

Diplomová práce

Strojové rozpoznávání vírů v datech z numerických simulací

Bc. Mikhail VESHKIN



Praha 2023

Vedoucí práce: doc. Ing. Tomáš Hyhlík, Ph.D.

České vysoké učení technické v Praze Fakulta Strojní,
Ústav mechaniky termomechaniky a mechaniky tekutin

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Veshkin** Jméno: **Mikhail** Osobní číslo: **437868**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávací katedra/ústav: **Ústav mechaniky tekutin a termodynamiky**
Studijní program: **Aplikované vědy ve strojním inženýrství**
Specializace: **Aplikovaná mechanika**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Strojové rozpoznávání vírů v datech z numerických simulací

Název diplomové práce anglicky:

Machine-based Vortex Identification in Numerical Flow Simulation Data

Pokyny pro vypracování:

V rešeršní části se podrobně věnujte problematice vírů a jejich identifikaci. Zaměřte se na metody identifikace vírů, které jdou realizovat strojově. Vytvořte algoritmus pro identifikaci vírů, který podrobně popište. Provedte testování vytvořeného algoritmu na analytických proudových polích. Provedte numerickou simulaci v programu ANSYS Fluent, kde se zaměřte na Kármánovu vírovou stezku. Vhodně zvolte minimálně jeden další případ proudění, kde na datech z numerické simulace dokumentujete identifikaci vírů za pomoci vytvořeného algoritmu. V práci se můžete omezit na identifikaci vírů ve dvourozměrném proudovém poli. V závěru se věnujte validaci získaných výsledků a jejich diskusi.

Seznam doporučené literatury:

dle doporučení vedoucího práce

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:


doc. Ing. Tomáš Hyhlík, Ph.D. ústav mechaniky tekutin a termodynamiky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **25.04.2023**

Termín odevzdání diplomové práce: **28.07.2023**

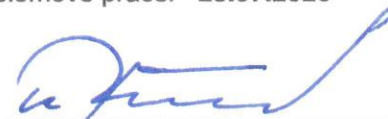
Platnost zadání diplomové práce: _____



doc. Ing. Tomáš Hyhlík, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce



Ing. Michal Schmirler, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry



doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

26.04.2023

Datum převzetí zadání



Podpis studenta

Abstract

The work focuses on the development of a machine algorithm for identifying vortices in a fluid. The algorithm inserts a parametric vortex model into the flow field and determines its parameters by minimizing the functional of total energy or minimizing the functional of total rotation. The minimization of the functional is performed using linear programming methods. This algorithm is applied to analytical flow fields and flow fields obtained from CFD simulation. In conclusion, the conditions and range of application of this algorithm are described.

Key words

Fluid vortex, identification of vortices, optimization, functional minimization, fluid mechanics, searching algorithm.

Abstrakt

Práce se zabývá vývojem strojového algoritmu pro rozpoznávání víru v tekutině. Algoritmus vkládá do proudového pole parametrický model víru a určuje jeho parametry minimalizací funkcionálu celkové energie nebo minimalizací funkcionálu celkové rotace. Minimalizace funkcionálu je provedena pomocí metod lineárního programování. Tento algoritmus je aplikován na analytická proudová pole a proudová pole získána z CFD simulace. V závěru jsou uvedeny podmínky a rozmezí použití daného algoritmu.

Key words

Vír v tekutině, identifikace vírů, optimalizace, minimalizace funkcionálu, mechanika tekutin, vyhledávací algoritmus.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením svého vedoucího a s využitím literatury a zdrojů uvedených v seznamu použitých zdrojů. Potvrzuji, že jsem důkladně citoval všechny informace převzaté z jiných zdrojů.

Nemám důvod proti použití této práce ve smyslu §60 zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském.

Poděkování

Tímto bych rád poděkoval vedoucímu práce, panu doc. Ing. Tomáši Hyhlíkovi, Ph.D. za odborné vedení a inspiraci. Rovněž děkuji své rodině za trpělivost a podporu.

Seznam použitých značení

Značení	Název	Jednotka
Γ	cirkulace	m^2/s
l	křivka	m
∇	operátor nabra	
$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$	vektor rychlosti	m/s
ν	kinematická viskozita	m^2/s
t	čas	s
ψ	proudová funkce	m^2/s
φ	potenciál rychlosti	m^2/s
w	komplexní potenciál	m^2/s
Re	Reynoldsovo číslo	1
w	komplexní jednotka	1
v_θ	tečná složka rychlosti	m/s
E	kinetická energie	J
Sr	Strouhalovo číslo	1
f	frekvence	Hz
D	charakteristický rozměr	m

Obsah

Abstract	3
Key words	3
Abstrakt	3
Key words	3
Čestné prohlášení	4
Poděkování	5
Seznam použitých značení.....	6
1. Úvod	9
1.1. Cíle práce	9
2. Vířivost a cirkulace.....	10
3. Smyková vrstva a vířivost	11
4. Proudová funkce a komplexní potenciál	12
5. Modely víru.....	13
5.1. Rotace jako tuhého celku	13
5.2. Potenciální vír	13
5.3. Rankineův vír	15
5.4. Lambův-Oseenův vír	16
5.5. Kaufmannův vír	18
5.6. Gaussův vír	19
5.7. Porovnání modelů	20
6. Modely proudění	21
6.1. Taylorovo-Greenovo vírové pole.....	21
6.2. Stuartovo vírové pole	22
6.3. Karmánova vírová řada.....	23
7. Popis algoritmu.....	26
7.1. Energie.....	26
7.2. Rotace.....	29
8. Aplikace na analytických proudových polích.....	30
8.1. Aplikace na Taylorovém-Greenovém vírovém poli	30
8.1.1. Minimalizace energie	30
8.1.2. Minimalizace rotace	37
8.1.3. Shrnutí pro Taylorovo-Greenovo pole.....	40
8.2. Aplikace na Stuartově vírovém poli.....	40
8.2.1. Minimalizace energie	40
8.2.2. Minimalizace rotace	41

8.2.3.	Shrnutí pro Stuartovo pole	43
8.3.	Aplikace na Karmánově vírové řadě	44
8.3.1.	Minimalizace energie	44
8.3.2.	Minimalizace rotace	46
8.3.3.	Shrnutí pro Karmánovu vírovou řadu	48
9.	Aplikace na data z CFD simulace	48
9.1.1.	Proudění v kavitě	48
9.1.2.	Identifikace minimalizací energie	49
9.1.3.	Identifikace minimalizací rotace	52
9.1.4.	Shrnutí pro proudění v kavitě	54
9.2.1.	Karmánova vírová stezka	54
9.2.2.	Parametry CFD modelu	55
9.2.3.	Identifikace minimalizací celkové energie	56
9.2.4.	Identifikace minimalizací celkové rotace	59
9.2.5.	Shrnutí pro Karmánovou vírovou stezku	63
10.	Závěr	64
	Seznam použitých zdrojů	65

1. Úvod

Víry jsou běžně přítomné v mnoha přirozených i technických prostředích. Je možné je nalézt na povrchu řek a oceánů, vznikají v místech, kde rychlostní profil má velký gradient, například za různými překážkami obzvláště když proudění je nestabilní nebo má turbulentní charakter. Víry se vyskytují v různých technických systémech, jako jsou potrubí, turbíny, letadla a směšovací tepelné výměníky. Jejich přítomnost je zásadní součástí turbulentního proudění. Vírový pohyb může existovat i v jiných prostředích jako jsou plynná média a plazma.



Obrázek 1. Vír v tekutině [5]

Rozpoznávání víru a pochopení jejich struktury je důležité pro řešení úloh mechaniky tekutin. Správné modelování vírových struktur je nezbytné pro hlubší porozumění toho, jak se chová tekutina a jak interaguje s okolním prostředím. Je to zásadní pro popis turbulence, jelikož víry jsou vždycky přítomny v turbulentním proudění, způsobují promíchávání vrstev a přenos energie. Naproti tomu zanedbání možnosti vzniku vírů může mít destruktivní důsledky

1.1. Cíle práce

Tato práce se zaměřuje na vývoj strojového algoritmu pro identifikaci vírových struktur ve dvoudimenzionálním prostoru metodou minimalizací funkcionálu. Funkcionál představuje integrál přes celé proudové pole, proto tato metoda uvažuje proudové pole jako celek. Jako vstup potřebuje rychlostní pole a vzorový model hledané vírové struktury. Fyzikální vlastnosti existujících modelů vírových struktur jsou probrané ve zvláštní kapitole. Výstupem zpracování pole algoritmem jsou fyzikální parametry nalezených vírů (poloha, cirkulace, poloměr jádra). Tento algoritmus je nejprve aplikován na analytická vírová pole a diskutovaná možnost, rozsah jeho použití a kvalita poskytovaných výsledků. Dále stejný algoritmus je aplikován na data získané z CFD simulace, a to na dvě základní úlohy – proudění v kavitě a obtékání válce nebo Karmánova vírová stezka. V závěru na základě těchto výsledků jsou vyhodnoceny podmínky pro rozmezí použití algoritmu.

2. Vířivost a cirkulace

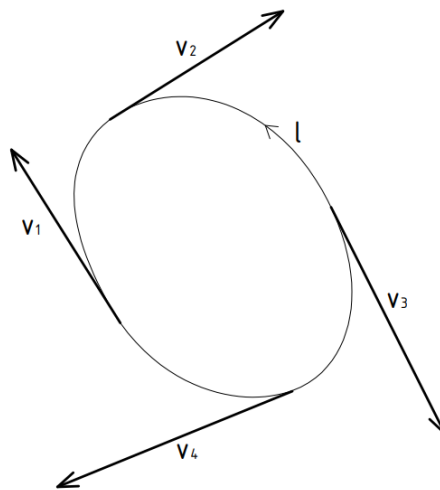
Intenzita vírů ani vír rychlosti se nedají přímo měřit. Však tyto dvě veličiny se dají vyjádřit pomocí známého pole rychlosti. [1]

Cirkulace rychlosti Γ vyjadřuje vztah mezi intenzitou víru a polem rychlosti. Udává, jestli částice na uzavřené jednoduché křivce obr. 2, budou způsobit pohyb této myšlené křivky. Tuto křivku bude točit složka rychlosti tečná k uvažované křivce. Za intenzitu točivého účinku je považován skalární součin (2.1)

$$vdl = v_i dx_i \quad (2.1)$$

Celkovou cirkulaci Γ pro všechny body na křivce představuje integrál (2.2)

$$\Gamma = \oint_l vdl = \oint_l v_i dx_i \quad (2.2)$$



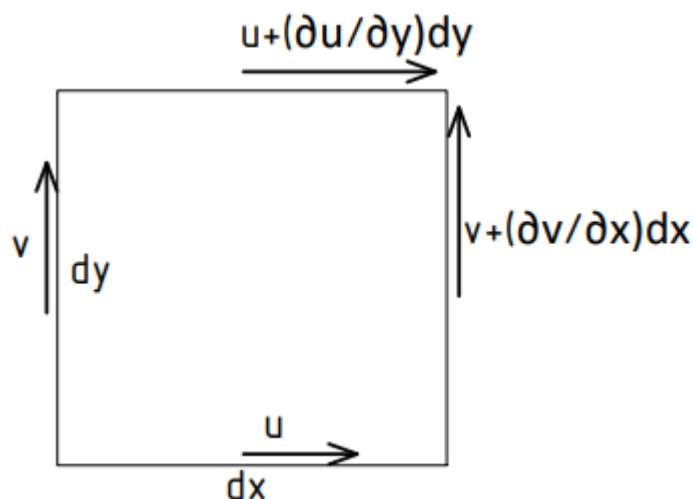
Obrázek 2. Cirkulace rychlosti

Vířivost (2.3) je definovaná jako limita z poměru cirkulace a plochy

$$\omega = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{A} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\oint_l v_i dx_i}{A} \quad (2.3)$$

Jinými slovy vířivost je plošná intenzita točivého účinku rychlosti.

Pro čtverec s elementární délkou strany na obr. 3 cirkulace je součet příslušných složek vektoru rychlosti násobených délkou úsečky (2.4)



Obrázek 3. Elementární čtverec. Cirkulace v kartézských souřadnicích

$$d\Gamma = udx + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) dy - \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) dx - vdy = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx dy \quad (2.4)$$

Po vydělení vztahu (2.4) plochou $dA = dx dy$ plyne výraz pro vířivost v kartézských souřadnicích

$$\omega = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{A} = \frac{d\Gamma}{dA} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (2.5)$$

Vířivost v polárních souřadnicích $v(r, \theta, z)$ je dána vztahem (2.6) jako vektorový součin operátoru nabla a vektoru rychlosti v daném bodě

$$\omega = \nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & rv_\theta & v_z \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ v_r & rv_\theta & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z \quad (2.6)$$

Vzorec (2.6) je rovnou odveden pro případ dvoudimenzionálního proudění.

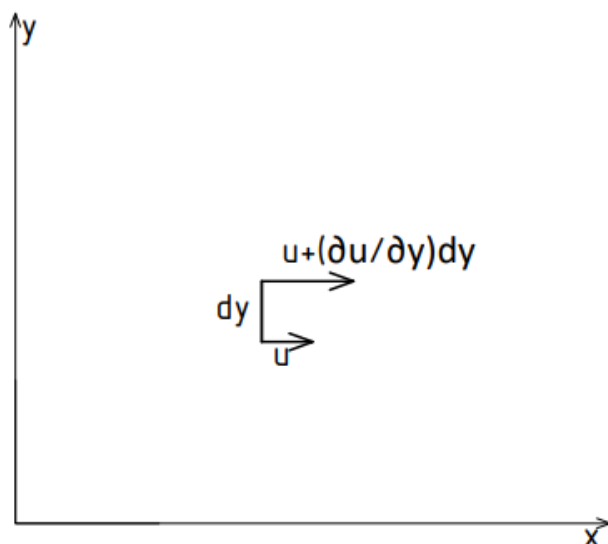
3. Smyková vrstva a vířivost

Smyková vrstva je popsána vztahy (3.1) a (3.2)

$$\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (3.2)$$

Derivace rychlosti je v jednom směru nulová v druhém je odlišná od nuly. Na obr. 4 je úsečka o elementární délce dy umístěna podél osy y . Horní část úsečky je tažená více než dolní. Toto způsobí rotační pohyb úsečky. Hodnota vířivosti v tomto bodě pole je $\omega = -\frac{\partial u}{\partial y}$



Obrázek 4. Elementární úsečka ve smykově vrstvě.

Z toho plyne jednoduchý závěr, že vířivost může nabývat nenulových hodnot v proudovém poli, kde nejsou přítomné víry.

4. Proudová funkce a komplexní potenciál

V případě 2D proudění je velice vhodná pro vyjádření složek rychlosti proudová funkce. Tato funkce je konstantní podél proudnice a pro ni platí [1]:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (4.1)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.2)$$

Pro vířivost pomocí proudové funkce platí

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (4.3)$$

Potenciál rychlosti φ , kde $\mathbf{v} = \text{grad}\varphi$ je kolmý na proudnice, tudíž pro úhel mezi normálami těchto funkcí musí platit vztah (3.5)

$$\cos\theta \sim \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (4.4)$$

Z toho plyne

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad a \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.5)$$

Tyto dvě rovnice jsou Cauchyho-Riemannovy podmínky pro existenci funkce komplexní proměnné $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, pro její derivaci platí [1]

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + i \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + i \frac{\partial \psi}{\partial y} dy}{dx + idy} = \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dx + \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dy}{dx + idy} \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} = u - iv \end{aligned} \quad (4.6)$$

5. Modely víru

5.1. Rotace jako tuhého celku

Tento model odpovídá rotaci tuhého kotouče, kde obvodová rychlost je přímo úměrná vzdálenosti od středu

$$v_{\theta} = \omega r \quad (5.1.1)$$

Průběh rychlosti je lineární a roste nade všechny meze při vzdalování od středu otáčení. Rychlost ve středu je nulová.

Pro určení průběhu vířivosti je použit vztah (2.6)

$$\omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_{\theta})}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial(\omega r^2)}{\partial r} = 2\omega \quad (5.1.2)$$

Hodnota vířivosti je konstantní podél souřadnice r

Celková energie tohoto modelu

$$E_{rot} = \int_S \mathbf{v}^2(r, \theta) dS = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=\infty} (\omega r)^2 r d\theta dr = 2\pi\omega^2 \int_{r=0}^{r=\infty} r^3 dr = 2\pi\omega^2 \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=\infty} = \infty \quad (5.1.3)$$

Takto uvažovaný vír nese nekonečnou kinetickou energii a jeho vzdálené oblasti váží více než jádro

Pro plošnou intenzitu vířivosti (rotační účinek víru)

$$\Phi_{pv} = \int_S 2\omega dS = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=\infty} 2\omega r d\theta dr = 4\omega\pi \int_{r=0}^{r=\infty} r dr = 4\omega\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\infty} = \infty \quad (5.1.4)$$

5.2. Potenciální vír

Potenciální vír platí pro ideální nestlačitelnou tekutinu [11]. Tečná rychlost potenciálního víru je dána vztahem (5.2.1)

$$v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (5.2.1)$$

Průběh rychlosti je hyperbolický. Při přiblížení k virovému vláknu roste absolutní hodnota rychlosti do nekonečna, což neodpovídá realitě. Ve skutečnosti je rychlost ve středu je nulová díky viskozitě.

Pro vířivost platí

$$\omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial(\frac{\Gamma}{2\pi})}{\partial r} = 0 \quad (5.2.2)$$

Vířivost je nulová všude kromě středu víru. Z toho plyne že v celém objemu víru až na vírové vlákno je pohyb nevířivý (translační).

Celková energie potenciálního víru

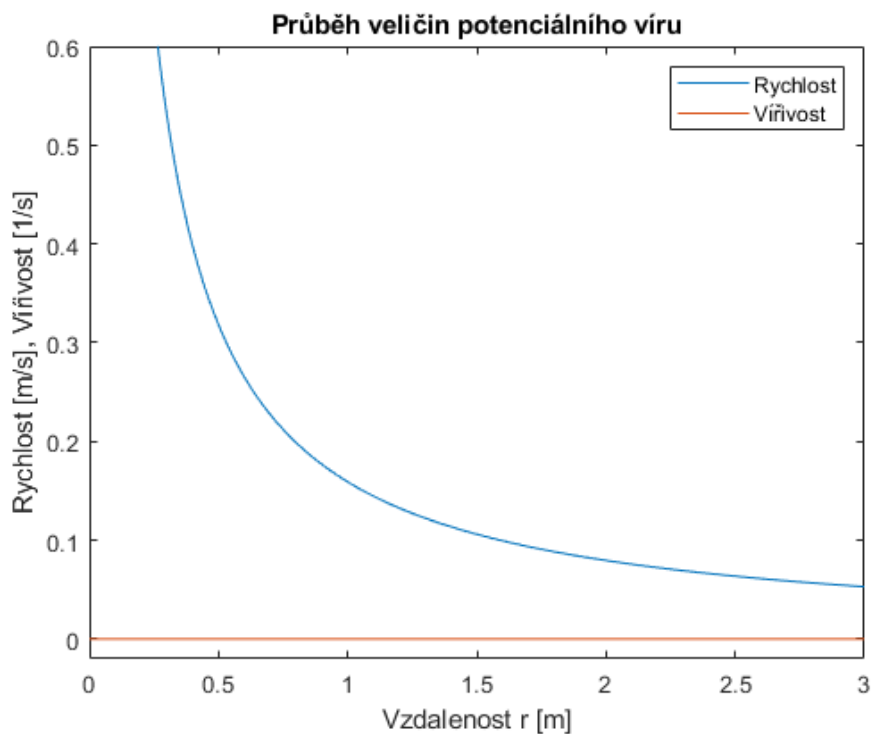
$$E_{pv} = \int_S \mathbf{v}^2(r, \theta) dS = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=\infty} \left(\frac{\Gamma}{2\pi r}\right)^2 r d\theta dr = \frac{\Gamma^2}{2\pi} \int_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{r} dr = \frac{\Gamma^2}{2\pi} |\ln r|_{r=0}^{r=\infty} = \infty \quad (5.2.3)$$

Potenciální vír celkově v sobě nese nekonečnou energii, a to nedopovídá realitě.

Integrál vířivosti přes plochu je nula, jelikož vířivost je nulová všude vyjma konečný počet bodu (jenom střed)

$$\Phi_{pv} = \int_S \omega_z dS = 0 \quad (5.2.4)$$

Průběhy veličin pro tento model jsou na obr. 5.



Obrázek 5. Průběh veličin potenciálního víru.

Komplexní potenciál potenciálního víru [1] je dán vztahem (5.2.5)

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0) \quad (5.2.5)$$

Kde z_0 je souřadnice středu

Pro získání složek v kartézských souřadnicích je možno použít vztah (3.7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \right) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{x + iy} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{xi}{x^2 + y^2} \\ &= u - iv \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Tudíž složky rychlosti potenciálního víru v kartézských souřadnicích jsou

$$u = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (5.2.7)$$

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (5.2.8)$$

5.3. Rankineův vír

Předchozí modely mají zřejmé nevýhody. Rotace jako tuhého tělesa má nekonečnou rychlost při vzdalování od osy rotace (vírového vlákna) a potenciální vír má nekonečnou rychlost ve středu.

Rankineův model odstraňuje zmíněné nevýhody, tak že kombinuje dva předchozí modely. Ve středu je rotace kapaliny jako tuhého tělesa o poloměru r_c . V tomto válci rychlost roste lineárně na konečnou hodnotu na kraji válce, ve středu válce je nulová rychlost. Mimo tento „tuhý“ válec rychlostní profil je modelován jako potenciální vír, proto rychlostní profil klesá při oddalování od středu víru [11].

Obvodová rychlost Rankineova víru dána vztahy (5.3.1) a (5.3.2)

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{r}{r_c^2} \quad r < r_c \quad (5.3.1)$$

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r} \quad r > r_c \quad (5.3.2)$$

Průběh vířivosti Rankineova víru odpovídá vztahům (5.2.2) a (5.1.2)

$$\omega_z = \frac{\Gamma}{\pi r_c^2} \quad r < r_c \quad (5.3.3)$$

$$\omega_z = 0 \quad r > r_c \quad (5.3.4)$$

Celková energie Rankineova modelu

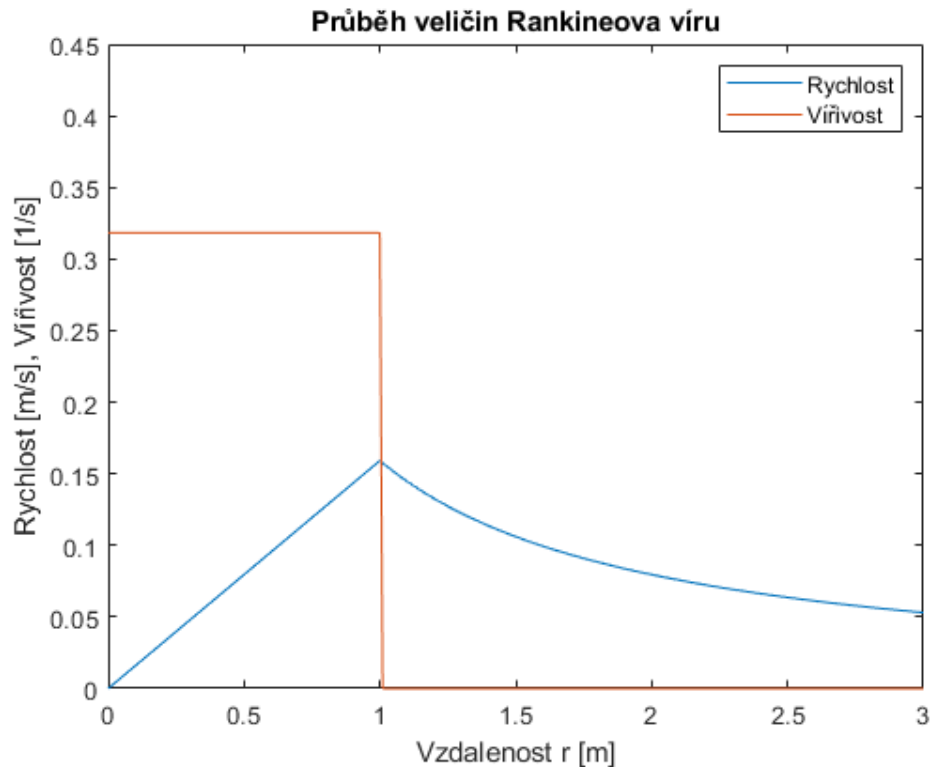
$$E_{Rankin} = \int_S \mathbf{v}^2(r, \theta) dS = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=r_c} \left(\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{r}{r_c^2} \right)^2 r dr d\theta + \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=r_c}^{r=\infty} \left(\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r} \right)^2 r dr d\theta = \infty \quad (5.3.5)$$

Podobně jako energie potenciálního víru diverguje (5.2.3), energie Rankineova víru roste nade všechny meze při vzdalování od víru. Vzdálené oblasti mají větší energetickou váhu než jádro.

Pro plošnou intenzitu vířivosti (rotační účinek víru) platí

$$\Phi_{Rankin} = \int_{r=0}^{r=r_c} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{\Gamma}{\pi r_c^2} r d\theta dr + \int_{r=r_c}^{r=\infty} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} 0 r d\theta dr = \frac{2\Gamma}{r_c^2} \left| \frac{r^2}{2} \right|_{r=0}^{r=r_c} = \Gamma \quad (5.3.6)$$

Průběhy veličin pro tento model jsou na obr. 6.



Obrázek 6. Průběh veličin Rankineova víru.

Další nevýhodou Rankinova modelu je zlom na hranici “tuhého” válce.

5.4. Lambův-Oseenův vír

Tento model je řešením speciálního případu Navier-Stokesových rovnic pro viskózní nestlačitelnou tekutinu. V tomto řešení je zahrnut účinek viskozity [11]

$$v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right) \quad (5.4.1)$$

Průběh vířivosti

$$\omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_{\theta})}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial\left(\frac{\Gamma}{2\pi} \left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right)\right)}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\partial\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right)}{\partial r} = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \quad (5.4.2)$$

Celková kinetická energie, kterou nese Lambův-Oseenův vír

$$\begin{aligned}
 E_{L-o} &= \int_S v^2(r, \theta) dS = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=\infty} \left(\frac{\Gamma}{2\pi r} (1 - e^{-\frac{r^2}{4vt}}) \right)^2 r d\theta dr \\
 &= \frac{\Gamma^2}{2\pi} \int_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{r} dr - \frac{\Gamma^2}{2\pi} \int_{r=0}^{r=\infty} e^{-\frac{r^2}{4vt}} r dr = \infty
 \end{aligned}
 \tag{5.4.3}$$

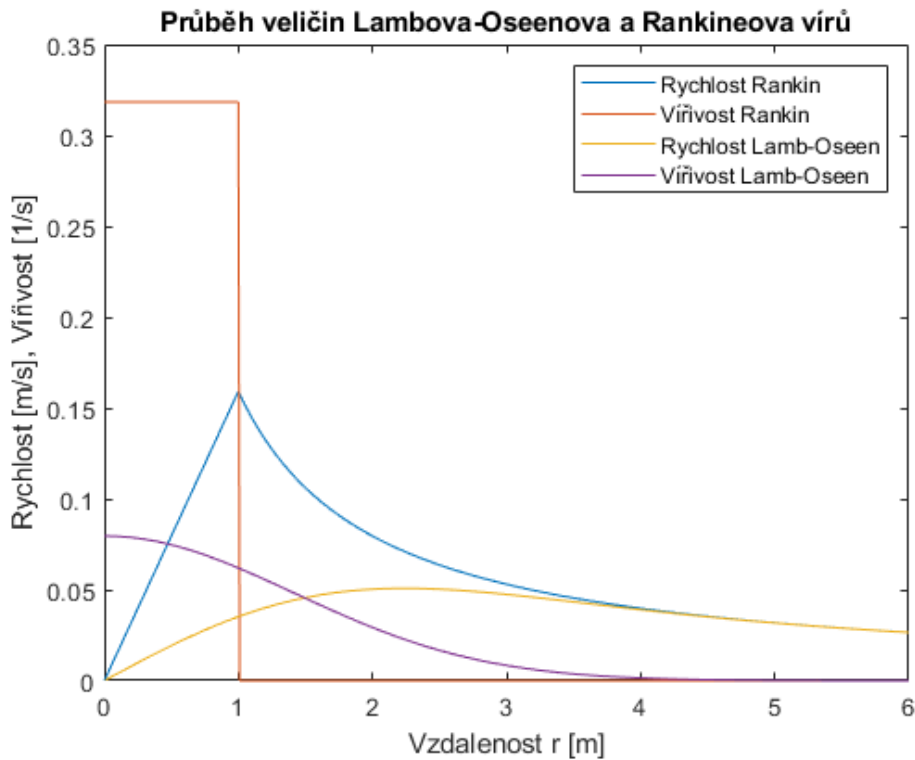
První integrál představuje potenciální složku a jeho hodnota roste k nekonečnu. Druhý integrál tlumí rychlost, ale jeho hodnota exponenciálně klesá k nule, proto celková energie diverguje.

Pro plošnou intenzitu vířivosti (rotační účinek víru)

$$\begin{aligned}
 \Phi_{L-o} &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=\infty} \frac{\Gamma}{4\pi vt} e^{-\frac{r^2}{4vt}} r d\theta dr = \frac{\Gamma}{2vt} \int_{r=0}^{r=\infty} e^{-\frac{r^2}{4vt}} r dr = \left| \begin{array}{l} x = \frac{r^2}{4vt} \\ dx = \frac{r}{2vt} dr \end{array} \right| \\
 &= \frac{\Gamma}{2vt} \int_{r=0}^{r=\infty} 2vt e^{-x} dx = \Gamma
 \end{aligned}
 \tag{5.4.4}$$

Tento model má hladký průběh rychlosti podél celé souřadnice r . Při vzdalování od středu exponenciální složka rapidně klesá, proto průběh splývá s Rankineovým vírem.

Porovnání hodnoty tečné rychlosti a vířivosti Lambova-Oseenova víru a Rankineova jsou na obr. 7.



Obrázek 7. Porovnání veličin Lambova-Oseenova a Rankineova vírů

5.5. Kaufmannův vír

Tento model byl navržen v roce 1962 W. Kaufmannem. Není řešením Navier-Stokesových rovnic [12]

$$v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{r}{r_c^2 + r^2} \right) \quad (5.5.1)$$

Průběh vířivosti je vztahem (5.5.2)

$$\omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_{\theta})}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \left(\frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{r^2}{r_c^2 + r^2} \right) \right)}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\partial \left(\frac{r^2}{r_c^2 + r^2} \right)}{\partial r} = \frac{\Gamma}{\pi} \frac{r_c^2}{(r_c^2 + r^2)^2} \quad (5.5.2)$$

Celková kinetická energie Kaufmannova víru je dána integrálem

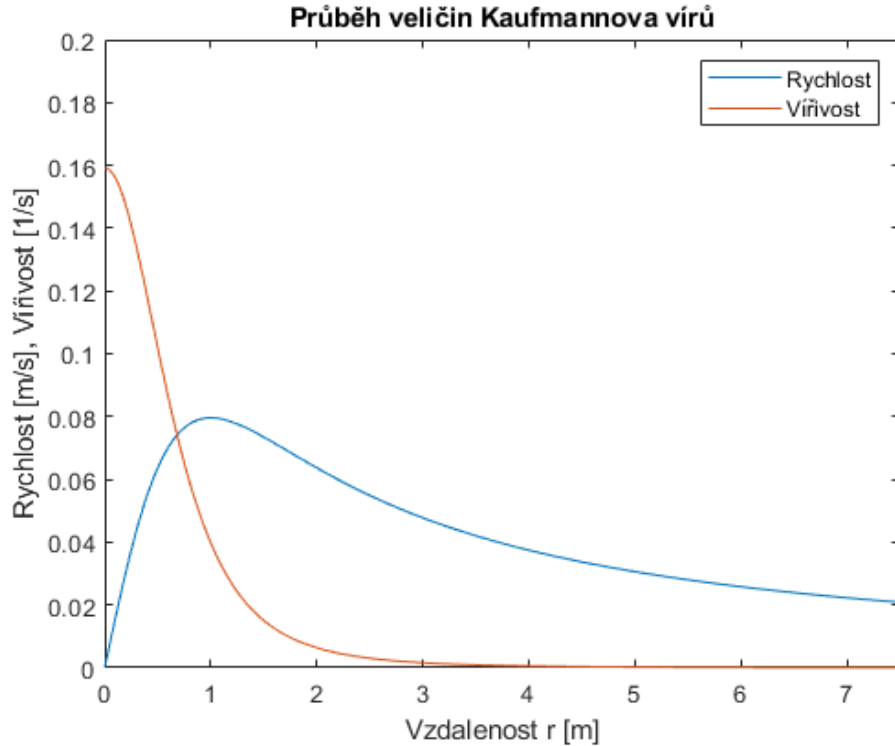
$$E_{Kaufmann} = \int_S \mathbf{v}^2(r, \theta) dS = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=\infty} \left(\frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{r}{r_c^2 + r^2} \right) \right)^2 r d\theta dr = \frac{\Gamma^2}{2\pi} \int_{r=0}^{r=\infty} \frac{r^3}{(r_c^2 + r^2)^2} dr = \infty \quad (5.5.2)$$

Pro plošnou intenzitu vířivosti (rotační účinek víru)

$$\Phi_{Kaufmann} = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=\infty} \frac{\Gamma}{\pi} \frac{r_c^2}{(r_c^2 + r^2)^2} r d\theta dr = 2\Gamma \int_{r=0}^{r=\infty} \frac{r_c^2 r}{(r_c^2 + r^2)^2} dr = \Gamma \quad (5.5.2)$$

Kaufmannův model má hladký průběh rychlosti, ale vzdálené oblasti nesou více energie v porovnání s jádrem

Rychlostní profil a vířivost Kaufmannova víru je na obr. 8.



Obrázek 8. Průběh veličin Kaufmannova víru

5.6. Gaussův vír

Tento model není fyzikální, má ale statistickou podstatu [7], průběh rychlosti je dán vztahem (5.6.1)

$$v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi R^2} r e^{-\frac{r^2}{2R^2}} \quad (5.6.1)$$

Průběh vířivosti

$$\omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_{\theta})}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial\left(r \frac{\Gamma}{2\pi R^2} r e^{-\frac{r^2}{2R^2}}\right)}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi R^4} e^{-\frac{r^2}{2R^2}} (2R^2 - r^2) \quad (5.6.2)$$

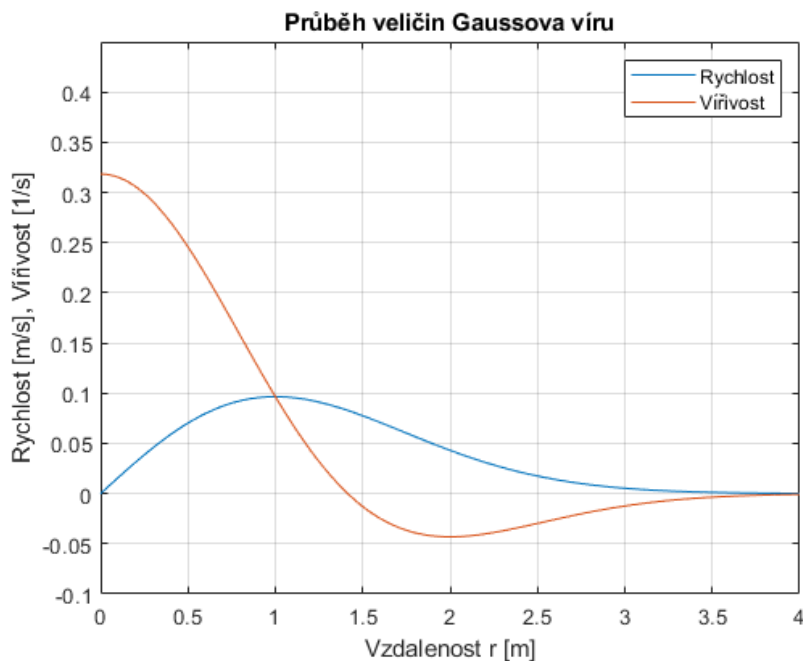
Celková kinetická energie, kterou nese Gaussův vír

$$E_{Gauss} = \int_S \mathbf{v}^2(r, \theta) dS = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=\infty} \left(\frac{\Gamma}{2\pi R^2} r e^{-\frac{r^2}{2R^2}} \right)^2 r d\theta dr = \frac{\Gamma^2}{2\pi R^4} \frac{R^4}{2} = \frac{\Gamma^2}{4\pi} \quad (5.6.3)$$

Pro plošnou intenzitu vířivosti (rotační účinek víru)

$$\Phi_{Gauss} = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=\infty} \frac{\Gamma}{2\pi R^4} e^{-\frac{r^2}{2R^2}} (2R^2 - r^2) r d\theta dr = 0 \quad (5.6.4)$$

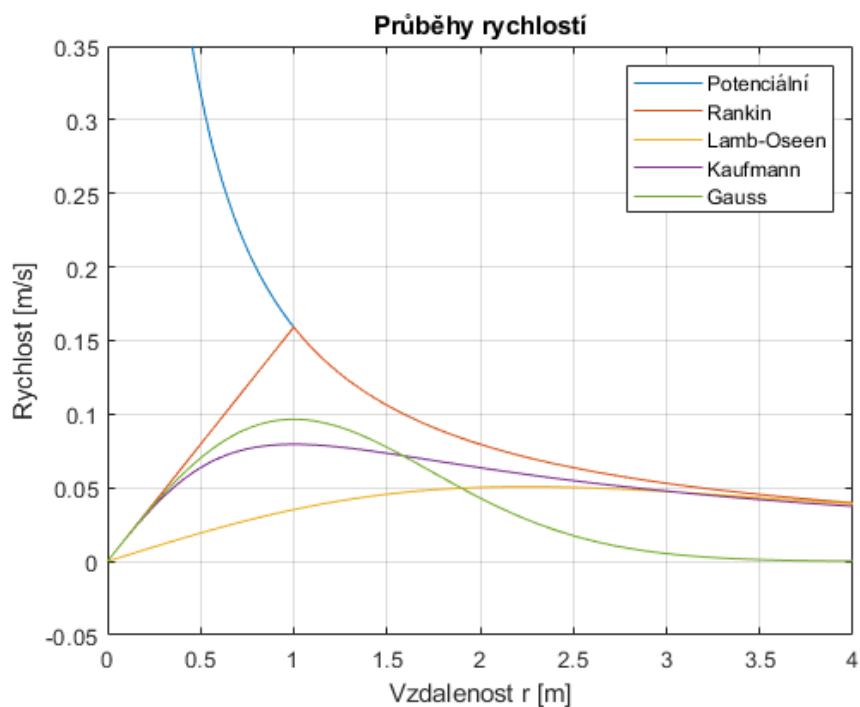
Gaussův model má větší útlum, a proto jak integrál rychlosti, tak integrál vířivosti mají konečnou hodnotu. Však průběh vířivosti klesá do záporných hodnot a plocha pod grafem je stejně velká jako plocha nad grafem nebo integrál plošné intenzity vířivosti je nulový. Rychlostní profil a vířivost Gaussova víru je na obr. 9.



Obrázek 9. Průběh veličin Gaussova víru.

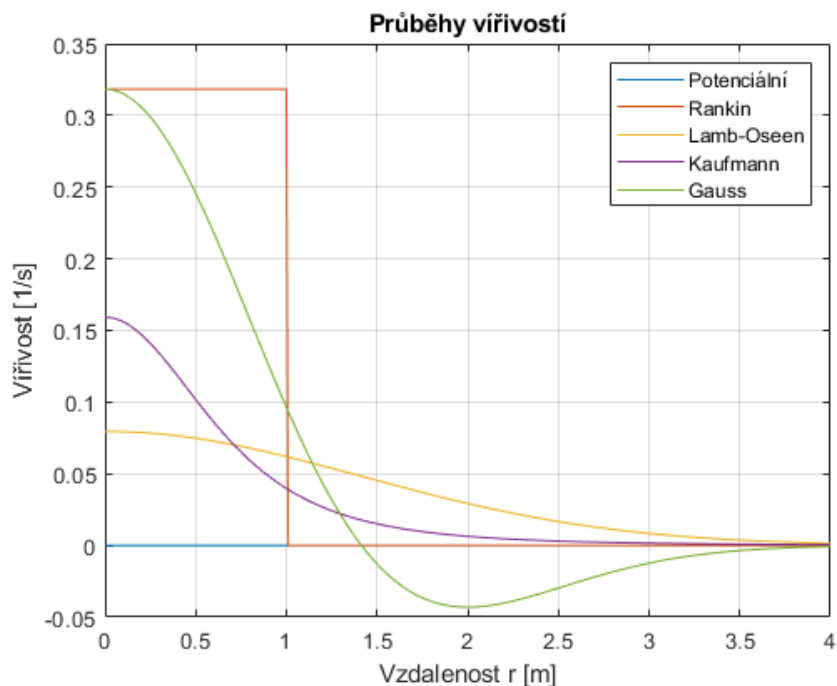
5.7. Porovnání modelů

Průběhů hodnoty tečné rychlosti a vířivosti pro všechny modely jsou na obrázcích 10 a 11. Každý model má nejvíce 4 parametry, které jsou zvolené jako jedničky.



Obrázek 10. Průběhy rychlosti.

Rychlost potenciálního víru roste nade všechny meze při přibližování ke středu víru. Rychlost všech modelu vyjma Gaussův klesá jako $\frac{1}{r}$.



Obrázek 11. Průběhy vířivosti

Z těchto obrázků je vidět, že jediný model, který má hladký průběh veličin a zároveň konečné integrály intenzit je Gaussův. Je to dané tím, že má větší útlum, avšak tento vír není fyzikální je odvozen statisticky.

6. Modely proudění

6.1. Taylorovo-Greenovo vírové pole

Taylorovo-Greenovo vírové pole je nestabilní proudění tekutiny navržené G.E. Taylorem a A.E. Greenem [13]. Vyplyvá to z řešení speciálního případu Navier-Stokesových rovnic pro nestlačitelnou tekutinu. Původní tvar je pro 3 dimenze a v čase $t = 0$ vypadá:

$$u = A \cos ax \cdot \sin by \cdot \sin cz \quad (6.1.1)$$

$$v = B \sin ax \cdot \cos by \cdot \sin cz \quad (6.1.2)$$

$$w = C \sin ax \cdot \sin by \cdot \cos cz \quad (6.1.3)$$

S podmínkou $Aa + Bb + Cc = 0$.

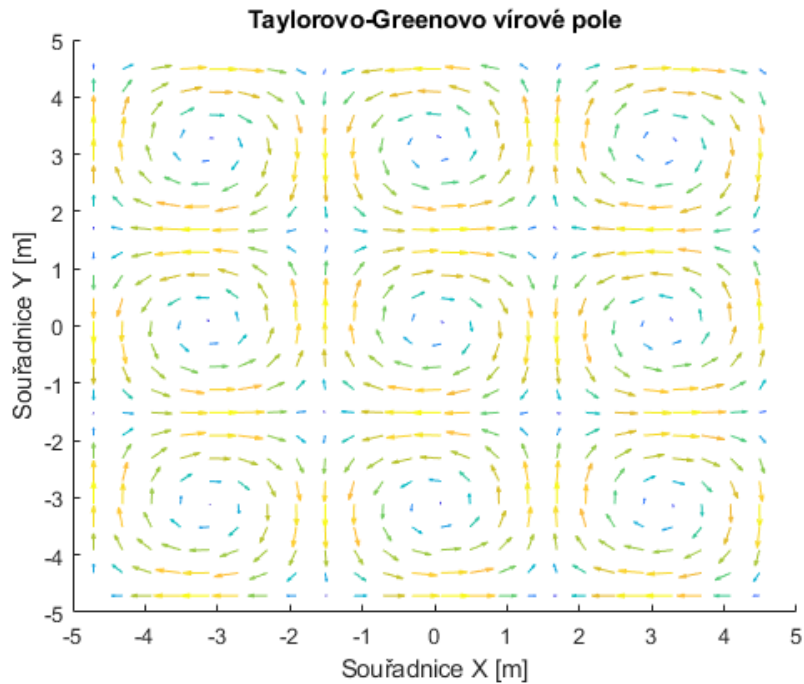
Pro dvoudimenzionální případ však existuje exaktní řešení

$$u = \cos x \cdot \sin y \cdot F(t) \quad (6.1.3)$$

$$v = -\sin x \cdot \cos y \cdot F(t) \quad (6.1.3)$$

kde $F(t) = e^{-2\nu t}$

Toto proudové pole je složeno ze samotných jednoduchých vírů. Středů mají souřadnice $x = k\pi$; $y = p\pi$; $k, p \in \mathbb{Z}$. Pro čas $t = 0$ vizualizace tohoto pole v MATLAB je na obr. 12.



Obrázek 12. Taylorovo-Greenovo vírové pole v MATLABu.

6.2. Stuartovo vírové pole

Stuartovo proudové pole vyplývá z řešení speciálního případu Navier-Stokesových rovnic psaných pro proudovou funkci ideální nestlačitelné tekutiny. Proudová funkce Stuartova pole má tvar:

$$\psi = \ln(C \cosh y + A \cos x) \quad (6.2.1)$$

Toto řešení bylo navrženo TJ. Stuartem [14].

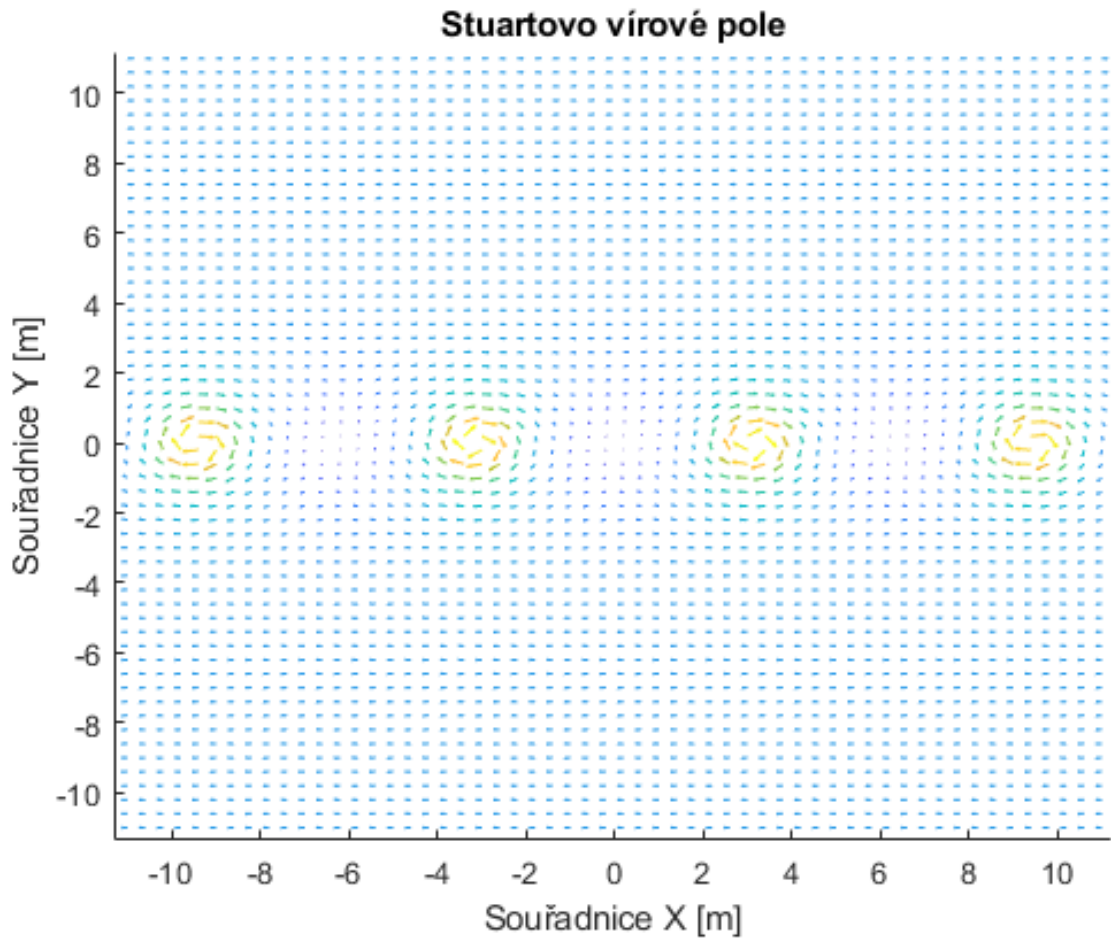
Užitím vztahu (4.1) a (4.2) pro proudovou funkci (6.2.1):

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial(\ln(C \cosh y + A \cos x))}{\partial y} = \frac{C \sinh y}{C \cosh y + A \cos x} \quad (6.2.2)$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial(\ln(C \cosh y + A \cos x))}{\partial x} = \frac{C \sin x}{C \cosh y + A \cos x} \quad (6.2.3)$$

Konstanty A a C jsou vázány vztahem $A = \sqrt{C^2 - 1}$ pro $C = (1; \infty)$

Toto pole představuje soustavu víru na ose x . Středů vírů mají souřadnice $x \in \{\dots, -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, \dots\}$, vizualizace tohoto pole pro $C = 3$ MATLAB je na obr. 13.



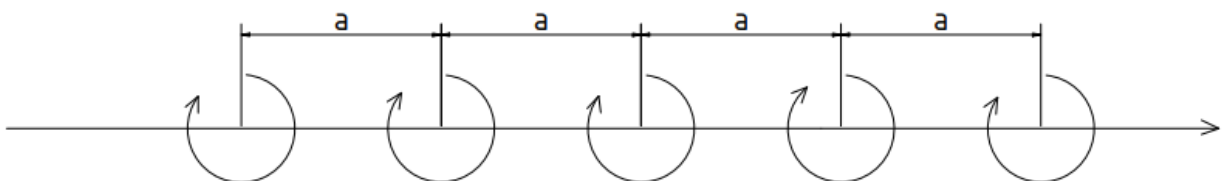
Obrázek 13. Stuartovo pole v MATLABu

6.3. Karmánova vírová řada

Tato kapitola je založena na publikaci [1]. Vztah pro komplexní potenciál potenciálního víru (5.2.5) je použit jako základní rovnice.

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0)$$

Uvažuje se nekonečná řada umístěných za sebou víru (5.2.5) jako na obr. 14.



Obrázek 14. Vírová řada.

Celkový komplexní potenciál proudového pole je součet jednotlivých komplexních potenciálů v bodech $(-na, 0), \dots, (-a, 0), (0, 0), (a, 0), \dots, (na, 0)$

$$\begin{aligned}
w_n &= \sum_{-n}^n w_{i=} = \sum_{j=-n}^n \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - ja) = \\
&= \frac{\Gamma}{2\pi i} [\ln z + \ln(z - a) + \ln(z + a) + \dots + \ln(z - na) + \ln(z + an)] \\
&= \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln[z(z^2 - a^2) \dots (z^2 - n^2 a^2)] \\
&= \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left[(-1)^n a^2 (2a)^2 \dots (na)^2 z \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{2^2 a^2}\right) \dots \left(1 - \frac{z^2}{n^2 a^2}\right) \right] \\
&= \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left[\frac{\pi z}{a} \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{2^2 a^2}\right) \dots \left(1 - \frac{z^2}{n^2 a^2}\right) \right] \\
&+ \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left[(-1)^n \frac{a}{\pi} (2a)^2 (3a)^2 \dots (na)^2 \right] \tag{6.3.3}
\end{aligned}$$

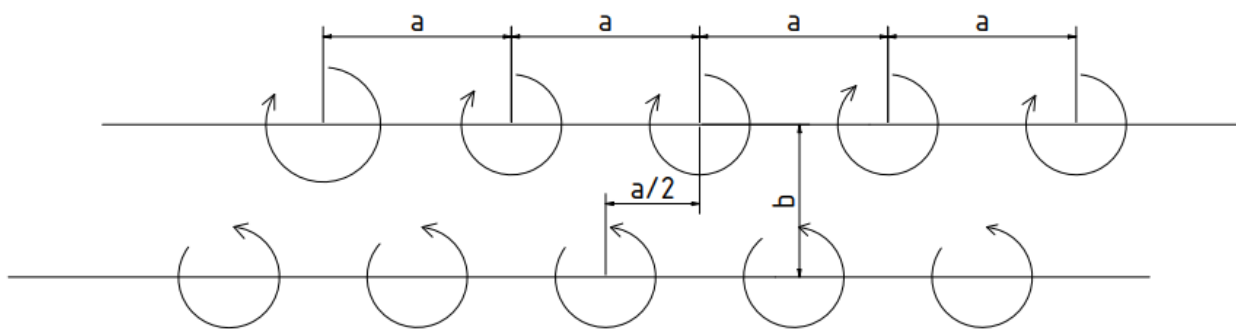
Poslední člen je konstantní proto se dá vynechat [1] Aplikací limity $n \rightarrow \infty$ a užitím vzorce (6.3.4) [1]

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \tag{6.3.4}$$

Vztah (6.3.3) přejde na (6.3.5)

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left(\sin \frac{\pi z}{a} \right) \tag{6.3.5}$$

Tento vzorec platí pro střední vír, který je umístěn do počátku. Pro posunutí polohy středního víru je třeba od argumentu odečíst tyto souřadnice. Pro dvě takovéto řady umístěné jako na obr. 15.



Obrázek 15. Dvě vírové řady.

Komplexní potenciál je součtem vztahu (6.3.5)

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \sin \frac{\pi}{a} (z - z_0) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \sin \frac{\pi}{a} (z + z_0) \tag{6.3.6}$$

Kde $z_0 = \frac{a}{4} + i \frac{b}{2}$

Užitím vzorce (6.3.7) pro komplexní potenciál (6.3.6)

$$w = \varphi + i\psi; \quad \bar{w} = \varphi - i\psi$$

$$w - \bar{w} = 2i\psi \tag{6.3.7}$$

$$2i\psi = w - \bar{w} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{\sin \frac{\pi}{a}(z - z_0) \sin \frac{\pi}{a}(\bar{z} + \bar{z}_0)}{\sin \frac{\pi}{a}(z - z_0) \sin \frac{\pi}{a}(\bar{z} + \bar{z}_0)}$$

$$= \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{\cos \frac{\pi}{a}(z - \bar{z} + z_0 - \bar{z}_0) - \cos \frac{\pi}{a}(z + \bar{z} + z_0 + \bar{z}_0)}{\cos \frac{\pi}{a}(z - \bar{z} - z_0 + \bar{z}_0) - \cos \frac{\pi}{a}(z + \bar{z} - z_0 - \bar{z}_0)}$$

Proudová funkce pro komplexní potenciál (6.3.6) je dána vztahem (6.3.8)

$$\psi = -\frac{\Gamma}{4\pi} \ln \frac{\cosh \frac{\pi}{a}(2y + b) + \sin \frac{2\pi x}{a}}{\cosh \frac{\pi}{a}(2y - b) - \sin \frac{2\pi x}{a}} \tag{6.3.8}$$

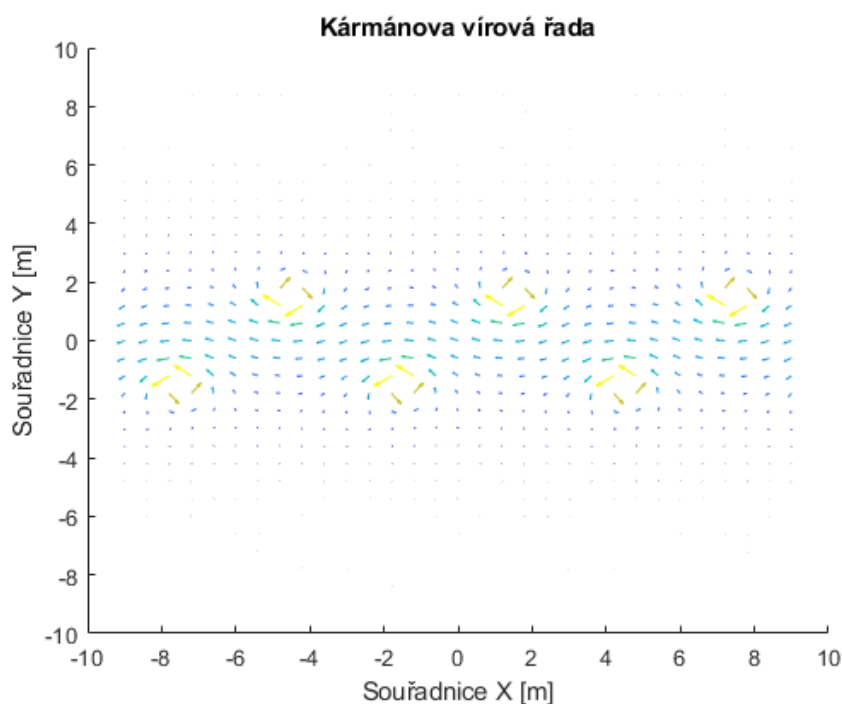
Užitím vztahu (4.1) a (4.2) pro proudovou funkci (6.3.8):

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$= -\frac{\Gamma}{4\pi} \ln \frac{\frac{2\pi}{a} \sinh \frac{\pi}{a}(2y + b) \cdot \left[\cosh \frac{\pi}{a}(2y - b) - \sin \frac{2\pi x}{a} \right] - \frac{2\pi}{a} \sinh \frac{\pi}{a}(2y - b) \cdot \left[\cosh \frac{\pi}{a}(2y + b) + \sin \frac{2\pi x}{a} \right]}{\left(\cosh \frac{\pi}{a}(2y - b) - \sin \frac{2\pi x}{a} \right)^2}$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \ln \frac{\frac{2\pi}{a} \cos \frac{2\pi x}{a} \cdot \left[\cosh \frac{\pi}{a}(2y - b) - \sin \frac{2\pi x}{a} \right] + \frac{2\pi}{a} \cos \frac{2\pi x}{a} \cdot \left[\cosh \frac{\pi}{a}(2y + b) + \sin \frac{2\pi x}{a} \right]}{\left(\cosh \frac{\pi}{a}(2y - b) - \sin \frac{2\pi x}{a} \right)^2}$$

Vizualizace tohoto pole pro $v = 6$, $b = 3$ v MATLABu je na obr. 16.



Obrázek 16. Kármánova vírová řada.

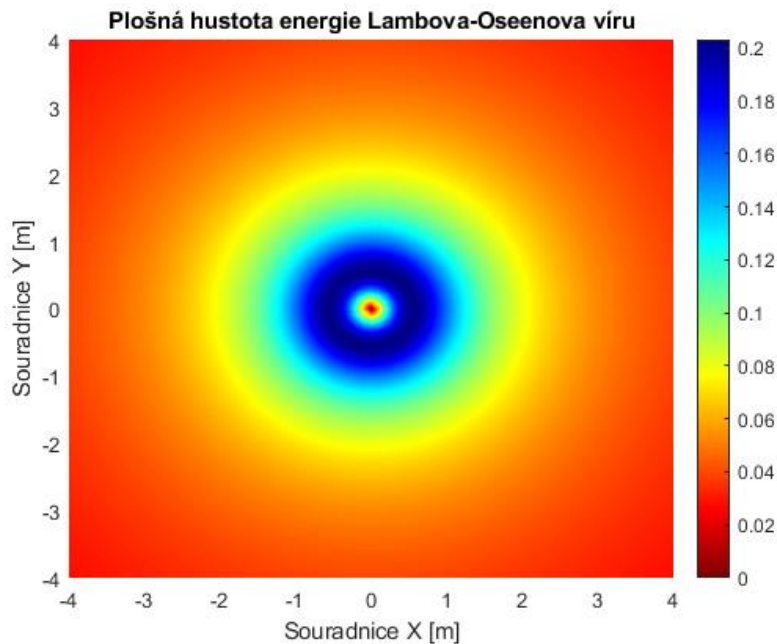
7. Popis algoritmu

7.1. Energie

Z odstavce 3 je jasné, že bodový pohled (vířivost) není postačujícím pro uspokojivou identifikaci vírů. Smyková vrstva a jiné složité případy proudění, jelikož nemají nulovou vířivost, mohou být chybně rozpoznány jako vírové struktury.

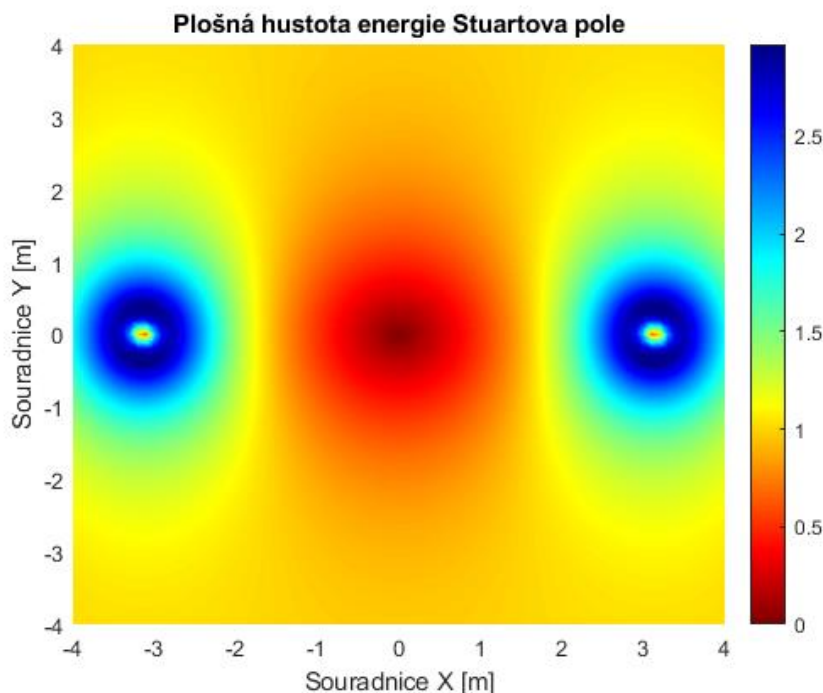
Hlavní myšlenka tohoto algoritmu založená na článcích [4] a [17].

Každý z virů uvedených v odstavci 5 nese konečné množství kinetické energie v omezeném prostoru. Na obr. 17 je plošná hustota kinetické energie pro Lambův-Oseenův vír.



Obrázek 17. Plošná hustota energie Lambova-Oseenova víru.

Každé proudové pole také nese určité množství kinetické energie přenášenou částicemi tekutiny. Na obr. 18 je plošná hustota kinetické energie pro Stuartovo pole z odstavce 6.2. Předpokládáme, že pokud v proudovém poli je nějaký vír, tak celková kinetická energie pole bude mít vyšší hodnotu, než by ten vír tam nebyl. Toto je vidět na obr. 18, kde víry představují lokální maximum plošné hustoty kinetické energie.



Obrázek 18. Plošná hustota energie Stuartova pole.

Pokud vygenerujeme stejný vír jako v proudovém poli ale s opačným směrem otáčení a vložíme na místo ve zkoumaném proudovém poli, rychlostní pole těchto vírů se odečtou a celková kinetická energie bude nižší. Proto má smysl minimalizovat celkovou kinetickou energii proudového pole.

Pro dané vírové pole zvolíme předem model víru, každý vír má maximálně 4 parametry. Tyto parametry budou mít hodnoty stejné (až na směr otáčení neboli znaménko cirkulace) jako parametry víru v proudové pole tehdy, když celková kinetická energie proudového pole nabývá svého minima.

Matematicky je snaha o hledání minima funkcionálu

$$F = \int_S E(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{vír}) dS \rightarrow \min$$

$E(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2$ je plošná hustota kinetické energie, \mathbf{v} je zkoumané proudové pole, $\mathbf{v}_{vír}$ je proudové pole víru

Pro nalezení dalších vírů od původního proudového pole bude odečten vír s určenými parametry, a tak dostaneme nové proudové pole. Toto pole bude výchozím pro další krok a s ním bude opakován postup minimalizaci kinetické energie (funkcionálu F).

Jelikož tato úloha je obecně velmi obtížná budeme používat numerické nástroje pro hledání minima funkcionálu F . Pro zpracování dat je použít software MATLAB, který rovnou nabízí velký rozsah optimalizačních nástrojů.

Realizace kódu v MATLABu:

```
[x,y] = meshgrid(-9:0.6:9,-9:0.6:9); % Generace site pro vypočet
```

```

[u,v]=Proudove_pole(x,y); % Generace zkoumaného proudového pole

%% Zavedení nástroje GlobalSearch pro přizpůsobení metody fmincon na globalní
rng default
gs = GlobalSearch;

%% definice cílové funkce Energy
Cilova_funkce = @(p)Energy(p,u,v,x,y); % p - minimalizační parametry

lb=[-8,-3,-15, 0.3]; %lb - lower boundary - dolní hranice parametrů
ub=[8,3,15,1.5]; % ub - upper boundary - horní hranice parametrů
x0=[0,0,0,0.2]; %pocáteční odhad

% Vytváření objektu pro globalní metodu z lokální (fmincon), cílové funkce,
% počátečního odhadu a rozmezí parametrů
problem =
createOptimProblem('fmincon','objective',Cilova_funkce,'x0',x0,'lb',lb,'ub',ub);

% Spuštění procesu minimalizace
[p,fval] = run(gs,problem) %vypíše hodnotu parametrů p pro nalezené minimum a
%hodnotu minima fval funkce Cilova_funkce

```

Pro hledání minima funkcionálu je použita metoda fmincon, která je schopná najít jenom lokální minimum pro určité rozmezí parametrů. Pro hledání globálního minima použijeme nástroj GlobalSearch Algorithm, který vytvoří objekt z lokální metody, cílové funkce a počátečního odhadu a pokuse se najít globální minimum funkce pro zadanou hodnotu tolerance.

Jelikož MATLAB pracuje s pravidelnou čtvercovou sítí integrál celkové energie v tom případě přejde na sumu

$$F = \sum_{n=1}^{n=k} [\mathbf{v} - \mathbf{v}_{vir}]_n^2$$

Index n symbolizuje bod v proudovém poli složeném z k bodů. Všechny plošné elementy jsou stejné proto rovnou dS vynecháme ze sumace. Jelikož v celé práci budeme považovat hustotu tekutiny za konstantní, ρ je vynechána ze sumy. Jinými slovy odečteme od rychlostního pole vír a vezmeme sumu kvadrantu rychlosti všech bodů z proudového pole.

Realizace funkce v MATLABu:

```

function E = Energy (p,u,v,x,y) %hlavička funkce p -minimalizační parametry; u,v -
% zkoumané proudové pole; x,y - síť proudového pole; E je vrácena hodnota, to co
% minimalizujeme

[m,n]=size(u); % urcování rozměru proudového pole
E=0;

[u_vp,v_vp]=Vír(p(1),p(2),p(3),p(4),x,y); % Vytváření víru s parametru p na síti
<x,y>

% Průčet víru k proudovému poli
u=u+u_vp;
v=v+v_vp;

```

```

%Sumace
for i=1:m

    for j=1:n
        %Energie je odmocnina souctu kvadrantu rychlosti
        E=E+sqrt(u(i,j)^2+v(i,j)^2);
    end
end

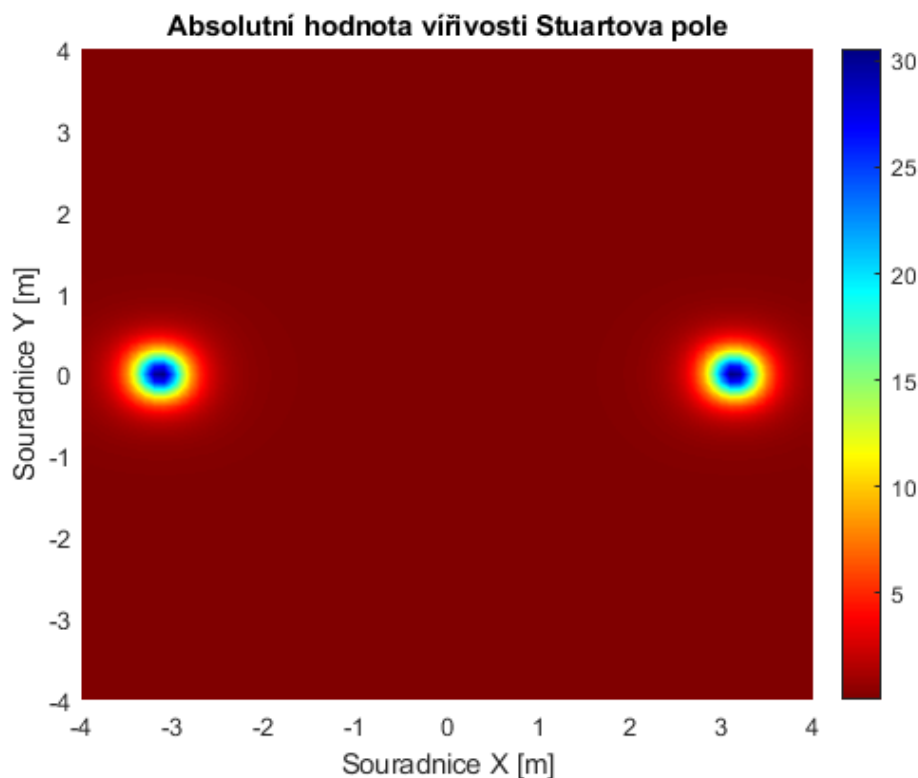
end
end

```

Funkce Energy (p,u,v,x,y) přijímá vektor minimalizačních parametrů \mathbf{p} ; zkoumané proudové pole u,v; a společnou pro celou úlohu síť x,y, která je argumentem ve všech funkcích kvůli správnému určování proudového pole. Funkce Vír(p(1), p(2), p(3), p(4), x, y) generuje proudové pole víru podle jednoho z modelu z odstavce 6.

7.2. Rotace

O přítomnosti víru může vypovídat hodnota vířivosti proudového pole. Na obr. 19 je znova Stuartovo proudové pole tentokrát je graficky zobrazená hodnota vířivosti.



Obrázek 19. Absolutní hodnota rotace Stuartova pole.

Je vidět, že vířivost má vyšší hodnotu v oblastech s víry. Proto má smysl zmenšovat celkovou plošnou hustotu intenzity víru neboli vířivosti

Druhý funkcionál pro minimalizaci je plošná intenzita vířivosti

$$\Phi = \int_S |\omega| dS = \int_S |\text{rot}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\text{vír}})| dS \rightarrow \min$$

Absolutní hodnota je dána tím, že vířivost může nabývat záporných hodnot. Vyjadřuje celkový rotační účinek pole.

Pro pravidelnou čtvercovou síť MATLABu integrál celkové rotace v tom případě přejde na sumu

$$\Phi = \sum_{n=1}^{n=k} |\text{rot}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\text{vir}})|_n$$

Realizace minimalizačních nástrojů v MATLABu je stejná, ale cílová funkce má jinou definici:

```
function circulation = Rotorr (p,u,v,x,y) %hlavicka funkce p -minimalizacni
%parametry; u,v - % zkoumane proudove pole; x,y - sit proudoveho pole; circulation
%je vracena honota, to co minimalizujeme
```

```
[u_vp,v_vp]=Vir(p(1),p(2),p(3),p(4),x,y); % Vytvoreni viru s parametru p na siti
<x,y>
```

```
% Pricitani viru k proudovemu poli
u=u+u_vp;
v=v+v_vp;
```

```
[W,~] = curl(x,y,u,v); % vypocet rotaci pole
[m,n] = size(W); % urcovani rozmeru proudoveho pole
circulation=0;
```

```
for i=1:m
    for j=1:n
        %scitame absolutni hodnotu cirkulace
        circulation=circulation+abs( W(i,j) );
    end
end
end
```

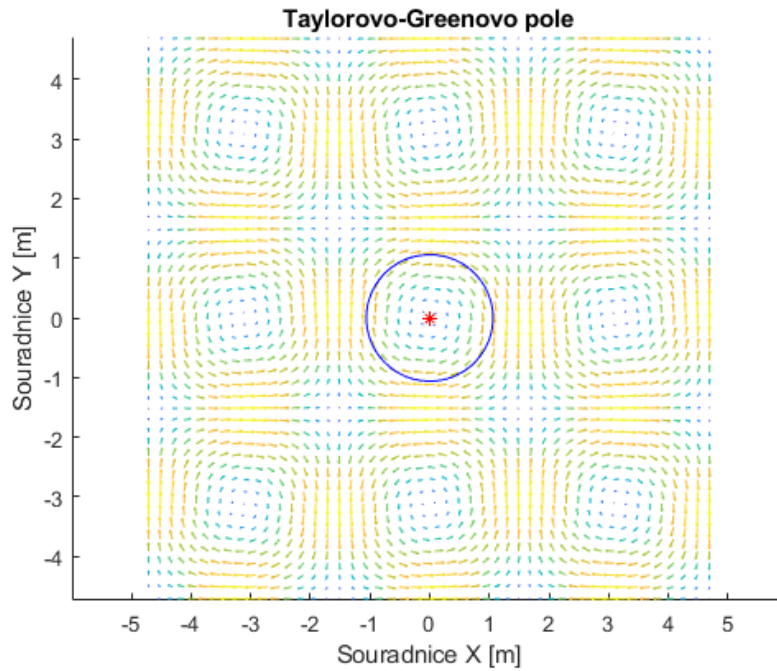
8. Aplikace na analytických proudových polích

8.1. Aplikace na Taylorovém-Greenovém vírovém poli

8.1.1. Minimalizace energie

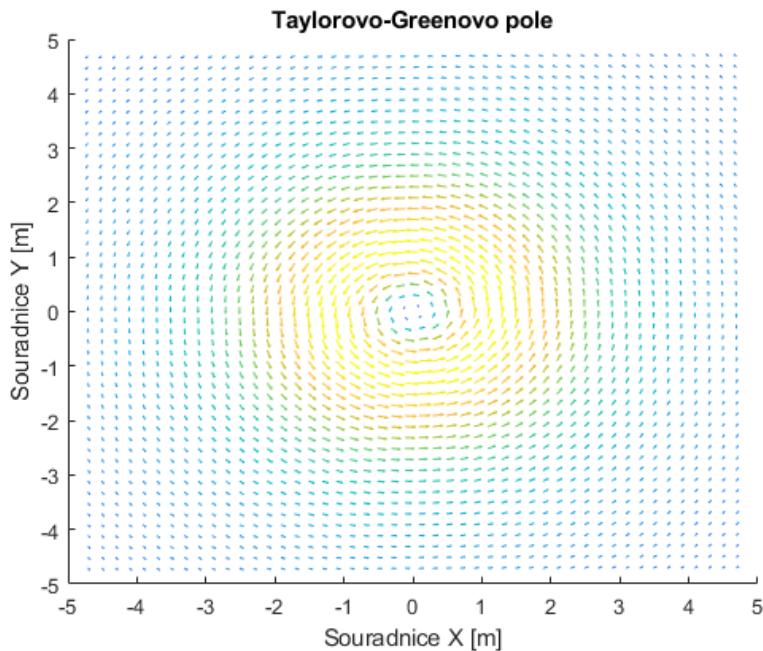
Na obr. 13 je vygenerováno Taylorovo-Greenovo vírové pole z odstavce 6.1. pro $x \in \langle -\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \rangle$ a $y \in \langle -\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \rangle$, které celkem obsahuje 9 vířů. Nejprve bude vyzkoušena minimalizace celkové energie za použití Lambova-Oseenova víru.

Počáteční odhad je statický a je umístěn uprostřed pole tzn. $x = 0$ a $y = 0$, počáteční hodnota cirkulaci je 0, počáteční hodnotu poloměru jádra je malé kladné číslo např. 0.001, nebo souhrnně $\langle x, y, \Gamma, R \rangle_0 = \langle 0, 0, 0, 0.001 \rangle$. První testovaný funkcionál je celková kinetická energie pole. První nalezený vír je na obr. 20.



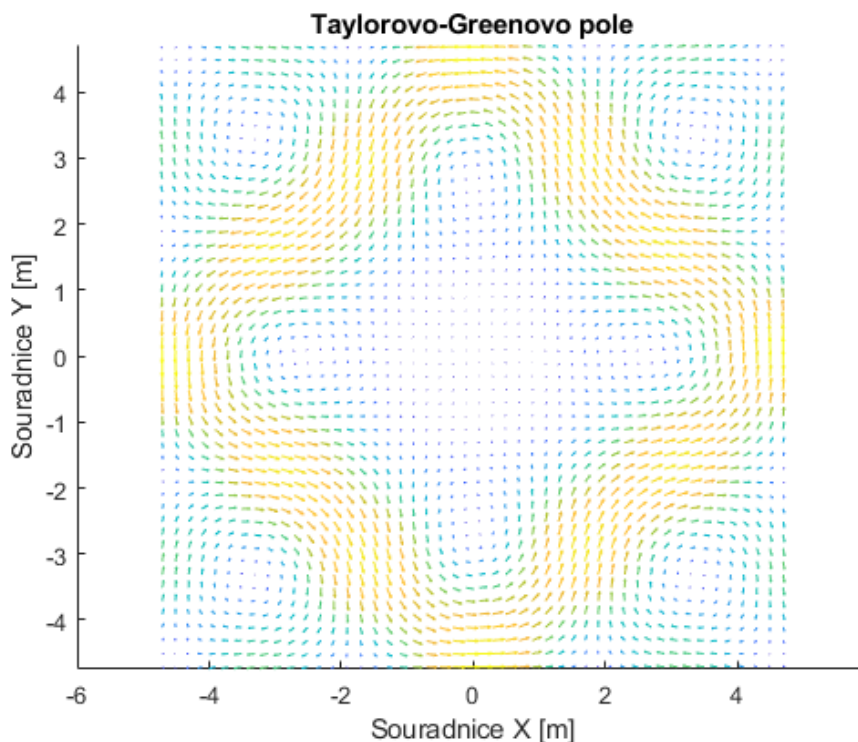
Obrázek 20. První nalezený Lambův-Oseenův vír v Taylorově-Greenově poli.

Identifikované parametry jsou $\langle x, y, \Gamma, R \rangle_1 = \langle -0.0000 \quad -0.0000 \quad 3.9207 \quad 0.6411 \rangle$. Poloha víru byla nalezená přesně. Samotný identifikovaný vír je na obr. 21. Pozoruje se rozsáhlá obálka Lambova-Oseenova víru, která významně ovlivňuje celé proudové pole.



Obrázek 21. Identifikovaný Lambův-Oseenův vír.

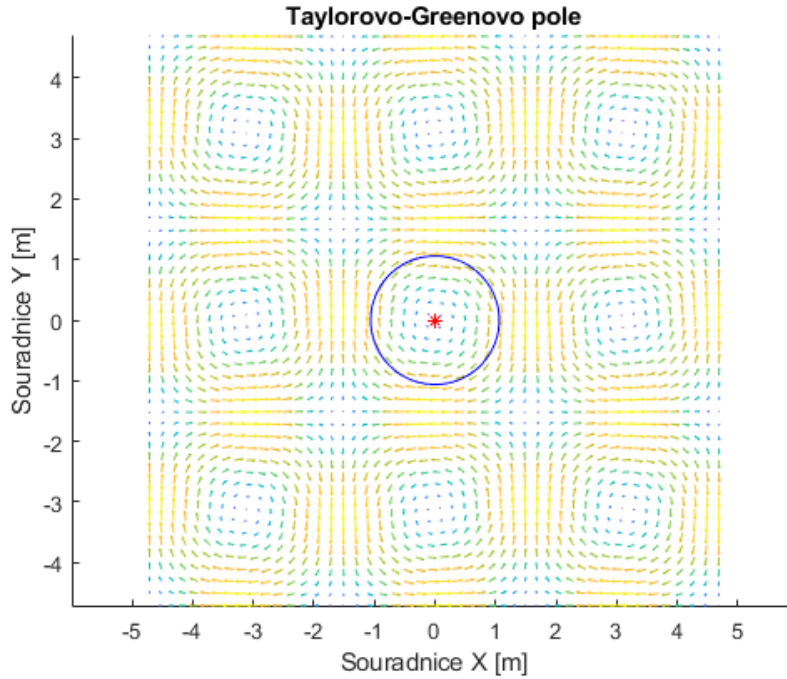
Proudové pole po odečtení Lambova-Oseenova víru z obr. 21 je na obr. 22.



Obrázek 22. Taylorovo-Greenovo vírové pole po odečtení Lambova-Oseenova víru

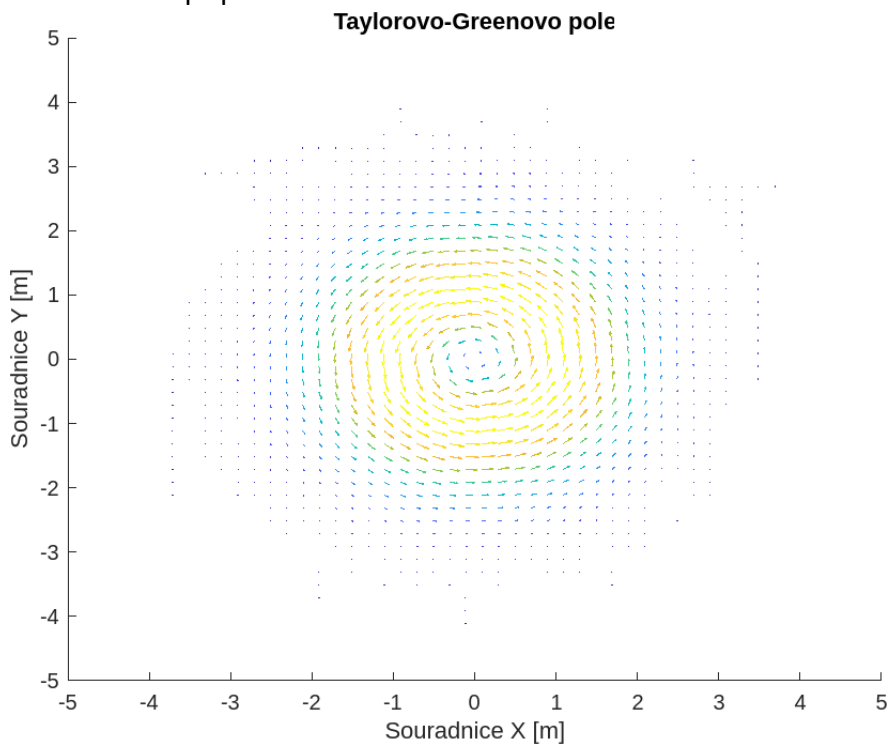
Optimalizační nástroj se při minimalizaci funkcionálu snaží přizpůsobit rychlostní profil celého modelu. U Lamb-Oseenova modelu je pomalý pokles rychlosti, proto se algoritmus snaží vyhovět i této vzdálené od jádra oblasti, která dokonce má větší „energetickou váhu“ než jádro. Jinými slovy odečtení Lambova-Oseenova víru zasahuje i vedlejší víry. Proudové pole po vložení Lambova-Oseenova víru není použitelné pro identifikaci dalších vírů. Jak je vidět porovnání rychlostních profilu na obr. 10 stejný problém nastává u všech víru kromě Gaussova, který má větší útlum rychlosti.

Pro popis experimentálních dat bez teoretického obhájení se může použít Gaussův vír [17]. Na obr. 23 je výsledek identifikace pro Taylorovo-Greenovo proudové pole tentokrát s modelem Gaussova víru.



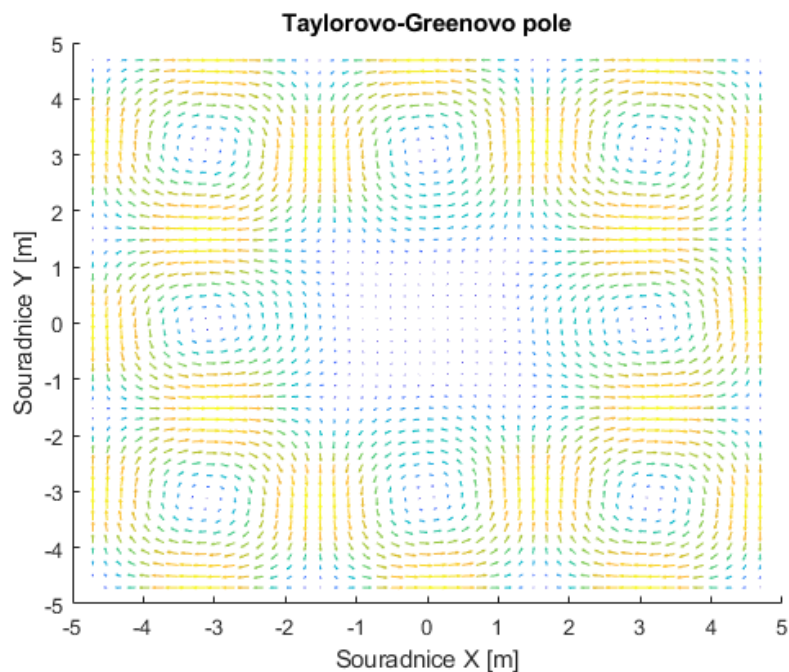
Obrázek 23. První nalezený Gaussův vír v Taylorovém-Greenovém poli.

Identifikované parametry jsou $\langle x, y, \Gamma, R \rangle_1 = \langle 0.0001 \ 0.0001 \ 8.6020 \ 1.0609 \rangle$ Poloha víru byla nalezená s absolutní chybou $\delta = 0,0001 \text{ m}$, což je interpretováno jako numerická nepřesnost. Identifikovaný Gaussův vír je na obr. 24. Je vidět, že rychlost při vzdalování od poloměru klesá více než v případě Lambova-Oseenova víru.



Obrázek 24. Identifikovaný Gaussův vír.

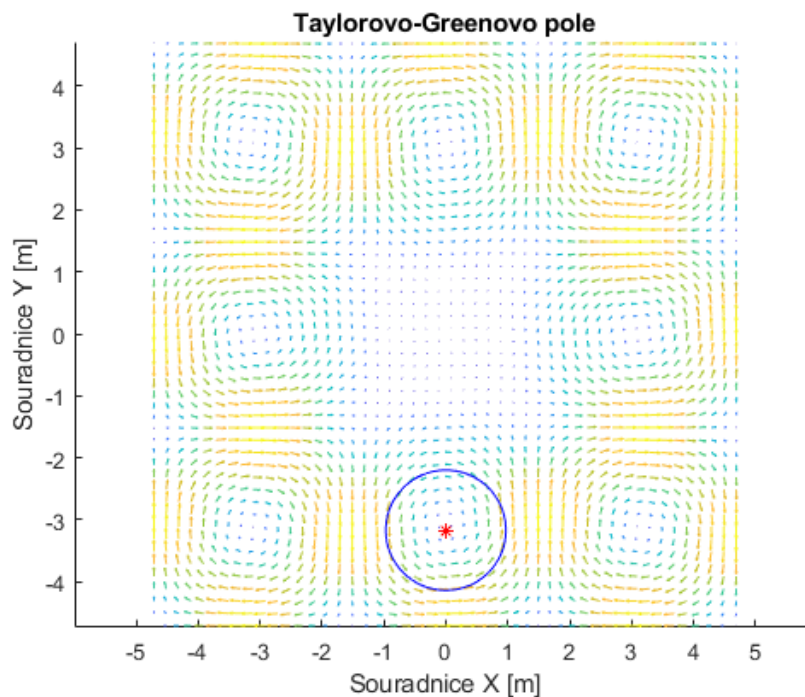
Proudové pole po odečtení Gaussova víru z obr. 24 je na obr. 25.



Obrázek 25. Taylorovo-Greenovo pole po odečtení Gaussova víru

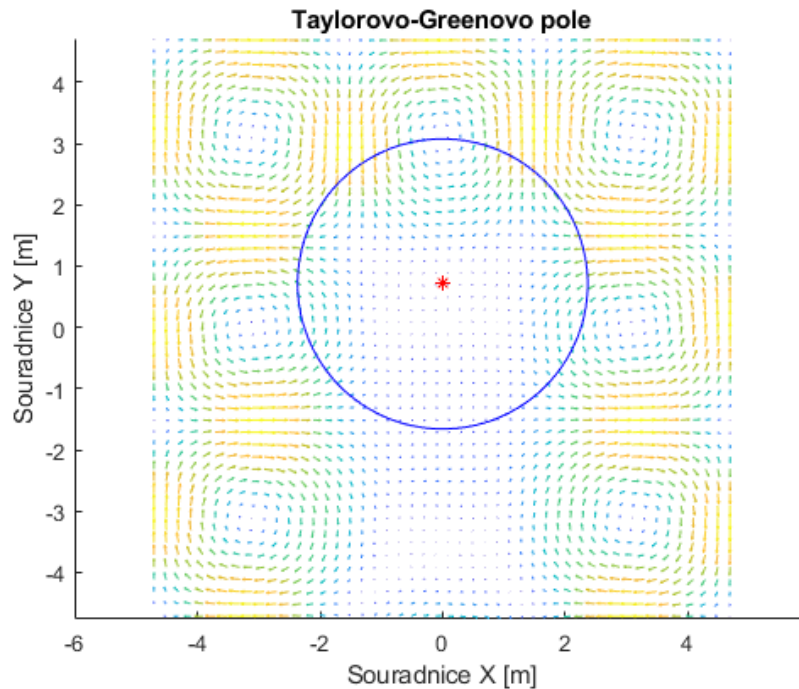
V Taylorově-Greenově proudovém poli po odečtení Gaussova víru ostatní víru jsou ovlivněny mnohem méně než při odečtení Lambova-Oseenova víru, proto toto pole je použitelné pro identifikaci dalších vírů.

Podle algoritmu navrženého v odstavci 7 se toto proudové pole uloží a použije se jako výchozí pro identifikaci dalšího víru. Druhý identifikovaný vír je na obr. 26.



Obrázek 26. Druhý identifikovaný vír v Taylorově-Greenově poli pomocí Gaussova modelu víru.

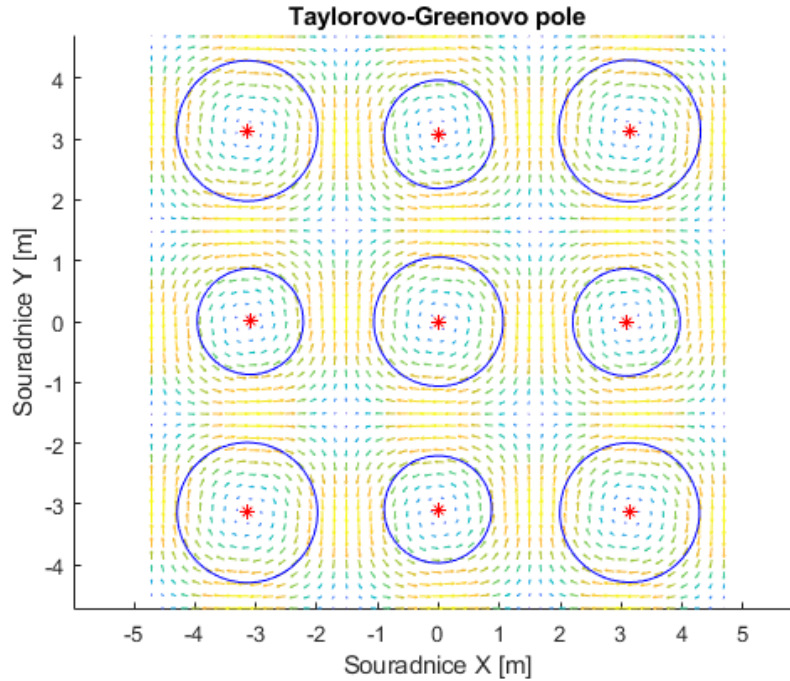
Identifikované parametry jsou $\langle x, y, \Gamma, R \rangle_2 = \langle -0.0001 \quad -3.1685 \quad -7.3021 \quad 0.9701 \rangle$. Skutečná poloha víru je $\langle x, y, \rangle_2 = \langle 0, -\pi \rangle = \langle 0, -3.1415 \rangle$. Odchylka polohy na ose y je $\delta = 0,0269 \text{ m}$, je daná tím, že z výchozího pole (obr.25) v předchozím kroku byl odečten vír ve středu a tím odebrán horní okraj aktuálního víru. Pole po odečtení druhého víru je znova použito jako výchozí proudové pole pro identifikace třetího víru. Třetí identifikovaný vír je na obr. 27.



Obrázek 27. Třetí identifikovaný vír v Taylorovém-Greenovém poli pomocí Gaussova modelu víru.

Optimalizační nástroj se snaží vložit vír o větším poloměru pro minimalizaci hodnoty celkové kinetické energie. Toto řešení není fyzikální. Aby tento postup korektně fungoval je třeba omezit hodnotu parametru R , tím vyloučíme řešení z obr. 27, kde optimalizační nástroj vkládá vír o velkém poloměru jádra a odebírá energii z více okolních vírů najednou.

Na obr. 28 je výsledek identifikace minimalizací celkové kinetické energie proudění s omezením parametrů poloměru jádra víru $R \in (0.7 ; 1.7)$



Obrázek 28. Úspěšná identifikace vírů v Taylorovém-Greenovém poli pomocí Gaussova modelu víru.
 $R \in (0.7; 1.7)$

Na obr. 28 je zobrazeno Taylorovo-Greenovo proudové pole v čase $t = 0s$ s identifikovanými víry bez odečítání těchto víru. Nalezené víry mají parametry:

$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_0 = \langle 0, 0, 0, 0.001 \rangle$ počáteční odhad parametrů je stejný

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_1 = \langle 0.0001 \quad 0.0001 \quad 8.6020 \quad 1.0609 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_2 = \langle 3.1381 \quad -3.1383 \quad 9.2626 \quad 1.1461 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_3 = \langle -3.1387 \quad -3.1392 \quad 9.3330 \quad 1.1523 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_4 = \langle -3.1392 \quad 3.1370 \quad 9.3417 \quad 1.1547 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_5 = \langle 3.1380 \quad 3.1381 \quad 9.4181 \quad 1.1642 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_6 = \langle -3.0905 \quad 0.0019 \quad -4.8842 \quad 0.8702 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_7 = \langle -0.0091 \quad -3.0859 \quad -4.9341 \quad 0.8806 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_8 = \langle 3.0847 \quad -0.0111 \quad -4.9149 \quad 0.8805 \rangle$$

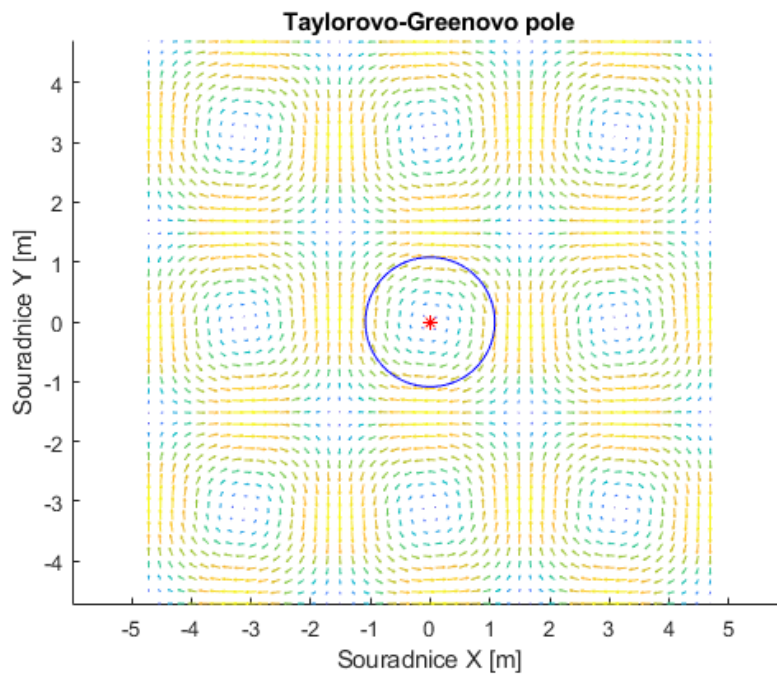
$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_9 = \langle 0.0041 \quad 3.0800 \quad -4.9505 \quad 0.8912 \rangle$$

Skutečné polohy vírů jsou v bodech $x = k\pi$; $y = p\pi$; $k, p \in \{0,1\}$. V každém dalším kroku polohy byly určeny méně přesně, protože celé proudové pole je zasaženo vlivem odečtení vírů z předchozích kroků.

Z hodnot těchto parametrů je vidět, že na začátku minimalizační nástroj vkládal víry o větší cirkulaci a poloměru, proto bylo odebráno více energie, než skutečně jednomu víru náleží, hodnoty parametrů cirkulace a poloměru pro poslední víry mají tendenci klesat.

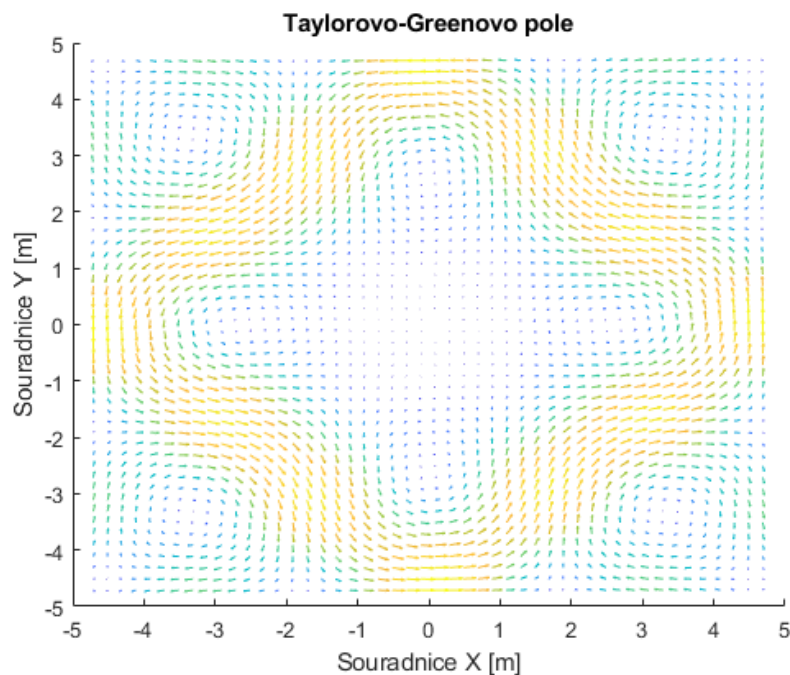
8.1.2. Minimalizace rotace

Aplikace minimalizace celkové rotace z odstavce 7.2 pro Taylorovo-Greenovo pole a Lambův-Oseenův model víru s rozvolněnými parametry je na obr. 29.



Obrázek 29. První identifikovaný vír v Taylorově-Greenově poli pomocí Lambova-Oseenova víru.

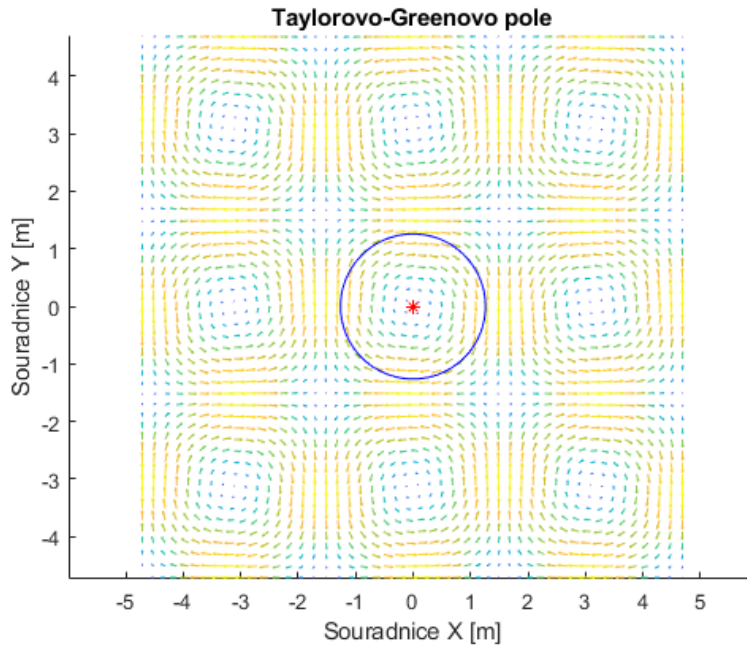
Nalezený vír má parametry $\langle x, y, \Gamma, R \rangle_1 = \langle -0.0016 \quad -0.0016 \quad 8.6420 \quad 1.0830 \rangle$. Poloha víru byla nalezená s absolutní chybou $\delta = 0,0016 \text{ m}$, což je interpretováno jako numerická nepřesnost. Identifikovaný poloměr víru je větší než při minimalizaci celkové kinetické energie. Proudové pole z obr. 29 po odečtení Lambova-Oseenova víru je na obr. 30.



Obrázek 30. Taylorovo-Greenovo vírové pole po odečtení Lambova-Oseenova víru.

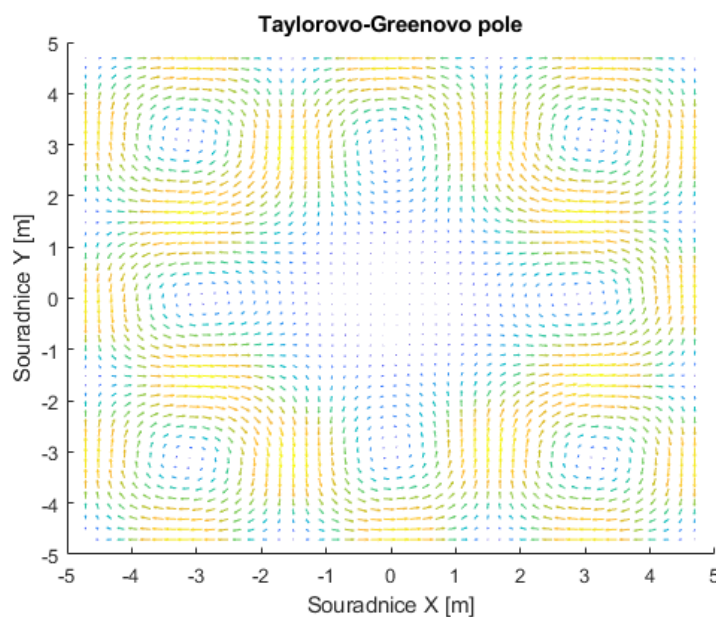
Situace je stejná jako u minimalizace celkové kinetické energie, Lambův-Oseenův model má velmi malý útlum rychlosti, proto při odečtení prvního víru vzniká pole, kde ostatní víry jsou ovlivněny a nelze je správně identifikovat.

Pro eliminaci tohoto jevu v minimalizačním algoritmu je použit Gaussův vír s větším útlumem tečné rychlosti, výsledek identifikace prvního víru je na obr. 31.



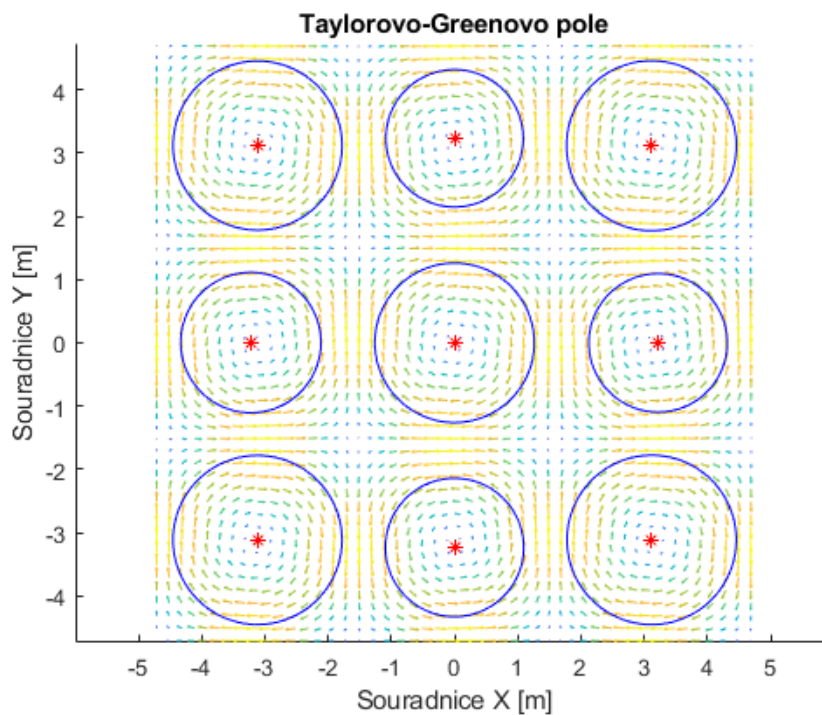
Obrázek 31. První identifikovaný vír v Taylorově-Greenově poli pomocí Gaussova víru.

První nalezený vír má parametry $\langle x, y, \Gamma, R \rangle_1 = \langle -0.0006 \quad -0.0006 \quad 10.8022 \quad 1.2606 \rangle$. Poloha víru byla nalezená s absolutní chybou $\delta = 0,0006 \text{ m}$, což je interpretováno jako numerická nepřesnost. Identifikovaný vír minimalizací celkové rotace má větší poloměr a cirkulaci než při minimalizaci celkové kinetické energie. Proudové pole z obr. 31 po odečtení víru je na obr. 32.



Obrázek 32. Taylorovo-Greenovo pole po odečtení Gaussova víru.

Ostatní víry jsou méně ovlivněny odečtením Gaussova víru a takovéto pole už je vhodné pro identifikaci dalších vírů. Pokročení identifikace minimalizací funkcionálu celkové rotace je na obr. 33.



Obrázek 33. Úspěšná identifikace vírů v Taylorově-Greenově poli pomocí Gaussova modelu víru.

Na obr. 33 je zobrazeno Taylorovo-Greenovo proudové pole v čase $t = 0$ s identifikovanými víry bez odečítání těchto víru. Víry byly identifikovány bez omezení parametrů. Parametry nalezených vírů jsou:

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_1 = \langle -0.0006 \quad -0.0006 \quad 10.8022 \quad 1.2606 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_2 = \langle 3.1138 \quad 3.1138 \quad 11.8491 \quad 1.3434 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_3 = \langle -3.1167 \quad -3.1167 \quad 11.7511 \quad 1.3363 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_4 = \langle 3.1163 \quad -3.1155 \quad 11.7786 \quad 1.3384 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_5 = \langle -3.1156 \quad 3.1169 \quad 11.7510 \quad 1.3365 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_6 = \langle -0.0005 \quad -3.2353 \quad -5.3259 \quad 1.0939 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_7 = \langle -0.0006 \quad 3.2313 \quad -5.2652 \quad 1.0860 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_8 = \langle -3.2221 \quad 0.0028 \quad -5.3813 \quad 1.1092 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_9 = \langle 3.2178 \quad -0.0015 \quad -5.2662 \quad 1.0944 \rangle$$

Skutečné polohy vírů jsou v bodech $x = k\pi$; $y = p\pi$; $k, p \in \{0,1\}$. Polohy vírů byly nalezené méně přesné než pro minimalizaci funkcionálu energie. V každém dalším kroku přesnost identifikace polohy středu víru klesá, protože celé proudové pole je zasaženo vlivem odečtení vírů z předchozích kroků.

Situace je velmi shodná s minimalizací celkové energie. Z hodnot těchto parametrů je vidět, že na začátku minimalizační nástroj vkládal víry o větší cirkulaci a poloměru, proto bylo odebráno více rychlosti, než skutečně jednomu víru náleží, hodnoty parametrů cirkulace a poloměru pro poslední víry jsou menší.

8.1.3. Shrnutí pro Taylorovo-Greenovo pole

V Taylorově-Greenově poli víry lze identifikovat jak minimalizací celkové kinetické energie, tak minimalizací celkové rotace.

Lambův-Oseenův, Kaufmannův a Rankineův jsou vhodné jenom pro identifikaci jednoho víru, protože po odečtení prvního víru proudové pole je silně ovlivněno obálkou víru, která má velmi pomalý pokles úměrný $1/r$ (obr. 10).

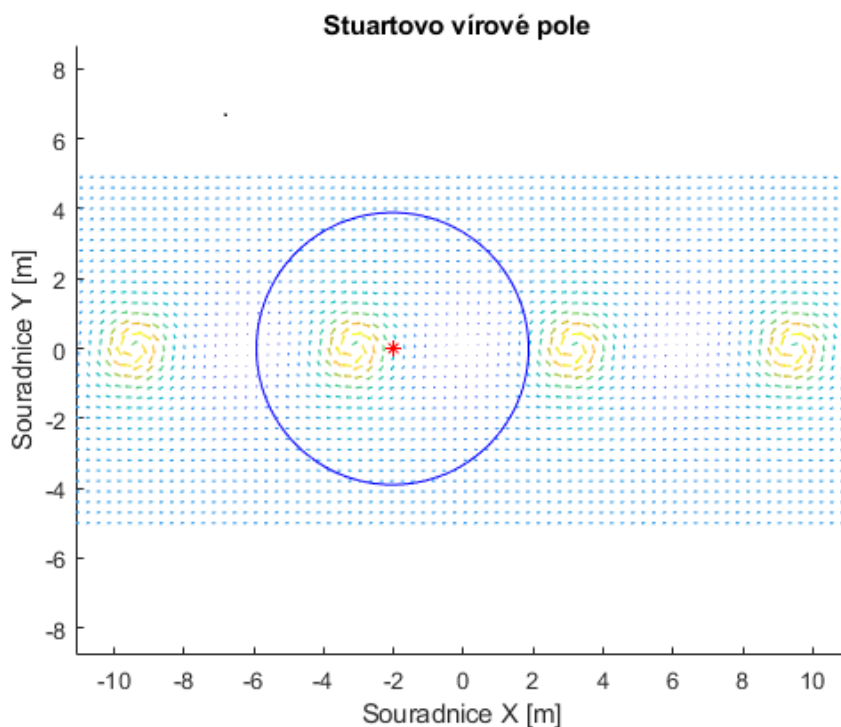
Jediný vír, který má větší útlum a je vhodný pro identifikaci více než jednoho víru, je Gaussův vír. Pro správnou identifikaci minimalizací celkové kinetické energie pomocí Gaussova modelu bylo potřeba omezit hodnotu parametrů poloměru jádra $R \in (0.7; 1.7)$. V případě identifikace minimalizací rotace s Gaussovým modelem omezení parametrů není potřeba.

8.2. Aplikace na Stuartově vírovém poli

8.2.1. Minimalizace energie

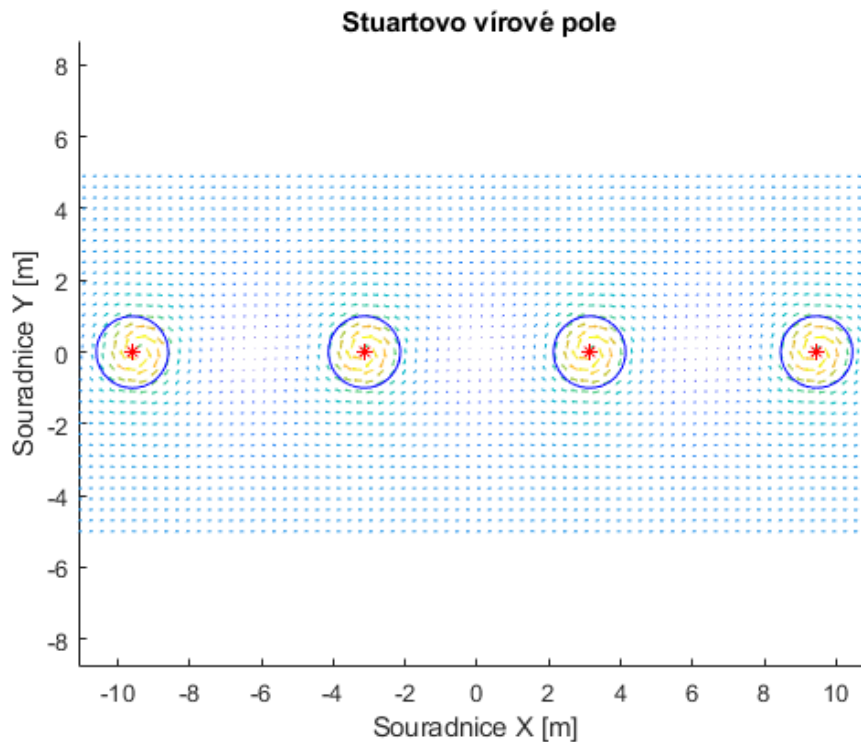
V MATLABu je vygenerováno Stuartovo vírové pole z odstavce 6.2. pro $x \in (-11; 11)$ a $y \in (-5; 5)$, které celkem obsahuje 4 víry. Nejprve bude vyzkoušena minimalizace celkové energie za použití Lambova-Oseenova víru.

Počáteční odhad je statický a je umístěn uprostřed pole tzn. $\langle x, y, \Gamma, R \rangle_0 = \langle 0, 0, 0, 0.01 \rangle$. Parametry nejsou omezené. První nalezený vír je na obr. 34.



Obrázek 34. Stuartovo pole. Identifikace bez omezení parametrů.

Je zřejmé, že to není fyzikální řešení, je nalezeno jenom, protože takto vložený vír minimalizuje celkovou energii nejvíce. Pro identifikaci smysluplných vírů je třeba omezit maximální hodnotu parametru například na $R \in \langle 0.1 ; 1 \rangle$. Výsledek pro identifikaci s takovým omezením je na obr. 35.



Obrázek 35. Stuartovo pole. Identifikace s omezeným poloměrem jádra

Parametry nalezených víru jsou

$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_0 = \langle 0, 0, 0, 0.1 \rangle$ počáteční odhad parametrů je stejný

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_1 = \langle -3.1393 \quad 0.0003 \quad 19.7446 \quad 1.0000 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_2 = \langle 9.4576 \quad -0.0006 \quad 20.6367 \quad 1.0000 \rangle$$

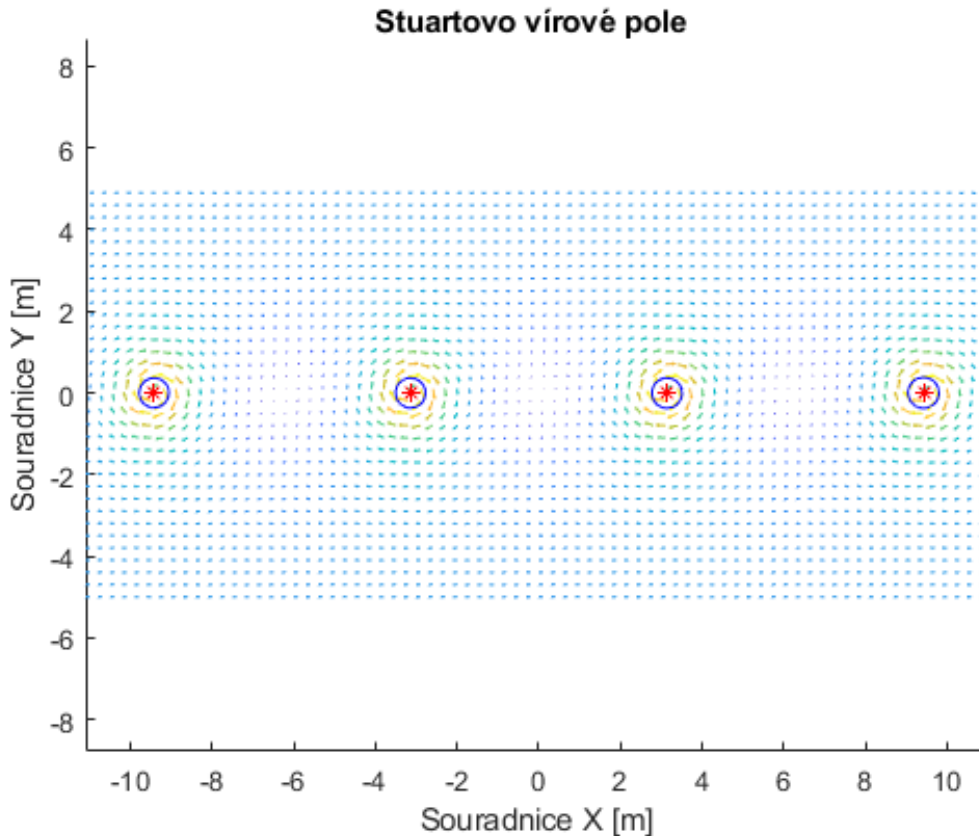
$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_3 = \langle 3.1345 \quad -0.0009 \quad 19.4824 \quad 1.0000 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_4 = \langle -9.6001 \quad -0.0032 \quad 25.1840 \quad 1.0000 \rangle$$

Skutečné polohy víru jsou $x \in \{-3\pi, -\pi, \pi, 3\pi\} = \{-9.424, -3.1415, 3.1415, 9.424\}$ a byly nalezené s největší absolutní chybou $\delta = -0,1761$. Všechny nalezené víry mají hodnotu poloměru jádra $R = 1$, protože optimalizační nástroj minimalizuje celkovou energii proudového pole a volba velkého poloměru jádra víru přispívá k odečtení rychlosti mimo víry. Situace je stejná i pro Gaussův vír.

8.2.2. Minimalizace rotace

Aplikace minimalizace celkové rotace z odstavce 7.2 s rozvolněnými parametry a pomocí Lambova-Oseenova víru je na obr. 36.



Obrázek 36. Identifikace ve Stuartově vírovém poli pomocí Lambova-Oseenova víru

Parametry nalezených víru jsou

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_0 = \langle 0, 0, 0, 0.1 \rangle \text{ počáteční odhad parametrů je stejný}$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_1 = \langle 9.4257 \quad 0.0008 \quad 10.6529 \quad 0.3772 \rangle$$

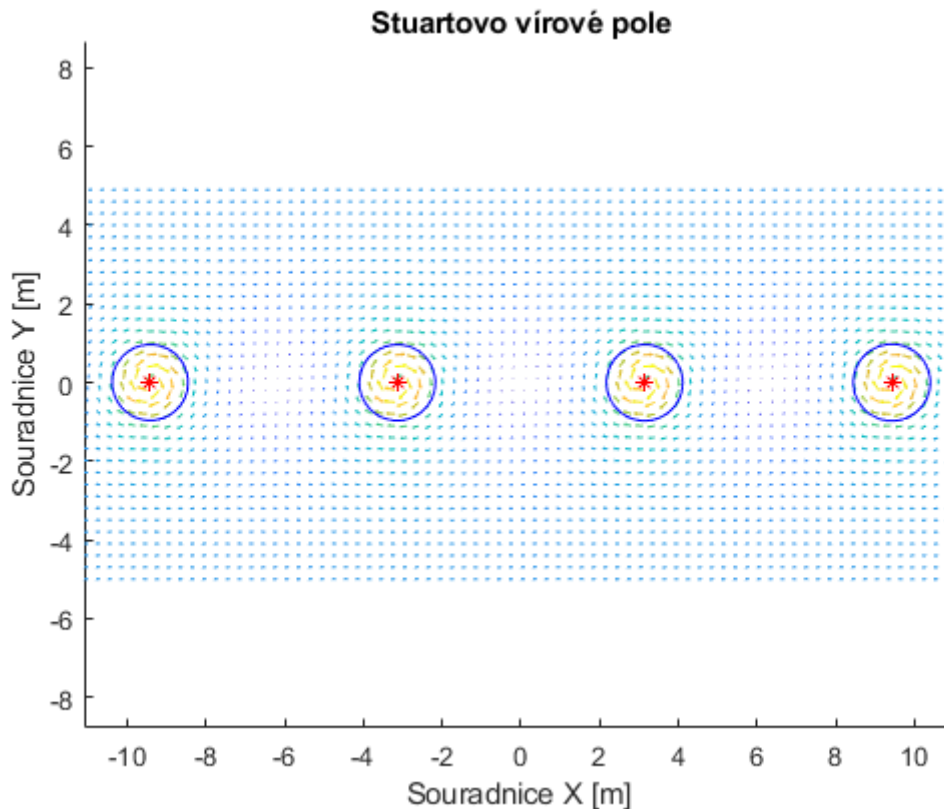
$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_2 = \langle 3.1419 \quad -0.0046 \quad 10.7243 \quad 0.3692 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_3 = \langle -3.1427 \quad -0.0028 \quad 10.7464 \quad 0.3659 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_4 = \langle -9.4266 \quad 0.0006 \quad 10.7252 \quad 0.3633 \rangle$$

Skutečné polohy víru jsou $x \in \{-3\pi, -\pi, \pi, 3\pi\} = \{-9.424, -3.1415, 3.1415, 9.424\}$ největší absolutní chyba je $\delta = 0,0028 \text{ m}$. Všechny víry byly identifikované úspěšně bez omezení minimalizačních parametrů pomocí Lambova-Oseenova modelu. V tomto případě Lambův-Oseenův model je použitelný, protože víry Stuartova pole jsou daleko od sebe a vložení Lambova-Oseenova víru velmi málo ovlivní ostatní víry.

Výsledky pro identifikaci s Gaussovým modelem je na obr. 37.



Obrázek 37. Identifikace ve Stuartově vírovém poli pomocí Gaussova víru

Parametry nalezených víru jsou

$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_0 = \langle 0, 0, 0, 0.1 \rangle$ počáteční odhad parametrů je stejný

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_1 = \langle 9.4872 \quad 0.0217 \quad 4.6785 \quad 0.9150 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_2 = \langle -9.4894 \quad -0.0079 \quad 4.3422 \quad 0.9787 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_3 = \langle -3.1412 \quad -0.0012 \quad 4.4212 \quad 0.9231 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_4 = \langle 3.1425 \quad -0.0058 \quad 4.2212 \quad 0.9130 \rangle$$

Víry byly identifikovány bez omezení minimalizačních parametrů. Nalezené víry mají větší poloměr a menší cirkulaci, protože minimalizační nástroj volí větší poloměr, aby přizpůsobil průběh rychlosti Gaussova víru na profil víru Stuartova pole a minimalizoval celkovou rotaci v místech vírů.

8.2.3. Shrnutí pro Stuartovo pole

V případě minimalizace energie je potřeba omezit maximální hodnotu poloměru víru, jelikož se optimalizační nástroj snaží minimalizovat i energii proudění mimo víry.

V případě minimalizace celkové rotace, víry ve Stuartově poli se dají jednoduše identifikovat bez omezení minimalizačních parametrů jak pomocí modelu s pomalým poklesem rychlosti, tak i pomocí Gaussova statistického víru. Jednoduchost identifikace je dána rozložením vířivosti, která je mimo víry nulová (obr. 19)

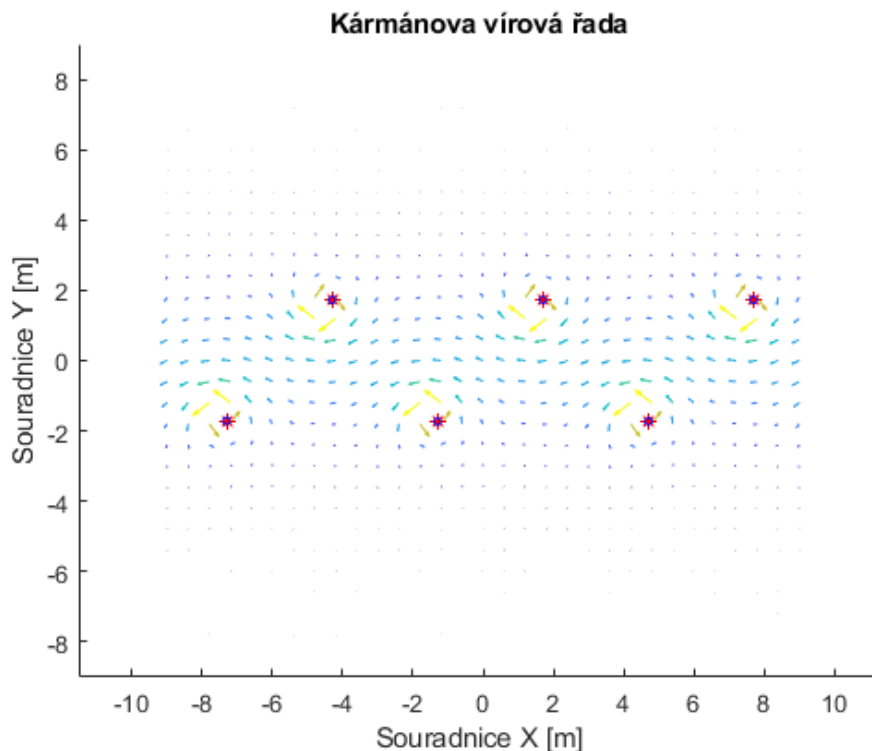
8.3. Aplikace na Karmánově vírové řadě

8.3.1. Minimalizace energie

V MATLABu je vygenerovaná analytická Karmánova vírová řada o šesti vírech pro $x \in \langle -9; 9 \rangle$ a $y \in \langle -9; 9 \rangle$ z odstavce 6.3.

Počáteční odhad je statický a je umístěn uprostřed pole tzn. $\langle x, y, \Gamma, R \rangle_0 = \langle 0, 0, 0, 0.1 \rangle$.

V případě použití Lambova-Oseenova modelu se všechny víry podařilo identifikovat jenom při omezení poloměru jádra víru $R \in \langle 0.1; 2 \rangle$, výsledek je na obr. 38.



Obrázek 38. Identifikace v Karmánově vírové řadě pomocí Lambova-Oseenova víru

Nalezené víry mají parametry

$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_0 = \langle 0, 0, 0, 0.1 \rangle$ počáteční odhad parametrů je stejný

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_1 = \langle 7.7004 \quad 1.7333 \quad 0.1246 \quad 0.1000 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_2 = \langle 4.7028 \quad -1.7311 \quad -0.1845 \quad 0.1000 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_3 = \langle 1.7009 \quad 1.7308 \quad 0.1861 \quad 0.1000 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_4 = \langle -1.2989 \quad -1.7294 \quad -0.2144 \quad 0.1000 \rangle$$

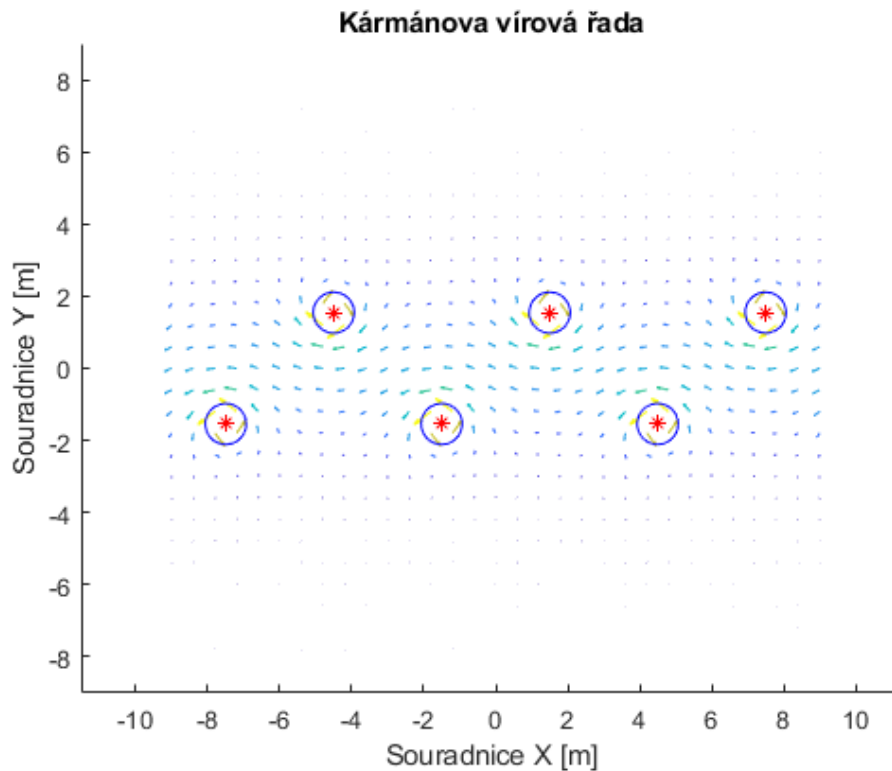
$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_5 = \langle -4.2989 \quad 1.7273 \quad 0.2663 \quad 0.1000 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_6 = \langle -7.3049 \quad -1.7196 \quad -0.3345 \quad 0.1017 \rangle$$

Identifikace Lambovým-Oseenovým modelem je vhodná jenom pro přibližné určení polohy. Rychlostní profil vírů v Karmánově vírové řadě má potenciální charakter, jelikož proudové pole

je odvozeno pomocí komplexního potenciálu potenciálního víru (odstavec 5.3). Algoritmus identifikuje víry s velmi malým poloměrem, aby přizpůsobil Lambův-Oseenův průběh rychlosti, který má více energie v obálce na potenciální průběh rychlosti, který má více energie ve středu víru (obr. 10) a odečetl co nejvíce energie.

V případě použití Gaussova modelu se všechny víry podařilo identifikovat jenom při omezení poloměru jádra víru $R \in \langle 0.1; 0.6 \rangle$ výsledek je na obr. 39.



Obrázek 39. Identifikace v Karmánově vírové řadě pomocí Gaussova víru

Parametry vírů jsou

$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_0 = \langle 0, 0, 0.1, 0.1 \rangle$ počáteční odhad parametrů je stejný

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_1 = \langle 1.5000 \quad 1.5459 \quad 2.1057 \quad 0.5684 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_2 = \langle 4.5000 \quad -1.5459 \quad -2.1057 \quad 0.5684 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_3 = \langle -1.5000 \quad -1.5459 \quad -2.1057 \quad 0.5684 \rangle$$

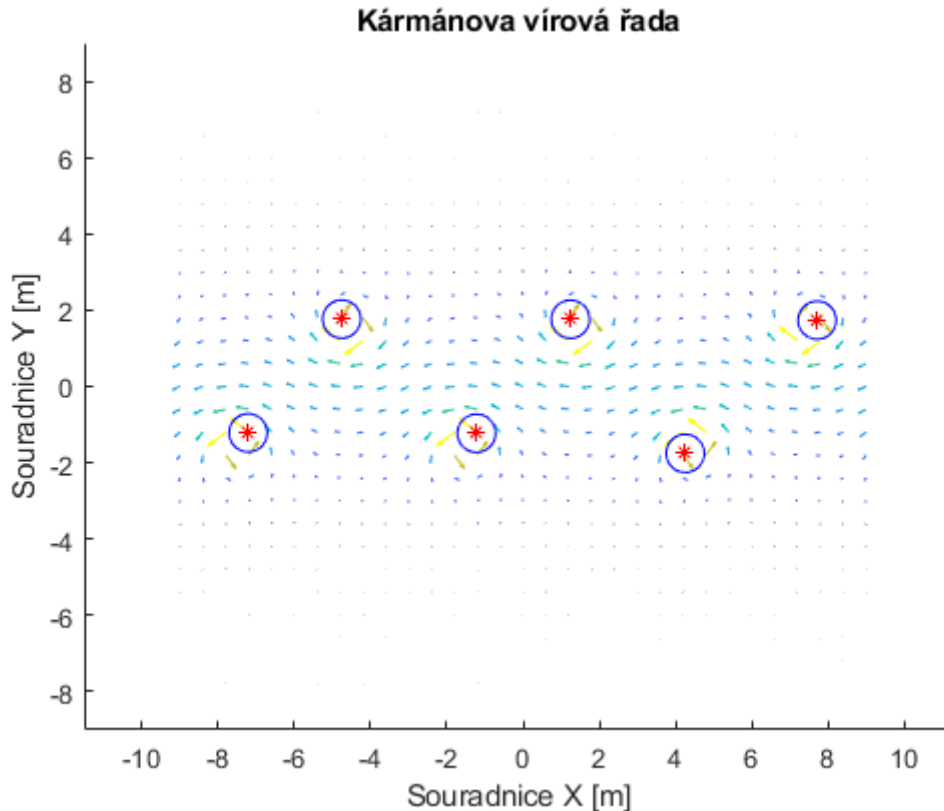
$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_4 = \langle -4.5000 \quad 1.5459 \quad 2.1057 \quad 0.5684 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_5 = \langle 7.4993 \quad 1.5470 \quad 2.1037 \quad 0.5668 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_6 = \langle -7.4993 \quad -1.5470 \quad -2.1037 \quad 0.5668 \rangle$$

Jelikož Kármánova vírová řada je odvozená pomocí komplexního potenciálu potenciálního víru, je možno použít pro identifikaci model potenciálního víru.

Výsledek pro identifikaci s potenciálním vírem bez omezení parametrů je na obr. 40.



Obrázek 40. Identifikace v Kármánově vírové řadě pomocí potenciálního víru

Parametry nalezených vírů jsou

$\langle x, y, \Gamma \rangle_0 = \langle 0, 0, 0 \rangle$ počáteční odhad parametrů je stejný

$$\langle x, y, \Gamma \rangle_1 = \langle -7.2140 \quad -1.2182 \quad -0.0100 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma \rangle_2 = \langle -4.7597 \quad 1.7701 \quad 0.0163 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma \rangle_3 = \langle -1.2221 \quad -1.2286 \quad -0.0156 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma \rangle_4 = \langle 1.2448 \quad 1.7666 \quad 0.0182 \rangle$$

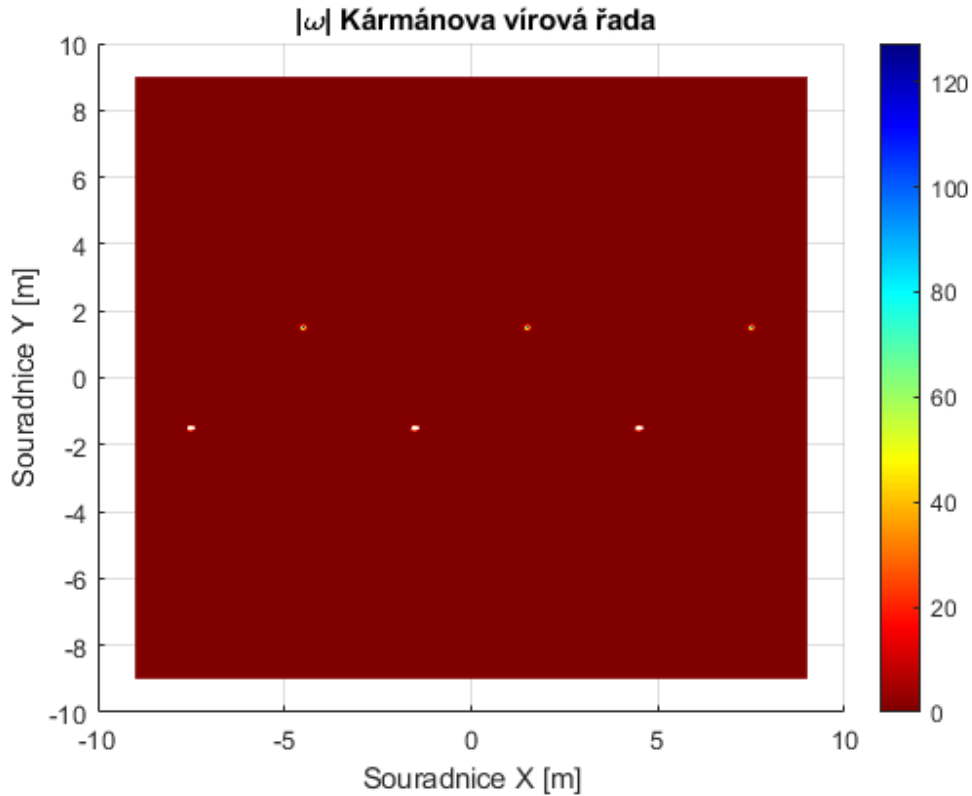
$$\langle x, y, \Gamma \rangle_5 = \langle 4.2570 \quad -1.7577 \quad -0.0232 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma \rangle_6 = \langle 7.7185 \quad 1.7398 \quad 0.0332 \rangle$$

Potenciální vír má jenom 3 parametry. Skutečné polohy víry jsou $[-7.5; -1.5]$ $[-7.5; -1.5]$ $[4.5; -1.5]$ $[-4.5; 1.5]$ $[-7.5; 1.5]$ $[4.5; 7.5]$ a nejpřesněji se dají určit pomocí Gaussova víru.

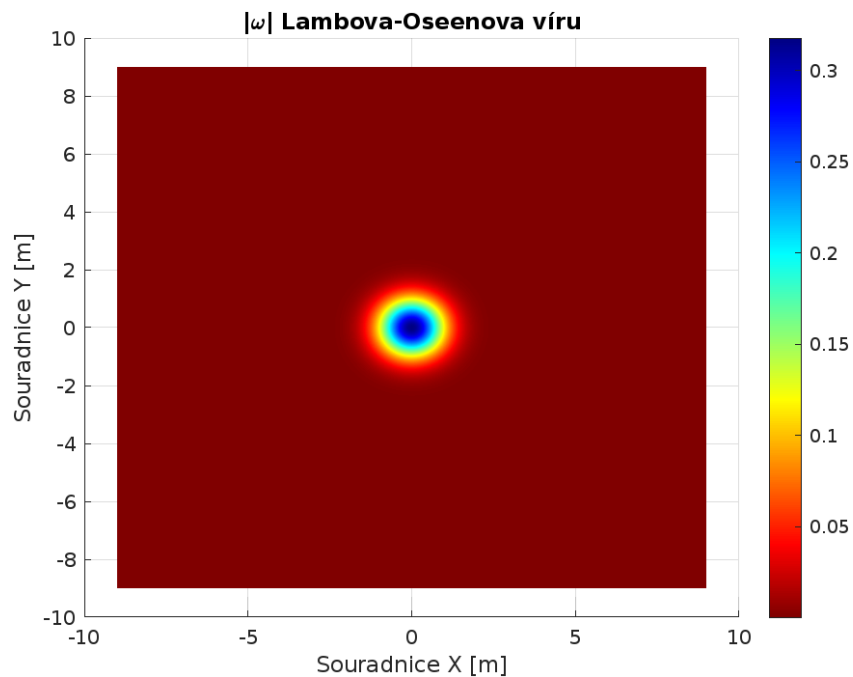
8.3.2. Minimalizace rotace

Identifikace vírů minimalizací celkové rotace v případě Kármánovy vírové řady se nepodařila pro žádný model víru. Rozložení vířivosti pro toto proudové pole je na obr. 41.



Obrázek 41. Vířivost v Karmánově vírové řadě

Každý vír má potenciální charakter. Z odstavce 5.2 plyne, že potenciální vír má nenulovou vířivost jenom ve středu víru. Vířivost daného proudového pole je nenulová jenom v šesti izolovaných bodech. Oproti tomu vířivost všech modelů z odstavce 6 má plošné rozložení. Na obr. 42 je vykreslená hodnota vířivosti pro Lambův-Oseenův model.



Obrázek 42. Rozložení vířivosti pro Lambův-Oseenův model.

Při vložení Lambova-Oseenova víru z obr. 42 do libovolného místa v Karmánově vírové řadě z obr. 41 funkcionál celkové rotace se zvětšuje, proto minimalizací algoritmus selhává.

8.3.3. Shrnutí pro Karmánovu vírovou řadu

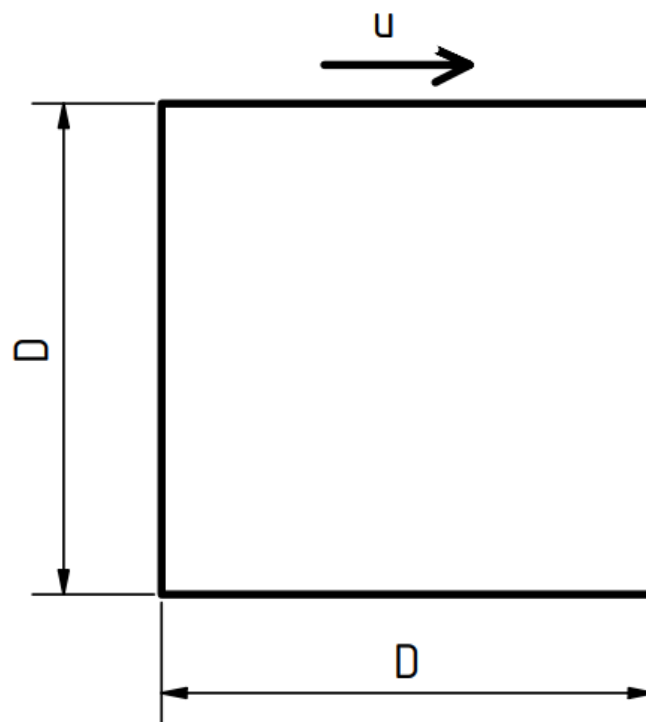
Karmánova vírová řada je odvozená pomocí modelu potenciálního víru. Rychlost potenciálního víru roste k nekonečnu při přibližování ke středu víru. Víry v takovémto poli mohou být identifikované minimalizací celkové kinetické energie pomocí modelu potenciálního víru s rozvolněnými parametry, nebo pomocí Gaussova víru s omezením maximálního poloměru jádra.

Jelikož Karmánova vírová řada má nenulovou vířivost jenom ve středech víru, nelze použít funkcionál celkové rotace pro identifikaci vírů.

9. Aplikace na data z CFD simulace

9.1.1. Proudění v kavitě

Dle zadání diplomové práce pro numerickou simulaci CFD dat bylo zvoleno proudění v kavitě čtvercového průřezu. Schéma úlohy je na obr. 43.



Obrázek 43. Schéma proudění v kavitě.

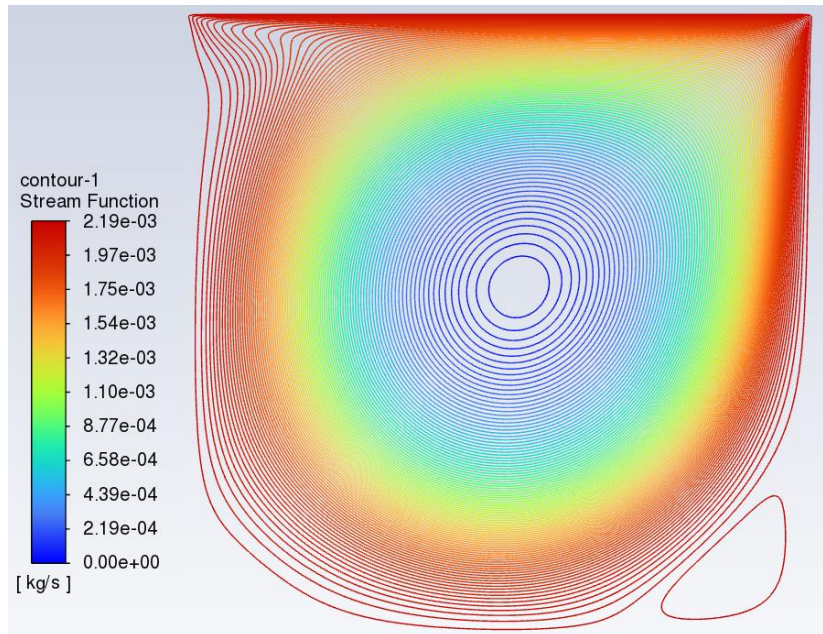
Charakter proudění je určen Reynoldsovým číslem

$$Re = \frac{u D}{\nu}$$

kde u je rychlost pohybu horní stěny. Podle [18] pro generování jednoho ustáleného víru uprostřed kavitě je zvoleno $Re = 1000$, pro $D = 0,1 \text{ m}$, rychlost horní stěny je

$$u = \frac{Re \nu}{D} = \frac{1000 * 1,5 * 10^{-5}}{0,1} = 0,15 \text{ m/s}$$

Výsledek CFD simulace proudění v kavitě v programu Ansys Fluent je na obr. 44.

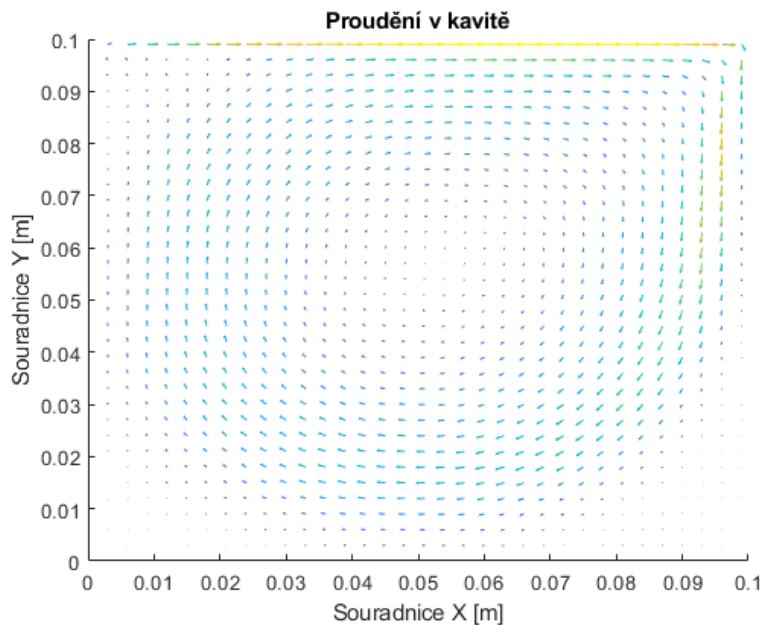


Obrázek 44. Proudová funkce v kavitě.

Na obr. 44 jsou vykresleny proudové čáry proudového pole kavity. Toto rychlostní pole je exportováno do MATLABu. MATLAB potřebuje pracovat s pravidelnou čtvercovou sítí, pro vyvážení takovéto sítě byla použita funkce scatteredInterpolant, která vytvoří interpolační objekt z původního proudového pole a z toho čtvercovou sítí použitelnou pro výpočet.

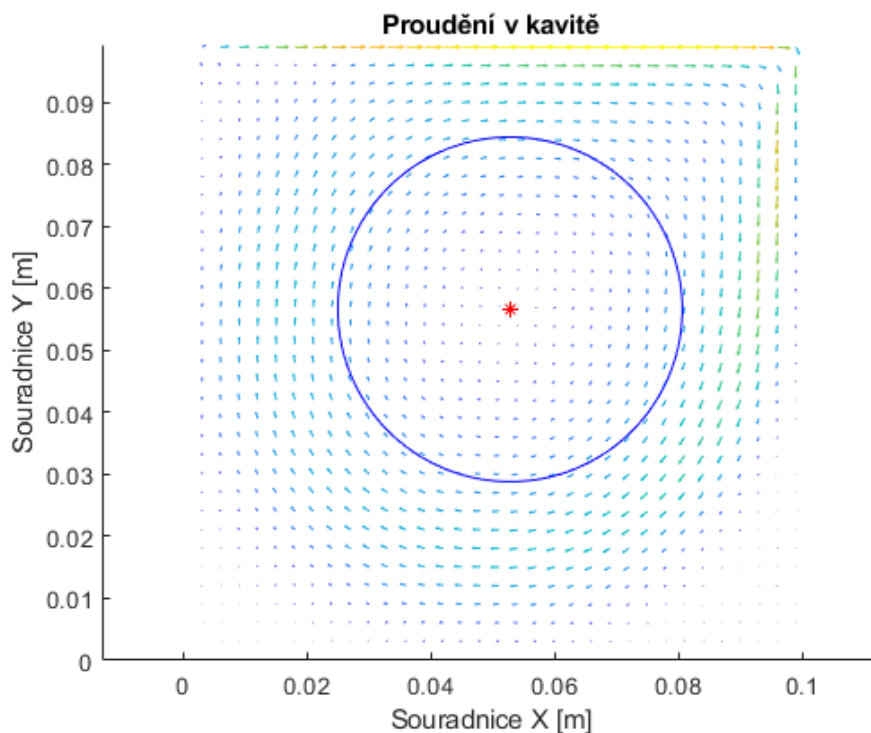
9.1.2. Identifikace minimalizací energie

Proudové pole kavity zpracované v MATLABu je na obr. 45. Představuje sebou jeden vír, který se nachází přibližně uprostřed zkoumaného proudového pole.



Obrázek 45. Proudové pole kavity v MATLABu.

Výsledek identifikace minimalizací celkové energie proudění pomocí Lambova-Oseenova víru je na obr. 46.



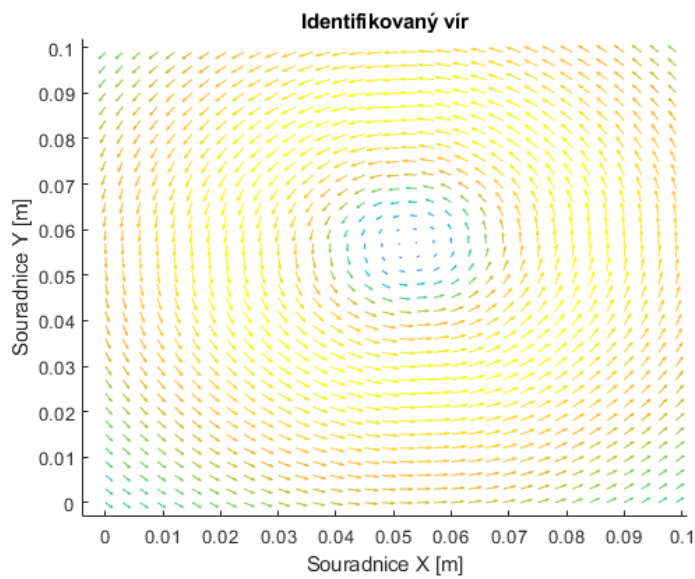
Obrázek 46. Identifikovaný Lambův-Oseenův vír v kavitě.

Parametry nalezeného víru jsou

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_0 = \langle 0, 0, 0, 0.001 \rangle \text{ počáteční odhad parametrů je stejný}$$

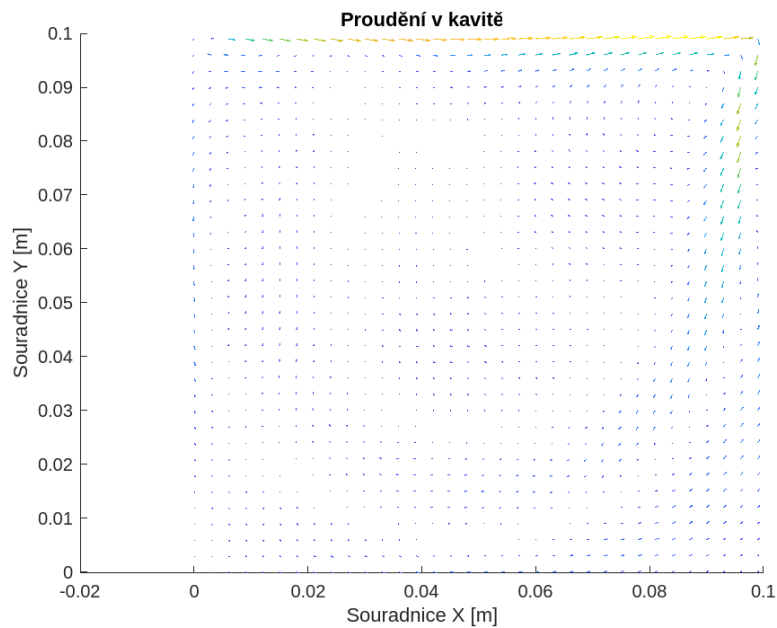
$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_1 = \langle 0.0528 \quad 0.0566 \quad 0.0752 \quad 0.0278 \rangle$$

Proudové pole identifikovaného víru v kavitě je na obr. 47.



Obrázek 47. Proudové pole identifikovaného Lambova-Oseenova víru v kavitě.

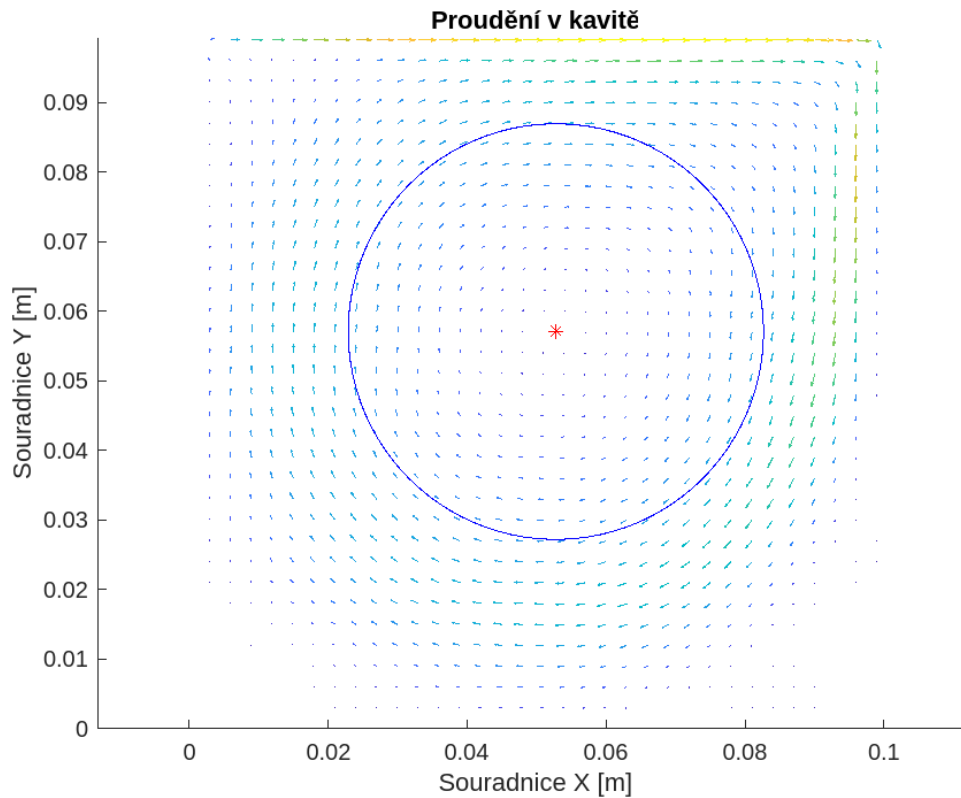
Proudové pole kavity po odečtení identifikovaného Lambova-Oseenova víru je na obr. 48.



Obrázek 48. Proudové pole kavity po odečtení identifikovaného Lambova-Oseenova víru

Tento vír byl nalezen bez omezení parametrů. O správnosti určování polohy je možno soudit jenom vizuálně.

Identifikace minimalizací celkové kinetické energie pomocí Gaussova je na obr. 49.



Obrázek 49. Identifikovaný Gaussův vír v kavitě.

Parametry nalezeného víru jsou

$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_0 = \langle 0, 0, 0, 0.001 \rangle$ počáteční odhad parametrů je stejný

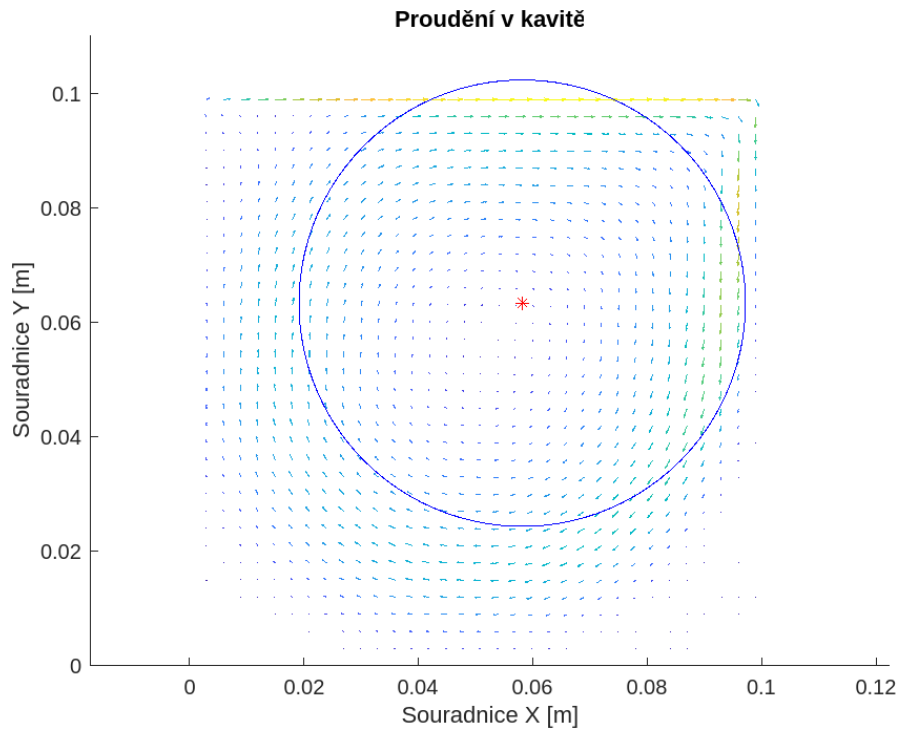
$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_1 = \langle 0.0528 \quad 0.0571 \quad 0.0916 \quad 0.0299 \rangle$

Polohová odchylka vůči identifikaci Lambovým-Oseenovým vírem je $\delta = 0,0005 \text{ m}$. Při optimalizaci Gaussovým vírem algoritmus identifikuje vír o větším poloměru a cirkulaci.

Menší vír vpravo dole algoritmus nebyl schopen identifikovat, protože jeho rychlostní pole bylo vymazáno odečtením velkého víru

9.1.3. Identifikace minimalizací rotace

Minimalizace funkcionálu celkové rotace z odstavce 7.2 pro proudění v kavitě pomocí Lambova-Oseenova víru s rozvolněnými parametry je na obr. 50.

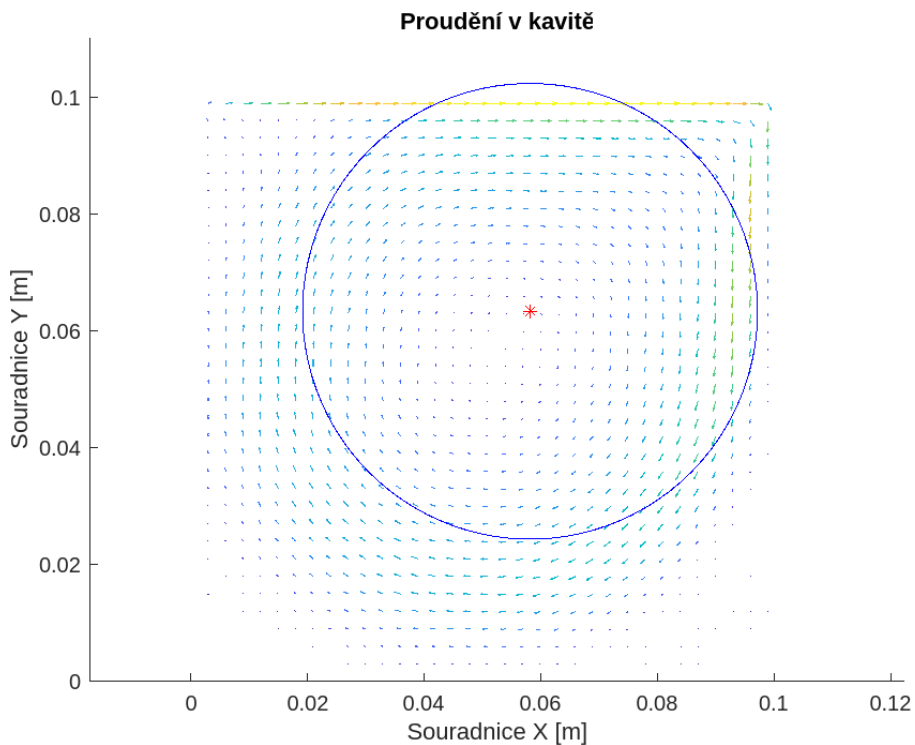


Obrázek 50. Identifikovaný vír minimalizací rotace pomocí Lambova-Oseenova modelu.

Parametry nalezeného víru jsou:

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_1 = \langle 0.0582 \quad 0.0634 \quad 0.1227 \quad 0.0390 \rangle$$

Minimalizace funkcionálu celkové rotace z odstavce 7.2 pro proudění v kavitě pomocí Gaussova víru s rozvolněnými parametry je na obr. 51.



Obrázek 51. Identifikovaný vír minimalizací rotace pomocí Gaussova modelu.

Parametry nalezeného víru jsou:

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_1 = \langle 0.0581 \quad 0.0634 \quad 0.1295 \quad 0.0389 \rangle$$

V případě funkcionálu celkové rotace pomocí Lambova-Oseenova a Gaussova vírů byly identifikovány víry o skoro stejných parametrech. Na rozdíl od minimalizace celkové energie v tomto případě identifikovaný vír má větší poloměr a cirkulaci.

9.1.4. Shrnutí pro proudění v kavitě

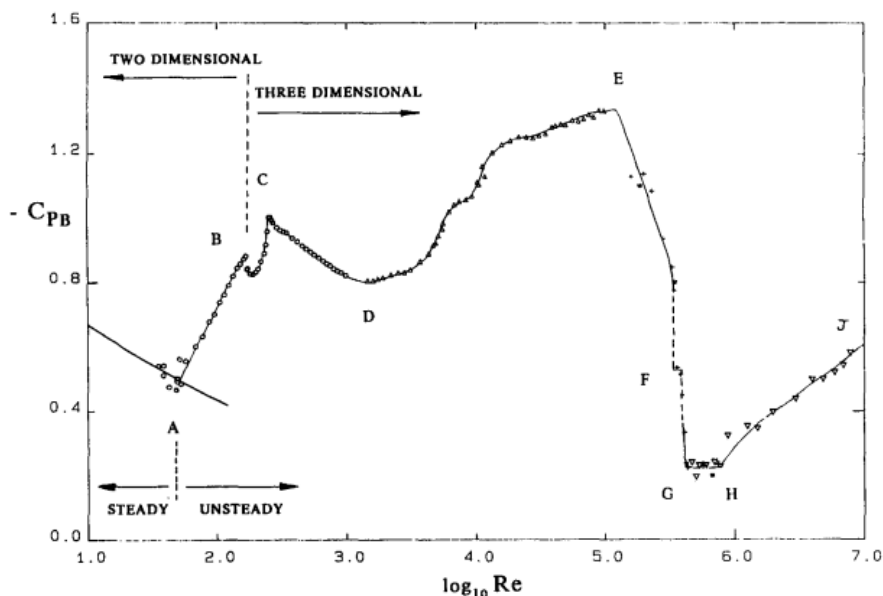
Pro identifikaci víru v kavitě mohou být použité oba funkcionály z odstavce 8. Tyto funkcionály jsou schopné identifikovat polohu víru, cirkulaci a poloměr jádra bez omezení minimalizačních parametrů jak pro Lambův-Oseenův, tak pro Gaussův model víru.

9.2.1. Karmánova vírová stezka

Pro identifikaci na CFD datech byl zvolen případ Karmánovy vírové stezky. Dané proudění je charakterizováno Reynoldsovým číslem

$$Re = \frac{u D}{\nu}$$

Na obr. 52 je graf závislosti vztakového koeficientu na Reynoldsově čísle. Mimo jiné tento graf vypovídá, jestli vír bude vznikat a jakou bude mít strukturu. Pro případ dvoudimenzionálního proudění je potřeba zvolit Reynoldsovo číslo rozmezí od 49 do 194. [10]

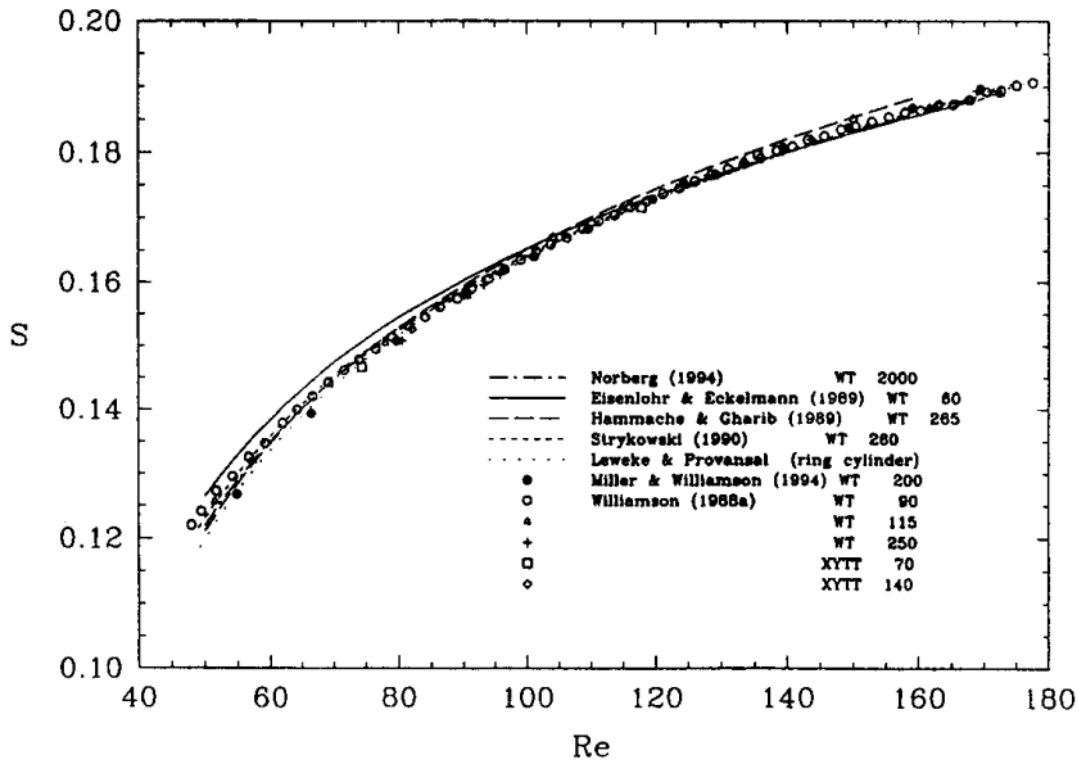


Obrázek 52. Závislost základních koeficientů na Reynoldsově čísle [10]

Při volbě tohoto rozmezí Re za úplavem válce vznikají pravidelné víry, které mají plošnou strukturu. Pro popis pravidelnosti kmitání vírů za válcem se zavádí Strouhalovo podobnostní číslo

$$Sr = \frac{f D}{u}$$

Toto podobnostní číslo má použití v oblasti nízkých hodnot $Re < 300$. Experimentálně byla zjištěná závislost mezi Strouhalovým a Reynoldsovým číslem, je na obr. 53.



Obrázek 53. Závislost Strouhalova čísla na Reynoldsově čísle. [10]

9.2.2. Parametry CFD modelu

Pro modelování je zvoleno laminární dvoudimenzionální proudění $Re = 90$ a válec o průměru $D = 100 \text{ mm}$ a vzduch o dynamické viskozitě $\mu = 1,8187 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ a hustotě $\rho = 1,1887 \text{ kg/m}^3$ z toho spočítáme rychlost proudění

$$u = \frac{Re \nu}{D} = \frac{Re \mu}{\rho D} = 0.01377 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Z grafu na obr. 53 je odečtena příslušná hodnota Strouhalova čísla 0.154 a vypočítaná frekvence odtrhávání vírů

$$f = \frac{u Sr}{D} = 0,0212058 \text{ Hz}$$

$$T = \frac{1}{f} = 47,16 \text{ s}$$

A dle doporučení vedoucího práce určíme velikost časového kroku jako

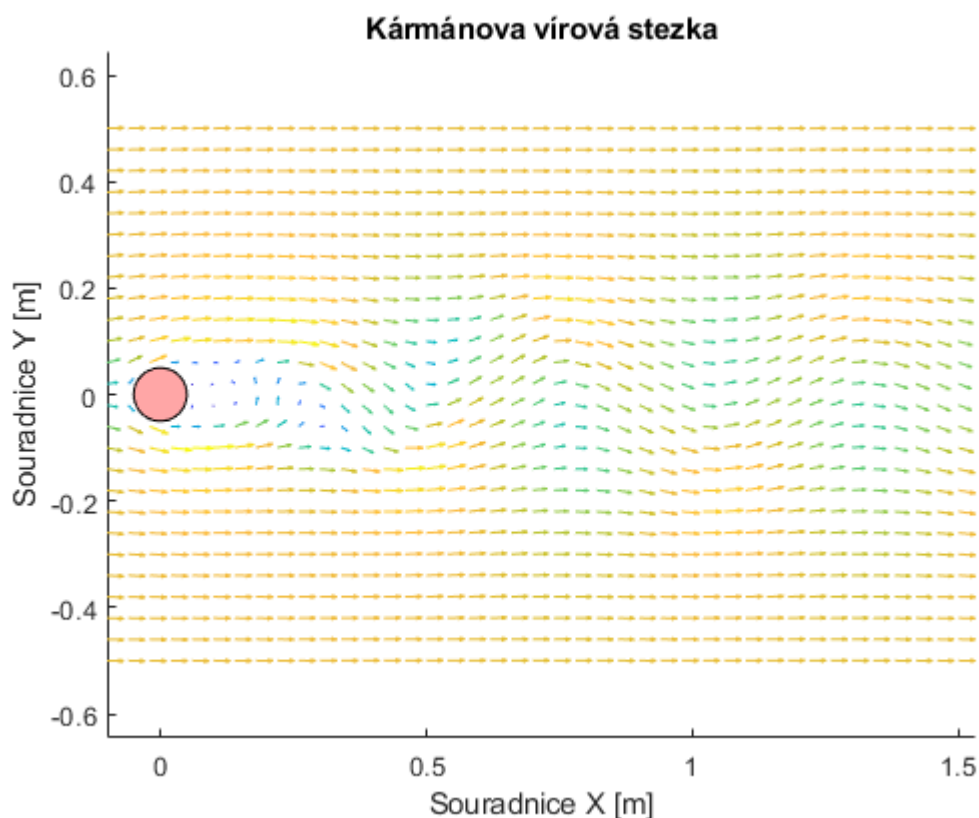
$$\Delta t = \frac{T}{100} = 0,4716 \text{ s}$$

Parametry CFD modelu jsou v tab. 1

Tabulka 1. Parametry CFD modelu

ρ	<i>hustota</i>	kg/m^{-3}	1,1887
μ	<i>dynamická viskozita</i>	$Pa \cdot s$	$1,8187 \cdot 10^{-5}$
D	<i>charakteristický rozměr</i>	mm	100
Re	<i>Reynoldsovo číslo</i>	–	90
u	<i>rychlost proudění</i>	m/s	0.01377
Sr	<i>Strouhalovo číslo</i>	–	0.154
f	<i>frekvence odtrhávání vírů</i>	Hz	0,0212058
T	<i>perioda odtrhávání vírů</i>	s	47,16
Δt	<i>časový krok</i>	s	0,4716

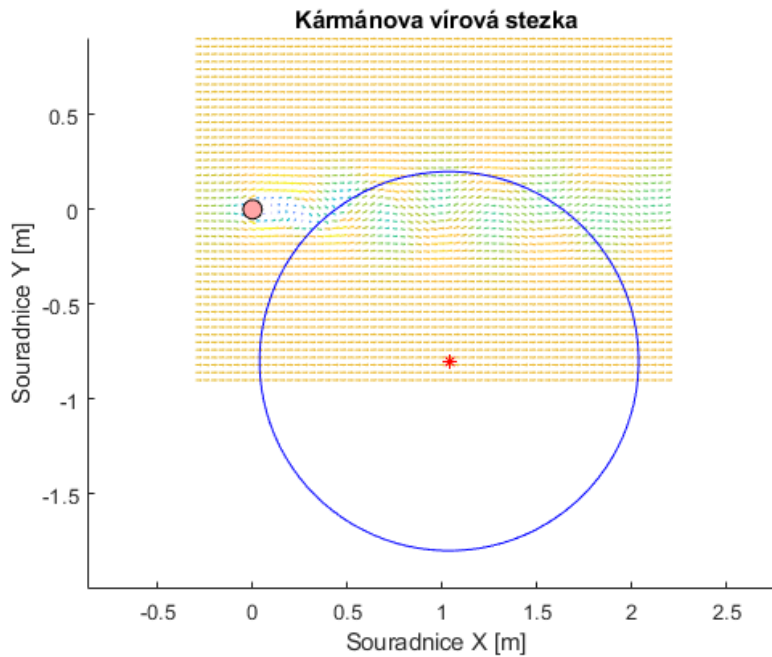
Proudové pole z programu Ansys Fluent je exportováno do MATLABu a interpolováno funkcí scatteredInterpolant pro vytváření pravidelné čtvercové sítě. Vizualizace proudového pole Karmánovy vírové stezky v MATLABu je na obr. 54.



Obrázek 54. Karmánova vírová stezka v MATLABu.

9.2.3. Identifikace minimalizací celkové energie

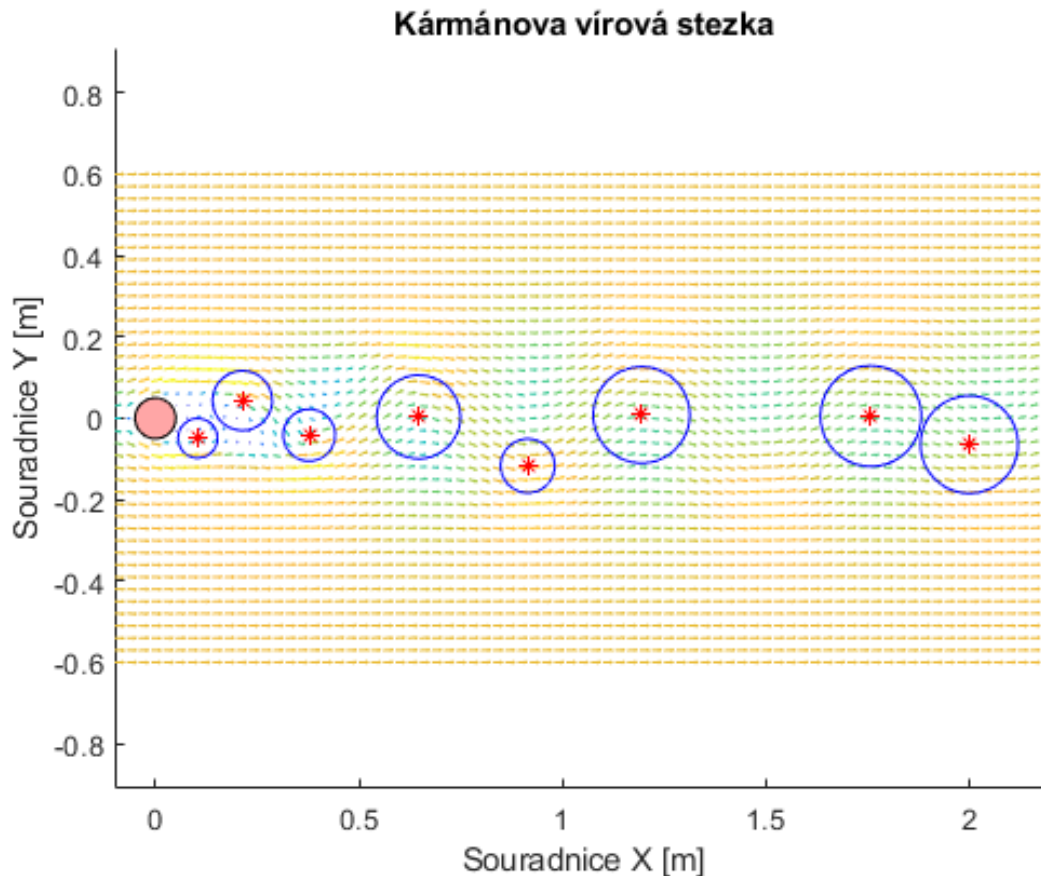
Aplikace identifikace minimalizací celkové kinetické energie proudění v Karmánově vírové stezce pro Lambův-Oseenův vír z rozvolněnými parametry je na obr. 55.



Obrázek 55. Identifikovaný vír bez omezení parametrů.

Je zřejmé, že to není fyzikální řešení. Optimalizační nástroj vkládá vír o velkém poloměru tak, aby horní částí víru měla směr rychlosti proti směru obtékání válce a tím výsledná energie byla nejmenší. Druhý problém, který vzniká u Lambova-Oseenova víru je ten, že se optimalizační algoritmus snaží přizpůsobit vzdálené oblasti víru k celému proudění. Pro správnou identifikaci je potřeba použít Gaussův model víru, omezit zkoumanou oblast a maximální poloměr jádra víru.

Omezení oblasti $x \in [0.05; 2]$ $y \in [-0.2; 0.2]$. Největší poloměr jádra víru odhadneme jako trojnásobek poloměru válce $R \in [0.01; 0.15]$. Výsledek pro identifikaci Gaussovým vírem a s omezenými parametry v čase $t = 1021,33$ s je na obr. 56.



Obrázek 56. Identifikované víry s omezením minimalizačních parametrů.

Na obr. 56 je proudové pole Karmánovy vírové stezky v čase $t = 1021,33$ s se zobrazenými identifikovanými víry bez odečítání těchto víru. Parametry nalezených virů jsou:

$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_0 = \langle 0.05, 0, 0.001, 0.01 \rangle$ počáteční odhad parametrů je stejný

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_1 = \langle 0.6467 \quad 0.0033 \quad 0.0081 \quad 0.1027 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_2 = \langle 1.1945 \quad 0.0082 \quad 0.0076 \quad 0.1185 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_3 = \langle 0.2136 \quad 0.0434 \quad 0.0045 \quad 0.0733 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_4 = \langle 1.7581 \quad 0.0054 \quad 0.0063 \quad 0.1238 \rangle$$

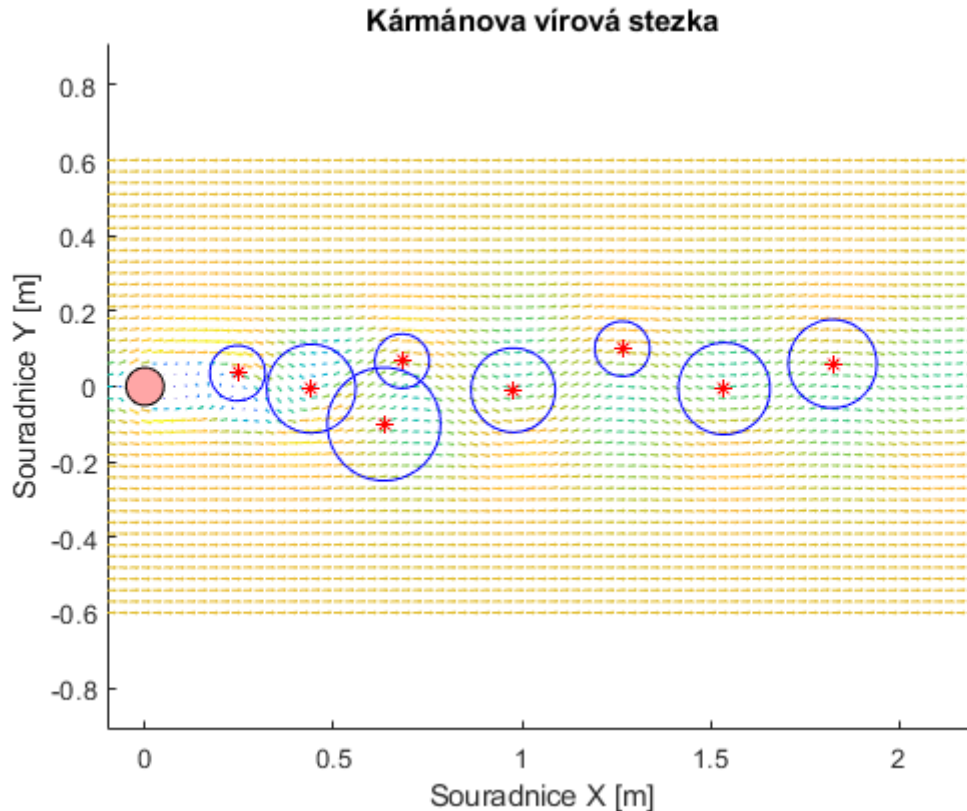
$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_5 = \langle 0.9148 \quad -0.1169 \quad -0.0020 \quad 0.0664 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_6 = \langle 2.0000 \quad -0.0646 \quad -0.0019 \quad 0.1199 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_7 = \langle 0.1041 \quad -0.0491 \quad -0.0010 \quad 0.0485 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_8 = \langle 0.3779 \quad -0.0415 \quad -0.0025 \quad 0.0638 \rangle$$

Aplikace se stejným omezením pro Karmánovu vírovou stezku pro další časový krok $t = 1026,02$ s je na obr. 57.



Obrázek 57. Identifikované víry s omezením minimalizačních parametrů.

Parametry nalezených virů jsou:

$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_0 = \langle 0.05, 0, 0.001, 0.01 \rangle$ počáteční odhad parametrů je stejný

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_1 = \langle 0.9758 \quad -0.0097 \quad -0.0079 \quad 0.1115 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_2 = \langle 0.2453 \quad 0.0352 \quad 0.0049 \quad 0.0733 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_3 = \langle 1.5351 \quad -0.0057 \quad -0.0068 \quad 0.1217 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_4 = \langle 0.4407 \quad -0.0058 \quad -0.0058 \quad 0.1176 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_5 = \langle 0.6813 \quad 0.0672 \quad 0.0027 \quad 0.0720 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_6 = \langle 0.6333 \quad -0.0999 \quad 0.0013 \quad 0.1500 \rangle$$

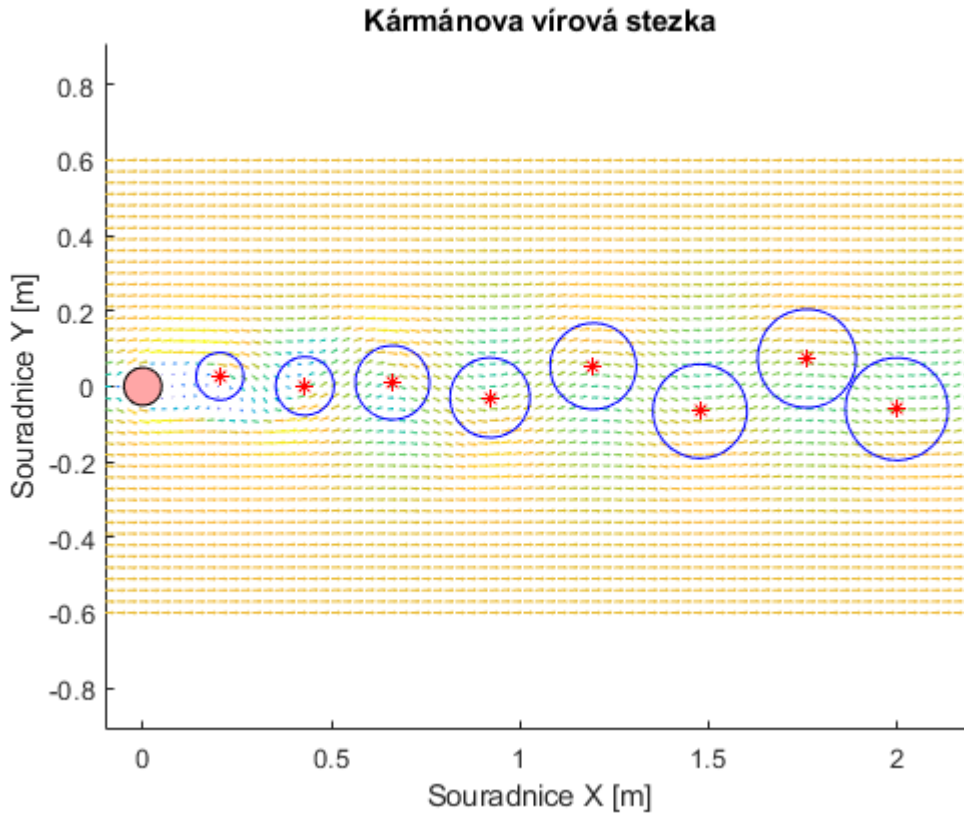
$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_7 = \langle 1.2651 \quad 0.1000 \quad 0.0015 \quad 0.0728 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_8 = \langle 1.8224 \quad 0.0603 \quad 0.0030 \quad 0.1171 \rangle$$

Na obrázcích 56 a 57 byly nalezeny různé víry. Identifikovat stejné vírové struktury se nepodařilo ani pro velmi striktní omezení parametrů.

9.2.4. Identifikace minimalizací celkové rotace

Aplikace identifikace minimalizací celkové kinetické energie proudění v Kármánově vírové stezce pro Gaussův vír a čas $t = 1021,33$ s s omezenými parametry je na obr. 58. Omezení oblasti $x \in [0.05; 2]$ $y \in [-0.4; 0.4]$. Největší poloměr jádra víru odhadneme jako trojnásobek poloměru válce $R \in [0.01; 0.15]$.



Obrázek 58. Identifikace minimalizací celkové rotace pomocí Gaussova víru a s omezenými parametry v čase $t=1021,33$ s

Parametry nalezených virů jsou:

$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_0 = \langle 0.05, 0, 0.001, 0.01 \rangle$ počáteční odhad parametrů je stejný

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_1 = \langle 1.7614 \quad 0.0744 \quad 0.0044 \quad 0.1304 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_2 = \langle 1.4779 \quad -0.0657 \quad -0.0042 \quad 0.1246 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_3 = \langle 0.2043 \quad 0.0268 \quad 0.0046 \quad 0.0630 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_4 = \langle 1.1948 \quad 0.0538 \quad 0.0038 \quad 0.1142 \rangle$$

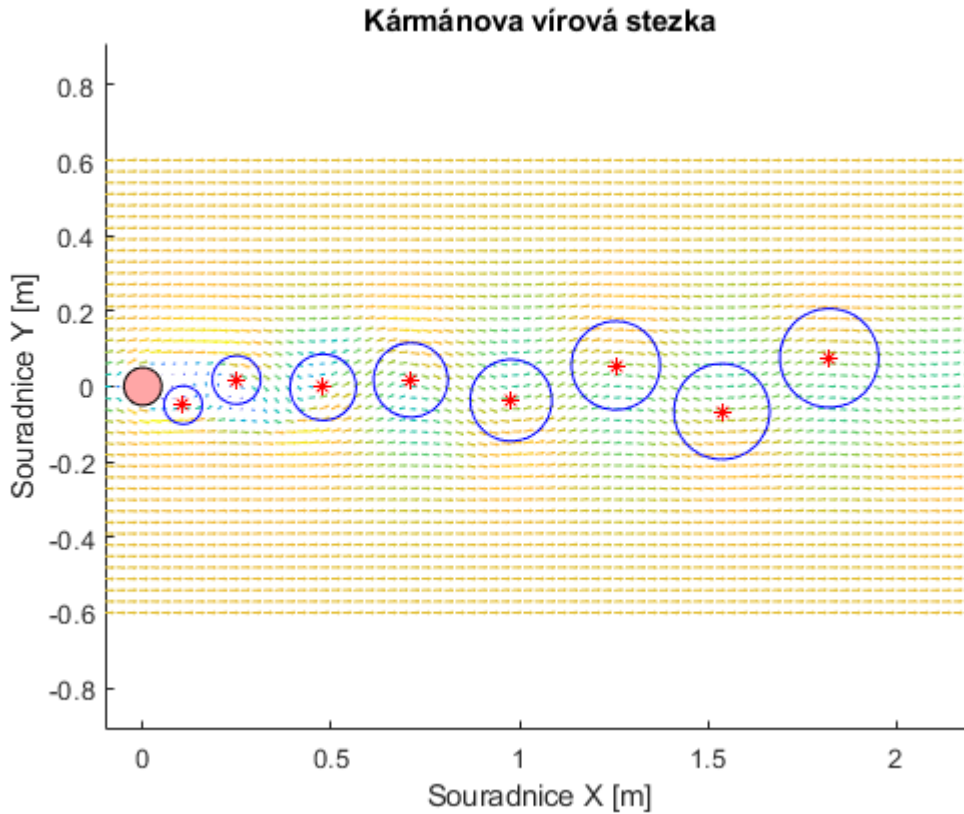
$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_5 = \langle 0.9208 \quad -0.0296 \quad -0.0034 \quad 0.1057 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_6 = \langle 2.0000 \quad -0.0598 \quad -0.0026 \quad 0.1358 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_7 = \langle 0.6622 \quad 0.0103 \quad 0.0030 \quad 0.0981 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_8 = \langle 0.4299 \quad 0.0011 \quad -0.0027 \quad 0.0774 \rangle$$

Aplikace identifikace minimalizací celkové rotace proudění v Kármánově vírové stezce pro Gaussův vír a čas $t = 1026,02$ s s omezenými parametry je na obr. 59.



Obrázek 59. Identifikace minimalizací celkové rotace pomocí Gaussova víru a s omezenými parametry v čase $t=1026,02$ s

$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_0 = \langle 0.05, 0, 0.001, 0.01 \rangle$ počáteční odhad parametrů je stejný

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_1 = \langle 1.8208 \quad 0.0756 \quad 0.0043 \quad 0.1309 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_2 = \langle 1.5360 \quad -0.0665 \quad -0.0041 \quad 0.1268 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_3 = \langle 1.2546 \quad 0.0556 \quad 0.0039 \quad 0.1174 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_4 = \langle 0.2485 \quad 0.0175 \quad 0.0041 \quad 0.0641 \rangle$$

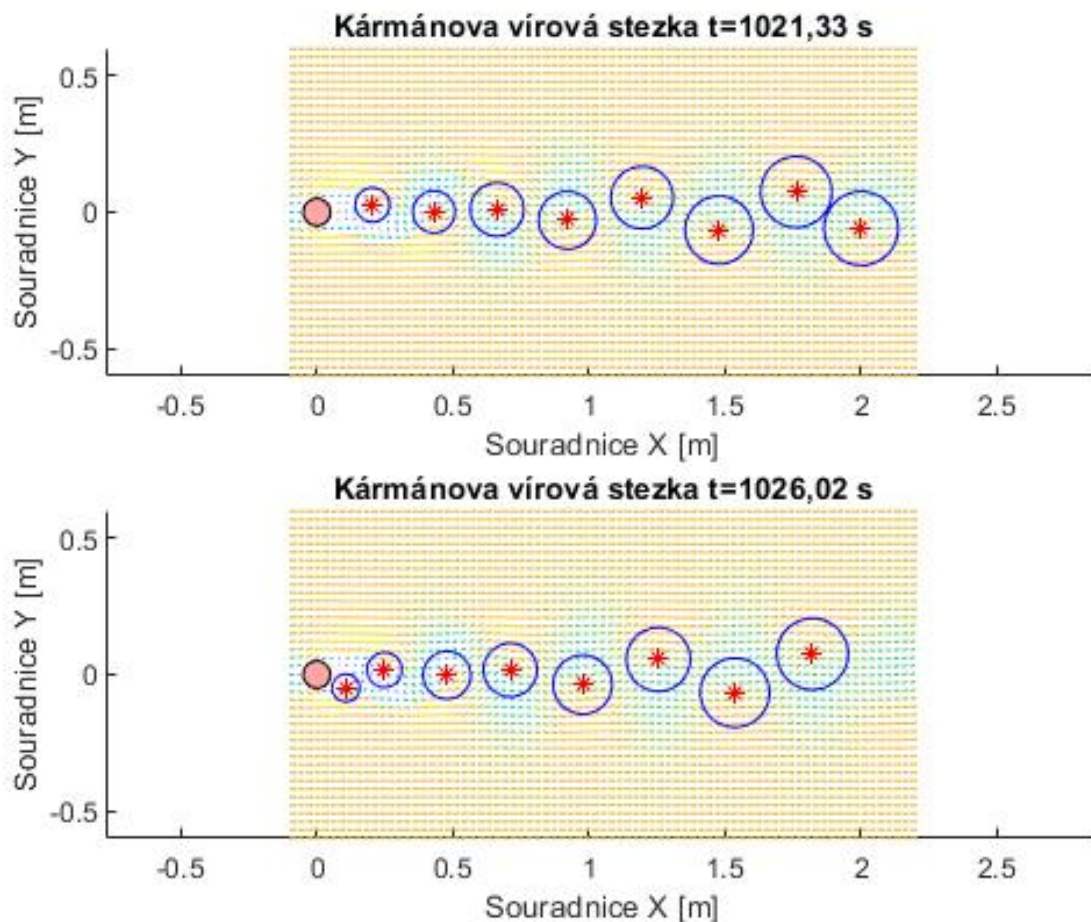
$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_5 = \langle 0.9768 \quad -0.0367 \quad -0.0036 \quad 0.1083 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_6 = \langle 0.1069 \quad -0.0491 \quad -0.0029 \quad 0.0506 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_7 = \langle 0.7107 \quad 0.0170 \quad 0.0033 \quad 0.0985 \rangle$$

$$\langle x, y, \Gamma, R \rangle_8 = \langle 0.4782 \quad -0.0021 \quad -0.0027 \quad 0.0875 \rangle$$

Zobrazení těchto dvou výsledky pro čas $t_1 = 1021,33$ s a $t_2 = 1026,02$ s vedle sebe je na obr. 60.



Obrázek 60. Výsledky pro dva sousední uložené časové kroky.

Z obr. 62 je vidět, že v časovém kroku $t_2 = 1026,02\text{s}$ byly identifikovány stejné víry jako v časovém kroku $t_1 = 1021,33\text{s}$, jenže jsou posunuté vpravo ve směru proudu.

X-ová souřadnici 5. víru (5. zleva doprava na obr. 58) z kroku t_1 je $x_1 = 1.1948$ a x-ová souřadnice 6. víru (6. zleva doprava na obr. 59) z kroku t_2 je $x_2 = 1.2546$. Rychlost posunutí víru je

$$u_{\text{vír}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{1.2546 - 1.1948}{1026,02 - 1021,33} = \frac{0,0598}{4,68499} = 0,0128 \text{ m/s}$$

Pokud porovnáme tuto rychlost s rychlostí proudění, která je zadána jako okrajová podmínka $u = 0,01377 \text{ m/s}$

Relativní odchylka těchto dvou veličin je

$$\delta_x = \frac{u - u_{\text{vír}}}{u} = \frac{0,01377 - 0,0128}{0,01377} = 7.3 \%$$

9.2.5. Shrnutí pro Karmánovou vírovou stezku

Algoritmus s funkciónálem celkové kinetické energie nedokázal najít stejné víry na dvou časově sousedních stavech proudového pole, a to ani při velmi striktním omezení minimalizačních parametrů. Funkcionál celkové kinetické energie je citlivý na smykovou vrstvu mezi úplavem a dominantním prouděním

Algoritmus s funkciónálem celkové rotace identifikoval stejné víry na dvou časově sousedních stavech proudového pole. Pro takovou identifikaci bylo potřeba použít model Gaussova víru, omezit zkoumanou oblast a maximální poloměr jádra víru jako trojnásobek poloměru válce.

10. Závěr

Identifikace víru je stále není vyřešený problém mechaniky tekutin. Neexistuje ani žádná uspokojivá definice víru. Tato práce je pokus o strojové rozpoznávání vírů pro dvoudimenzionální proudění.

Na základě prací [4] a [17] byl vyvinut algoritmus pro rozpoznávání vírů pro případ dvoudimenzionálního proudění. Tento algoritmus je založen na principu minimalizace funkcionálu – plošný integrál proudového pole. Tudíž dány algoritmus vnímá proudové pole jako celek. Dále byly navržené dva funkcionály pro použití v tomto algoritmu – celková kinetická energie pole a celková rotace. Minimalizace funkcionálu se uskuteční odečítáním od proudového pole analytického modelu víru. Veškeré matematické výpočty byly provedeny v softwaru MATLABu s použitím optimalizačních nástrojů. Zvláštní kapitola je věnována modelům víru a jejich fyzikálním vlastnostem souvisejícím s daným algoritmem. Algoritmus používá jenom údaje o rychlosti proudového pole. Výstupem identifikace minimalizací funkcionálu jsou číselné hodnoty nalezených vírů z proudového pole – souřadnice, cirkulace a poloměr jádra.

Dále navržený algoritmus byl aplikován na analytická proudová pole a byly stanovené podmínky úspěšné identifikace pro každý případ analytického proudění. V případě identifikace v Taylorově-Greenově a Stuartově analytických vírových polích byly použitelné oba funkcionály. V případě analytické Karmánovy vírové stezky funkcionál celkové rotace není schopný vyhledávat víry kvůli tomu, že matematický model Karmánovy řady byl odveden pomocí potenciálního víru, který má nespojitý průběh vířivosti. Z modelů víru se lépe prokázal Gaussův vír, protože má větší utlum tečné rychlosti a zasahuje méně do okolí nalezeného víru. Pro identifikaci více víru v proudovém pole je potřeba správně omezit maximální poloměr jádra víru vizuálním odhadem.

Finální část je věnována identifikaci víru v datech z CFD simulace, a to pro případ proudění v kavitě a Karmánovu vírovou stezku. V případě kavity pro úspěšnou identifikaci víru byly použitelné oba funkcionály bez omezení minimalizačních parametrů. V případě Karmánovy funkcionál celkové kinetické energie nedokázal identifikovat vírové struktury ani pro velmi striktní omezení optimalizačních parametrů, protože je velmi citlivý na smykovou vrstvu, která vzniká mezi úplavem a dominantním proudem. Funkcionál celkové rotace byl schopen identifikovat vírové struktury za použití Gaussova modelu víru. Pro úspěšnou identifikaci více vírů bylo potřeba omezit maximální poloměru jádra víru jako trojnásobek poloměru obtékaného válce.

Seznam použitých zdrojů

- [1] BRDIČKA, Miroslav, Ladislav SAMEK a Bruno SOPKO. Mechanika kontinua. Vyd. 4., rev. a uprav. Praha: Academia, 2011. 878 s. Gerstner; 6. ISBN 978-80-200-2039-0.
- [2] DVOŘÁK, Rudolf a Karel KOZEL. Matematické metody v aerodynamice. 1. vyd. Praha: ČVUT, 1992. 153 s. Učební texty VŠ, ČVUT - fak. strojní. ISBN 80-01-00851-7.
- [3] DVOŘÁK, Rudolf a Karel KOZEL. Matematické modelování v aerodynamice. 1. vyd. Praha: ČVUT, 1996. 356 s. ISBN 80-01-01541-6.
- [4] Duda D. INDIVIDUAL VORTEX SEARCHING ALGORITHM , Prague, February 19-21, 2020, DOI: <https://doi.org/10.14311/TPFM.2020.008>
- [5] Vodovorot v vodě. Dostupné z https://beolin.club/uploads/posts/2022-08/1660693940_1-beolin-club-p-vodovorot-v-vode-risunok-risunki-s-prirodo-1.jpg
- [6] KUNDU, Pijush K. ; COHEN, Ira M. . Fluid Mechanics. Third Edition. San Diego : Academic Press, 2004. 759 s. ISBN 0-12-178253-0, 978-0-12-178253-5.
- [7] ALEKSEENKO, S.V.; KUIBIN, P.A.; OKULOV, V.L.: Theory of Concentrated Vortices. First Edition. Berlin: Springer, 2007. 487s. ISBN 978-3-540-73375-1
- [8] KOLÁŘ, V. Vortex identification: New requirements and limitations, International Journal of Heat and Fluid Flow,28, (2007), pp. 638-652
- [9] STUART, J. T., 1960. On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows Part 1. The basic behaviour in plane Poiseuille flow. Journal of Fluid Mechanics [online]. B.m.: Cambridge University Press, vol. 9, no. 3, pp. 353–370. Retrieved z: doi:10.1017/S002211206000116X
- [10] WILLIAMSON, C.H.K. Vortex dynamics in the cylinder wake,28, (1996), pp.477-539. ISSN 0066-4189.
- [11] ŠTIGLER, Jaroslav: Models of the vortex in real fluid. Sborník konference ENGINEERING MECHANICS 2000,1. vyd. Praha: Institute of theoretical and applied mechanics academy of sciences of the Czech Republic, 2000. pp.156-160, ISBN 80-86246-07-08.
- [12] Kaufmann, W. (1962). "Über die Ausbreitung kreiszylindrischer Wirbel in zähen (viskosen) Flüssigkeiten". *Ingenieur-Archiv (in German)*. 31 (1): 1–9. doi:10.1007/BF00538235. ISSN 0020-1154. S2CID 121128702.
- [13] Taylor, G. I. and Green, A. E., Mechanism of the Production of Small Eddies from Large Ones, Proc. R. Soc. Lond. A, 158, 499–521 (1937)
- [14] STUART, J. T., 1967. On finite amplitude oscillations in laminar mixing layers. Journal of Fluid Mechanics [online]. B.m.: Cambridge University Press, vol. 29, no. 3, pp. 417–440. Retrieved z: doi:10.1017/S0022112067000941
- [15] ALTHAUS, W., CH. BRÜCKER a M. WEIMER. Breakdown of Slender Vortices. GREEN, Sheldon I., ed. Fluid Vortices [online]. Dordrecht: Springer Netherlands, 1995, 1995, s. 373-

426 [cit. 2019-05-03]. Fluid Mechanics and Its Applications. DOI: 10.1007/978-94-011-0249-0_9. ISBN 978-94-010-4111-9

[16] BENJAMIN, T. B. Theory of the vortex breakdown phenomenon. Journal of Fluid Mechanics [online]. 1962, 14(04) [cit. 2019-05-03]. DOI: 10.1017/S0022112062001482. ISSN 0022-1120

[17] Duda D. Předběžná zpráva o snaze o strojové rozpoznání jednotlivých vírů v PIV datech, dostupné z <https://home.zcu.cz/~dudad/Litice2018.pdf>

[18] O. Botella, R. Peyret, Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow, Computers & Fluids, Volume 27, Issue 4, 1998, ISSN 0045-7930, dostupné z <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793098000024>

[19] Hurský T. Identifikace vírových struktur v Karmánově vírové stezce z dat z numerické simulace. Praha: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta strojní, 2015. Bakalářská práce. Vedoucí práce: Ing. Tomáš Hyhlík, Ph.D