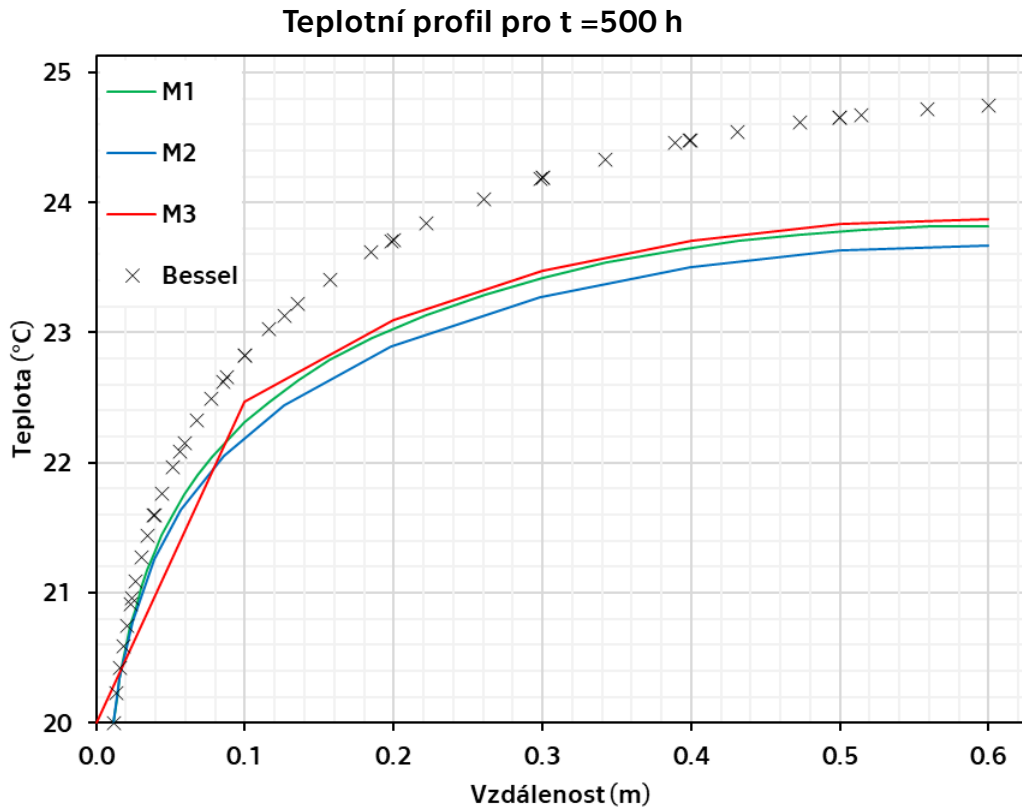
**Obrázek 27:** Porovnání výsledků MKP s analytickým řešením v čase 100 h

**Teplotní profil pro t = 200 h**

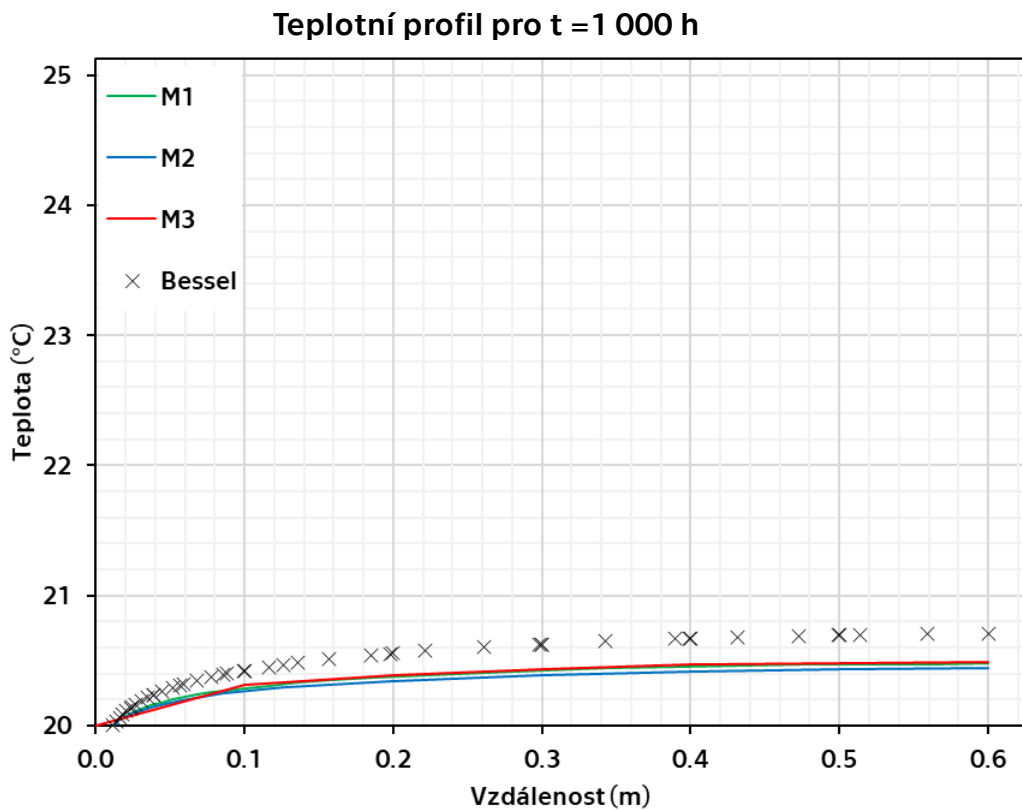


**Obrázek 26:** Porovnání výsledků MKP s analytickým řešením v čase 200 h





**Obrázek 28:** Porovnání výsledků MKP s analytickým řešením v čase 500h



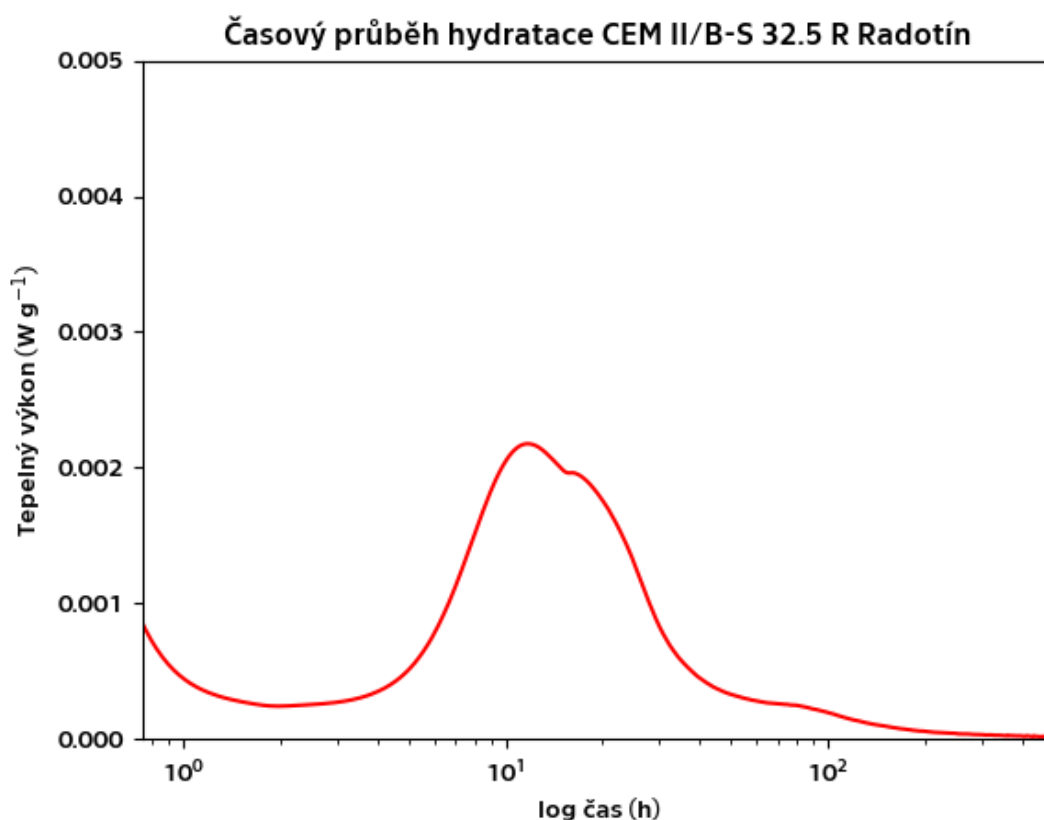
**Obrázek 29:** Porovnání výsledků MKP s analytickým řešením v čase 1000h

## 5.5 Aproximace hydratace cementu exponenciálním modelem a započtení hydratace v simulaci

Pro započtení vlivu hydratace cementu je možné využít různé typy modelů. V současnosti existují i velice vespělé modely, které modelují průběh hydratace a vývoj hydratačního tepla na základě popisu mikroskopické struktury (např. CEMHYD3D). V této simulaci je vliv hydratace zohledněn pomocí exponenciální aproximace záznamu izotermní kalorimetrické zkoušky cementové pasty.

Uvažován je portlandský struskový cement CEM II/B-S 32,5 R (rok 2019) výrobce Českomoravský cement, a.s. ze závodu Radotín. Dle technického listu výrobce je cement vhodný pro velkoobjemové a velkoplošné betonáže, což je charakteristický znak masivních betonových konstrukcí. Použitý cement se také vyznačuje pomalým vývinem hydratačního tepla a středně vysokým množstvím celkového hydratačního tepla.

V poskytnutém souboru se záznamem kalorimetrické zkoušky jsou zapsána data o čase, tepelném toku a celkovém množství uvolněného hydratačního tepla. Uvolněné množství hydratačního tepla je zaznamenáváno 45 minut od počátku hydratace, hodnoty jsou vztaženy k normalizované hmotnosti cementu. Na základě znalosti časového vývoje tepelných toků je možné také vyjádřit časový průběh hydratace cementu (viz Obrázek 30).



**Obrázek 30:** Časový průběh hydratace CEM II/B-S 32,5 R Radotín

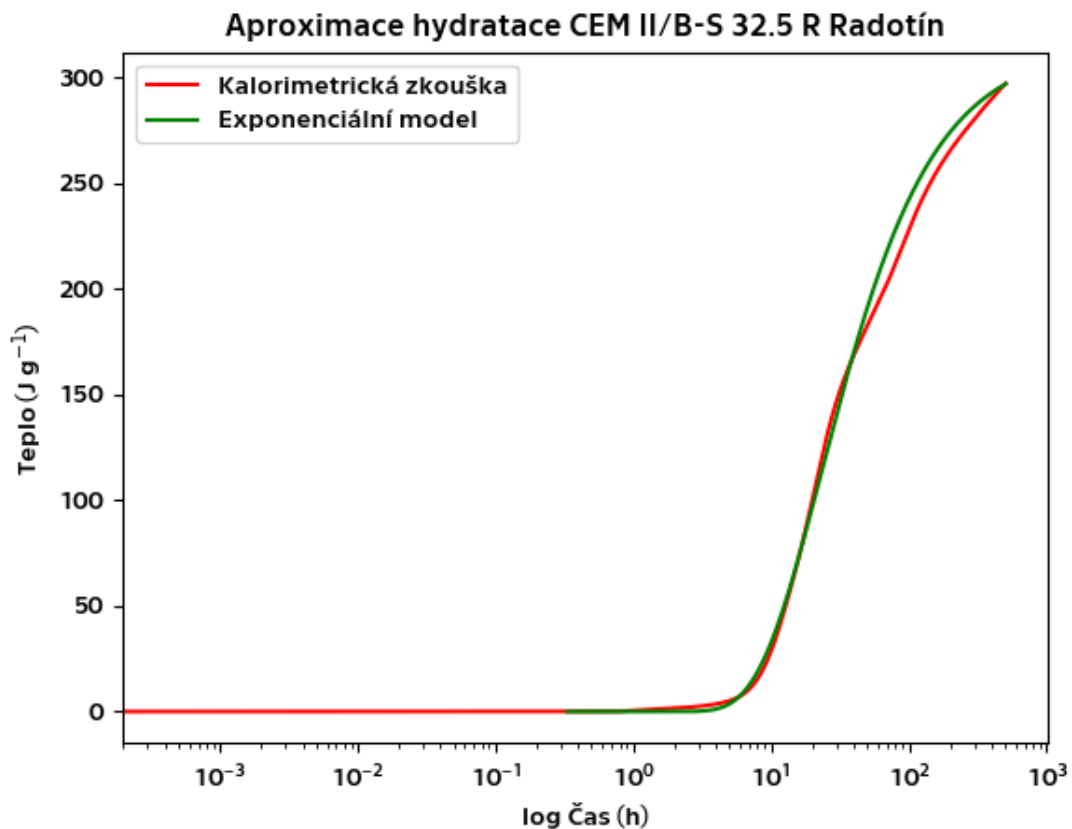
Základní parametry popsané izotermní kalorimetrické zkoušky a zkušební vzorku cementové pasty jsou:

Cement ..... CEM II/B-S 32,5 R Radotín  
 Jemnost mletí (Blaine)..... 326 m<sup>2</sup> kg<sup>-1</sup>  
 Vodní součinitel (w/c)..... 0,40  
 Referenční teplota ..... 20 °C

Vykresleno je také celkové množství uvolňovaného hydratačního tepla, které je porovnáváno s aproximací (viz Obrázek 31). Tvar exponenciální aproximace vývoje hydratačního tepla a uvažované parametry jsou následovné:

$$Q(t) = \alpha_{\infty} e^{-\left(\frac{\tau}{t-t_{cast}}\right)^{\beta}} Q_{pot} \quad (5.3)$$

$\alpha_{\infty}$  ..... stupeň konečné hydratace ( $\alpha_{\infty} = 0,9$ )  
 $\tau$  ..... parametr modelu ( $\tau = 36\,000$  s)  
 $t$  ..... čas  
 $t_{cast}$  ..... uvažovaný počátek hydratace ( $t_{cast} = 1\,200$  s)  
 $\beta$  ..... parametr modelu ( $\beta = 0,925$ )  
 $Q_{pot}$  ..... potenciální celkové hydratační teplo ( $Q_{pot} = 350$  J g<sup>-1</sup>)



Obrázek 31: Aproximace uvolněného množství hydratačního tepla CEM II/B-S 32,5 R

Zvolené parametry exponenciálního modelu vedou k dobré shodě se skutečným průběhem uvolňovaného hydratačního tepla. Rozdíl aproximace a kalorimetrické zkoušky je zejména pozorovatelný od času 50 h, v závěru hydratace však dochází ke snižování rozdílu až téměř k jeho vyrovnání.

Kinetika probíhající hydratace cementu je v běžných podmínkách závislá také na změně teploty vyvolané právě probíhající hydratací. Tento vliv je v prostředí OOFEM vyjádřen ekvivalentním časem  $t_e$ , který nahrazuje běžný čas  $t$  uvažovaný při aproximaci. Ekvivalentní čas je vyjádřen vztahem, který vychází z Arrheniovy rovnice:

$$t_e(T_0) = t(T) e^{\frac{E_a}{R} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)} \quad (5.4)$$

$E_a$  .....aktivační energie ( $E_a = 45\,000 \text{ J mol}^{-1}$ )  
 $R$  .....univerzální plynová konstanta ( $R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ )  
 $T_0$  .....referenční teplota ( $T_0 = 293,15 \text{ K}$ )  
 $T$  .....skutečná teplota

Posledním parametrem uvažovaného materiálového modelu je hmotnostní dávkování cementu, které činí  $320 \text{ kg m}^{-3}$ . Uvažované dávkování cementu dle ČSN 73 1208 odpovídá maximální přípustné hodnotě pro masivní betonové konstrukce vodohospodářských staveb. V případě ostatních typů masivních betonových konstrukcí je dávkování cementu poměrně často vyšší.

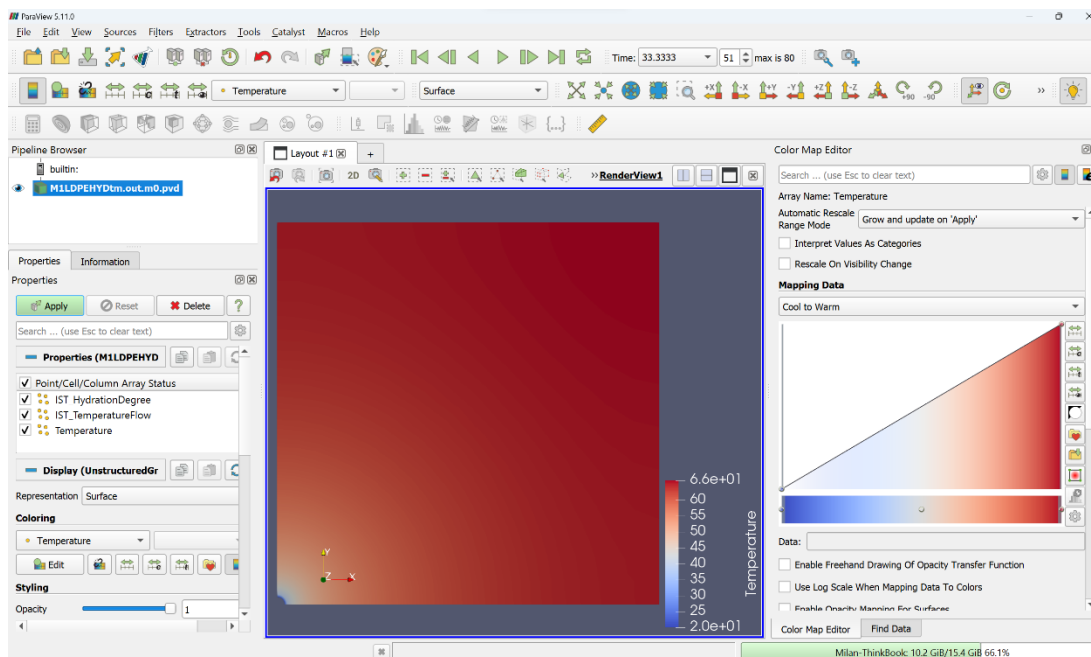
Materiálový model betonu je doplněn o parametry popsané v této části kapitoly, tepelné vlastnosti zůstaly nezměněny. V prostředí OOFEM je materiálový model betonu specifikován následujícím způsobem:

```
HydratingConcreteMat 1 d 2400. k 1.9 c 870 hydrationmodeltype 1
Qpot 350 masscement 320 referenceTemperature 20 tau 36000 beta 0.925
dohinf 0.9 activationenergy 45000 castingTime 1200
```

V případě verifikace modelu nebyla hydratace cementu přímo zohledněna, a proto byla počáteční teplota vyjádřena  $50 \text{ }^\circ\text{C}$ . Nyní je vliv hydratace cementu v modelu vyjádřen exponenciálním modelem uvolňovaného tepla a na základě tohoto důvodu musí být také upravena počáteční podmínka. Nynější počáteční podmínka představuje teplotu ukládané čerstvé betonové směsi. Počáteční teplota čerstvého betonu je uvažována hodnotou  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ , v případě letní betonáže by pravděpodobně byla počáteční teplota vyšší. Teplota čerstvé betonové směsi je zejména ovlivněna teplotou jednotlivých složek betonu, dále také zpracováním, transportem, ukládáním a okolním prostředím.

## 5.6 Zpracování a vyhodnocení výsledků

Výsledkem řešení v prostředí OOFEM je sada výstupních souborů řešení ve všech předpokládaných časech, záznam o proběhlém výpočtu s definovanými výsledky a soubor typu název.out.m.pvd. Otevření tohoto typu souboru je možné v prostředí ParaView 5.11.0. ParaView je rovněž otevřený software určený pro vizualizaci a práci s daty řešení.

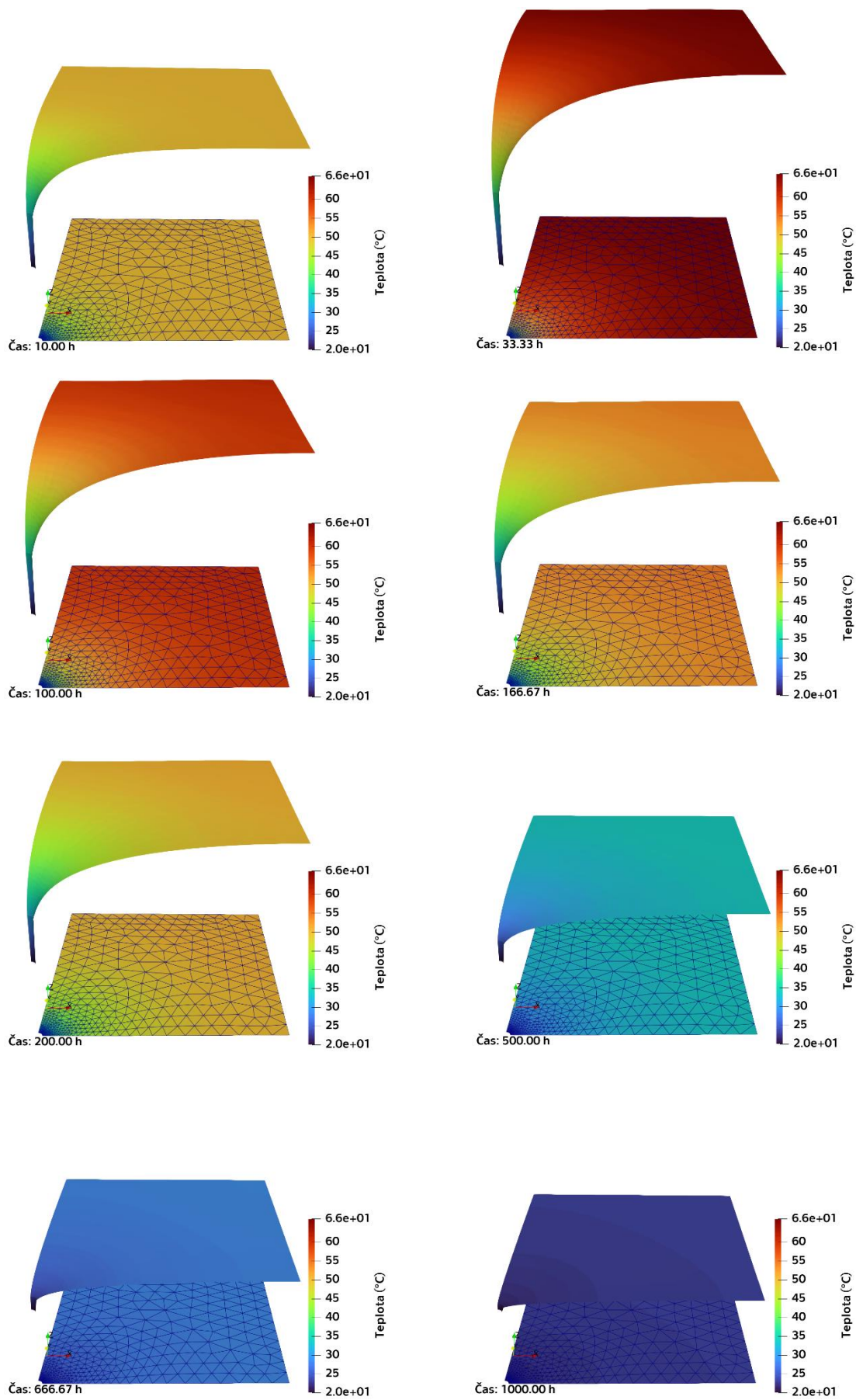


**Obrázek 32:** Prostředí ParaView a defaultní nastavení

Defaultní vizualizace získaných výsledků je rovinná. Náznornější je rozšíření do třetího rozměru, ve kterém je vynesena teplota. Upraven může být také typ barevného zobrazení, písmo a zobrazení času. Upravené nastavení vizualizace lze uložit ve formátu typu název.pvsm.

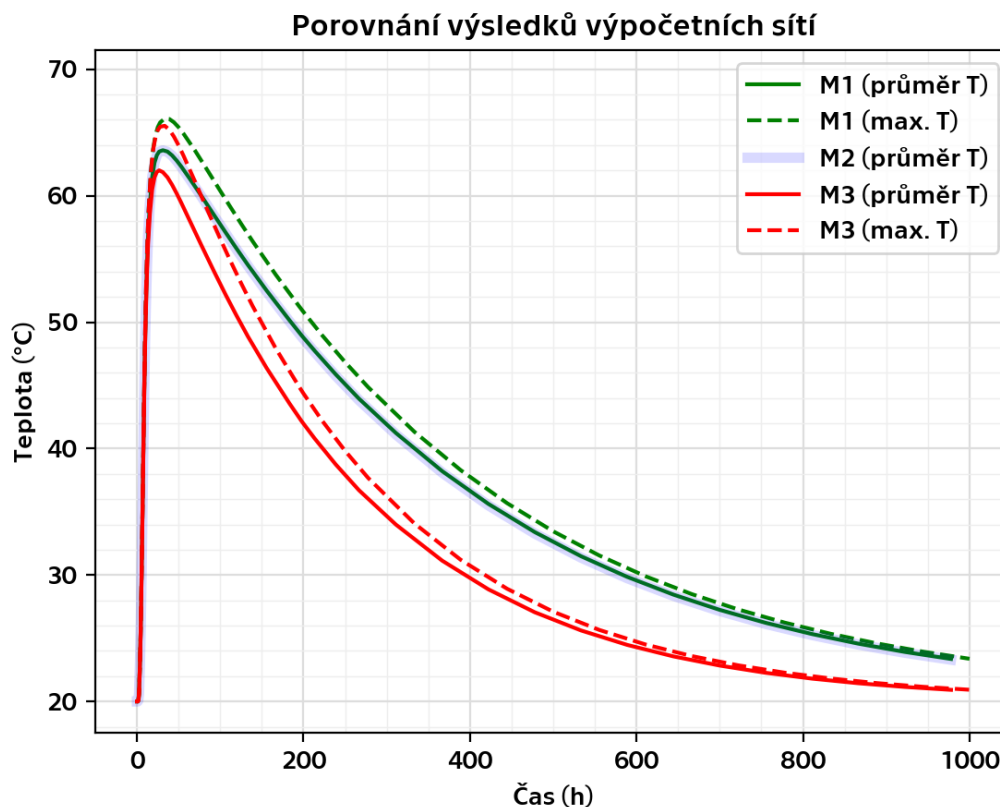
Průběh teplotního pole pro nejjemnější síť M1 včetně uvažované aproximace hydratace je vykreslen celkem v osmi časech (viz Obrázek 33) na následující stránce. Oproti verifikaci nebyl uvažován čas 1 h a byly přidány další tři hodnoty časů. První z těchto časů (33,33 h) odpovídá okamžiku dosažení nejvyšší teploty. Pro tuto variantu nejvyšší teplota dosahuje hodnoty 66,1 °C. Maximální teploty je dosaženo na nejvzdálenějších bodě, což je ve své podstatě správně. Uvažováno je totiž adiabatické prostředí, na okrajích domény nejsou předepsány okrajové podmínky a hrany jsou tudíž dokonale izolovány. Zbylé dva uvažované časy (166,67 h a 666,67 h) odpovídají téměř teplotnímu průběhu v 7 a 28 dnech.

S daty je v ParaView možné dále pracovat, vybraná data lze exportovat a využít v jiném softwaru. Tímto způsobem jsou získána data o maximální teplotě v jednotlivých časech.



**Obrázek 33:** Vizualizace průběhu teplotního pole v závislosti na čase řešení

Výsledné průběhy teplotních polí uvažovaných sítí MKP jsou vůči sobě porovnány pomocí váženého průměru teploty, kde váhu představuje obsah prvků betonové části modelu. Znázorněna je také maximální teplota, která má doplňující charakter.



**Obrázek 34:** Porovnání výsledků výpočetních sítí

Výsledky sítě M1 a M2 jsou téměř totožné, aby bylo možné toto tvrzení graficky potvrdit, musel být pozměněn i styl zobrazení – výsledky průměrných teplot sítě M2 jsou znázorněny širší, průhlednou modrou čarou. Lze tak konstatovat, že síť M2 je vůči síti M1 vhodně optimalizována.

Výsledky nejhrubší sítě M3 se poměrně dobře shodují s výsledky sítě M1 a M2. Rozdíl nejvyšších průměrných teplot je přibližně 2 °C, následně dochází ke zvyšování rozdílu průměrných teplot až do hodnoty 9 °C v čase 266,67 h, po tomto okamžiku se rozdíl průměrných teplot začíná snižovat. V případě maximálních teplot sítí M1 a M3 je rozdíl výsledků méně patrný.

Z hlediska praktického je zajímavější následné porovnání. Porovnání probíhalo na nejpřesnější síti M1. Průběh dvou variant chlazení je porovnán s variantou bez chlazení. Varianty chlazení se od sebe odlišují volbou materiálu potrubí (LDPE, ocel). Rozdílnost geometrie potrubí je zanedbána. Rozdíl maximálních teplot, ani rozdíl maximálních průměrných teplot není příliš významný. Mnohem významnější je rozdíl v rychlosti ochlazování. V případě ocelového potrubí je proces chlazení rychlejší

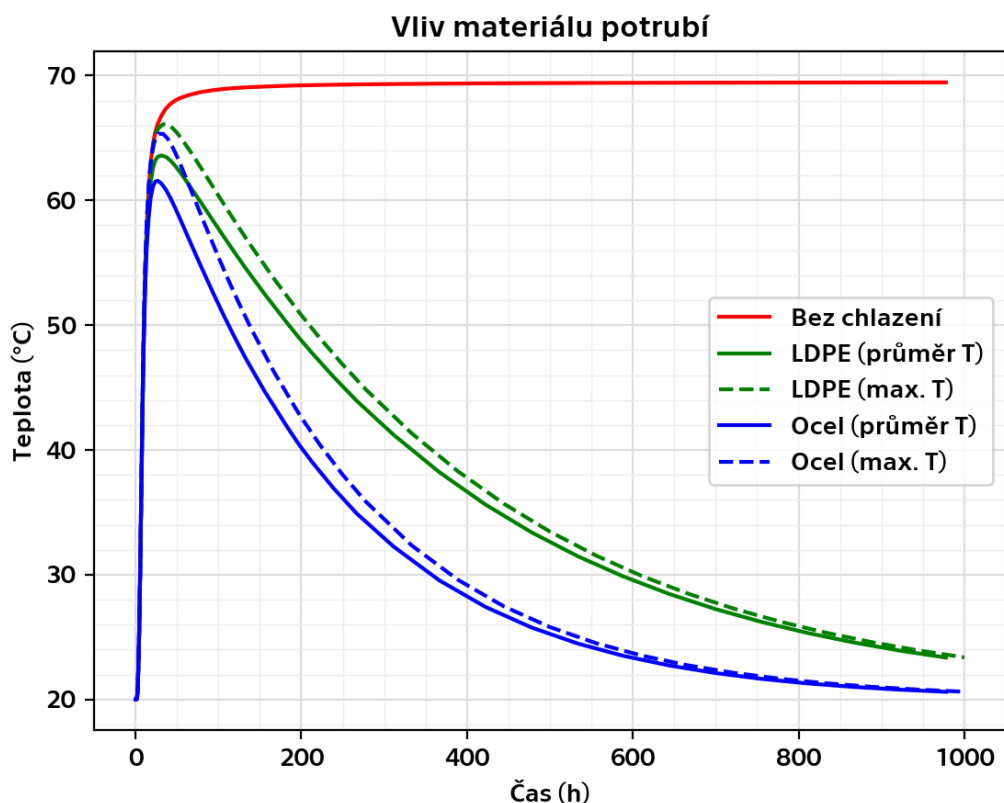
a zřejmě i ovladatelnější. Jedná se o důsledek tepelné vodivosti kovů, které se vyznačují vysokým koeficientem tepelné vodivosti. Značnými nevýhodami, které z grafu nejsou patrné je pracnost instalace ocelového potrubí a značná ekonomická nákladnost.

Uvažované tepelné vlastnosti ocelového potrubí jsou:

Objemová hmotnost .....  $7\,850\text{ kg m}^{-3}$

Součinitel tepelné vodivosti .....  $50\text{ W m}^{-1}\text{ K}^{-1}$

Měrná tepelná kapacita .....  $460\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$



**Obrázek 35:** Porovnání vlivu materiálu potrubí

Na základě znalosti průměrné teploty vnější stěny chladičoho potrubí je dle Fourierova zákona dopočítán chladičí výkon potrubí uvažovaných materiálových variant:

$$q = \frac{\lambda}{s} \Delta T \pi (D - s) \tag{5.5}$$

$q$  ..... chladičí výkon potrubí ( $\text{W m}^{-1}$ )

$\Delta T$  ..... teplotní spád pře stěnu potrubí

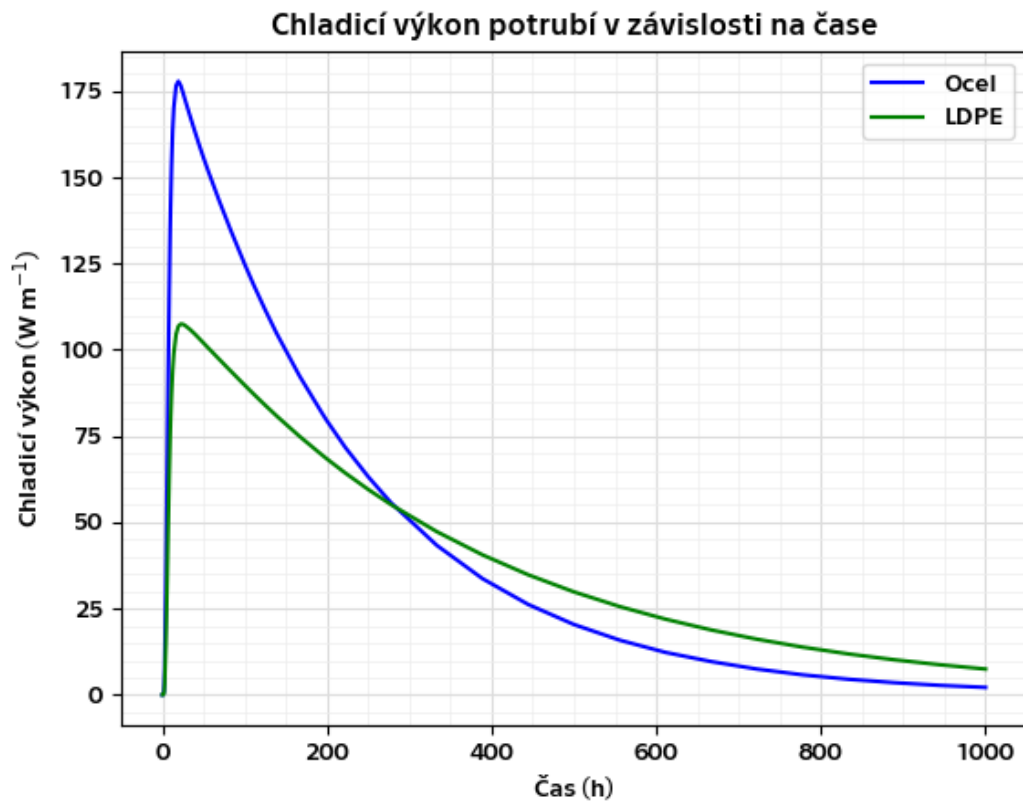
$D$  ..... vnější průměr potrubí ( $D = 0,032\text{ m}$ )

$s$  ..... tloušťka stěny potrubí ( $s = 0,0044\text{ m}$ )

$\pi(D - s)$  ..... obvod střednice potrubí



Pro ocelové potrubí tento výkon dosahuje hodnoty  $177,85 \text{ W m}^{-1}$  v čase 19,44 h při teplotním spádu  $0,18 \text{ °C}$  přes stěnu potrubí. Potrubí z materiálu LDPE dosahuje maximálního chladicího výkonu  $107,49 \text{ W m}^{-1}$  v čase 22,22 h při teplotním spádu  $18,18 \text{ °C}$  přes stěnu potrubí. Časový průběh chladicího výkonu potrubí je graficky znázorněn (viz Obrázek 36).



**Obrázek 36:** Chladicí výkon potrubí v závislosti na čase



## Závěr

První kapitola této práce se věnuje problematice masivních betonových konstrukcí. Nejvyšší pozornost byla zejména kladena teplotní problematice. Popsány byly požadavky norem, které jsou doplněny o praktický a teoretický význam. Poměrně podrobně byly také v druhé kapitole uvedeny dva příklady aplikace vodního chlazení v České republice. Opomenuta nebyla ani první aplikace vodního chlazení, za kterou je považována výstavba Hooverovy přehrady v USA.

V následující třetí kapitole došlo k formulaci základních fyzikálních souvislostí, jako je popis tepelných vlastností betonu, Fourierův zákon, formulace rovnice vedení tepla, okrajové podmínky problému a možné způsoby jejího řešení. Čtvrtá kapitola věnovala pozornost metodě konečných prvků se zaměřením na vedení tepla, popsána byla také geometrická diskretizace a typy užívaných prvků v praxi.

Nejrozsáhlejší částí práce je pátá kapitola, ve které je provedena teplotní analýza výseku části masivní betonové konstrukce. V práci byl sestaven 2D model výseku betonové konstrukce se započtením vlivu hydratace betonu a vodního chlazení. K tvorbě a zprovoznění modelu byly využity volně dostupné programy. Výpočet vedení tepla byl proveden pomocí softwaru OOFEM. Hlavním cílem této části práce bylo srovnání vlivu volby velikosti prvků sítě na přesnost výsledného řešení. Závěrem lze konstatovat, že i poměrně hrubá síť dosahuje dobrých výsledků popisu teplotního pole. Zkoumán byl také vliv volby materiálu potrubí na celkový průběh chlazení. Volba materiálu významně ovlivňuje celkovou dobu chlazení. Použité výpočetní modely byly verifikovány srovnáním s řešením pomocí Besselových funkcí.

Výsledky teplotní analýzy jsou důležitým vstupním podkladem pro modelování vývoje trhlin. Možným budoucím rozšířením práce by mohlo být vytvoření odpovídajících termo-mechanických modelů a následné porovnání výsledků. Hydratace cementu byla v této práci aproximována exponenciálním modelem na základě poskytnutého záznamu průběhu izotermní kalorimetrické zkoušky. Nabízí se tak i možnost hlubšího pochopení procesu hydratace cementu a seznámení se s vyspělejšími způsoby modelování průběhu hydratace a jejich propojení s teplotní analýzou. Případně by bylo také možné osvojit si laboratorní průběh izotermní kalorimetrické zkoušky.



# Seznam použité literatury

- [1] PATZÁK B. *OOFEM - an object-oriented simulation tool for advanced modeling of materials and structures*. Acta Polytechnica, 52(6):59–66, 2012.
- [2] *Technické kvalitativní podmínky staveb pozemních komunikací: Kapitola 18 Betonové konstrukce a mosty*. 4. vydání. Praha: Ministerstvo dopravy Odbor pozemních komunikací, 2016.
- [3] ČSN EN 13670 (732400): *Provádění betonových konstrukcí*. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2010.
- [4] ČSN 73 1208 (731208) A: *Navrhování betonových konstrukcí vodohospodářských objektů*. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2010.
- [5] ACI COMMITTEE 207. *ACI 207.1-21: Mass Concrete—Guide*. American Concrete Institute, 2022. ISBN 978-1-64195-124-1.
- [6] PAVLÍKOVÁ M. a KEPPERT M. *Chemie stavebních materiálů*. 1. vydání. Praha: Nakladatelství ČVUT, Thákurova1, 160 41 Praha 6, 2009. ISBN 978-80-01-04237-3.
- [7] SVOBODA L. *Stavební hmoty* [online]. 4. vydání. Praha, 2018 [cit. 2023-05-01]. Dostupné z: <https://k123.fsv.cvut.cz/media/subjects/files/123SH01/kniha-stavebni-hmoty.pdf>
- [8] KURDOWSKI W. *Cement and Concrete Chemistry*. Dordrecht Heidelberg New York London: Springer, 2014. ISBN 978-94-007-7944-0.
- [9] KASAL P. a KEPPERT M. Měření hydratačního tepla cementu. *Beton TKS*. 2022.
- [10] ŠMILAUER V., REITERMAN P., ŠULC R. and SCHORŮK P. *Crack-Resistant Cements under Drying: Results from Ring Shrinkage Tests and Multi-Physical Modeling*. Materials. 2022, **15**:12. ISSN 1996-1944.
- [11] ČSN EN 197-1 *Cement – část 1: Složení, specifikace a kritéria shody cementů pro obecné použití*. Praha: Český normalizační institut, 2001.
- [12] BAMFORTH P. B. *Early-age thermal crack control in concrete*. Ciria. London, 2007.
- [13] ČSN EN 206+A2 (732403): *Beton - Specifikace, vlastnosti, výroba a shoda*. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2021.
- [14] *Technické kvalitativní podmínky staveb státních drah: Kapitola 17 Beton pro konstrukce*. Praha: Správa železnic, státní organizace, 2022.
- [15] *Technické kvalitativní podmínky staveb státních drah: Kapitola 18 Betonové konstrukce a mosty*. Praha: Správa železnic, státní organizace, 2022.
- [16] ACI COMMITTEE 207. *ACI 207.4-20: Cooling and Insulating Systems for Mass Concrete*. American Concrete Institute, 2020. ISBN 978-1-64195-124-1.
- [17] ACI COMMITTEE 207. *ACI 207.2-07: Report on Thermal and Volume Change Effects on Cracking of Mass Concrete*. American Concrete Institute, 2007. ISBN 978-1-64195-124-1.
- [18] ŠMILAUER V., REITERMAN P., HAVLÁSEK P. a HUŇKA P. *Předběžný návrh betonů a postupu výstavby návodního líce polderu Kutřín na řece Krounka*. Beton TKS. 2020, **206**, 44-49. ISSN 1213-3116.
- [19] STEVENS J. E. *Hoover Dam: An American Adventure*. 1st Edition. Norman, OK: University of Oklahoma Press, 1988. ISBN 978-0-8061-2283-0.
- [20] HILTZIK M. A. *Colossus: Hoover Dam and the Making of the American Century*. 1st Edition. New York: Free Press, 2010. ISBN 978-1-4165-3216-3.
- [21] BOFANG Zhu. *Thermal Stresses and Temperature Control of Mass Concrete*. 1st Edition. Elsevier, 2014. ISBN 978-0-12-407723-2.
- [22] VÍTEK J., KVASNIČKA V., NĚMEC P., KALNÝ M., TVRZ A., BROŽ R. a ŠPIČKA M. *Obloukový most přes Oparenské údolí a komplikace před jeho dokončením*. Časopis

- Stavebnictví (casopisstavebnictvi.cz) [online]. 2010, (092010) [cit. 2023-05-14]. Dostupné z: <https://www.casopisstavebnictvi.cz/clanky-obloukovy-most-pres-oparenske-udoli-a-komplikace-pred-jeho-dokoncenim.html>
- [23] ŠMILAUER V., VÍTEK J., PATZÁK B. a BITTNAR Z. *Optimalizace chlazení oblouku Oparenského mostu*. Beton TKS. 2011, (042011), 30-33. [online]. [cit. 2023-03-25]. Dostupné z: [https://mech.fsv.cvut.cz/~smilauer/pdf/Optimalizace%20chlazeni%20oblouku\\_Smilauer.pdf](https://mech.fsv.cvut.cz/~smilauer/pdf/Optimalizace%20chlazeni%20oblouku_Smilauer.pdf)
- [24] *Holka se začala budovat. Nová lávka přes Vltavu spojí rozvíjející se čtvrti*. ASB architektura stavebnictví byznys [online]. [cit. 2023-03-25]. Dostupné z: <https://www.asb-portal.cz/stavebnictvi/inzenyrske-stavby/mosty/holka-se-zacala-budovat-nova-lavka-pres-vltavu-spoji-rozvijejici-se-ctvrti>
- [25] ŠMILAUER V. *Technická zpráva: Termo-mechanické výpočty rozpletu lávky Holešovice-Karlín*. [nepublikovaný dokument] Horoměřice, 2022.
- [26] SCHINDLER, A., RUIZ J., RASMUSSEN R., KIM P. and CHANG G. *Concrete temperature modeling and strength prediction using maturity concepts in the FHWA HIPERPAV software*. In: 7th international conference on concrete pavements. Orlando (FL), USA, 2001.
- [27] BAEHR H. and STEPHAN K. *Heat and Mass Transfer*. 2nd Edition. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006. ISBN 13 978-3-540-29526-6.
- [28] COURANT R. *Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*. Bulletin of the American Mathematical Society 49. 1943, 1–23.
- [29] TURNER M., CLOUGH R., MARTIN H. and TOPP L. *Stiffness and deflection analysis of complex structures*. Journal Aeronautical Science 23. 1956, 805–824.
- [30] BITTNAR Z. a ŠEJNOHA J. *Numerické metody mechaniky 2*. 1. vydání. Praha: Vydavatelství ČVUT, Žitná 4, 166 35 Praha 6., 1992. ISBN 80-01-00901-7.
- [31] SVÁČEK P. a FEISTAUER M. *Metoda konečných prvků*. 1. vydání. Praha: Nakladatelství ČVUT, Thákurova 1, 160 41 Praha 6, 2006. ISBN 80-01-03522-0.
- [32] PATZÁK B. *OOFEM project home page* [online]. In: . 2000 [cit. 2023-05-01]. Dostupné z: <http://www.oofem.org>
- [33] *Under the Microscope: Cement, ASR and DEF*. Precast Inc. Magazine [online]. National Precast Concrete Association, 2018 [cit. 2023-04-16]. Dostupné z: <https://precast.org/2018/07/under-the-microscope-cement-asr-and-def/>
- [34] KRAUB M. and ROSTÁSY F. *Control of early-age cracking of massive concrete structures under uncertain parameters*. 2004.
- [35] *Hoover Dam - Construction*. Las Vegas Sun [online]. [cit. 2023-04-16]. Dostupné z: <https://lasvegassun.com/photos/galleries/1905/may/15/hoover-dam---construction/1133/>
- [36] ROGERS J. D. *Hoover Dam: First Joint Venture and Construction Milestones in Excavation, Geology, Materials Handling, and Aggregates*. Semantic Scholar [online]. 2010 [cit. 2023-04-16]. DOI:10.1061/41141(390)8. Dostupné z: <https://www.semanticscholar.org/paper/Hoover-Dam%3A-First-Joint-Venture-and-Construction-in-Rogers/f3e8ffa62986c6b14acccd2731ce246b3a07f32c/figure/24>

# Seznam obrázků

<b>Obrázek 1:</b> Časový vývoj tepelného výkonu při hydrataci alitu [8] .....	17
<b>Obrázek 2:</b> Srovnání celkového uvolněného tepla běžně dostupných směsných portlandských cementů v České republice [10] .....	18
<b>Obrázek 3:</b> Mikroskopický snímek vyplnění vzduchového póru ettringitem [33] .....	19
<b>Obrázek 4:</b> Pravděpodobný vznik teplotní trhliny v místě spojení stěnové a deskové konstrukce [34] .....	20
<b>Obrázek 5:</b> Schéma postupu betonování masivní konstrukce [3].....	21
<b>Obrázek 6:</b> Pohled na betonáž jednotlivých bloků [35].....	25
<b>Obrázek 7:</b> Schéma chladicího systému při výstavbě Hooverovy přehrady [36].....	26
<b>Obrázek 8:</b> Příčný řez mostu nad podporou a v poli [22].....	27
<b>Obrázek 9:</b> Pohled na výstavbu oblouku mostu [22].....	28
<b>Obrázek 10:</b> Propojení úrovní modelu [23] .....	28
<b>Obrázek 11:</b> Pole teplot bez vodního chlazení v čase 43 h [23].....	29
<b>Obrázek 12:</b> Srovnání průběhu pole teplot a napětí v čase 22 h (označení 5a, 6a) a 100 h (označení 5b, 6b) tvrdnutí betonu [23].....	29
<b>Obrázek 13:</b> Pohled na rozplet lávky HolKa (foto poskytl prof. Ing. V. Šmilauer, Ph.D., DSc.) .....	30
<b>Obrázek 14:</b> Návrh rozmístění chladicího potrubí v mostovce [25] .....	31
<b>Obrázek 15:</b> Znázornění teplotního gradientu a tepelného toku vůči izotermám [27]....	35
<b>Obrázek 16:</b> Srovnání hexagonální a čtvercové sítě .....	36
<b>Obrázek 17:</b> Výpočetní model dle [21] .....	40
<b>Obrázek 18:</b> Grafické znázornění bazových funkcí.....	46
<b>Obrázek 19:</b> Schéma fází procesu MKP .....	47
<b>Obrázek 20:</b> Porovnání geometrie modelů (rozměry okótovány v mm).....	48
<b>Obrázek 21:</b> Prostředí modulu Mesh softwaru Salome se sítí M1 .....	49
<b>Obrázek 22:</b> Porovnání geometrie modelů (rozměry okótovány v mm).....	53
<b>Obrázek 23:</b> Srovnání teplotních profilů analytického řešení v různých časech .....	54
<b>Obrázek 24:</b> Porovnání výsledků MKP s analytickým řešením v čase 1 h .....	55
<b>Obrázek 25:</b> Porovnání výsledků MKP s analytickým řešením v čase 10 h.....	55
<b>Obrázek 26:</b> Porovnání výsledků MKP s analytickým řešením v čase 200 h .....	56
<b>Obrázek 27:</b> Porovnání výsledků MKP s analytickým řešením v čase 100 h .....	56
<b>Obrázek 28:</b> Porovnání výsledků MKP s analytickým řešením v čase 500 h .....	57
<b>Obrázek 29:</b> Porovnání výsledků MKP s analytickým řešením v čase 1000 h .....	57
<b>Obrázek 30:</b> Časový průběh hydratace CEM II/B-S 32,5 R Radotín.....	58
<b>Obrázek 31:</b> Aproximace uvolněného množství hydratačního tepla CEM II/B-S 32,5 R...	59
<b>Obrázek 32:</b> Prostředí ParaView a defaultní nastavení.....	61
<b>Obrázek 33:</b> Vizualizace průběhu teplotního pole v závislosti na čase řešení .....	62
<b>Obrázek 34:</b> Porovnání výsledků výpočetních sítí.....	63
<b>Obrázek 35:</b> Porovnání vlivu materiálu potrubí.....	64
<b>Obrázek 36:</b> Chladicí výkon potrubí v závislosti na čase .....	65





# Seznam tabulek

<b>Tabulka 1:</b> Přehled základních slínkových minerálů [7] .....	17
<b>Tabulka 2:</b> Požadavky na teplotu čerstvého betonu při dodání a v závislosti na klimatických podmínkách (Tabulka 9 TKP 17) [14] .....	23
<b>Tabulka 3:</b> Porovnání výsledků simulací [25] .....	31
<b>Tabulka 4:</b> Přehled tepelných vlastností jednotlivých složek [21].....	33
<b>Tabulka 5:</b> Přehled základních plošných prvků a vyjádření aproximace teploty .....	46



# Příloha A

## Zdrojový kód pro řešení teplotního pole dutého válce

```
from scipy.special import *
from scipy.optimize import fsolve
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#Solution of hollow cylinder cooled from inside, Z. Bofang: Thermal
Stresses and Temperature Control of Mass Concrete, p.347

#Model properties
rho=2400 #density (kg/m3)
c=870 #thermal capacity (J/kg/K)
lamb=1.7 #thermal conductivity (W/m/K)

a=lamb/c/rho

c=0.0116 #inner radius of concrete (m)
b=58.3644*c #outer radius of concrete (m) - 0.677 m
T0=50 #initial temperature (°C)
w0=20 #water temperature (°C)

#Assuming b/c=58.3644 for roots
alphaNb=np.array([0.77133729, 4.36876569, 7.6523885, 10.89744648,
14.12719427, 17.34869056, 20.56501419, 23.7777894, 26.98798069,
30.19620896])
alphaN = alphaNb/b
alphaNc= alphaN*c

#General algorithm for finding the roots
f = lambda x: jv(1, x*b)*yn(0, x*c) - jv(0, x*c)*yn(1, x*b)
res = fsolve(f, np.linspace(0.000001, 0.8, 120))
res *=b
print(np.sort(np.unique(res)))

#print(alphaNb, alphaNc)

RalphaNb = c/b * ( jv(1, alphaNb) * yn(1, alphaNc) - jv(1, alphaNc) *
yn(1, alphaNb) ) + jv(0, alphaNc) * yn(0, alphaNb) - jv(0, alphaNb) *
yn(0, alphaNc)
#print(RalphaNb)

#edgeY [Y co-ordinate]
x = np.array([0.0116, 0.0138, 0.0160, 0.0181, 0.0205, 0.0232, 0.0241,
0.0266, 0.0305, 0.0346, 0.0390, 0.0391, 0.0443, 0.0516, 0.0568,
0.0594, 0.0680, 0.0775, 0.0855, 0.0879, 0.0997, 0.1000, 0.1165,
0.1264, 0.1358, 0.1572, 0.1852, 0.1982, 0.2000, 0.2219, 0.2610,
0.2987, 0.3000, 0.3001, 0.3425, 0.3895, 0.3991, 0.4000, 0.4314,
0.4731, 0.4996, 0.5000, 0.5142, 0.5592, 0.6000])

fig, ax = plt.subplots()
times = 3600*np.array([1,10,100,200,500,1000])

#Define result of temperature profile
result = []
```

```

#Temperature profile
for t in times:
    s=0
    for i in range(0,len(alphaN)):
        s+=2*np.exp(-alphaN[i]**2 * a * t ) / alphaNb[i] * ( jv(1,
alphaNb[i]) * yn(0, alphaN[i]*x) - yn(1, alphaNb[i]) * jv(0,
alphaN[i]*x) ) / RalphaNb[i]
        s*=(T0-w0)
        s=s+w0
        formatted_s = np.around(s, decimals=4)
        formatted_x = np.around(x, decimals=4)
        result.append(formatted_s)
        ax.plot(x, s, label=f't={t/3600.} h')
        print(formatted_x,formatted_s)

#Graph setting
ax.legend()
ax.set_title("Teplotní profil")
ax.set_xlabel("Vzdálenost (m)")
ax.set_ylabel("Teplota (°C)")
plt.show()

#Save computed data to a .txt file
filename = "output_data_Bessel_edgeY.txt"
with open(filename, "w") as file:
    file.write("Time (h)\tDistance (m)\tTemperature (°C)\n")
    for i in range(len(times)):
        for j in range(len(x)):

file.write(f"{times[i]}\t{formatted_x[j]}\t{result[i][j]}\n")

print(f"Computed data has been saved to '{filename}'.")

```