



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

**Fakulta stavební
Katedra fyziky**

Deformace vybraných optických prvků

Deformations of selected optical elements

DISETRAČNÍ PRÁCE

Ing. Filip Šmejkal

Doktorský studijní program: (P3607) Stavební inženýrství

Studijní obor: (3911V005) Fyzikální a materiálové inženýrství

Školitel: prof. RNDr. Antonín Mikš, CSc.
Ing. Martin Horák, Ph.D. (školitel specialista)
Ing. Petr Pokorný, Ph.D. (školitel specialista)

Praha, 2023

PROHLÁŠENÍ

Jméno doktoranda: Ing. Filip Šmejkal

Název disertační práce: Deformace vybraných optických prvků

Prohlašuji, že jsem uvedenou disertační práci vypracoval samostatně pod vedením školitele prof. RNDr. Antonína Mikše, CSc., školitele specialisty Ing. Martina Horáka Ph.D., a školitele specialisty Ing. Petra Pokorného Ph.D.

Použitou literaturu a další materiály uvádím v seznamu použité literatury.

Disertační práce vznikla v souvislosti s řešením projektů:

- SGS17/004/OHK1/1T/11 Adaptivní optické metrologické systémy, České vysoké učení technické v Praze, Česká republika;
- SGS18/105/OHK1/2T/11 Metody bezkontaktního měření a vyhodnocení deformací a tvaru ploch a vlnoploch, České vysoké učení technické v Praze, Česká republika;
- SGS20/093/OHK1/2T/11 Moderní optické prvky a metody pro zobrazování a bezkontaktní měření topografie ploch, České vysoké učení technické v Praze, Česká republika;

A s podporou organizací a nadací:

- Nadace Nadání Josefa, Marie a Zdeňky Hlávkových,
- Nadační fond ČVUT Stanislava Hanzla,
- Fond ČVUT,
- Iniciační fond ČVUT,

V Praze dne

.....

podpis

Poděkování

Děkuji svému školiteli prof. RNDr. Antonínu Mikšovi, CSc., za odborné vedení a vstřícnost po celou dobu naší dlouhodobé spolupráce. Také děkuji prof. Ing. Milanu Jiráskovi, DrSc., a svým školitelům specialistům Ing. Martinu Horákovi, Ph.D., a Ing. Petru Pokornému, Ph.D., za možnost nesčetných konzultací týkajících se řešené problematiky a za spolupráci na odborných publikacích. V neposlední řadě děkuji své nejbližší rodině za podporu, kterou mi při studiu dopřávala. Výsledky prezentované v této disertační práci vznikly také za podpory Nadace Nadání Josefa, Marie a Zdeňky Hlávkových, Nadačního fondu ČVUT Stanislava Hanzla, Fondu ČVUT, Iniciačního fondu ČVUT a grantů Studentské grantové soutěže ČVUT č. SGS17/004/OHK1/1T/11, č. SGS18/105/OHK1/2T/11 a č. SGS20/093/OHK1/2T/11.

Abstrakt

Tato disertační práce se zabývá především teoretickým popisem mechanického chování osově souměrných membrán optických kapalinových čoček, které patří mezi moderní optoelektronické prvky a jejich vývoj je v současné době velmi aktuální pro mnoho perspektivních aplikací. Nalézají stále větší uplatnění v řadě oblastí vědy a techniky, neboť řízenou deformací integrované membrány umožňují rychlou změnu svých zobrazovacích parametrů a tím např. automatické korekce zobrazení pro změny vzdáleností předmětů, korekci aberací apod., což lze využít např. v oblastech mikroskopie, strojového vidění, 3D skenování, chytrých telefonů atd.

V práci je postupně představena řada mechanických modelů, kterými se co nejlépe snažíme vystihnout mechanické chování těchto optických prvků, a numerických metod, které nám umožňují modely řešit. Při odvozování jsou důkladně uvažovány všechny geometrické nelinearity a ve většině případů je uvažován Saint Venant-Kirchhoffův materiálový model, který je definován lineárním vztahem mezi Green-Lagrangeovým přetvořením a 2. Piola-Kirchhoffovým napětím.

Práce je sepsána formou shrnutí autorových publikací, které na toto téma vyšly v impaktovaných zahraničních časopisech, a je doplněna o rešerši aktuálního stavu této problematiky a o doposud nepublikované výsledky autorovy výzkumné činnosti.

Abstract

This dissertation deals mainly with the theoretical description of the mechanical behaviour of axisymmetric membranes of optical liquid lenses, which belong to modern optoelectronic elements and their development is currently very topical for many perspective applications. They are finding increasing applications in many areas of science and technology as the controlled deformation of the integrated membranes allows rapid change of their imaging parameters and thus e.g. automatic correction of the imaging for changes in object distances, aberration correction etc., which can be used e.g. in the fields of microscopy, machine vision, 3D scanning, smart phones etc.

In this thesis, we present a series of mechanical models that try to capture the mechanical behaviour of these optical elements as best we can, and numerical methods that allow us to solve the models. All geometric nonlinearities are thoroughly considered in the derivation and in most cases the Saint Venant-Kirchhoff material model is assumed, which is defined by a linear relationship between the Green-Lagrange strain and the 2nd Piola-Kirchhoff stress.

The dissertation is written in the form of a summary of the author's publications on this topic, which have been published in impacted journals, and is supplemented by a research of the current state of this issue and unpublished results of the author's research activities related to the topic.

Obsah

1	Úvod a cíle práce	1
2	Membránové kapalinové čočky	3
3	Souhrn odborných publikací	17
3.1	Analýza velkých deformací membrán kapalinových čoček.....	18
3.2	Vliv tloušťky membrány na zobrazovací vlastnosti kapalinové čočky	26
3.3	Optimalizace tloušťky membrány pro zajištění požadovaného deformovaného tvaru	30
3.4	Průhyb sférických čoček způsobený vlastní tíhou optického skla.....	42
4	Doposud nepublikované výsledky	45
4.1	Osově souměrná membrána s ohybovou tuhostí	45
4.1.1	Geometrické rovnice	45
4.1.2	Materiálové rovnice a princip minima potenciální energie.....	48
4.1.3	Zpřesněný výraz pro energii vnějších sil	65
4.1.4	Řešení metodou konečných prvků.....	66
4.1.5	Konzistentní porovnání modelů.....	75
4.1.6	Parametrická studie	78
4.1.7	Kapalinová čočka s membránou s ohybovou tuhostí	85
5	Závěr	96
	Příloha A – Kopie vybraných publikací autora souvisejících s disertační prací	104
	Příloha B – Seznam ostatních publikací autora	165
	Příloha C – Citace a významná ocenění autora	169

1 Úvod a cíle práce

Tato disertační práce je souhrnem autorových výsledků v oblasti analýzy deformací optických prvků. Pozornost je věnována především teoretickému popisu mechanického chování osově souměrných membrán optických kapalinových čoček, které se pro svou variabilitu stále více používají v optickém průmyslu. Část práce se zabývá také problematikou vlivu průhybu sférických optických čoček vlastní tíhou na přesnost měření tvaru jejich ploch. Práce je sepsána formou shrnutí autorových publikací, které na toto téma vyšly v impaktovaných zahraničních časopisech, a je doplněna o rešerši aktuálního stavu této problematiky a o doposud nepublikované výsledky autorovy výzkumné činnosti týkající se daného tématu.

Hlavními cíli této disertační práce jsou:

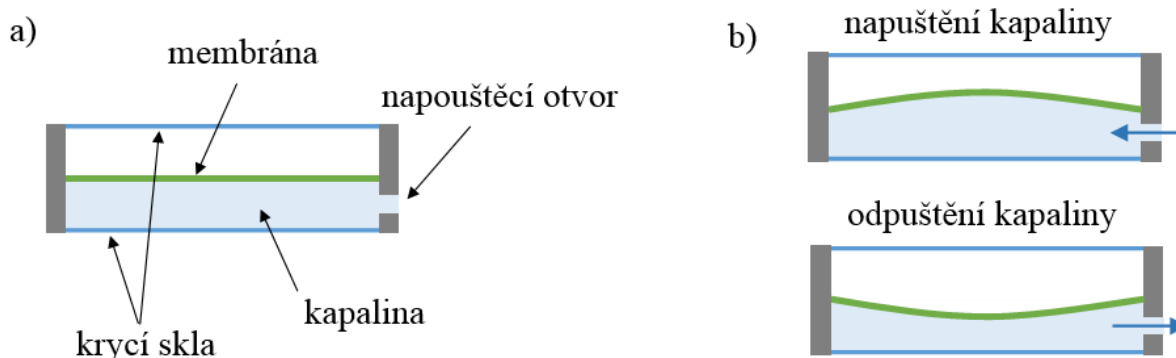
- přehledné teoretické odvození mechanického modelu pro osově souměrnou membránu kapalinové čočky bez ohybové tuhosti zatíženou tlakem optické kapaliny působícím kolmo k střednicové ploše membrány;
- určení deformovaného tvaru membrány konstantní tloušťky zatížené tlakem optické kapaliny na základě odvozené teorie pomocí vhodných numerických metod a určení vybraných zobrazovacích vlastností kapalinové čočky, ve které je tato membrána aplikována;
- rozšíření mechanického modelu pro membránu s počátečním předpětím;
- odvození postupu určení tloušťkového profilu membrány bez ohybové tuhosti za účelem dosažení předepsaného deformovaného tvaru plochy membrány;
- rozšíření mechanického modelu pro membránu s ohybovou tuhostí a porovnání s modelem bez ohybové tuhosti;
- využití teorie pro malé průhyby osově souměrných desek proměnné tloušťky k analýze vlivu průhybu sférických skleněných optických čoček vlastní tíhou na přesnost měření tvaru jejich ploch.

V kapitole 2 je provedena rešerše současného stavu literatury, která se zabývá konstrukcí, měřením, výpočty tvaru a optických parametrů a optimalizací membránových kapalinových čoček. Kapitola 3 dále obsahuje průvodní texty a souhrny výsledků z 6 článků publikovaných v zahraničních impaktovaných časopisech, na jejichž tvorbě se autor této disertační práce podílel. V těchto publikacích je řešena převážně problematika výpočtu deformovaného tvaru osově

souměrných membrán kapalinových čoček bez uvážení ohybové tuhosti, vliv předpětí membrány a optimalizace tloušťkového profilu membrány za účelem dosažení požadovaného deformovaného tvaru. V jedné z publikací je také řešena problematika vlivu průhybu sférických optických čoček vlastní tíhou na přesnost měření tvaru jejich ploch. V kapitole 4 jsou prezentovány doposud nepublikované výsledky, na kterých se autor této disertační práce podílel. Jedná se o problematiku zavedení vlivu ohybové tuhosti do mechanického modelu odvozeného v autorových publikacích prezentovaných v kapitole 3. Příloha A obsahuje kopie impaktovaných publikací autora souvisejících s disertační prací, Příloha B obsahuje seznam ostatních publikací autora a Příloha C obsahuje citace a významná ocenění autora.

2 Membránové kapalinové čočky

V posledních letech dochází k prudkému rozvoji a uplatňování tzv. aktivních optických prvků, které jsou schopny předem definovaným způsobem měnit své vnitřní nebo vnější parametry a tím i optické zobrazení. Na rozdíl od konvenčních objektivů, které ke změně těchto parametrů vyžadují přítomnost přesných mechanických posuvů a mnoha různých optických prvků, aktivní optické prvky těmito součástmi disponovat nemusí, což ve výsledku umožňuje miniaturizaci a zjednodušení různých optických systémů. Existuje velká řada způsobů, jak vlastnosti těchto komponent modifikovat. Jedním z nejrozšířenějších typů prvků jsou membránové kapalinové čočky [1-29]. Tyto prvky se zpravidla skládají z membrány pevně upevněné na svých okrajích, která kryje komoru s optickou kapalinou, tak, jako je schematicky naznačeno na Obr. 1a). Změnou objemu kapaliny dojde k deformaci membrány a změně optických vlastností dané čočky (Obr. 1b)).



Obr. 1 a) Schéma kapalinové membránové čočky a b) možný princip změny objemu kapaliny

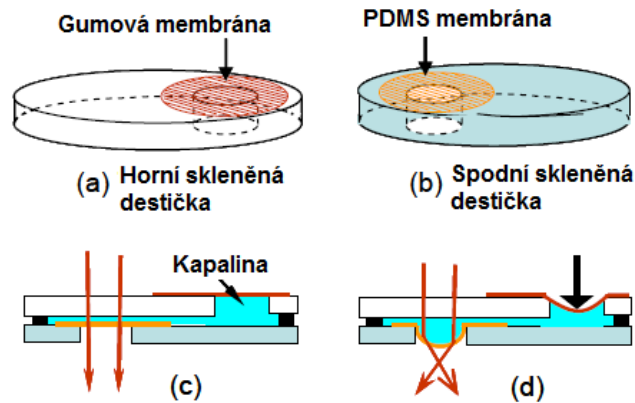
Výše popsaná konstrukce membránových kapalinových čoček je pouze zjednodušeným základem, který se v různých obměnách vyskytuje v řadě komerčně dostupných [2-5], či teoretických a experimentálních [6-29] provedeníh těchto zařízení. Hlavním nedostatkem výše zmíněného zjednodušeného řešení (planparalelní sklo – optická kapalina - membrána konstantní tloušťky - planparalelní sklo) je skutečnost, že deformovaná membrána vytváří plochu, která (i za předpokladu ideální osové souměrnosti) není z optického hlediska optimální a způsobuje vady zobrazení (optické aberace) [32,47,48].

Tato kapitola bude nadále věnována shrnutí dostupné literatury, která se zabývá konstrukcí, měřením, výpočty tvaru a optických parametrů a optimalizací membránových kapalinových čoček.

Sugiura [6] a Rawicz [7] ve svých pracích zkoumají chování kapalinové čočky, která je na jedné straně uzavřena planoparalelní průhlednou plastovou destičkou a na druhé straně tenkou polymerovou membránou konstantní tloušťky. Výpočet deformovaného tvaru řeší pro osově souměrnou úlohu zjednodušenou diferenciální rovnicí a výsledný deformovaný tvar prohlašují za parabolický. Spočtený deformovaný tvar je také posuzován z hlediska velikosti podélné sférické aberace a v závěru je konstatováno, že tato aberace je vůči aberaci klasické skleněné plankonvexní čočky zanedbatelně malá. Autoři zde ovšem skutečný deformovaný tvar membrány nijak neměří, a tedy reálná přesnost, se kterou jsou aberace počítány, je zpochybnitelná.

Zhang [8] ve své práci představuje konstrukci dvou membránových čoček. Plano-konvexní čočka, jejíž celá komora je tvořena elastickým materiálem zvaným polydimethylsiloxan (PDMS). Tato komora je na jedné straně uzavřena tenkou PDMS membránou (100 μm) a na druhé straně tenkým skleněným plátkem (150 μm). Konstrukce bikonvexní čočky je velmi podobná čočce plano-konvexní. Liší se pouze tím, že místo skleněného plátku je zde další PDMS membrána stejné tloušťky, jako membrána na druhé straně. Průměr vstupní pupily u obou čoček je 20mm. Autoři se v této práci zabývají především měřením závislosti optických parametrů (ohnisková vzdálenost, numerická apertura, rozlišení) na aplikovaném kapalinovém tlaku a neřeší teoretický výpočet tvaru membrán. V závěru konstatují, že lepších zobrazovacích parametrů bylo dosaženo s bikonvexní kapalinovou čočkou.

Ren [9] také prezentuje experimentální realizaci plano-konvexní kapalinové čočky, jejíž schéma je ukázáno na Obr. 2. Materiálem optické membrány je opět PDMS. Optická kapalina (voda) je v čočce jednorázově uzavřena a ke změně optických parametrů čočky (k deformaci PDMS membrány) dochází stlačováním pomocné gumové membrány pístem přesně regulovatelného lineárního motoru (Obr. 2d)). Autoři zde opět neřeší teoretický výpočet tvaru membrány a soustředí se na posouzení rozlišovací schopnosti čočky a závislosti ohniskové vzdálenosti na objemu kapaliny ohraničeném deformovanou PDMS membránou. V závěru konstatují, že při dosažení větších deformací optické membrány se zobrazovací parametry čočky značně zhoršují.

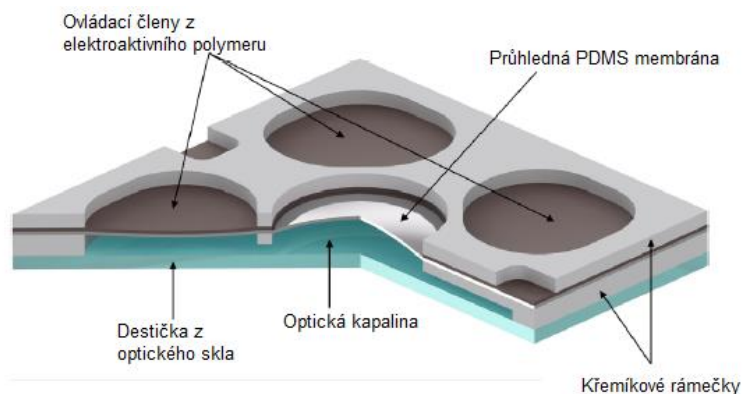


Obr. 2 Realizace plankonvexní membránové kapalinové čočky (průměr vstupní pupily je 5mm) [9]

Wang [10] se zabývá realizací a měřením kapalinové čočky se skladbou: planoparalelní skleněná destička – optická kapalina 1 – silikonová membrána – optická kapalina 2 - planoparalelní skleněná destička. Průměr vstupní pupily je 30mm. Jak ze skladby vyplývá, je komora rozdělena membránou na dvě části, z nichž každá má svůj přívod a odvod optické kapaliny. Autoři příliš jasně nepopisují způsob regulace přívodu optických kapalin. Co se týče teoretického rozboru tvaru deformované membrány, jsou provedeny nepříliš dobře popsané simulace v MKP software ANSYS a jsou diskutovány výhody oproti řešení této čočky bez dělicí membrány (pouze za přítomnosti dvou nemísitelných kapalin se stejnou hustotou). Dále autoři zkoumají možnosti rozlišení této membránové čočky.

Choi [11] ve své práci popisuje detailně teoretický rozbor a praktickou realizaci plano-konvexní mikro čočky s PDMS membránou, jejíž konstrukce je zobrazena na Obr. 3. Optická kapalina je v čočce uzavřena a dojde-li vlivem průchodu elektrického proudu elektro aktivním polymerem k deformaci ovládacích členů, začne na membránu působit tlak, v jehož důsledku se zdeformuje. Autoři nejprve studují rychlost odezvy maximálního průhybu membrány na tlak, kterým působí na kapalinu ovládací členy z elektro-aktivního polymeru. Simulace je prováděna v softwaru COMSOL a zahrnuje interakci mezi působením ovládacích členů na kapalinu a následně působením kapaliny na PDMS membránu. Výsledkem simulace je porovnání reakční rychlosti membrány pro optické kapaliny s různou viskozitou a je konstatováno, že vzhledem k tomu, že se jedná o přetlumený dynamický systém a nedochází ke kmitání membrány v důsledku rychlé změny tlaku, je možné studovat deformace membrány za statických okrajových podmínek. Dále pak autoři řeší deformovaný tvar membrány pomocí soustavy diferenciálních rovnic uvedených v [30] a na jeho základě pak počítají WFE_{RMS} („wave front error root mean square“, neboli efektivní hodnota vlnové aberace, viz následující podkapitola) v závislosti na ohniskové vzdálenosti. Pomocí software ABAQUS je také zkoumán vliv změny tlaku kapaliny v důsledku její vlastní tíhy (čočka je natočena do vertikální polohy) a následně pak také vliv dotvarování materiálu PDMS (viskoelastické chování) na výslednou deformaci

membrány a také na velikost vlnové aberace. Detaily použitého mechanického modelu (hrubost konečně-prvkové sítě, druh konečného prvku, materiálový model atd.) nejsou specifikovány. V závěru autoři konstatují, že klíčem k dosažení optimálních zobrazovacích vlastností v co nejširším rozsahu ohniskové vzdálenosti je vyladění průměru a tloušťky membrány, protože v případě příliš tenké membrány vzniká velká vlnová aberace v oblastech velkých ohniskových vzdáleností (malých tlaků) z důvodu vlivu vlastní tíhy kapaliny (v nepříznivém případě, kdy je čočka ve vertikální poloze), ale naopak v případě příliš tlusté membrány buď není vůbec možné dosáhnout menších ohniskových vzdáleností anebo v této oblasti opět vzniká velká vlnová aberace.



Obr. 3 Realizace plankonvexní membránové kapalinové čočky (průměr vstupní pupily 2,4mm a tloušťka PDMS membrány 50 μ m) [11]

Yang [12] se ve své práci zaměřuje pouze na PDMS membránu kapalinové čočky a nezabývá se detailně zobrazovacími vlastnostmi celé čočky. Nejprve provádí za použití zjednodušených analytických vztahů parametrickou analýzu vlivu maximálního průhybu membrány na velikosti působícího tlaku p , modulu pružnosti materiálu E a hlavně na velikosti počátečního předpětí. Již v této části zdůrazňuje, že předpětí má hlavně v oblasti malého poměru p/E veliký vliv na maximální průhyb membrány (čím větší předpětí, tím větší počáteční tuhost a tím menší deformace). Dále poměrně podrobně popisuje výrobu experimentálních vzorků a měření deformovaných tvarů bezkontaktním konfokálním senzorem pro různé zatěžovací tlaky. Následuje část článku věnovaná popisu numerického modelu pro podrobnější analýzu deformovaného tvaru membrány, nicméně podstatné detaily (použitý software, druh konečných prvků, materiálový zákon apod.) nejsou zmíněny. K popisu deformovaného tvaru membrány je použit vztah

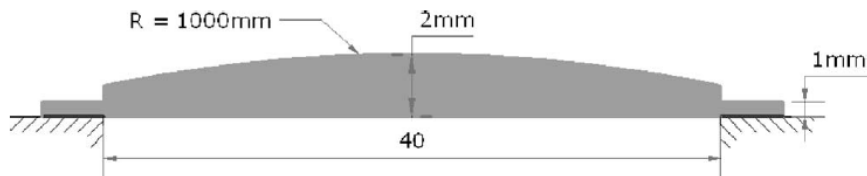
$$\frac{\delta(r)}{a} = \frac{(r/a)^2 (a/R)}{1 + \sqrt{1 - (1 + K)(r/a)^2 (a/R)^2}}, \quad (1)$$

kde R je vrcholový poloměr křivosti, K je kuželosečková konstanta (anglicky „conic constant“), $\delta(r)$ je průhyb membrány, a je poloměr membrány a r je radiální

souřadnice. Z experimentálně naměřené závislosti maximálního průhybu na zatěžovacím tlaku jsou mechanické parametry numerického modelu (předpětí a modul pružnosti) zkalibrovány tak, aby numerické výsledky co možná nejlépe souhlasily s experimentem, což autoři zároveň prohlašují za metodu měření těchto parametrů. V závěru je konstatováno, že počáteční předpětí značně zlepšuje vliv nechtěných náběhů v blízkosti upnutí membrány a že deformovaný tvar membrány pak více odpovídá sférické ploše. Dále pak počáteční předpětí pomáhá stabilizovat hodnotu kuželosečkové konstanty pro větší rozsah zatěžovacích tlaků, což značně usnadní navrhování optických kapalinových čoček. Autoři také konstatují, že pro většinu optických aplikací nemá deformovaná membrána konstantní tloušťky příliš optimální tvar a navrhují se v budoucnu zabývat optimalizací proměnné tloušťky membrány v radiálním směru za účelem dosažení deformovaného tvaru s lepšími optickými vlastnostmi.

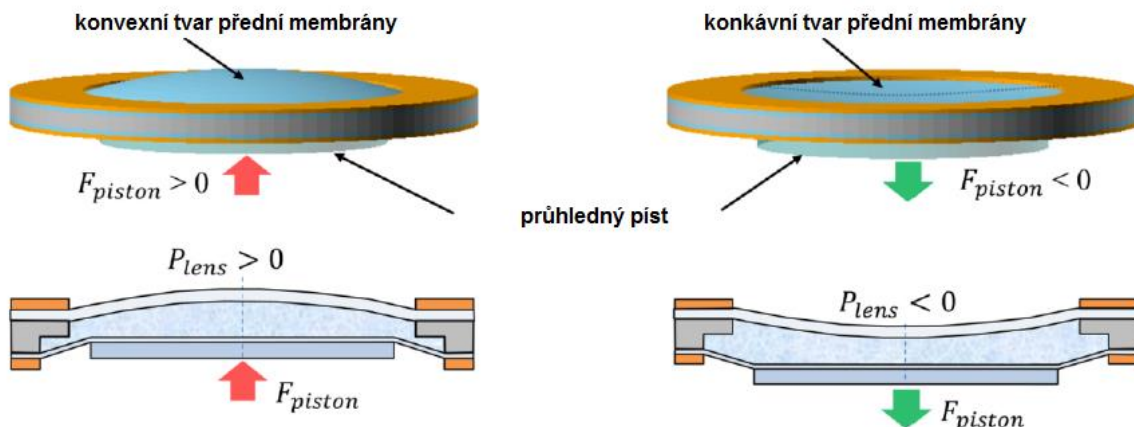
Wang [13] vylepšuje svou membránovou kapalinovou čočku prezentovanou ve [10]. Jedná se o kapalinovou čočku se dvěma optickými kapalinami oddělenými PDMS membránou. Autoři navrhují zavést do membrány předpětí za účelem minimalizace nesouměrné deformace (v důsledku tíhy optické kapaliny) vzniklé umístěním čočky do svislé polohy (především v oblastech velké ohniskové vzdálenosti, kdy na membránu působí malý tlak a je náchylnější k nesymetrickým deformacím). Jsou provedeny simulace v softwaru ANSYS. Navrhované vylepšení je potvrzeno měřením, kdy vlnová aberace pro velké ohniskové vzdálenosti skutečně dosahuje mnohonásobně menších hodnot v případě předepjaté membrány, než v případě membrány bez předpětí. V článku není zmíněno, jakým způsobem došli autoři k hodnotě předpětí použité v MKP simulaci a ani v jakých hodnotách se předpětí pohybuje v experimentální membráně.

Shaw [14] nejprve studuje vliv okrajových podmínek na deformovaný tvar osově souměrné membrány kapalinové čočky o skladbě: planparalelní skleněná destička - optická kapalina - PDMS membrána konstantní tloušťky. Analýza je provedena v MKP software ANSYS. Dochází k závěru, že lepšího tvaru pro optické účely dosahuje membrána na okraji prostě podepřená, nicméně tato okrajová podmínka je prakticky nerealizovatelná a je tedy nutno brát v úvahu vetknuté podepření. Následuje ověření výpočtu měřením deformace experimentálního vzorku membrány a autoři potvrzují, že výsledky se velmi dobře shodují. Zvolená metoda měření, ani přímé výsledky měření tvaru však nejsou v článku ukázány. Vliv možného předpětí na deformovaný tvar není ani okrajově zmíněn. Dále je zkoumán vliv tloušťkového profilu membrány na kvalitu optického zobrazení. Je dosaženo závěru, že lepších zobrazovacích vlastností je dosaženo s membránou proměnné tloušťky, jejíž jedna plocha je rovinná a druhá plocha je konvexně sférická (Obr. 4). Autoři zvolené tloušťkové profily nijak neodůvodňují.

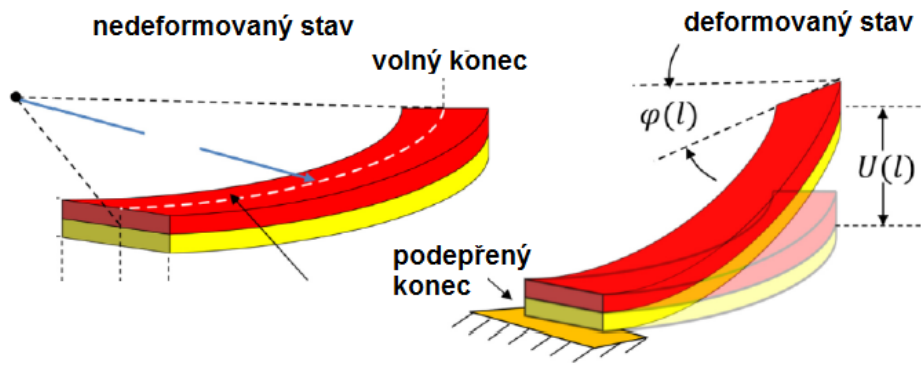


Obr. 4 Experimentální tloušťkový profil membrány [14]

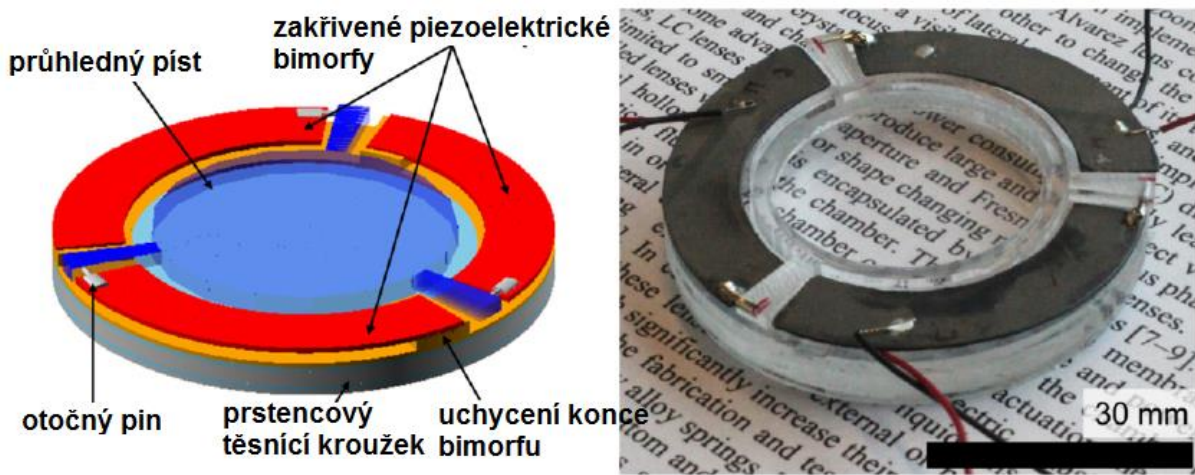
Hasan [15] ve své práci poměrně detailně popisuje konstrukci plano-konvexní/konkávni brýlové membránové kapalinové čočky (Obr. 5). Optická kapalina (v tomto případě glycerol) je v čočce hermeticky uzavřena a ke změně tvaru hlavní membrány dochází posunem průhledného pístu (planoparalelní čočky). Ty jsou realizovány pomocí piezoelektrických bimorfních regulátorů (Obr. 6 a Obr. 7). Po připojení stejnosměrného elektrického napětí na zakřivený bimorf se tento má tendenci zdeformovat a tím působit na průhledný píst silou F_{piston} . Autoři nejprve dělají přibližnou studii deformovaného tvaru membrány za pomoci zjednodušených analytických vztahů a počítají přibližně závislost síly působící na průhledný píst a deformace hlavní membrány. Dále pak detailně popisují ovládací mechanismus kapalinové čočky a její výrobu. Nakonec provádějí měření závislosti ohniskové vzdálenosti na napětí připojeném na bimorfy a měření aberací kapalinové čočky. V závěru konstatují, že v oblastech malých deformací hlavní membrány dominovala aberace „koma“ (viz následující podkapitola), která je způsobená nesouměrnou deformací membrány v důsledku vlastní tíhy optické kapaliny. Pro oblasti větších deformací hlavní membrány se koma značně zmenšila a naopak se mírně zvýšila velikost sférické aberace.



Obr. 5 Principiální schéma brýlové membránové kapalinové čočky (průměr vstupní pupily je 32 mm, tloušťka přední (hlavní) membrány 1.2 mm a tloušťka pomocné (zadní) membrány 0.2 mm) [15]

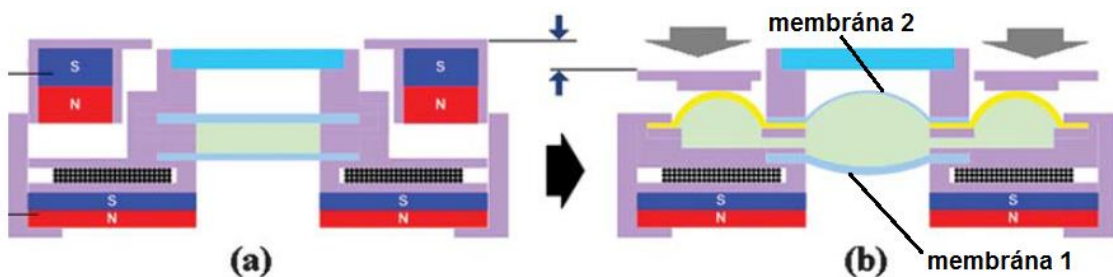


Obr. 6 Schematický náčrt piezoelektrického bimorfu ($U(l)$ je svislý posun na konci střednice bimorfu a $\varphi(l)$ je úhel natočení) [15]



Obr. 7 Regulační mechanismus kapalinové čočky realizovaný pomocí piezoelektrických bimorfů [15]

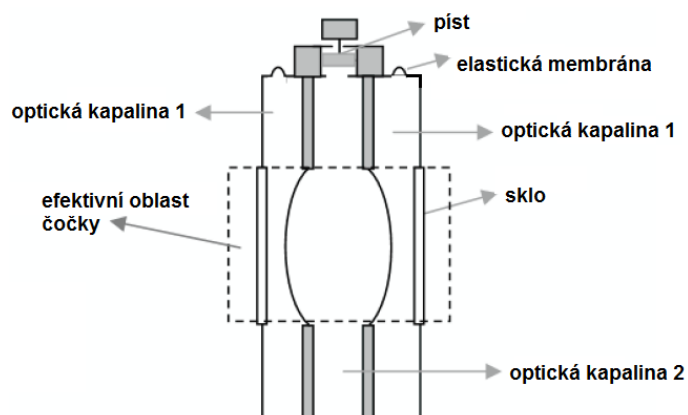
Choi [16] navrhuje za účelem zmenšení sférické aberace membránovou kapalinovou čočku uzavřenou PDMS membránami s různými tloušťkami na obou stranách, tedy obě membrány se deformují najednou, ale každá jiným způsobem (Obr. 8). Regulační mechanismus je tvořen dvěma dvojicemi permanentních magnetů, jejichž magnetické pole je navíc v určitém rozsahu regulováno elektromagnetickou cívkou.



Obr. 8 Schéma kapalinové čočky se dvěma PDMS membránami různé tloušťky a) nedeformovaný stav, b) deformovaný stav [16]

Co se návrhu tloušťek membrán týče, autoři zvolili následující postup. Za předpokladu ideálně sférického deformovaného tvaru byl navržen poměr mezi poloměry křivosti jedné a druhé membrány tak, aby pro určitou ohniskovou vzdálenost bylo dosaženo minimálních sférických aberací. Následně pak autoři experimentálně měřili závislost vrcholového průhybu a vrcholového poloměru křivosti různě tlustých kruhových PDMS membrán na působícím tlaku a v konstrukci kapalinové čočky poté použily takové tloušťky, které vedly k navrhovanému poměru mezi poloměry křivosti obou deformovaných ploch. Autoři v závěru konstatují, že sférická aberace kapalinové čočky se dvěma membránami je oproti plankonvexní čočce (kapalinové čočce s planoparalelní skleněnou destičkou na jedné straně a membránou na straně druhé) zanedbatelná.

Wang [17] ve své další práci navrhuje kapalinovou čočku tvořenou pouze dvěma nemísitelnými optickými kapalinami s odlišnými indexy lomu. Skladba čočky je: sklo - optická kapalina 1 - optická kapalina 2 - optická kapalina 1 - sklo (Obr. 9). Regulačním členem je v tomto případě píst, který stlačuje optickou kapalinu 2, ta je ovšem (téměř) nestlačitelná, a tedy se tlak vyvozený pístem přenáší do okrajových komor čočky, kde vytlačí pomocné elastické membrány. Tímto vznikne na rozhraní dvou optických kapalin vypouklá plocha (nebo v opačném případě, pokud je píst z čočky vytahován, plocha vydutá). Autoři se nadále nezabývají přesným výpočtem tvaru plochy rozhraní mezi kapalinami a jednoduše předpokládají, že je sférický. Dále pak podrobně teoreticky počítají jednotlivé hlavní aberace této kapalinové čočky, které také ověřují experimentem. Na závěr konstatují, že v případě použití optických kapalin se stejnou hustotou je také možné téměř odstranit vliv vlastní tíhy kapaliny na nesouměrnou deformaci rozhraní kapalin.

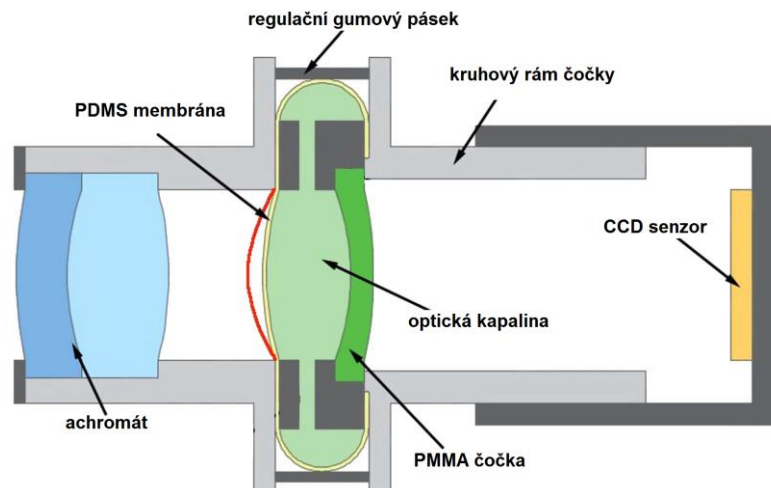


Obr. 9 Schéma kapalinové čočky se dvěma rozhraními nemísitelných optických kapalin [17]

Fuh [18] navrhuje velmi podobné řešení, jako Choi [16], tedy kapalinovou čočku s komorou uzavřenou z každé strany elastickou membránou. Místo PDMS volí za materiál membrán PVC (polyvinylchlorid). V práci se zmiňuje o možnosti zvolit pro každou membránu jinou tloušťku za účelem zlepšení optických vlastností, nicméně

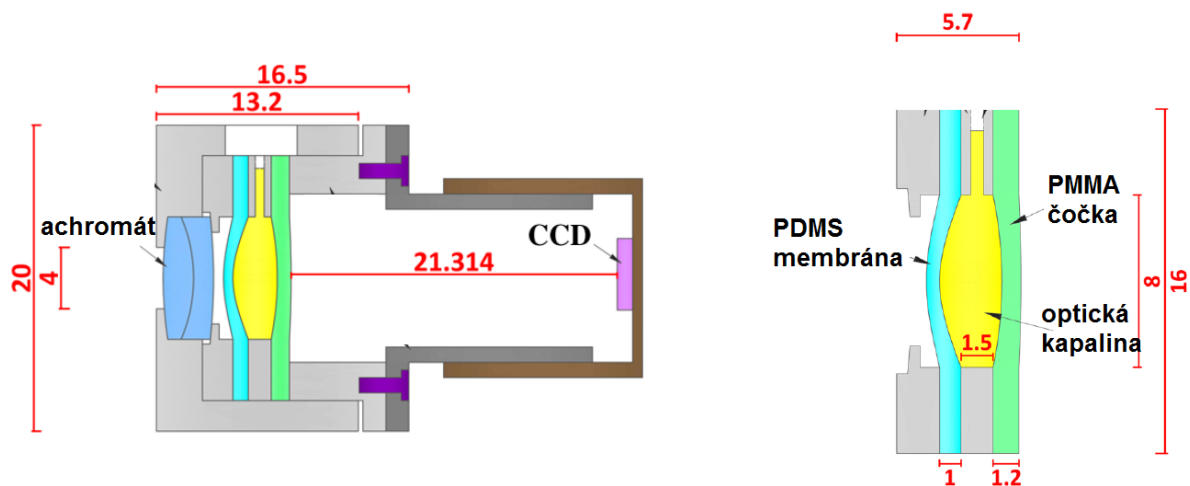
experiment provádí s membránami stejných tloušťek a teoretickým rozбором deformovaného tvaru membrán se vůbec nezabývá.

Liang [19] ve své práci navrhuje kapalinovou čočku inspirovanou stavbou lidského oka. Čočka se skládá z achromátu [31], PDMS membrány, optické kapaliny a PMMA (polymethylmetakrylát) čočky (Obr. 10). Regulace je řešena jakýmsi stahovacím gumovým páskem, nicméně autor této disertační práce z článku přesný způsob nevyrozuměl. Autoři v článku neřeší teoreticky deformovaný tvar plochy membrány, považují ho za sférický a soustředí se na optický návrh a experimentální realizaci ostatních komponent. Dále pak měří deformovaný tvar membrány, možné rozlišení zobrazení čočky a rozsah ohniskových vzdáleností.



Obr. 10 Schéma kapalinové čočky inspirované stavbou lidského oka [19]

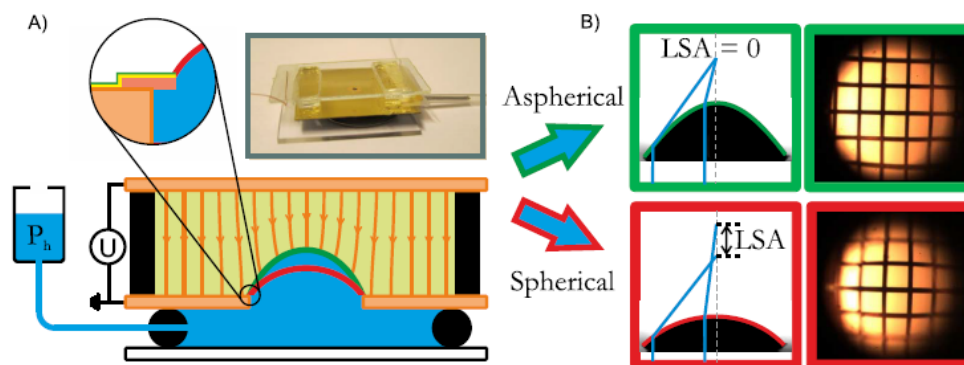
Du [20] prezentuje velmi podobnou kapalinovou čočku inspirovanou stavbou lidského oka, jako Liang [19]. Čočka se liší pouze regulačním mechanismem, který ovšem autoři příliš nepopisují, a počátečním tvarem PDMS membrány, který v tomto případě není rovinný, ale tvoří ho dvě různé paraboly (Obr. 11) tak, aby se tloušťka od středu ke kraji zvětšovala.



Obr. 11 Schéma kapalinové čočky s parabolickou membránou [20]

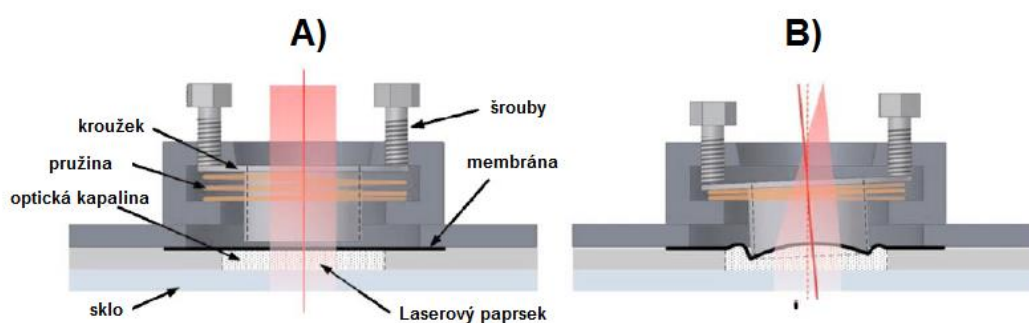
Počáteční parabolický tvar PDMS membrány je výsledkem optického návrhu této čočky v softwaru ZEMAX a autoři nejspíše předpokládají, že pokud bude docházet při nafukování membrány pouze k malým deformacím, zůstane její tvar velmi blízký parabole, což potvrzují simulací v softwaru ABAQUS a následně také experimentálním měřením tvaru deformované membrány, nicméně pro větší hodnoty zatěžovacího tlaku se deformovaný tvar od paraboly již značně liší. Dále jsou prováděna měření závislosti ohniskové vzdálenosti na objemu vtlačené kapaliny a je posuzována kvalita zobrazení. V závěru je také konstatováno, že z důvodu zvětšující se tloušťky membrány je vliv vlastní tíhy kapaliny na nesouměrnou deformaci membrány (když je osa čočky ve vodorovné poloze) téměř zanedbatelný.

Zajímavý typ kapalinové čočky prezentuje Mishra [21]. Stručně si zde popíšeme princip, ačkoliv se nejedná o membránovou čočku, ale o čočku, pro kterou zakřivená optická plocha vzniká na kontaktu dvou nemísitelných kapalin (Obr. 12). Pokud aplikujeme tlak na spodní kapalinu a elektrické napětí U mezi destičkami čočky bude nulové, lze podle autorů předpokládat, že vzniklá zakřivená plocha na rozhraní kapalin je sférická a tedy se při zobrazení touto plochou projeví sférické aberace. Pokud ale navíc aplikujeme mezi vodivými destičkami čočky vysoké elektrické napětí, tvar plochy se začne měnit a lze nalézt takový stav, kdy čočka nemá téměř žádnou sférickou aberaci.



Obr. 12 Kapalinová čočka se dvěma nemísitelnými optickými kapalinami a korekcí podélné sférické aberace (LSA – „longitudinal spherical aberration“) elektrostatickým polem [21]

Shaw [22] navrhuje membránovou kapalinovou čočku, která kromě změny ohniskové vzdálenosti umožňuje změnu směru optické osy pomocí nesymetrické deformace membrány (Obr. 13). Čočka má v sobě hermeticky uzavřený konstantní objem optické kapaliny a podle toho, jak je nastavitelnými šrouby přitlačován kovový kroužek na membránu, se tato deformuje a tvoří optickou lámavou plochu. Autoři řeší problém jak z hlediska simulace deformací membrány v software ANSYS, tak i experimentálně. Popis numerického modelu není v této práci příliš detailní.



Obr. 13 Membránová kapalinová čočka s možností změny směru optické osy a) počáteční stav, b) nesymetricky deformovaný stav [22]

Práce Yu [23], Feng [24] a Schneider [25] řeší kapalinové čočky zkonstruované či simulované na jednom z principů popsaných v dříve zmíněných pracích [6-23] a proto na ně čtenáři odkážeme a nebudeme je zde detailněji probírat.

Věnujme nyní pozornost principu korekce optických aberací, který již nastínil Shaw [14] a také částečně Du [20]. Neoptimální optický tvar, který vzniká deformací membrány konstantní tloušťky, je korigován tím, že volíme membránu proměnné tloušťky (stále osově souměrnou). Tímto způsobem je teoreticky možné „přimět“ membránu, aby se deformovala přesně do námi navrženého tvaru, což redukuje nutnost přítomnosti dalších členů, které korigují aberace membránových kapalinových čoček. Touto problematikou se dále zabývají práce [26-29].

Santiago-Alvarado [26] navrhuje proměnnou tloušťku membrány tak, aby v nedeformovaném stavu odpovídal tvar membrány předem navržené a) sférické ploše b) parabolické ploše. Deformovaný tvar při zatěžování rovnoměrným tlakem počítá v MKP pluginu softwaru SOLIDWORKS. Dále pak zjišťuje optické parametry takto navržených ploch, nicméně tato metoda připomíná spíše metodu pokus - omyl co se týče určení takové proměnné tloušťky, aby výsledný deformovaný tvar byl z optického hlediska „ideální“. Například použijeme-li membránu konstantní tloušťky, její deformovaný tvar samozřejmě není stále rovina. Není tedy jasné, proč by membrána s počátečním sférickým, či parabolickým průběhem tloušťky, měla být po deformaci stále sféra, či paraboloid.

Jinou metodu určení proměnné tloušťky membrány, která však také nemá příliš jasné podložení, navrhuje Huang [27]. Ten postupuje tak, že počítá deformovaný tvar membrány konstantní tloušťky v MKP software COMSOL a tento použije, jako tloušťkový profil pro membránu s proměnnou tloušťkou. Optické parametry kapalinové čočky se podle autorů zlepší, nicméně vše nasvědčuje tomu, že ke zlepšení dojde téměř vždy, pokud se tloušťka membrány směrem od středu zmenšuje.

Obdobným způsobem postupuje Ding [28], který pouze zkouší tři různé tloušťkové profily (sférický konkávní, sférický konvexní, konstantní tloušťka) a deformovaný tvar počítá také v MKP software COMSOL.

Pozastavme se nyní nad postupem, který navrhuje Zhao [29]. Zde autoři nejprve stanoví cílový deformovaný tvar optické plochy membrány kapalinové čočky pomocí optického software Code V. Dále pak za použití soustavy dvou diferenciálních rovnic popisujících velké průhyby kruhových osově souměrných desek proměnné tloušťky uvedené v [30] stanoví takový průběh tloušťky membrány, který odpovídá danému deformovanému tvaru, mechanickým parametrům a zatěžovacímu tlaku. Vzhledem k tomu, že navržená optická plocha neobsahuje žádné inflexní body a použitá soustava diferenciálních rovnic bere v úvahu také ohybovou tuhost membrány, přibližuje se vždy řešení pro tloušťku na okraji membrány k nulové hodnotě (jakákoliv jiná hodnota tloušťky na okraji by vedla k náběhům a tedy tvorbě inflexních bodů). Realizovat membránu s nulovou tloušťkou na okraji samozřejmě není možné, a proto autoři takto spočítaný tloušťkový profil membrány na okrajích zvětšili na minimální realizovatelnou tloušťku a poté aproximovali vhodnou exponenciální funkcí, aby bylo možné ho parametricky upravovat. Následně provádějí MKP simulaci v software ANSYS, deformovaný tvar posuzují z hlediska kvality zobrazovacích parametrů v software Code V a pokud zobrazovací parametry nevyhoví požadavkům, upraví se parametry tloušťkové funkce a celý proces se opakuje. Způsob optimalizace parametrů tloušťkové funkce není zcela jasně popsán, nicméně celkový postup uvedený v této práci je dobře odůvodněný a srozumitelně popsáný.

Ve většině výše zmíněných pracích si můžeme všimnout, že autoři používají pro výpočet deformovaného tvaru membrány buď různě zjednodušená řešení převzatá z dostupné literatury, nebo robustní MKP software, ale ani v jednom případě se ve svých pracích příliš nepozastavují nad detaily a numerickými metodami použitých výpočetních modelů. Ty lze nalézt například v [33-45]. Pokud nebude uvedeno jinak, jedná se vždy o řešení jisté soustavy diferenciálních rovnic pro osově souměrnou kruhovou úlohu membránové konstrukce se zanedbáním ohybové tuhosti. Autoři předpokládají ve svých pracích různá zjednodušení, a tedy se tvar rovnic i jejich řešení mohou lišit (a liší).

Hencky [33] řeší soustavu nelineárních diferenciálních rovnic metodou řad.

Campbel [34] zobecňuje Henckeho řešení pro počáteční předpětí membrány.

Goldberg a Pifko [35-36] navrhnou iterativní řešení a porovnávají ho s řešením metodou řad.

Kao a Perrone [37-38] řeší soustavu nelineárních diferenciálních rovnic za použití centrálních diferencí a pomocí relaxační iterativní techniky.

Kelkar [39] upravuje soustavu dvou diferenciálních rovnic na jedinou rovnici, kterou následně diskretizuje pomocí centrálních diferencí na soustavu nelineárních algebraických rovnic a řeší pomocí Newton-Raphsonovy metody.

Fichter [40] konstatuje, že Henckeho řešení [33] zanedbává v soustavě diferenciálních rovnic vliv vodorovné složky tlaku působícího na membránu po její deformaci (uvažuje stále pouze svislé zatížení), přidává tedy do rovnic tento vliv a porovnává rozdíly mezi řešeními. K řešení využívá také metodu řad. Nakonec se také zabývá řešením problému určení proměnné tloušťky membrány za účelem dosažení jejího předepsaného deformovaného tvaru a dochází k závěru, že pro většinu předepsaných tvarů vede jeho řešení k nekonečně velké tloušťce na okraji membrány.

Allman [41] odvozuje řešení pomocí minimalizace funkcionálu pro daný problém. Řešení hledá ve formě analyticky vyjádřených funkcí, jejichž původ nezmiňuje.

Sheplak [42] zavádí do soustavy diferenciálních rovnic vliv ohybové tuhosti a počátečního předpětí, diskretizuje soustavu pomocí centrálních diferencí a následně ji řeší implicitní iterační metodou.

Zhao [43] zdůrazňuje nutnost zjednodušených analytických modelů pro jejich názornost a za pomoci energetické metody odvozuje tato řešení i pro vliv počátečního předpětí membrány, změnu teploty a ohybovou tuhost.

Stanford [44] řeší soustavu diferenciálních rovnic pomocí metody konečných prvků.

Mikš a Novák [45] k řešení využívají metodu řad, kde k výpočtu hodnot jednotlivých členů řady využívají optimalizačních metod implementovaných v softwaru Matlab [46].

Z výše uvedeného je zřejmé, že způsobů, kterými různí autoři charakterizovali kapalinové membránové čočky, existuje celá řada. A to jak z pohledu volby mechanického modelu, tak z pohledu přístupu k numerickému řešení. V následující kapitole budou podrobně představeny publikace zabývající se tímto tématem, na kterých se autor práce podílel a které byly otištěny v prestižních mezinárodních impaktovaných časopisech. V těchto publikacích je brán zřetel na přehledné odvození jednotlivých vztahů týkajících se popisu a později řešení daného mechanického modelu a v případě zavedení určitého zjednodušujícího předpokladu je na toto jasně upozorněno.

3 Souhrn odborných publikací

Tato kapitola je souhrnem šesti autorových publikací, které vyšly v různých zahraničních impaktovaných časopisech a které se týkají problematiky řešené v této disertační práci. Zde v úvodu této kapitoly si pouze velmi stručně představíme témata jednotlivých článků, které budou detailněji popsány v následujících podkapitolách. První dvě publikace [50,51] vycházejí z autorovy diplomové práce a zabývají se odvozením mechanického modelu popisujícím velké deformace osově souměrné membrány kapalinové čočky s počáteční konstantní tloušťkou zatížené tlakem optické kapaliny a následnou aplikací této teorie při výpočtu konkrétních příkladů pomocí různých numerických metod. První publikace [50] se omezuje pouze na případ membrány bez počátečního předpětí, který se ovšem při porovnávání s experimenty projeví jako nedostačující, protože při upínání membrány do objímky kapalinové čočky je vnesení předpětí téměř nevyhnutelné. V druhé publikaci [51] je teorie rozšířena o možnost zavedení počátečního předpětí a jeho vliv je blíže analyzován. Třetí publikace [52] volně navazuje na předchozí a zabývá se vlivem tloušťky membrány s počáteční konstantní tloušťkou na velikost aberací plano-konvexní kapalinové čočky. Čtvrtá publikace [53] opět navazuje na první dvě a detailně se zabývá problematikou optimalizace proměnné počáteční tloušťky předepjaté membrány kapalinové čočky za účelem dosažení předepsaného deformovaného tvaru střednicové plochy membrány, čehož lze v praxi využít ke snížení optických aberací kapalinové čočky. V páté publikaci [54] je tato teorie rozšířena o možnost optimalizace počáteční tloušťky membrány tak, aby předepsaného tvaru dosáhla její vnější deformovaná plocha (namísto střednicové plochy), na které se převážně odehrává lom světelných paprsků (index lomu optické kapaliny bývá velmi blízký indexu lomu materiálu membrány, a tedy na rozhraní optická kapalina – membrána k lomu téměř nedochází). Šestá publikace [55] s tématem membránových kapalinových čoček přímo nesouvisí. Vychází také z autorovy diplomové práce a zabývá se analýzou průhybů sférických skleněných čoček způsobených vlastní tíhou optického skla, ze kterého jsou vyrobeny.

3.1 Analýza velkých deformací membrán kapalinových čoček

Publikace [50] se zabývá odvozením soustavy diferenciálních rovnic popisujících velké deformace osově souměrné membrány kapalinové čočky s počáteční konstantní tloušťkou (viz Obr. 14). Je vznesen předpoklad, že membrána je dostatečně tenká, a tudíž může být zanedbána její ohybová tuhost. Rovnice jsou odvozeny pomocí energetické metody z podmínky minimální potenciální energie a je použit Saint Venant-Kirchhoffův materiálový model, který je definován lineárním vztahem mezi Green-Lagrangeovým přetvořením a druhým Piola-Kirchhoffovým napětím, a je považován za nejjednodušší hyperelastický materiálový model. Odvozené rovnice mají tvar

$$\begin{aligned} h[r\sigma_r(1+u')] - h\sigma_t\left(1+\frac{u}{r}\right) &= p(r+u)w', \\ -h(r\sigma_r w')' &= p(r+u)(1+u'), \end{aligned} \quad (2)$$

kde σ_r , resp. σ_t je v tomto případě 2. Piola-Kirchhoffovo radiální, resp. tangenciální napětí, w a u je svislý a vodorovný posuv bodu s počáteční souřadnicí $[r,0]$, r je radiální souřadnice, a je poloměr membrány a h je tloušťka membrány. w' a u' označují derivaci funkce w , resp. u podle souřadnice r a pokud není uvedeno jinak, jsou tímto způsobem značeny derivace v celé této práci.

V průběhu odvozování nejsou ve výrazech zanedbávány žádné členy, čímž se tato publikace mimo jiné liší od autorům známé literatury. Odvozená soustava diferenciálních rovnic je porovnána s dostupnou literaturou a jsou odhalena zjednodušení, kterých se ostatní autoři, většinou bez upozornění v textu, dopouštějí. Nejčastěji publikovaná forma zjednodušených rovnic má tvar

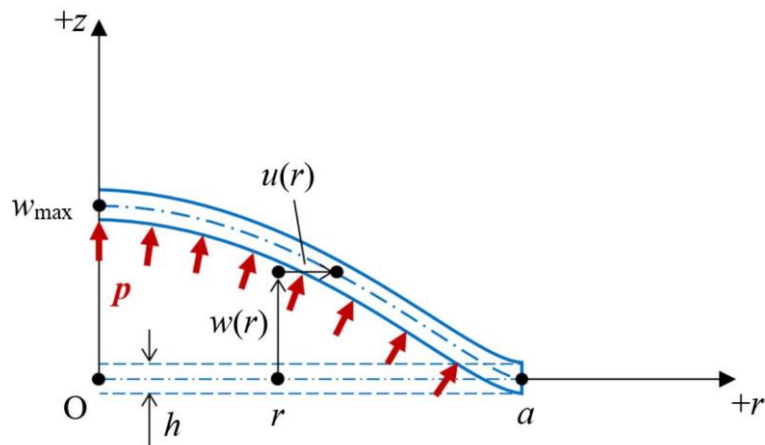
$$\begin{aligned} h(r\sigma_r)' - h\sigma_t &= prw', \\ -h(r\sigma_r w')' &= pr, \end{aligned} \quad (3)$$

který obdržíme, přijmeme-li předpoklad, že platí $u' \ll 1$ a $u \ll r$.

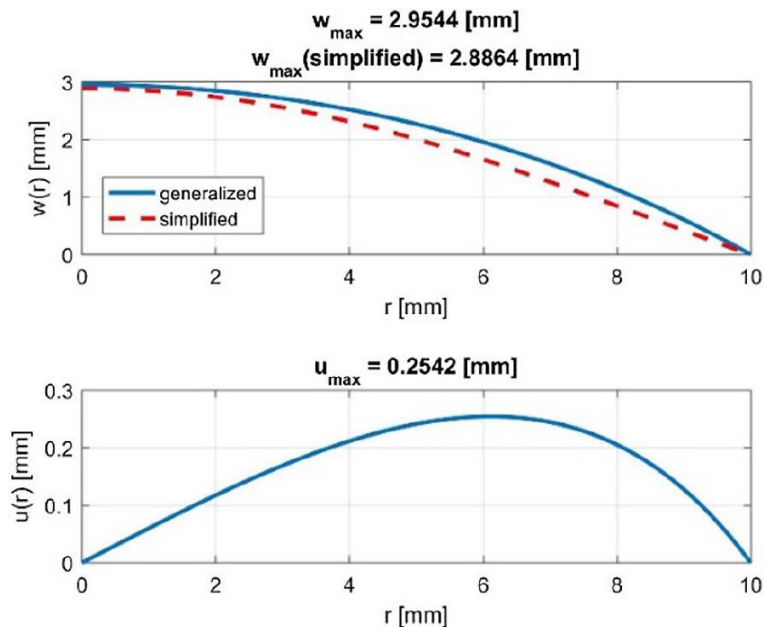
K řešení je použita metoda řad a numerická optimalizace jejich koeficientů. Obě varianty diferenciálních rovnic (obecná (2) i zjednodušená (3)) jsou porovnány na konkrétním příkladu, kde je prokázána poměrně významná odlišnost (viz Obr. 40 a Obr. 16).

Za předpokladu plano-konvexní kapalinové čočky naplněné optickou kapalinou uzavřené z jedné strany planoparalelní skleněnou destičkou a z druhé strany

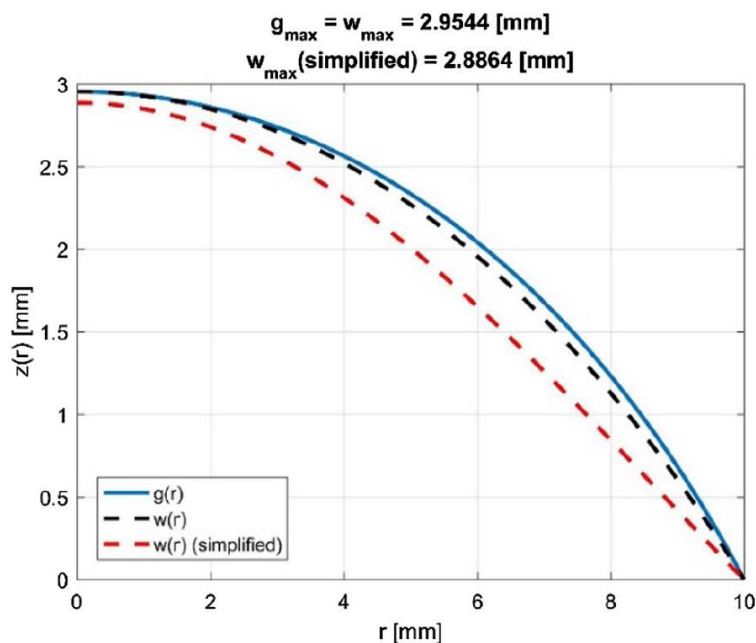
elastickou membránou idealizovanou její střednicovou plochou (tloušťka membrány je zanedbána) je analyzována příčná paprsková aberace pro paprsky rovnoběžné s optickou osou (osový bod v nekonečnu) a vstupující ze strany deformované membrány. Ukazuje se, že deformovaný tvar membrány s počáteční konstantní tloušťkou vede zhruba k pětkrát větším hodnotám příčné paprskové aberace, než v případě, když by deformovaný tvar membrány byl čistě sférický (viz Obr. 17). Dále se ukazuje, že při použití zjednodušených rovnic pro výpočet deformovaného tvaru membrány vzniká ještě větší příčná paprsková aberace a navíc s opačným znaménkem, což potvrzuje veliký význam zanedbaných členů pro potřeby optických aplikací. Spočtené deformované tvary jsou dále v článku porovnány s deformacemi naměřenými na experimentální kapalinové čočce a je potvrzena dobrá shoda s numerickým modelem (viz Obr. 18).



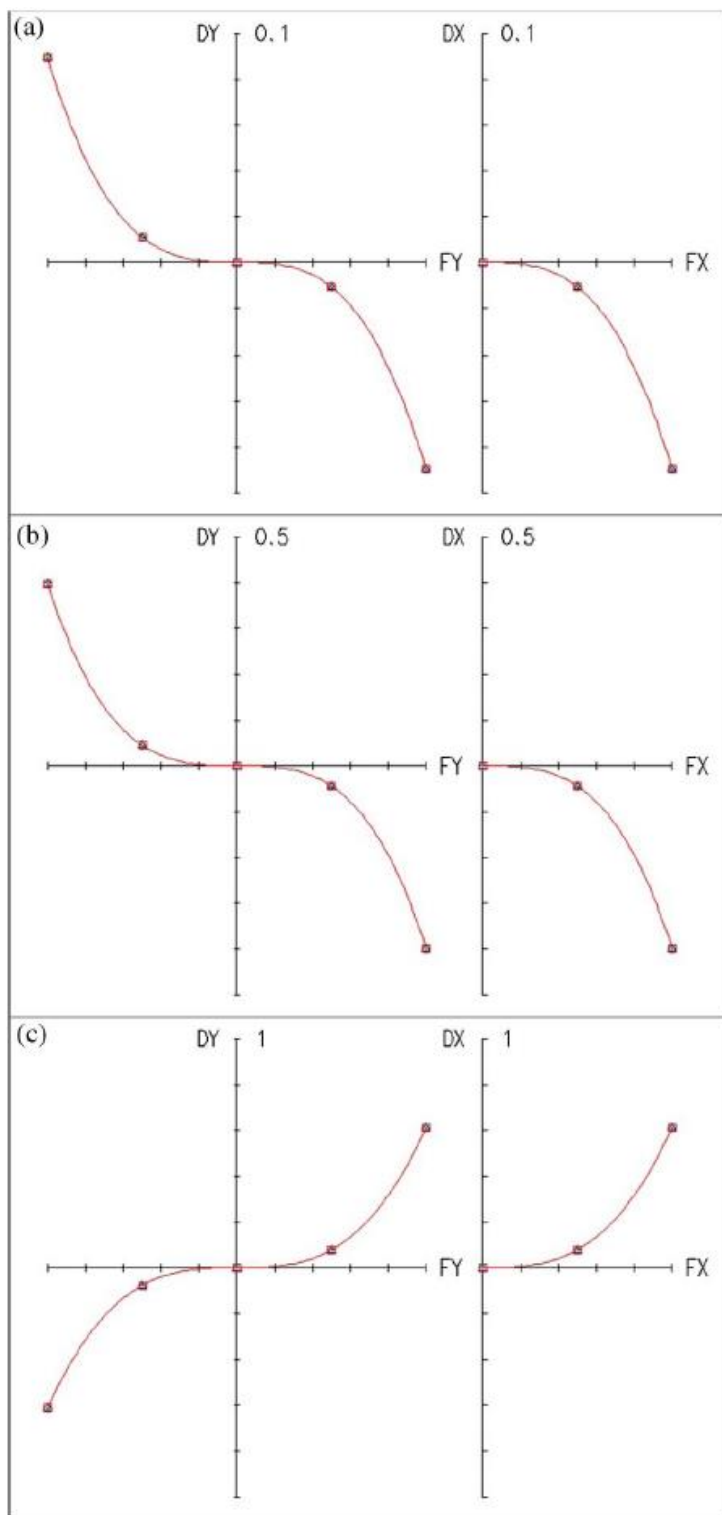
Obr. 14 Schematický náčrt kruhové osově souměrné membrány deformované konstantním tlakem p optické kapaliny (čárkovaná čára – počáteční tvar membrány při nulovém zatěžovacím tlaku, plná čára – deformovaný tvar, $w(r)$ a $u(r)$ - svislý a vodorovný posuv bodu s počáteční souřadnicí $[r,0]$, r - radiální souřadnice, a - poloměr membrány, h - tloušťka membrány, w_{\max} - maximální průhyb) [50]



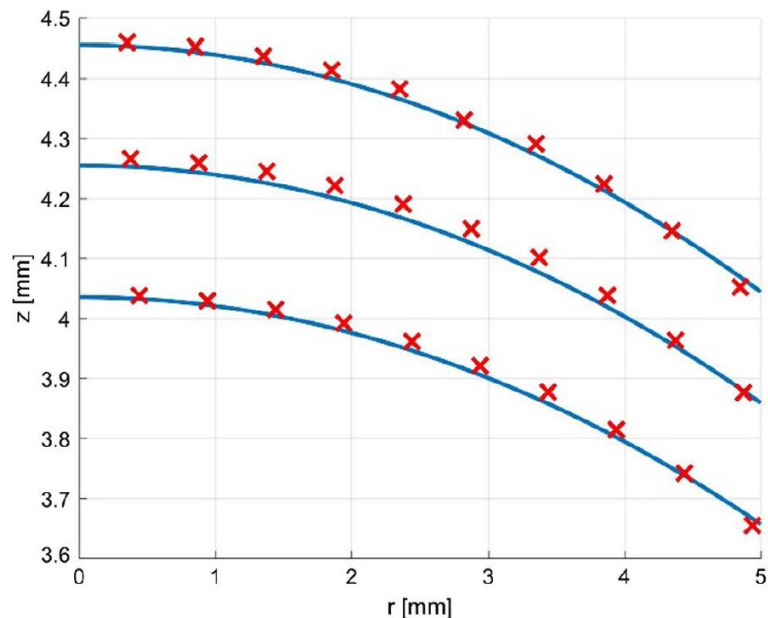
Obr. 15 Spočtené funkce $w(r)$, $u(r)$ a porovnání řešení obecné a zjednodušené formy rovnic (plná modrá – obecné řešení, červená čárkovaná – zjednodušené řešení) [50]



Obr. 16 Porovnání funkce svislého průhybu $w(r)$ a funkce $g(r)$ vyjadřující výsledný deformovaný tvar (červená čárkovaná - obecné řešení $w(r)$, černá čárkovaná – zjednodušené řešení $w(r)$, modrá plná – výsledný deformovaný tvar $g(r)$) [50]



Obr. 17 Porovnání příčné paprskové aberace membránové čočky (a) aproximace deformovaného tvaru membrány sférickou plochou o stejném vrcholovém poloměru křivosti, (b) přesný deformovaný tvar membrány spočtený z obecných rovnic (c) přesný deformovaný tvar membrány spočtený ze zjednodušených rovnic (zatěžovací tlak je upraven tak, aby vrcholový poloměr křivosti byl totožný, jako u řešení z obecných rovnic); DX a DZ značí hodnotu příčné paprskové aberace, FX a FY značí dopadovou výšku paprsku v intervalu od -5 mm do 5 mm [50]

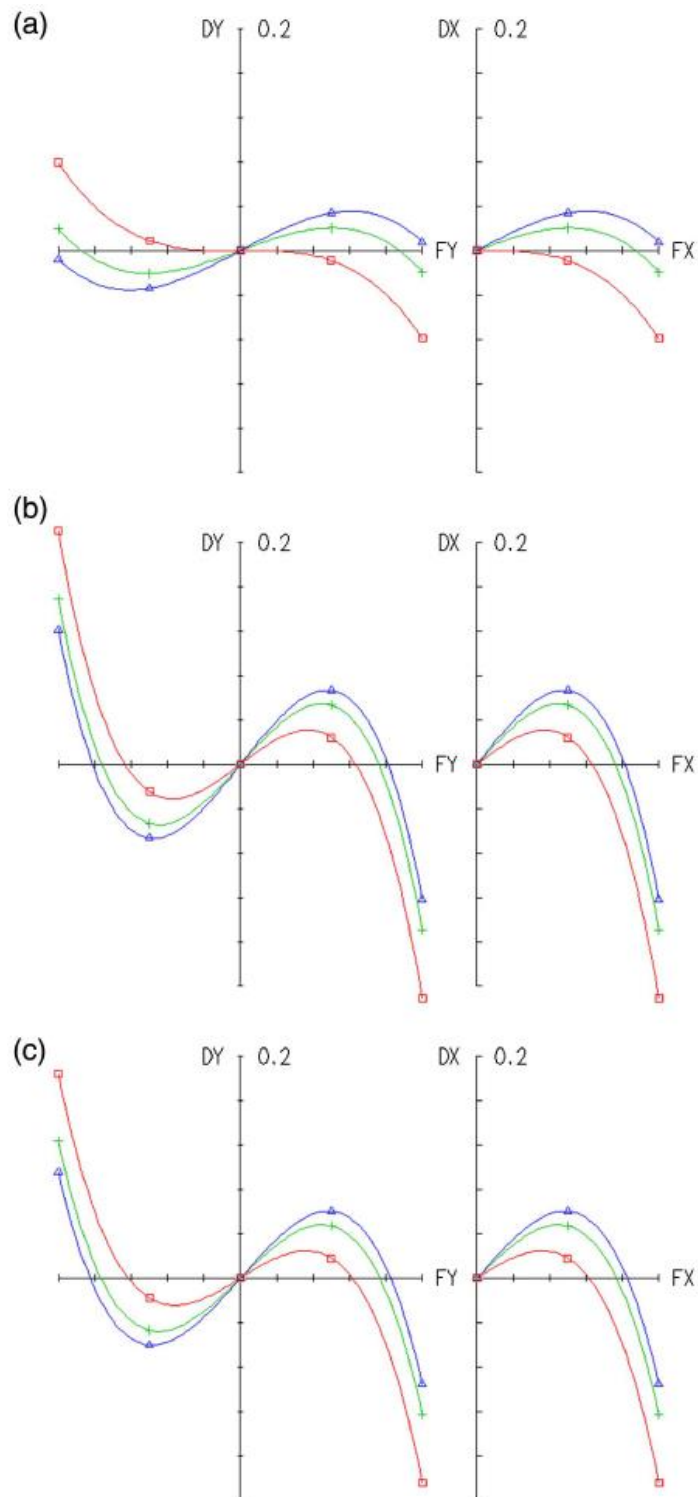


Obr. 18 Naměřené hodnoty průhybu membrány kapalinové čočky (červená) a porovnání s teoreticky spočtenými tvary (modrá) pro hodnoty tlaku $p = 3.0, 3.5, \text{ a } 4.0 \text{ kPa}$, $\text{RMS}_{3.0} = 0.033 \text{ mm}$, $\text{RMS}_{3.5} = 0.024 \text{ mm}$, $\text{RMS}_{4.0} = 0.014 \text{ mm}$ [50]

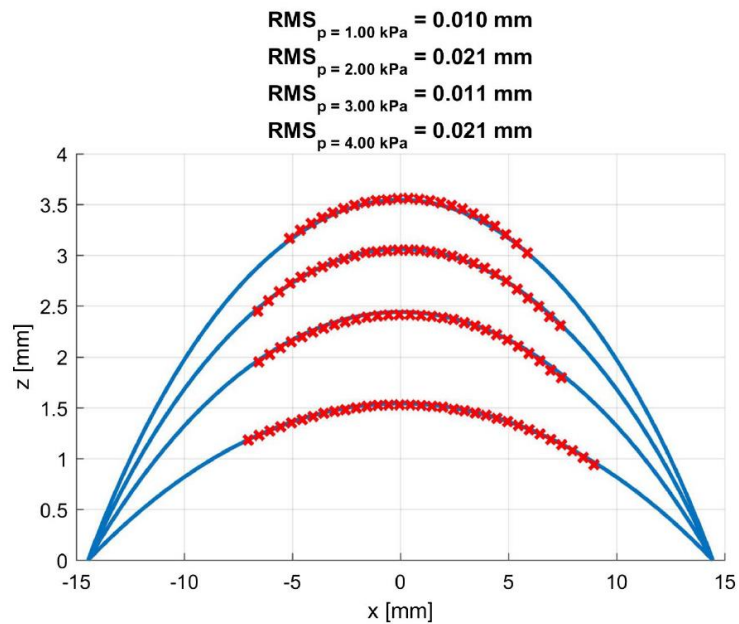
V návaznosti na publikaci [50] dále vznikla publikace [51], neboť při experimentálním ověřování platnosti mechanického modelu v [50] byla nejprve zjištěna poměrně velká neshoda. Po bližším zkoumání se ukázalo, že naměřené deformace jsou významně ovlivněny počátečním předpětím, které bylo do membrány nechtěně vneseno při kompletaci experimentálního vzorku kapalinové čočky. Vzorek byl následně opět rozebrán a podruhé opatrně složen tak, aby se do membrány předpětí nedostalo. Poté bylo teprve dosaženo velmi dobré shody experimentu s numerickým modelem. Článek [51] se nechal inspirovat zjištěním o významu počátečního předpětí a rozšiřuje původní mechanický model prezentovaný v [50] o možnost jeho zavedení do výpočtu. Výsledné diferenciální rovnice mají stejný tvar, jako (2), ale je třeba zdůraznit, že veličina h v tomto případě představuje tloušťku membrány před vnesením počátečního předpětí a veličiny σ_r , resp. σ_t navíc obsahují informaci o velikosti počátečního předpětí.

Konkrétní výpočty byly provedeny pomocí dvou odlišných numerických metod, a to metody konečných prvků a metody řad. Byla provedena analýza vlivu počátečního předpětí membrány na velikost příčných paprskových aberací plano-konvexní kapalinové čočky (jako v [50]) při zachování konstantního vrcholového poloměru křivosti 22 mm (se zvyšujícím se předpětím je nutné zvyšovat také zatěžovací tlak, aby poloměr křivosti ve vrcholu membrány zůstal konstantní), viz Obr. 19. Bylo zjištěno, že předpětí nemá výrazný vliv na velikost sférické aberace, a tedy deformovaný tvar membrány s předpětím je pro případ plankonvexní kapalinové čočky stejně neoptimální, jako v případě bez předpětí.

Dále byla provedena identifikace neznámých parametrů experimentální membrány (hodnoty modulu pružnosti a počátečního předpětí) z naměřené závislosti maximálního průhybu na zatěžovacím tlaku. Hodnota Poissonova čísla byla převzata z dostupné literatury. Poté byly spočtené tvary s takto určenými parametry pro vybrané tlaky porovnány s odpovídajícími naměřenými hodnotami a opět lze konstatovat velmi dobrou shodu numerického modelu s experimentem, viz Obr. 21 (maximální RMS odchylka je 0.021 mm, což je v tomto případě zároveň odhadovaná nejistota měření).



Obr. 19 Porovnání příčné paprskové aberace membránové čočky v obrazové rovině s nejmenším rozptylovým kroužkem (a) předpoklad sférické membrány o vrcholovém poloměru křivosti $R_0 = 22$ mm, (b) přesný deformovaný tvar membrány bez počátečního předpětí s vrcholovým poloměrem křivosti $R_0 = 22$ mm (c) přesný deformovaný tvar membrány s počátečním předpětím $\sigma_0 = 60$ kPa a vrcholovým poloměrem křivosti $R_0 = 22$ mm; DX a DZ značí hodnotu příčné paprskové aberace, FX a FY značí dopadovou výšku paprsku v intervalu od -5 mm do 5 mm [51]



Obr. 20 Porovnání experimentálně naměřených a numericky spočtených deformovaných tvarů membrány kapalinové čočky pro zatěžovací tlaky $p = 1.00$, 2.00 , 3.00 a 4.00 kPa [51]

3.2 Vliv tloušťky membrány na zobrazovací vlastnosti kapalinové čočky

V publikaci [52] se autoři poprvé začínají zabývat myšlenkou možného vlivu zanedbání tloušťky membrány při určování zobrazovacích vlastností dané kapalinové čočky. Pro tuto studii je zprvu zvolen přístup poněkud odlišný od předchozích dvou publikací [50,51]. Za předpokladu, že v první aproximaci lze deformovaný tvar membrány považovat za sférický, viz Obr. 21 (ačkoliv z předchozích publikací víme, že skutečný tvar se od sférického liší) a za předpokladu, že materiál membrány je nestlačitelný (dle dostupné literatury se hodnota Poissonova čísla materiálu Sylgard 184 [56] pohybuje okolo 0.4, což potvrzuje, že tento předpoklad je poměrně blízký realitě, kdy hodnota Poissonova čísla ideálně nestlačitelného materiálu je 0.5), lze odvodit závislost jakési průměrné tloušťky membrány na poloměru křivosti její vnitřní (nebo vnější) plochy, a to pouze ze znalosti počáteční tloušťky a poloměru. Pro průměrnou deformovanou tloušťku h poté platí implicitní rovnice

$$a_4 h^4 + a_3 h^3 + a_2 h^2 + a_1 h + a_0 = 0, \quad (4)$$

kde $a_0, a_1 \dots a_4$ jsou koeficienty závislé pouze na počáteční tloušťce h_0 , poloměru křivosti vnitřní plochy R_1 a poloměru membrány a .

Další přístup, kterým lze přibližně určit, jakým způsobem se bude původně konstantní tloušťka membrány měnit v závislosti na jejím vrcholovém poloměru křivosti, je vyjít z odvození prezentovaného v publikacích [50,51] a předpokládat parabolickou aproximaci pro funkci svislého posuvu w a kubickou aproximaci pro funkci radiálního posuvu u . Tímto způsobem lze pomocí principu minima potenciální energie odvodit vztah pro deformovanou tloušťku h ve tvaru

$$h = h_0 \sqrt{\frac{\nu(2\nu r^2 + 3a^2 - \nu a^2 - 2r^2)}{4R_0^2(\nu - 1)}} + 1, \quad (5)$$

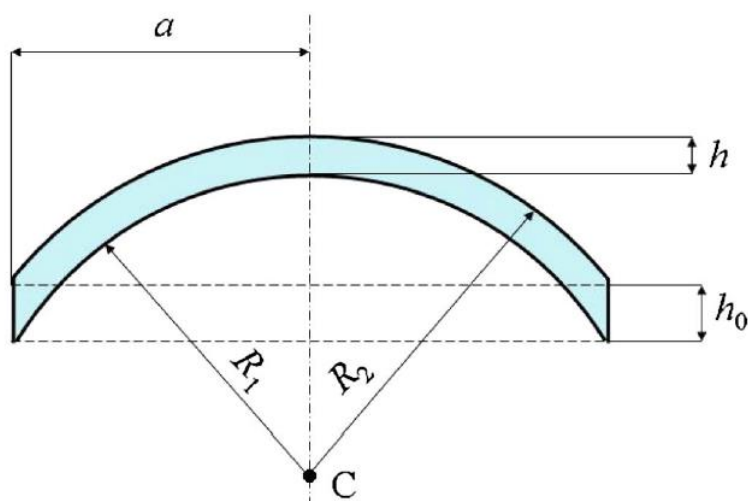
kde R_0 je vrcholový poloměr křivosti a ν je Poissonovo číslo.

Přesnější způsob řešení spočívá například ve zvýšení stupně polynomických řad, které aproximují funkce u , w a následné numerické optimalizaci koeficientů těchto řad. Z takto určených funkcí u , w lze dále spočítat průběh deformované tloušťky membrány v důsledku působení tlaku optické kapaliny. Porovnání jednotlivých přístupů výpočtu na konkrétním příkladu je znázorněno na Obr. 22.

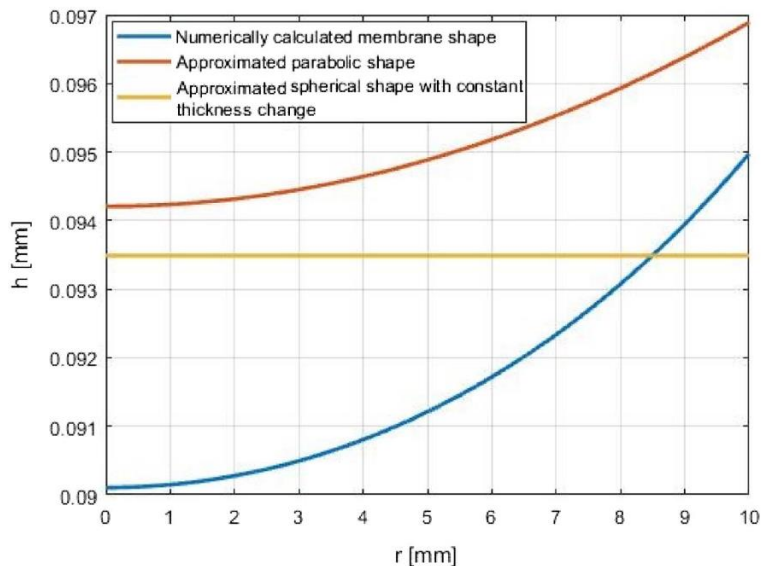
V další části článku je poté ukázáno (opět na příkladu plano-konvexní membránové kapalinové čočky, jako v [50,51]), že velikost sférické vlnové aberace kapalinového tělesa (válce) s jednou podstavou rovinnou a druhou podstavou tvořenou sférickou

plochou (vnitřní plochou membrány), je v absolutní hodnotě zhruba 50x větší, než sférická aberace způsobená samotným tělesem membrány tvořeným dvěma soustřednými sférickými plochami, jejichž poloměr křivosti se liší o deformovanou tloušťku membrány (viz Obr. 23 a Obr. 24).

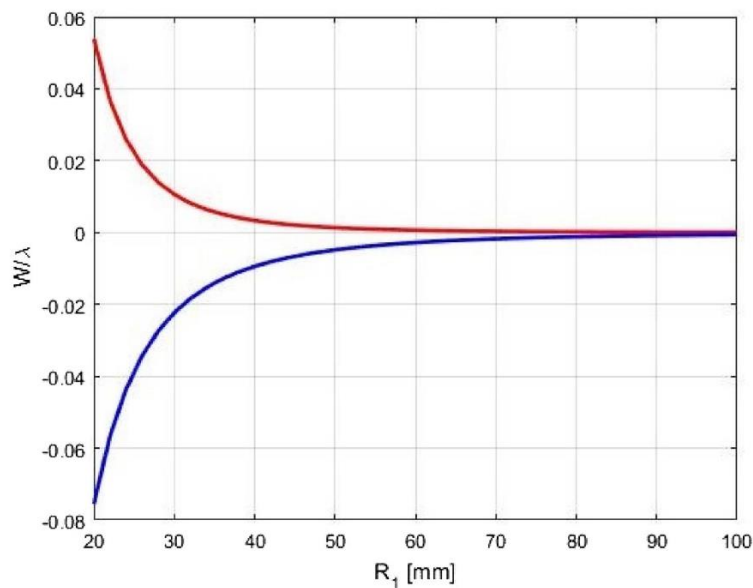
Z [50,51] již víme, že sférická aberace plano-konvexní čočky ohraničené skutečným deformovaným tvarem membrány je několikanásobně větší, než v případě předpokladu ohraničení čistě sférickou plochou, která je z tohoto pohledu optimálnější tvarem (viz Obr. 17 a Obr. 19). I za předpokladu optimálnějšího (sférického) tvaru se však ukazuje, že vliv vlastní tloušťky membrány na velikost sférické aberace celé čočky je minimální. Tento závěr však není nijak zvláště překvapivý, protože sférická aberace plano-konvexní sférické čočky je stále poměrně veliká. Zajímavé by bylo také prozkoumat, jaký vliv má na sférickou aberaci plano-konvexní kapalinové čočky tloušťka membrány v případě, kdy například střednicová plocha membrány je natolik optimální, že při zanedbání tloušťky membrány bude sférická aberace pro zvolený zobrazovaný osový bod (například v nekonečnu) nulová. V jedné z následujících autorových publikací je tento příklad prezentován.



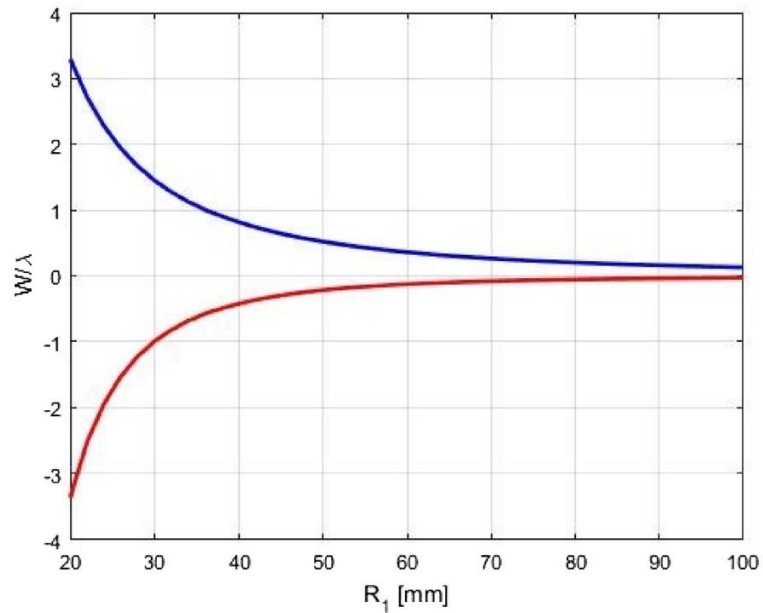
Obr. 21 Sférická aproximace deformovaného tvaru membrány (a – poloměr membrány, h_0 – počáteční tloušťka membrány, h – průměrná deformovaná tloušťka membrány, R_1 – poloměr křivosti vnitřní plochy membrány, R_2 – poloměr křivosti vnější plochy membrány) [52]



Obr. 22 Deformovaná tloušťka membrány v radiálním směru (modrá – přesně numericky spočtená deformovaná tloušťka, žlutá – přibližně spočtená průměrná deformovaná tloušťka pomocí sférické aproximace, oranžová – přibližně spočtená deformovaná tloušťka pomocí parabolické aproximace, $a = 10$ mm, $h_0 = 0.1$ mm, $R_0 = 20$ mm, $\nu = 0.41$) [52]



Obr. 23 Závislost velikosti vlnové aberace (červená – sférická vlnová aberace, modrá – vlnová aberace koma) samotné membrány na vnitřním vrcholovém poloměru R_1 (výška paprsku vstupujícího do čočky $H = 5$ mm, $h_0 = 0.1$ mm, index lomu materiálu membrány $n_m = 1.4118$ mm, vlnová délka světla $\lambda = 589$ nm) [52]



Obr. 24 Závislost velikosti vlnové aberace (červená – sférická vlnová aberace, modrá – vlnová aberace koma) kapalinového tělesa plano-konvexní čočky na vrcholovém poloměru R_1 (výška paprsku vstupujícího do čočky $H = 5$ mm, tloušťka čočky $d = 5$ mm, index lomu kapaliny $n_c = 1.333$ mm, vlnová délka světla $\lambda = 589$ nm) [52]

3.3 Optimalizace tloušťky membrány pro zajištění požadovaného deformovaného tvaru

Jedním z možných způsobů korekce aberací membránových kapalinových čoček (viz kapitola 2) je optimalizace tloušťkového profilu membrány tak, aby se deformovala do námi předepsaného tvaru. Publikace [53] vychází ze soustavy dvou nelineárních diferenciálních rovnic (6) popisujících velké deformace tenké osově souměrné membrány (ohybová tuhost je zanedbána), které vzniknou z dvojice rovnic (2) odvozených v [50,51] uvažujeme-li, že tloušťka membrány není konstantní, ale může se v radiálním směru měnit (viz Obr. 25). Platí

$$\begin{aligned} \left[hr\sigma_r(1+u') \right]' - h\sigma_r \left(1 + \frac{u}{r} \right) &= p(r+u)w', \\ -(hr\sigma_r w')' &= p(r+u)(1+u'). \end{aligned} \quad (6)$$

Řeší se zde odlišná úloha, kdy našimi hlavními neznámými již nejsou deformační funkce (označované jako $w(r)$ pro svislý posuv a $u(r)$ pro radiální posuv), ale funkce popisující závislost tloušťky membrány $h(r)$ na radiální souřadnici r . Naopak funkce $g(\tilde{r})$ popisující deformovaný tvar střednicové plochy membrány je nyní naším známým vstupem ($\tilde{r} = r + u(r)$ je deformovaná radiální souřadnice). Ukazuje se, že soustavu dvou diferenciálních rovnic lze za předpokladu znalosti cílového deformovaného tvaru zredukovat pouze na jednu nelineární diferenciální rovnici prvního řádu s jedinou neznámou funkcí radiálního posuvu, která má tvar

$$\begin{aligned} &\left[\frac{(r+u)^2}{2r^2 g'} + \nu(1+u')^2 \left(\frac{(r+u)g''}{2g'^2} - \frac{1}{g'} - g' \right) \right] \left(\frac{u}{r} + \frac{u^2}{2r^2} \right) + \\ &+ \left[\nu \frac{(r+u)^2}{2r^2 g'} + (1+u')^2 \left(\frac{(r+u)g''}{2g'^2} - \frac{1}{g'} - g' \right) \right] \left(u' + \frac{1}{2}u'^2 + \frac{1}{2}(1+u')^2 g'^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Funkci proměnné tloušťky lze následně vyjádřit explicitním algebraickým výrazem, ve kterém mimo jiné figuruje ona funkce radiálního posuvu, platí

$$h = \frac{pr}{E} \times \frac{\nu(1+u') \left(g' + \frac{1}{g'} - \frac{(r+u)g''}{2g'^2} \right) - \frac{(r+u)^2}{2r^2(1+u')g'}}{u' + \frac{1}{2}u'^2 + \frac{1}{2}(1+u')^2 g'^2}. \quad (8)$$

V publikaci je detailně odvozen numerický postup řešení zmíněné diferenciální rovnice pomocí metody střelby využívající klasickou a modifikovanou Eulerovu metodu dopředných diferencí. Součástí postupu řešení touto metodou je určení

hodnoty první derivace hledané funkce (v tomto případě funkce $u(r)$) ve zvoleném bodě z dané diferenciální rovnice. V případě rovnice (7) se neznámá u' vyskytuje ve formě polynomu 4. řádu, a tedy za normálních okolností není možné její kořeny najít analyticky. Naštěstí se ukazuje, že lze tuto rovnici při vhodné transformaci hlavní neznámé (u') převést na kvadratickou rovnici, jejíž řešení již analyticky nalézt umíme. Pro další postup je však nutné zvolit ze všech 4 výsledných kořenů ten, který povede na fyzikálně přípustné řešení, více v [53].

Diferenciální rovnice (7) je prvního řádu, ale její řešení musí splňovat dvě okrajové podmínky ($u(0)=0$ a $u(a)=u_a$), což na první pohled napovídá, že řešení nemusí existovat. Detailnější analýza však ukazuje, že okrajová podmínka $u(0)=0$ je vždy splněna, a tedy zbývá splnit pouze podmínku $u(a)=u_a$. Pokud bychom při řešení metodou střelby začali z bodu $r=0$, z rovnice (6) nám vyjde, že hodnota $u'(0)$ může být libovolná, a tedy by bylo třeba tuto hodnotu určit iteračně tak, abychom na konci řešeného intervalu splnili okrajovou podmínku $u(a)=u_a$. Vhodnější postup spočívá v započítání řešení v bodě $r=a$, čímž získáme pro hodnotu $u'(a)$ pouze jedno fyzikálně přípustné řešení a můžeme tímto způsobem metodou střelby pozpátku pokračovat až do bodu $r=0$, ve kterém je díky speciální struktuře tohoto problému podmínka $u(0)=0$ vždy splněna.

Řešení je nejprve prezentováno na konkrétním příkladu membrány deformující se přesně do paraboloidického tvaru, je provedena studie vlivu velikosti integračního kroku metody střelby na výsledné řešení a jsou porovnány výsledky spočtené klasickou a modifikovanou Eulerovou metodou (viz Obr. 26). Dále je znázorněn rozdíl mezi fyzikálně přípustným a fyzikálně nepřípustným řešením, zvolíme-li při výpočtu metodou střelby nevhodný kořen u' rovnice 4. řádu, který však stále vede ke kladným hodnotám proměnné tloušťky (viz Obr. 27). Pro tento příklad je také provedena studie vlivu hodnoty Poissonova čísla a velikosti předpínacího posuvu u_a na výsledný průběh proměnné tloušťky $h(r)$ (viz Obr. 28). Ukazuje se, že při zmenšujícím se předpínacím posuvu u_a vychází větší okrajová tloušťka. V limitním případě nulového předpínacího posuvu roste okrajová tloušťka nade všechny meze, zatímco tloušťka uprostřed membrány směřuje ke konečné hodnotě (viz Obr. 29), a tedy při reálných aplikacích tohoto modelu je třeba počítat s nenulovým předpětím. Také je třeba brát v potaz, že celý model zanedbává ohybovou tuhost membrány, a čím menší je poměr mezi tloušťkou a poloměrem membrány (štíhlost), tím méně přesný tento model bude.

Další příklad je spočten pro membránu deformující se přesně do sférického tvaru. Z numerických hodnot radiálních a tangenciálních přetvoření zde bylo zjištěno, že se pro případ sférického předepsaného tvaru shodují, což umožnilo pro tento speciální

případ odvodit analytické řešení pro určení optimálního tloušťkového profilu, které má tvar

$$h = \frac{(1-\nu)p}{2Eg_0} \left(\frac{a_p^2 a^2 (a_p^2 + g_0^2)}{(a_p^2 a^2 + g_0^2 r^2)^2} - \frac{1}{a_p^2 + g_0^2} \right)^{-1}. \quad (9)$$

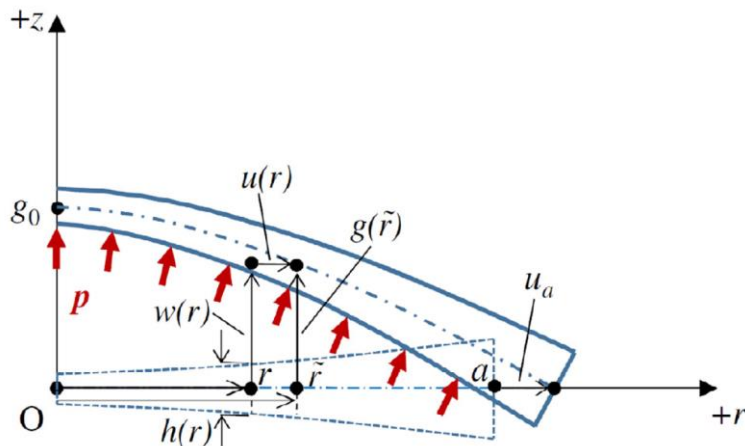
Dále jsou provedeny citlivostní analýzy na různé vstupní parametry modelu, které řeší otázku, jak se liší skutečný deformovaný tvar od původně předepsaného, pokud se hodnota některého ze vstupních parametrů mírně liší od hodnoty, pro kterou byl návrh tloušťkového profilu proveden.

Vliv nepřesnosti v hodnotě modulu pružnosti lze vždy kompenzovat úpravou zatěžovacího tlaku tak, aby maximální průhyb membrány odpovídal původně předepsané hodnotě. Tuto vlastnost lze vysvětlit tím, že ve vztahu (8) pro návrh optimálního tloušťkového profilu se vyskytuje modul pružnosti pouze v bezrozměrném poměru p/E a nikoliv samostatně, a tedy nepřesnost v hodnotě E lze vždy kompenzovat úpravou hodnoty p tak, aby poměr p/E odpovídal hodnotě použité v původním návrhu tloušťkového profilu.

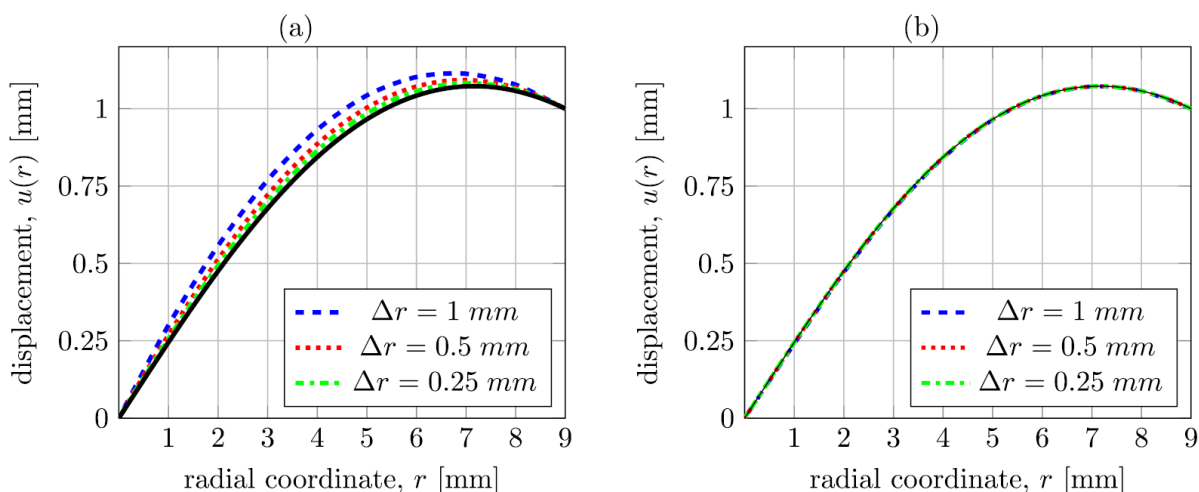
Vliv nepřesnosti v hodnotě Poissonova čísla v obecném případě úpravou zatěžovacího tlaku kompenzovat nelze, a tedy pokud se skutečná hodnota Poissonova čísla bude lišit od hodnoty použité v návrhu tloušťkového profilu, bude se také lišit skutečný deformovaný tvar od původně předepsaného i v případě, že upravíme zatěžovací tlak tak, aby se maximální hodnota průhybu shodovala s hodnotou v návrhu. Velikost odchylky od předepsaného paraboloidického deformovaného tvaru pro příklad s původně předepsanými parametry $a=9$ mm, $u_a=1$ mm, $g_0=3$ mm (paraboloid), $p/E=10^{-3}$, $\nu=0.4$, kde deformovaný tvar je spočten pro hodnoty $\nu=0.36$ a $\nu=0.44$ (a tlak je upraven tak, aby maximální průhyb membrány odpovídal původně předepsanému), je znázorněna na Obr. 30 a pohybuje se v řádu jednotek mikrometrů. Ve speciálním případě sférického předepsaného tvaru lze i vliv nepřesnosti v hodnotě Poissonova čísla plně kompenzovat úpravou zatěžovacího tlaku, neboť ve výrazu (9) pro určení tloušťkového profilu je funkce, která závisí pouze na geometrických parametrech g_0 , a_p a a , násobena zlomkem $(1-\nu)p/E$.

Vliv nepřesnosti v hodnotě předpínací konstanty u_a je pro sférický a paraboloidický předepsaný tvar znázorněn na Obr. 31. Pro každý z předepsaných tvarů je tloušťkový profil navržen s parametry $a=9$ mm, $u_a=1$ mm a $g_0=3$ mm, ale výsledný deformovaný tvar je poté spočten pro hodnoty předpínacího posuvu 0.9 mm a 1.1 mm (zatěžovací tlak je upraven tak, aby maximální průhyb odpovídal původně předepsanému $g_0=3$ mm). Referenční sférický, či paraboloidický tvar, vůči kterému

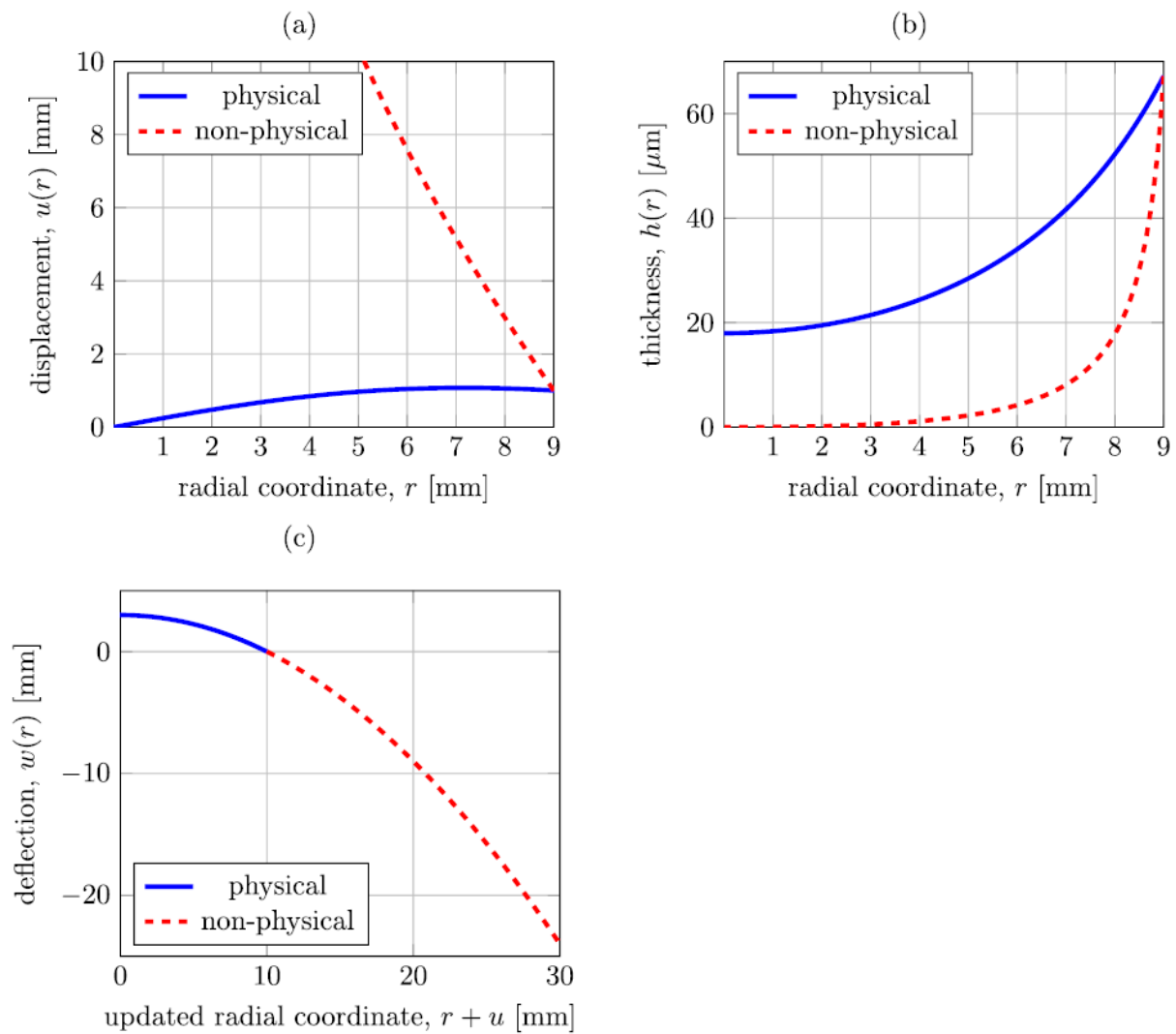
je odchylka vyhodnocována, je charakterizován původně předepsaným g_0 a skutečným celkovým poloměrem $a_p = a + u_a$, tedy hodnotou 9.9 mm, nebo 10.1 mm. Z Obr. 31 je zřejmé, že i když původní návrhovou hodnotu předpínacího posuvu změníme o $\pm 10\%$, odchylka od ideálního sférického, resp. paraboloidického tvaru dosahuje pouze hodnot v řádu jednotek mikrometrů.



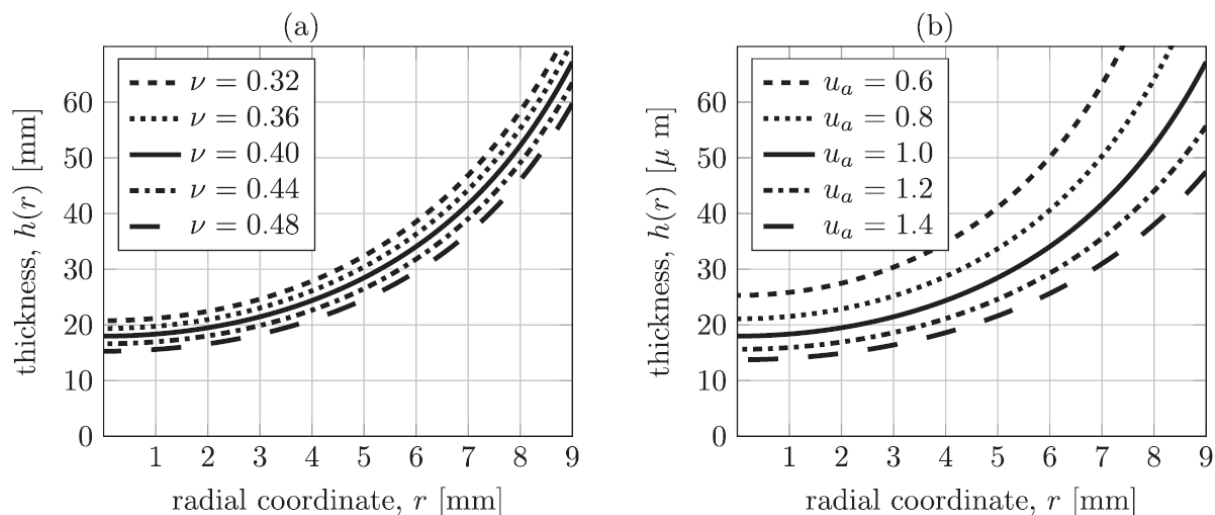
Obr. 25 Schematický náčrt kruhové osově souměrné membrány proměnné tloušťky deformované konstantním tlakem p optické kapaliny (čárkovaná čára – počáteční tvar membrány při nulovém zatěžovacím tlaku a nulovém předpětí, plná čára – deformovaný tvar, $w(r)$ a $u(r)$ - svislý a vodorovný posuv bodu s počáteční souřadnicí $[r,0]$, r - radiální souřadnice, $\tilde{r}(r) = r + u(r)$ - deformovaná radiální souřadnice, $g(\tilde{r})$ - předepsaný deformovaný tvar, a - poloměr membrány, $h(r)$ - tloušťka membrány, g_0 - maximální průhyb, u_a - předpínací posuv) [53]



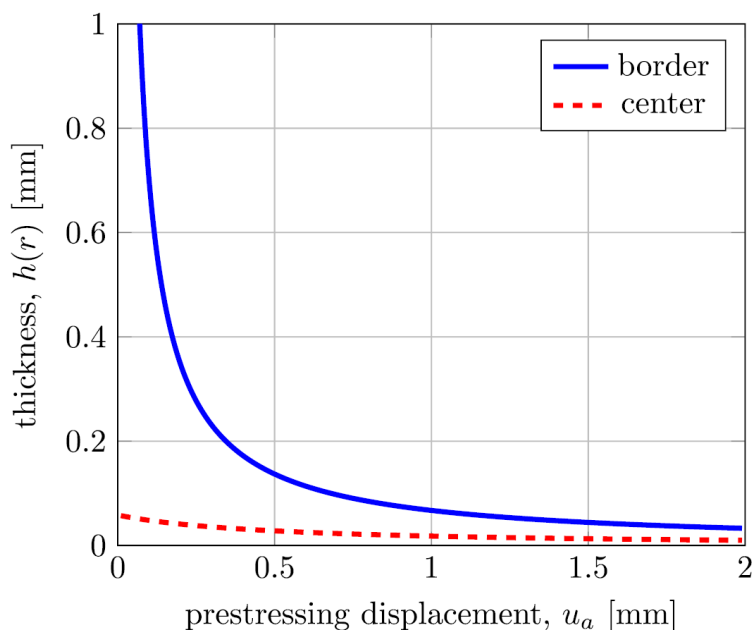
Obr. 26 Řešení funkce $u(r)$ pro parabolický předepsaný deformovaný tvar a vstupní parametry $a = 9$ mm, $u_a = 1$ mm, $g_0 = 3$ mm (paraboloid), $p/E = 10^{-3}$ a $\nu = 0.4$; (a) standardní Eulerova metoda, (b) modifikovaná Eulerova metoda [53]



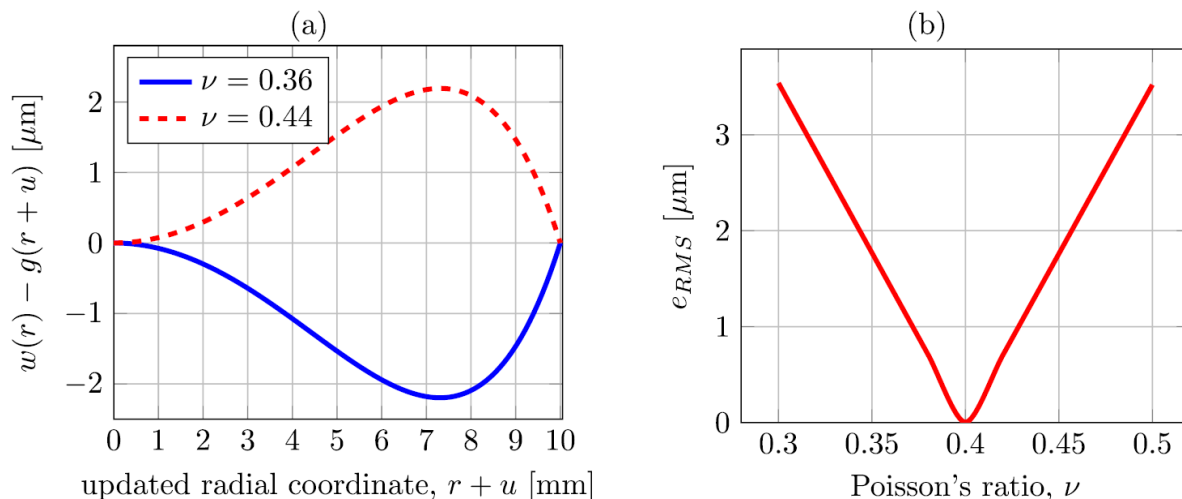
Obr. 27 Řešení pro parabolický předepsaný deformovaný tvar a vstupní parametry $a=9$ mm, $u_a=1$ mm, $g_0=3$ mm (paraboloid), $p/E=10^{-3}$ a $\nu=0.4$; (a) radiální posuv $u(r)$, (b) proměnná tloušťka $h(r)$, (c) svislý posuv $w(r)$ (modrá – fyzikálně přípustné řešení, červená – fyzikálně nepřípustné řešení) [53]



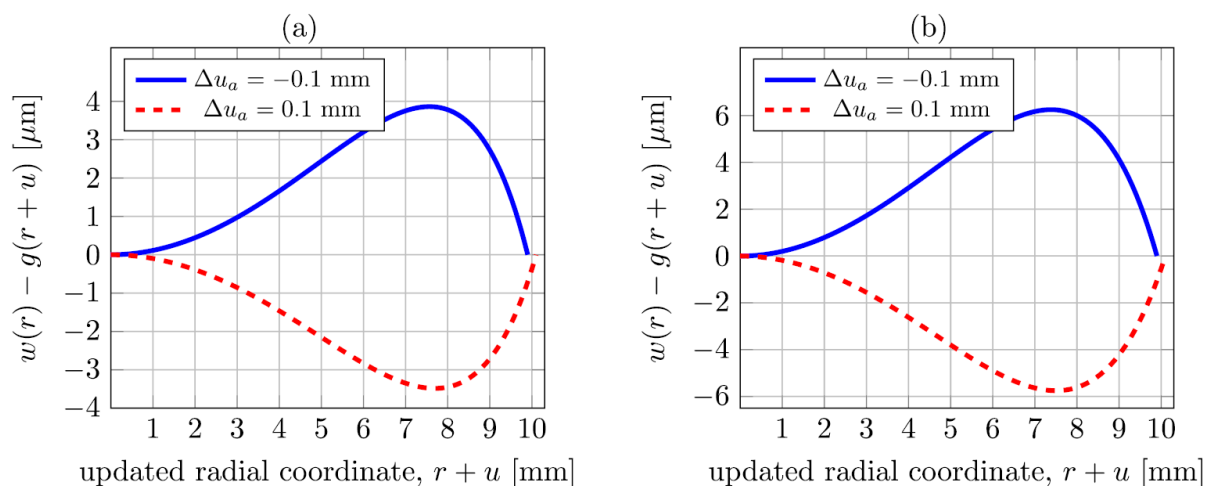
Obr. 28 Vliv (a) Poissonova čísla, (b) předpínacího posuvu na výsledný optimální tloušťkový profil membrány; parametry $a=9$ mm, $u_a=1$ mm, $g_0=3$ mm (paraboloid), $p/E=10^{-3}$ [53]



Obr. 29 Hodnoty optimalizované tloušťky membrány uprostřed a na okraji v závislosti na hodnotě předpínacího posuvu u_a ; parametry $a=9$ mm, $g_0=3$ mm (paraboloid), $p/E=10^{-3}$ a $\nu=0.4$ [53]



Obr. 30 Vliv Poissonova čísla na odchylku od ideálního paraboloidického tvaru (a) odchylka průhybu v závislosti na radiální souřadnici pro $\nu=0.36$ a $\nu=0.44$, (b) závislost RMS odchylky deformovaného tvaru na Poissonově čísle v rozmezí 0.3 - 0.5 [53]



Obr. 31 Vliv předpínacího posuvu na odchylku od ideálního tvaru (a) sférického, (b) paraboloidického; návrhové parametry $a=9\text{ mm}$, $g_0=3\text{ mm}$, $u_a=1\text{ mm}$, $p/E=10^{-3}$ a $\nu=0.4$ [53]

Práce [54] navazuje na [53] a zabývá se vlivem rozdílu mezi střednicovou a vnější plochou deformované membrány kapalinové čočky na velikost příčné paprskové aberace a poloměr rozptylového kroužku. Problém je prezentován na příkladu plano-konvexní kapalinové čočky. Tloušťkový profil membrány této čočky je navržen pomocí teorie odvozené v [53] tak, aby se její střednicová plocha deformovala přesně do hyperboloidického tvaru, neboť pro plano-konvexní hyperboloidickou čočku je z geometrické optiky známo, že pro paprsky přicházející z rovinné strany čočky rovnoběžné s optickou osou (osový bod v nekonečnu) je její sférická aberace v paraxiálním ohnisku nulová. K lomu světelných paprsků však nedochází na střednicové ploše membrány, ale na její vnitřní (rozhraní membrána - vzduch), resp. vnější (rozhraní optická kapalina – membrána) ploše, viz Obr. 32. Lom světelných paprsků na vnitřní ploše membrány lze ale v praxi minimalizovat použitím optické

kapaliny, jejíž index lomu je velmi blízký indexu lomu materiálu membrány, čehož je v tomto příkladu využito. Na základě teorie popsané v [50,51,53] jsou zde odvozeny vzorce, pomocí kterých lze určit skutečný deformovaný tvar vnější plochy membrány, který se od střednicové plochy mírně liší. Jestliže souřadnice bodu ležícího na deformované střednicové ploše membrány jsou $[\tilde{r}, g(\tilde{r})]$, potom souřadnice bodu ležícího na vnější, resp. vnitřní ploše membrány jsou $[\tilde{r}_{\text{out}}, g_{\text{out}}(r, \tilde{r})]$, resp. $[\tilde{r}_{\text{in}}, g_{\text{in}}(r, \tilde{r})]$, kde platí (viz Obr. 33)

$$\tilde{r}_{\text{out}} = \tilde{r} - \frac{1}{2}\tilde{h}(r)\sin(\varphi), \quad \tilde{r}_{\text{in}} = \tilde{r} + \frac{1}{2}\tilde{h}(r)\sin(\varphi), \quad (10)$$

$$g_{\text{out}} = g(\tilde{r}) + \frac{1}{2}\tilde{h}(r)\cos(\varphi), \quad g_{\text{in}} = g(\tilde{r}) - \frac{1}{2}\tilde{h}(r)\cos(\varphi), \quad (11)$$

$$\tilde{h}(r) = h(r)\sqrt{\frac{2\nu(\varepsilon_r + \varepsilon_t)}{\nu - 1} + 1}, \quad (12)$$

kde $\tilde{h}(r)$ značí tloušťku membrány po deformaci a ε_r , resp. ε_t je Green-Lagrangeovo radiální, resp. tangenciální přetvoření.

Důsledek odchylky střednicové a vnější deformované plochy membrány je prezentován na grafu příčné paprskové aberace v paraxiální obrazové rovině (pro čočku s původně předpokládanou ideálně hyperboloidickou zakřivenou plochou), viz Obr. 34, která pro okrajový paprsek dosahuje hodnot v řádu desetin milimetru. Posuneme-li obrazovou rovinu do místa minimálního rozptylového kroužku, příčná paprsková aberace je značně zredukována a pro okrajový paprsek dosahuje pro zvolený příklad hodnot v řádu několika setin milimetru (viz Obr. 35). Porovnáme-li však tyto hodnoty například s velikostí jednoho pixelu CCD senzoru v běžném digitálním fotoaparátu, která se pohybuje v řádu jednotek mikrometrů, docházíme k závěru, že v takovýchto aplikacích již nemusí být rozdíl mezi střednicovou plochou membrány a její vnitřní, resp. vnější plochou zanedbatelný. Teorie popsaná v [53] je v této publikaci dále rozšířena o metodu určení tloušťky membrány tak, aby její vnější deformovaná plocha (nikoliv střednice) přesně odpovídala danému předepsanému tvaru. Nejprve pomocí teorie popsané v [53] určíme tloušťkový profil membrány $h_1(r)$ tak, že se její střednicová plocha pro dané parametry bude deformovat přesně do tvaru předepsaného funkcí $g(\tilde{r})$, kterého ovšem chceme ve výsledku dosáhnout pro vnější deformovanou plochu membrány. Poté pomocí vzorců (10) - (12) a metody nejmenších čtverců [46] určíme funkci $\bar{g}_{\text{out},1}(\tilde{r})$ ve formě sudé polynomické řady, která představuje deformovaný tvar vnější plochy membrány po první iteraci. Nyní můžeme vyjádřit odchylku $\delta g_1(\tilde{r})$ mezi cílovou funkcí pro tvar vnější plochy

membrány, $g(\tilde{r})$, a tvarem vnější plochy membrány po první iteraci, $\bar{g}_{\text{out},1}(\tilde{r})$. Pro $\delta g_1(0) = 0$ platí

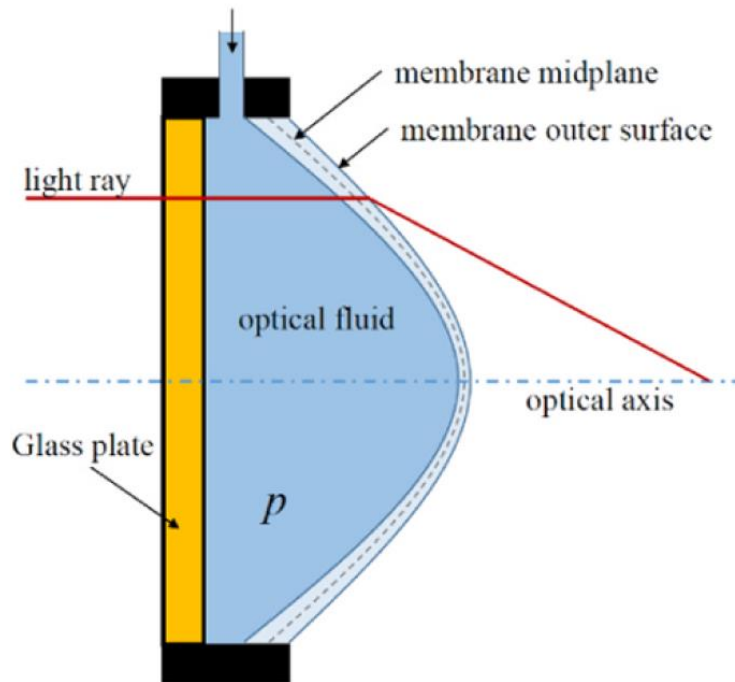
$$\delta g_1(\tilde{r}) = g(\tilde{r}) - \bar{g}_{\text{out},1}(\tilde{r}) + \bar{g}_{\text{out},1}(0). \quad (13)$$

Ve druhé iteraci předepíšeme pro deformovaný tvar střednicové plochy místo funkce $g(\tilde{r})$ funkci $g_2(\tilde{r})$, kterou určíme jako

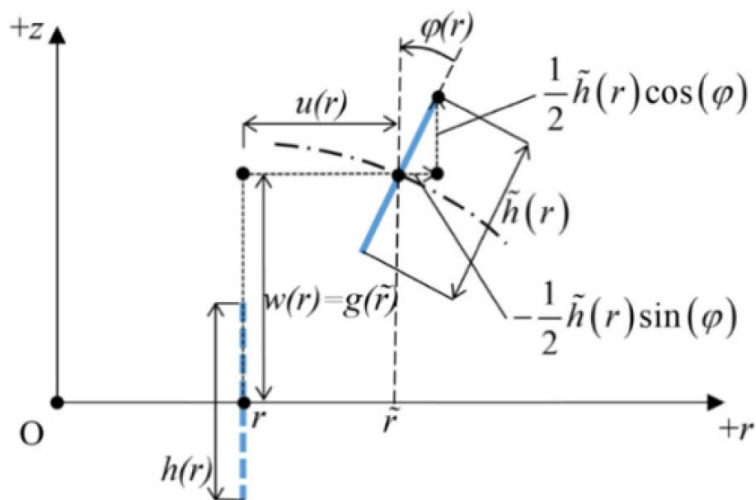
$$g_2(\tilde{r}) = g(\tilde{r}) + \frac{1}{2} \delta g_1(\tilde{r}). \quad (14)$$

Následuje určení tloušťkového profilu ve druhé iteraci, $h_2(r)$, a opakování celého postupu. Tímto způsobem pokračujeme v iteracích, dokud nebude s požadovanou přesností splněna podmínka $\delta g_n(\tilde{r}) \approx 0$. Membrána s proměnnou tloušťkou $h_n(r)$ se poté pro dané vstupní parametry deformuje tak, že její vnější plocha přesně odpovídá původně předepsané funkci $g(\tilde{r})$.

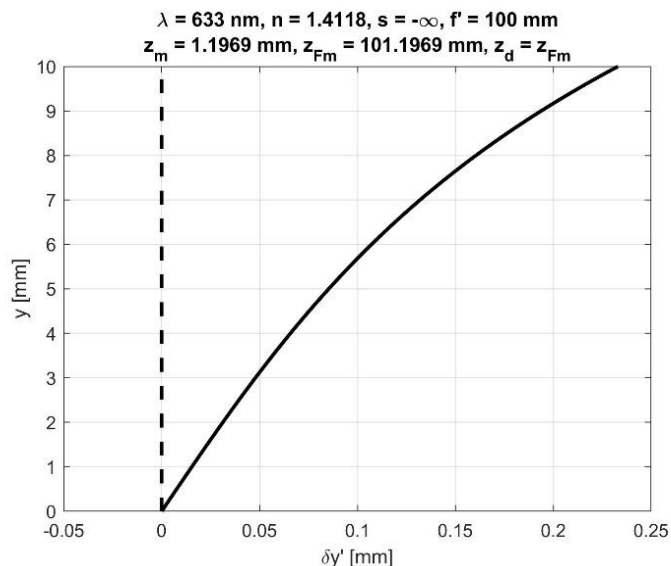
Tato metoda je prezentována na příkladu plano-konvexní čočky s optickou kapalinou, která má index lomu totožný s indexem lomu materiálu membrány, a jejíž membrána má tloušťkový profil navržený tak, že se její vnější plocha pro zvolenou hodnotu tlaku kapaliny deformuje přesně do hyperboloidického tvaru. V tomto případě je průměr rozptylového kroužku v paraxiální obrazové rovině nulový. Změna tlaku optické kapaliny vede dle očekávání ke změně povahy deformovaného tvaru vnější plochy membrány (již není hyperboloidický), a tudíž k nárůstu průměru rozptylového kroužku v paraxiální obrazové rovině, což je v článku znázorněno grafem závislosti průměru rozptylového kroužku na paraxiální ohniskové vzdálenosti (viz Obr. 36). Z této závislosti je zřejmé, že ačkoliv je kapalinová čočka s jednou membránou schopna měnit ohniskovou vzdálenost ve velkém rozsahu, její optické aberace lze korigovat pouze pro velmi úzkou oblast tohoto rozsahu. Pro rozšíření této oblasti by bylo nutné řešit komplexnější sestavy kapalinových čoček o více membránách, jejichž počáteční návrh je řešen např. v [57,58,59].



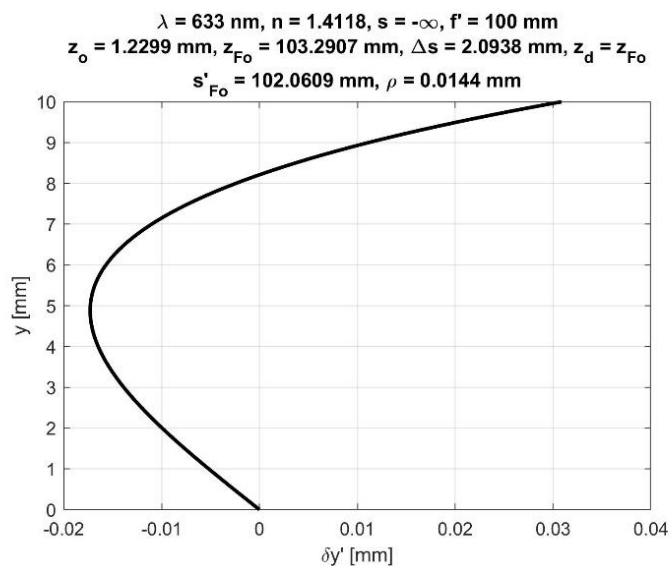
Obr. 32 Schematické znázornění lomu paprsku rovnoběžného s optickou osou v plano-konvexní membánové kapalinové čočce [54]



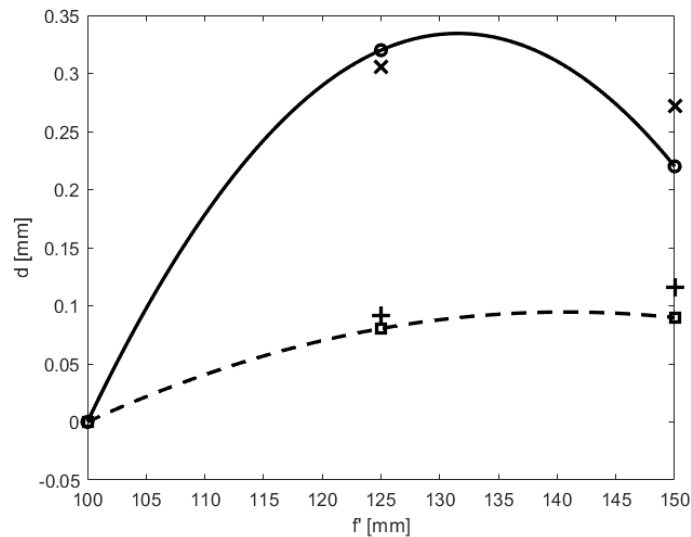
Obr. 33 Schematické znázornění posuvů a natočení průřezu membrány [54]



Obr. 34 Odchylka v hodnotě příčné paprskové aberace v paraxiální ohniskové rovině pro případ kapalinové čočky s membránou, jejíž střednice má přesně hyperboloidický tvar (čárkovaná čára – ideálně kompenzovaná příčná paprsková aberace pro přesně hyperboloidický tvar střednicové plochy membrány, plná čára – skutečná příčná paprsková aberace způsobená zanedbáním rozdílu mezi vnější a střednicovou plochou membrány) [54]



Obr. 35 Příčná paprsková aberace v obrazové rovině s minimálním poloměrem rozptylového kroužku ρ [54]



Obr. 36 Závislost průměru rozptylového kroužku d na paraxiální ohniskové vzdálenosti (plná čára – parabolický fit hodnot spočtených pomocí programu OSLO pro průměr čočky $D_2 = 20$ mm, o – hodnoty spočtené pomocí programu OSLO pro $D_2 = 20$ mm, x – hodnoty spočtené pomocí přibližných vzorců pro $D_2 = 20$ mm, čárkovaná čára – parabolický fit hodnot spočtených pomocí programu OSLO pro průměr čočky $D_1 = 15$ mm, □ - hodnoty spočtené pomocí programu OSLO pro $D_1 = 15$ mm, hodnoty spočtené pomocí přibližných vzorců pro $D_1 = 15$ mm) [54]

3.4 Průhyb sférických čoček způsobený vlastní tíhou optického skla

Na rozdíl od předchozí série autorových článků [50-54], kde se velkých deformací elastických membrán využívá k základní funkci membránových kapalinových čoček, publikace [55] řeší jeden z mnoha případů nežádoucích deformací klasických optických prvků s fixními parametry (např. skleněných čoček). V oblasti optické metrologie je při výrobě optických prvků důležité přesně měřit jejich parametry, mezi které patří také tvar jednotlivých ploch těchto prvků. Odchylka od předepsaného (nominálního) tvaru měřené plochy je způsobena mimo jiné také vlastním průhybem (průhybem způsobeným vlastní tíhou materiálu) těchto optických prvků (např. čoček), protože řada měřicích zařízení vyžaduje, aby byl daný optický prvek (např. měřená čočka) umístěn v horizontální poloze. Dosáhne-li však průhyb způsobený vlastní tíhou prvku hodnot větších, než je přesnost daného měřicího přístroje, vneseme do měření chybu, která může mít za následek nesprávné určení některých optických parametrů daného optického prvku. V praxi vysoce přesné optiky se velikost odchylky od nominálního tvaru optické plochy pohybuje pouze ve zlomcích vlnové délky bílého světla, tedy v řádech jednotek až desítek nanometrů. Z toho plyne, že musíme být schopni určit vlivy různých faktorů (např. vlastní tíhy prvku) s odpovídající přesností.

Publikace [55] se zabývá problematikou průhybů horizontálně umístěných sférických skleněných čoček způsobených vlastní tíhou materiálu (skla), ze kterého jsou vyrobeny, viz Obr. 37. Problém je nejprve řešen pomocí diferenciální rovnice popisující malé průhyby osově souměrných (z hlediska tvaru, zatížení i okrajových podmínek) desek proměnné tloušťky zatížených spojitým zatížením, jehož intenzita v každém bodě odpovídá vlastní tíze desky. Tato rovnice má tvar

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} \right] \frac{d\varphi}{dr} + \left[\frac{\nu}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} - \frac{1}{r} \right] \frac{\varphi}{r} = \frac{Q(r)}{D(r)}, \quad (15)$$

kde

$$\varphi = -\frac{dw}{dr}, \quad M = D(r) \left[\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right], \quad D(r) = \frac{Ed^3(r)}{12(1-\nu^2)}, \quad (16)$$

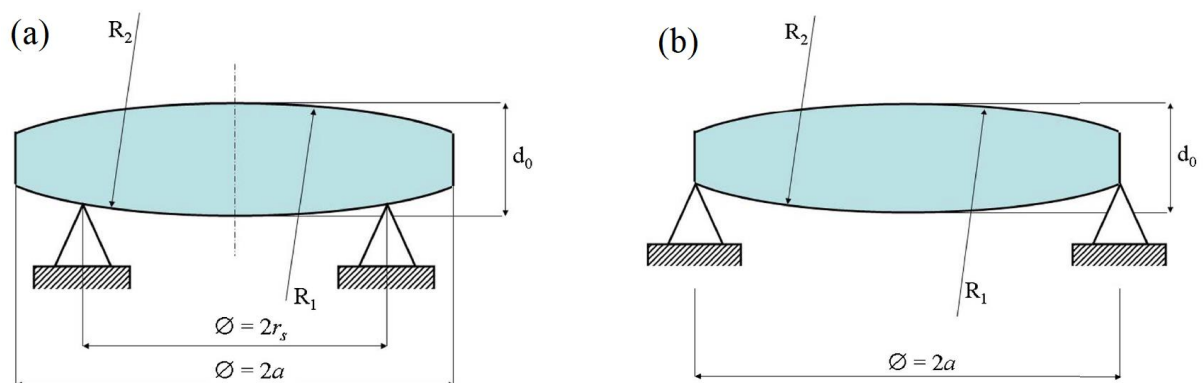
$$q(r) = d(r)\rho g, \quad Q(r) = \frac{1}{r} \int_0^r q(r) r dr.$$

r je radiální souřadnice, φ je natočení průřezu, w je svislý posuv (průhyb), $D(r)$ je desková tuhost, $d(r)$ je tloušťka desky, E je modul pružnosti, ν je Poissonovo číslo, $M(r)$ je radiální ohybový moment, $Q(r)$ je radiální posouvací síla, $q(r)$ je plošné

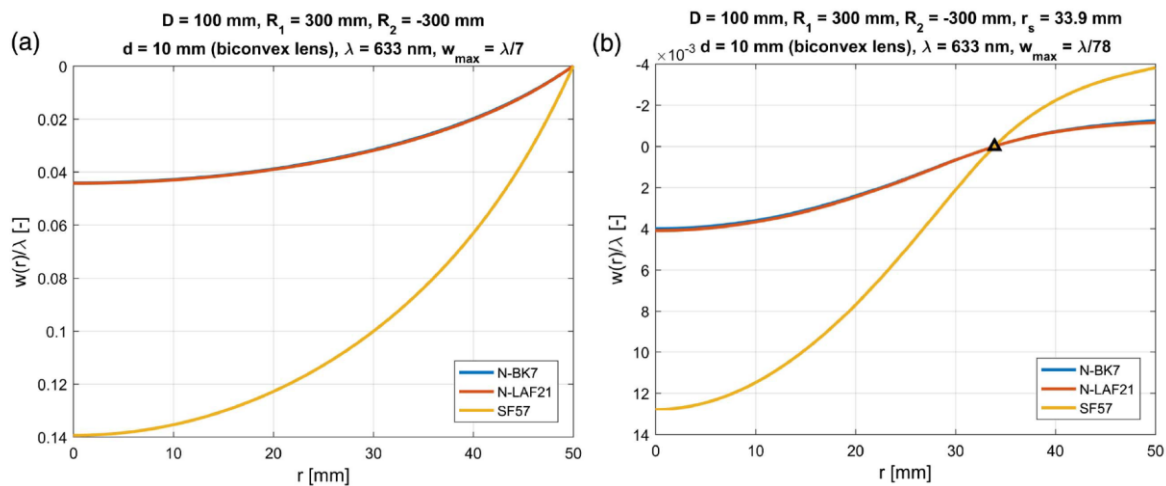
zatížení odpovídající vlastní tíze desky, ρ je hustota materiálu desky a g je gravitační zrychlení.

Rovnice (15) obecně nemá analytické řešení a je třeba ji řešit numericky. V článku jsou prezentovány tři numerické metody, kterými lze řešení nalézt. Patří mezi ně metoda řad a optimalizace jejích koeficientů pomocí numerických optimalizačních algoritmů programu Matlab, metoda konečných diferencí a Runge-Kuttova metoda 4. řádu. Výsledky byly také porovnány s výpočtem provedeným komerčním programem ANSYS využívajícím metodu konečných prvků. Z hlediska okrajových podmínek se článek omezuje pouze na variantu kloubového podepření (na okraji, nebo na libovolně zvoleném poloměru, viz Obr. 37), která nejlépe vystihuje reálnou situaci, za které jsou čočky při výrobě měřeny.

Na konkrétních příkladech sférických čoček bylo ukázáno, že v některých případech průhyb způsobený vlastní tíhou dosahuje hodnot, které by již způsobovaly nepříjemnou odchylku od nominálního tvaru. Na Obr. 38 je znázorněno porovnání průhybů způsobených vlastní tíhou pro různé druhy optických skel pro případ sférické konvexní čočky (tloušťka se směrem od středu zmenšuje) s plochami o poloměrech křivosti 300 mm a -300 mm, průměrem 100 mm a středovou tloušťkou 10 mm, podepřené na okraji, nebo na kroužku o poloměru 33.9 mm. Ukazuje se, že největšího průhybu dosahuje čočka vyrobená z materiálu SF57, jehož hustota je 5.51 g/cm^3 a modul pružnosti 54 GPa, a v případě okrajového podepření je hodnota maximálního průhybu přibližně $\lambda/7$ (λ je vlnová délka světla), což pro referenční vlnovou délku 633 nm odpovídá hodnotě 90 nm. Tato hodnota je přesným interferometrickým přístrojem snadno měřitelná a v případě, že by požadavek na toleranci výroby byl například $\lambda/10$ (63 nm), ovlivnil by vlastní průhyb čočky její výslednou výrobní přesnost. Dále je ukázáno, že při zmenšení poloměru podpěrného kroužku, na kterém je čočka uložena, se průhyb vlastní tíhou výrazně zmenšuje, a tedy je tato metoda jednou z možností, jak tento nechtěný jev redukovat.



Obr. 37 Schéma vodorovně uložené sférické čočky podepřené (a) na kruhové podpoře o poloměru r_s , (b) na okraji po obvodě [55]



Obr. 38 Porovnání průhybů bikonvexní sférické čočky pro tři různé varianty optických skel (modrá (splývá s červenou) – N-BK7, červená – N-LAF21, žlutá - SF57), (a) podepření na okraji, (b) podepření na kroužku o poloměru 33.9 mm [55]

4 Doposud nepublikované výsledky

4.1 Osově souměrná membrána s ohybovou tuhostí

Doposud bylo ve všech autorových publikacích zabývajících se výpočtem deformací osově souměrných membrán kapalinových čoček [50-54] předpokládáno, že tloušťka membrány je natolik malá, že její ohybová tuhost může být zanedbána. Čím je však štíhlost membrány (poměr mezi jejím poloměrem a tloušťkou) menší, tím větší chybu tímto předpokladem do výpočtu vnášíme. Vzhledem k tomu, že v optických aplikacích jsou ve většině případů velké nároky na přesnost určení tvaru optické plochy, je účelné zabývat se otázkou, jak velké chyby se při určování deformovaného tvaru membrány zanedbáním ohybové tuhosti dopouštíme. V této kapitole bude analogicky k výše uvedeným pracím odvozen mechanický model osově souměrné membrány zatížené konstantním tlakem optické kapaliny, a to s uvážením ohybové tuhosti.

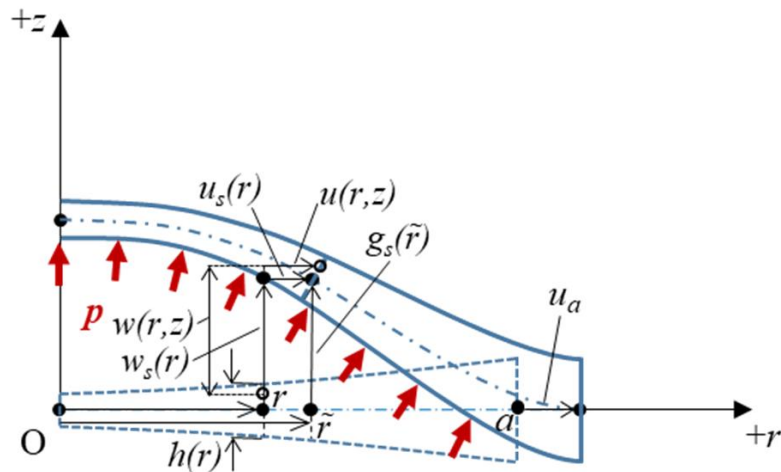
4.1.1 Geometrické rovnice

Popišme si nyní situaci znázorněnou na Obr. 39. Osově souměrná membrána s osou souměrnosti z a radiální souřadnicí r je v nedeformovaném stavu charakterizována proměnnou tloušťkou $h(r)$ a poloměrem a . Obecně je možné po obvodě membrány předepsat nenulový radiální posuv u_a , který do ní vnese počáteční předpětí. Zatížíme-li membránu tlakem p optické kapaliny, který působí vždy kolmo ke střednicové ploše membrány, dojde k její deformaci a bod na střednicové ploše s počátečními souřadnicemi $[r, 0]$ je přemístěn na novou pozici $[r + u_s(r), w_s(r)]$, kde $w_s(r)$ značí posuv střednicového bodu ve směru osy z a $u_s(r)$ značí posuv střednicového bodu ve směru radiální souřadnice r . Deformovaný tvar střednicové plochy membrány lze tedy popsat jistou funkcí $g_s(r)$ implicitně definovanou vztahem $g_s(\tilde{r}) = w_s(r)$, kde $\tilde{r} = r + u_s(r)$ je deformovaná radiální souřadnice.

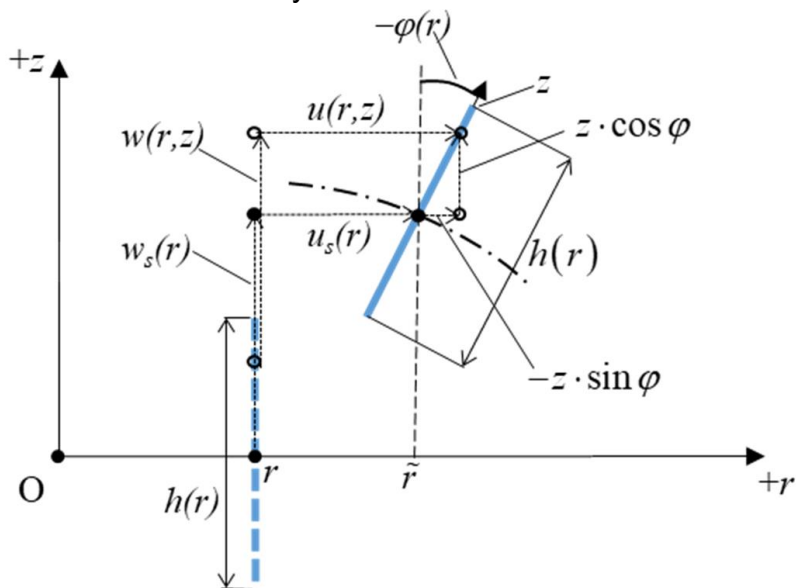
Úhel natočení průřezu φ lze vyjádřit pomocí funkcí u_s a w_s jako (viz Obr. 40)

$$\varphi = \arctan\left(\frac{dw_s}{d\tilde{r}}\right) = \arctan\left(\frac{dw_s}{dr} \frac{dr}{d\tilde{r}}\right) = \arctan\left(\frac{w'_s}{1+u'_s}\right), \quad (17)$$

kde u'_s a w'_s jsou první derivace posuvů u_s a w_s podle radiální souřadnice r .



Obr. 39 Schematický řez osově souměrnou membránou



Obr. 40 Schematické znázornění posuvu a rotace průřezu membrány

Funkce $u(r, z)$ a $w(r, z)$ hrající roli radiálního, resp. svislého posuvu obecného bodu membrány, který se nemusí nacházet na střednicové ploše, lze dále vyjádřit jako

$$u = u_s - z \sin \varphi = u_s - \frac{z w'_s}{\sqrt{(1+u'_s)^2 + w'^2_s}} = u_s - \frac{z w'_s}{\lambda_{rs}}, \quad (18)$$

$$w = w_s - z(1 - \cos \varphi) = w_s - z \left(1 - \frac{1+u'_s}{\sqrt{(1+u'_s)^2 + w'^2_s}} \right) = w_s - z \left(1 - \frac{1+u'_s}{\lambda_{rs}} \right), \quad (19)$$

kde pro $\sin \varphi$ a $\cos \varphi$ platí

$$\sin \varphi = \frac{w'_s}{\lambda_{rs}}, \quad (20)$$

$$\cos \varphi = \frac{1+u'_s}{\lambda_{rs}} \quad (21)$$

a

$$\lambda_{rs} = \sqrt{(1+u'_s)^2 + w'^2_s} \quad (22)$$

značí protažení střednicové plochy v radiálním směru. V dalším odvození je také vhodné definovat protažení střednicové plochy v tangenciálním směru, pro které platí

$$\lambda_{ts} = 1 + \frac{u_s}{r}. \quad (23)$$

Pro derivace posuvů obecného bodu (18) - (19) podle radiální souřadnice r dostaneme

$$u' = u'_s - z \cos \varphi \cdot \varphi' = u'_s - \frac{z(1+u'_s)[(1+u'_s)w''_s - u''_s w'_s]}{\lambda_{rs}^3}, \quad (24)$$

$$w' = w'_s - z \sin \varphi \cdot \varphi' = w'_s - \frac{z w'_s [(1+u'_s)w''_s - u''_s w'_s]}{\lambda_{rs}^3}, \quad (25)$$

kde

$$\varphi' = -\frac{u''_s w'_s - (1+u'_s)w''_s}{\lambda_{rs}^2} = \frac{\cos \varphi w''_s}{\lambda_{rs}} - \frac{\sin \varphi u''_s}{\lambda_{rs}}. \quad (26)$$

Nyní můžeme vyjádřit radiální a tangenciální protažení $\lambda_r(r, z)$ a $\lambda_t(r, z)$ v libovolném bodě membrány jako

$$\lambda_r = \sqrt{(1+u')^2 + w'^2} = \sqrt{(1+u'_s - z \cos \varphi \cdot \varphi')^2 + (w'_s - z \sin \varphi \cdot \varphi')^2} = \lambda_{rs} - z\varphi', \quad (27)$$

$$\lambda_t = \frac{r+u}{r} = 1 + \frac{u}{r} = 1 + \frac{u_s}{r} - \frac{z \sin \varphi}{r} = \lambda_{ts} - z \frac{\sin \varphi}{r}. \quad (28)$$

4.1.2 Materiálové rovnice a princip minima potenciální energie

4.1.2.1 Saint Venant-Kirchhoffův materiálový model

Předpokládejme nyní, že chování materiálu membrány lze popsat, stejně jako v publikacích [50-54], Saint Venant-Kirchhoffovým materiálovým modelem, který představuje lineární vztah mezi Green-Lagrangeovým přetvořením a druhým Piola-Kirchhoffovým napětím a je nejjednodušším materiálovým zákonem používaným pro modelování hyperelastických materiálů.

Pro Green-Lagrangeovo radiální a tangenciální přetvoření platí

$$\varepsilon_r^G = \frac{1}{2}(\lambda_r^2 - 1) = \frac{1}{2}(\lambda_{rs}^2 - 2z\lambda_{rs}\varphi' + z^2\varphi'^2 - 1) = \varepsilon_{rs}^G - z\lambda_{rs}\varphi' + \frac{1}{2}z^2\varphi'^2, \quad (29)$$

$$\varepsilon_t^G = \frac{1}{2}(\lambda_t^2 - 1) = \frac{1}{2}\left(\lambda_{ts}^2 - 2z\lambda_{ts}\frac{\sin \varphi}{r} + z^2\frac{\sin^2 \varphi}{r^2} - 1\right) = \varepsilon_{ts}^G - z\lambda_{ts}\frac{\sin \varphi}{r} + \frac{1}{2}z^2\frac{\sin^2 \varphi}{r^2}, \quad (30)$$

kde

$$\varepsilon_{rs}^G = \frac{1}{2}(\lambda_{rs}^2 - 1) = u'_s + \frac{1}{2}(u_s'^2 + w_s'^2), \quad (31)$$

$$\varepsilon_{ts}^G = \frac{1}{2}(\lambda_{ts}^2 - 1) = \frac{u_s}{r} + \frac{u_s^2}{2r^2}, \quad (32)$$

značí radiální, resp. tangenciální přetvoření na úrovni střednicové plochy.

Za předpokladu rovinné napjatosti lze hustotu deformační energie vztaženou na jednotku počátečního objemu materiálu vyjádřit jako

$$\mathcal{E}_{\text{int}}(\varepsilon_r^G, \varepsilon_t^G) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[(\varepsilon_r^G)^2 + 2\nu\varepsilon_r^G\varepsilon_t^G + (\varepsilon_t^G)^2 \right], \quad (33)$$

kde E je Youngův modul pružnosti a ν je Poissonovo číslo materiálu membrány.

Výraz (33) neobsahuje normálové přetvoření ve směru kolmém na střednici membrány, nicméně toto přetvoření není nulové a z výrazu bylo eliminováno pouze na základě předpokladu, že normálové napětí ve směru kolmém na střednici membrány je nulové. Derivací výrazu (33) pro hustotu deformační energie podle Green-Lagrangeových přetvoření dostaneme odpovídající energeticky sdužená napětí (v tomto případě druhé Piola-Kirchhoffovo napětí)

$$\sigma_r^{2PK} = \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{int}}}{\partial \varepsilon_r^G} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r^G + \nu \varepsilon_t^G), \quad (34)$$

$$\sigma_t^{2PK} = \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{int}}}{\partial \varepsilon_t^G} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_t^G + \nu \varepsilon_r^G). \quad (35)$$

Stav rovnováhy po aplikaci zatěžovacího tlaku p působícího kolmo ke střednicové ploše membrány a po zavedení případného předpětí předepsáním okrajového radiálního posuvu $u_a \neq 0$ lze vyjádřit pomocí principu minima potenciální energie. Pro celkovou potenciální energii E_p platí

$$E_p = E_{\text{int}} + E_{\text{ext}}, \quad (36)$$

kde

$$E_{\text{int}} = \int_0^a \int_{-h/2}^{h/2} \mathcal{E}_{\text{int}} dz 2\pi r dr = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_0^a \int_{-h/2}^{h/2} \left[(\varepsilon_r^G)^2 + 2\nu \varepsilon_r^G \varepsilon_t^G + (\varepsilon_t^G)^2 \right] dz 2\pi r dr \quad (37)$$

je vnitřní deformační energie, kterou získáme integrací výrazu (33) pro hustotu deformační energie přes počáteční objem membránového tělesa a

$$E_{\text{ext}} = -pV = -2\pi p \int_0^a w_s (r + u_s) (1 + u_s') dr \quad (38)$$

je energie vnějších sil, kterou lze vyjádřit jako součin aplikovaného tlaku a objemu ohraničeného deformovanou střednicovou plochou membrány se záporným znaménkem. Ve skutečnosti by symbol V měl představovat objem ohraničený vnitřní plochou membrány, který se od objemu ohraničeného její střednicovou plochou mírně liší. Nyní tento rozdíl zanedbáme, ale později se k tomuto bodu vrátíme a představíme zpřesněný výraz pro objem V . Dále je třeba opět zdůraznit, že symboly a a $h(r)$ značí poloměr membrány a její tloušťku v počátečním nedeformovaném stavu, tedy před případnou aplikací předpětí způsobeného předepsaným okrajovým posuvem u_a a před aplikací zatěžovacího tlaku p optické kapaliny.

Stav minima potenciální energie je dosažen pouze, pokud první variace výrazu pro celkovou potenciální energii je rovna nule pro všechny přípustné variace posuvů u_s a w_s , platí

$$\delta E_p = \delta E_{\text{int}} + \delta E_{\text{ext}}, \quad (39)$$

kde

$$\begin{aligned}\delta E_{\text{int}} &= \frac{2\pi E}{1-\nu^2} \int_0^a \int_{-h/2}^{h/2} (\varepsilon_r^G \delta \varepsilon_r^G + \nu \delta \varepsilon_r^G \varepsilon_t^G + \nu \varepsilon_r^G \delta \varepsilon_t^G + \varepsilon_t^G \delta \varepsilon_t^G) dz r dr = \\ &= 2\pi \int_0^a \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_r^{2PK} \delta \varepsilon_r^G + \sigma_t^{2PK} \delta \varepsilon_t^G) dz r dr\end{aligned}\quad (40)$$

je první variace vnitřní deformační energie a

$$\begin{aligned}\delta E_{\text{ext}} &= -p \delta V = -2\pi p \int_0^a [(r+u_s)(1+u'_s) \delta w_s + w_s(1+u'_s) \delta u_s + w_s(r+u_s) \delta u'_s] dr = \\ &= -2\pi p \int_0^a (r+u_s)(1+u'_s) \delta w_s dr - 2\pi p [w_s(r+u_s) \delta u_s]_{r=0}^a + \\ &\quad + 2\pi p \int_0^a w'_s(r+u_s) \delta u_s dr\end{aligned}\quad (41)$$

je první variace energie vnějších sil.

Z Obr. 39 je patrné, že funkce u_s a w_s musí splňovat okrajové podmínky

$$u_s(0) = 0, \quad u_s(a) = u_a, \quad w_s(a) = 0 \quad (42)$$

a dále

$$\varphi(0) = \arctan\left(\frac{w'_s(0)}{1+u'_s(0)}\right) = 0 \rightarrow w'_s(0) = 0, \quad \varphi(a) = \arctan\left(\frac{w'_s(a)}{1+u'_s(a)}\right) = 0 \rightarrow w'_s(a) = 0, \quad (43)$$

a stejné podmínky musí být analogicky splněny také pro variace těchto funkcí, δu_s a δw_s .

Výraz (40) pro první variaci vnitřní deformační energie obsahuje krom integrace přes radiální souřadnici membrány také integraci přes tloušťku membrány

$$\int_H (\sigma_r^{2PK} \delta \varepsilon_r^G + \sigma_t^{2PK} \delta \varepsilon_t^G) dz, \quad (44)$$

kde pro přehlednost píšeme \int_H místo $\int_{-h/2}^{h/2}$.

Z (29)-(32) a (34)-(35) je patrné, že funkce σ_r^{2PK} , σ_t^{2PK} , $\delta \varepsilon_r^G$ a $\delta \varepsilon_t^G$ jsou v rámci proměnné z polynomy 2. řádu, a tedy výsledkem součinu napětí a variace přetvoření bude v tomto případě polynom 4. řádu, jehož integraci lze provést analyticky. Aby se integrace těchto součinů zjednodušila, je vhodné vyjádřit přetvoření, napětí a variace přetvoření jako kvadratické polynomy s ortogonální bází na intervalu $[-h/2, h/2]$.

Green-Lagrangeova přetvoření (29)-(30) můžeme tedy přepsat do tvaru

$$\varepsilon_r^G = \varepsilon_{rs}^G - z\lambda_{rs}\varphi' + \frac{1}{2}z^2\varphi'^2 = \varepsilon_r^{G(0)} + \varepsilon_r^{G(1)}z + \varepsilon_r^{G(2)}\left(z^2 - \frac{h^2}{12}\right), \quad (45)$$

$$\varepsilon_t^G = \varepsilon_{ts}^G - z\lambda_{ts}\frac{\sin\varphi}{r} + \frac{1}{2}z^2\frac{\sin^2\varphi}{r^2} = \varepsilon_t^{G(0)} + \varepsilon_t^{G(1)}z + \varepsilon_t^{G(2)}\left(z^2 - \frac{h^2}{12}\right), \quad (46)$$

kde koeficienty $\varepsilon_r^{G(i)}$ a $\varepsilon_t^{G(i)}$, $i=0,1,2$, jsou nezávislé na z a platí pro ně

$$\varepsilon_r^{G(0)} = \varepsilon_{rs}^G + \frac{h^2}{12}\varepsilon_r^{G(2)} = \varepsilon_{rs}^G + \varphi'^2\frac{h^2}{24}, \quad (47)$$

$$\varepsilon_r^{G(1)} = -\lambda_{rs}\varphi', \quad (48)$$

$$\varepsilon_r^{G(2)} = \frac{1}{2}\varphi'^2, \quad (49)$$

$$\varepsilon_t^{G(0)} = \varepsilon_{ts}^G + \frac{h^2}{12}\varepsilon_t^{G(2)} = \varepsilon_{ts}^G + \frac{h^2}{24}\frac{\sin^2\varphi}{r^2}, \quad (50)$$

$$\varepsilon_t^{G(1)} = -\frac{\lambda_{ts}\sin\varphi}{r}, \quad (51)$$

$$\varepsilon_t^{G(2)} = \frac{\sin^2\varphi}{2r^2}. \quad (52)$$

Pro variace přetvoření poté z (45)-(46) platí

$$\delta\varepsilon_r^G = \delta\varepsilon_r^{G(0)} + \delta\varepsilon_r^{G(1)}z + \delta\varepsilon_r^{G(2)}\left(z^2 - \frac{h^2}{12}\right), \quad (53)$$

$$\delta\varepsilon_t^G = \delta\varepsilon_t^{G(0)} + \delta\varepsilon_t^{G(1)}z + \delta\varepsilon_t^{G(2)}\left(z^2 - \frac{h^2}{12}\right), \quad (54)$$

kde

$$\delta\varepsilon_r^{G(0)} = \delta\varepsilon_{rs}^G + \frac{h^2}{12}\delta\varepsilon_r^{G(2)} = \delta\varepsilon_{rs}^G + \varphi'\delta\varphi'\frac{h^2}{12}, \quad (55)$$

$$\delta\varepsilon_r^{G(1)} = -\varphi'\delta\lambda_{rs} - \lambda_{rs}\delta\varphi', \quad (56)$$

$$\delta\varepsilon_r^{G(2)} = \varphi'\delta\varphi', \quad (57)$$

$$\delta\varepsilon_t^{G(0)} = \delta\varepsilon_{ts}^G + \frac{h^2}{12} \delta\varepsilon_t^{G(2)} = \delta\varepsilon_{ts}^G + \frac{h^2}{12r^2} \sin\varphi \cos\varphi \delta\varphi, \quad (58)$$

$$\delta\varepsilon_t^{G(1)} = -\frac{\lambda_{ts} \cos\varphi \delta\varphi + \sin\varphi \delta\lambda_{ts}}{r}, \quad (59)$$

$$\delta\varepsilon_t^{G(2)} = \frac{\sin\varphi \cos\varphi \delta\varphi}{r^2}, \quad (60)$$

$$\delta\varepsilon_{rs}^G = \lambda_{rs} \delta\lambda_{rs}, \quad (61)$$

$$\delta\varepsilon_{ts}^G = \lambda_{ts} \delta\lambda_{ts}, \quad (62)$$

$$\delta\lambda_{rs} = \frac{(1+u'_s) \delta u'_s + w'_s \delta w'_s}{\lambda_{rs}} = \cos\varphi \delta u'_s + \sin\varphi \delta w'_s, \quad (63)$$

$$\delta\lambda_{ts} = \frac{\delta u_s}{r}, \quad (64)$$

$$\delta\varphi = \frac{1}{\left(\frac{w'_s}{1+u'_s}\right)^2 + 1} \left(\frac{(1+u'_s) \delta w'_s - w'_s \delta u'_s}{(1+u'_s)^2} \right) = \frac{(1+u'_s) \delta w'_s - w'_s \delta u'_s}{\lambda_{rs}^2} = \frac{\cos\varphi}{\lambda_{rs}} \delta w'_s - \frac{\sin\varphi}{\lambda_{rs}} \delta u'_s, \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \delta\varphi' &= (\delta\varphi)' = \left(\frac{\cos\varphi}{\lambda_{rs}} \right)' \delta w'_s + \frac{\cos\varphi}{\lambda_{rs}} \delta w_s'' - \left(\frac{\sin\varphi}{\lambda_{rs}} \right)' \delta u'_s - \frac{\sin\varphi}{\lambda_{rs}} \delta u_s'' = \\ &= \left(\frac{-\varphi' \sin\varphi \lambda_{rs} - \cos^2\varphi u_s'' - \sin\varphi \cos\varphi w_s''}{\lambda_{rs}^2} \right) \delta w'_s + \frac{\cos\varphi}{\lambda_{rs}} \delta w_s'' - \\ &- \left(\frac{\varphi' \cos\varphi - \sin\varphi \cos\varphi u_s'' - \sin^2\varphi w_s''}{\lambda_{rs}^2} \right) \delta u'_s - \frac{\sin\varphi}{\lambda_{rs}} \delta u_s''. \end{aligned} \quad (66)$$

Dosazením (45) a (46) do (34) a (35) dostaneme pro druhá Piola-Kirchhoffova napětí

$$\begin{aligned} \sigma_r^{2PK} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_r^{G(0)} + \varepsilon_r^{G(1)} z + \varepsilon_r^{G(2)} \left(z^2 - \frac{h^2}{12} \right) + \nu \left(\varepsilon_t^{G(0)} + \varepsilon_t^{G(1)} z + \varepsilon_t^{G(2)} \left(z^2 - \frac{h^2}{12} \right) \right) \right) = \\ &= \sigma_r^{2PK(0)} + \sigma_r^{2PK(1)} z + \sigma_r^{2PK(2)} \left(z^2 - \frac{h^2}{12} \right), \end{aligned} \quad (67)$$

$$\begin{aligned}\sigma_t^{2PK} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_t^{G(0)} + \varepsilon_t^{G(1)} z + \varepsilon_t^{G(2)} \left(z^2 - \frac{h^2}{12} \right) + \nu \left(\varepsilon_r^{G(0)} + \varepsilon_r^{G(1)} z + \varepsilon_r^{G(2)} \left(z^2 - \frac{h^2}{12} \right) \right) \right) = \\ &= \sigma_t^{2PK(0)} + \sigma_t^{2PK(1)} z + \sigma_t^{2PK(2)} \left(z^2 - \frac{h^2}{12} \right),\end{aligned}\quad (68)$$

kde koeficienty $\sigma_r^{2PK(i)}$ a $\sigma_t^{2PK(i)}$, $i=0,1,2$, jsou analogicky k $\varepsilon_r^{G(i)}$ a $\varepsilon_t^{G(i)}$ nezávislé na z a platí pro ně

$$\begin{aligned}\sigma_r^{2PK(0)} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_r^{G(0)} + \nu \varepsilon_t^{G(0)} \right) = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_{rs}^G + \nu \varepsilon_{ts}^G \right) + \frac{h^2}{12} \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_r^{G(2)} + \nu \varepsilon_t^{G(2)} \right) = \\ &= \sigma_{rs}^{2PK} + \frac{h^2}{12} \sigma_r^{2PK(2)},\end{aligned}\quad (69)$$

$$\sigma_r^{2PK(1)} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_r^{G(1)} + \nu \varepsilon_t^{G(1)} \right), \quad (70)$$

$$\sigma_r^{2PK(2)} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_r^{G(2)} + \nu \varepsilon_t^{G(2)} \right), \quad (71)$$

$$\begin{aligned}\sigma_t^{2PK(0)} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_t^{G(0)} + \nu \varepsilon_r^{G(0)} \right) = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_{ts}^G + \nu \varepsilon_{rs}^G \right) + \frac{h^2}{12} \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_t^{G(2)} + \nu \varepsilon_r^{G(2)} \right) = \\ &= \sigma_{ts}^{2PK} + \frac{h^2}{12} \sigma_t^{2PK(2)}\end{aligned}\quad (72)$$

$$\sigma_t^{2PK(1)} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_t^{G(1)} + \nu \varepsilon_r^{G(1)} \right), \quad (73)$$

$$\sigma_t^{2PK(2)} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_t^{G(2)} + \nu \varepsilon_r^{G(2)} \right). \quad (74)$$

Proveďme nyní integraci první části výrazu (44)

$$\begin{aligned}\int_H \sigma_r^{2PK} \delta \varepsilon_r^G dz &= \\ &= \int_H \left(\sigma_r^{2PK(0)} + \sigma_r^{2PK(1)} z + \sigma_r^{2PK(2)} \left(z^2 - \frac{h^2}{12} \right) \right) \left(\delta \varepsilon_r^{G(0)} + \delta \varepsilon_r^{G(1)} z + \delta \varepsilon_r^{G(2)} \left(z^2 - \frac{h^2}{12} \right) \right) dz = \\ &= h \sigma_r^{2PK(0)} \delta \varepsilon_r^{G(0)} + \frac{h^3}{12} \sigma_r^{2PK(1)} \delta \varepsilon_r^{G(1)} + \frac{h^5}{180} \sigma_r^{2PK(2)} \delta \varepsilon_r^{G(2)} = \\ &= h \sigma_{rs}^{2PK} \delta \varepsilon_{rs}^G + \frac{h^3}{12} \left(\sigma_{rs}^{2PK} \delta \varepsilon_r^{G(2)} + \sigma_r^{2PK(2)} \delta \varepsilon_{rs}^G + \sigma_r^{2PK(1)} \delta \varepsilon_r^{G(1)} \right) + \frac{h^5}{80} \sigma_r^{2PK(2)} \delta \varepsilon_r^{G(2)}.\end{aligned}\quad (75)$$

Díky vhodné volbě tvaru funkcí σ_r^{2PK} a $\delta \varepsilon_r^G$ vyjde určitý integrál po tloušťce membrány pro většinu členů nulový a výsledný vztah se tím značně zjednoduší. Pro integraci druhé části výrazu (44) platí analogicky

$$\begin{aligned}
& \int_H \sigma_t^{2PK} \delta \varepsilon_t^G dz = \\
& = h \sigma_t^{2PK(0)} \delta \varepsilon_t^{G(0)} + \frac{h^3}{12} \sigma_t^{2PK(1)} \delta \varepsilon_t^{G(1)} + \frac{h^5}{180} \sigma_t^{2PK(2)} \delta \varepsilon_t^{G(2)} = \\
& = h \sigma_{ts}^{2PK} \delta \varepsilon_{ts}^G + \frac{h^3}{12} \left(\sigma_{ts}^{2PK} \delta \varepsilon_t^{G(2)} + \sigma_t^{2PK(2)} \delta \varepsilon_{ts}^G + \sigma_t^{2PK(1)} \delta \varepsilon_t^{G(1)} \right) + \frac{h^5}{80} \sigma_t^{2PK(2)} \delta \varepsilon_t^{G(2)}.
\end{aligned} \tag{76}$$

Vraťme se nyní k výrazu (40) pro variaci vnitřní deformační energie a dosadíme do něj vztahy (75)-(76) získané analytickou integrací po tloušťce membrány, platí

$$\begin{aligned}
\delta E_{\text{int}} &= 2\pi \int_0^a \int_{-h/2}^{h/2} \left(\sigma_r^{2PK} \delta \varepsilon_r^G + \sigma_t^{2PK} \delta \varepsilon_t^G \right) dz r dr = \\
&= 2\pi \int_0^a h \left(\sigma_{rs}^{2PK} \delta \varepsilon_{rs}^G + \sigma_{ts}^{2PK} \delta \varepsilon_{ts}^G \right) r dr + \\
&+ 2\pi \int_0^a \frac{h^3}{12} \left(\sigma_{rs}^{2PK} \delta \varepsilon_r^{G(2)} + \sigma_r^{2PK(2)} \delta \varepsilon_{rs}^G + \sigma_r^{2PK(1)} \delta \varepsilon_r^{G(1)} + \sigma_{ts}^{2PK} \delta \varepsilon_t^{G(2)} + \sigma_t^{2PK(2)} \delta \varepsilon_{ts}^G + \right. \\
&+ \left. \sigma_t^{2PK(1)} \delta \varepsilon_t^{G(1)} \right) r dr + 2\pi \int_0^a \frac{h^5}{80} \left(\sigma_r^{2PK(2)} \delta \varepsilon_r^{G(2)} + \sigma_t^{2PK(2)} \delta \varepsilon_t^{G(2)} \right) r dr = \\
&= 2\pi \int_0^a h \left(\sigma_{rs}^{2PK} \lambda_{rs} \cos \varphi \delta u'_s + \sigma_{rs}^{2PK} \lambda_{rs} \sin \varphi \delta w'_s + \sigma_{ts}^{2PK} \lambda_{ts} \frac{\delta u_s}{r} \right) r dr + \\
&+ 2\pi \int_0^a \frac{h^3}{12} \left(\sigma_{rs}^{2PK} \varphi' \delta \varphi' + \sigma_r^{2PK(2)} \lambda_{rs} \cos \varphi \delta u'_s + \sigma_r^{2PK(2)} \lambda_{rs} \sin \varphi \delta w'_s - \sigma_r^{2PK(1)} \varphi' \cos \varphi \delta u'_s - \right. \\
&- \left. \sigma_r^{2PK(1)} \varphi' \sin \varphi \delta w'_s - \sigma_r^{2PK(1)} \lambda_{rs} \delta \varphi' + \sigma_{ts}^{2PK} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \delta \varphi + \sigma_t^{2PK(2)} \lambda_{ts} \frac{\delta u_s}{r} - \right. \\
&- \left. \sigma_t^{2PK(1)} \frac{\lambda_{ts} \cos \varphi}{r} \delta \varphi - \sigma_t^{2PK(1)} \frac{\sin \varphi}{r^2} \delta u_s \right) r dr + \\
&+ 2\pi \int_0^a \frac{h^5}{80} \left(\sigma_r^{2PK(2)} \varphi' \delta \varphi' + \sigma_t^{2PK(2)} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \delta \varphi \right) r dr = \\
&= 2\pi \int_0^a \left[h \sigma_{ts}^{2PK} \frac{\lambda_{ts}}{r} + \frac{h^3}{12} \left(\sigma_t^{2PK(2)} \frac{\lambda_{ts}}{r} - \sigma_t^{2PK(1)} \frac{\sin \varphi}{r^2} \right) \right] r \delta u_s dr + \\
&+ 2\pi \int_0^a \left[h \sigma_{rs}^{2PK} \lambda_{rs} \cos \varphi + \frac{h^3}{12} \left(\sigma_r^{2PK(2)} \lambda_{rs} \cos \varphi - \sigma_r^{2PK(1)} \varphi' \cos \varphi \right) \right] r \delta u'_s dr + \\
&+ 2\pi \int_0^a \left[h \sigma_{rs}^{2PK} \lambda_{rs} \sin \varphi + \frac{h^3}{12} \left(\sigma_r^{2PK(2)} \lambda_{rs} \sin \varphi - \sigma_r^{2PK(1)} \varphi' \sin \varphi \right) \right] r \delta w'_s dr + \\
&+ 2\pi \int_0^a \left[\frac{h^3}{12} \left(\sigma_{ts}^{2PK} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} - \sigma_t^{2PK(1)} \frac{\lambda_{ts} \cos \varphi}{r} \right) + \frac{h^5}{80} \sigma_t^{2PK(2)} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \right] r \delta \varphi dr + \\
&+ 2\pi \int_0^a \left[\frac{h^3}{12} \left(\sigma_{rs}^{2PK} \varphi' - \sigma_r^{2PK(1)} \lambda_{rs} \right) + \frac{h^5}{80} \sigma_r^{2PK(2)} \varphi' \right] r \delta \varphi' dr.
\end{aligned} \tag{77}$$

Pro získání tzv. silné formy rovnic rovnováhy je třeba na všechny výrazy v (77), které nejsou násobeny přímo funkcemi δu_s nebo δw_s , aplikovat metodu integrace per

partes tak, aby se v integrálech výsledného výrazu vyskytovaly pouze členy násobené těmito funkcemi. Přepíšme si nejprve část (77) násobenou funkcí $\delta\varphi'$, platí

$$\begin{aligned}
& +2\pi \int_0^a \left[\frac{h^3}{12} (\sigma_{rs}^{2PK} \varphi' - \sigma_r^{2PK(1)} \lambda_{rs}) + \frac{h^5}{80} \sigma_r^{2PK(2)} \varphi' \right] r \delta\varphi' dr = \\
& = 2\pi \int_0^a \left[\frac{h^3 r}{12} (\sigma_{rs}^{2PK} \varphi' - \sigma_r^{2PK(1)} \lambda_{rs}) + \frac{h^5 r}{80} \sigma_r^{2PK(2)} \varphi' \right] \delta\varphi' dr = \\
& = 2\pi \left[\left[\frac{h^3 r}{12} (\sigma_{rs}^{2PK} \varphi' - \sigma_r^{2PK(1)} \lambda_{rs}) + \frac{h^5 r}{80} \sigma_r^{2PK(2)} \varphi' \right] \delta\varphi \right]_{r=0}^a - \\
& - 2\pi \int_0^a \left[\frac{h^3 r}{12} (\sigma_{rs}^{2PK} \varphi' - \sigma_r^{2PK(1)} \lambda_{rs}) + \frac{h^5 r}{80} \sigma_r^{2PK(2)} \varphi' \right] \delta\varphi dr.
\end{aligned} \tag{78}$$

a po dosazení (65) za $\delta\varphi$ do posledního řádku (78) dostaneme dále

$$\begin{aligned}
& -2\pi \int_0^a \left[\frac{h^3 r}{12} (\sigma_{rs}^{2PK} \varphi' - \sigma_r^{2PK(1)} \lambda_{rs}) + \frac{h^5 r}{80} \sigma_r^{2PK(2)} \varphi' \right] \delta\varphi dr = \\
& = -2\pi \int_0^a \left[\frac{h^3 r}{12} (\sigma_{rs}^{2PK} \varphi' - \sigma_r^{2PK(1)} \lambda_{rs}) + \frac{h^5 r}{80} \sigma_r^{2PK(2)} \varphi' \right] \left(\frac{\cos \varphi}{\lambda_{rs}} \delta w'_s - \frac{\sin \varphi}{\lambda_{rs}} \delta u'_s \right) dr = \\
& = -2\pi \int_0^a \left[\frac{h^3 r}{12} (\sigma_{rs}^{2PK} \varphi' - \sigma_r^{2PK(1)} \lambda_{rs}) + \frac{h^5 r}{80} \sigma_r^{2PK(2)} \varphi' \right] \frac{\cos \varphi}{\lambda_{rs}} \delta w'_s dr + \\
& + 2\pi \int_0^a \left[\frac{h^3 r}{12} (\sigma_{rs}^{2PK} \varphi' - \sigma_r^{2PK(1)} \lambda_{rs}) + \frac{h^5 r}{80} \sigma_r^{2PK(2)} \varphi' \right] \frac{\sin \varphi}{\lambda_{rs}} \delta u'_s dr = \\
& = -2\pi \left[\left[\frac{h^3 r}{12} (\sigma_{rs}^{2PK} \varphi' - \sigma_r^{2PK(1)} \lambda_{rs}) + \frac{h^5 r}{80} \sigma_r^{2PK(2)} \varphi' \right] \frac{\cos \varphi}{\lambda_{rs}} \delta w_s \right]_{r=0}^a + \\
& + 2\pi \int_0^a \left\{ \left[\frac{h^3 r}{12} (\sigma_{rs}^{2PK} \varphi' - \sigma_r^{2PK(1)} \lambda_{rs}) + \frac{h^5 r}{80} \sigma_r^{2PK(2)} \varphi' \right] \frac{\cos \varphi}{\lambda_{rs}} \right\} \delta w_s dr + \\
& + 2\pi \left[\left[\frac{h^3 r}{12} (\sigma_{rs}^{2PK} \varphi' - \sigma_r^{2PK(1)} \lambda_{rs}) + \frac{h^5 r}{80} \sigma_r^{2PK(2)} \varphi' \right] \frac{\sin \varphi}{\lambda_{rs}} \delta u_s \right]_{r=0}^a - \\
& - 2\pi \int_0^a \left\{ \left[\frac{h^3 r}{12} (\sigma_{rs}^{2PK} \varphi' - \sigma_r^{2PK(1)} \lambda_{rs}) + \frac{h^5 r}{80} \sigma_r^{2PK(2)} \varphi' \right] \frac{\sin \varphi}{\lambda_{rs}} \right\} \delta u_s dr.
\end{aligned} \tag{79}$$

Stejným způsobem postupujeme v případě členu násobeného funkcí $\delta\varphi$ na předposledním řádku v (77), dostaneme

$$\begin{aligned}
& 2\pi \int_0^a \left[\frac{h^3}{12} \left(\sigma_{ts}^{2PK} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} - \sigma_t^{2PK(1)} \frac{\lambda_{ts} \cos \varphi}{r} \right) + \frac{h^5}{80} \sigma_t^{2PK(2)} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \right] r \delta\varphi dr = \\
& = 2\pi \int_0^a \left[\frac{h^3}{12} \left(\sigma_{ts}^{2PK} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} - \sigma_t^{2PK(1)} \lambda_{ts} \cos \varphi \right) + \frac{h^5}{80} \sigma_t^{2PK(2)} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \right] \frac{\cos \varphi}{\lambda_{rs}} \delta w'_s dr - \\
& - 2\pi \int_0^a \left[\frac{h^3}{12} \left(\sigma_{ts}^{2PK} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} - \sigma_t^{2PK(1)} \lambda_{ts} \cos \varphi \right) + \frac{h^5}{80} \sigma_t^{2PK(2)} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \right] \frac{\sin \varphi}{\lambda_{rs}} \delta u'_s dr = \\
& = 2\pi \left[\left[\frac{h^3}{12} \left(\sigma_{ts}^{2PK} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} - \sigma_t^{2PK(1)} \lambda_{ts} \cos \varphi \right) + \frac{h^5}{80} \sigma_t^{2PK(2)} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \right] \frac{\cos \varphi}{\lambda_{rs}} \delta w_s \right]_{r=0}^a - \\
& - 2\pi \int_0^a \left\{ \left[\frac{h^3}{12} \left(\sigma_{ts}^{2PK} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} - \sigma_t^{2PK(1)} \lambda_{ts} \cos \varphi \right) + \frac{h^5}{80} \sigma_t^{2PK(2)} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \right] \frac{\cos \varphi}{\lambda_{rs}} \right\}' \delta w_s dr - \\
& - 2\pi \left[\left[\frac{h^3}{12} \left(\sigma_{ts}^{2PK} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} - \sigma_t^{2PK(1)} \lambda_{ts} \cos \varphi \right) + \frac{h^5}{80} \sigma_t^{2PK(2)} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \right] \frac{\sin \varphi}{\lambda_{rs}} \delta u_s \right]_{r=0}^a + \\
& + 2\pi \int_0^a \left\{ \left[\frac{h^3}{12} \left(\sigma_{ts}^{2PK} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} - \sigma_t^{2PK(1)} \lambda_{ts} \cos \varphi \right) + \frac{h^5}{80} \sigma_t^{2PK(2)} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \right] \frac{\sin \varphi}{\lambda_{rs}} \right\}' \delta u_s dr,
\end{aligned} \tag{80}$$

a po úpravě členů v (77) násobených funkcemi $\delta u'_s$ a $\delta w'_s$ (třetí a čtvrtý řádek od spodu) dostaneme

$$\begin{aligned}
& 2\pi \int_0^a \left[h \sigma_{rs}^{2PK} \lambda_{rs} \cos \varphi + \frac{h^3}{12} \left(\sigma_r^{2PK(2)} \lambda_{rs} \cos \varphi - \sigma_r^{2PK(1)} \varphi' \cos \varphi \right) \right] r \delta u'_s dr + \\
& + 2\pi \int_0^a \left[h \sigma_{rs}^{2PK} \lambda_{rs} \sin \varphi + \frac{h^3}{12} \left(\sigma_r^{2PK(2)} \lambda_{rs} \sin \varphi - \sigma_r^{2PK(1)} \varphi' \sin \varphi \right) \right] r \delta w'_s dr = \\
& = 2\pi \left[\left[h r \sigma_{rs}^{2PK} \lambda_{rs} \cos \varphi + \frac{h^3 r}{12} \left(\sigma_r^{2PK(2)} \lambda_{rs} \cos \varphi - \sigma_r^{2PK(1)} \varphi' \cos \varphi \right) \right] \delta u_s \right]_{r=0}^a - \\
& - 2\pi \int_0^a \left[h r \sigma_{rs}^{2PK} \lambda_{rs} \cos \varphi + \frac{h^3 r}{12} \left(\sigma_r^{2PK(2)} \lambda_{rs} \cos \varphi - \sigma_r^{2PK(1)} \varphi' \cos \varphi \right) \right]' \delta u_s dr + \\
& + 2\pi \left[\left[h r \sigma_{rs}^{2PK} \lambda_{rs} \sin \varphi + \frac{h^3 r}{12} \left(\sigma_r^{2PK(2)} \lambda_{rs} \sin \varphi - \sigma_r^{2PK(1)} \varphi' \sin \varphi \right) \right] \delta w_s \right]_{r=0}^a - \\
& - 2\pi \int_0^a \left[h r \sigma_{rs}^{2PK} \lambda_{rs} \sin \varphi + \frac{h^3 r}{12} \left(\sigma_r^{2PK(2)} \lambda_{rs} \sin \varphi - \sigma_r^{2PK(1)} \varphi' \sin \varphi \right) \right]' \delta w_s dr.
\end{aligned} \tag{81}$$

Ve výrazu pro variaci energie vnějších sil (41) jsme již metodu integrace per partes použili a počítáme-li všechny výrazy obsažené v integrálech $\int_0^a dr$ (77), (79)-(81) a (41) násobené funkcí δu_s , resp. δw_s , dostaneme následující soustavu dvou diferenciálních rovnic. Členy $\left[\right]_{r=0}^a$ hrají roli statických okrajových podmínek a při vyjadřování silné formy rovnic rovnováhy se jimi nemusíme zabývat.

$$\begin{aligned}
& -\left(hr\sigma_{rs}^{2PK}\lambda_{rs}\cos\varphi\right)' + h\sigma_{ts}^{2PK}\lambda_{ts} + \\
& + \frac{1}{12}\left[-\left(h^3r\sigma_r^{2PK(2)}\lambda_{rs}\cos\varphi\right)' + h^3\sigma_t^{2PK(2)}\lambda_{ts} + \left(h^3r\sigma_r^{2PK(1)}\varphi'\cos\varphi\right)' - h^3\sigma_t^{2PK(1)}\frac{\sin\varphi}{r} + \right. \\
& \left. + \left(\frac{\sin\varphi}{\lambda_{rs}}\left(\left(h^3r\sigma_r^{2PK(1)}\lambda_{rs}\right)' - h^3\sigma_t^{2PK(1)}\lambda_{ts}\cos\varphi - \left(h^3r\sigma_{rs}^{2PK}\varphi'\right)' + h^3\sigma_{ts}^{2PK}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}\right)\right)'\right] + \quad (82) \\
& + \frac{1}{80}\left(\frac{\sin\varphi}{\lambda_{rs}}\left(-\left(h^5r\sigma_r^{2PK(2)}\varphi'\right)' + h^5\sigma_t^{2PK(2)}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}\right)\right)' = -pr\lambda_{ts}\lambda_{rs}\sin\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\left(hr\sigma_{rs}^{2PK}\lambda_{rs}\sin\varphi\right)' + \\
& + \frac{1}{12}\left[-\left(h^3r\sigma_r^{2PK(2)}\lambda_{rs}\sin\varphi\right)' + \left(h^3r\sigma_r^{2PK(1)}\varphi'\sin\varphi\right)' + \right. \\
& \left. + \left(-\frac{\cos\varphi}{\lambda_{rs}}\left(\left(h^3r\sigma_r^{2PK(1)}\lambda_{rs}\right)' - h^3\sigma_t^{2PK(1)}\lambda_{ts}\cos\varphi - \left(h^3r\sigma_{rs}^{2PK}\varphi'\right)' + h^3\sigma_{ts}^{2PK}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}\right)\right)'\right] + \quad (83) \\
& + \frac{1}{80}\left(-\frac{\cos\varphi}{\lambda_{rs}}\left(-\left(h^5r\sigma_r^{2PK(2)}\varphi'\right)' + h^5\sigma_t^{2PK(2)}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}\right)\right)' = pr\lambda_{ts}\lambda_{rs}\cos\varphi.
\end{aligned}$$

Zanedbejme nyní pro zajímavost ve výsledných rovnicích rovnováhy (82), (83) členy s h^3 a h^5 a dosadíme za $\lambda_{ts} = 1 + \frac{u_s}{r}$, $\sin\varphi = \frac{w'_s}{\lambda_{rs}}$ a $\cos\varphi = \frac{1+u'_s}{\lambda_{rs}}$. Dostaneme následující soustavu rovnic, která přesně odpovídá membránové teorii bez uvážení ohybové tuhosti odvozené v autorových publikacích [50, 53].

$$\left(hr\sigma_{rs}^{2PK}(1+u'_s)\right)' - h\sigma_{ts}^{2PK}\left(1+\frac{u_s}{r}\right) = p(r+u_s)w'_s \quad (84)$$

$$-\left(hr\sigma_{rs}^{2PK}w'_s\right)' = p(r+u_s)(1+u'_s). \quad (85)$$

4.1.2.2 Biotův materiálový model

Green-Lagrangeova přetvoření použitá v Saint Venant-Kirchhoffově materiálovém modelu vedou na kvadratické rozložení přetvoření a napětí po tloušťce membrány. V případě, že nahradíme materiálový model lineárním vztahem mezi Biotovým přetvořením a jeho energeticky sdruženým napětím (prvním Piola-Kirchhoffovým napětím), bude i výsledné rozložení přetvoření a napětí po tloušťce membrány lineární, neboť protažení se ve vztazích pro Biotova přetvoření vyskytují pouze v první mocnině. V důsledku toho povede integrace součinu napětí a variací přetvoření po tloušťce membrány k menšímu počtu členů, ale pro větší hodnoty přetvoření se bude chování modelu mírně lišit.

Pro Biotovo radiální a tangenciální přetvoření platí

$$\varepsilon_r^B = \lambda_r - 1 = \lambda_{rs} - z\varphi' - 1 = \varepsilon_{rs}^B - z\varphi', \quad (86)$$

$$\varepsilon_t^B = \lambda_t - 1 = \lambda_{ts} - z\frac{\sin\varphi}{r} - 1 = \varepsilon_{ts}^B - z\frac{\sin\varphi}{r}, \quad (87)$$

kde

$$\varepsilon_{rs}^B = \lambda_{rs} - 1 = \sqrt{(1+u'_s)^2 + w'_s{}^2} - 1, \quad (88)$$

$$\varepsilon_{ts}^B = \lambda_{ts} - 1 = \frac{u_s}{r}, \quad (89)$$

značí radiální, resp. tangenciální přetvoření na úrovni střednicové plochy. Analogicky k (33) lze hustotu deformační energie vztaženou na jednotku počátečního objemu materiálu vyjádřit jako

$$\mathcal{E}_{\text{int}}(\varepsilon_r^B, \varepsilon_t^B) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[(\varepsilon_r^B)^2 + 2\nu\varepsilon_r^B\varepsilon_t^B + (\varepsilon_t^B)^2 \right], \quad (90)$$

a pro první Piola-Kirchhoffova napětí platí

$$\sigma_r^{1PK} = \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{int}}}{\partial \varepsilon_r^B} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r^B + \nu\varepsilon_t^B), \quad (91)$$

$$\sigma_t^{1PK} = \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{int}}}{\partial \varepsilon_t^B} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_t^B + \nu\varepsilon_r^B). \quad (92)$$

Obdobně k výrazům (45) a (46) můžeme vyjádřit i Biotova přetvoření

$$\varepsilon_r^B = \varepsilon_{rs}^B - z\varphi' = \varepsilon_r^{B(0)} + \varepsilon_r^{B(1)}z, \quad (93)$$

$$\varepsilon_t^B = \varepsilon_{ts}^B - z\frac{\sin\varphi}{r} = \varepsilon_t^{B(0)} + \varepsilon_t^{B(1)}z, \quad (94)$$

kde koeficienty $\varepsilon_r^{B(i)}$ a $\varepsilon_t^{B(i)}$, $i=0,1$, jsou nezávislé na z a platí pro ně

$$\varepsilon_r^{B(0)} = \varepsilon_{rs}^B, \quad (95)$$

$$\varepsilon_r^{B(1)} = -\varphi', \quad (96)$$

$$\varepsilon_t^{B(0)} = \varepsilon_{ts}^B, \quad (97)$$

$$\varepsilon_t^{B(1)} = -\frac{\sin \varphi}{r}. \quad (98)$$

Pro variace přetvoření poté platí

$$\delta\varepsilon_r^B = \delta\varepsilon_r^{B(0)} + \delta\varepsilon_r^{B(1)}z, \quad (99)$$

$$\delta\varepsilon_t^B = \delta\varepsilon_t^{B(0)} + \delta\varepsilon_t^{B(1)}z, \quad (100)$$

kde

$$\delta\varepsilon_r^{B(0)} = \delta\varepsilon_{rs}^B, \quad (101)$$

$$\delta\varepsilon_r^{B(1)} = -\delta\varphi', \quad (102)$$

$$\delta\varepsilon_t^{B(0)} = \delta\varepsilon_{ts}^B, \quad (103)$$

$$\delta\varepsilon_t^{B(1)} = -\frac{\cos \varphi}{r} \delta\varphi. \quad (104)$$

$$\delta\varepsilon_{rs}^B = \delta\lambda_{rs}, \quad (105)$$

$$\delta\varepsilon_{ts}^B = \delta\lambda_{ts}. \quad (106)$$

Dosazením (93) a (94) do (91) a (92) dostaneme pro první Piola-Kirchhoffova napětí

$$\sigma_r^{1PK} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_r^{B(0)} + \varepsilon_r^{B(1)}z + \nu \left(\varepsilon_t^{B(0)} + \varepsilon_t^{B(1)}z \right) \right) = \sigma_r^{1PK(0)} + \sigma_r^{1PK(1)}z, \quad (107)$$

$$\sigma_t^{1PK} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_t^{B(0)} + \varepsilon_t^{B(1)}z + \nu \left(\varepsilon_r^{B(0)} + \varepsilon_r^{B(1)}z \right) \right) = \sigma_t^{1PK(0)} + \sigma_t^{1PK(1)}z, \quad (108)$$

kde koeficienty $\sigma_r^{1PK(i)}$ a $\sigma_t^{1PK(i)}$, $i=0,1$, jsou analogicky k $\varepsilon_r^{B(i)}$ a $\varepsilon_t^{B(i)}$ nezávislé na z a platí pro ně

$$\sigma_r^{1PK(0)} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_r^{B(0)} + \nu\varepsilon_t^{B(0)} \right) = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_{rs}^B + \nu\varepsilon_{ts}^B \right) = \sigma_{rs}^{1PK}, \quad (109)$$

$$\sigma_r^{1PK(1)} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r^{B(1)} + \nu \varepsilon_t^{B(1)}), \quad (110)$$

$$\sigma_t^{1PK(0)} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_t^{B(0)} + \nu \varepsilon_r^{B(0)}) = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{ts}^B + \nu \varepsilon_{rs}^B) = \sigma_{ts}^{1PK} \quad (111)$$

$$\sigma_t^{1PK(1)} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_t^{B(1)} + \nu \varepsilon_r^{B(1)}). \quad (112)$$

Výraz pro první variaci vnitřní deformační energie je identický jako (40) v předchozí kapitole (s tím, že druhá Piola-Kirchhoffova napětí jsou nahrazena prvními Piola-Kirchhoffovými napětími a variace Green-Lagrangeových deformací jsou nahrazeny variacemi Biotových deformací), tedy

$$\delta E_{\text{int}} = 2\pi \int_0^a \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_r^{1PK} \delta \varepsilon_r^B + \sigma_t^{1PK} \delta \varepsilon_t^B) dz r dr. \quad (113)$$

Proveďme nyní opět analyticky integraci přes tloušťku membrány, platí

$$\begin{aligned} \int_H \sigma_r^{1PK} \delta \varepsilon_r^B + \sigma_t^{1PK} \delta \varepsilon_t^B dz &= h \sigma_{rs}^{1PK} \delta \varepsilon_{rs}^B + \frac{h^3}{12} \sigma_r^{1PK(1)} \delta \varepsilon_r^{B(1)} + h \sigma_{ts}^{1PK} \delta \varepsilon_{ts}^B + \frac{h^3}{12} \sigma_t^{1PK(1)} \delta \varepsilon_t^{B(1)} = \\ &= h \sigma_{rs}^{1PK} \delta \lambda_{rs} - \frac{h^3}{12} \sigma_r^{1PK(1)} \delta \varphi' + h \sigma_{ts}^{1PK} \delta \lambda_{ts} - \frac{h^3}{12} \sigma_t^{1PK(1)} \frac{\cos \varphi \delta \varphi}{r}. \end{aligned} \quad (114)$$

Postupem analogickým k předchozí kapitole můžeme nyní odvodit následující silnou formu rovnic rovnováhy pro tento model

$$\begin{aligned} &-(hr \sigma_{rs}^{1PK} \lambda_{rs} \cos \varphi)' + h \sigma_{ts}^{1PK} + \\ &+ \frac{1}{12} \left(\frac{\sin \varphi}{\lambda_{rs}} \left((h^3 r \sigma_r^{1PK(1)})' - h^3 \sigma_t^{1PK(1)} \cos \varphi \right) \right)' = -pr \lambda_{ts} \lambda_{rs} \sin \varphi, \end{aligned} \quad (115)$$

$$\begin{aligned} &-(hr \sigma_{rs}^{1PK} \lambda_{rs} \sin \varphi)' + \\ &- \frac{1}{12} \left(\frac{\cos \varphi}{\lambda_{rs}} \left((h^3 r \sigma_r^{1PK(1)})' - h^3 \sigma_t^{1PK(1)} \cos \varphi \right) \right)' = pr \lambda_{ts} \lambda_{rs} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (116)$$

Je patrné, že výsledné rovnice modelu založeného na Biotových přetvořeních jsou jednodušší než v případě Saint Venant-Kirchhoffova modelu odvozeného v předchozí kapitole, nicméně stále je nutné ověřit rozdíl výsledků získaných těmito modely, což bude provedeno v následující kapitole 4.1.6.

4.1.2.3 Timoshenkův zjednodušený model

V [30] popisuje Timoshenko mechanický model (dále Timoshenkův model) osově souměrné membrány konstantní tloušťky zatížené konstantním tlakem kolmým k její střednici, který bere v úvahu veliké průhyby a ohybovou tuhost membrány, následující soustavou diferenciálních rovnic

$$u_s'' + \frac{1}{r} u_s' - \frac{u_s}{r^2} = -\frac{1-\nu}{2r} w_s'^2 - w_s' w_s'', \quad (117)$$

$$w_s''' + \frac{1}{r} w_s'' - \frac{1}{r^2} w_s' = \frac{12}{h^2} w_s' \left[u_s' + \nu \frac{u_s}{r} + \frac{1}{2} w_s'^2 \right] + \frac{pr}{2D}, \quad (118)$$

kde $D = Eh^3 / (12(1-\nu^2))$ je tzv. desková tuhost.

Tyto rovnice jsou odvozeny na základě rovnic rovnováhy

$$N_r - N_t + rN_r' = 0, \quad (119)$$

$$M_r + rM_r' - M_t - rQ_r = 0, \quad (120)$$

kde pro měrné vnitřní síly platí

$$M_r = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\varphi_t' + \frac{\nu}{r} \varphi_t \right), \quad (121)$$

$$M_t = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\nu \varphi_t' + \frac{1}{r} \varphi_t \right), \quad (122)$$

$$Q_r = -N_r \varphi_t - \frac{1}{r} \int_0^r p(\bar{r}) \bar{r} d\bar{r}, \quad (123)$$

$$N_r = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{rs}^t + \nu \varepsilon_{ts}^t), \quad (124)$$

$$N_t = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_{rs}^t + \varepsilon_{ts}^t). \quad (125)$$

M_r je měrný radiální moment, M_t je měrný tangenciální moment, N_r je měrná normálová síla v radiálním směru, N_t je měrná normálová síla v tangenciálním směru a Q_r je měrná radiální posouvající síla. Timoshenko ve svém modelu předpokládá následující zjednodušení pro natočení průřezu φ_t a pro radiální a tangenciální přetvoření střednicové plochy ε_{rs}^t , ε_{ts}^t

$$\varphi_t = w'_s, \quad (126)$$

$$\varepsilon_{rs}^t = u'_s + \frac{1}{2} w_s'^2, \quad (127)$$

$$\varepsilon_{ts}^t = \frac{u_s}{r}. \quad (128)$$

Porovnáme-li vztahy (126), (127), (128) Timoshenkova modelu se vztahy (17), (31), (32) pro Saint Venant-Kirchhoffův model, je zřejmé, že Timoshenko používá aproximaci $\arctan(x) \approx x$ a zároveň $u'_s \ll 1$ a $u_s \ll r$.

Pokusme se nyní odvodit Timoshenkův model energetickou metodou z funkcionálu pro celkovou potenciální energii (analogicky k modelům v předchozích dvou kapitolách) za použití zjednodušených kinematických vztahů (126),(127),(128) a

$$u = u_s - z \sin \varphi_t \approx u_s - z \varphi_t, \quad (129)$$

$$w = w_s - z(1 - \cos \varphi_t) \approx w_s, \quad (130)$$

$$\varepsilon_r^t = u' + \frac{1}{2} w'^2 = u'_s + \frac{1}{2} w_s'^2 - z \varphi_t' = \varepsilon_{rs}^t - z w_s'', \quad (131)$$

$$\varepsilon_t^t = \frac{u}{r} = \frac{u_s}{r} - \frac{z \varphi_t}{r} = \varepsilon_{ts}^t - \frac{z w_s'}{r}. \quad (132)$$

Hustotu deformační energie vztaženou na jednotku počátečního objemu lze opět analogicky k předchozím dvěma modelům vyjádřit jako

$$\mathcal{E}_{\text{int}}(\varepsilon_r^t, \varepsilon_t^t) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[(\varepsilon_r^t)^2 + 2\nu \varepsilon_r^t \varepsilon_t^t + (\varepsilon_t^t)^2 \right] \quad (133)$$

a pro energeticky sdružená napětí (jakási „Timoshenkova“ napětí) platí

$$\begin{aligned} \sigma_r^t &= \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{int}}}{\partial \varepsilon_r^t} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r^t + \nu \varepsilon_t^t) = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{rs}^t + \nu \varepsilon_{ts}^t) - \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(w_s'' + \nu \frac{w_s'}{r} \right) = \\ &= \sigma_{rs}^t - \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(w_s'' + \nu \frac{w_s'}{r} \right), \end{aligned} \quad (134)$$

$$\begin{aligned} \sigma_t^t &= \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{int}}}{\partial \varepsilon_t^t} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_t^t + \nu \varepsilon_r^t) = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{ts}^t + \nu \varepsilon_{rs}^t) - \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{w_s'}{r} + \nu w_s'' \right) = \\ &= \sigma_{ts}^t - \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{w_s'}{r} + \nu w_s'' \right), \end{aligned} \quad (135)$$

kde

$$\sigma_{rs}^t = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{rs}^t + \nu \varepsilon_{ts}^t), \quad (136)$$

$$\sigma_{ts}^t = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{ts}^t + \nu \varepsilon_{rs}^t), \quad (137)$$

jsou napětí na úrovni střednicové plochy.

Dále můžeme vyjádřit první variace přetvoření

$$\delta \varepsilon_r^t = \delta \varepsilon_{rs}^t - z \delta w_s'', \quad (138)$$

$$\delta \varepsilon_t^t = \delta \varepsilon_{ts}^t - \frac{z}{r} \delta w_s', \quad (139)$$

kde

$$\delta \varepsilon_{rs}^t = \delta u_s' + w_s' \delta w_s', \quad (140)$$

$$\delta \varepsilon_{ts}^t = \frac{\delta u_s}{r}, \quad (141)$$

jsou variace přetvoření na úrovni střednicové plochy. Výraz pro první variaci vnitřní deformační energie je analogicky k předchozím dvěma modelům

$$\delta E_{\text{int}} = 2\pi \int_0^a \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_r^t \delta \varepsilon_r^t + \sigma_t^t \delta \varepsilon_t^t) dz r dr. \quad (142)$$

Provedme nyní opět analyticky integraci přes tloušťku membrány, platí

$$\begin{aligned} \int_H \sigma_r^t \delta \varepsilon_r^t + \sigma_t^t \delta \varepsilon_t^t dz &= \int_H \sigma_r^t (\delta \varepsilon_{rs}^t - z \delta w_s'') + \sigma_t^t \left(\delta \varepsilon_{ts}^t - \frac{z}{r} \delta w_s' \right) dz = \\ &= \int_H \sigma_r^t dz \delta \varepsilon_{rs}^t - \int_H z \sigma_r^t dz \delta w_s'' + \int_H \sigma_t^t dz \delta \varepsilon_{ts}^t - \int_H z \sigma_t^t dz \frac{\delta w_s'}{r} = \\ &= N_r \delta \varepsilon_{rs}^t - M_r \delta w_s'' + N_t \delta \varepsilon_{ts}^t - M_t \frac{\delta w_s'}{r}, \end{aligned} \quad (143)$$

kde pro měrné normálové síly a ohybové momenty platí

$$N_r = \int_H \sigma_r^t dz = h \sigma_{rs}^t, \quad (144)$$

$$N_t = \int_H \sigma_t^t dz = h \sigma_{ts}^t, \quad (145)$$

$$M_r = \int_H z \sigma_r^t dz = \int_H \left(\sigma_{rs}^t z - \frac{Ez^2}{1-\nu^2} \left(w_s'' + \nu \frac{w_s'}{r} \right) \right) dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(w_s'' + \nu \frac{w_s'}{r} \right), \quad (146)$$

$$M_t = \int_H z \sigma_t^t dz = \int_H \left(\sigma_{ts}^t z - \frac{Ez^2}{1-\nu^2} \left(\nu w_s'' + \frac{w_s'}{r} \right) \right) dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\nu w_s'' + \frac{w_s'}{r} \right), \quad (147)$$

což přesně odpovídá vztahům (121), (122), (124) a (125). Po dosazení (143), (140) a (141) do (142) dostáváme pro variaci vnitřní deformační energie

$$\delta E_{\text{int}} = 2\pi \int_0^a N_r r (\delta u'_s + w'_s \delta w'_s) - M_r r \delta w''_s + N_t \delta u_s - M_t \delta w'_s dr. \quad (148)$$

Pro energii vnějších sil je v Timoshenkově modelu taktéž užito předpokladů $u_s \ll r$ a $u'_s \ll 1$, a tedy platí

$$E_{\text{ext}} = -2\pi \int_0^a pr w_s dr \quad (149)$$

a pro její první variaci

$$\delta E_{\text{ext}} = -2\pi \int_0^a pr \delta w_s dr. \quad (150)$$

Postupem identickým s modely v předchozích kapitolách můžeme nyní opět odvodit následující silnou formu rovnic rovnováhy

$$-(N_r r)' + N_t = 0, \quad (151)$$

$$-(r N_r w'_s)' - (M_r r)'' + M_t' - pr = 0. \quad (152)$$

Rovnice (151) přímo odpovídá Timoshenkově rovnici rovnováhy (119) a rovnici (152) dostaneme dosazením (123) do (120) a derivací výsledného vztahu podle radiální souřadnice r .

V případě, že chceme pro tento model uvažovat s možností počátečního předpětí, bylo by chybné toto předpětí vnášet předepsáním okrajového posuvu u_a tak, jako v případě předchozích dvou modelů. Tímto bychom obecně porušili předpoklady, za kterých je model odvozen, zejména $u_s \ll r$ a $u'_s \ll 1$. Jeden ze způsobů, jakým lze počáteční předpětí do modelu zavést, je považovat stav po vnesení předpětí za referenční a vztahovat deformační proměnné (posuvy u_s a w_s) k tomuto stavu. V tomto případě zůstávají kinematické vztahy a rovnice rovnováhy zapsané pomocí měrných normálových sil a ohybových momentů stále platné a jediná část odvození, která musí být změněna, jsou materiálové (konstitutivní) vztahy, kde musí být přidán konstantní člen reprezentující počáteční předpětí. Vztahy (136) a (137) jsou tedy nahrazeny

$$\sigma_{rs}^t = \bar{\sigma} + \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{rs}^t + \nu \varepsilon_{ts}^t), \quad (153)$$

$$\sigma_{ts}^t = \bar{\sigma} + \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{ts}^t + \nu \varepsilon_{rs}^t), \quad (154)$$

kde

$$\bar{\sigma} = \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\varepsilon} + \nu \bar{\varepsilon}) = \frac{E}{1-\nu} \bar{\varepsilon} \quad (155)$$

je počáteční předpětí, a $\bar{\varepsilon}$ je počáteční přetvoření. Ve výrazech pro měrné normálové síly se tento člen projeví

$$N_r = h\bar{\sigma} + \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{rs}^t + \nu \varepsilon_{ts}^t) = \frac{Eh}{1-\nu} \bar{\varepsilon} + \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{rs}^t + \nu \varepsilon_{ts}^t), \quad (156)$$

$$N_t = \frac{Eh}{1-\nu} \bar{\varepsilon} + \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{ts}^t + \nu \varepsilon_{rs}^t), \quad (157)$$

ale výrazy pro měrné ohybové momenty zůstanou nezměněny, protože předpětí je konstantní po tloušťce membrány. Po dosazení měrných normálových sil upravených pro počáteční předpětí, (156) a (157), do první rovnice rovnováhy (151), dostaneme rovnici identickou s první Timoshenkovou rovnicí (117), neboť členy vyjadřující předpětí se navzájem odečtou. Po dosazení (156) a (157) do druhé rovnice rovnováhy (152), dostaneme rovnici, která svou strukturou odpovídá Timoshenkově druhé rovnici (118), ale obsahuje navíc člen $\frac{12}{h^2} w_s' (1+\nu) \bar{\varepsilon}$ obsahující informaci o předpětí

$$w_s''' + \frac{1}{r} w_s'' - \frac{1}{r^2} w_s' = \frac{12}{h^2} w_s' \left[(1+\nu) \bar{\varepsilon} + u_s' + \nu \frac{u_s}{r} + \frac{1}{2} w_s'^2 \right] + \frac{pr}{2D}. \quad (158)$$

4.1.3 Zpřesněný výraz pro energii vnějších sil

Doposud jsme uvažovali vztah pro energii vnějších sil vyjádřený, jako součin zatěžovacího tlaku p a objemu V , ohraničeného deformovanou střednicovou plochou membrány. Přesnějšího vztahu dosáhneme, použijeme-li objem V^* ohraničený spodní deformovanou plochou membrány, která se od střednicové plochy mírně liší (viz Obr. 39 a Obr. 40), pro zpřesněnou energii vnějších sil platí

$$\begin{aligned} E_{\text{ext}}^* &= -pV^* = \\ &= -2\pi p \int_0^a \left(w_s - \frac{1}{2} h \cos \varphi \right) \left(r + u_s + \frac{1}{2} h \sin \varphi \right) \left(1 + u_s' + \frac{1}{2} h \varphi' \cos \varphi + \frac{1}{2} h' \sin \varphi \right) dr \end{aligned} \quad (159)$$

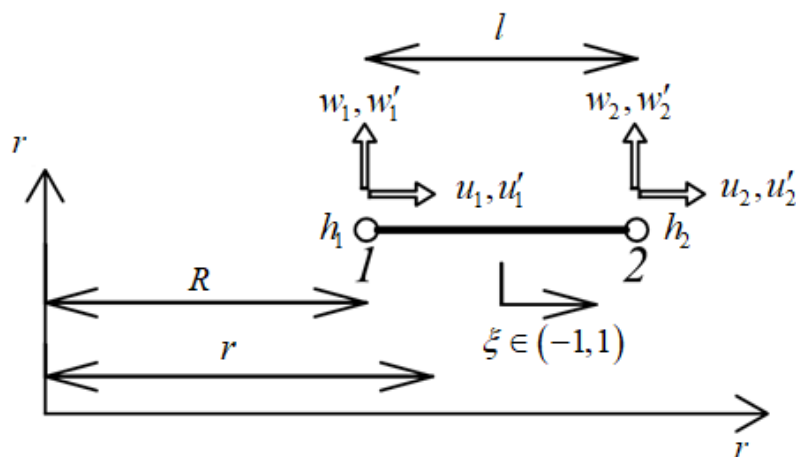
a pro její první variaci

$$\begin{aligned}
\delta E_{\text{ext}}^* = & -2\pi p \int_0^a \left(\delta w_s + \frac{1}{2} h \sin \varphi \delta \varphi \right) \left(r + u_s + \frac{1}{2} h \sin \varphi \right) \left(1 + u'_s + \frac{1}{2} h \varphi' \cos \varphi + \frac{1}{2} h' \sin \varphi \right) dr - \\
& -2\pi \int_0^a \left(w_s - \frac{1}{2} h \cos \varphi \right) \left(\delta u_s + \frac{1}{2} h \cos \varphi \delta \varphi \right) \left(1 + u'_s + \frac{1}{2} h \varphi' \cos \varphi + \frac{1}{2} h' \sin \varphi \right) dr - \\
& -2\pi \int_0^a \left(w_s - \frac{1}{2} h \cos \varphi \right) \left(r + u_s + \frac{1}{2} h \sin \varphi \right) \left(\delta u'_s + \frac{1}{2} h \delta \varphi' \cos \varphi - \frac{1}{2} h \varphi' \sin \varphi \delta \varphi + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} h' \cos \varphi \delta \varphi \right) dr.
\end{aligned} \tag{160}$$

Zpřesněnou pravou stranu diferenciálních rovnic rovnováhy (82), (83) a (115), (116) pro Saint Venant-Kirchhoffův a Biotův model bychom obdrželi analogicky s postupem v předchozích kapitolách, ale pro implementaci MKP (metody konečných prvků) v následující kapitole si vystačíme s tvarem (160).

4.1.4 Řešení metodou konečných prvků

Vzhledem k povaze diferenciálních rovnic odvozených pro mechanické modely v kapitolách 4.1.2.1, 4.1.2.2 a 4.1.2.3 nelze obecně tyto rovnice řešit analyticky a je třeba přistoupit k řešení pomocí numerických metod, mezi které patří například metoda konečných prvků (MKP). Za tímto účelem odvodíme pro každý z modelů konečný prvek, jehož základní parametry jsou znázorněny na Obr. 41, kde l je délka prvku, ξ je lokální souřadnice daného prvku, R je vodorovná vzdálenost počátečního uzlu prvku od počátku souřadnicového systému, r je vodorovná vzdálenost libovolného bodu prvku od počátku souřadnicové soustavy v závislosti na ξ . $w_1, w'_1, u_1, u'_1, w_2, w'_2, u_2, u'_2$ jsou neznámé posuvy a derivace posuvů v uzlech prvku a h_1, h_2 jsou tloušťky membrány v jednotlivých uzlech prvku.



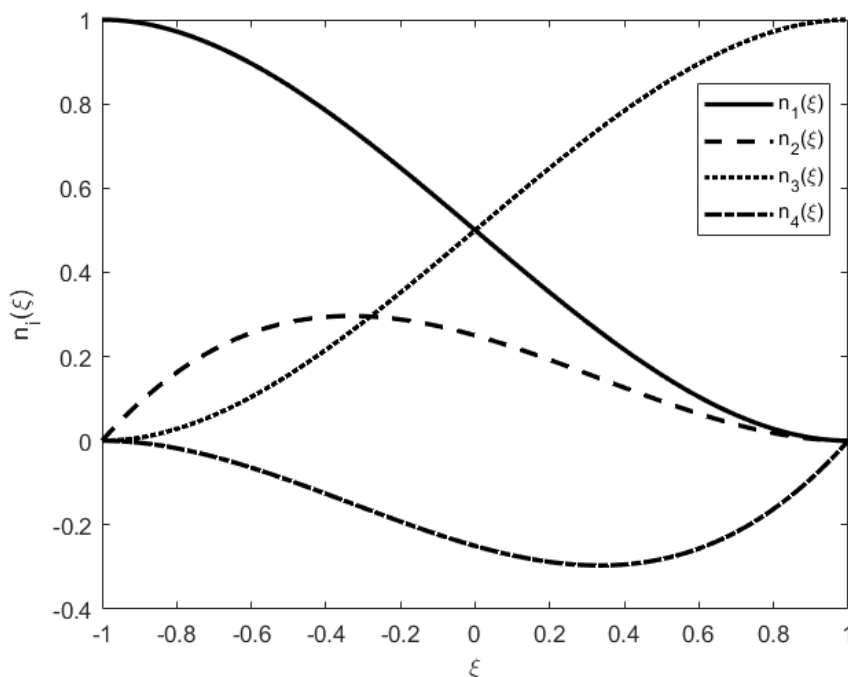
Obr. 41 Konečný prvek pro osově souměrnou membránu s ohybovou tuhostí

Dle Obr. 41 můžeme vztah mezi lokální souřadnicí ξ a globální souřadnicí r zapsat jako

$$\xi = 2\left(\frac{r-R}{l} - \frac{1}{2}\right) \rightarrow r = l\left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2}\right) + R, \quad \frac{d\xi}{dr} = \frac{2}{l} \rightarrow dr = \frac{l}{2}d\xi. \quad (161)$$

Jelikož se ve funkciónálech pro celkovou potenciální energii výše zmíněných mechanických modelů vyskytují funkce u_s a w_s ve druhé derivaci, je třeba zachovat spojitost jejich prvních derivací, což se řeší kubickými bázovými funkcemi (viz Obr. 42), které můžeme pomocí lokální souřadnice ξ vyjádřit jako

$$n_1 = \frac{\xi^3}{4} - \frac{3\xi}{4} + \frac{1}{2}, \quad n_2 = \frac{\xi^3}{4} - \frac{\xi^2}{4} - \frac{\xi}{4} + \frac{1}{4}, \quad n_3 = -\frac{\xi^3}{4} + \frac{3\xi}{4} + \frac{1}{2}, \quad n_4 = \frac{\xi^3}{4} + \frac{\xi^2}{4} - \frac{\xi}{4} - \frac{1}{4}. \quad (162)$$



Obr. 42 Kubické bázové funkce

Zapišme nyní neznámé posuvy v uzlech prvku jako vektor \mathbf{d} a první variace těchto posuvů jako vektor $\delta\mathbf{d}$, platí

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1' \\ w_1 \\ w_1' \\ u_2 \\ u_2' \\ w_2 \\ w_2' \end{pmatrix}, \quad \delta\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_1' \\ \delta w_1 \\ \delta w_1' \\ \delta u_2 \\ \delta u_2' \\ \delta w_2 \\ \delta w_2' \end{pmatrix}. \quad (163)$$

Nyní můžeme vodorovný posuv u_s vyjádřit jako

$$u_s = \begin{pmatrix} n_1 & \frac{l}{2}n_2 & 0 & 0 & n_3 & \frac{l}{2}n_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{d} = \mathbf{n}_1 \mathbf{d} \quad (164)$$

a svislý posuv w_s jako

$$w_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & n_1 & \frac{l}{2}n_2 & 0 & 0 & n_3 & \frac{l}{2}n_4 \end{pmatrix} \mathbf{d} = \mathbf{n}_2 \mathbf{d}, \quad (165)$$

kde

$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} n_1 & \frac{l}{2}n_2 & 0 & 0 & n_3 & \frac{l}{2}n_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (166)$$

$$\mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & n_1 & \frac{l}{2}n_2 & 0 & 0 & n_3 & \frac{l}{2}n_4 \end{pmatrix}. \quad (167)$$

Pro variace posuvů platí analogicky

$$\delta u_s = \mathbf{n}_1 \delta \mathbf{d}, \quad \delta w_s = \mathbf{n}_2 \delta \mathbf{d}. \quad (168)$$

Pro první derivace posuvů a jejich variací platí

$$u'_s = \mathbf{b}_1 \mathbf{d}, \quad w'_s = \mathbf{b}_2 \mathbf{d}, \quad \delta u'_s = \mathbf{b}_1 \delta \mathbf{d}, \quad \delta w'_s = \mathbf{b}_2 \delta \mathbf{d}, \quad (169)$$

kde

$$\mathbf{b}_1 = \frac{d\mathbf{n}_1}{dr} = \frac{2}{l} \begin{pmatrix} \frac{3\xi^2}{4} - \frac{3}{4} & \frac{l}{2} \left(\frac{3\xi^2}{4} - \frac{\xi}{2} - \frac{1}{4} \right) & 0 & 0 & -\frac{3\xi^2}{4} + \frac{3}{4} & \frac{l}{2} \left(\frac{3\xi^2}{4} + \frac{\xi}{2} - \frac{1}{4} \right) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (170)$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{d\mathbf{n}_2}{dr} = \frac{2}{l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3\xi^2}{4} - \frac{3}{4} & \frac{l}{2} \left(\frac{3\xi^2}{4} - \frac{\xi}{2} - \frac{1}{4} \right) & 0 & 0 & -\frac{3\xi^2}{4} + \frac{3}{4} & \frac{l}{2} \left(\frac{3\xi^2}{4} + \frac{\xi}{2} - \frac{1}{4} \right) \end{pmatrix}. \quad (171)$$

A pro druhé derivace posuvů a jejich variací platí

$$u''_s = \mathbf{c}_1 \mathbf{d}, \quad w''_s = \mathbf{c}_2 \mathbf{d}, \quad \delta u''_s = \mathbf{c}_1 \delta \mathbf{d}, \quad \delta w''_s = \mathbf{c}_2 \delta \mathbf{d}, \quad (172)$$

kde

$$\mathbf{c}_1 = \frac{d\mathbf{b}_1}{dr} = \frac{4}{l^2} \begin{pmatrix} \frac{3\xi}{2} & \frac{l}{2} \left(\frac{3\xi}{2} - \frac{1}{2} \right) & 0 & 0 & -\frac{3\xi}{2} & \frac{l}{2} \left(\frac{3\xi}{2} + \frac{1}{2} \right) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (173)$$

$$\mathbf{c}_2 = \frac{d\mathbf{b}_2}{dr} = \frac{4}{l^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3\xi}{2} & \frac{l}{2} \left(\frac{3\xi}{2} - \frac{1}{2} \right) & 0 & 0 & -\frac{3\xi}{2} & \frac{l}{2} \left(\frac{3\xi}{2} + \frac{1}{2} \right) \end{pmatrix}. \quad (174)$$

4.1.4.1 Příspěvek k levé straně rovnic

4.1.4.1.1 Saint Venant-Kirchhoffův model

V této části si představíme sestavení příspěvku od jednoho prvku k celkové levé straně nelineárních rovnic rovnováhy pro konečný prvek založený na výše popsaném modelu využívajícím Saint Venant-Kirchhoffův materiálový model. Vztah (77) vyjadřuje variaci vnitřní deformační energie pro kontinuum celé membrány, neboť zde integrujeme přes celý interval $\langle 0, a \rangle$. Přepíšeme-li tento vztah do maticového zápisu a budeme integrovat pouze přes interval jednoho prvku, dostaneme lokální příspěvek tohoto prvku, δE_{int}^L , k celkové variaci vnitřní deformační energie. Platí

$$\delta E_{\text{int}}^L = \pi l \int_{-1}^1 \left(h \boldsymbol{\varepsilon}^{G(0)\text{T}} \mathbf{D}^T \mathbf{E}^{G(0)} + \frac{h^3}{12} \boldsymbol{\varepsilon}^{G(1)\text{T}} \mathbf{D}^T \mathbf{E}^{G(1)} + \frac{h^5}{180} \boldsymbol{\varepsilon}^{G(2)\text{T}} \mathbf{D}^T \mathbf{E}^{G(2)} \right) r d\xi \delta \mathbf{d} = \mathbf{f}_{\text{int},L}^T \delta \mathbf{d}, \quad (175)$$

kde $\mathbf{f}_{\text{int},L}$ je sloupcový vektor ekvivalentních vnitřních uzlových sil s rozměrem 8×1 , který je příspěvkem k celkové levé straně rovnic rovnováhy od daného prvku. Dále platí

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{G(0)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_r^{G(0)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_t^{G(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\lambda_{rs}^2 - 1) + \frac{h^2}{24} \varphi'^2 \\ \frac{1}{2}(\lambda_{ts}^2 - 1) + \frac{h^2}{24} \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \end{pmatrix}, \quad (176)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{G(1)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_r^{G(1)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_t^{G(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_{rs} \varphi' \\ -\frac{\lambda_{ts} \sin \varphi}{r} \end{pmatrix}, \quad (177)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{G(2)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_r^{G(2)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_t^{G(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \varphi'^2 \\ \frac{\sin^2 \varphi}{2r^2} \end{pmatrix}. \quad (178)$$

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{pmatrix}, \quad (179)$$

$$\mathbf{E}^{G(0)} = \begin{pmatrix} \lambda_{rs} \boldsymbol{\Lambda}_{rs} + \frac{h^2}{12} \varphi' \tilde{\boldsymbol{\Phi}} \\ \lambda_{ts} \boldsymbol{\Lambda}_{ts} + \frac{h^2}{12r^2} \sin \varphi \cos \varphi \boldsymbol{\Phi} \end{pmatrix}, \quad (180)$$

$$\mathbf{E}^{G(1)} = \begin{pmatrix} -\varphi' \Lambda_{rs} - \lambda_{rs} \tilde{\Phi} \\ -\frac{\sin \varphi \Lambda_{ts} + \lambda_{ts} \cos \varphi \Phi}{r} \end{pmatrix}, \quad (181)$$

$$\mathbf{E}^{G(2)} = \begin{pmatrix} \varphi' \tilde{\Phi} \\ \frac{\sin \varphi \cos \varphi \Phi}{r^2} \end{pmatrix}, \quad (182)$$

$$\Lambda_{rs} = (\cos \varphi \mathbf{b}_1 + \sin \varphi \mathbf{b}_2), \quad (183)$$

$$\Lambda_{ts} = \frac{\mathbf{n}_1}{r}, \quad (184)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} = & \left(\frac{2 \sin \varphi \cos \varphi u_s'' + 2 \sin^2 \varphi w_s'' - w_s''}{\lambda_{rs}^2} \right) \mathbf{b}_1 + \\ & + \left(\frac{u_s'' - 2 \cos^2 \varphi u_s'' - 2 \sin \varphi \cos \varphi w_s''}{\lambda_{rs}^2} \right) \mathbf{b}_2 - \frac{\sin \varphi}{\lambda_{rs}} \mathbf{c}_1 + \frac{\cos \varphi}{\lambda_{rs}} \mathbf{c}_2, \end{aligned} \quad (185)$$

$$\Phi = \left(\frac{\cos \varphi}{\lambda_{rs}} \mathbf{b}_2 - \frac{\sin \varphi}{\lambda_{rs}} \mathbf{b}_1 \right). \quad (186)$$

4.1.4.1.2 Biotův model

V této části si představíme sestavení příspěvku od jednoho prvku k celkové levé straně nelineárních rovnic rovnováhy pro konečný prvek založený na výše popsaném modelu využívajícím Biotův materiálový model. Vztah (113) vyjadřuje variaci vnitřní deformační energie pro kontinuum celé membrány, neboť zde integrujeme přes celý interval $\langle 0, a \rangle$. Přepíšeme-li tento vztah do maticového zápisu a budeme integrovat pouze přes interval jednoho prvku, dostaneme lokální příspěvek tohoto prvku, δE_{int}^L , k celkové variaci vnitřní deformační energie. Platí

$$\delta E_{\text{int}}^L = \pi l \int_{-1}^1 \left(h \boldsymbol{\varepsilon}^{B(0)T} \mathbf{D}^T \mathbf{E}^{B(0)} + \frac{h^3}{12} \boldsymbol{\varepsilon}^{B(1)T} \mathbf{D}^T \mathbf{E}^{B(1)} \right) r d\xi \delta \mathbf{d} = \mathbf{f}_{\text{int},L}^T \delta \mathbf{d}, \quad (187)$$

kde $\mathbf{f}_{\text{int},L}$ je sloupcový vektor ekvivalentních vnitřních uzlových sil s rozměrem 8×1 , který je příspěvkem k celkové levé straně rovnic rovnováhy od daného prvku. Dále platí

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{B(0)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_r^{B(0)} \\ \varepsilon_t^{B(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{rs} - 1 \\ \lambda_{ts} - 1 \end{pmatrix}, \quad (188)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{B(1)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_r^{B(1)} \\ \varepsilon_t^{B(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi' \\ -\frac{\sin \varphi}{r} \end{pmatrix}, \quad (189)$$

$$\mathbf{E}^{B(0)} = \begin{pmatrix} \Lambda_{rs} \\ \Lambda_{ts} \end{pmatrix}, \quad (190)$$

$$\mathbf{E}^{B(1)} = \begin{pmatrix} -\tilde{\Phi} \\ -\frac{\cos \varphi \Phi}{r} \end{pmatrix}. \quad (191)$$

4.1.4.1.3 Timoshenkův zjednodušený model

V této části si představíme sestavení příspěvku od jednoho prvku k celkové levé straně nelineárních rovnic rovnováhy pro konečný prvek založený na výše popsaném modelu využívajícím Timoshenkův zjednodušený model. Vztah (148) vyjadřuje variaci vnitřní deformační energie pro kontinuum celé membrány, neboť zde integrujeme přes celý interval $\langle 0, a \rangle$. Přepíšeme-li tento vztah do maticového zápisu a budeme integrovat pouze přes interval jednoho prvku, dostaneme lokální příspěvek tohoto prvku, δE_{int}^L , k celkové variaci vnitřní deformační energie. Platí

$$\delta E_{\text{int}}^L = \pi l \int_{-1}^1 \left(\mathbf{N}^T \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{M}^T \mathbf{E}^{(1)} \right) r \, d\xi \, \delta \mathbf{d} = \mathbf{f}_{\text{int},L}^T \delta \mathbf{d}, \quad (192)$$

kde $\mathbf{f}_{\text{int},L}$ je sloupcový vektor ekvivalentních vnitřních uzlových sil s rozměrem 8×1 , který je příspěvkem k celkové levé straně rovnic rovnováhy od daného prvku. Dále platí

$$\mathbf{N} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}'_s, \quad (193)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}'_s = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rs}' + \bar{\varepsilon} \\ \varepsilon_{ts}' + \bar{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad (194)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_r \\ M_t \end{pmatrix}, \quad (195)$$

$$\mathbf{E}^{t(0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 + w'_s \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{n}_1 / r \end{pmatrix}, \quad (196)$$

$$\mathbf{E}^{t(1)} = \begin{pmatrix} -\mathbf{c}_2 \\ -\frac{\mathbf{b}_2}{r} \end{pmatrix}. \quad (197)$$

4.1.4.2 Příspěvek k pravé straně rovnic

4.1.4.2.1 Základní výraz pro energii vnějších sil

V této části si představíme sestavení příspěvku od jednoho prvku k celkové pravé straně nelineárních rovnic rovnováhy pro konečný prvek založený na výše popsáných nezjednodušených modelech (Saint Venant-Kirchhoffův a Biotův). Budeme zde předpokládat variantu, kdy zatěžovací tlak působí na střednicovou plochu, a tedy budeme pro variaci energie vnějších sil vycházet ze vztahu (41), který platí pro kontinuum celé membrány, neboť zde integrujeme přes celý interval $\langle 0, a \rangle$. Přepíšeme-li tento vztah do maticového zápisu a budeme integrovat pouze přes interval jednoho prvku, dostaneme lokální příspěvek tohoto prvku, δE_{ext}^L , k celkové variaci energie vnějších sil. Platí

$$\delta E_{\text{ext}}^L = -\pi l p \int_{-1}^1 \left[(r + u_s) (1 + u'_s) \mathbf{n}_2 + w_s (1 + u'_s) \mathbf{n}_1 + w_s (r + u_s) \mathbf{b}_1 \right] d\xi \delta \mathbf{d} = -\mathbf{f}_{\text{ext},L}^T \delta \mathbf{d}, \quad (198)$$

kde $\mathbf{f}_{\text{ext},L}$ je sloupcový vektor ekvivalentních vnějších uzlových sil s rozměrem 8×1 , který je příspěvkem k celkové pravé straně rovnic rovnováhy od daného prvku.

4.1.4.2.2 Zpřesněný výraz pro energii vnějších sil

V této části si představíme sestavení příspěvku od jednoho prvku k celkové pravé straně nelineárních rovnic rovnováhy pro konečný prvek založený na výše popsáných nezjednodušených modelech (Saint Venant-Kirchhoffův a Biotův). Budeme zde předpokládat zpřesněnou variantu, kdy zatěžovací tlak působí na spodní (vnitřní) plochu membrány, a tedy budeme pro variaci energie vnějších sil vycházet ze vztahu (160) odvozeného v kapitole 4.1.3, který platí pro kontinuum celé membrány, neboť zde integrujeme přes celý interval $\langle 0, a \rangle$. Přepíšeme-li tento vztah do maticového zápisu a budeme integrovat pouze přes interval jednoho prvku, dostaneme lokální příspěvek tohoto prvku, $\delta E_{\text{ext}}^{*L}$, k celkové variaci energie vnějších sil. Platí

$$\begin{aligned}
\delta E_{\text{ext}}^{*L} = & -\pi l p \int_{-1}^1 \left(\mathbf{n}_2 + \frac{1}{2} h \sin \varphi \Phi \right) \left(r + u_s + \frac{1}{2} h \sin \varphi \right) \left(1 + u'_s + \frac{1}{2} h \varphi' \cos \varphi + \frac{1}{2} h' \sin \varphi \right) \delta \mathbf{d} d\xi - \\
& -\pi l p \int_{-1}^1 \left(w_s - \frac{1}{2} h \cos \varphi \right) \left(\mathbf{n}_1 + \frac{1}{2} h \cos \varphi \Phi \right) \left(1 + u'_s + \frac{1}{2} h \varphi' \cos \varphi + \frac{1}{2} h' \sin \varphi \right) \delta \mathbf{d} d\xi - \\
& -\pi l p \int_{-1}^1 \left(w_s - \frac{1}{2} h \cos \varphi \right) \left(r + u_s + \frac{1}{2} h \sin \varphi \right) \left(\mathbf{b}_1 + \frac{1}{2} h \cos \varphi \tilde{\Phi} - \frac{1}{2} h \varphi' \sin \varphi \Phi + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} h' \cos \varphi \Phi \right) d\xi \delta \mathbf{d} = -\mathbf{f}_{\text{ext},L}^T \delta \mathbf{d},
\end{aligned} \tag{199}$$

kde $\mathbf{f}_{\text{ext},L}$ je sloupcový vektor ekvivalentních vnějších uzlových sil s rozměrem 8×1 , který je příspěvkem k celkové pravé straně rovnic rovnováhy od daného prvku.

4.1.4.2.3 Timoshenkův zjednodušený model

V této části si představíme sestavení příspěvku od jednoho prvku k celkové pravé straně nelineárních rovnic rovnováhy pro konečný prvek založený na výše popsaném zjednodušeném Timoshenkově modelu. Pro variaci energie vnějších sil budeme tedy vycházet ze vztahu (150), který platí pro kontinuum celé membrány, neboť zde integrujeme přes celý interval $\langle 0, a \rangle$. Přepíšeme-li tento vztah do maticového zápisu a budeme integrovat pouze přes interval jednoho prvku, dostaneme lokální příspěvek tohoto prvku, δE_{ext}^L , k celkové variaci energie vnějších sil. Platí

$$\delta E_{\text{ext}}^L = -\pi l p \int_{-1}^1 r \mathbf{n}_2 d\xi \delta \mathbf{d} = -\mathbf{f}_{\text{ext},L}^T \delta \mathbf{d}, \tag{200}$$

kde $\mathbf{f}_{\text{ext},L}$ je sloupcový vektor ekvivalentních vnějších uzlových sil s rozměrem 8×1 , který je příspěvkem k celkové pravé straně rovnic rovnováhy od daného prvku.

4.1.4.3 Řešení metodou Newton-Raphson

V této kapitole si pouze velmi stručně představíme postup řešení výsledné soustavy nelineárních rovnic pro celou membránu, jejíž levou, resp. pravou stranu, $\mathbf{lhs}(\mathbf{x})$, resp. $\mathbf{rhs}(\mathbf{x})$, dostaneme obvyklou lokalizací příspěvků od jednotlivých konečných prvků, $\mathbf{f}_{\text{int},L}$ a $\mathbf{f}_{\text{ext},L}$ [60]. Globální vektor neznámých deformačních proměnných zde značíme \mathbf{x} a platí pro něj

$$\mathbf{x}^T = (u'_0 \quad w_0 \quad u_1 \quad u'_1 \quad w_1 \quad w'_1 \quad \cdots \quad u_{N-1} \quad u'_{N-1} \quad w_{N-1} \quad w'_{N-1} \quad u'_N), \tag{201}$$

kde N je počet konečných prvků.

Zde je dobré poznamenat, že při sestavování rovnic je třeba provádět integraci po délce konečného prvku, kterou v tomto případě nelze provést analyticky a nejčastěji

se provádí pomocí Gaussovy numerické integrace [60]. Pro výslednou soustavu rovnic platí

$$\mathbf{lhs}(\mathbf{x}) = \mathbf{rhs}(\mathbf{x}). \quad (202)$$

Definujme nyní funkci $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ jako

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{lhs}(\mathbf{x}) - \mathbf{rhs}(\mathbf{x}). \quad (203)$$

Soustavu rovnic (202) můžeme poté přepsat do tvaru $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Řešení této soustavy lze nalézt například Newton-Raphsonovou iterační metodou [60], platí

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} - [\mathbf{J}^{(i)}]^{-1} \mathbf{f}^{(i)}, \quad (204)$$

kde $\mathbf{x}^{(i+1)}$ je řešení následující iterace, $\mathbf{x}^{(i)}$ je řešení předchozí iterace, $\mathbf{f}^{(i)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(i)})$ je vektor reziduálních hodnot a $\mathbf{J}^{(i)}$ je Jacobiho matice definovaná jako matice prvních derivací funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ podle vektoru neznámých \mathbf{x} , tedy platí

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (205)$$

Obdobně jako globální soustavu rovnic sestavujeme z lokálních příspěvků $\mathbf{f}_{\text{int},L}$ a $\mathbf{f}_{\text{ext},L}$ od jednotlivých konečných prvků, lze i globální Jacobiho matici, $\mathbf{J}(\mathbf{x})$, sestavit z lokálních Jacobiho matic, které lze (v integrálním tvaru) analyticky vyjádřit ze vztahů pro lokální příspěvky $\mathbf{f}_{\text{int},L}$ a $\mathbf{f}_{\text{ext},L}$, prezentovaných v předchozích kapitolách. Analytické vyjádření lokálních Jacobiho matic je však zejména v případě St. Venant-Kirchhoffova a Biotova modelu poněkud zdlouhavé a v této práci nebude prezentováno, nicméně bylo použito při implementaci těchto modelů v prostředí MATLAB [46]. Další možností je počítat Jacobiho matici numericky například pomocí konečných diferencí.

Na začátku výpočtu volíme nejčastěji nulový vektor neznámých $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ a následně iterujeme, dokud s požadovanou přesností neplatí $\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(i+1)}) \approx \mathbf{0}$.

4.1.5 Konzistentní porovnání modelů

Abychom mohli konzistentně porovnávat výsledky všech tří prezentovaných modelů pro osově souměrnou membránu s ohybovou tuhostí, a to i v případě počátečního předpětí, je nutné správně definovat referenční stav, ve kterém všechna řešení budou fyzikálně stejná pro všechny porovnávané modely. Za tento stav si zvolme stav po vnesení počátečního předpětí. Vstupní parametry výpočtu, které budou společné pro všechny modely, jsou: tloušťka membrány, \bar{h} , průměr membrány, \bar{a} , měrná předpínací normálová síla (vztažená na jednotku délky obvodu membrány v referenčním stavu), \bar{n} , a počáteční tuhost \bar{k} definovaná jako derivace měrné normálové síly podle okrajového radiálního posuvu u_a . Dále budeme předpokládat, že hodnota Poissonova čísla, ν , bude pro všechny modely stejná.

Následující vztahy jsou platné pro všechny modely

$$\bar{\sigma} = \frac{E}{1-\nu} \bar{\varepsilon}, \quad (206)$$

$$\bar{\varepsilon}_z = -\frac{2\nu}{1-\nu} \bar{\varepsilon}, \quad (207)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{a_0 + u_a}{a_0} = \frac{\bar{a}}{a_0}, \quad (208)$$

$$\bar{n} = h_0 \bar{\lambda}_z \sigma^C, \quad (209)$$

kde $\bar{\varepsilon}$, resp. $\bar{\sigma}$ je počáteční rovinné přetvoření, resp. počáteční rovinné předpětí, $\bar{\varepsilon}_z$ je příčné přetvoření způsobené počátečním předpětím, h_0 a a_0 jsou tloušťka membrány a její poloměr v nepředepjatém stavu, u_a je radiální posuv na okraji membrány měřený taktéž od nepředepjatého stavu, $\bar{\lambda}$ je počáteční protažení, \bar{a} je poloměr membrány v předepjatém stavu, σ^C je Cauchyho napětí, $\bar{\lambda}_z$ je příčné protažení způsobené počátečním předpětím a \bar{n} je měrná předpínací síla odpovídající počátečnímu předpětí. Součin $h_0 \bar{\lambda}_z$ odpovídá aktuální tloušťce membrány v referenčním stavu (po předpětí) \bar{h} .

Vztah mezi protažením a přetvořením se pro jednotlivé modely liší a také napětí spočtené z lineárního elastického zákona musí být interpretováno odlišně.

4.1.5.1 Saint Venant-Kirchhoffův model

Použijeme-li Green-Lagrangeovo přetvoření a jeho energeticky sdužené 2. Piola-Kirchhoffovo napětí, platí

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\bar{\lambda}^2 - 1), \quad (210)$$

$$\bar{\varepsilon}_z = \frac{1}{2}(\bar{\lambda}_z^2 - 1), \quad (211)$$

$$\sigma^C = \frac{1}{J} \bar{\lambda}^2 \bar{\sigma}^{2PK} = \frac{1}{\bar{\lambda}^2 \bar{\lambda}_z} \bar{\lambda}^2 \bar{\sigma}^{2PK} = \frac{1}{\bar{\lambda}_z} \bar{\sigma}^{2PK}, \quad (212)$$

kde $\bar{\sigma}^{2PK}$ značí, že předpínací napětí je 2. Piola-Kirchhoffovo.

Kombinací s obecně platnými vztahy (206)-(209) dostaneme

$$\bar{h} = h_0 \bar{\lambda}_z = h_0 \sqrt{1 + 2\bar{\varepsilon}_z} = h_0 \sqrt{1 - \frac{4\nu}{1-\nu} \bar{\varepsilon}} = h_0 \sqrt{1 - \frac{2\nu}{1-\nu} (\bar{\lambda}^2 - 1)} = h_0 \sqrt{1 - \frac{2\nu}{1-\nu} \left(\frac{2u_a}{a_0} + \frac{u_a^2}{a_0^2} \right)}, \quad (213)$$

$$\bar{n} = \bar{h} \sigma^C = h_0 \bar{\lambda}_z \sigma^C = h_0 \bar{\sigma}^{2PK} = h_0 \frac{E}{1-\nu} \bar{\varepsilon} = \frac{E h_0}{1-\nu} \left(\frac{u_a}{a_0} + \frac{u_a^2}{2a_0^2} \right), \quad (214)$$

$$\bar{k} = \frac{d\bar{n}}{du_a} = \frac{E h_0}{1-\nu} \left(\frac{1}{a_0} + \frac{u_a}{a_0^2} \right). \quad (215)$$

Vyjádríme-li u_a , a_0 , h_0 a E pomocí \bar{a} , \bar{n} , \bar{k} , \bar{h} ze vztahů (213)-(215), dostaneme

$$u_a = \bar{a} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\bar{n}}{\bar{a}\bar{k}}} \right), \quad (216)$$

$$a_0 = \bar{a} \sqrt{1 - \frac{2\bar{n}}{\bar{a}\bar{k}}}, \quad (217)$$

$$h_0 = \frac{\bar{h}}{\sqrt{1 - \frac{4\nu\bar{n}}{(1-\nu)(\bar{a}\bar{k} - 2\bar{n})}}}, \quad (218)$$

$$E = \frac{1-\nu}{\bar{h}} (\bar{a}\bar{k} - 2\bar{n}) \sqrt{1 - \frac{4\nu\bar{n}}{(1-\nu)(\bar{a}\bar{k} - 2\bar{n})}}, \quad (219)$$

což jsou skutečné parametry, které musíme použít v případě tohoto modelu.

4.1.5.2 Biotův model

Použijeme-li Biotovo přetvoření a jeho energeticky sdružené 1. Piola-Kirchhoffovo napětí, platí

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\lambda} - 1, \quad (220)$$

$$\bar{\varepsilon}_z = \bar{\lambda}_z - 1, \quad (221)$$

$$\sigma^C = \frac{1}{J} \bar{\lambda} \bar{\sigma}^{2PK} = \frac{1}{\bar{\lambda}^2 \bar{\lambda}_z} \bar{\lambda} \bar{\sigma}^{2PK} = \frac{1}{\bar{\lambda} \bar{\lambda}_z} \bar{\sigma}^{1PK}, \quad (222)$$

kde $\bar{\sigma}^{1PK}$ značí, že předpínací napětí je 1. Piola-Kirchhoffovo.

Kombinací s obecně platnými vztahy (206)-(209) dostaneme

$$\bar{h} = h_0 \bar{\lambda}_z = h_0 (1 + \bar{\varepsilon}_z) = h_0 \left(1 - \frac{2\nu}{1-\nu} \bar{\varepsilon} \right) = h_0 \left(1 - \frac{2\nu}{1-\nu} \frac{u_a}{a_0} \right) \quad (223)$$

$$\bar{n} = \bar{h} \sigma^C = h_0 \bar{\lambda}_z \sigma^C = h_0 \frac{1}{\bar{\lambda}} \bar{\sigma}^{1PK} = h_0 \frac{1}{\bar{\lambda}} \frac{E}{1-\nu} \bar{\varepsilon} = \frac{h_0 a_0}{u_a + a_0} \frac{E}{1-\nu} \left(\frac{u_a}{a_0} \right) = \frac{E h_0}{1-\nu} \frac{u_a}{u_a + a_0} \quad (224)$$

$$\bar{k} = \frac{d\bar{n}}{du_a} = \frac{E h_0}{1-\nu} \left(\frac{a_0}{(u_a + a_0)^2} \right). \quad (225)$$

Vyjádríme-li u_a , a_0 , h_0 a E pomocí \bar{a} , \bar{n} , \bar{k} , \bar{h} ze vztahů (223)-(225), dostaneme

$$u_a = \frac{\bar{a} \bar{n}}{\bar{n} + \bar{a} \bar{k}}, \quad (226)$$

$$a_0 = \frac{\bar{a}^2 \bar{k}}{\bar{n} + \bar{a} \bar{k}}, \quad (227)$$

$$h_0 = \frac{\bar{h}}{1 - \frac{2\nu \bar{n}}{(1-\nu) \bar{a} \bar{k}}}, \quad (228)$$

$$E = \frac{\bar{n} + \bar{a} \bar{k}}{\bar{h}} \left(1 - \nu - 2\nu \frac{\bar{n}}{\bar{a} \bar{k}} \right), \quad (229)$$

což jsou skutečné parametry, které musíme použít v případě tohoto modelu.

4.1.5.3 Timoshenkův zjednodušený model

V případě Timoshenkova modelu vycházíme již ze stavu po vnesení předpětí, tedy problém je řešen na intervalu $[0, \bar{a}]$ (na rozdíl od předchozích dvou modelů, kdy

problém řešíme na intervalu $[0, a_0]$ a předpětí vnášíme zavedením okrajového posuvu u_a). Platí

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{n}}{h} \quad (230)$$

Uvažujme nyní, že bychom navíc i v tomto modelu předepsali onen okrajový posuv u_a , pro radiální a tangenciální přetvoření způsobená tímto posuvem by platilo

$$\varepsilon_{rs}^t = \varepsilon_{ts}^t = \varepsilon_s^t = \frac{u_a}{\bar{a}}, \quad (231)$$

pro měrné normálové síly by dle (156) a (157) platilo

$$N_r = N_t = n = \bar{n} + \frac{E\bar{h}}{1-\nu} \frac{u_a}{\bar{a}} \quad (232)$$

a pro počáteční tuhost

$$\bar{k} = \frac{d\bar{n}}{du_a} = \frac{E\bar{h}}{1-\nu} \frac{1}{\bar{a}}. \quad (233)$$

Z výrazu (233) pro počáteční tuhost můžeme nyní vyjádřit výsledný vztah pro modul pružnosti

$$E = \frac{(1-\nu)\bar{k}\bar{a}}{h}. \quad (234)$$

Pomocí vztahů (230) a (234) můžeme určit vstupní parametry Timoshenkova modelu pro konzistentní porovnání výsledků s předchozími dvěma modely.

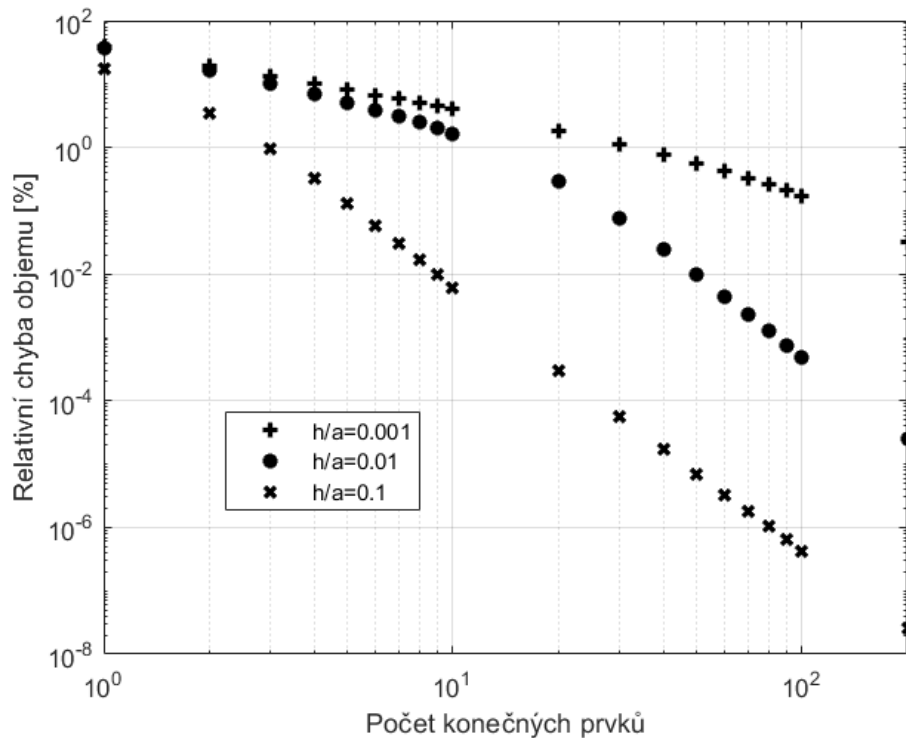
4.1.6 Parametrická studie

V této kapitole budou porovnány výsledky jednotlivých mechanických modelů pro osově souměrnou membránu zatíženou konstantním tlakem, které byly odvozeny v autorových publikacích, nebo v této disertační práci, a implementovány autorem v prostředí MATLAB [46]. Všechny číselné vstupy a výstupy budou převedeny do bezrozměrného formátu. Veličiny s jednotkami délky budou normalizovány vůči referenčnímu poloměru \bar{a} a veličiny s jednotkami napětí budou normalizovány vůči počáteční tuhosti \bar{k} . Tloušťka membrány bude tedy charakterizována poměrem \bar{h}/\bar{a} a počáteční předpětí jako $\bar{n}/\bar{a}\bar{k}$. Pro takto definované bezrozměrné vstupní parametry můžeme pro každý model spočítat dle kapitoly 4.1.5 bezrozměrné hodnoty

u_a/\bar{a} , a_0/\bar{a} , h_0/\bar{a} , $E/(\bar{a}\bar{k})$ a použit je jako vstupy pro výpočet. Svislý posuv můžeme poté charakterizovat jako w_s/\bar{a} , radiální posuv jako u_s/\bar{a} a zatěžovací tlak jako p/\bar{k} .

4.1.6.1 Studie jemnosti sítě

V autorově publikaci [51], která se zabývá mechanickým modelem pro předpjatou membránu bez ohybové tuhosti, byla provedena studie závislosti relativní chyby objemu ohraničeného střednicí membrány na počtu konečných prvků. V tomto případě se jednalo o konečné prvky využívající lineární bázové funkce a příklad, na kterém byla studie provedena, měl parametry $w_{\max}/\bar{a}=0.26$, $h/\bar{a}=0.01$ a $\nu=0.4$. Provedme nyní obdobnou studii pro model s ohybovou tuhostí, Saint Venant-Kirchhoffovým materiálovým zákonem a základním výrazem pro energii vnějších sil (kapitola 4.1.2.1).



kde V_N je objem ohraničený deformovanou střednicí membrány pro daný počet konečných prvků N a V_{1000} je hodnota tohoto objemu pro velmi jemnou síť 1000 prvků. Výsledky jsou znázorněny na Obr. 43. Je zřejmé, že pro velmi štíhlé membrány je obtížnější vystihnout okrajový „náběh“, neboť se odehrává na velmi krátkém intervalu, a proto relativní chyba objemu v tomto případě klesá se zvyšujícím se množstvím konečných prvků pomaleji, než v případě tlustších membrán.

4.1.6.2 Porovnání modelů - základní výraz pro energii vnějších sil

Porovnejme nyní výsledky spočtené následujícími modely:

- St. Venant-Kirchhoffův model s ohybovou tuhostí (kapitola 4.1.2.1)
- St. Venant-Kirchhoffův model bez ohybové tuhosti (publikace [50,51])
- Biotův model s ohybovou tuhostí (kapitola 4.1.2.2)
- Timoshenkův zjednodušený model s ohybovou tuhostí (kapitola 4.1.2.3)

V následujících grafech je znázorněna závislost velikosti odchylky jednotlivých modelů od referenčního modelu na štíhlosti membrány. Za referenční model v tomto případě považujeme St. Venant-Kirchhoffův model s ohybovou tuhostí. Sledovaná odchylka je definována jako

$$\text{rmse} = \sqrt{w_{\text{rmse}}^2 + u_{\text{rmse}}^2} / w_{\text{max}}, \quad (236)$$

kde w_{rmse} , resp. u_{rmse} jsou kvadratické odchylky svislého, resp. vodorovného posuvu, pro které platí

$$w_{\text{rmse}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^N (w_{s,i} - w_{s,i}^{\text{ref}})^2}{N+1}}, \quad u_{\text{rmse}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^N (u_{s,i} - u_{s,i}^{\text{ref}})^2}{N+1}} \quad (237)$$

a $w_{s,i}$, $u_{s,i}$ jsou hodnoty posuvů v jednotlivých uzlech konečných prvků posuzovaného modelu a $w_{s,i}^{\text{ref}}$, $u_{s,i}^{\text{ref}}$ jsou hodnoty posuvů v jednotlivých uzlech konečných prvků referenčního modelu.

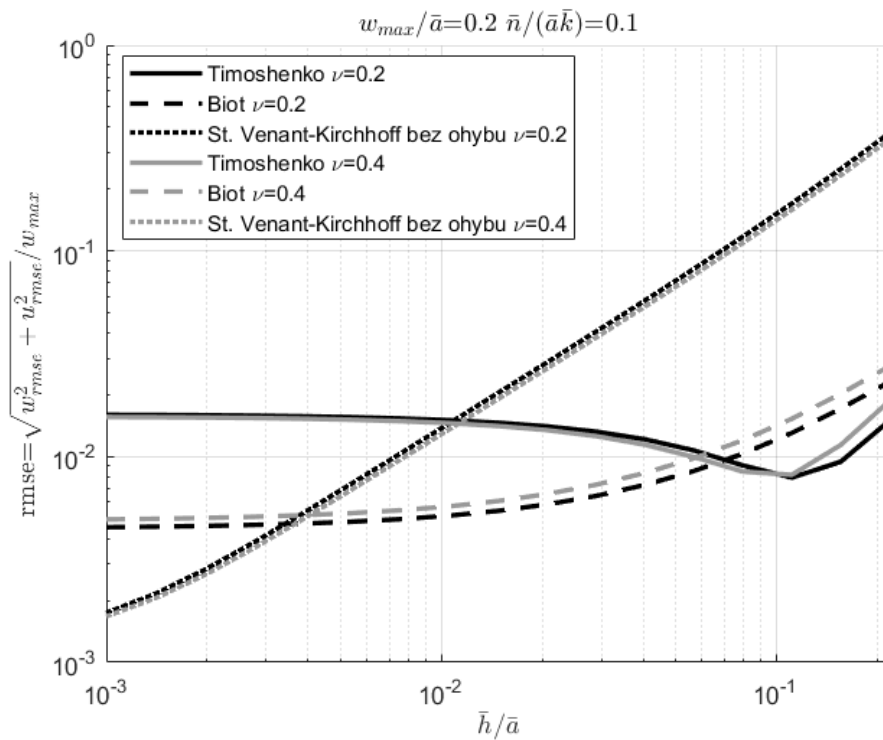
Studie je provedena pro tři různé varianty předpětí $\bar{n} / (\bar{a}\bar{k})$ ($\bar{n} / (\bar{a}\bar{k}) = 0$ pro nulové předpětí, $\bar{n} / (\bar{a}\bar{k}) = 0.01$ pro malé předpětí a $\bar{n} / (\bar{a}\bar{k}) = 0.1$ pro velké předpětí), dvě různé varianty maximálního průhybu w_{max} / \bar{a} ($w_{\text{max}} / \bar{a} = 0.02$ pro malé průhyby a $w_{\text{max}} / \bar{a} = 0.2$ pro velké průhyby) a dále pro dvě různé hodnoty Poissonova čísla ($\nu = 0.2$ a $\nu = 0.4$). Pro všechny modely s ohybovou tuhostí bylo použito 200

konečných prvků s kubickými bázovými funkcemi a pro model bez ohybové tuhosti bylo použito 1000 konečných prvků s lineárními bázovými funkcemi.

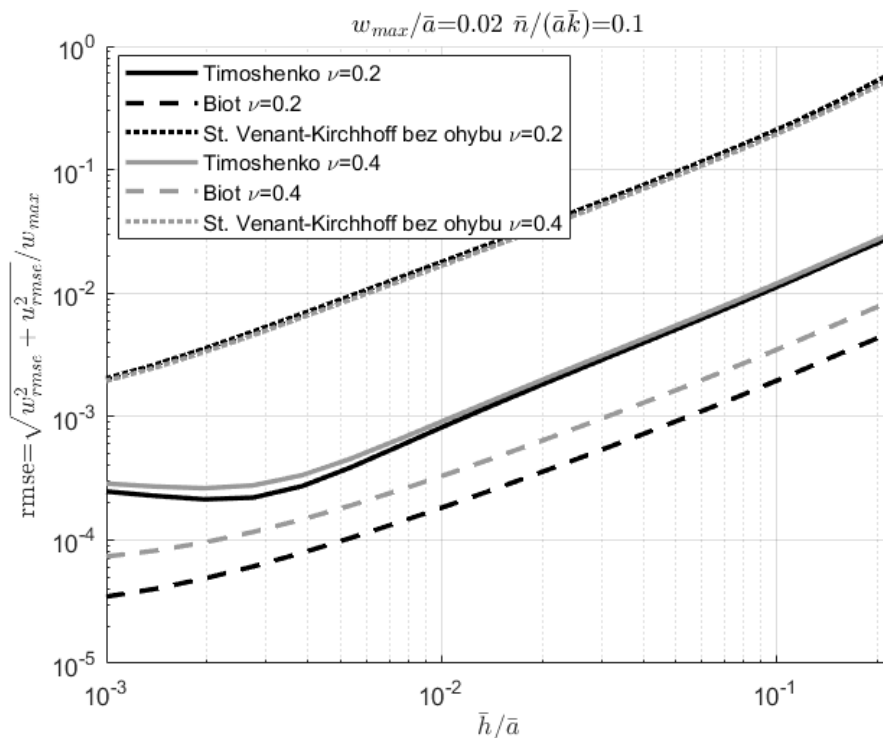
Ze všech grafů na Obr. 44 - Obr. 49 je patrné, že rozdíl mezi St. Venant-Kirchhoffovým modelem s ohybovou tuhostí a bez ohybové tuhosti se se zvětšující štíhlostí (zmenšující se tloušťkou \bar{h}/\bar{a}) monotónně zmenšuje a v limitním případě $\bar{h}/\bar{a} \rightarrow 0$ tento rozdíl zanikne úplně, a to pro všechny varianty maximálního průhybu i předpětí.

Rozdíl mezi Biotovým a St. Venant-Kirchhoffovým modelem s ohybovou tuhostí se dle očekávání projevuje především v případě velkých průhybů a větších tloušťek. Z grafů vyplývá, že pro malé průhyby a malé tloušťky rozdíl zaniká, a to pro všechny varianty předpětí.

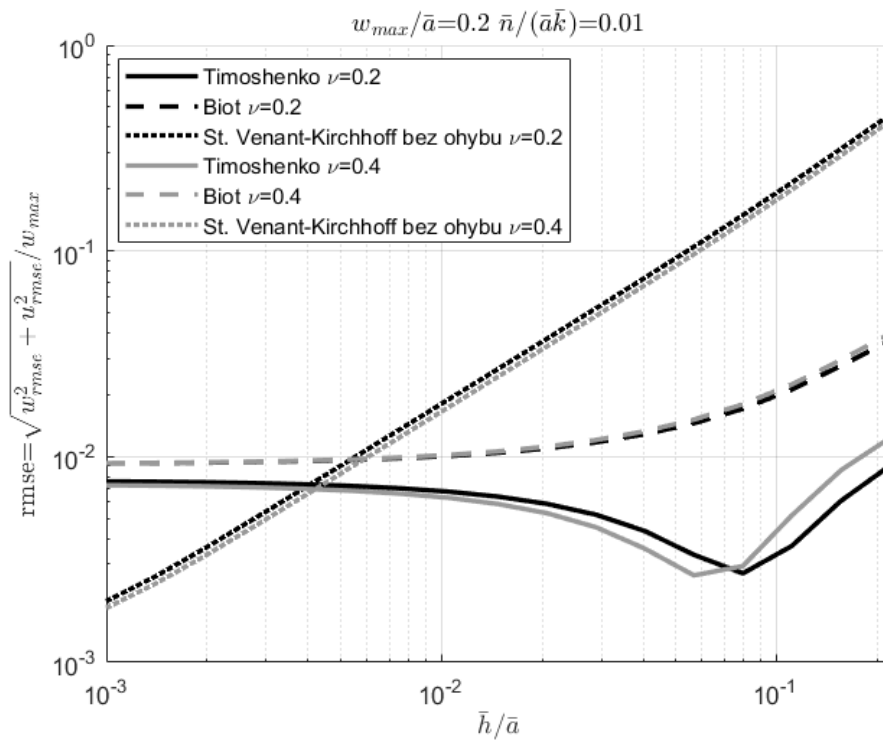
Rozdíl mezi Timoshenkovým a St. Venant-Kirchhoffovým modelem s ohybovou tuhostí není tak jednoznačně vysvětlitelný, jako v případě předchozích dvou modelů. V grafech se vždy nachází jisté lokální minimum, ve kterém je odchylka minimální, ale poté opět vzroste. Lze očekávat, že pro malé průhyby a malé tloušťky odchylka taktéž zanikne. Při bližším zkoumání rozdílů funkcí u_s a w_s pro tyto dva modely lze zjistit, že rozhodující roli ve výsledné chybě hraje rozdíl funkce svislého posuvu, w_s , který je v jedné části intervalu tloušťek záporný a postupně přechází do kladných hodnot s tím, že pro určitou hodnotu tloušťky vychází kvadratická odchylka minimální.



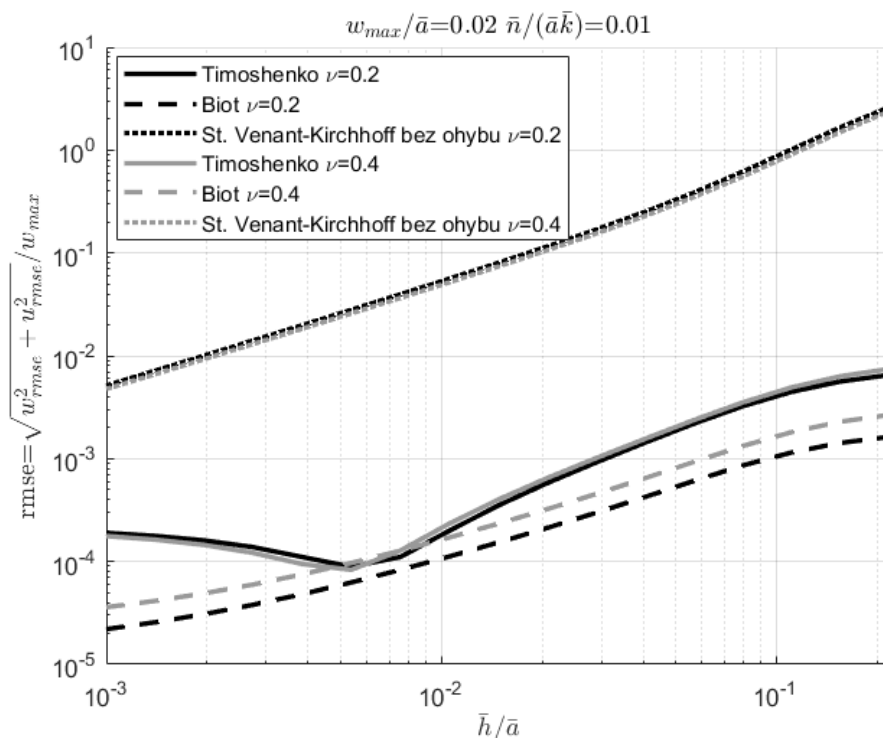
Obr. 44 Porovnání modelů se základním výrazem pro energii vnějších sil,
 $w_{\text{max}} / \bar{a} = 0.2, \quad \bar{n} / (\bar{a}\bar{k}) = 0.1$



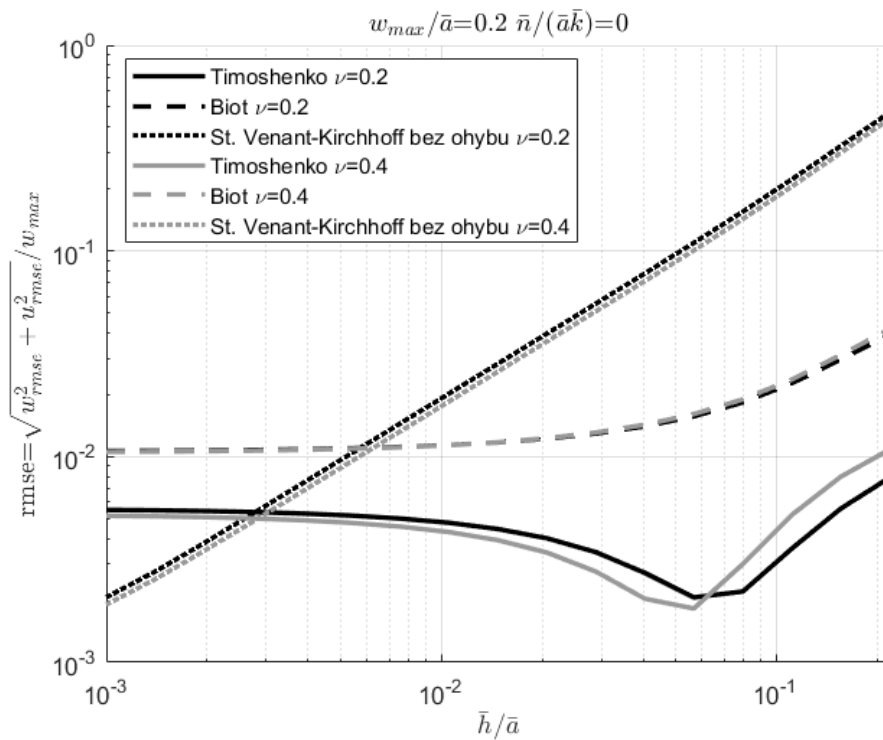
Obr. 45 Porovnání modelů se základním výrazem pro energii vnějších sil,
 $w_{\text{max}} / \bar{a} = 0.02, \quad \bar{n} / (\bar{a}\bar{k}) = 0.1$



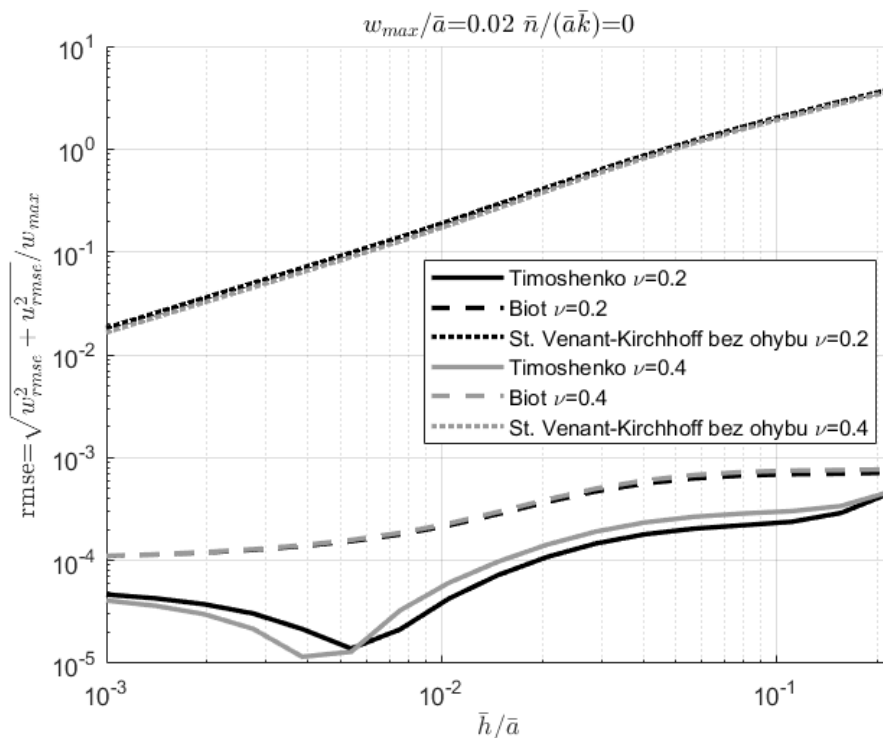
Obr. 46 Porovnání modelů se základním výrazem pro energii vnějších sil,
 $w_{\max} / \bar{a} = 0.2, \bar{n} / (\bar{a}\bar{k}) = 0.01$



Obr. 47 Porovnání modelů se základním výrazem pro energii vnějších sil,
 $w_{\max} / \bar{a} = 0.02, \bar{n} / (\bar{a}\bar{k}) = 0.01$



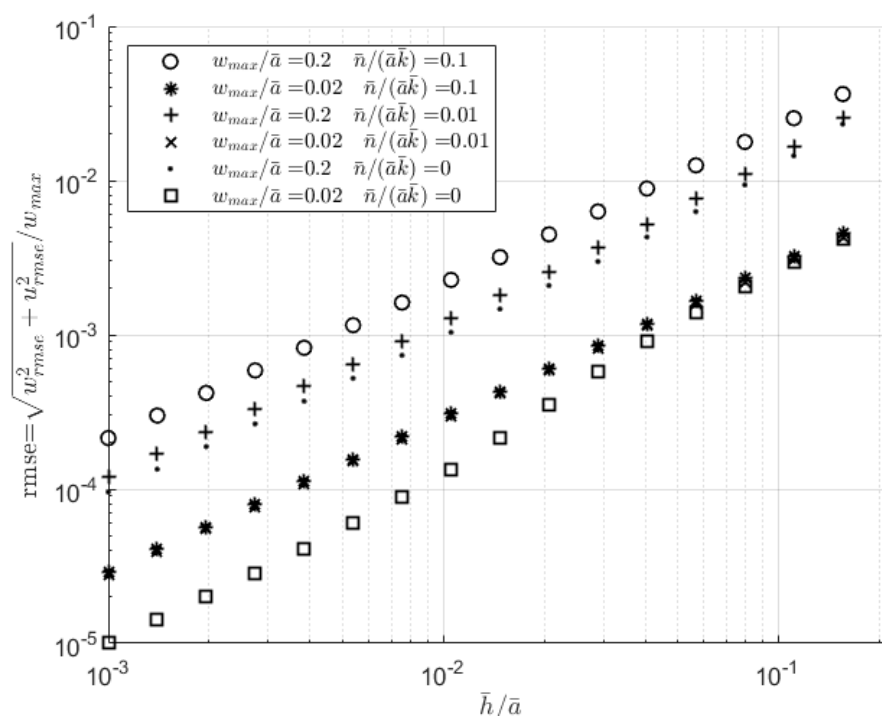
Obr. 48 Porovnání modelů se základním výrazem pro energii vnějších sil,
 $w_{\text{max}} / \bar{a} = 0.2, \quad \bar{n} / (\bar{a}\bar{k}) = 0$



Obr. 49 Porovnání modelů se základním výrazem pro energii vnějších sil,
 $w_{\text{max}} / \bar{a} = 0.02, \quad \bar{n} / (\bar{a}\bar{k}) = 0$

4.1.6.3 Porovnání modelů - zpřesněný výraz pro energii vnějších sil

Zaměříme se nyní na porovnání výsledků při použití základního a zpřesněného výrazu pro energii vnějších sil, a to pouze pro St. Venant-Kirchhoffův model s ohybovou tuhostí. Za referenční model v tomto případě uvažujeme model se zpřesněným výrazem pro energii vnějších sil. Výsledné porovnání pro různé varianty maximálního průhybu a předpětí je znázorněno na Obr. 50. Vliv zpřesněného výrazu se dle očekávání zmenšuje se zmenšující se tloušťkou membrány. V extrémním případě velkého průhybu a velké tloušťky vzniká chyba v řádu několika jednotek procent.



Obr. 50 Porovnání St. Venant-Kirchhoffova modelu s ohybovou tuhostí se základním a zpřesněným výrazem pro energii vnějších sil

4.1.7 Kapalinová čočka s membránou s ohybovou tuhostí

4.1.7.1 Membrána s konstantní tloušťkou

V této kapitole bude nejprve ukázán vliv volby mechanického modelu pro osově souměrnou membránu konstantní tloušťky zatíženou konstantním tlakem na velikost příčné paprskové aberace v paraxiální obrazové rovině plano-konvexní kapalinové čočky uzavřené zleva planoparalelní skleněnou destičkou, zprava elastickou membránou a vyplněné optickou kapalinou Sylgard [56]. V tomto případě je předpokládáno, že je membrána reprezentována pouze svou střednicovou plochou a není bráno v potaz, že tvar vnější a vnitřní plochy membrány se od střednicové plochy mírně liší. Dále je předpokládáno, že světelné paprsky vstupující do čočky jsou rovnoběžné s optickou osou (předmět v nekonečnu) a šíří se zleva doprava. Parametry výpočtu volíme stejnou metodikou, jako v předchozí kapitole. Příklad bude

nejprve spočten pro jednu variantu předpětí (nulové předpětí) $\bar{n}/(\bar{a}\bar{k})=0$, jednu variantu Poissonova čísla $\nu=0.4$ a tři varianty tloušťky $h/\bar{a}=0.001$, $h/\bar{a}=0.01$ a $h/\bar{a}=0.1$. Místo maximálního průhybu je zde vhodnější definovat vrcholový poloměr křivosti R_0/\bar{a} , jehož hodnota je v našem konkrétním případě předepsána $R_0/\bar{a}=3$ a pro tenké membrány přibližně odpovídá maximálnímu průhybu $w_{\max}/\bar{a}\approx 0.2$. Hodnota zatěžovacího tlaku (viz Tab. 1) se pro každý z mechanických modelů mírně liší a je iteračně volena tak, aby vždy přesně platila předepsaná podmínka hodnoty vrcholového poloměru křivosti. Index lomu optické kapaliny Sylgard uvažujeme $n=1.4316$ a tloušťku kapalinové čočky $d/\bar{a}=2$. Průběhy příčné sférické aberace byly spočteny pomocí skriptu v programu Matlab [46], jehož výsledky se shodují s výsledky programu OSLO [61] určeného pro návrh optických systémů, a který navíc umožňuje zadat tvar optické plochy přímo pomocí diskretních hodnot deformačních neznámých v jednotlivých uzlech konečných prvků, mezi kterými jsou hodnoty interpolovány kubickými spliny. Tímto způsobem je možné ve výpočtu aberací zohlednit i velmi krátké okrajové náběhy, které by v případě zadání optické plochy pomocí sudého polynomu proloženého uzlovými hodnotami MKP zanikly. V reálném případě membránové kapalinové čočky by se zmiňované okrajové náběhy membrány odclonily, ale pro účely této práce jejich vliv zohledníme.

Na Obr. 51 je vykreslena normalizovaná hodnota příčné sférické aberace $\delta y/\bar{a}$ v závislosti na normalizované výšce y/\bar{a} průsečíku paprsku s první (planparalelní) optickou plochou pro jednotlivé varianty tloušťky membrány pro St. Venant-Kirchhoffův model s ohybovou tuhostí i bez ohybové tuhosti (v případě modelu bez ohybové tuhosti jsou aberační křivky pro všechny štíhlosti totožné) včetně odpovídajících poloměrů rozptylového kroužku r_{coc} , který lze přibližně určit jako [47]

$$r_{coc} = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\delta y_k - \delta \bar{y})^2}, \quad \delta \bar{y} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \delta y_k, \quad (238)$$

kde δy_k je hodnota příčné paprskové aberace odpovídající paprsku, který protíná první optickou plochu čočky ve vzdálenosti $y=y_k$ od optické osy a K je počet konečných paprsků trasovaných skrz danou čočku.

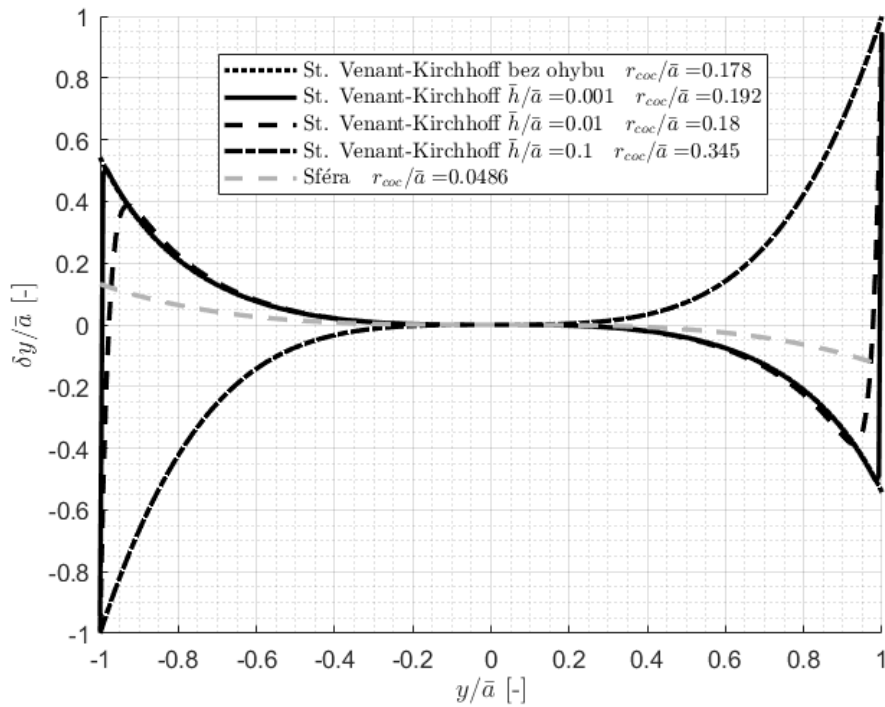
Pro porovnání je také znázorněna křivka odpovídající paprskové aberaci sférické plochy o stejném vrcholovém poloměru, která dle očekávání (viz kapitola 3) dosahuje několikanásobně menších hodnot.

Při použití ostatních prezentovaných mechanických modelů (Biotova a Timoshenkova) bychom obdrželi téměř identické křivky, jako na Obr. 51, a porovnání výsledných hodnot poloměru rozptylového kroužku je shrnuto v Tab. 1 (za referenční je považován St. Venant-Kirchhoffův model s ohybovou tuhostí). Lze konstatovat, že poloměr rozptylového kroužku se od referenčního modelu liší maximálně o 4.3 %

v případě Timoshenkova modelu a maximálně o 2.45 % v případě Biotova modelu. V případě St. Venant-Kirchhoffova modelu bez ohybové tuhosti je zřejmé, že pro tenčí membrány ($h/\bar{a}=0.001$, resp. $h/\bar{a}=0.01$) nehraje vliv ohybové tuhosti příliš podstatnou roli a rozdíl poloměru rozptylového kroužku od referenčního modelu je 7.14 %, resp. 1.1 %. V případě tlustší membrány ($h/\bar{a}=0.1$) již ohybová tuhost podstatnou roli hraje a jejím zanedbáním vznikne chyba ve výpočtu poloměru rozptylového kroužku 48%.

Tab. 1 Porovnání hodnot poloměru rozptylového kroužku referenčního modelu a ostatních modelů

Model	$h/\bar{a} [-]$	$p/E [-]$	$r_{\text{coc}}^{\text{ref}}/\bar{a} [-]$	$r_{\text{coc}}/\bar{a} [-]$	$\frac{r_{\text{coc}} - r_{\text{coc}}^{\text{ref}}}{r_{\text{coc}}^{\text{ref}}} \cdot 100\%$
Timoshenko	0.001	$0.0300 \cdot 10^{-3}$	0.1917	0.2	4.3
	0.01	$0.2768 \cdot 10^{-3}$	0.18	0.187	3.9
	0.1	$0.9408 \cdot 10^{-3}$	0.345	0.345	0
Biot	0.001	$0.0273 \cdot 10^{-3}$	0.1917	0.187	-2.45
	0.01	$0.2537 \cdot 10^{-3}$	0.18	0.177	-1.7
	0.1	$0.9186 \cdot 10^{-3}$	0.345	0.346	0.3
St. Venant-Kirchhoff bez ohybové tuhosti	0.001	$0.0287 \cdot 10^{-3}$	0.1917	0.178	-7.14
	0.01	$0.2666 \cdot 10^{-3}$	0.18	0.178	-1.1
	0.1	$0.9450 \cdot 10^{-3}$	0.345	0.178	-48.4



Obr. 51 Příčná paprsková aberace pro St. Venant-Kirchhoffův model s ohybovou tuhostí a bez ohybové tuhosti (křivka pro model bez ohybové tuhosti téměř splývá s křivkou modelu s ohybovou tuhostí pro $h/\bar{a} = 0.001$)

Je nutné si povšimnout, že poloměr rozptylového kroužku je výrazně ovlivněn okrajovými náběhy membrány způsobenými zavedením ohybové tuhosti, neboť na samém okraji má membrána nulový sklon, a tedy pro okrajové paprsky se hodnota paprskové aberace blíží poloměru membrány (viz Obr. 51). Z tohoto důvodu je vhodné okrajovou část membrány odclonit a nabízí se otázka, jakým způsobem volit optimální velikost poloměru, na kterém odclonění začíná. Obr. 51 naznačuje, že se zvyšující se tloušťkou dochází vlivem ohybové tuhosti k jakémusi ovlivnění příčné paprskové aberace, neboť při zvětšení tloušťky z $h/\bar{a} = 0.001$ na $h/\bar{a} = 0.01$ levá část aberační křivky klesá (a pravá část stoupá). Abychom tento jev blíže prozkoumali, je vhodné spočítat aberační křivky pro více variant tlouštěk, a to zejména v rozmezí $h/\bar{a} = 0.01$ až $h/\bar{a} = 0.1$, viz Obr. 52. Pro každou z křivek na Obr. 52 je vypočtena závislost velikosti poloměru rozptylového kroužku r_{coc}/\bar{a} na normalizovaném neodcloněném poloměru membrány r/\bar{a} , viz Obr. 53.

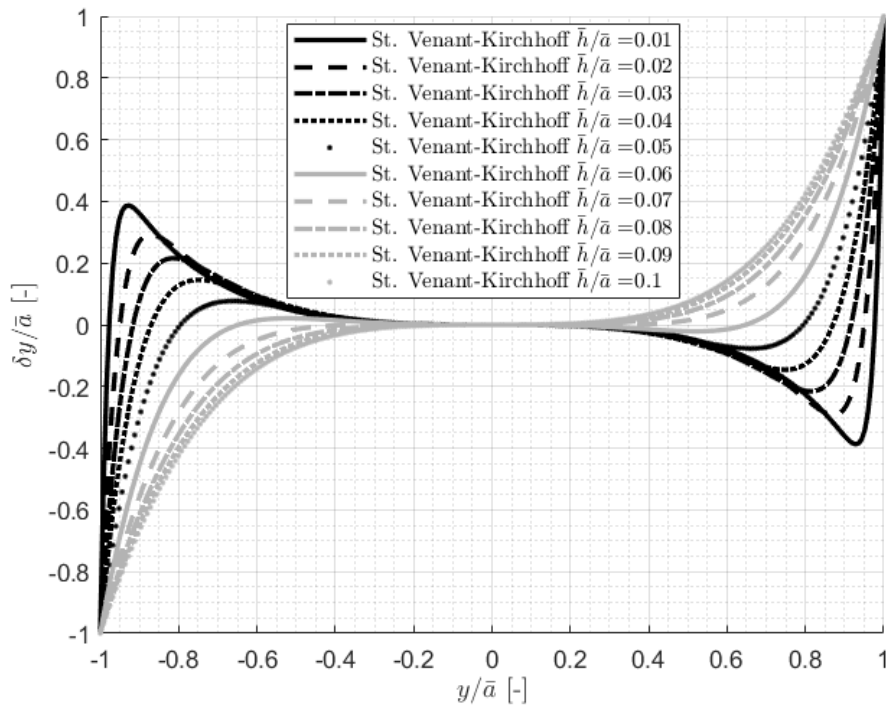
Zabývejme se nyní možným postupem určení maximální dosažitelné hodnoty normalizovaného neodcloněného poloměru, r_{ap}/\bar{a} , v závislosti na normalizovaném poloměru rozptylového kroužku. Spočteme-li aberační křivky a jim odpovídající závislosti poloměru rozptylového kroužku na normalizovaném neodcloněném poloměru membrány pro dostatečné množství variant tloušťky membrány, můžeme pro jednotlivé hodnoty norm. poloměru rozptylového kroužku ležící na ose y Obr. 53

hledat jim odpovídající hodnoty norm. neodcloněného poloměru r/\bar{a} na křivkách, které odpovídají jednotlivým variantám norm. tloušťky h/\bar{a} . Tloušťku, které odpovídá křivka, pro kterou byla hodnota r/\bar{a} nejvyšší, vždy uložíme spolu s touto nejvyšší hodnotou, kterou budeme dále značit r_{ap}/\bar{a} (maximální dosažitelná hodnota normalizovaného neodcloněného poloměru). Tímto způsobem lze sestavit graf závislosti optimální norm. tloušťky h_{opt}/\bar{a} a maximální dosažitelné hodnoty normalizovaného neodcloněného poloměru r_{ap}/\bar{a} na normalizovaném poloměru rozptylového kroužku r_{coc}/\bar{a} , viz Obr. 54.

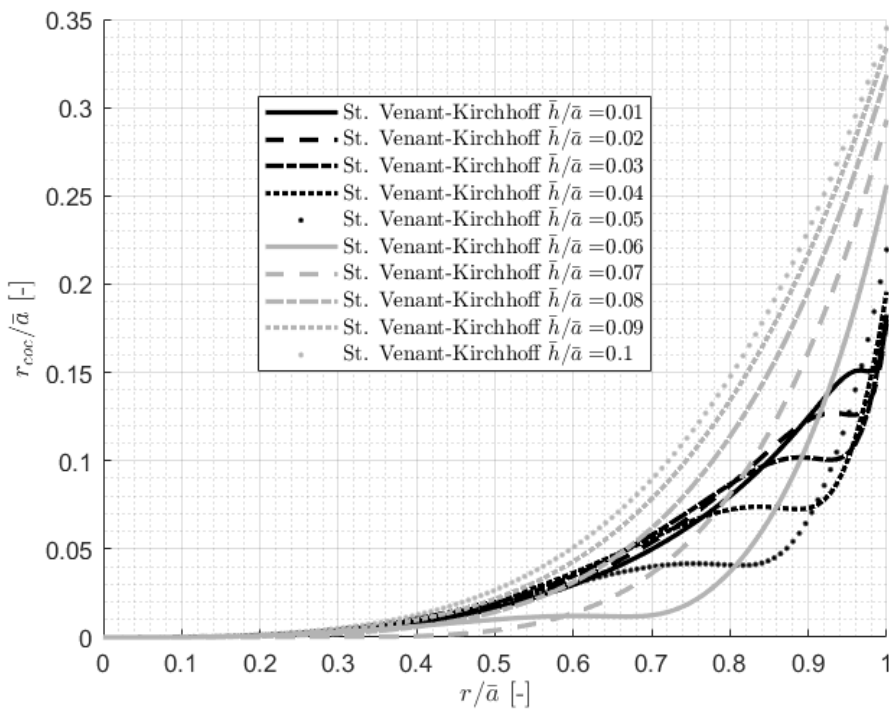
Pomocí tohoto grafu můžeme určit optimální konstantní tloušťku membrány plano-konvexní kapalinové čočky tak, aby pro námi zvolenou limitní hodnotu poloměru rozptylového kroužku r_{coc}^{lim}/\bar{a} bylo nutné odclonit co nejmenší část z celkového poloměru membrány. Postupujeme tak, že ke zvolené hodnotě r_{coc}^{lim}/\bar{a} najdeme na Obr. 54 odpovídající hodnotu norm. optimální tloušťky (plná čára, osa y vlevo) a dále pak odpovídající hodnotu norm. neodcloněného poloměru (čárkovaná čára, osa y vpravo).

Zvolený příklad je spočten pouze pro jednu hodnotu vrcholového poloměru křivosti membrány (tedy pro jednu paraxiální ohniskovou vzdálenost), ale analogickým způsobem je možné určit křivky na Obr. 54 i pro jiné hodnoty ohniskové vzdálenosti a usnadnit tím prvotní návrh konstantní tloušťky membrány kapalinové čočky s částečně kompenzovanou paprskovou aberací.

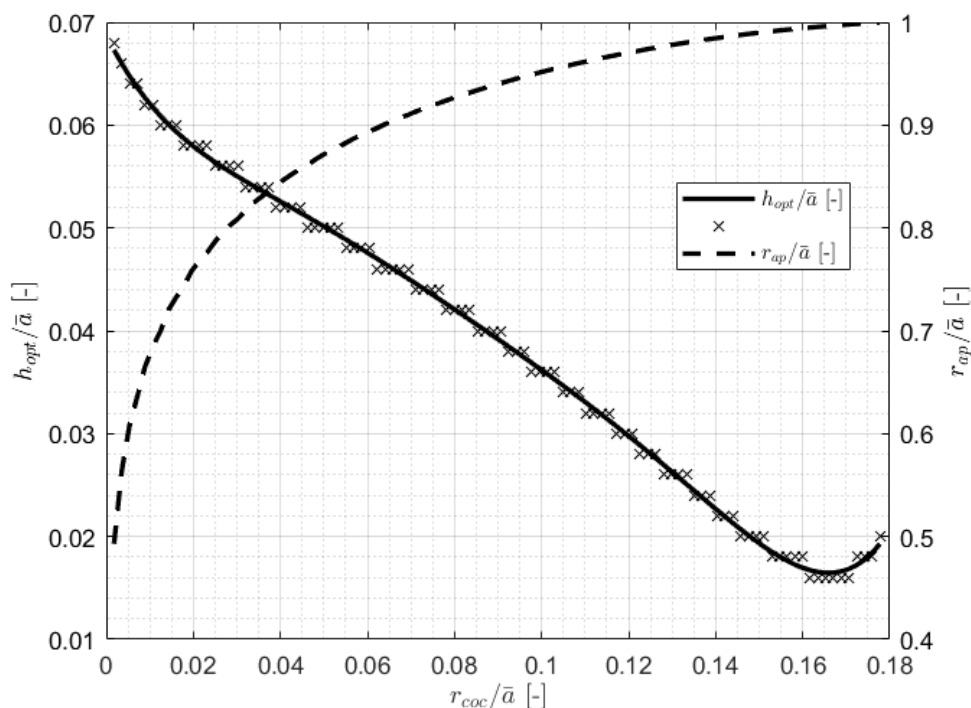
Obdobným způsobem lze postupovat v případě, že máme pevně danou tloušťku membrány a pro daný maximální dovolený poloměr rozptylového kroužku hledáme co největší možný poloměr clony. Postupujeme tak, že ke zvolené hodnotě r_{coc}^{lim}/\bar{a} na ose y Obr. 53 najdeme pro námi zvolenou tloušťku odpovídající hodnotu norm. neodcloněného poloměru r/\bar{a} . Tato hodnota poté odpovídá maximálnímu možnému poloměru clony, při kterém nedojde k překročení dovoleného poloměru rozptylového kroužku.



Obr. 52 Normalizovaná příčná paprsková aberace pro St. Venant-Kirchhoffův model s ohybovou tuhostí



Obr. 53 Závislost normalizovaného poloměru rozptylového kroužku r_{coc} / \bar{a} na normalizovaném neodcloněném poloměru membrány r / \bar{a}



Obr. 54 Závislost norm. optimální tloušťky membrány h_{opt}/\bar{a} a maximálního dosažitelného norm. neodcloněného poloměru r_{ap}/\bar{a} na norm. poloměru rozptylového kroužku r_{coc}/\bar{a}

4.1.7.2 Membrána s proměnnou tloušťkou

V této kapitole se budeme zabývat vlivem ohybové tuhosti membrány s optimalizovanou proměnnou tloušťkou na příčnou paprskovou aberaci plano-konvexní kapalinové čočky, která byla popsána v kapitole 4.1.7.1. Předpokládejme opět, že je membrána reprezentována svou střednicovou plochou a není bráno v potaz, že tvar vnější a vnitřní plochy membrány se od střednicové plochy mírně liší.

V kapitole 3.3 je shrnuta autorova publikace [53], ve které je odvozen postup návrhu tloušťkového profilu membrány tak, aby se v případě použití St. Venant-Kirchhoffova materiálového modelu při zanedbání ohybové tuhosti deformovala střednicová plocha membrány přesně do předepsaného tvaru. Ve skutečnosti je ale ohybová tuhost membrány vždy přítomna a proto je zajímavé prozkoumat její vliv na příkladu, kdy navrhne optimální tloušťkový profil bez uvážení ohybové tuhosti, ale deformovaný tvar a následný výpočet paprskové aberace provedeme již s jejím uvážením.

Vzhledem k tomu, že tloušťkový profil je navržen za použití St. Venant-Kirchhoffova materiálového modelu (bez uvážení ohybové tuhosti), omezíme se na výpočet deformovaného tvaru pouze pomocí modelu, který také využívá St. Venant-Kirchhoffův materiálový model (s ohybovou tuhostí) a zbylé modely řešené v této práci (Biotův a Timoshenkův) v tomto porovnání již uvažovat nebudeme.

Z geometrické optiky je známo, že pro paprsky rovnoběžné s optickou osou (osový bod v nekonečnu) přicházející z rovinné strany plano-konvexní hyperboloidické čočky, je její paprsková aberace v paraxiálním ohnisku nulová. V následujícím příkladu využijeme této vlastnosti a za předepsaný tvar, pro který je tloušťkový profil optimalizován, zvolíme hyperboloid.

Úloha optimalizace tloušťkového profilu má řešení pouze v případě uvážení nenulového počátečního předpětí. Tento příklad bude spočten pro jednu variantu předpětí okrajovým posuvem $u_a/\bar{a}=0.1$, kde \bar{a} je poloměr membrány v předepjatém stavu, jednu variantu Poissonova čísla $\nu=0.4$, jednu variantu vrcholového poloměru křivosti $R_0/\bar{a}=3$ a deset variant tloušťky membrány na okraji, $h_a/\bar{a}=0.01, 0.02, 0.03\dots 0.1$. Index lomu optické kapaliny Sylgard uvažujeme $n=1.4316$ a tloušťku kapalinové čočky $d/\bar{a}=2$. Výsledný tloušťkový profil pro variantu $h_a/\bar{a}=0.01$ je znázorněn na Obr. 55. Jak již bylo zmíněno v kapitole 3.3, v případě optimalizace tloušťkového profilu pomocí mechanického modelu zanedbávajícího ohybovou tuhost je tloušťka v každém bodě membrány přímo úměrná poměru zatěžovacího tlaku a modulu pružnosti, p/E . Pokud tedy například provedeme optimalizaci tloušťkového profilu pro poměr $(p/E)_1$, dostaneme profil $h_1(r)$ a pro poměr $(p/E)_2=10(p/E)_1$ dostaneme profil $h_2(r)$, kde platí $h_2(r)=10h_1(r)$.

Ve fázi návrhu tloušťkového profilu s okrajovou tloušťkou $h_a/\bar{a}=0.01$ je hodnota poměru zatěžovacího tlaku a modulu pružnosti $(p/E)_{0.01}=0.000945$, a tedy pro ostatní hodnoty okrajové tloušťky platí při návrhu poměry $(p/E)_{0.02}=2(p/E)_{0.01}=0.0189$, $(p/E)_{0.03}=3(p/E)_{0.01}=0.02835\dots$
 $(p/E)_{0.1}=10(p/E)_{0.01}=0.0945$.

Ve fázi výpočtu deformovaného tvaru membrány mechanickým modelem, který uvažuje ohybovou tuhost, byl poměr $(p/E)_{ohyb}$ pro každý tloušťkový profil iteračně volen tak, aby vždy přesně platila předepsaná podmínka hodnoty vrcholového poloměru křivosti ($R_0/\bar{a}=3$). Výsledné hodnoty p/E (poměru zatěžovacího tlaku a modulu pružnosti ve fázi návrhu, tzn. bez uvážení ohybové tuhosti) a $(p/E)_{ohyb}$ (poměru zatěžovacího tlaku a modulu pružnosti ve fázi výpočtu deformovaného tvaru, tzn. s uvážením ohybové tuhosti) v závislosti na tloušťce h_a/\bar{a} pro zvolený vrcholový poloměr křivosti jsou shrnuty v Tab. 2.

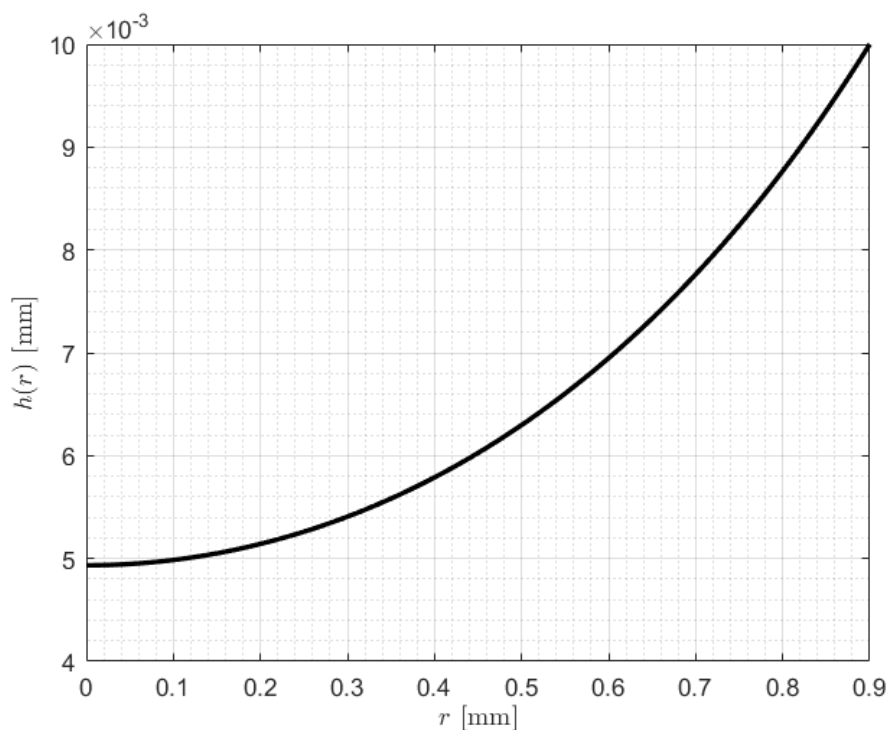
Na Obr. 56 je vykreslena normalizovaná hodnota příčné paprskové aberace $\delta y/\bar{a}$ v závislosti na normalizované výšce y/\bar{a} průsečíku paprsku s první (planparalelní) optickou plochou pro jednotlivé varianty okrajové tloušťky membrány (St. Venant-Kirchhoffův model s ohybovou tuhostí, membrána s proměnnou tloušťkou) a pro každou z křivek na Obr. 56 je (analogicky k předchozí kapitole 4.1.7.1) vypočtena závislost velikosti poloměru rozptylového kroužku r_{coc}/\bar{a} na normalizovaném neodcloněném poloměru membrány r/\bar{a} , viz Obr. 57.

V případě kapalinové čočky s membránou konstantní tloušťky (viz kapitola 4.1.7.1) bylo z průběhů aberačních křivek pro jednotlivé varianty možné vyzorovat, že při částečném zaclonění membrány lze vhodnou volbou její tloušťky značně zredukovat velikost rozptylového kroužku kapalinové čočky. Optimální tloušťka a velikost zaclonění zde závisí na maximální přípustné hodnotě poloměru rozptylového kroužku a bylo zde tedy předmětné sestavit graf závislosti optimální tloušťky a neodcloněného poloměru na maximální přípustné hodnotě rozptylového kroužku.

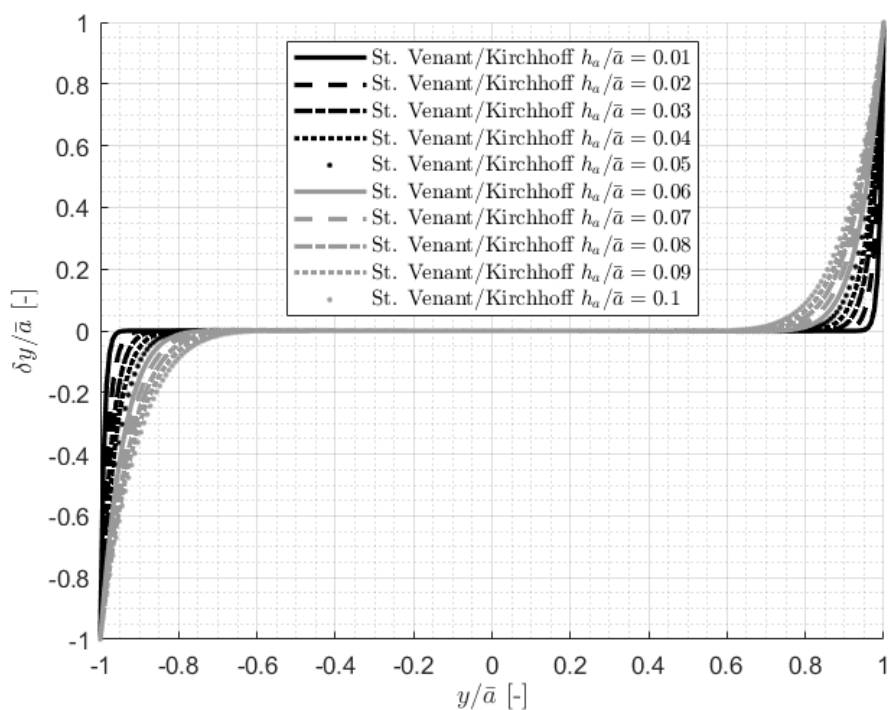
Pro variantu kapalinové čočky s membránou optimalizované proměnné tloušťky je však z aberačních křivek (viz Obr. 56) a ze závislostí poloměru rozptylového kroužku na neodcloněném poloměru (viz Obr. 57) pro jednotlivé okrajové tloušťky zřejmé, že rozptylový kroužek je pro jakoukoliv zvolenou hodnotu neodcloněného poloměru tím menší, čím menší je okrajová tloušťka membrány. Toto chování lze očekávat vzhledem k tomu, že tloušťkový profil membrány byl navržen pomocí teorie, která neuvažuje ohybovou tuhost, a tedy čím tenčí membránu zvolíme, tím více se blížíme předpokladu nulové ohybové tuhosti. V tomto případě tedy nemá smysl sestavovat graf závislosti optimální okrajové tloušťky a neodcloněného poloměru na maximální přípustné hodnotě poloměru rozptylového kroužku, neboť vždy platí, že čím menší okrajovou tloušťku jsme schopni reálně vyrobit, tím lépe. Velikost maximálního neodcloněného poloměru můžeme odečíst z grafu na Obr. 57 tak, že na svislé ose si zvolíme maximální přípustnou hodnotu poloměru rozptylového kroužku a z křivky, která odpovídá naší zvolené okrajové tloušťce, odečteme hodnotu na vodorovné ose, která odpovídá maximální přípustné hodnotě neodcloněného poloměru.

Tab. 2 Hodnoty p/E a $(p/E)_{ohyb}$ v závislosti na tloušťce h_a/\bar{a} pro vrcholový poloměr křivosti $R_0/\bar{a} = 3$

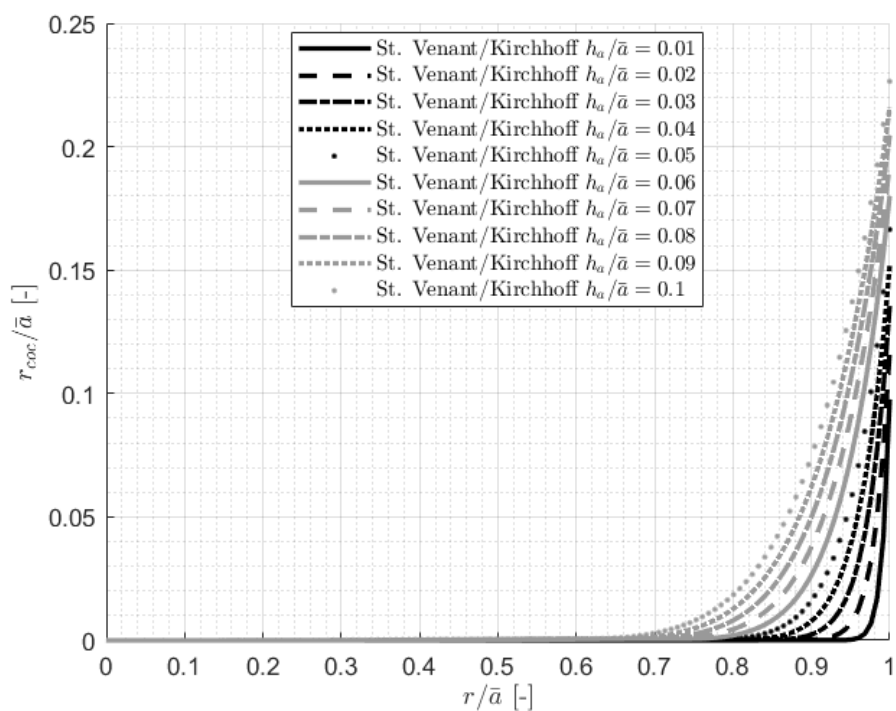
h_a/\bar{a} [-]	$(p/E)_{ohyb}$ [-]	p/E [-]
0.01	9.403×10^{-4}	9.45×10^{-4}
0.02	18.712×10^{-4}	18.90×10^{-4}
0.03	27.928×10^{-4}	28.35×10^{-4}
0.04	37.052×10^{-4}	37.80×10^{-4}
0.05	46.084×10^{-4}	47.25×10^{-4}
0.06	55.024×10^{-4}	56.70×10^{-4}
0.07	63.870×10^{-4}	66.15×10^{-4}
0.08	72.622×10^{-4}	75.60×10^{-4}
0.09	81.279×10^{-4}	85.05×10^{-4}
0.1	89.838×10^{-4}	94.50×10^{-4}



Obr. 55 Optimalizovaný tloušťkový profil membrány, varianta $h_a/\bar{a} = 0.01$



Obr. 56 Normalizovaná příčná paprsková aberace pro St. Venant-Kirchhoffův model s ohybovou tuhostí a proměnnou tloušťkou



Obr. 57 Závislost normalizovaného poloměru rozptylového kroužku r_{coc} / \bar{a} na normalizovaném neodcloněném poloměru r / \bar{a} membrány s proměnnou tloušťkou

5 Závěr

V této disertační práci byl řešen především teoretický popis mechanického chování osově souměrných membrán optických kapalinových čoček, které patří mezi moderní optoelektronické prvky a jejich vývoj je v současné době velmi aktuální pro mnoho perspektivních aplikací. Nalézají stále větší uplatnění v řadě oblastí vědy a techniky neboť řízenou deformací integrované membrány umožňují rychlou změnu svých zobrazovacích parametrů a tím např. automatické korekce zobrazení pro změny vzdáleností předmětů, korekci aberací apod., což lze využít např. v oblastech mikroskopie, strojového vidění, 3d skenování, chytrých telefonů atd. Menší část práce byla dále věnována problematice vlivu průhybu skleněných sférických optických čoček vlastní tíhou na přesnost měření tvaru jejich ploch. Tato problematika poukazuje na možný zdroj chyby (např. při přesných interferometrických měřeních) a v souvislosti se stále zvyšujícími se nároky na přesnost výroby optických prvků je velmi aktuální.

Práce byla formulována do tří základních celků. Na začátku byly definovány její hlavní cíle a autor představil podrobnou rešerši dostupné literatury na téma membránových kapalinových čoček. Následoval odborný komentář publikací souvisejících s daným tématem, na jejichž tvorbě se autor disertační práce podílel, a které vyšly v impaktovaných zahraničních časopisech. Poslední část práce shrnovala doposud nepublikované výsledky autorovy výzkumné činnosti týkající se daného tématu.

V první autorově publikaci [50] bylo provedeno přehledné odvození mechanického modelu pro osově souměrnou membránu kapalinové čočky bez ohybové tuhosti zatíženou tlakem optické kapaliny působícím kolmo ke střednicové ploše membrány. V průběhu odvozování nebyly ve vzniklých výrazech zanedbávány žádné členy, čímž se tato publikace mimo jiné liší od dostupné literatury. Teoreticky spočtený deformovaný tvar membrány, který byl výsledkem řešení odvozené soustavy diferenciálních rovnic řešené metodou řad a numerickou optimalizací jejích koeficientů, byl porovnán s experimentálně naměřeným tvarem a byla potvrzena dobrá shoda.

Druhá autorova publikace [51] rozšiřuje teorii odvozenou v první publikaci o možnost zavedení počátečního předpětí, které významně ovlivňuje tuhost membrány a je

důležitým parametrem mechanického modelu, což bylo také prezentováno experimentálně naměřenými hodnotami. V této publikaci bylo dále provedeno porovnání dvou různých numerických metod použitých k řešení odvozených diferenciálních rovnic, a to metody řad s numerickou optimalizací koeficientů řady a metody konečných prvků. V obou publikacích byl deformovaný tvar membrány také analyzován z hlediska velikosti příčné paprskové aberace a v porovnání s čistě sférickým tvarem byl shledán mnohem méně optimálním.

Třetí publikace [52] se zabývala analýzou změny původně konstantní tloušťky membrány kapalinové čočky v důsledku její deformace a následně vlivem této změny na příčnou paprskovou aberaci, který se v tomto případě ukázal jako zanedbatelný.

Ve čtvrté publikaci [53] byl mechanický model osově souměrné membrány prezentovaný v předchozích autorových publikacích dále rozšířen o předpoklad proměnné počáteční tloušťky předpjaté membrány a pomocí metody střelby využívající Eulerovu metodu dopředných diferencí byla numericky řešena inverzní úloha, ve které jsme hledali optimální počáteční tloušťkový profil, který po zatížení membrány daným tlakem povede na konkrétní předepsaný deformovaný tvar její střednicové plochy. Toho lze v praxi využít například ke snížení optických aberací kapalinové čočky.

V páté publikaci [54] byl postup optimalizace počátečního tloušťkového profilu membrány rozšířen tak, aby předepsaného deformovaného tvaru dosáhla vnější plocha membrány (namísto střednicové plochy), na které se převážně odehrává lom světelných paprsků (index lomu optické kapaliny bývá velmi blízký indexu lomu materiálu membrány, a tedy na rozhraní optická kapalina – membrána k lomu téměř nedochází a lom se téměř výhradně odehrává na rozhraní membrána - vzduch).

Šestá publikace [55] přímo nesouvisí s tématem membránových kapalinových čoček, ale zabývá se analýzou průhybů sférických skleněných čoček způsobených vlastní tíhou optického skla, ze kterého jsou vyrobeny.

Problém byl popsán pomocí diferenciální rovnice popisující malé průhyby osově souměrných desek proměnné tloušťky a řešen pomocí tří různých numerických metod (metoda řad a optimalizace jejích koeficientů pomocí optimalizačních algoritmů programu Matlab, metoda konečných diferencí a Runge-Tuttova metoda 4. řádu).

Na konkrétních příkladech sférických čoček bylo ukázáno, že v některých případech průhyb způsobený vlastní tíhou dosahuje hodnot, které by již v praxi způsobovaly nepříjemnou odchylku od nominálního tvaru. Bylo také ukázáno, že při zmenšení poloměru podpěrného kroužku, na kterém je čočka uložena, se průhyb vlastní tíhou výrazně zmenšuje, a tedy je tato metoda jednou z možností, jak tento nechtěný jev redukovat.

V kapitole 4 byl do mechanického modelu osově souměrné membrány doplněn vliv ohybové tuhosti za uvážení tří různých variant materiálových modelů (Saint Venant-Kirchhoffův materiálový model, Biotův materiálový model a Timoshenkův zjednodušený model). Pro všechny tři zmiňované modely byla odvozena formulace pro řešení metodou konečných prvků, která byla implementována v programu Matlab.

Jednotlivé modely byly mezi sebou a s jejich „předchůdcem“ bez ohybové tuhosti porovnány v bezrozměrné parametrické studii, kde byly systematicky měněny následující parametry: maximální průhyb, počáteční předpětí, Poissonovo číslo a tloušťka membrány. Dále byla provedena studie jemnosti sítě konečných prvků a porovnání výsledků získaných za použití základního, nebo zpřesněného výrazu pro energii vnějších sil.

Pro různé varianty konstantní tloušťky membrány byly pro případ planokonvexní kapalinové čočky ukázány grafy příčné paprskové aberace v porovnání s variantou bez ohybové tuhosti a byla navržena metoda, pomocí které lze určit optimální konstantní tloušťku membrány planokonvexní kapalinové čočky tak, aby pro námi zvolenou limitní hodnotu poloměru rozptylového kroužku bylo nutné odclonit co nejmenší část z celkového poloměru membrány.

Nakonec byl v této kapitole také ukázán vliv ohybové tuhosti na příčnou paprskovou aberaci planokonvexní kapalinové čočky s membránou proměnné tloušťky navržené tak, aby se pro daný tlak optické kapaliny při zanedbatelné ohybové tuhosti deformovala membrána přesně do hyperboloidického tvaru.

Jak je z jednotlivých částí práce i z výše uvedeného souhrnu patrné, téma modelování tvaru membrán kapalinových čoček je stále živou oblastí výzkumu. Zmíněnými publikacemi v mezinárodních impaktovaných časopisech autor na tomto poli významným způsobem přispěl k současným znalostem. Část práce popisující doposud nepublikované výsledky je dále prohlubuje a naznačuje možnosti dalších výzkumných aktivit v oblasti tohoto výzkumu, a to např.:

- optimalizace tlouškového profilu membrány za účelem dosažení požadovaného deformovaného tvaru s uvážením vlivu ohybové tuhosti již ve fázi návrhu
- užití sofistikovanějších materiálových modelů vhodnějších pro popis chování hyperelastického materiálu, ze kterého jsou membrány kapalinových čoček vyráběny
- zkoumání vlivu vlastní tíhy optické kapaliny pro různá natočení kapalinové čočky apod.

Literatura

- [1] REN, H., S. T. WU. *Introduction to Adaptive Lenses*. Wiley (2012).
- [2] Varioptic, <http://www.varioptic.com>
- [3] Optotune, <http://www.optotune.com>
- [4] Flexible optical, <http://www.okotech.com>
- [5] TAG optics, <http://www.tag-optics.com>
- [6] SUGIURA, N. and S. MORITA, "Variable-focus liquid-filled optical lens," *Appl. Opt.* **32**, 4181–4186 (1993).
- [7] RAWICZ, A.H. and I. MIKHAILENKO. Modeling a variable-focus liquid-filled optical lens. *Appl. Opt.* **35** (1996), 1587-1589.
- [8] ZHANG, D. Y., N. JUSTIS, V. LIEN, Y. BERDICHEVSKY, Yu-Hwa LO. High-performance fluidic adaptive lenses. *Appl. Opt.* **43** (2004), 783-787.
- [9] REN, H., S.-T. WU, "Variable-focus liquid lens," *Opt. Express* **15**, 5931–5936 (2007).
- [10] WANG, L., H. OKU and M. ISHIKAWA, "Development of variable-focus lens with liquid-membrane-liquid structure and 30 mm optical aperture," (2013).
- [11] CHOI, S. T., B. S. SON, G. W. SEO, S.-Y. PARK and K.-S. LEE, "Optomechanical analysis of nonlinear elastomer membrane deformation under hydraulic pressure for variable-focus liquid-filled microlenses," *Opt. Express* **22**, 6133–6146 (2014).
- [12] YANG, Q., P. KOBRIN, C. SEABURY, S. NARAYANASWAMY, and W. CHRISTIAN, "Mechanical modeling of fluid-driven polymer lenses," *Appl. Opt.* **47**, 3658–3668 (2008).
- [13] WANG L., H. OKU, and M. ISHIKAWA, "An improved low-optical-power variable focus lens with a large aperture," *Opt. Express* **22**, 19448–19456 (2014).
- [14] SHAW, D., C.-W. LIN, "Design and analysis of an asymmetrical liquidfilled lens," *Optical Engineering* **46**, 123002–123002–8 (2007).
- [15] HASAN, N., A. BANERJEE, H. KIM and C. H. MASTRANGELO, "Tunable-focus lens for adaptive eyeglasses," *Opt. Express* **25**, 1221–1233 (2017).

- [16] CHOI, H., D. S. HAN and Y. H. WON, "Adaptive double-sided fluidic lens of polydimethylsiloxane membranes of matching thickness," *Opt. Lett.* 36, 4701–4703 (2011).
- [17] WANG, L. Li, Q.-H., W. JIANG, "Liquid lens with double tunable surfaces for large power tunability and improved optical performance," *Journal of Optics* 13, 115503 (2011).
- [18] FUH, Y.-K., M.-X. LIN and S. LEE, "Characterizing aberration of a pressure-actuated tunable biconvex microlens with a simple spherically corrected design," *Optics and Lasers in Engineering* 50, 1677 – 1682(2012).
- [19] LIANG, D., X.-Y. WANG, "A bio-inspired optical system with a polymer membrane and integrated structure," *Bioinspiration and Biomimetics* 11, 066008 (2016).
- [20] DU, J.-W., X.-Y. WANG, and D. LIANG, "Bionic optical imaging system with aspheric solid–liquid mixed variable-focus lens," *Optical Engineering* 55, 023105 (2016).
- [21] MISHRA, K., C. MURADE, B. CARREEL, I. ROGHAI, J. M. OH, G. MANUKYAN, D. VAN DEN ENDE and F. MUGELE, "Modeling a variable-focus liquid-filled optical lens," *Scientific Reports* 4, 6378 (2014).
- [22] SHAW, D., T. E. SUN, "Optical properties of variable-focus liquid-filled optical lenses with different membrane shapes," *Optical Engineering* 46, 024002–024002–6 (2007).
- [23] YU, H., G. ZHOU, H. M. LEUNG, and F. S. CHAU, "Tunable liquid-filled lens integrated with aspherical surface for spherical aberration compensation," *Optics Express* 18, 9945–9954 (2010).
- [24] FENG, G.-H., Y.-C. CHOU, "Flexible meniscus/biconvex lens system with fluidic-controlled tunable-focus applications," *Appl. Opt.* 48, 3284–3290 (2009).
- [25] SCHNEIDER, F., J. DRAHEIM, R. KAMBERGER, P. WAIBEL, and U. WALLRABE, "Optical characterization of adaptive fluidic silicone-membrane lenses," *Opt. Express* 17, 11813–11821 (2009).
- [26] SANTIAGO-ALVARADO, A., J. GONZÁLEZ-GARCÍA, F. ITUBIDE-JIMÉNEZ, M. CAMPOS-GARCÍA, V. CRUZ-MARTINEZ and P. RAFFERTY, "Simulating the functioning of variable focus length liquid-filled lenses using the finite element method (fem)," *Optik - International Journal for Light and Electron Optics* 124, 1677–1682 (2013).
- [27] HUANG, H., K. WEI, Q. WANG, and Y. ZHAO, "Improved optical resolution for elastomer-liquid lens at high diopter using varied thickness membrane," *Proc. SPIE 9705, Microfluidics, BioMEMS, and Medical Microsystems XIV*, 970504 (24 March 2016).
- [28] DING, Z., C. WANG, Z. HU, Z. CAO, Z. ZHOU, X. CHEN, H. CHEN and W. QIAO, "Surface profiling of an aspherical liquid lens with a varied thickness membrane," *Opt. Express* 25, 3122–3132 (2017).

- [29] ZHAO, P., A. ÇAGLAR and H. ZAPPE, "Spherical aberration free liquidfilled tunable lens with variable thickness membrane," *Opt. Express* 23, 21264–21278 (2015).
- [30] TIMOSHENKO, S. P., S. WOINOWSKY-KRIEGER. *Theory of Plates and Shells*, McGraw Hill Higher Education, New York, 1964.
- [31] TRÄGER, Frank, ed. *Springer handbook of lasers and optics*. 2nd ed. Dordrecht: Springer, c2012. ISBN 978-3-642-19408-5.
- [32] MIKŠ, A. *Aplikovaná optika*. V Praze: České vysoké učení technické, 2009. ISBN 978-80-01-04254-0.
- [33] HENCKY, H., "On the stress state in circular plates with vanishing bending stiffness," *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 63, 311–317 (1915).
- [34] CAMPBELL, J. D., "On the theory of initially tensioned circular membranes subjected to uniform pressure," *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 9 (1956).
- [35] GOLDBERG, M. A., A. B. PIFKO, "Large deflection analysis of uniformly loaded annular membranes," *AIAA Jnl* 1, 2111–2115 (1963).
- [36] PIFKO, A. B., M. A. GOLDBERG, "Iterative and power series solutions for the large deflection of an annular membrane," *AIAA Jnl* 2, 1340–1342(1964).
- [37] PERRONE, N., R. KAO, "A general nonlinear relaxation technique for solving nonlinear problems in mechanics," *J. appl. Mech.* 38, 371–376(1971).
- [38] KAO, R., N. PERRONE, "Large deflections of axisymmetric circular membranes," *International Journal of Solids and Structures* 7, 1601–1612 (1971).
- [39] KELKAR, A., W. ELBER, I. RAJU, "Large deflections of circular isotropic membranes subjected to arbitrary axisymmetric loading," *Computers and Structures* 21, 413–421 (1985).
- [40] W. FICHTER, *Some Solutions for the Large Deflections of Uniformly Loaded Circular Membranes*, NASA technical paper (National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center, 1997).
- [41] ALLMAN, D., "Variational solutions for the nonlinear deflexion of an annular membrane under axial load," *International Journal of Mechanical Sciences* 24, 749–753 (1982).
- [42] SHEPLAK, M., J. DUGUNDJI, "Large deflections of clamped circular plates under initial tension and transitions to membrane behavior," *J. appl. Mech.* 65 (1998).
- [43] ZHAO, F., "Nonlinear solutions for circular membranes and thin plates," *Proc SPIE*. 6926. 10.1117/12.775511 (2008).
- [44] STANFORD, B., P. IFJU, "The validity range of low fidelity structural membrane models," *Experimental Mechanics* 48, 697 (2008).

- [45] MIKŠ, A., P. NOVÁK, "Calculation of a surface shape of a pressure actuated membrane liquid lens," *Optics and Lasers in Engineering* 58, 60–66 (2014).
- [46] MathWorks, <http://www.mathworks.com>.
- [47] WELFORD, W.T. (1986). *Aberrations of Optical Systems* (1st ed.). Routledge. <https://doi.org/10.1201/9781315136530>
- [48] SMITH, WARREN J.. *Modern Optical Engineering: The Design of Optical Systems*, Fourth Edition (The McGraw-Hill Companies, Inc., 2008, 2000, 1990, 1966).
- [49] MCLEOD, ROBERT. *Design of High-Performance Optical Systems*, výukové materiály, University of Colorado Boulder. <https://www.coursera.org/learn/design-high-performance-optical-systems>
- [50] POKORNÝ, P., F. ŠMEJKAL, P. KULMON, P. NOVÁK, J. NOVÁK, A. MIKŠ, M. HORÁK and M. JIRÁSEK, "Calculation of nonlinearly deformed membrane shape of liquid lens caused by uniform pressure," *Appl. Opt.* 56, 5939–5947 (2017).
- [51] POKORNÝ, P., F. ŠMEJKAL, P. KULMON, P. NOVÁK, J. NOVÁK, A. MIKŠ, M. HORÁK and M. JIRÁSEK, "Deformation of a prestressed liquid lens membrane," *Appl. Opt.* 56, 9368–9376 (2017).
- [52] MIKŠ, A. and F. ŠMEJKAL, "Dependence of the imaging properties of the liquid lens with variable focal length on membrane thickness," *Appl. Opt.* 57, 6439–6445 (2018).
- [53] JIRÁSEK, M., F. ŠMEJKAL, M. HORÁK, "Pressurized axisymmetric membrane deforming into a prescribed shape", *International Journal of Solids and Structures*, 198, 1-16 (2020), 10.1016/j.ijsolstr.2020.04.021.
- [54] ŠMEJKAL, F, A. MIKŠ, P. POKORNÝ. Design of membrane thickness for a focus-variable liquid lens with a defined shape of the membrane's outer surface. *Optik* [online]. 2021, 244 [cit. 2021-9-1]. ISSN 00304026, doi:10.1016/j.ijleo.2021.167507
- [55] POKORNÝ, P., F. ŠMEJKAL, A. MIKŠ, „Deformation of a spherical lens caused by its own weight“, *Appl. Opt.* 56 (2017), 9984-9991.
- [56] "Sylgard 184 silicone elastomer kit," <http://www.dowcorning.com/applications/search/products/Details.aspx?prod=01064291>.
- [57] MIKŠ, A. and P. POKORNÝ, "Double curvature membrane lens," *Appl. Opt.* 59, 9924-9930 (2020)
- [58] MIKŠ, A. and P. POKORNÝ, "Design of zoom systems composed of lenses with variable focal length," *Appl. Opt.* 59, 10838-10845 (2020)
- [59] MIKŠ, A. and P. POKORNÝ, "Hybrid liquid-membrane lenses made by one fixed and one or two active optical components," *J. Opt. Soc. Am. A* 38, 99-107 (2021)

[60] WRIGGERS, P. (2008) Nonlinear Finite Element Methods. Springer-Verlag, New York.

[61] OSLO, <http://lambdares.com/oslo>.

Příloha A – Kopie vybraných publikací autora souvisejících s disertační prací

- A.1. POKORNÝ, P., F. ŠMEJKAL, P. KULMON, P. NOVÁK, J. NOVÁK, A. MIKŠ, M. HORÁK and M. JIRÁSEK, "Calculation of nonlinearly deformed membrane shape of liquid lens caused by uniform pressure," *Appl. Opt.* 56, 5939–5947 (2017).
- A.2. POKORNÝ, P., F. ŠMEJKAL, P. KULMON, P. NOVÁK, J. NOVÁK, A. MIKŠ, M. HORÁK and M. JIRÁSEK, "Deformation of a prestressed liquid lens membrane," *Appl. Opt.* 56, 9368–9376 (2017).
- A.3. MIKŠ, A. and F. ŠMEJKAL, "Dependence of the imaging properties of the liquid lens with variable focal length on membrane thickness," *Appl. Opt.* 57, 6439–6445 (2018).
- A.4. JIRÁSEK, M., F. ŠMEJKAL, M. HORÁK, "Pressurized axisymmetric membrane deforming into a prescribed shape", *International Journal of Solids and Structures*, 198, 1-16 (2020), 10.1016/j.ijsolstr.2020.04.021.
- A.5. ŠMEJKAL, F, A. MIKŠ, P. POKORNÝ. Design of membrane thickness for a focus-variable liquid lens with a defined shape of the membrane's outer surface. *Optik* [online]. 2021, 244 [cit. 2021-9-1]. ISSN 00304026, doi:10.1016/j.ijleo.2021.167507
- A.6. POKORNÝ, P., F. ŠMEJKAL, A. MIKŠ, „Deformation of a spherical lens caused by its own weight“, *Appl. Opt.* 56 (2017), 9984-9991.

Calculation of nonlinearly deformed membrane shape of liquid lens caused by uniform pressure

PETR POKORNÝ,^{1,*}  FILIP ŠMEJKAL,¹ PAVEL KULMON,¹ PAVEL NOVÁK,¹ JIŘÍ NOVÁK,¹ ANTONÍN MIKŠ,¹ MARTIN HORÁK,² AND MILAN JIRÁSEK²

¹Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Physics, Thákurova 7, 166 29 Prague, Czech Republic

²Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Mechanics, Thákurova 7, 166 29 Prague, Czech Republic

*Corresponding author: petr.pokorny@fsv.cvut.cz

Received 25 April 2017; revised 28 June 2017; accepted 28 June 2017; posted 29 June 2017 (Doc. ID 294575); published 18 July 2017

The paper discusses a numerical calculation of deformation of a circular axisymmetric membrane of a liquid lens caused by the pressure of an optical liquid. Since such deflections of the membrane are many times larger than the membrane thickness, a nonlinear model is applied and generalized relationships are derived that characterize the resulting shape with a high precision and permit an accurate analysis of imaging properties of the lens and of optical aberrations. By comparison with experimental data, it is shown that the presented model is suitable to describe the deformation of the membrane of the lens. © 2017 Optical Society of America

OCIS codes: (120.4640) Optical instruments; (220.1080) Active or adaptive optics; (350.4600) Optical engineering.

<https://doi.org/10.1364/AO.56.005939>

1. INTRODUCTION

In recent years, a rapid development and application of so-called active lenses with tunable parameters have been noticed [1]. Such lenses can change their internal or external parameters in a predefined way and correspondingly modify the generated optical image. There are many ways that the lens parameters can be varied. One of the most widespread types are membrane liquid lenses [1–23]. At present, some of these optical elements are produced commercially [2,3] and applied in various imaging applications. The fundamental component of the lens is a membrane clamped at its edges, covering a chamber with an optical liquid, as is schematically shown in Fig. 1(a). By changing the volume of the liquid, the shape of the membrane can be changed and the optical properties of the lens can be controlled [Fig. 1(b)]. Various authors analyzed both theoretically (numerically) and experimentally the deflection of membrane elements under uniform fluid pressure incorporated in different types of membrane fluidic lenses using different mechanical models of elastic membranes [4–23]. The accurate modeling of the shape of the deflected membrane of a fluidic lens is crucial for optical properties of such lenses.

To precisely predict imaging properties of membrane liquid lenses, one has to know the shape of the membrane surface after deformation very accurately. Considering large deformations, compared to the membrane thickness, a classical linear theory [24,25] typically used in mechanics or civil engineering does not provide sufficient accuracy. Large deformations and stresses

in plates were studied by Hencky [26] and Chein [27]. Campbell [28] generalized Hencky's solution to the case with initial stress. Numerical procedures based on iterative calculations of derived differential equations and series solutions were presented by Goldberg and Pifko [29,30]. A modified method of finite differences for a system of nonlinear differential equations describing strains and stresses was presented by Kao and Perrone [31,32]. Pettit solved a system of three differential equations using the Runge–Kutta method of the fourth order [33]. A solution based on stress determination by the Newton–Raphson method was carried out by Kelkar *et al.* [34]. A solution based on series and analytical expressions for the series coefficients was published by Fichter [35]. Allman presented examples of variational solutions for the nonlinear deflection of an annular membrane [36]. Shepload and Dugundji presented solutions for clamped circular plates under initial tension with transition to membrane behavior [37]. Zhao [38] showed nonlinear models for prestretched and postheated membrane solved by both the Ritz method and the Galerkin method. Stanford and Ifju studied the validity range of low-fidelity structural membrane models [39]. A generalized solution for large deflections was derived by Mikš and Novák [40] with the use of optimization algorithms.

In the aforementioned works, the authors built their solutions on various assumptions and boundary conditions, and therefore the nonlinear differential equations and their solutions are different. This paper presents an approach based on precise

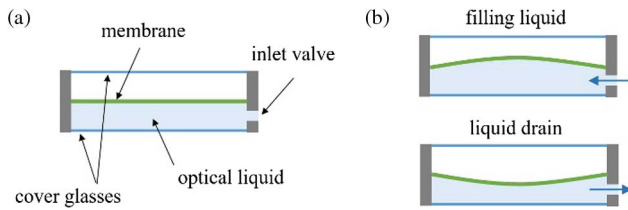


Fig. 1. (a) Scheme of liquid membrane lens and (b) result of a change of liquid volume.

geometrical equations and the Saint Venant–Kirchhoff material model, which postulates a linear relationship between the Green–Lagrange strain and the second Piola–Kirchhoff stress [41]. Since the problem does not have an exact analytical solution, optimization algorithms [42,43] are applied to series expansions. The presented derived model is illustrated by an example and verified by a laboratory experiment. It is shown that such an approach gives very accurate results, and it can be used for an accurate optical design of optical systems with incorporated membrane liquid lenses because it permits the analysis of their imaging properties.

2. VARIATIONALLY CONSISTENT DERIVATION OF GOVERNING EQUATIONS FOR LARGE DEFORMATIONS OF MEMBRANE OF LIQUID LENSES

Consider a membrane of a liquid lens to be circular and axis-symmetrical around axis z , which intersects the center of the lens as is shown in Fig. 2. The radius of the membrane is denoted as a , the vertical deflection of the membrane is described by function $w(r)$, and the horizontal (radial) displacement is described by $u(r)$. The membrane is assumed to have a constant thickness h . Any chosen point on the middle surface of the membrane will move to the position $[r + u(r), w(r)]$. The deformed shape of the membrane is described by a function $g(r)$ implicitly defined by the relation $g(r + u(r)) = w(r)$. Let us also suppose that the membrane is clamped at its edge, and its bending stiffness is negligible.

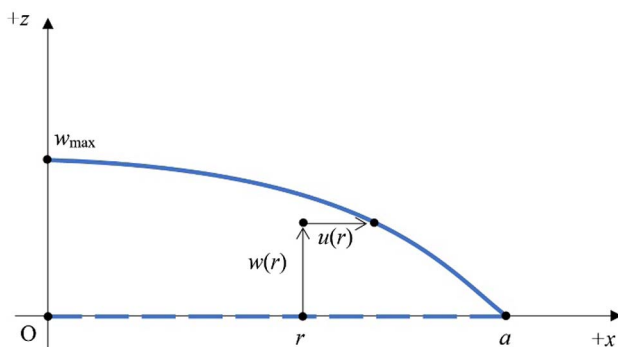


Fig. 2. Scheme of deformation of circular axis-symmetrical membrane under constant pressure (dashed line—membrane under zero pressure, $w(r)$ and $u(r)$ —displacements of a point with initial position $[r, 0]$, a —membrane radius, w_{\max} —maximal deflection).

As was already mentioned in the introduction, the constitutive behavior is described by the Saint Venant–Kirchhoff material model, which deals with the Green–Lagrange strain and the second Piola–Kirchhoff stress [41]. Normal strains in the radial direction, ε_r , and in the tangential direction, ε_t , are then expressed as

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{2}(\lambda_r^2 - 1) = u' + \frac{1}{2}(u'^2 + w'^2), \\ \varepsilon_t &= \frac{1}{2}(\lambda_t^2 - 1) = \frac{u}{r} + \frac{w'^2}{2r^2},\end{aligned}\quad (1)$$

where u' and w' are derivatives of displacements with respect to the radial coordinate r , and

$$\begin{aligned}\lambda_r &= \sqrt{(1 + u')^2 + w'^2}, \\ \lambda_t &= 1 + \frac{u}{r}\end{aligned}\quad (2)$$

are stretches in the radial and tangential directions. Since the material is in a plane-stress state and the shear strain γ_{rt} vanishes, the strain density energy Λ_{int} (per unit initial volume) is expressed as [24,25]

$$\Lambda_{\text{int}}(\varepsilon_r, \varepsilon_t) = \frac{E}{2(1 - \nu^2)}(\varepsilon_r^2 + 2\nu\varepsilon_r\varepsilon_t + \varepsilon_t^2), \quad (3)$$

where E is the Young modulus and ν is the Poisson ratio. These elastic constants are characteristics of the chosen material of the membrane.

Differentiation of the elastic potential, Eq. (3), leads to the stress-strain equations [24,25]

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\partial \Lambda_{\text{int}}}{\partial \varepsilon_r} = \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_t), \\ \sigma_t &= \frac{\partial \Lambda_{\text{int}}}{\partial \varepsilon_t} = \frac{E}{1 - \nu^2}(\nu\varepsilon_r + \varepsilon_t).\end{aligned}\quad (4)$$

For a constant pressure p , one can express the total potential energy E_p of the pressurized membrane as

$$E_p = E_{\text{int}} + E_{\text{ext}}, \quad (5)$$

where

$$E_{\text{int}} = 2\pi h \int_0^a \Lambda_{\text{int}} r dr \quad (6)$$

is the stored elastic energy (work done by internal forces), and

$$E_{\text{ext}} = -2\pi p \int_0^a w(r + u)(1 + u') dr \quad (7)$$

is the potential energy of external forces.

The stable equilibrium state of the membrane corresponds to the minimum of potential energy E_p and so the first variation of potential energy at this state must vanish. The first variation of the stored elastic energy can be expressed as

$$\begin{aligned}\delta E_{\text{int}} &= 2\pi h \int_0^a \left(\frac{\partial \Lambda_{\text{int}}}{\partial \varepsilon_r} \delta \varepsilon_r + \frac{\partial \Lambda_{\text{int}}}{\partial \varepsilon_t} \delta \varepsilon_t \right) r dr \\ &= 2\pi h \int_0^a (\sigma_r \delta \varepsilon_r + \sigma_t \delta \varepsilon_t) r dr.\end{aligned}\quad (8)$$

As follows from Eq. (1), the strain variations are linked to the displacement variations by

$$\begin{aligned} \delta \epsilon_r &= \delta u' + u' \delta u' + w' \delta w', \\ \delta \epsilon_t &= \frac{\delta u}{r} + \frac{u \delta u}{r^2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Substituting these expressions into Eq. (8), making use of Eq. (4) and integrating by parts, we obtain

$$\begin{aligned} \delta E_{\text{int}} &= 2\pi h \int_0^a \left(r\sigma_r(\delta u' + u' \delta u' + w' \delta w') \right. \\ &\quad \left. + \sigma_t \left(\delta u + \frac{u \delta u}{r} \right) \right) dr \\ &= 2\pi h [r\sigma_r(\delta u + u' \delta u + w' \delta w)]_{r=0}^a \\ &\quad - 2\pi h \int_0^a ((r\sigma_r(1 + u'))' \delta u + (r\sigma_r w')' \delta w) dr \\ &\quad + 2\pi h \int_0^a \sigma_t \left(\delta u + \frac{u \delta u}{r} \right) dr. \end{aligned} \tag{10}$$

In a similar fashion, the variation of the potential energy of external forces is expressed as

$$\begin{aligned} \delta E_{\text{ext}} &= -2\pi p \int_0^a \delta w(r + u)(1 + u') dr - 2\pi p \int_0^a w \delta u(1 + u') dr \\ &\quad - 2\pi p \int_0^a w(r + u) \delta u' dr \\ &= -2\pi p \int_0^a \delta w(r + u)(1 + u') dr - 2\pi p [w(r + u) \delta u]_{r=0}^a \\ &\quad + 2\pi p \int_0^a w'(r + u) \delta u dr. \end{aligned} \tag{11}$$

Admissible displacement functions must satisfy boundary conditions

$$u(0) = 0, \quad u(a) = 0, \quad w(a) = 0, \tag{12}$$

and analogous conditions must be satisfied by the variations δu and δw . Consequently, most of the boundary terms in Eqs. (10), (11) vanish and the variation of total potential energy can be written as

$$\begin{aligned} \delta E_p &= \delta E_{\text{int}} + \delta E_{\text{ext}} \\ &= -2\pi h r \sigma_r w' \delta w|_{r=0} \\ &\quad + 2\pi \int_0^a \left(h\sigma_t \left(1 + \frac{u}{r} \right) - h(r\sigma_r(1 + u'))' \right. \\ &\quad \left. + p w'(r + u) \right) \delta u dr \\ &\quad - 2\pi \int_0^a (h(r\sigma_r w')' + p(r + u)(1 + u')) \delta w dr. \end{aligned} \tag{13}$$

Since the values of variations δu and δw in the open interval $(0, a)$ are arbitrary, the terms that multiply these variations in the integrals must vanish (almost everywhere). The corresponding optimality conditions

$$\begin{aligned} h[r\sigma_r(1 + u)]' - h\sigma_t \left(1 + \frac{u}{r} \right) &= p(r + u)w', \\ -h(r\sigma_r w')' &= p(r + u)(1 + u') \end{aligned} \tag{14}$$

represent the strong form of equilibrium equations. In the case of small radial displacements, we have $u' \ll 1$ and $u \ll r$, and Eq. (14) reduce to

$$\begin{aligned} h(r\sigma_r)' - h\sigma_t &= prw', \\ -h(r\sigma_r w')' &= pr. \end{aligned} \tag{15}$$

Such simplified equilibrium equations are considered in papers [24–40]. The present paper deals with the more accurate equilibrium Eq. (14).

It is also interesting to look at the structure of the boundary conditions. At $r = a$, conditions $u(a) = 0$ and $w(a) = 0$ describe the constraints imposed by fixing the physical boundary of the membrane. On the other hand, point $r = 0$ physically corresponds to the center of the membrane and becomes a part of the (mathematical) boundary only when the domain of analysis is reduced to the interval $[0, a]$ based on axial symmetry. Continuity of the radial displacement implies that $u(0) = 0$, but continuity of the deflection does not lead to any constraint on $w(0)$. Consequently, the variation δw at $r = 0$ is arbitrary, and the missing boundary condition would normally be obtained by setting the term that multiplies $\delta w(0)$ in Eq. (13) to zero. In the present case, this term, given by $-2\pi h r \sigma_r w'$, seems to vanish automatically at $r = 0$. However, one should realize that this reasoning is based on the implicit assumption that $\sigma_r w'$ remains bounded as $r \rightarrow 0$. In principle, a concentrated force F_0 could be applied at the center of the membrane, and then the stress would be unbounded. The potential energy would have to be enriched by the term $-F_0 w(0)$, and the resulting boundary condition would read

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} (r\sigma_r w') = -\frac{F_0}{2\pi h}. \tag{16}$$

Note that $Q(r) = 2\pi h r \sigma_r(r) w'(r)$ corresponds to the transversal component of the specific internal force integrated along a circle of radius r , and Eq. (16) can be interpreted as $Q(0) = -F_0$. The second equilibrium equation from Eq. (14) can be rewritten as

$$-Q' = 2\pi p(r + u)(1 + u'). \tag{17}$$

Integrating and taking into account condition $Q(0) = -F_0$, we obtain

$$Q(r) = -F_0 - \pi p(r + u(r))^2. \tag{18}$$

This relation represents the equilibrium condition written for the part of the membrane which, in the undeformed configuration, has the shape of a disk of radius r .

While the boundary conditions of Eq. (12) are kinematic and, from the mathematical point of view, are essential, the fourth boundary condition of Eq. (16) is static, and it does not need to be imposed *a priori* on trial functions that approximate the exact solution. In the absence of a concentrated force, it can be expected that the deflection is continuously differentiable over the entire membrane. Combined with axial symmetry, continuous differentiability implies that

$$w'(0) = 0. \tag{19}$$

This condition is not essential, but if it is satisfied by the numerical approximation of the exact solution, faster convergence

can be expected. Therefore, in the following section, we will consider Eqs. (12) and (19) as the appropriate boundary conditions.

3. NUMERICAL SOLUTION OF CALCULATION OF MEMBRANE'S DEFORMATION

Since Eq. (14) cannot be solved analytically, a numerical procedure based on series expansion will be presented in this paper. Instead of solving the differential equations directly, we can exploit the fact that the solution minimizes potential energy among all kinematically admissible states. The displacement functions will be approximated by suitable polynomial series, the potential energy will be expressed as a function of the series coefficients, and an appropriate optimization algorithm will be invoked [42,43]. Direct minimization of the potential energy given by Eq. (5) turns out to be more robust than, e.g., minimization of the residual in Eq. (14). It is convenient to introduce a dimensionless spatial coordinate $\rho = r/a$ and solve the problem on the interval $[0, 1]$. In terms of the dimensionless coordinate, the potential energy and strains can be expressed as

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{a^2 E \pi h}{(1-\nu^2)} \int_0^1 (\varepsilon_r^2 + 2\nu\varepsilon_r\varepsilon_t + \varepsilon_t^2) \rho d\rho \\ &\quad - 2\pi p a^2 \int_0^1 w \left(\rho + \frac{u}{a} \right) \left(1 + \frac{u'}{a} \right) d\rho, \\ \varepsilon_r &= \frac{u'}{a} + \frac{1}{2a^2} (u^2 + w'^2), \\ \varepsilon_t &= \frac{u}{a\rho} + \frac{u^2}{2a^2\rho^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

To keep the notation simple, functions u and w are denoted by the same symbols even when they are considered as functions of the dimensionless variable ρ , and their derivatives with respect to ρ are in Eq. (20) denoted by primes.

As explained in detail in the previous section, the displacements should satisfy boundary conditions of Eqs. (12) and (19). From the symmetry of the problem it is clear that the deflection w should be an even function, and the radial displacement u should be an odd function. Therefore, let us use polynomial approximations in the form

$$w(\rho) = \sum_{i=1}^N b_i (1 - \rho^{2i}), \quad u(\rho) = \sum_{j=1}^M c_j (\rho - \rho^{2j+1}), \quad (21)$$

where $b_i (i = 1, 2, \dots, N)$ and $c_j (j = 1, 2, \dots, M)$ are coefficients to be found. Such approximations automatically satisfy the boundary conditions. The maximal deflection

$$w_{\max} = w(0) = \sum_{i=1}^N b_i \quad (22)$$

corresponds to the sum of all coefficients b_i . To express the resulting displacements as functions of the variable r , the following formulas can be applied [as can be obtained from the substitution $\rho = r/a$ and Eq. (21)], as follows:

$$w(r) = \sum_{i=1}^N b_i \left(1 - \frac{r^{2i}}{a^{2i}} \right), \quad u(r) = \frac{r}{a} \sum_{j=1}^M c_j \left(1 - \frac{r^{2j}}{a^{2j}} \right). \quad (23)$$

The procedure can be summarized as follows:

1. Choose an appropriate series expansion that approximates displacement functions $w(\rho)$ and $u(\rho)$, and satisfies boundary conditions given by Eqs. (12) and (19). In the present study, Eq. (21) was used.
2. Substitute the approximation series [Eq. (21) in the present case] into Eq. (20) and find the unknown coefficients based on the condition of minimum of potential energy E_p , using an appropriate optimization algorithm.
3. Calculate the resulting displacements according to Eq. (21) or Eq. (23), and the final shape of the membrane given by the function $g(r + u(r)) = w(r)$.

4. EXAMPLE

To illustrate the aforementioned procedure, let us analyze a membrane using the same parameters as Mikš and Novák in their paper [40]: radius $a = 10$ mm, thickness $h = 0.1$ mm, Young modulus $E = 1.97$ MPa, Poisson ratio $\nu = 0.4$, and pressure $p = 0.001 \cdot E = 1.97$ kPa.

The calculation was done in the MATLAB software, exploiting the large-scale interior-point algorithm with Hessian update by the Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno method [42,43]. As a check, the residuals in equilibrium Eq. (14) were calculated. The maximal absolute value of residuals (i.e., differences between the left- and the right-hand side) was $2.8 \cdot 10^{-3}$ Pa for the first equation and $1.3 \cdot 10^{-3}$ Pa for the second equation (for equations rewritten in terms of the dimensionless coordinate $\rho = r/a$).

The calculated displacements $w(r)$ and $u(r)$ are shown in Fig. 3. The red-dashed line indicates the approximate solution obtained with a simplified model based on assumptions $u' \ll 1$ and $u \ll r$ [Eq. (15)]. Figure 4 shows the resulting shape of

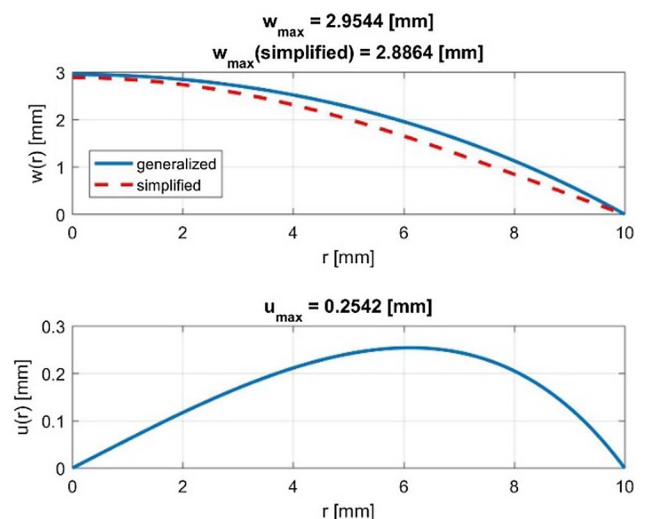


Fig. 3. Calculated displacements $w(r)$ and $u(r)$ and comparison with simplified model [Eq. (15), red-dashed line].

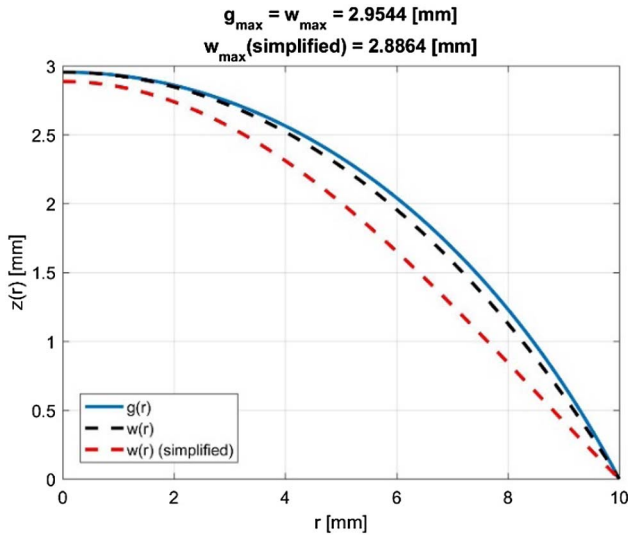


Fig. 4. Final membrane shape (blue line), vertical deflection (black dashed line) and comparison with simplified model [Eq. (15), red-dashed line].

the membrane $g(r)$, which was afterward approximated by an aspherical expression given by the formula

$$z(r) = z_{\max} + \frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - c^2r^2}} + \sum_{i=2}^5 A_{2i}r^{2i}, \quad (24)$$

where z_{\max} is the maximal deflection of the surface, $c = 1/R_0$ is the axial curvature, and $A_{2i} (i = 2, \dots, 5)$ are aspherical coefficients that characterize deviations from the sphere of radius R_0 . The results of the approximation are summarized in Table 1 for both the generalized and the simplified solution.

The final shape of the deformed membrane was compared to spherical approximations. The differences between the exact shape and its approximations by spheres are shown in Figs. 5 and 6. Three approximations are considered: 1) the spherical part of aspherical expression in Eq. (24) (i.e., aspherical coefficients $A_{2i} = 0$ for every i); 2) a sphere with the same maximal deflection at $r = 0$, passing through the edge of the membrane ($r = a$); and 3) a sphere with the same maximal deflection at $r = 0$ minimizing in the least-squares sense the differences between the calculated approximation and the exact membrane shape. RMS error values are specified in the figure. As is shown, the difference between the resulting membrane shape and a sphere is not negligible. Focusing on the differences between approximations shown in Fig. 6, one can say that the least average deflection is obtained in the case of approximation in the least-squares sense (case 3). However, considering the spherical shape as close as possible to the real one measured from the central part to the maximal distance, the best results are obtained with the spherical part of the aspherical expression

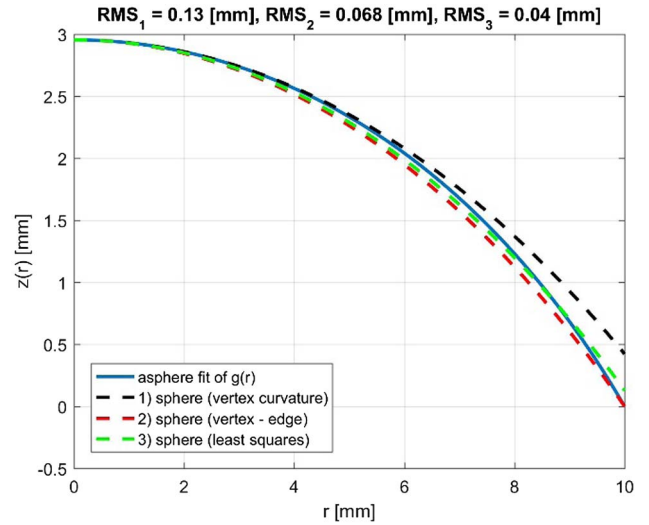


Fig. 5. Approximation of resulting membrane shape by different spheres: (1) spherical part of aspherical expression, (2) sphere matching the deflection at $r = 0$ and the edge of the membrane ($r = a$), (3) sphere matching the deflection at $r = 0$ and minimizing in the least-squares sense the deviation from the calculated membrane shape.

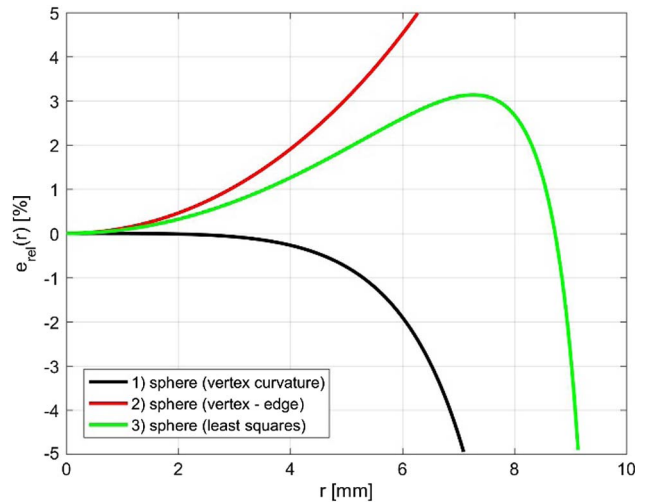


Fig. 6. Relative error of spherical approximations of the membrane shape: (1) spherical part of aspherical expression, (2) sphere matching the deflection at $r = 0$ and the edge of the membrane ($r = a$), (3) sphere matching the deflection at $r = 0$ and minimizing in the least-squares sense the deviation from the calculated membrane shape.

[spherical part of Eq. (24)]. Therefore, if one wants to use the region close to the optical axis for imaging purposes ($r \rightarrow 0$), the best approximation of the membrane shape will be given by the spherical part of Eq. (24). In the presented

Table 1. Approximation of Deformed Membrane Shape by Aspherical Expression

	z_{\max} [mm]	R_0 [mm]	A_4 [mm ⁻³]	A_6 [mm ⁻⁵]	A_8 [mm ⁻⁷]	A_{10} [mm ⁻⁹]	RMS [mm]
Complete model	2.9544	-21.0163	-2.4120e-05	-1.8963e-07	1.2167e-09	-1.1365e-11	4.9e-05
Simplified model	2.8864	-13.3843	1.3661e-04	1.7797e-07	-2.3620e-10	8.1189e-12	2.6e-05

example, the relative error will be less than 1% in one half of the studied region.

To illustrate imaging properties of the membrane lens, the results from the previous part were used for a simulation of aberrations. Calculated aspherical surfaces were used for optical ray-tracing in OSLO software. Figs. 7 a) and b) show the influence of the membrane's shape on the transversal spherical aberration of the membrane lens with thickness $b = 0.1$ mm. DX and DY denote the transversal ray aberrations, and FX and FY denote the height of an incident ray in the interval -5 mm to 5 mm. The diameter of the lens was chosen as 10 mm, and the calculation was made for the wavelength of light $\lambda = 587$ nm. The first figure [Fig. 7(a)] shows the transversal spherical aberration of the membrane lens with radius of curvature $R = 21.016$ mm and axial thickness $d = 5$ mm if the aspherical coefficients of approximation (24) are neglected. The liquid of the lens was distilled water. In the second figure [Fig. 7(b)], the transversal spherical aberration is shown for an aspherical membrane lens with the same vertex radius $R = 21.016$ mm and the same axial thickness, with the following values of aspherical coefficients: $A_4 = 2.41198e-05$ mm⁻³, $A_6 = 1.89627e-07$ mm⁻⁵, $A_8 = -1.21673e-09$ mm⁻⁷, and $A_{10} = 1.13654e-11$ mm⁻⁹. Both lenses have the same focal length $f' = 63.105$ mm. As is obvious from the figures, the membrane lens cannot be replaced by a spherical lens, because the difference in the aberrations is too large.

Let us now analyze the influence of the approximate solution of membrane deformation, which can be calculated from Eqs. (15), on the transversal spherical aberration of the lens with thickness $b = 0.1$ mm, radius of curvature $R = 21.016$ mm, and axial thickness $d = 5$ mm. The optical liquid is distilled water. The aspherical coefficients of this lens are $A_4 = -6.75618e-05$ mm⁻³, $A_6 = -1.49495e-08$ mm⁻⁵, $A_8 = -2.37860e-11$ mm⁻⁷, and $A_{10} = -3.77091e-14$ mm⁻⁹. Note that the shape of the membrane was calculated from Eq. (15) by varying the applied pressure to get the required radius of curvature. Figure 7(c) shows the transversal spherical aberrations. Comparing the results to Fig. 7(b) (solution based on the complete model), one can see that the spherical aberration is "undercorrected" by the solution based on Eq. (14), while the approximate solution of Eq. (15) gives an "overcorrected" spherical aberration. From the presented results, it is obvious that an accurate analysis of membrane lenses with variable focus must be based on the complete model, because the error in imaging properties caused by using the approximate approach is too large.

A very important parameter, which has a crucial effect on the calculated membrane deflection of the membrane lens and thus also on the imaging characteristics, is the membrane thickness. Therefore, the influence of thickness on imaging properties was studied in more detail. First, an initial calculation was done with a membrane of the same parameters as in the previous part, i.e., radius $a = 10$ mm, thickness $b = 0.1$ mm, Young modulus $E = 1.97$ MPa, Poisson ratio $\nu = 0.4$, and pressure $p = 0.001 \cdot E = 1.97$ kPa. The results of the approximation with Eq. (24) are presented in Table 1. Afterward, the thickness was varied and the pressure was optimized to get the same spherical part of the approximation of Eq. (24) as for the initial

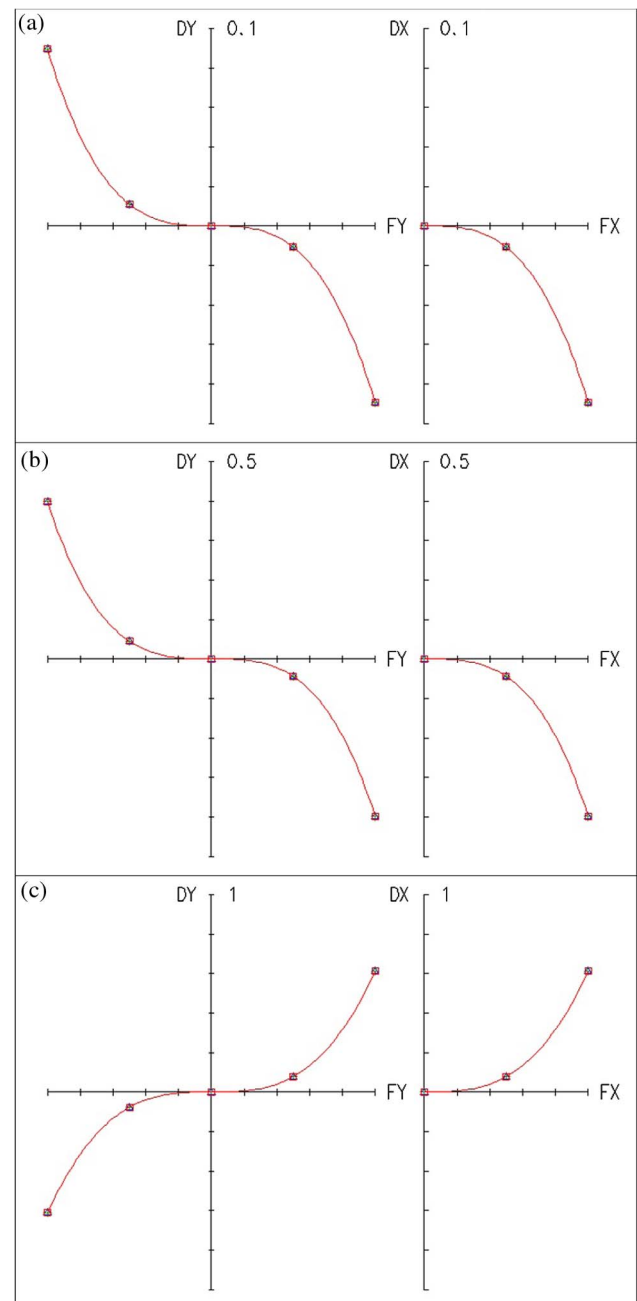


Fig. 7. Comparison of transversal spherical aberration of the membrane lens (a) with neglected aspherical coefficients of approximation (24), (b) with aspherical coefficients taken into account, (c) with aspherical coefficients taken into account but deformation calculated from simplified Eq. (15) and with the applied pressure adjusted to obtain the same paraxial properties (the same focal length) as with the general Eq. (14); DX and DY denote the transversal ray aberrations, and FX and FY denote the height of the incident ray in the interval from -5 mm to 5 mm.

parameters. Therefore, paraxial properties of the lens remain the same. However, aspherical coefficients and therefore aberrations of optical imaging change. Table 2 presents the results of the analysis. It is obvious that the thickness of the membrane affects the aspherical coefficients. A different pressure has to be

Table 2. Comparison of Applied Pressure and Aspherical Coefficients of Lenses with the Same Optical Paraxial Properties and Different Thicknesses

h [mm]	p [kPa]	z_{\max} [mm]	R_0 [mm]	A_4 [mm ⁻³]	A_6 [mm ⁻⁵]	A_8 [mm ⁻⁷]	A_{10} [mm ⁻⁹]
0.3	5.91	2.9544	-21.0163	-2.4123e-05	-1.8954e-07	1.2157e-09	-1.1361e-11
0.5	9.85			-2.4132e-05	-1.8927e-07	1.2125e-09	-1.1348e-11
0.7	13.79			-2.4149e-05	-1.8879e-07	1.2069e-09	-1.1326e-11

applied to obtain the same paraxial optical properties, and therefore various lenses can image differently.

5. EXPERIMENTAL VERIFICATION OF THEORETICAL RESULTS

The experimental measurement of a liquid membrane lens was done to check whether the theoretical prediction of membrane deflections corresponds to the real behavior. The scheme of the lens is shown in Fig. 8. The basic part is a chamber. The liquid (distilled water in our case) is injected by a precise pressure pump through an inlet valve. The cover of the lens is attached by screws and fixes the membrane (made of Sylgard 184 [44]), which is deformed depending on the amount of liquid carried into the chamber. The second part of the lens is a flat plane-parallel plate. The amount of liquid in the chamber can be reduced by a bleed valve. For the experiment, the chamber diameter was $D = 30$ mm and the membrane thickness $h = 0.5$ mm. Because mechanical parameters of the membrane change for different recipes of mixtures and are affected by thermal conditions during measurement, optimal values of mechanical parameters of the membrane used for the calculation (Young’s modulus $E = 1.1$ MPa and Poisson’s ratio $\nu = 0.45$) were obtained by minimizing the difference between the theoretically calculated and experimentally measured maximal membrane deflection.

The shape of the membrane was determined by a device for measurement of surface topography (see Fig. 9) with 4 degrees of freedom. The basic component of the device is a chromatic confocal sensor [45], which can be positioned using step motors in two mutually orthogonal directions (axis x and axis z) and rotated (around axis y). The sample can then be rotated using the measurement table, and data characterizing the complete topography can be obtained.

In view of the rotational symmetry of the lens, only the meridian $z = f(x)$ was measured. The range of measurement was from -5 mm to 5 mm because of mechanical construction of the device. The estimated uncertainty of the deflection

measurement using the aforementioned laboratory device is 0.02 mm (combination of uncertainties in the measurement with the confocal sensor and mechanical errors in the device).

The results of the measurement are shown in Fig. 10 and Table 3 for three pressures— $p = 3.0, 3.5,$ and 4.0 kPa—and the experimental values are compared to theoretical predictions calculated using the procedure presented in Section 3. RMS errors (differences between theoretically predicted and measured values) are $RMS_{3.0} = 0.033$ mm, $RMS_{3.5} = 0.024$ mm, and $RMS_{4.0} = 0.014$ mm. It is confirmed that the presented theoretical model corresponds very well to the real behavior.

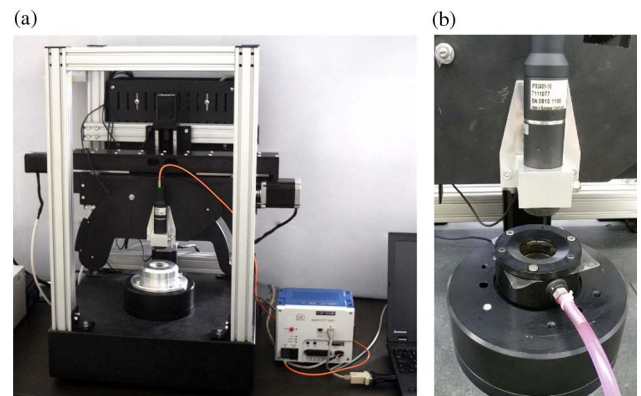


Fig. 9. (a) Laboratory device for surface topography measurement and (b) measured sample of liquid membrane lens of the measurement table.

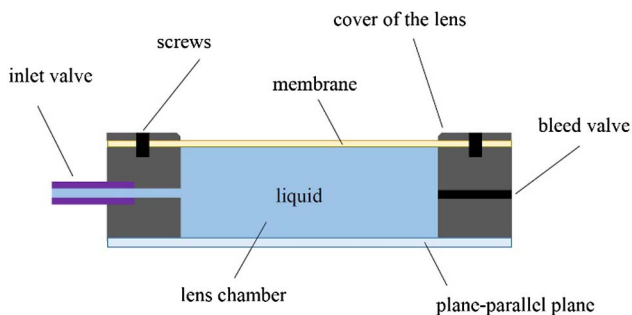


Fig. 8. Scheme of laboratory sample of liquid membrane lens.

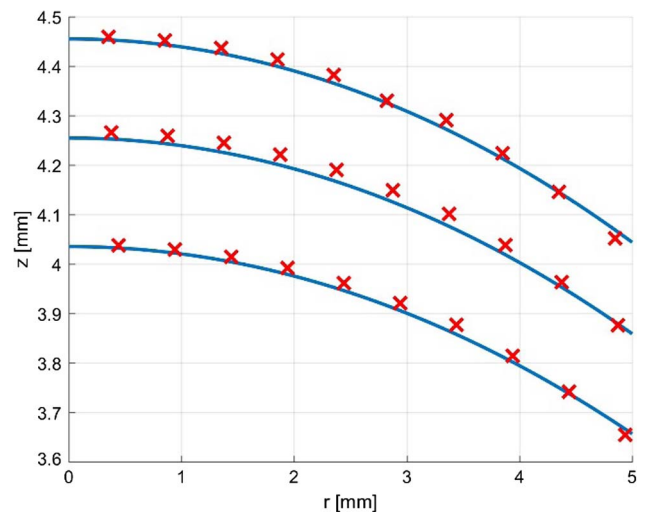


Fig. 10. Measured lens deformation (red crosses) and comparison to theoretical prediction (blue lines) for pressures $p = 3.0, 3.5,$ and 4.0 kPa.

Table 3. Approximation of Measured Membrane Shape by Aspherical Expression [Eq. (24)]

p [kPa]	z_{\max} [mm]	R_0 [mm]	A_4 [mm ⁻³]	A_6 [mm ⁻⁵]	A_8 [mm ⁻⁷]	A_{10} [mm ⁻⁹]	RMS [mm]
3.0	4.05	-32.24	4.483e-05	-3.879e-06	1.453e-08	-7.486e-12	1.5e-02
3.5	4.28	-28.60	1.657e-04	-5.835e-06	1.438e-08	3.673e-11	1.2e-02
4.0	4.47	-29.22	3.730e-05	-1.438e-06	-2.639e-09	3.630e-11	9.7e-03

Therefore, the method can be used for modeling the shape of membrane liquid lenses.

6. CONCLUSION

The paper presented a mathematical model and numerical solution for the calculation of the deformation of an axisymmetrical membrane liquid lens. The general formulas for deflections were derived based on precise geometrical equations and the Saint Venant–Kirchhoff material model, which assumes a linear relationship between the Green–Lagrange strain and the second Piola–Kirchhoff stress. The numerical solution was obtained by minimizing the potential energy. As one possible approach, an approximation using power series that satisfy the boundary conditions of the problem was presented. As is shown in an example and verified by an experiment, the derived general formulas and the numerical procedure can be used for accurate modeling of membrane liquid lenses. The results can be exploited in optical system design with incorporated liquid lenses, and the developed method will be used in the future for precise analysis of the imaging properties of such systems.

Funding. České Vysoké Učení Technické v Praze (CVUT) (SGS17/004/OHK1/1T/11).

REFERENCES

- H. Ren and S. T. Wu, *Introduction to Adaptive Lenses* (Wiley, 2012).
- Optotune, <http://www.optotune.com>.
- Holochip, <http://www.holochip.com>.
- A. H. Rawicz and I. Mikhailenko, "Modeling a variable-focus liquid-filled optical lens," *Appl. Opt.* **35**, 1587–1589 (1996).
- D. Y. Zhang, N. Justis, V. Lien, Y. Berdichevsky, and Y.-H. Lo, "High-performance fluidic adaptive lenses," *Appl. Opt.* **43**, 783–787 (2004).
- N. Sugiura and S. Morita, "Variable-focus liquid-filled optical lens," *Appl. Opt.* **32**, 4181–4186 (1993).
- H. Ren, D. Fox, P. A. Anderson, B. Wu, and S.-T. Wu, "Tunable-focus liquid lens controlled using a servo motor," *Opt. Express* **14**, 8031–8036 (2006).
- Q. Yang, P. Kobrin, C. Seabury, S. Narayanaswamy, and W. Christian, "Mechanical modeling of fluid-driven polymer lenses," *Appl. Opt.* **47**, 3658–3668 (2008).
- G.-H. Feng and Y.-C. Chou, "Flexible meniscus/biconvex lens system with fluidic-controlled tunable-focus applications," *Appl. Opt.* **48**, 3284–3290 (2009).
- H. W. Ren and S. T. Wu, "Variable-focus liquid lens," *Opt. Express* **15**, 5931–5936 (2007).
- D. Shaw and T. E. Sun, "Optical properties of variable-focus liquid-filled optical lenses with different membrane shapes," *Opt. Eng.* **46**, 024002 (2007).
- D. Shaw and C.-W. Lin, "Design and analysis of an asymmetrical liquid-filled lens," *Opt. Eng.* **46**, 123002 (2007).
- H. Choi, D. S. Han, and Y. H. Won, "Adaptive double-sided fluidic lens of polydimethylsiloxane membranes of matching thickness," *Opt. Lett.* **36**, 4701–4703 (2011).
- L. Li, Q. H. Wang, and W. Jiang, "Liquid lens with double tunable surfaces for large power tunability and improved optical performance," *J. Opt.* **13**, 115503 (2011).
- F. Schneider, J. Draheim, R. Kamberger, P. Waibel, and U. Wallrabe, "Optical characterization of adaptive fluidic silicone-membrane lenses," *Opt. Express* **17**, 11813–11821 (2009).
- Y.-K. Fuh, M.-X. Lin, and S. Lee, "Characterizing aberration of a pressure-actuated tunable biconvex microlens with a simple spherically-corrected design," *Opt. Lasers Eng.* **50**, 1677–1682 (2012).
- A. Miks, J. Novak, and P. Novak, "Algebraic and numerical analysis of imaging properties of thin tunable-focus fluidic membrane lenses with parabolic surfaces," *Appl. Opt.* **52**, 2136–2144 (2013).
- L. H. Wang, H. Oku, and M. Ishikawa, "Development of variable focus lens with liquid-membrane-liquid structure and 30 mm optical aperture," *Proc. SPIE* **8617**, 861706 (2013).
- L. H. Wang, H. Oku, and M. Ishikawa, "An improved low-optical-power variable focus lens with a large aperture," *Opt. Express* **22**, 19448–19456 (2014).
- S. T. Choi, B. S. Son, G. W. Seo, S. Y. Park, and K. S. Lee, "Optomechanical analysis of nonlinear elastomer membrane deformation under hydraulic pressure for variable-focus liquid-filled microlenses," *Opt. Express* **22**, 6133–6146 (2014).
- D. Liang and X.-Y. Wang, "A bio-inspired optical system with a polymer membrane and integrated structure," *Bioinsp. Biomim* **11**, 066008 (2016).
- J.-W. Du, X.-Y. Wang, and D. Liang, "Bionic optical imaging system with aspheric solid-liquid mixed variable-focus lens," *Opt. Eng.* **55**, 023105 (2016).
- N. Hasan, A. Banerjee, H. Kim, and C. H. Mastrangelo, "Tunable-focus lens for adaptive eyeglasses," *Opt. Express* **25**, 1221–1233 (2017).
- S. P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells* (McGraw Hill, 1964).
- A. S. Volmir, *Flexible Plates and Shells* (State Publishing House of Technical-Theoretical Literature, 1956), in Russian.
- H. Hencky, "On the stress state in circular plates with vanishing bending stiffness," *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **63**, 311–317 (1915).
- W. Z. Chein, "Asymptotic behavior of a thin clamped circular plate under uniform normal pressure at very large deflection," *Sci. Rep. Natn. Tsinghua Univ.* **A5**, 71–94 (1948).
- J. D. Campbell, "On the theory of initially tensioned circular membranes subjected to uniform pressure," *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **9**, 84–93 (1956).
- M. A. Goldberg and A. B. Pifko, "Large deflection analysis of uniformly loaded annular membranes," *AIAA J.* **1**, 2111–2115 (1963).
- M. A. Goldberg and A. B. Pifko, "Iterative and power series solutions for the large deflection of an annular membrane," *AIAA J.* **2**, 2234 (1964).
- N. Perrone and R. Kao, "A general nonlinear relaxation technique for solving nonlinear problems in mechanics," *J. Appl. Mech.* **38**, 371–376 (1971).
- R. Kao and N. Perrone, "Large deflections of axisymmetric circular membranes," *Int. J. Solids Structures* **7**, 1601–1612 (1971).
- R. G. Pettit, "Geometric and optical properties of inflatable point-focusing reflections," Master thesis (Brigham Young University, 1985).
- A. Kelkar, W. Elber, and I. S. Rajut, "Large deflections of circular isotropic membranes subjected to arbitrary axisymmetric loading," *Comput. Struct.* **21**, 413–421 (1985).
- W. B. Fichter, "Some Solutions for the Large Deflections of Uniformly Loaded Circular Membranes," NASA Technical Paper 3658 (1997).

36. D. J. Allman, "Variational solutions for the nonlinear deflexion of an annular membrane under axial load," *Int. J. Mech. Sci.* **24**, 749–753 (1982).
37. M. Sheplock and J. Dugundji, "Large deflections of clamped circular plates under initial tension and transitions to membrane behavior," *J. Appl. Mech.* **65**, 107 (1998).
38. F. Zhao, "Nonlinear solutions for circular membranes and thin plates," *Proc. SPIE* **6926**, 69260W (2008).
39. B. Stanford and P. Ifju, "The validity range of low fidelity structural membrane models," *Exp. Mech.* **48**, 697–711 (2008).
40. A. Mikš and P. Novák, "Calculation of a surface shape of a pressure actuated membrane liquid lens," *Opt. Lasers Eng.* **58**, 60–66 (2014).
41. B. Audoly and Y. Pomeau, *Elasticity and Geometry: From Hair Curls to the Nonlinear Response of Shells* (Oxford University, 2010).
42. M. Aoki, *Introduction to Optimization Techniques: Fundamentals and Applications of Nonlinear Programming* (Macmillan, 1971).
43. L. E. Scales, *Introduction to Non-Linear Optimization* (Macmillan, 1985).
44. Sylgard 184 Silicone Elastomer Kit <http://www.dowcorning.com/applications/search/products/Details.aspx?prod=01064291>.
45. Micro Epsilon, <http://www.micro-epsilon.co.uk/displacement-position-sensors/confocal-sensor/>.



Deformation of a prestressed liquid lens membrane

PETR POKORNÝ,^{1,*}  FILIP ŠMEJKAL,¹ PAVEL KULMON,¹ PAVEL NOVÁK,¹ JIŘÍ NOVÁK,¹ ANTONÍN MIKŠ,¹ MARTIN HORÁK,² AND MILAN JIRÁSEK²

¹Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Physics, Thákurova 7, 166 29 Prague 6, Czech Republic

²Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Mechanics, Thákurova 7, 166 29 Prague 6, Czech Republic

*Corresponding author: petr.pokorny@fsv.cvut.cz

Received 29 August 2017; accepted 23 October 2017; posted 25 October 2017 (Doc. ID 305850); published 22 November 2017

This paper presents a complete model for analysis of the deformed shape of a prestressed circular axisymmetric membrane of a liquid lens. The governing equations are derived using the exact relation between displacements and the Green–Lagrange strains combined with the Saint Venant–Kirchhoff material law, which postulates a linear relation between the Green–Lagrange strains and the second Piola–Kirchhoff stresses. A numerical solution based on minimization of potential energy is illustrated by an example, and the dependence of the maximum membrane deflection on material properties and initial prestress is analyzed. The theoretical model is then experimentally validated. It is shown that the model is suitable for large-strain analysis of liquid lens membranes and provides sufficiently accurate results that can be used in further analyses and simulations of imaging properties of active optical elements based on liquid lenses. © 2017 Optical Society of America

OCIS codes: (120.4640) Optical instruments; (220.1080) Active or adaptive optics; (350.4600) Optical engineering.

<https://doi.org/10.1364/AO.56.009368>

1. INTRODUCTION

Active optical elements represent a modern direction in optics, which in recent years has been under rapid development. They include well-known membrane liquid lenses [1–23], which are commercially available for imaging purposes [2,3]. The basic element of such lenses is a membrane fixed along its circumference (the specific type of fixation varies depending on the manufacturer). The lens chamber is filled by an optical liquid. When the volume of the liquid is changed, the liquid inserts uniform pressure on the membrane and the membrane deflects.

In the past, many authors performed theoretical and experimental analyses of deformed membranes loaded by a uniform pressure using various mechanical models [4–23] and various numerical techniques [24–37].

In a previous paper [38], the authors analyzed in detail the deformation of a circular axisymmetric liquid lens membrane. This work extends the previous analysis by including the effect of initial prestress, which is inevitably induced during installation of the liquid lens. The membrane is again considered to be fixed along its circumference and subjected to uniform pressure of the liquid.

Since the deflections of the membrane substantially exceed its thickness, solutions based on standard linear elasticity [39,40] are not sufficiently accurate. The influence of radial deflections is also nonnegligible. The model presented in the next section is based on exact strain-displacement relations defining the Green–Lagrange strain and on the Saint Venant–Kirchhoff material law that assumes a linear relation

between the Green–Lagrange strain and the second Piola–Kirchhoff stress [41]. This model properly takes into account geometrically nonlinear effects and includes the membrane’s radial displacements, which are in Refs. [4–23] and considered as small or totally neglected.

In the next section, the governing equations are derived and a numerical solution based on polynomial series and optimization algorithms [42,43] is presented. An example dealing with specific parameters of a membrane lens illustrates the numerical solution and compares it to results obtained by finite elements. The dependence of the maximum membrane deflection on the material properties and initial prestress is studied. In the last section, the proposed model is validated by comparison to deflections measured in experiments. It is confirmed that the model is suitable for an accurate description of the given problem and can be used in further simulations and analyses related to optical design requiring a highly accurate description of optical interfaces.

2. THEORETICAL PREDICTION OF PRESTRESSED MEMBRANE SHAPE

A. Derivation of Governing Equations

Let us consider a circular axisymmetric membrane of a liquid lens, with the axis of symmetry denoted as z and the radial axis as r ; see Fig. 1. The membrane is characterized by constant thickness h and radius a , with h so small that the bending stiffness can be neglected. Along its circumference, the membrane is fixed. Under the pressure of the optical liquid in the

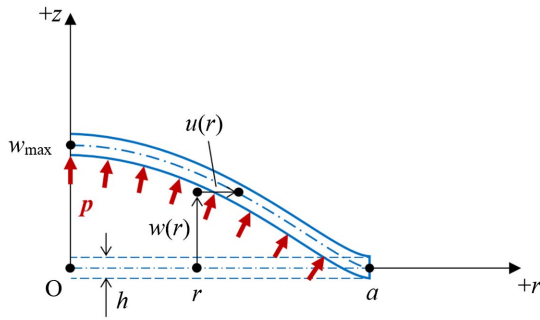


Fig. 1. Sketch of a circular axisymmetric membrane deformed by constant liquid pressure p (dashed blue lines—initial straight shape of the prestressed membrane at zero applied pressure, $w(r)$ and $u(r)$ —vertical and horizontal displacements of a point with initial coordinates $[r, 0]$, a —membrane radius, h —membrane thickness, w_{\max} —maximum deflection).

lens, the membrane deforms and a general point on its mid-plane with initial coordinates $[r, 0]$ is displaced to a new position $[r + u(r), w(r)]$, where $w(r)$ denotes the deflection (displacement in the z direction) and $u(r)$ is the radial displacement. The deformed shape of the membrane can be described by a certain function $g(r)$, implicitly defined by the relation $g(r + u(r)) = w(r)$.

Let us further assume that the membrane in its initial state (i.e., at vanishing applied pressure p) is prestressed, and its initial stretch in all in-plane directions is $\lambda_0 > 1$ (the stretch is defined with respect to the stress-free reference configuration). Further, the effect of the change of thickness h on the membrane shape is negligible, and so the deformed shape is described by the midsurface.

The radial stretch λ_r and the tangential (circumferential) stretch λ_t in the deformed state are easily expressed as

$$\begin{aligned} \lambda_r &= \lambda_0 \sqrt{(1 + u')^2 + w'^2}, \\ \lambda_t &= \lambda_0 \left(1 + \frac{u}{r}\right), \end{aligned} \tag{1}$$

where u' and w' are the derivatives of displacements u and w with respect to the radial coordinate, r . Let us assume that the material can be described by the Saint Venant–Kirchhoff model, which postulates a linear relation between the Green–Lagrange strain and the second Piola–Kirchhoff stress [41]. Based on the definition of Green–Lagrange strain, the inplane normal strains are evaluated from the stretches as

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{2}(\lambda_r^2 - 1) = \lambda_0^2 \left[u' + \frac{1}{2}(u'^2 + w'^2) \right] + \frac{1}{2}(\lambda_0^2 - 1) \\ &= \lambda_0^2 \tilde{\epsilon}_r + \epsilon_0, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_t &= \frac{1}{2}(\lambda_t^2 - 1) = \lambda_0^2 \left(\frac{u}{r} + \frac{u^2}{2r^2} \right) + \frac{1}{2}(\lambda_0^2 - 1) \\ &= \lambda_0^2 \tilde{\epsilon}_t + \epsilon_0, \end{aligned} \tag{3}$$

where

$$\epsilon_0 = \frac{1}{2}(\lambda_0^2 - 1) \tag{4}$$

is the initial strain and

$$\tilde{\epsilon}_r = u' + \frac{1}{2}(u'^2 + w'^2), \tag{5}$$

$$\tilde{\epsilon}_t = \frac{u}{r} + \frac{u^2}{2r^2} \tag{6}$$

are strains that would be obtained by taking the initial prestressed state as the reference configuration [while Eqs. (2) and (3) use the stress-free state as the reference configuration].

Since the state of the material corresponds to plane stress, the strain energy density \mathcal{E}_{int} (per unit volume in the stress-free state) is given by [39,40]

$$\mathcal{E}_{\text{int}}(\epsilon_r, \epsilon_t) = \frac{E}{2(1 - \nu^2)} (\epsilon_r^2 + 2\nu\epsilon_r\epsilon_t + \epsilon_t^2), \tag{7}$$

where E is the Young modulus and ν is the Poisson ratio characterizing the membrane material. Differentiating the strain energy density with respect to strains, we get the corresponding work-conjugate stresses

$$\sigma_r = \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{int}}}{\partial \epsilon_r} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_r + \nu\epsilon_t), \tag{8}$$

$$\sigma_t = \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{int}}}{\partial \epsilon_t} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_t + \nu\epsilon_r), \tag{9}$$

and substituting from Eqs. (2) and (3), we can express them as

$$\sigma_r = \frac{E\lambda_0^2}{1 - \nu^2} (\tilde{\epsilon}_r + \nu\tilde{\epsilon}_t) + \sigma_0, \tag{10}$$

$$\sigma_t = \frac{E\lambda_0^2}{1 - \nu^2} (\tilde{\epsilon}_t + \nu\tilde{\epsilon}_r) + \sigma_0, \tag{11}$$

where

$$\sigma_0 = \frac{E}{1 - \nu} \epsilon_0 = \frac{E}{2(1 - \nu)} (\lambda_0^2 - 1) \tag{12}$$

is the initial prestress.

Since the strain energy density has been differentiated with respect to Green–Lagrange strains, the resulting stresses are the second Piola–Kirchhoff stresses, with the stress-free configuration taken as the referential one. It is important to realize that symbols a and h denote the membrane radius and thickness in the state before application of the liquid pressure but after application of the prestress. The corresponding dimensions in the stress-free state will be denoted as \tilde{a} and \tilde{h} , with $\tilde{a} = a/\lambda_0$ and with \tilde{h} considered as a primary geometric characteristic of the membrane.

The equilibrium state after application of pressure p can be found by exploiting the principle of minimum potential energy. The total potential energy,

$$E_p = E_{\text{int}} + E_{\text{ext}} \tag{13}$$

is the sum of the strain energy, E_{int} , and the energy of external forces, E_{ext} . The state of minimum potential energy can be attained only if the variation of functional E_p vanishes for all admissible variations of displacements u and w . Since \mathcal{E}_{int} represents the strain energy density per unit volume in the stress-free reference configuration, the strain energy

$$E_{\text{int}} = 2\pi\tilde{h} \int_0^{\tilde{a}} \mathcal{E}_{\text{int}} \tilde{r} d\tilde{r} \tag{14}$$

must be evaluated by integrating over a cylinder of radius $\tilde{a} = a/\lambda_0$ and height \tilde{h} . The integration variable \tilde{r} that varies from 0 to \tilde{a} corresponds to the radial coordinate r (in the prestressed state) divided by λ_0 . Therefore, we can transform Eq. (14) into

$$E_{\text{int}} = \frac{2\pi\tilde{h}}{\lambda_0^2} \int_0^a \mathcal{E}_{\text{int}} r dr. \tag{15}$$

The energy of external forces can be expressed as minus the applied pressure multiplied by the volume between the initial midplane and the deformed midsurface, leading to

$$E_{\text{ext}} = -2\pi p \int_0^a w(r+u)(1+u') dr. \tag{16}$$

The first variations of the strain energy and of the energy of external forces can now be evaluated as

$$\begin{aligned} \delta E_{\text{int}} &= \frac{2\pi\tilde{h}}{\lambda_0^2} \int_0^a \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{int}}}{\partial \epsilon_r} \delta \epsilon_r + \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{int}}}{\partial \epsilon_t} \delta \epsilon_t \right) r dr \\ &= \frac{2\pi\tilde{h}}{\lambda_0^2} \int_0^a (\sigma_r \delta \epsilon_r + \sigma_t \delta \epsilon_t) r dr \\ &= 2\pi\tilde{h} \int_0^a (\sigma_r \delta \tilde{\epsilon}_r + \sigma_t \delta \tilde{\epsilon}_t) r dr \\ &= 2\pi\tilde{h} \int_0^a (r\sigma_r (\delta u' + u' \delta u' + w' \delta w') \\ &\quad + \sigma_t (\delta u + u \delta u/r)) dr \\ &= 2\pi\tilde{h} [r\sigma_r (\delta u + u' \delta u + w' \delta w)]_{r=0}^a \\ &\quad - 2\pi\tilde{h} \int_0^a ((r\sigma_r (1+u')) \delta u + (r\sigma_r w')' \delta w) dr \\ &\quad + 2\pi\tilde{h} \int_0^a \sigma_t \left(\delta u + \frac{u \delta u}{r} \right) dr, \end{aligned} \tag{17}$$

and

$$\begin{aligned} \delta E_{\text{ext}} &= -2\pi p \int_0^a \delta w (r+u)(1+u') dr \\ &\quad - 2\pi p [w(r+u) \delta u]_{r=0}^a \\ &\quad + 2\pi p \int_0^a w' (r+u) \delta u dr. \end{aligned} \tag{18}$$

As shown in Fig. 1, admissible functions u and w are constrained by boundary conditions

$$w(a) = 0, u(0) = 0, u(a) = 0, \tag{19}$$

and analogous conditions must be satisfied by their variations δu and δw . Summing Eqs. (17) and (18) and making use of the boundary conditions, we obtain the variation of total potential energy in the form

$$\begin{aligned} \delta E_p &= -2\pi\tilde{h} r \sigma_r w' \delta w|_{r=0} \\ &\quad + 2\pi \int_0^a \left(\tilde{h} \sigma_t \left(1 + \frac{u}{r} \right) - \tilde{h} (r\sigma_r (1+u'))' \right. \\ &\quad \left. + p w' (r+u) \right) \delta u dr \\ &\quad - 2\pi \int_0^a (\tilde{h} (r\sigma_r w')' + p (r+u)(1+u')) \delta w dr. \end{aligned} \tag{20}$$

The corresponding strong form of equilibrium equations reads

$$\tilde{h} (r\sigma_r (1+u'))' - \tilde{h} \sigma_t \left(1 + \frac{u}{r} \right) = p (r+u) w', \tag{21}$$

$$-\tilde{h} (r\sigma_r w')' = p (r+u)(1+u'). \tag{22}$$

In many publications mentioned in the introduction [24–37], the radial displacements u and their derivatives u' are considered as negligible. Based on such an assumption, Eq. (21) would reduce to

$$\tilde{h} (r\sigma_r)' - \tilde{h} \sigma_t = p r w', \tag{23}$$

$$-\tilde{h} (r\sigma_r w')' = p r. \tag{24}$$

Since the variation δw at $r = 0$ is completely arbitrary, the first term in Eq. (20) leads to the boundary condition

$$r\sigma_r w' = 0 \quad \text{at } r = 0. \tag{25}$$

At a first glance, the condition seems to be satisfied automatically. Indeed, if $\sigma_r w'$ has a finite value at $r = 0$, then multiplication by zero leads to $r\sigma_r w' = 0$. In a general setting, a concentrated vertical force F_0 could be applied at $r = 0$, and then the resulting boundary condition would read $\lim_{r \rightarrow 0^+} (r\sigma_r w') = F_0 / (2\pi\tilde{h})$. For the problem studied here, no such concentrated force is present, and a refined analysis leads to the conclusion that the deflection w considered as a function of inplane coordinates x and y should be continuously differentiable. Consequently, the derivative of w with respect to r at $r = 0$ should vanish, and this can be imposed as the fourth boundary condition,

$$w'(0) = 0, \tag{26}$$

which supplements Eq. (19) conditions.

B. Numerical Approximation by Power Series

The governing differential equations written in terms of displacements u and w could be constructed by substituting the strain-displacement Eqs. (5) and (6) and the stress-strain Eqs. (10) and (11) into the equilibrium Eqs. (21) and (22). However, the resulting set of two partial differential equations with the boundary conditions of Eqs. (19) and (26) cannot be solved analytically. An approximate numerical solution can be constructed by minimizing the energy functional E_p over a finite-dimensional space of suitable approximation functions.

Since the solution is expected to be highly regular, polynomial approximations seem to be a good choice. It is also convenient to reformulate the problem in terms of dimensionless displacements $\tilde{u} = u/a$ and $\tilde{w} = w/a$, and dimensionless spatial coordinate $\rho = r/a$, so that the domain of analysis is transformed to the interval $[0, 1]$. The displacements can then be approximated by the polynomial series

$$\tilde{w}(\rho) = \sum_{i=1}^N b_i (1 - \rho^{2i}), \quad \tilde{u}(\rho) = \sum_{j=1}^M c_j (\rho - \rho^{2j+1}), \tag{27}$$

where b_i ($i = 1, 2, \dots, N$) and c_j ($j = 1, 2, \dots, M$) are arbitrary coefficients. Note that these approximations automatically satisfy the boundary conditions of Eq. (19) as well as of Eq. (26).

In terms of the dimensionless quantities, Eqs. (5) and (6) can be rewritten as

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_r &= \frac{d\tilde{u}}{d\rho} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\tilde{u}}{d\rho} \right)^2 + \left(\frac{d\tilde{w}}{d\rho} \right)^2 \right] \\ &= \sum_{j=1}^M c_j [1 - (2j + 1)\rho^{2j}] + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^M c_j [1 - (2j + 1)\rho^{2j}] \right)^2 \\ &\quad + 2 \left(\sum_{i=1}^N i b_i \rho^{2i-1} \right)^2, \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_t &= \frac{\tilde{u}}{\rho} + \frac{\tilde{w}^2}{2\rho^2} \\ &= \sum_{j=1}^M c_j (1 - \rho^{2j}) + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^M c_j (1 - \rho^{2j}) \right)^2. \end{aligned} \tag{29}$$

Substituting from Eqs. (7), (2), and (3) into Eq. (15) and transforming the integration variable from r to ρ , we obtain the strain energy

$$\begin{aligned} E_{\text{int}} &= \frac{2\pi\tilde{h}}{\lambda_0^2} \int_0^a \frac{E}{2(1-\nu^2)} (\epsilon_r^2 + 2\nu\epsilon_r\epsilon_t + \epsilon_t^2) r dr \\ &= \frac{\pi\tilde{h}Ea^2}{1-\nu^2} \left(\lambda_0^2 \int_0^1 (\tilde{\epsilon}_r^2 + 2\nu\tilde{\epsilon}_r\tilde{\epsilon}_t + \tilde{\epsilon}_t^2) \rho d\rho \right. \\ &\quad \left. + 2(1+\nu)\epsilon_0 \int_0^1 (\tilde{\epsilon}_r + \tilde{\epsilon}_t) \rho d\rho + \frac{(1+\nu)\epsilon_0^2}{\lambda_0^2} \right). \end{aligned} \tag{30}$$

In a similar spirit, the load energy of Eq. (16) can be expressed as

$$E_{\text{ext}} = -2\pi p a^3 \int_0^1 \tilde{w}(\rho + \tilde{u}) \left(1 + \frac{d\tilde{u}}{d\rho} \right) d\rho. \tag{31}$$

Substituting Eqs. (28), (29) into Eq. (30) and Eq. (27) into Eq. (31), it is possible to express the potential energy $E_p = E_{\text{int}} + E_{\text{ext}}$ as a function of coefficients b_i and c_j . This objective function is then minimized by invoking a selected optimization algorithm [42,43]. Note that the last term in Eq. (30), $(1 + \nu)\epsilon_0^2/\lambda_0^2$, is constant and therefore does not need to be included in the objective function.

3. NUMERICAL EXAMPLE

A. Comparison of Power Series Solution with Finite Element Method

In this section, the numerical solution is constructed for a specific example of a prestressed liquid lens membrane. Consider a circular membrane characterized by initial thickness $\tilde{h} = 0.1$ mm, radius (in prestressed state) $a = 10$ mm, Young's modulus $E = 1.97$ MPa, and Poisson's ratio $\nu = 0.4$. The membrane is prestressed by biaxial inplane stress $\sigma_0 = 60$ kPa and then loaded by constant pressure $p = 0.001E = 1.97$ kPa.

Figure 2 shows the membrane displacements and the deformed shape computed using the optimization algorithm described in the previous section. Deflections $w(r)$ and radial displacements $u(r)$ were approximated by the series in Eq. (27) with $N = M = 5$, and the objective function to be minimized

was the potential energy E_p . Optimization was performed in MATLAB [44] using the quasi-Newton algorithm with Hessian updates based on the Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno method [42,43].

As seen in Fig. 2(c), the resulting shape of the deformed membrane is not spherical. To quantify the deviation from a perfect sphere, let us approximate function $g(r)$ that describes the deformed shape by

$$z(r) = z_{\text{max}} + \frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - c^2r^2}} + \sum_{i=2}^5 A_{2i}r^{2i}, \tag{32}$$

where z_{max} is the maximum deflection, $c = 1/R_0 = z''/(1 + z'^2)^{3/2}$ is the apex curvature (R_0 is the apex radius of curvature, z' and z'' are the first and second derivatives of the approximated function $g(r)$ at $r = 0$), and A_{2i} are aspherical coefficients that characterize the deviation from an apex sphere in the vertical direction. For our example, the resulting parameters have the following values: $z_{\text{max}} = 2.5590$ mm, $R_0 = +22.5530$ mm, $A_4 = +1.8528 \cdot 10^{-5}$ mm⁻³, $A_6 = +2.1047 \cdot 10^{-8}$ mm⁻⁵, $A_8 = +4.0574 \cdot 10^{-10}$ mm⁻⁷, and $A_{10} = +1.3916 \cdot 10^{-12}$ mm⁻⁹. The corresponding mean

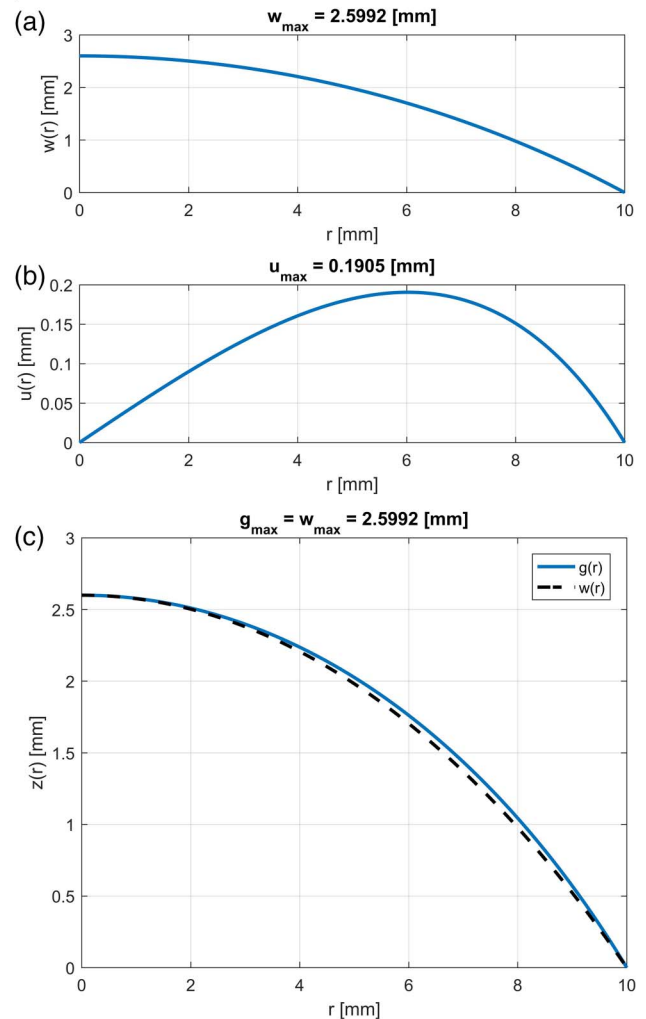


Fig. 2. Deformed membrane approximated by power series: (a) deflections $w(r)$, (b) radial displacements $u(r)$, (c) membrane shape $g(r)$.

quadratic approximation error is $\text{RMS} = 3.7 \cdot 10^{-6}$ mm. These results clearly show that the deformed shape indeed deviates from a sphere.

In a foregoing paper [38] the authors studied in detail the difference between the solutions of the general equations of Eq. (21) and their simplified form in Eq. (23). For the specific example considered here, a similar difference would arise. As clearly seen in Fig. 2(b), the radial displacement $u(r)$ is definitely not negligible while the simplified equations in Eq. (23) were derived using the assumptions that $u(r) \ll r$ and $u'(r) \ll 1$ for all $r \in [0, a]$.

Similar results were obtained in Ref. [38] for a membrane with no prestress. In that work, the authors studied the influence of membrane thickness on the deformed shape. The effect was found to be strong, and thus the imaging properties can be determined in a reliable way only if the thickness is known with high accuracy.

For comparison, the deformed shape of the membrane was also computed using the finite element method. Axisymmetric membrane elements with linear interpolation of both displacement components were implemented by the authors into the open-source simulation platform OOFEM [45]. The geometrical and material properties were the same as in the polynomial series approximation. Figure 3(a) shows the difference between the values of function $g(r)$ obtained using the approximation by polynomial series with $M = N = 4$ and by the finite element method (FEM) using a mesh consisting of 3200 linear finite elements. The root mean square of the difference, $\text{RMS} = 3.5$ nm, confirms that the results are comparable and both methods can be used. Approximation by polynomial series provides a good accuracy even with a relatively low number of polynomial terms, but the solution obtained by FEM converges in a more regular manner as the mesh is refined.

The diagrams in Fig. 3(b) indicate that FEM leads to a quadratic rate of convergence in terms of the maximum deflection (blue crosses) as well as the volume under the deformed membrane (orange crosses). The error was evaluated by comparing the results obtained with various meshes to those obtained with an extremely fine mesh consisting of 50,000 elements ($w_{\max} = 2.5992560$ mm, $V = 431.5885857$ mm³). For 100 elements, the maximum deflection is determined with an error of about 270 nm, and then the error decreases 4 times whenever the number of elements is doubled. On the other hand, approximation by polynomials gives the maximum deflection with an error of about 13 nm already for $N = M = 3$, but as the order of the approximating polynomial increases, the error is not reduced in a regular manner and for higher orders it can even grow.

Let us now study the influence of the prestress on imaging properties of a plano-convex liquid membrane lens, in which

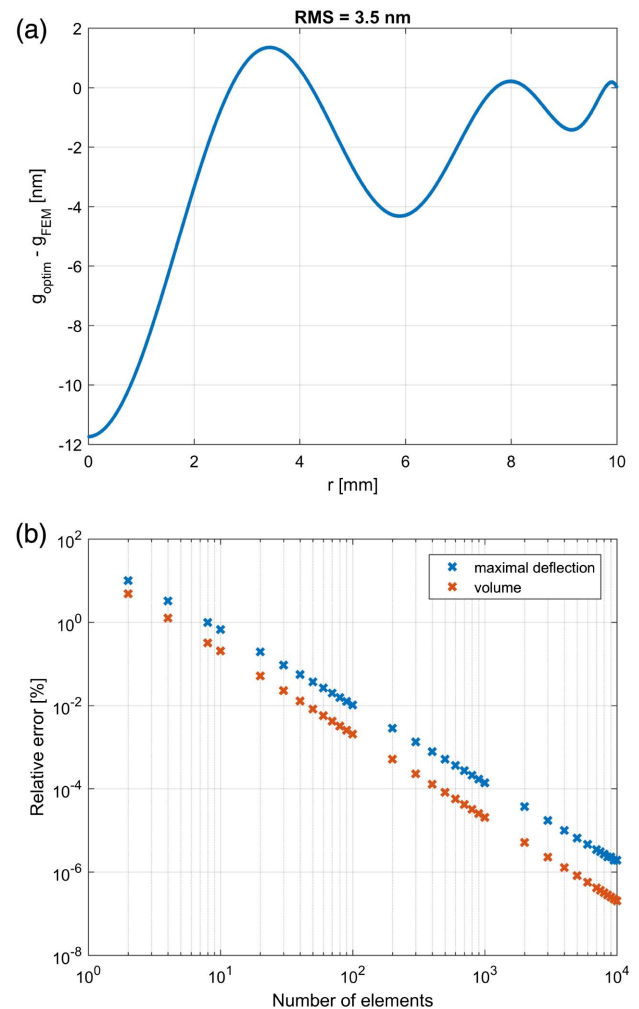


Fig. 3. (a) Difference between the deformed membrane shapes obtained by a power series approximation (g_{optim}) and by finite elements (g_{FEM}), and (b) dependence of the relative error on the number of finite elements.

one side of the lens chamber is formed by a plane-parallel plate and the other by a membrane. The membrane is supposed to have the same properties as in the previous example. The objective is to achieve an apex radius of curvature $R_0 = +22$ mm. Table 1 shows how the pressure p needed to deform the membrane to this desired shape depends on the prestress σ_0 . For different values of the initial prestress, the pressure can be adjusted such that the paraxial imaging properties remain the same, but the general imaging properties will be different; this is documented by the variation of

Table 1. Dependence of Pressure and Membrane Shape on Initial Prestress, Provided that the Same Apex Radius $R_0 = +22$ mm is Maintained

σ_0 [kPa]	p [kPa]	z_{\max} [mm]	A_4 [10^{-5} mm ⁻³]	A_6 [10^{-8} mm ⁻⁵]	A_8 [10^{-10} mm ⁻⁷]	A_{10} [10^{-12} mm ⁻⁹]
0	1.611	2.7600	+2.0279	+0.1181	-3.8856	+7.3839
30	1.851	2.7117	+1.8545	+8.8108	-1.2752	+4.6678
60	2.106	2.6745	+1.6965	+7.0029	-0.0666	+3.1490
90	2.372	2.6460	+1.5587	+5.8806	+0.4570	+2.2675

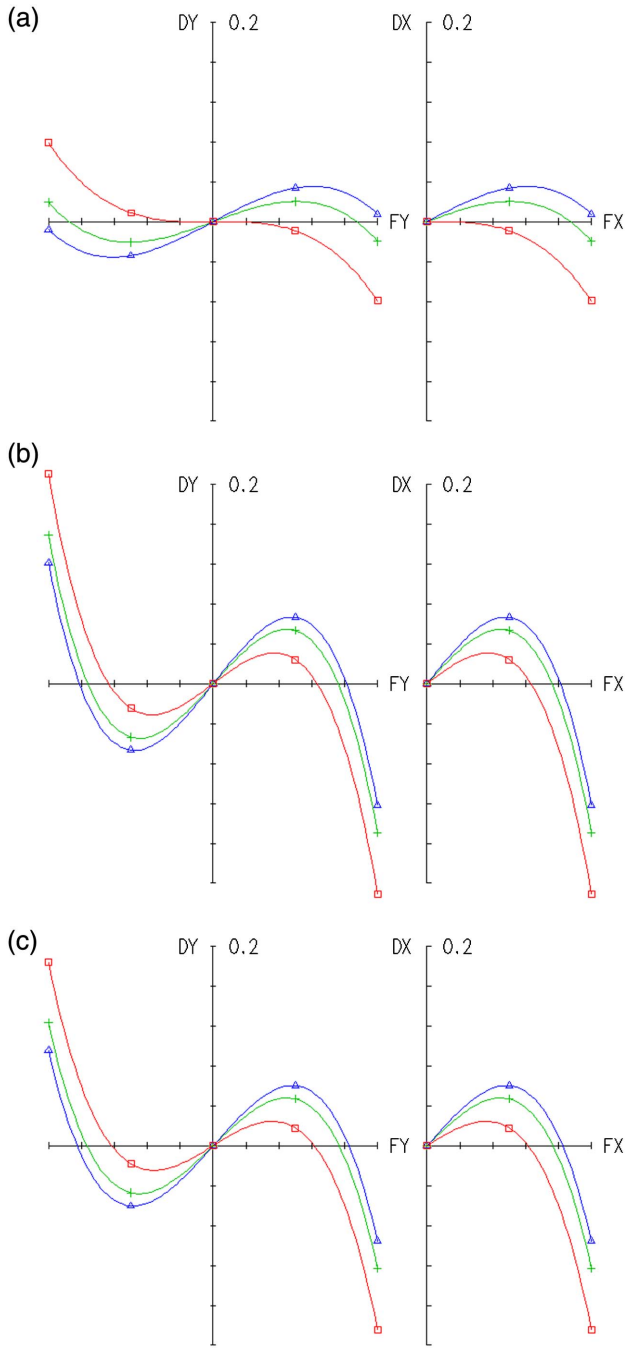


Fig. 4. Ray aberrations for (a) a spherical membrane of radius $R_0 = 22$ mm, (b) an aspherical membrane obtained when no initial prestress is applied, (c) an aspherical membrane obtained when the initial prestress is set to $\sigma_0 = 60$ kPa; DX a DY denote transversal ray aberrations, and FX a FY denote the height of an incident ray in the interval between -5 mm and 5 mm. Individual curves correspond to values obtained for wavelengths 486 nm (red), 587 nm (green), and 656 nm (blue).

aspherical coefficients. Figure 4 shows the ray aberrations and Fig. 5 shows the polychromatic modulation transfer function (MTF) for (a) a spherical membrane of radius $R_0 = 22$ mm, (b) an aspherical membrane shape obtained if

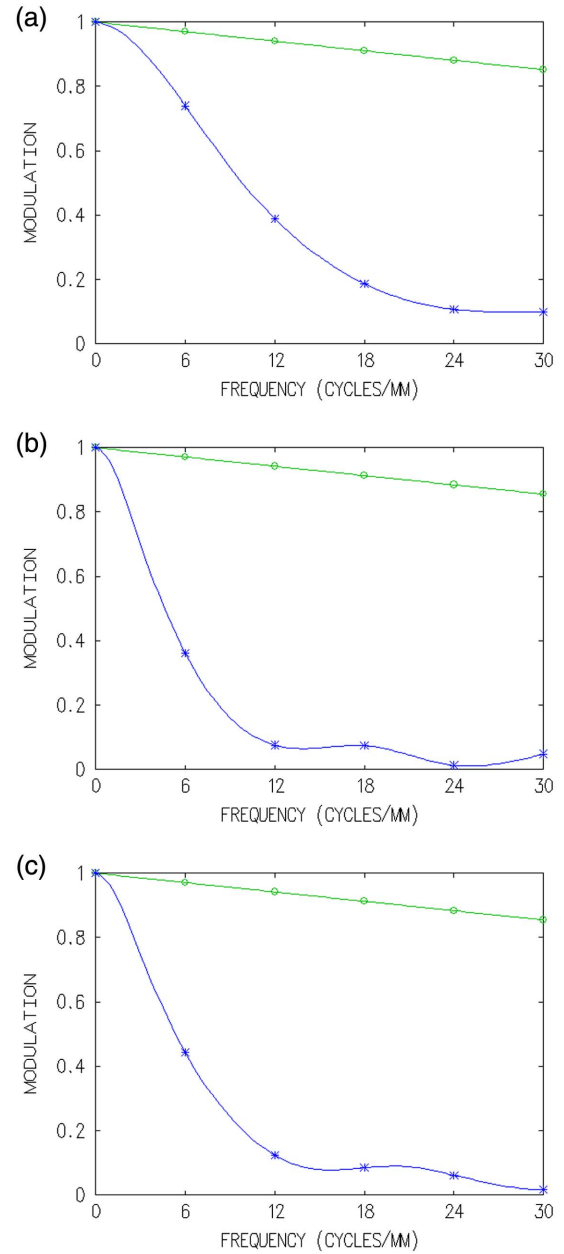


Fig. 5. Polychromatic MTF for (a) a spherical membrane of radius $R_0 = 22$ mm, (b) an aspherical membrane obtained when no initial prestress is applied, (c) an aspherical membrane obtained when the initial prestress is set to $\sigma_0 = 60$ kPa.

no prestress is applied, and (c) spherical membrane shape obtained if the prestress is set to $\sigma_0 = 60$ kPa. In Fig. 4, DX a DY denote transversal ray aberrations, and FX a FY denote the height of an incident ray in the interval between -5 mm and 5 mm.

The results indicate that the imaging properties of aspherical shapes obtained with different prestress values are almost the same; in other words, the prestress has a negligible influence on the imaging properties provided that the applied pressure is properly adjusted. On the other hand, deviations from the imaging properties of a spherical lens are non-negligible.

B. Dependence of Maximum Membrane Deflection on Material Parameters and Initial Prestress

In experiments, a unique evaluation of membrane material properties and of the initial prestress is often difficult. Therefore, it is useful to exploit the measured deflection for parameter identification.

Figure 6 shows the dependence of the maximum deflection w_{\max} on pressure p for a fixed prestress value σ_0 and for selected values of Young's modulus E for a membrane with other parameters taken by the same values as in the previous examples. Also shown is the dependence of the maximum deflection w_{\max} on pressure p for a fixed value of Young's modulus E and selected values of prestress σ_0 . By measuring the actual dependence of the maximum deflection on applied pressure and comparing it to the plotted curves, membrane parameters E and σ_0 can be determined. This approach was exploited for parameter identification, as will be described in the following section.

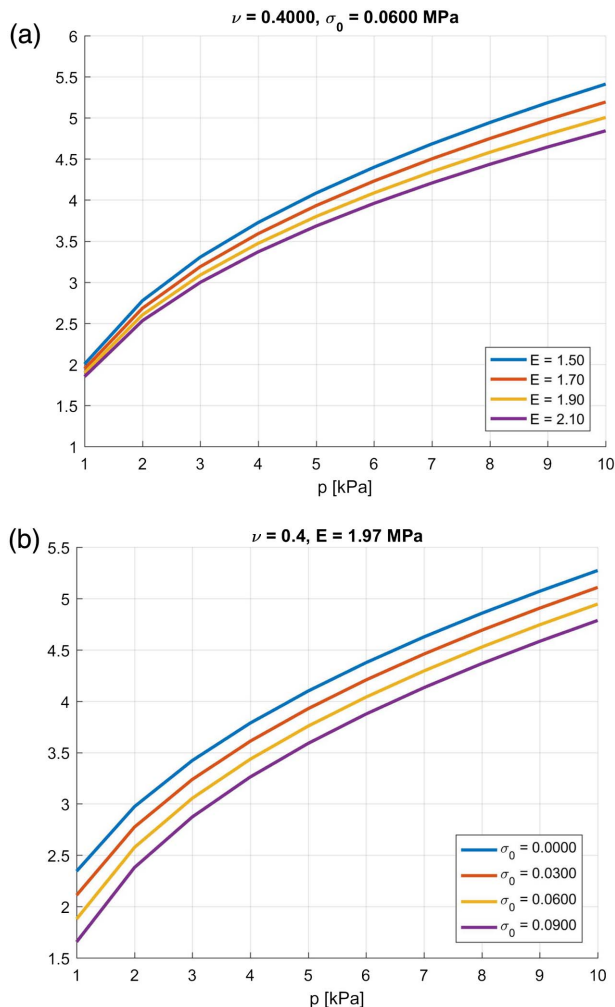


Fig. 6. (a) Dependence of the maximum deflection w_{\max} on pressure p for a fixed value of prestress $\sigma_0 = 60 \text{ kPa}$ and selected values of Young's modulus E , (b) dependence of the maximum deflection w_{\max} on pressure p for a fixed value of Young's modulus $E = 1.97 \text{ MPa}$ and selected values of prestress σ_0 .

4. EXPERIMENTAL CONFIRMATION OF GOVERNING EQUATIONS

For validation of the theoretical results by real data, the deformed shape of a membrane of a liquid lens was measured experimentally, using a coordinate scanning device with a chromatic confocal sensor [46]. Figure 7 depicts the experimental setup for topography measurements of optical surfaces and the sample of a liquid lens. The liquid lens is formed by a chamber filled by an optical liquid (in our case distilled water), which is covered by an elastic membrane. The membrane is fixed by screws. By injecting (or removing) the liquid, the volume of the chamber is changed and the membrane is deformed. The membrane shape is then measured using the scanning device, which can determine the position of a measured point with an error of 0.02 mm (combining the mechanical uncertainty with the uncertainty induced by the sensor).

The membrane was made of Sylgard 184 [47]. The measured initial membrane thickness was $\tilde{h} = 0.45 \text{ mm}$, and the radius measured from the support in the prestressed state was $a = 14.45 \text{ mm}$. The Poisson ratio was taken as $\nu = 0.41$, and the Young modulus $E = 1.078 \text{ MPa}$ and prestress $\sigma_0 = 0.0583 \text{ MPa}$ were determined using the identification procedure described in the previous section (by optimizing the agreement between the measured and computed dependence of maximum deflection on applied pressure). Owing to the high slope of the membrane surface near the support and in view of the limitations of the measurements by a chromatic confocal sensor, permitting only small deviations of the measured direction from the normal to the deformed surface, the measurements focused on the region near the apex. Since the membrane remains axially symmetric, only the meridian was measured.

Figure 8 compares the measured and simulated shapes for pressures $p = 1.00, 2.00, 3.00,$ and 4.00 kPa . The root mean square of the difference between the experiments and numerical simulations is not greater than 0.021 mm (as indicated in the figure legend), which corresponds to the estimated uncertainty of measurements, and thus the theoretical model can be considered as validated. Consequently, the results of simulations can be used in the design of optical systems and analysis of their imaging properties, e.g., of the spherical aberration, the point spread function, and the modulation transfer function.

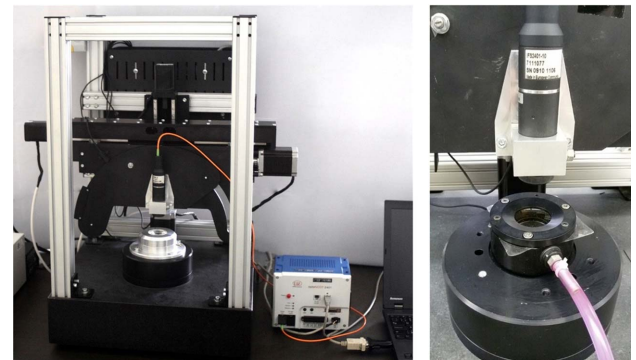


Fig. 7. Device for measurement of the shape of optical surfaces and an experimental specimen of a membrane liquid lens.

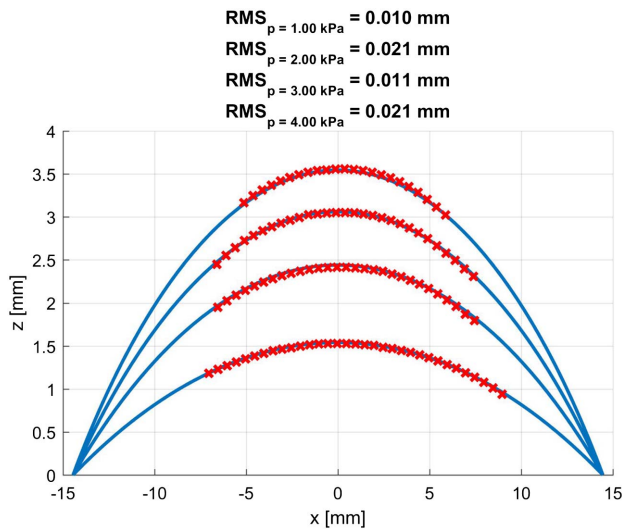


Fig. 8. Comparison of the experimentally measured and numerically simulated shapes of a membrane liquid lens for applied pressures $p = 1.00, 2.00, 3.00,$ and 4.00 kPa .

5. CONCLUSION

In this paper, we have presented the theoretical description and numerical solution of an axisymmetric circular membrane of a liquid lens with an initial prestress. The model is based on the exact relation between displacements and the Green–Lagrange strain, on the Saint Venant–Kirchhoff material law, and on the principle of minimum potential energy. The corresponding governing equations have been derived, and a numerical method based on polynomial approximations of displacement functions and minimization of potential energy has been developed. The solution using polynomial approximations has been verified by comparing the results to those obtained by the finite element method, and the model has been validated by comparison of simulations to experimental data. A simple parametric study has shown how the maximum deflection depends on the elastic modulus, initial prestress, and applied pressure.

The presented numerical results and experimental measurements confirm that the selected model of a prestressed membrane is suitable for an accurate description of deformed liquid lens membranes up to the large-strain regime. Therefore, the model can be used for further analyses and simulations of imaging properties of these optical elements. A method of parameter identification has been presented that can be useful for characterization of mechanical properties of membrane samples in practical applications. It has also been documented by an example that the initial prestress has almost no influence on the imaging properties of a plane-convex membrane lens.

Funding. České Vysoké Učení Technické v Praze (CVUT) (SGS17/004/OHK1/1T/11).

REFERENCES

1. H. Ren and S. Wu, *Introduction to Adaptive Lenses*, Wiley Series in Pure and Applied Optics (Wiley, 2012).
2. Optotune, <http://www.optotune.com>.
3. HoloChip, <http://www.holochip.com>.

4. A. H. Rawicz and I. Mikhailenko, "Modeling a variable-focus liquid-filled optical lens," *Appl. Opt.* **35**, 1587–1589 (1996).
5. D.-Y. Zhang, N. Justis, V. Lien, Y. Berdichevsky, and Y.-H. Lo, "High-performance fluidic adaptive lenses," *Appl. Opt.* **43**, 783–787 (2004).
6. N. Sugiura and S. Morita, "Variable-focus liquid-filled optical lens," *Appl. Opt.* **32**, 4181–4186 (1993).
7. H. Ren, D. Fox, P. A. Anderson, B. Wu, and S.-T. Wu, "Tunable-focus liquid lens controlled using a servo motor," *Opt. Express* **14**, 8031–8036 (2006).
8. Q. Yang, P. Kobrin, C. Seabury, S. Narayanaswamy, and W. Christian, "Mechanical modeling of fluid-driven polymer lenses," *Appl. Opt.* **47**, 3658–3668 (2008).
9. G.-H. Feng and Y.-C. Chou, "Flexible meniscus/biconvex lens system with fluidic-controlled tunable-focus applications," *Appl. Opt.* **48**, 3284–3290 (2009).
10. H. Ren and S.-T. Wu, "Variable-focus liquid lens," *Opt. Express* **15**, 5931–5936 (2007).
11. D. Shaw and T. E. Sun, "Optical properties of variable-focus liquid-filled optical lenses with different membrane shapes," *Opt. Eng.* **46**, 024002 (2007).
12. D. Shaw and C.-W. Lin, "Design and analysis of an asymmetrical liquid-filled lens," *Opt. Eng.* **46**, 123002 (2007).
13. H. Choi, D. S. Han, and Y. H. Won, "Adaptive double-sided fluidic lens of polydimethylsiloxane membranes of matching thickness," *Opt. Lett.* **36**, 4701–4703 (2011).
14. L. Li, Q.-H. Wang, and W. Jiang, "Liquid lens with double tunable surfaces for large power tunability and improved optical performance," *J. Opt.* **13**, 115503 (2011).
15. F. Schneider, J. Draheim, R. Kamberger, P. Waibel, and U. Wallrabe, "Optical characterization of adaptive fluidic silicone-membrane lenses," *Opt. Express* **17**, 11813–11821 (2009).
16. Y.-K. Fuh, M.-X. Lin, and S. Lee, "Characterizing aberration of a pressure-actuated tunable biconvex microlens with a simple spherically-corrected design," *Opt. Lasers Eng.* **50**, 1677–1682 (2012).
17. A. Miks, J. Novak, and P. Novak, "Algebraic and numerical analysis of imaging properties of thin tunable-focus fluidic membrane lenses with parabolic surfaces," *Appl. Opt.* **52**, 2136–2144 (2013).
18. L. Wang, H. Oku, and M. Ishikawa, "Development of variable-focus lens with liquid-membrane-liquid structure and 30 mm optical aperture," *Proc. SPIE* **8617**, 861706 (2013).
19. L. Wang, H. Oku, and M. Ishikawa, "An improved low-optical-power variable focus lens with a large aperture," *Opt. Express* **22**, 19448–19456 (2014).
20. S. T. Choi, B. S. Son, G. W. Seo, S.-Y. Park, and K.-S. Lee, "Opto-mechanical analysis of nonlinear elastomer membrane deformation under hydraulic pressure for variable-focus liquid-filled microlenses," *Opt. Express* **22**, 6133–6146 (2014).
21. D. Liang and X.-Y. Wang, "A bio-inspired optical system with a polymer membrane and integrated structure," *Bioinspiration Biomimetics* **11**, 066008 (2016).
22. J.-W. Du, X.-Y. Wang, and D. Liang, "Bionic optical imaging system with aspheric solid-liquid mixed variable-focus lens," *Opt. Eng.* **55**, 023105 (2016).
23. N. Hasan, A. Banerjee, H. Kim, and C. H. Mastrangelo, "Tunable-focus lens for adaptive eyeglasses," *Opt. Express* **25**, 1221–1233 (2017).
24. H. Hencky, "On the stress state in circular plates with vanishing bending stiffness," *Z. Math. Phys.* **63**, 311–317 (1915).
25. W. Z. Chein, "Asymptotic behavior of a thin clamped circular plate under uniform normal pressure at very large deflection," *Sci. Rep.* **A5**, 71–94 (1948).
26. J. D. Campbell, "On the theory of initially tensioned circular membranes subjected to uniform pressure," *Q. J. Mech. Appl. Math.* **9**, 84–93 (1956).
27. M. A. Goldberg and A. B. Pifko, "Large deflection analysis of uniformly loaded annular membranes," *AIAA J.* **1**, 2111–2115 (1963).
28. A. B. Pifko and M. A. Goldberg, "Iterative and power series solutions for the large deflection of an annular membrane," *AIAA J.* **2**, 2234 (1964).
29. N. Perrone and R. Kao, "A general nonlinear relaxation technique for solving nonlinear problems in mechanics," *J. Appl. Mech.* **38**, 371–376 (1971).

30. R. Kao and N. Perrone, "Large deflections of axisymmetric circular membranes," *Int. J. Solids Struct.* **7**, 1601–1612 (1971).
31. A. Kelkar, W. Elber, and I. Raju, "Large deflections of circular isotropic membranes subjected to arbitrary axisymmetric loading," *Comput. Struct.* **21**, 413–421 (1985).
32. W. Fichter, "Some solutions for the large deflections of uniformly loaded circular membranes," Technical paper 3658 (National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center, 1997).
33. D. Allman, "Variational solutions for the nonlinear deflexion of an annular membrane under axial load," *Int. J. Mech. Sci.* **24**, 749–753 (1982).
34. M. Sheplock and J. Dugundji, "Large deflections of clamped circular plates under initial tension and transitions to membrane behavior," *J. Appl. Mech.* **65**, 107–115 (1998).
35. F. Zhao, "Nonlinear solutions for circular membranes and thin plates," *Proc. SPIE* **6926**, 69260W (2008).
36. B. Stanford and P. Ifju, "The validity range of low fidelity structural membrane models," *Exp. Mech.* **48**, 697–711 (2008).
37. A. Mikš and P. Novák, "Calculation of a surface shape of a pressure actuated membrane liquid lens," *Opt. Lasers Eng.* **58**, 60–66 (2014).
38. P. Pokorný, F. Šmejkal, P. Kulmon, P. Novák, J. Novák, A. Mikš, M. Horák, and M. Jirásek, "Calculation of nonlinearly deformed membrane shape of liquid lens caused by uniform pressure," *Appl. Opt.* **56**, 5939–5947 (2017).
39. S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, Engineering Societies Monographs (McGraw-Hill, 1959).
40. A. Volmir, "Flexible plates and shells," Technical Report (Air Force Flight Dynamics Laboratory, Research and Technology Division, Air Force Systems Command, 1967).
41. B. Audoly and Y. Pomeau, *Elasticity and Geometry: From Hair Curls to the Non-linear Response of Shells* (Oxford University, 2010).
42. M. Aoki, *Introduction to Optimization Techniques: Fundamentals and Applications of Nonlinear Programming*, Macmillan Series in Applied Computer Science (Macmillan, 1971).
43. L. E. Scales, *Introduction to Non-Linear Optimization*, Macmillan Computer Science Series (Springer-Verlag, 1985).
44. MathWorks, <http://www.mathworks.com>.
45. B. Patzák, "OOFEM—an object-oriented simulation tool for advanced modeling of materials and structures," *Acta Polytech.* **52**, 59–66 (2012).
46. Micro Epsilon, <http://www.micro-epsilon.co.uk/displacement-position-sensors/confocal-sensor/>.
47. "Sylgard 184 silicone elastomer kit," <http://www.dowcorning.com/applications/search/products/Details.aspx?prod=01064291>.



Dependence of the imaging properties of the liquid lens with variable focal length on membrane thickness

ANTONÍN MIKŠ  AND FILIP ŠMEJKAL*

Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Physics, Thákurova 7, 166 29 Prague 6, Czech Republic
*Corresponding author: filip.smejkal@seznam.cz

Received 2 May 2018; revised 29 June 2018; accepted 3 July 2018; posted 5 July 2018 (Doc. ID 330850); published 26 July 2018

This paper presents the influence of membrane thickness on imaging properties of membrane liquid lenses with variable focal length. Approximate formulas for varying thickness of spherically and parabolically deformed membrane were derived, which allows us to determine their influence on quality of imaging properties of a membrane liquid lens. Furthermore, formulas for wave spherical aberration calculation of a membrane and liquid lens body were derived. It has been shown that the influence of membrane thickness and its changes on wave spherical aberration is negligible from a practical point of view. © 2018 Optical Society of America

OCIS codes: (120.4640) Optical instruments; (220.1080) Active or adaptive optics; (350.4600) Optical engineering.

<https://doi.org/10.1364/AO.57.006439>

1. INTRODUCTION

Optical elements with continuously variable focal length are widely used in a number of areas of science, technology, medicine, and so on [1–16]. These elements can be realized in the form of variable-shaped mirrors or lenses with variable focal length [1–6]. Many of these elements are already commercially available [3–6]. In this paper, we focus on membrane liquid lenses with variable focal length. The fundamental element of the membrane liquid lens with variable focal length is the thin flexible membrane whose deflection depends on the applied pressure. Figure 1 shows the schematic diagram of a liquid lens composed of a thin membrane and a glass plate covering a chamber filled with an optical liquid. By changing the volume of the liquid, the shape of the membrane can be changed smoothly, and the optical properties of the lens can be controlled. More detailed information on the practical realization of these lenses can be found, for example, in the literature [1,2,4]. The problem of constant thickness membrane theory is discussed in many publications [7–30].

When increasing the membrane deflection, its shape changes from the original planar surface (no pressure is applied) to the more generally shaped surface whose shape and size depends on the applied pressure. Because the membrane mass before and after its deformation must remain the same according to the law of conservation of mass, its thickness must be changing during the deformation. Assuming that the membrane material density will remain approximately the same before and after its deformation, then the volume of the membrane also has to remain approximately the same. Furthermore,

it is interesting how the thickness of the membrane is going to change during its deformation. The aim of this work is to make an approximate analysis of this phenomenon, i.e., dependence of the membrane thickness on its radius of curvature, and to investigate how it affects the imaging properties of the liquid lens with variable focal length [31,32].

2. SPHERICALLY SHAPED MEMBRANE

Let us first show the approximate estimation of the thickness change of the spherically deformed membrane. It is important to note that the spherical shape is only the first approximation and that the real deformed shape is actually a little bit different. Figure 2 shows a schematically spherical membrane (two spherical layers limited by the cylindrical surface with radius a)

The initial membrane volume (before loading) is

$$V_0 = \pi a^2 h_0, \quad (1)$$

where a is the membrane radius, and h_0 is its initial thickness. After the loading membrane deforms from its initial planar shape to the spherical shape where the radius of curvature of the bottom surface is R_1 , and the radius of curvature of the top surface is $R_2 = R_1 + h$, where h is the membrane thickness after the deformation. The spherical cap heights v_1 and v_2 of the bottom and top spherical surface can be expressed as

$$v_1 = \frac{a^2/R_1}{1 + \sqrt{1 - (a/R_1)^2}}, \quad v_2 = \frac{a^2/R_2}{1 + \sqrt{1 - (a/R_2)^2}}. \quad (2)$$

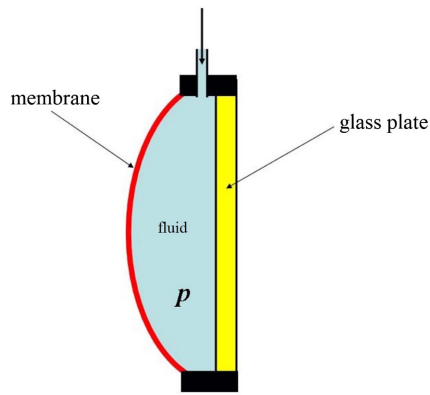


Fig. 1. Schematic drawing of the membrane liquid lens.

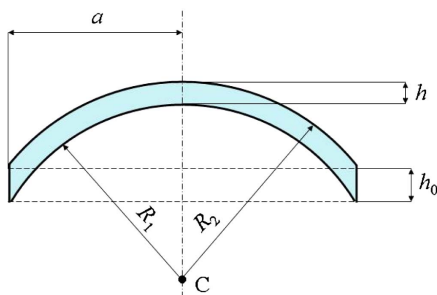


Fig. 2. Spherical membrane.

For volumes V_1 and V_2 of the cylindrical solids under bottom and top spherical surfaces we obtain

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3}\pi v_1^2(3R_1 - v_1) + \pi a^2(R_1 - v_1), \\ V_2 &= \frac{1}{3}\pi v_2^2(3R_2 - v_2) + \pi a^2(R_2 - v_2). \end{aligned} \quad (3)$$

The cylindrical solid mentioned above is composed of the spherical cap with the radius of curvature R_1 or R_2 and height v_1 or v_2 and of the cylinder with radius a and height $(R_1 - v_1)$ or $(R_2 - v_2)$, respectively. The final volume of the deformed membrane is then

$$V = V_2 - V_1. \quad (4)$$

Under the assumptions mentioned above, the initial membrane volume V_0 will be the same as the deformed membrane volume V . The deformed membrane thickness can be determined from

$$V - V_0 = f(b) = 0. \quad (5)$$

Solving the nonlinear Eq. (5) we obtain the deformed membrane thickness b . Then, Eq. (5) can be written as

$$a_4 b^4 + a_3 b^3 + a_2 b^2 + a_1 b + a_0 = 0, \quad (6)$$

where

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{1 - \frac{a^2}{R_1^2}} \\ a_4 &= -12a^2 \\ a_3 &= 8(1 - A)R_1^3 + 8a^2(A - 6)R_1 + 12a^2b_0 \\ a_2 &= 24(1 - A)R_1^4 + 24a^2(A - 3)R_1^2 + 36a^2b_0R_1 + 12a^4 \\ a_1 &= 24(1 - A)R_1^5 + 24a^2(A - 2)R_1^3 + 36a^2b_0R_1^2 + 24a^4R_1 \\ a_0 &= 4(1 - A^2)R_1^6 + 4a^2(2A^2 - 3)R_1^4 + 12a^2b_0AR_1^3 \\ &\quad + 4a^4(3 - A^2)R_1^2 - 12a^4b_0AR_1 - 4a^6 - 9a^4b_0^2. \end{aligned} \quad (7)$$

For the membrane dioptric power φ_m (Fig. 2) one can derive

$$\varphi_m = \frac{b(n_m - 1)}{n_m R_1 (b - R_1)} \approx -\frac{b(n_m - 1)}{n_m R_1^2} \left(1 + \frac{b}{R_1}\right), \quad (8)$$

where n_m is the refractive index of the membrane material (e.g., Sylgard 184 [31]). From Eq. (8) we clearly see that the membrane dioptric power is very small because $b/R_1 \ll 1$ and therefore $b/R_1^2 \approx 0$.

Let us focus on the influence of membrane thickness change on the aberrations of the liquid lens. To simplify the problem, we will limit ourselves only to the case of the spherical aberrations [32,33], and we will assume that the refractive index of the membrane material is the same as the one of the optical fluid. The approximate calculation of the spherical aberration of the membrane liquid lens can be done using the formulas valid for the third-order aberration region [32,33]. This is sufficiently accurate because of the case of a simple lens. For the third-order spherical aberration coefficient of the thick lens in air for the infinitely distant object we can derive

$$\begin{aligned} S_I &= \frac{\varphi_1^3 - (\varphi_1 - n^2\varphi)(\varphi_1 - n\varphi)^2}{n^2(n-1)^2} \\ &\quad + d \left[\frac{\varphi_1(\varphi_1 - n^2\varphi)(\varphi_1 - n\varphi)^2}{n^3(n-1)^2} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

where $\varphi = 1/f'$ is the dioptric power of the lens, f' is the focal length of the lens, $\varphi_1 = (n-1)/r_1$ is the dioptric power of the first surface of the lens, R_1 is the radius of curvature of the first surface of the lens, d is the thickness of the lens, and n is the lens material refractive index. The longitudinal spherical aberration of the lens $\Delta s'$ is for the infinitely distant object given by [32,33]

$$\Delta s' = -\frac{1}{2}f'^2 H^2 S_I, \quad (10)$$

where H is the aperture ray incident height on the lens. For the third-order wave spherical aberration of the infinitely distant object we can write [32,33]

$$W = -\frac{1}{8}H^4 S_I. \quad (11)$$

Using Eq. (9) for the case of a thin membrane in air (Fig. 2), i.e., setting $\varphi_1 = (n_m - 1)/R_1$ and Eq. (8) for φ we get

$$\begin{aligned} (S_I)_m &= \frac{n(1-n)b^3 + R_1(n^3-1)b^2 + R_1^2(1-n^3)b}{n^3 R_1^3 (R_1^3 - 3R_1^2 b + 3R_1 b^2 - b^3)} \\ &\approx -\frac{b(n^3-1)(2b/R_1+1)}{R_1^4 n^3}, \end{aligned} \quad (12)$$

where $n = n_m$ is the refractive index of the membrane material (e.g., Sylgard 184 [31]). Using Eqs. (8), (11), and (12) for the membrane spherical wave aberration (for infinitely distant object) we get

$$W_m \approx \frac{b}{8} \left(\frac{H}{R_1}\right)^4 \frac{(n_m^3 - 1)(2b/R_1 + 1)}{n_m^3} \approx \frac{b}{8} \left(\frac{H}{R_1}\right)^4 \frac{(n_m^3 - 1)}{n_m^3} = bK, \quad (13)$$

where

$$K = \frac{1}{8} \left(\frac{H}{R_1}\right)^4 \frac{(n_m^3 - 1)}{n_m^3}. \quad (14)$$

Differentiating Eq. (13) with respect to b we get for the membrane wave aberration differential dW_m

$$dW_m = dbK. \quad (15)$$

As clearly seen from the equations derived above, the influence of the thin membrane on the liquid lens imaging properties is practically negligible compared to the liquid lens wave aberrations. Setting the membrane refraction index to $n_m \approx 1.4$ (e.g., Sylgard 184 [31]) and the aperture ray incident height $H \leq R_1$, for the coefficient K it yields $K \leq 1/12$, and therefore the membrane thickness increment db has practically no influence on the liquid lens imaging properties.

Equation (13) gives us change in the optical path that agrees with exact calculation using OSLO software [34] with accuracy better than 0.00003λ . The aberration coefficients of the membrane for other types of aberrations (e.g., coma, astigmatism, field curvature, distortion) are listed in Ref. [35]. Their numerical values are comparable to the numerical value of the spherical aberration coefficient of the membrane and can therefore be neglected.

To show the error caused by approximating the aspherical membrane surface by a spherical surface with radius of curvature R_{sfer} , let us use the example in Ref. [36] where the membrane aspherical surface is described by the following equation

$$z(r) = \frac{r^2/R_0}{1 + \sqrt{1 - r^2/R_0^2}} + \sum_{i=2}^5 A_{2i}r^{2i}, \quad (16)$$

where $r \in (0, a)$ is the radial distance of each point of the membrane surface from its axis of symmetry. The vertex radius of curvature R_0 , the aspherical parameters A_{2i} , and the membrane radius a have the following values:

$$R_0 = 22.553 \text{ mm}, a = 10 \text{ mm}, A_4 = 1.85280 \cdot 10^{-5} \text{ mm}^{-3}, \\ A_6 = 2.10470 \cdot 10^{-8} \text{ mm}^{-5}, A_8 = 1.85280 \cdot 10^{-10} \text{ mm}^{-7}, \\ A_{10} = 1.39160 \cdot 10^{-12} \text{ mm}^{-9}.$$

Approximation of the above-described aspherical surface by spherical surface $z_{sph}(r)$ with radius of curvature $R_{sph} = 20.9 \text{ mm}$ is shown on Fig. 3.

As clearly seen from Fig. 3, the deviation of the aspherical surface from the spherical one is very small, and therefore the chosen approximation is sufficiently accurate for our purpose. The maximum absolute value of the deviation is 0.051 mm.

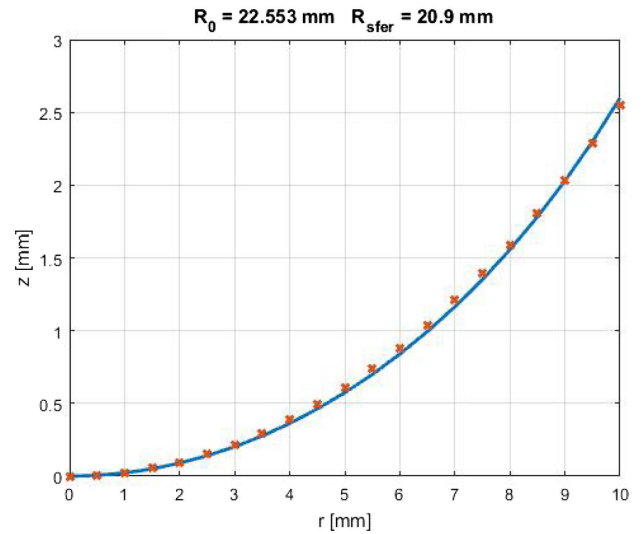


Fig. 3. Comparison of the aspherical surface (blue line) and its spherical approximation (red x).

3. MEMBRANE SHAPE APPROXIMATED BY POWER SERIES

Let us consider a circular axisymmetric membrane of a radius a and an initial thickness h_0 loaded by a constant pressure p with zero initial prestress (Fig. 4). Assuming that the initial thickness is so small that the bending stiffness can be neglected, the total potential energy of this system is given by [37]

$$E_p = \int_0^a \frac{E}{2(1 - \nu^2)} (\epsilon_r^2 + 2\nu\epsilon_r\epsilon_t + \epsilon_t^2) 2\pi r h_0 dr - pV, \quad (17)$$

where E is the Young's modulus, ν is the Poisson's ratio, and ϵ_r and ϵ_t are the radial and tangential strains, respectively, that can be expressed as

$$\epsilon_r = u' + \frac{1}{2}(u^2 + w^2), \quad \epsilon_t = \frac{u}{r} + \frac{u^2}{2r^2}. \quad (18)$$

V is the volume between the initial midplane, and the deformed midsurface and can be evaluated as

$$V = \int_0^a w 2\pi(r + u)(1 + u') dr. \quad (19)$$

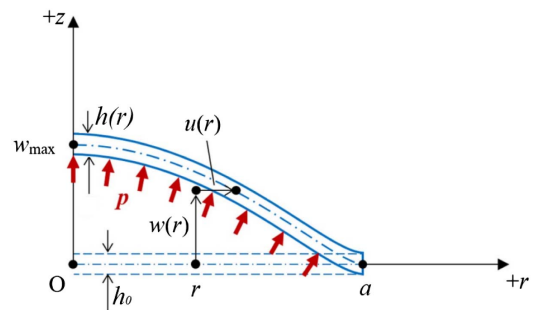


Fig. 4. Schematic of a circular axisymmetric membrane loaded by constant liquid pressure (w and u are the lateral and the radial displacement, respectively).

Let us elaborate a different approximate solution to verify the case discussed in the first part where we assumed a spherical shape of the membrane after the deformation and the constant thickness change. Now, we can also assume that the lateral displacement function w is parabola that automatically satisfies the boundary conditions $w'(0) = 0$ and $w(a) = 0$:

$$w(r) = w_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right). \quad (20)$$

To continue with the derivation, we also have to choose some approximation for the radial displacement function u . One of the simplest options that also automatically satisfies the boundary conditions $u(0) = 0$ and $u(a) = 0$ seems to be

$$u(r) = u_0 \left(\frac{r}{a} - \frac{r^3}{a^3}\right). \quad (21)$$

The lateral and the radial displacement functions are now expressed only in terms of two unknown constants w_0 and u_0 that can be determined from the minimal potential energy condition. Before substituting into the total potential energy expression, it is important to note that in the case of approximate solution we can neglect u'^2 and $\frac{u^2}{2r^2}$ in Eq. (17). Also, in Eq. (18), u can be neglected compared to r , and u' can be neglected compared to 1. Substituting Eqs. (20) and (21) into Eqs. (19) and (17), after integration we get

$$E_p = \frac{h_0 \pi E (2w_0^4 + 2a^2 u_0^2 - 3a u_0 w_0^2 + \nu u_0 w_0^2) - a^2 p \pi w_0}{3a^2 (1 - \nu^2)}. \quad (22)$$

Minimizing Eq. (22) with respect to the unknown constants w_0 and u_0 we get the following system of nonlinear equations:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_p}{\partial w_0} &= \frac{2h_0 \pi E w_0 (4w_0^2 - 3a u_0 + \nu u_0) - a^2 p \pi}{3a^2 (1 - \nu^2)} - \frac{a^2 p \pi}{2} = 0 \\ \frac{\partial E_p}{\partial u_0} &= \frac{h_0 \pi E (4a u_0 - 3w_0^2 + \nu w_0^2)}{3a (1 - \nu^2)} = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

The only real solutions to the system of nonlinear equations [Eq. (23)] are

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[3]{\frac{3(\nu - 1)}{(\nu - 7)}} \sqrt[3]{\frac{a^4 p}{E h_0}} \\ u_0 &= (3 - \nu) \sqrt[3]{\frac{9(\nu - 1)^2}{64(\nu - 7)^2}} \sqrt[3]{\frac{a^5 p^2}{E^2 h_0^2}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Knowing the approximate deformed membrane shape, we can also determine the thickness changes over the membrane body depending on the loading pressure. From Hook's law for the planar stress we can write

$$\sigma_z = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_r + \varepsilon_t)] = 0, \quad (25)$$

therefore

$$\varepsilon_z = \frac{\nu(\varepsilon_r + \varepsilon_t)}{(\nu - 1)}, \quad \text{where } \varepsilon_z = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{h}{h_0}\right)^2 - 1 \right] \approx \left(\frac{h}{h_0}\right) - 1, \quad (26)$$

where σ_z is the lateral stress, and ε_z is the Green-Lagrange lateral strain.

Combining Eqs. (18), (20), (21), (24), and (26) for thickness h we get

$$h = h_0 \sqrt{\frac{2\nu \left(\frac{a^3 u_0 - 3ar^2 u_0 + 2r^2 w_0^2}{a^4} + \frac{u_0(a^2 - r^2)}{a^3} \right)}{\nu - 1}} + 1. \quad (27)$$

To compare the results of both approximate solutions (spherically shaped membrane and parabolically shaped membrane), it is necessary to express the deformed thickness h as a function of radius of curvature of the deformed membrane. Considering that the main point of interest is the center of the membrane, we can set $r = 0$ and investigate the thickness dependence on the vertex radius of curvature. The radius of curvature of the function $g(r)$ is given by

$$R(r) = \frac{(1 + g'^2)^{\frac{3}{2}}}{|g''|}. \quad (28)$$

Substituting $g(r) \approx w(r)$ into Eq. (28) we get for the vertex radius of curvature:

$$R_0 = R(0) = \sqrt[3]{\frac{a^2 h_0 E (\nu - 7)}{24p(\nu - 1)}}, \quad (29)$$

from where

$$p = \frac{a^2 h_0 E (\nu - 7)}{24R_0^3 (\nu - 1)}. \quad (30)$$

Substituting Eq. (30) into Eqs. (24) and (27) for thickness h we get

$$h = h_0 \sqrt{\frac{\nu(2\nu r^2 + 3a^2 - \nu a^2 - 2r^2)}{4R_0^2 (\nu - 1)}} + 1. \quad (31)$$

One can use the formulas derived above to calculate approximately the deformed membrane shape and the dependence of membrane thickness on the loading pressure or on the vertex radius. To calculate the membrane shape and its deformed thickness more accurately, one has to use higher order power series to approximate the functions u and w . Let us assume the following form of the unknown functions:

$$w(r) = \sum_{i=1}^M b_i \left(1 - \frac{r^{2i}}{a^{2i}}\right) \quad u(r) = \sum_{j=1}^N c_j \left(\frac{r}{a} - \frac{r^{2j+1}}{a^{2j+1}}\right). \quad (32)$$

Substituting Eq. (32) into Eqs. (17)–(19) and knowing the dimensions and mechanical parameters of the membrane, we get the total potential energy expression as a function of coefficients b_i and c_j :

$$E_p(b_1, b_2, \dots, b_M, c_1, c_2, \dots, c_N) = \dots \quad (33)$$

The unknown coefficients are determined from the zero gradient condition

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_p}{\partial b_1} = 0, \frac{\partial E_p}{\partial b_2} = 0, \dots \frac{\partial E_p}{\partial b_M} = 0 \\ \frac{\partial E_p}{\partial c_1} = 0, \frac{\partial E_p}{\partial c_2} = 0, \dots \frac{\partial E_p}{\partial c_N} = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

The system of nonlinear equations [Eq. (34)] is in general complex and has to be solved numerically, e.g., with the Newton–Raphson method. Substituting Eq. (32) into Eq. (18) we get for the radial and tangential Green–Lagrange strains:

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \sum_{j=1}^N c_j \left[\frac{1}{a} - (2j+1) \frac{r^{2j}}{a^{2j+1}} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^N c_j \left[\frac{1}{a} - (2j+1) \frac{r^{2j}}{a^{2j+1}} \right] \right)^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^N i b_i \frac{r^{2i-1}}{a^{2i}} \right)^2 \\ \epsilon_t &= \sum_{j=1}^N c_j \left[\frac{1}{a} - \frac{r^{2j}}{a^{2j+1}} \right] + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^N c_j \left[\frac{1}{a} - \frac{r^{2j}}{a^{2j+1}} \right] \right)^2. \end{aligned} \quad (35)$$

For deformed thickness h from Eq. (26) yields

$$h = h_0 \sqrt{\frac{2\nu(\epsilon_r + \epsilon_t)}{\nu - 1} + 1}. \quad (36)$$

To calculate the deformed membrane vertex radius accurately, it is necessary to realize that the final shape of a membrane is a certain function $g(r)$ implicitly defined by the relation (Fig. 3)

$$g(r+u) = w(r). \quad (37)$$

The following derivatives have to be taken into account:

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d(r+u)} &= \frac{w'}{1+u'} \\ \frac{d^2g}{d(r+u)^2} &= \left(\frac{w''}{1+u'} - \frac{w'u''}{(u'+1)^2} \right) \frac{1}{1+u'}, \end{aligned} \quad (38)$$

and for the radius of curvature it yields

$$R(r) = \frac{\left[1 + \left(\frac{dg}{d(r+u)} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left| \frac{d^2g}{d(r+u)^2} \right|}. \quad (39)$$

4. EXAMPLES

A. Example 1

To compare the different calculation approaches of the membrane thickness dependence on its vertex radius of curvature, let us consider three different circular membrane shapes with the same vertex radius of curvature. The first membrane is assumed to be spherically shaped, the second is parabolically shaped, and the third membrane shape is numerically calculated for $M = N = 4$ (in Ref. [36] it has been shown that this order of the power series is sufficient to accept the solution as very accurate). Figure 5 shows the comparison for the following membrane parameters: radius $a = 10$ mm, initial thickness $h_0 = 0.1$ mm, the midsurface vertex radius of curvature $R_0 = 20$ mm and the Poisson’s ratio $\nu = 0,41$ (Sylgard 184 [31]).

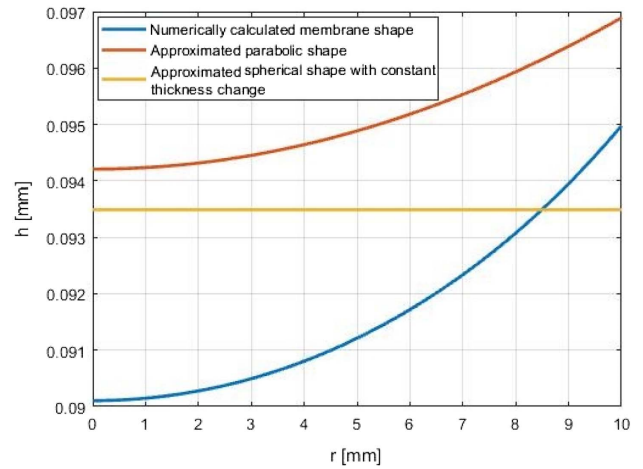


Fig. 5. Deformed membrane thickness in the radial direction ($a = 10$ mm, $h_0 = 0.1$ mm, $R_0 = 20$ mm, $\nu = 0,41$).

B. Example 2

As a second example, let us, again, consider three different membranes from the first example ($a = 10$ mm, $h_0 = 0.1$ mm, $\nu = 0,41$). For each of these cases, Fig. 6 shows the dependence of the membrane vertex thickness on its vertex radius of curvature R_0 [for spherically shaped membrane it is the solution to Eq. (6), for parabolically shaped membrane it is the expression Eq. (31), and for the numerically calculated membrane shape it is the expression Eq. (36). Furthermore, Fig. 7 shows comparison of the membrane vertex thickness and edge thickness dependence on its vertex radius of curvature for the case of parabolic approximation.

Figures 5–7 show that the spherical approximation, as well as the parabolic approximation, gives us results very similar to the ones obtained from the accurate numerical model, and, therefore, these approximations can be used to predict membrane thickness changes for the purposes of this paper.

C. Example 3

The membrane liquid lens (Fig. 1) is composed of a thin membrane, an optical fluid layer in the shape of a Plano-convex lens,

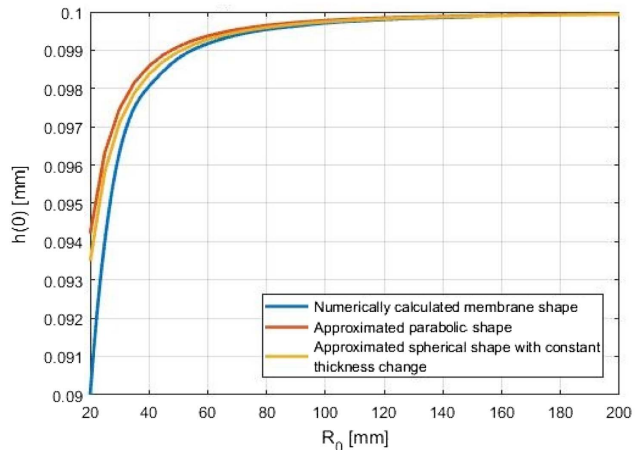


Fig. 6. Dependence of the membrane vertex thickness on its vertex radius of curvature ($a = 10$ mm, $h_0 = 0.1$ mm, $\nu = 0,41$).

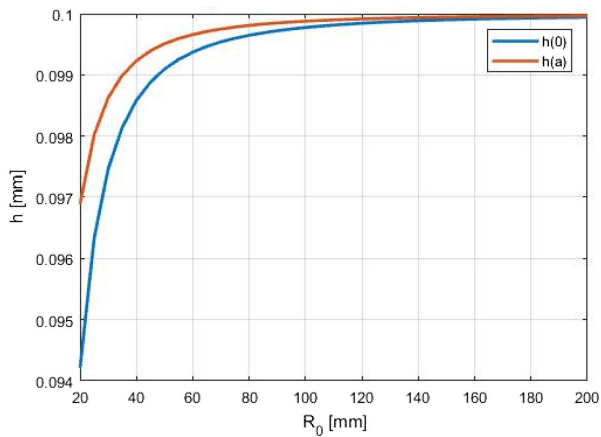


Fig. 7. Membrane vertex thickness and edge thickness dependence on its vertex radius of curvature ($a = 10$ mm, $h_0 = 0.1$ mm, $\nu = 0, 41$).

and a thin glass plate. Let us calculate the wave aberration of the membrane with initial thickness $h_0 = 0.1$ mm that is made of Silgard 184 (refractive index $n_m = 1.4118$ for the wavelength $\lambda = 589$ nm) and the wave aberration of the optical fluid layer (using distilled water as an optical fluid). To simplify the problem, we neglect the thickness of the thin glass plate. Figures 8 and 9 show the values of the wave optical aberration W depending on the radius of curvature R_1 of the membrane and of the optical fluid layer, respectively. The ray incident height was chosen as $H = 5$ mm because the optical diameter of commercially available optical liquid lenses with variable focal length is usually 10 mm [4]. Wave aberration for coma (Figs. 8 and 9) is calculated for the angle of field of view of 5 deg.

From Figs. 8 and 9, we clearly see that the membrane wave aberration is very small compared to the wave aberration of the Plano-Convex liquid lens, and, therefore, its influence on the membrane liquid-lens imaging properties can be neglected.

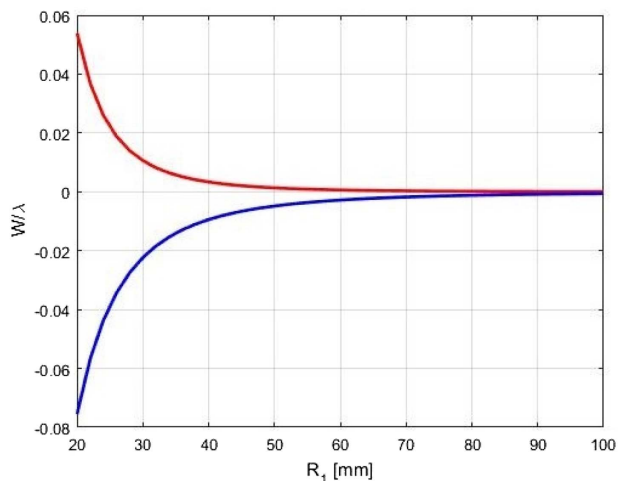


Fig. 8. Dependence of the membrane wave aberration (spherical—red, coma—blue) on its radius of curvature R_1 ($H = 5$ mm, $h_0 = 0.1$ mm, $n_m = 1.4118$, $\lambda = 589$ nm).

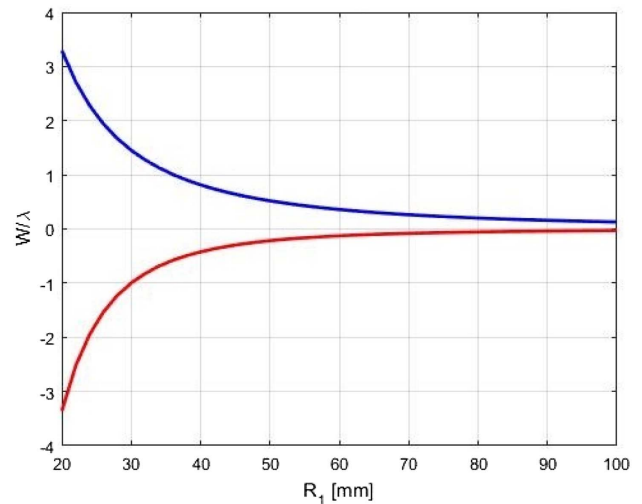


Fig. 9. Dependence of the Plano-Convex lens wave aberration (spherical—red, coma—blue) on its radius of curvature R_1 ($H = 5$ mm, $d = 5$ mm, $n_c = 1.333$, $\lambda = 589$ nm).

5. CONCLUSION

The problem of liquid lenses with variable focal length was presented in the paper. The influence of the radius of curvature of deformed membrane on its thickness was discussed. Approximate formulas for the thickness change of the spherically shaped membrane during its deformation were derived and were used to determine the influence of this phenomenon on the membrane liquid lens imaging properties. To investigate the approximate accuracy, another solution to this problem (membrane thickness change due to its deformation) was derived for the membrane shape approximated by power series using the minimum potential energy criterion, and it has been shown that the spherical approximation used in the first case is sufficiently accurate for this purpose. Furthermore, the formulas for the spherical wave aberration calculation of the spherically shaped membrane and of the Plano-Convex liquid lens body were derived. It has been shown that the influence of the membrane thickness and its change on the wave spherical aberration of the membrane liquid lens can be neglected from the practical point of view.

Funding. České Vysoké Učení Technické v Praze (ČVUT) (SGS18/105/OHK1/2T/11).

REFERENCES

1. R. K. Tyson, *Principles of Adaptive Optics* (CRC Press, 2011).
2. H. Ren and S. T. Wu, *Introduction to Adaptive Lenses* (Wiley, 2012).
3. Varioptic, <http://www.varioptic.com>.
4. Optotune, <http://www.optotune.com>.
5. Flexible Optical, <http://www.okotech.com>.
6. Imagine Eyes, <http://www.imagine-eyes.com/>.
7. A. H. Rawicz and I. Mikhailenko, "Modeling a variable-focus liquid-filled optical lens," *Appl. Opt.* **35**, 1587–1589 (1996).
8. D. Y. Zhang, N. Justis, V. Lien, Y. Berdichevsky, and Y.-H. Lo, "High-performance fluidic adaptive lenses," *Appl. Opt.* **43**, 783–787 (2004).

9. Q. Yang, P. Kobrin, C. Seabury, S. Narayanaswamy, and W. Christian, "Mechanical modeling of fluid-driven polymer lenses," *Appl. Opt.* **47**, 3658–3668 (2008).
10. G.-H. Feng and Y.-C. Chou, "Flexible meniscus/biconvex lens system with fluidic-controlled tunable-focus applications," *Appl. Opt.* **48**, 3284–3290 (2009).
11. H. W. Ren and S. T. Wu, "Variable-focus liquid lens," *Opt. Express* **15**, 5931–5936 (2007).
12. D. Shaw and T. E. Sun, "Optical properties of variable-focus liquid-filled optical lenses with different membrane shapes," *Opt. Eng.* **46**, 024002 (2007).
13. H. Choi, D. S. Han, and Y. H. Won, "Adaptive double-sided fluidic lens of polydimethylsiloxane membranes of matching thickness," *Opt. Lett.* **36**, 4701–4703 (2011).
14. L. Li, Q. H. Wang, and W. Jiang, "Liquid lens with double tunable surfaces for large power tunability and improved optical performance," *J. Opt.* **13**, 115503 (2011).
15. F. Schneider, J. Draheim, R. Kamberger, P. Waibel, and U. Wallrabe, "Optical characterization of adaptive fluidic silicone-membrane lenses," *Opt. Express* **17**, 11813–11821 (2009).
16. Y.-K. Fuh, M.-X. Lin, and S. Lee, "Characterizing aberration of a pressure-actuated tunable biconvex microlens with a simple spherically-corrected design," *Opt. Lasers Eng.* **50**, 1677–1682 (2012).
17. S. P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells* (McGraw-Hill, 1964).
18. A. S. Volmir, *Flexible Plates and Shells* (State Publishing House of Technical-Theoretical Literature, 1956) (in Russian). (English Translation Edition: "Flexible plates and shells," AFFDL-TR-66-216 (Air Force Flight Dynamics Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, 1967), xii+489 pp).
19. H. Hencky, "On the stress state in circular plates with vanishing bending stiffness," *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **63**, 311–317 (1915).
20. W. Z. Chein, "Asymptotic behavior of a thin clamped circular plate under uniform normal pressure at very large deflection," *Sci. Rep. Natl. Tsinghua Univ.* **A5**, 71–94 (1948).
21. J. D. Campbell, "On the theory of initially tensioned circular membranes subjected to uniform pressure," *Q. J. Mech. Appl. Math.* **9**, 84–93 (1956).
22. M. A. Goldberg and A. B. Pifko, "Large deflection analysis of uniformly loaded annular membranes," *AIAA J.* **1**, 2111–2115 (1963).
23. A. B. Pifko and M. A. Goldberg, "Iterative and power series solutions for the large deflection of an annular membrane," *AIAA J.* **2**, 1340–1342 (1964).
24. N. Perrone and R. Kao, "A general nonlinear relaxation technique for solving nonlinear problems in mechanics," *J. Appl. Mech.* **38**, 371–376 (1971).
25. R. Kao and N. Perrone, "Large deflections of axisymmetric circular membranes," *Int. J. Solids Struct.* **7**, 1601–1612 (1971).
26. R. G. Pettit, "Geometric and optical properties of inflatable point-focusing reflections," Master's thesis (Brigham Young University, 1985).
27. A. Kelkar, W. Elber, and I. S. Rajut, "Large deflections of circular isotropic membranes subjected to arbitrary axisymmetric loading," *Comput. Struct.* **21**, 413–421 (1985).
28. W. B. Fichter, "Some solutions for the large deflections of uniformly loaded circular membranes," NASA Technical Paper 3658 (NASA Center for Aerospace Information, 1997).
29. A. Mikš and P. Novák, "Calculation of a surface shape of a pressure actuated membrane liquid lens," *Opt. Lasers Eng.* **58**, 60–66 (2014).
30. B. Audoly and Y. Pomeau, *Elasticity and Geometry: From Hair Curls to the Nonlinear Response of Shells* (Oxford University, 2010).
31. "Sylgard 184 silicone elastomer kit," <http://www.dowcorning.com/>.
32. E. L. O'Neill, *Introduction to Statistical Optics* (Addison-Wesley, 1963).
33. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* (Oxford University, 1964).
34. <https://www.lambdare.com/oslo/>.
35. A. Mikš and J. Novák, "Third-order aberration coefficients of a thick lens with a given value of its focal length," *Appl. Opt.* **57**, 4263–4266 (2018).
36. P. Pokorný, F. Šmejkal, P. Kulmon, P. Novák, J. Novák, A. Mikš, M. Horák, and M. Jirásek, "Deformation of a prestressed liquid lens membrane," *Appl. Opt.* **56**, 9368–9376 (2017).
37. P. Pokorný, F. Šmejkal, P. Kulmon, P. Novák, J. Novák, A. Mikš, M. Horák, and M. Jirásek, "Calculation of nonlinearly deformed membrane shape of liquid lens caused by uniform pressure," *Appl. Opt.* **56**, 5939–5947 (2017).



Pressurized axisymmetric membrane deforming into a prescribed shape

Milan Jirásek*, Filip Šmejkal, Martin Horák

Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Mechanics, Thákurova 7, 16629 Prague 6, Czechia

ARTICLE INFO

Article history:

Received 4 May 2019

Revised 14 April 2020

Accepted 15 April 2020

Keywords:

Axisymmetric membrane
Variable thickness
Prescribed shape
Finite differences
Saint Venant-Kirchhoff model
Green-Lagrange strain
Second Piola-Kirchhoff stress

ABSTRACT

This paper presents a new approach to the optimal design of an axisymmetric membrane with variable thickness, which has potential applications in the development of active optical elements (liquid lenses). The governing equations are based on the Saint Venant-Kirchhoff material law, which postulates a linear relation between the Green-Lagrange strains and the second Piola-Kirchhoff stresses, combined with the exact description of geometric nonlinearity, without any simplifying assumptions. It is shown that the membrane thickness can be designed such that the prestressed membrane subjected to a given uniform liquid pressure deforms into a prescribed rotationally symmetric shape, e.g., a spherical or parabolic cap. For the special but important case of a spherical cap, a closed-form solution is derived. A numerical procedure is developed for the general case, and its high accuracy and efficiency is demonstrated by examples. The sensitivity of the optimal design to material parameters and prestressing displacement is assessed.

© 2020 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

Membrane liquid lenses (Holochip; Optotune; Rawicz and Mikhailenko, 1996; Ren and Wu, 2012; Sugiura and Morita, 1993; Yang et al., 2008; Ren and Wu, 2007; Shaw and Lin, 2007; Li et al., 2011; Fuh et al., 2012a; Mikš et al., 2013; Wang et al., 2014; Liang and Wang, 2016; Hasan et al., 2017) have been one of increasingly popular topics in optics over the past few years. The optical surface of such a lens is formed by a circular elastic membrane subjected to hydrostatic pressure exerted by an optical liquid. If a constant-thickness membrane is used, the resulting deformed shape is not optimal from the optical point of view and suffers from optical aberrations (Pokorný et al., 2017a; 2017b). The optical aberration correction of membrane liquid lenses can be implemented in many different ways (Zhang et al., 2004; Wang et al., 2013; 2014; Hasan et al., 2017; Choi et al., 2011; Fuh et al., 2012b; Liang and Wang, 2016; Du et al., 2016; Santiago-Alvarado et al., 2013; Huang et al., 2016; Ding et al., 2017; Zhao et al., 2015). In the present study, the deformed membrane shape is controlled by designing a suitable variation of the membrane thickness (still preserving axial symmetry). Ideally, the membrane should deform exactly into the prescribed shape, which eliminates the need for other optical members to correct for optical aberrations. This topic has re-

cently received attention, e.g., in Santiago-Alvarado et al. (2013), Huang et al. (2016), Ding et al. (2017) and Zhao et al. (2015).

Santiago-Alvarado et al. (2013) proposed to design the variable thickness such that, already in the undeformed state, the membrane shape would correspond to the previously designed spherical or parabolic surface. The deformed shape under uniform pressure loading was then calculated in Solidworks FEM plugin. Furthermore, the authors investigated optical parameters of the resulting deformed surfaces. With respect to the membrane optimal variable thickness determination, this approach remains a trial-and-error procedure.

Another method was suggested by Huang et al. (2016) who calculated the deformed shape of a constant-thickness membrane under uniform pressure using the COMSOL finite element package. The deformed shape was later used as a thickness profile for a variable-thickness membrane. Again, this approach does not seem to have a theoretical background and can be considered as a trial-and-error method. A similar approach was presented by Ding et al. (2017), who investigated three thickness profiles (spherical concave, spherical convex, constant thickness) and calculated the deformed shape using COMSOL.

Let us now discuss the approach developed by Zhao et al. (2015). Firstly, the authors determined the desired shape of the membrane optical surface using the Code V optical designing software. Secondly, based on a set of two differential equations causing large deflections of circular axisymmetric

* Corresponding author.

E-mail address: milan.jirasek@fsv.cvut.cz (M. Jirásek).

slabs (Timoshenko and Woinowsky-Krieger, 1959), they calculated the variable thickness that corresponds to the designed deformed shape, mechanical parameters and loading pressure. Since the designed optical surface typically does not contain any inflection points and the adopted model takes into account the influence of bending stiffness, the solution for the variable thickness tends to zero on the edge boundary (any other value of boundary thickness would result into inflection points close to this boundary). To make the design feasible from the practical point of view, the authors decided to increase the boundary thickness to the minimal feasible value and they approximated the resulting thickness profile by a suitable exponential function with a few parameters that can be changed to optimize the thickness profile later. Furthermore, finite element simulations in ANSYS were performed and the difference between the resulting deformed shape and the designed shape was assessed. The whole process was embedded into an optimization loop, in which the parameters of an exponential function describing the thickness profile were optimized such that the difference between the calculated deformed shape and the designed shape would become as small as possible. The optimization method used by the authors is not clearly explained in this paper but otherwise the whole process is well described.

In most of the above mentioned publications, the numerical methods treating the adopted mechanical models are not exposed in detail. A more elaborate coverage of various applicable numerical methods (power series method, relaxation iterative technique, finite difference method, finite element method) can be found in Hencky (1915), Campbel (1956), Goldberg and Pifko (1963), Pifko and Goldberg (1964), Kao and Perrone (1971), Perrone and Kao (1971), Kelkar et al. (1985), Fichter (1997), Allman (1982), Sheploak and Dugundji (1998), Zhao et al. (2015), Stanford and Ifju (2008) and Mikš and Novák (2014).

The aim of the present paper is to derive and analyze a procedure for a systematic design of the variable membrane thickness profile that leads, for given mechanical parameters and loading by given uniform pressure, to the prescribed deformed shape. The underlying mechanical model is introduced in Section 2 and its mathematical structure is analyzed in detail. A computational approach based on finite differences is presented in Section 3.1 and its performance is illustrated by a numerical example. In Section 4 it is shown that a closed-form solution can be derived for the special case of a spherical cap. Finally, sensitivity of the resulting optimal design to changes of material properties and initial prestress (imposed by prescribing a radial displacement on the boundary) is studied in Section 5.

2. Theoretical prediction of variable-thickness membrane shape

2.1. Derivation of governing equations

Let us consider a circular axisymmetric membrane of a liquid lens, with the axis of symmetry denoted as z and the radial axis as r ; see Fig. 1. In the undeformed (stress-free) state, the membrane is characterized by variable thickness $h(r)$ and radius a , with h so small that the bending stiffness can be neglected. Along its circumference, the membrane can generally be displaced (prestressed) in the radial direction by prescribed displacement u_a , which induces an initial prestress. Under applied pressure p of the optical liquid in the lens, the membrane deforms and a general point on its mid-plane with initial coordinates $[r, 0]$ is displaced to a new position $[r + u(r), w(r)]$, where $w(r)$ denotes the deflection (displacement in the z -direction) and $u(r)$ is the radial displacement. The deformed shape of the membrane can be characterized by a certain function $g(r)$, implicitly defined by the relation $g(r + u(r)) = w(r)$. The membrane thickness h is considered as very small compared

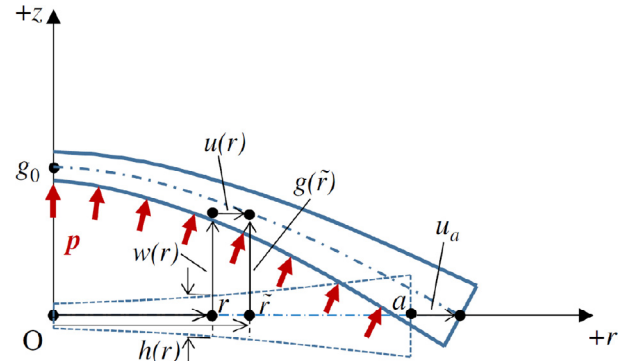


Fig. 1. Sketch of a circular axisymmetric membrane deformed by constant liquid pressure p (dashed blue lines – initial straight shape of the prestressed membrane at zero applied pressure, $w(r)$ and $u(r)$ – vertical and horizontal displacements of a point with initial coordinates $[r, 0]$, $\tilde{r}(r) = r + u(r)$ – horizontal coordinate in deformed shape, $g(\tilde{r})$ – prescribed deformed shape, a – membrane radius, $h(r)$ – membrane thickness, g_0 – maximum deflection, u_a – prestressing displacement)

to the deflection, and so the deformed shape is determined by the midsurface. It is also assumed that strains and stresses are uniformly distributed across the thickness of the membrane, which means that bending effects are neglected.

The radial stretch λ_r and the tangential (circumferential) stretch λ_t in the deformed state are easily expressed as

$$\lambda_r = \sqrt{(1 + u')^2 + w'^2} \quad (2.1)$$

$$\lambda_t = 1 + \frac{u}{r} \quad (2.2)$$

where u' and w' are the derivatives of displacements u and w with respect to the radial coordinate, r . The corresponding in-plane normal components of the Green-Lagrange strain tensor are evaluated from the stretches as

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2}(\lambda_r^2 - 1) = u' + \frac{1}{2}(u'^2 + w'^2) \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{2}(\lambda_t^2 - 1) = \frac{u}{r} + \frac{u^2}{2r^2} \quad (2.4)$$

Let us assume that the material can be described by the Saint Venant-Kirchhoff model, which postulates a linear relation between the Green-Lagrange strain and the second Piola-Kirchhoff stress (Audoly and Pomeau, 2010) and is the simplest hyperelastic material model. In Pokorný et al. (2017a,b) it was shown that, despite its simplicity, this model applied to analysis of membranes of a constant thickness leads to a very good agreement with experimentally measured deflections for materials typically used for liquid lenses, such as Sylgard, 184; Johnston et al., 2014).

Since the state of the material corresponds to plane stress, the strain energy density ε_{int} (per unit volume in the stress-free state) is given by (Timoshenko and Woinowsky-Krieger, 1959; Volmir, 1967)

$$\varepsilon_{\text{int}}(\varepsilon_r, \varepsilon_t) = \frac{E}{2(1 - \nu^2)} (\varepsilon_r^2 + 2\nu\varepsilon_r\varepsilon_t + \varepsilon_t^2) \quad (2.5)$$

where E is the Young modulus and ν is the Poisson ratio characterizing the membrane material. The expression in (2.5) does not contain the out-of-plane normal strain but this does not mean that this strain component is assumed to be zero—it has been eliminated based on the assumption that the out-of-plane stress is zero. Differentiating the strain energy density with respect to strains, we get the corresponding work-conjugate stresses

$$\sigma_r = \frac{\partial \varepsilon_{\text{int}}}{\partial \varepsilon_r} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_r + \nu\varepsilon_t) \quad (2.6)$$

$$\sigma_t = \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{int}}}{\partial \varepsilon_t} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_t + \nu \varepsilon_r) \quad (2.7)$$

The strain energy density has been differentiated with respect to Green-Lagrange strains, and so the resulting stresses are the second Piola-Kirchhoff stresses. It is important to realize that symbols a and $h(r)$ denote the membrane radius and thickness in the initial undeformed state (i.e., before application of possible prestress caused by imposed radial displacement u_a , and before application of the liquid pressure).

The equilibrium state after application of in-plane prestress and lateral pressure p can be found by exploiting the principle of minimum potential energy. The total potential energy,

$$E_p = E_{\text{int}} + E_{\text{ext}} \quad (2.8)$$

is the sum of the strain energy, E_{int} , and the energy of external forces, E_{ext} . The strain energy

$$E_{\text{int}} = 2\pi \int_0^a \varepsilon_{\text{int}} h r dr \quad (2.9)$$

is obtained by integrating the strain energy density specified in (2.5) over the initial volume of the membrane. The energy of external forces can be expressed as minus the applied pressure multiplied by the volume between the initial midplane and the deformed midsurface, which leads to

$$E_{\text{ext}} = -2\pi p \int_0^a w(r+u)(1+u') dr \quad (2.10)$$

The state of minimum potential energy is attained only if the variation of functional E_p vanishes for all admissible variations of displacements u and w . The first variations of the strain energy and of the energy of external forces are evaluated as

$$\begin{aligned} \delta E_{\text{int}} &= 2\pi \int_0^a \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{int}}}{\partial \varepsilon_r} \delta \varepsilon_r + \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{int}}}{\partial \varepsilon_t} \delta \varepsilon_t \right) h r dr \\ &= 2\pi \int_0^a (\sigma_r \delta \varepsilon_r + \sigma_t \delta \varepsilon_t) h r dr \\ &= 2\pi \int_0^a (h r \sigma_r (\delta u' + u' \delta u' + w' \delta w') + h \sigma_t (\delta u + u \delta u/r)) dr \\ &= 2\pi [h r \sigma_r (\delta u + u' \delta u + w' \delta w)]_{r=0}^a \\ &\quad - 2\pi \int_0^a \left((h r \sigma_r (1+u'))' \delta u + (h r \sigma_r w')' \delta w \right) dr \\ &\quad + 2\pi \int_0^a h \sigma_t \left(\delta u + \frac{u \delta u}{r} \right) dr \end{aligned} \quad (2.11)$$

and

$$\begin{aligned} \delta E_{\text{ext}} &= -2\pi p \int_0^a (r+u)(1+u') \delta w dr \\ &\quad - 2\pi p [w(r+u) \delta u]_{r=0}^a + 2\pi p \int_0^a w'(r+u) \delta u dr \end{aligned} \quad (2.12)$$

As shown in Fig. 1, admissible functions u and w are constrained by boundary conditions

$$u(a) = u_a, \quad w(a) = 0 \quad (2.13)$$

and by the condition

$$u(0) = 0 \quad (2.14)$$

which follows from displacement continuity and axial symmetry. In fact, functions that do not satisfy (2.14) would not lead to a finite value of strain energy. Variations δu and δw of admissible functions must satisfy conditions

$$\delta u(a) = 0, \quad \delta w(a) = 0, \quad \delta u(0) = 0 \quad (2.15)$$

Summing (2.11) and (2.12) and making use of conditions (2.15), we obtain the variation of total potential energy in the form

$$\begin{aligned} \delta E_p &= \delta E_{\text{int}} + \delta E_{\text{ext}} = -2\pi h r \sigma_r w' \delta w|_{r=0} \\ &\quad + 2\pi \int_0^a \left(h \sigma_r \left(1 + \frac{u}{r} \right) - (h r \sigma_r (1+u'))' + p w'(r+u) \right) \delta u dr \\ &\quad - 2\pi \int_0^a \left((h r \sigma_r w')' + p(r+u)(1+u') \right) \delta w dr \end{aligned} \quad (2.16)$$

The corresponding strong form of equilibrium equations reads

$$(h r \sigma_r (1+u'))' - h \sigma_r \left(1 + \frac{u}{r} \right) = p(r+u) w' \quad (2.17)$$

$$-(h r \sigma_r w')' = p(r+u)(1+u') \quad (2.18)$$

Since the variation δw at $r=0$ is arbitrary, the first term on the right-hand side of (2.16) leads to the boundary condition

$$h r \sigma_r w' = 0 \quad \text{at } r=0 \quad (2.19)$$

At a first glance, the condition seems to be satisfied automatically. Indeed, if $\sigma_r w'$ has a finite value at $r=0$, then multiplication by zero leads to $r \sigma_r w' = 0$. In a general case, a concentrated vertical force F_0 could be applied at $r=0$ and then the resulting boundary condition would read $\lim_{r \rightarrow 0^+} (h r \sigma_r w') = F_0 / (2\pi)$. For the problem studied here, no such concentrated force is present, and condition (2.19) is rewritten more carefully as

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} (h r \sigma_r w') = 0 \quad (2.20)$$

In this form, we admit that $h \sigma_r w'$ might tend to infinity but its growth must be slower than $1/r$.

Two differential equations (2.17)–(2.18) contain three functions, $h(r)$, $u(r)$ and $w(r)$. If one of these functions is prescribed, the other two can be computed, provided that we know the mechanical parameters of membrane material, the dimensions and loading pressure p . In a standard setting, the membrane thickness $h(r)$ is prescribed and displacements $u(r)$ and $w(r)$ are treated as unknown functions. However, in the present context of optimal design of a liquid lens, we consider the thickness $h(r)$ as unknown and we prescribe a desired shape of the deformed membrane. The deformed shape is affected by $u(r)$ as well as by $w(r)$, and so neither of these functions is given directly. Instead, prescribing the deformed shape leads to the constraint equation

$$w(r) = g(r+u(r)) \quad (2.21)$$

which provides a link between functions $u(r)$ and $w(r)$. Here, $g(\tilde{r})$ is a given function that describes how the deflection should depend on the radial coordinate in the deformed configuration, $\tilde{r} = r+u(r)$; see Fig. 1. Our objective is to find the function $h(r)$ such that the deformed shape calculated for the specific values of material parameters E and ν and hydrostatic pressure p satisfies condition (2.21).

Let us first eliminate the deflection function $w(r)$ from the governing equations, by making use of condition (2.21). Integrating (2.18) with boundary condition (2.20) we obtain

$$h r \sigma_r w' = -\frac{1}{2} p (r+u)^2 \quad (2.22)$$

Based on condition (2.21), the derivative of w can be expressed as

$$w'(r) = (1+u'(r)) g'(r+u(r)) \quad (2.23)$$

To simplify notation, we will write this relation without explicitly specifying the arguments, i.e., as

$$w' = (1+u') g' \quad (2.24)$$

but it should be borne in mind that g' has to be evaluated at $r+u$ and not at r . The same convention will later be used for the second derivative, g'' .

Using (2.24) in (2.22) yields

$$hr\sigma_r = -\frac{p(r+u)^2}{2(1+u')g'} \quad (2.25)$$

and the first term on the left-hand side of (2.17) can now be expressed as

$$\begin{aligned} (hr\sigma_r(1+u'))' &= -\frac{p}{2} \left(\frac{(r+u)^2}{g'} \right)' \\ &= p(r+u)(1+u') \left(\frac{(r+u)g''}{2g'^2} - \frac{1}{g'} \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

The tangential stress σ_t is then evaluated from (2.17) as

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{r}{(r+u)h} [(hr\sigma_r(1+u'))' - p(r+u)(1+u')g'] = \\ &= \frac{pr}{h} (1+u') \left(\frac{(r+u)g''}{2g'^2} - \frac{1}{g'} - g' \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

and, according to (2.25), the radial stress is given by

$$\sigma_r = -\frac{p(r+u)^2}{2hr(1+u')g'} = -\frac{pr}{h} \frac{(r+u)^2}{2r^2(1+u')g'} \quad (2.28)$$

By inversion of constitutive equations (2.6)–(2.7), strains are expressed as

$$\varepsilon_r = \frac{pr}{Eh} \left[-\frac{(r+u)^2}{2r^2(1+u')g'} - \nu(1+u') \left(\frac{(r+u)g''}{2g'^2} - \frac{1}{g'} - g' \right) \right] \quad (2.29)$$

$$\varepsilon_t = \frac{pr}{Eh} \left[\nu \frac{(r+u)^2}{2r^2(1+u')g'} + (1+u') \left(\frac{(r+u)g''}{2g'^2} - \frac{1}{g'} - g' \right) \right] \quad (2.30)$$

and substitution into the strain-displacement equations (2.3)–(2.4) yields

$$\begin{aligned} \frac{pr}{Eh} \left[-\frac{(r+u)^2}{2r^2(1+u')g'} - \nu(1+u') \left(\frac{(r+u)g''}{2g'^2} - \frac{1}{g'} - g' \right) \right] \\ = u' + \frac{1}{2}(u'^2 + (1+u')^2g'^2), \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{pr}{Eh} \left[\nu \frac{(r+u)^2}{2r^2(1+u')g'} + (1+u') \left(\frac{(r+u)g''}{2g'^2} - \frac{1}{g'} - g' \right) \right] \\ = \frac{u}{r} + \frac{u^2}{2r^2} \end{aligned} \quad (2.32)$$

This is a set of two equations for unknown functions u and h , but h is involved only algebraically and can easily be eliminated. The resulting first-order differential equation for unknown function u reads

$$\begin{aligned} \left[\frac{(r+u)^2}{2r^2g'} + \nu(1+u')^2 \left(\frac{(r+u)g''}{2g'^2} - \frac{1}{g'} - g' \right) \right] \left(\frac{u}{r} + \frac{u^2}{2r^2} \right) \\ + \left[\nu \frac{(r+u)^2}{2r^2g'} + (1+u')^2 \left(\frac{(r+u)g''}{2g'^2} - \frac{1}{g'} - g' \right) \right] \\ \left(u' + \frac{1}{2}u'^2 + \frac{1}{2}(1+u')^2g'^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

and its solution should satisfy the first condition in (2.13) and also condition (2.14). Once the displacement function is determined, the thickness function h can be calculated from (2.31) as

$$h = \frac{pr}{E} \times \frac{\nu(1+u') \left(g' + \frac{1}{g'} - \frac{(r+u)g''}{2g'^2} \right) - \frac{(r+u)^2}{2r^2(1+u')g'}}{u' + \frac{1}{2}(u'^2 + (1+u')^2g'^2)} \quad (2.34)$$

An alternative formula could be obtained from (2.32) but it would provide the same results.

2.2. Mathematical structure of the problem

In the previous section, we have derived Eq. (2.33), which can be used together with (2.34) to find the membrane thickness distribution $h(r)$ that will lead, under pressure p , to the prescribed deformed shape $g(\tilde{r})$. Differential equation (2.33) has certain special features and deserves a deeper analysis before we proceed to a numerical scheme. First of all, the equation is not only highly nonlinear, but it does not even have the standard form $u' = F(u, r)$, which would permit a direct evaluation of the derivative $u' \equiv du/dr$ from the values of u and r . Instead of that, the equation is presented in an implicit form, $F(u', u, r) = 0$, and even if the value of u at point r is known, the corresponding derivative u' must be computed by solving a nonlinear algebraic equation. In terms of u' , function F is a fourth-order polynomial, and therefore a unique solution cannot be expected.

Luckily, it turns out that u' can be found analytically, because Eq. (2.33) can be reformulated as a quadratic equation in terms of a transformed unknown, defined as

$$\eta = (1+u')^2 \quad (2.35)$$

Based on this transformation, all terms $(1+u')^2$ in (2.33) are replaced by η , and the expression $u' + u'^2/2$ is replaced by $(\eta - 1)/2$. If the whole equation is then multiplied by $4g'^2$ and divided by $(r+u)g' - 2g' - 2g^3$, the resulting quadratic equation can be presented in the form

$$A(u, r)\eta^2 + B(u, r)\eta + C(u, r) = 0 \quad (2.36)$$

where

$$A(u, r) = 1 + g'^2 \quad (2.37)$$

$$B(u, r) = \frac{2\nu u}{r} + \frac{\nu u^2}{r^2} - 1 + \nu(1+g'^2)\alpha(u, r) \quad (2.38)$$

$$C(u, r) = \left(\frac{2u}{r} + \frac{u^2}{r^2} - \nu \right) \alpha(u, r) \quad (2.39)$$

are coefficients and

$$\alpha(u, r) = \frac{\left(1 + \frac{u}{r}\right)^2 g'}{(r+u)g' - 2g' - 2g^3} \quad (2.40)$$

is an auxiliary function, introduced for convenience.

If the discriminant $D = B^2 - 4AC$ is positive, Eq. (2.36) has two real roots,

$$\eta_{1,2}(u, r) = \frac{-B(u, r) \pm \sqrt{B^2(u, r) - 4A(u, r)C(u, r)}}{2A(u, r)} \quad (2.41)$$

and if both of these roots are positive, the original Eq. (2.33) has four real roots, which can be symbolically presented as

$$u'_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\eta_{1,2}} - 1 \quad (2.42)$$

Intuitively it can be expected that only one of these roots corresponds to a physically meaningful solution. To get more insight, let us work out a specific example.

2.3. Example: Parabolic cap (part I)

Consider a membrane of radius $a = 9$ mm (in the undeformed state). The membrane is prestressed by imposing an initial radial displacement $u_a = 1$ mm on the outer boundary, i.e., its radius is increased to $a_p = a + u_a = 10$ mm. Furthermore, suppose that the desired deformed shape is an axisymmetric parabolic cap, described by

$$g(\tilde{r}) = \left(1 - \frac{\tilde{r}^2}{(a+u_a)^2} \right) g_0 = \left(1 - \frac{\tilde{r}^2}{a_p^2} \right) g_0 \quad (2.43)$$

where $g_0 = g(0) = 3$ mm is the given deflection at the center, and \tilde{r} is the radial coordinate in the deformed configuration, running from 0 to a_p . The derivatives of g are easily expressed as

$$g'(\tilde{r}) \equiv \frac{dg(\tilde{r})}{d\tilde{r}} = -\frac{2g_0\tilde{r}}{a_p^2} \tag{2.44}$$

$$g''(\tilde{r}) \equiv \frac{d^2g(\tilde{r})}{d\tilde{r}^2} = -\frac{2g_0}{a_p^2} \tag{2.45}$$

Let us now set up Eq. (2.36) at $r = a$ and $u = u_a$, so that the value of $u'(a)$ can be determined. The values of g' and g'' that are substituted into (2.37)–(2.40) correspond to $\tilde{r} = r + u = a + u_a = a_p$ and are given by $g' = -2g_0/a_p$ and $g'' = -2g_0/a_p^2$. Formulae (2.40) and (2.37)–(2.39) now yield

$$\alpha(u_a, a) = -\frac{-\frac{2g_0a_p}{a^2}}{\frac{-2g_0}{a_p} + \frac{4g_0}{a_p} + \frac{16g_0^3}{a_p^3}} = -\frac{a_p^2}{a^2(1 + 8g_0^2/a_p^2)} \tag{2.46}$$

and

$$A(u_a, a) = 1 + \frac{4g_0^2}{a_p^2} \tag{2.47}$$

$$B(u_a, a) = \nu \frac{a_p^2}{a^2} - \nu - 1 + \nu \left(1 + \frac{4g_0^2}{a_p^2}\right) \alpha(u_a, a) \tag{2.48}$$

$$C(u_a, a) = \left(\frac{a_p^2}{a^2} - 1 - \nu\right) \alpha(u_a, a) \tag{2.49}$$

Substituting $\nu = 0.4$, $g_0/a_p = 0.3$ and $a_p/a = 10/9$, we obtain $\alpha = -0.71777$, $A = 1.36$, $B = -1.2966$ and $C = 0.1187$. The discriminant $D = 1.0353$ is positive and the roots of (2.36), $\eta_1 = 0.85079$ and $\eta_2 = 0.10262$, are also positive. Therefore, the original Eq. (2.33) has four solutions, $u'_1 = \sqrt{\eta_1} - 1 = -0.07762$, $u'_2 = \sqrt{\eta_2} - 1 = -0.67965$, $u'_3 = -\sqrt{\eta_1} - 1 = -1.92238$ and $u'_4 = -\sqrt{\eta_2} - 1 = -1.32035$.

Now we need to determine which of these four solutions that all satisfy Eq. (2.33) is physically meaningful. First of all, we will look at the corresponding values of membrane thickness at $r = a$, which are according to (2.34) evaluated as

$$h(a) = \frac{pa}{E} \frac{1}{u' + 0.5u'^2 + 0.18(1 + u')^2} \left(\frac{1}{0.972(1 + u')} - 0.57333(1 + u') \right) \tag{2.50}$$

For the four possible values of u' listed above, the respective dimensionless factors that multiply pa/E in (2.50) are 7.5231, -7.0441 , -7.5231 and 7.0441. Roots u'_2 and u'_3 would lead to a negative thickness can be excluded from consideration. The other two roots, $u'_1 = -0.07762$ and $u'_4 = -1.32035$, are retained as candidates for a physically meaningful solution. Root u'_4 is smaller than -1 , which means that $1 + u'_4$ would be negative and, according to (2.24), the sign of w' would differ from the sign of g' . This corresponds to a parasitic solution for which the membrane would be stretched from the outer support to the external part of the paraboloid described by (2.43), with $\tilde{r} > a_p$. Such a solution is not what we are aiming at. Later it will be shown that, when prolonged, this solution would not satisfy condition $u(0) = 0$. Therefore, $u'_1 = -0.07762$ is the only root that leads to a physically admissible solution.

It is natural to ask the question whether the problem always admits exactly one physically admissible solution. Of course, to guarantee uniqueness, certain assumptions or constraints are needed. In quadratic equation (2.36), the leading coefficient A given

by (2.37) is always positive, and so the equation has one positive root if $C < 0$ and two positive roots if $0 < C < B^2/(4A)$ and $B < 0$. The sign of coefficient C given by (2.39) is affected by the sign of the auxiliary factor α introduced in (2.40). The sign of α corresponds to the sign of the expression $\tilde{r}g''/g' - 2 - 2g'^2$. Let us first consider the special case of a parabolic cap, for which $g' = \tilde{r}g''$, and so

$$\frac{\tilde{r}g''}{g'} - 2 - 2g'^2 = -1 - g'^2 < 0 \tag{2.51}$$

In a general case, α is negative if the shape-defining function g satisfies the condition

$$g'' > \frac{2(g' + g'^3)}{\tilde{r}} \tag{2.52}$$

Since usually $g' < 0$ and $g'' < 0$, this condition means that the prescribed shape must not be “too curved”.

Once we know that α is negative, we can evaluate

$$\text{sgn} C = \text{sgn}(2\varepsilon_t - \nu) \text{sgn} \alpha = \text{sgn}(\nu - 2\varepsilon_t) \tag{2.53}$$

For convenience, we have exploited the strain-displacement Eq. (2.4) and replaced $2u/r + u^2/r^2$ in formula (2.39) by $2\varepsilon_t$, which permits a physical interpretation of the result. Since ε_t represents the circumferential strain, it is typically small. As long as $\varepsilon_t < \nu/2$, coefficient C is positive, and Eq. (2.36) has either 2 or 0 positive roots. A necessary condition for the existence of two positive roots is then $B < 0$, which can be rewritten as

$$\nu(2\varepsilon_t + (1 + g'^2)\alpha) < 1 \tag{2.54}$$

Since we already assume that $\varepsilon_t < \nu/2$, which is needed to get $\alpha < 0$, the left-hand side of (2.54) is smaller than ν^2 and the condition is satisfied.

To guarantee the existence of two positive roots, one still needs to check that the discriminant $D = B^2 - 4AC$ is positive. This leads to the inequality

$$(1 - 2\nu\varepsilon_t)^2 + \alpha^2\nu^2(1 + g'^2)^2 + 2\alpha(1 + g'^2)[\nu + 2(\nu^2 - 2)\varepsilon_t] > 0 \tag{2.55}$$

in which

$$\alpha = \frac{1}{\tilde{r}g''/g' - 2 - 2g'^2} \frac{\tilde{r}^2}{r^2} \tag{2.56}$$

For $\varepsilon_t = 0$, condition (2.55) is always satisfied. If all other variables are fixed, the left-hand side of (2.55) is a quadratic function of ε_t with a positive second derivative. It is thus sufficient to show that the first derivative evaluated at $\varepsilon_t = 0$ is positive, which leads to the inequality

$$\alpha(1 + g'^2)(\nu^2 - 2) > \nu \tag{2.57}$$

Replacing α by the right-hand side of (2.56), we would obtain a rather complicated condition, which is not easy to analyze in full generality. In the special case of a prescribed parabolic cap we have

$$\alpha = -\frac{1}{1 + 2g'^2} \frac{\tilde{r}^2}{r^2} \tag{2.58}$$

and condition (2.57) can be rewritten as

$$\frac{\tilde{r}^2}{r^2} > \frac{\nu}{2 - \nu^2} \frac{1 + 2g'^2}{1 + g'^2} \tag{2.59}$$

For $u \geq 0$, the left-hand side is not smaller than 1. Since $\nu \leq 0.5$, the right-hand side is smaller than 4/7, and so the condition is satisfied, which means that the discriminant is positive and Eq. (2.36) has two positive roots. Note that $u \geq 0$ is equivalent to $\varepsilon_t \geq 0$.

In summary, we have proven that, for the prescribed parabolic cap and for circumferential strains in the range $0 \leq \varepsilon_t \leq \nu/2$,

Eq. (2.36) has two positive roots, η_1 and η_2 . Among the four corresponding roots of Eq. (2.33), those that are smaller than -1 can be excluded, for reasons that have already been explained. Therefore, we only need to consider $u'_1 = \sqrt{\eta_1} - 1$ and $u'_2 = \sqrt{\eta_2} - 1$ as potential solutions. Their physical admissibility should be assessed based on the sign of the corresponding membrane thickness h evaluated from (2.34). In our example, we have shown that one of these roots leads to positive thickness and the other to negative thickness. In fact, since we always consider only the roots for which $u' = \sqrt{\eta} - 1$, formula (2.34) for the membrane thickness can be rewritten in terms of variable η as

$$h = \frac{pr}{E} \times \frac{2}{\eta - 1 + \eta g'^2} \times \left[-\frac{\tilde{r}^2}{2r^2 \sqrt{\eta} g'} - \nu \sqrt{\eta} \left(\frac{\tilde{r} g''}{2g'^2} - \frac{1}{g'} - g' \right) \right] \\ = -\frac{p\tilde{r}^2}{Erg' \sqrt{\eta}} \times \frac{1}{(1 + g'^2)\eta - 1} \times \left(1 + \frac{\nu\eta}{\alpha} \right) \quad (2.60)$$

Since $g' < 0$ for all $\tilde{r} > 0$, the thickness is positive if expressions $(1 + g'^2)\eta - 1$ and $1 + \nu\eta/\alpha$ have the same sign. Restricting attention to cases in which $\alpha < 0$, we can write the resulting condition for the selection of the physically meaningful solution in the form

$$\min \left(\frac{1}{1 + g'^2}, -\frac{\alpha}{\nu} \right) < \eta < \max \left(\frac{1}{1 + g'^2}, -\frac{\alpha}{\nu} \right) \quad (2.61)$$

For the specific data treated in our illustrative example, we have $1/(1 + g'^2) = 1/1.36 = 0.735$ and $-\alpha/\nu = 0.71777/0.4 = 1.794$. Therefore, the solution is admissible if $0.735 < \eta < 1.794$, and the correct root is $\eta_1 = 0.85079$, while $\eta_2 = 0.10262$ should be excluded. This confirms that $u'_1 = \sqrt{\eta_1} - 1 = -0.07762$ should be selected as the physically meaningful solution.

We have demonstrated that even though the differential equation to be solved is written in an implicit form $F(u', u, r) = 0$, the derivative u' can be uniquely determined from given values of r and u , provided that the prescribed shape satisfies a certain constraint and the circumferential strain does not exceed $\nu/2$. The reasoning leading to this conclusion was based on an auxiliary quadratic Eq. (2.36) with coefficients given by (2.37)–(2.39). Special attention needs to be paid to the point with coordinate $r = 0$, because coefficients B and C cannot be directly evaluated from formulae (2.38) and (2.39), which contain fractions u/r . Undetermined expressions are also found in formula (2.40) for the auxiliary factor α that needs to be substituted into (2.38) and (2.39).

Under certain assumptions it is possible to obtain finite limits of $\alpha(u(r), r)$, $B(u(r), r)$ and $C(u(r), r)$ for r approaching zero. The assumptions are that u/r tends to a finite limit,

$$\varepsilon_0 = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{u(r)}{r} \quad (2.62)$$

and that the prescribed shape satisfies conditions $g'(0) = 0$ and $g''(0) = g''_0 \neq 0$. Recall that g' and g'' must be evaluated at $\tilde{r} = r + u$ and not at r . This needs to be taken into account when expressing the limit of the fraction $(r + u)/g'$, which would be written in careful notation as

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r + u(r)}{g'(r + u(r))} = \frac{1}{g''(0)} = \frac{1}{g''_0} \quad (2.63)$$

Based on (2.62)–(2.63) and on the assumed properties of function g , it is easy to evaluate

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \alpha(u(r), r) \\ = \frac{\lim_{r \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{u(r)}{r} \right)^2}{\lim_{r \rightarrow 0^+} \left[\frac{(r + u(r))g''(r + u(r))}{g'(r + u(r))} - 2 - 2g'^2(r + u(r)) \right]}$$

$$= \frac{(1 + \varepsilon_0)^2}{(1 - 2 - 0)} = -(1 + \varepsilon_0)^2 \quad (2.64)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} B(u(r), r) = 2\nu\varepsilon_0 + \nu\varepsilon_0^2 - 1 - \nu(1 + \varepsilon_0)^2 = -1 - \nu \quad (2.65)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} C(u(r), r) = -(2\varepsilon_0 + \varepsilon_0^2 - \nu)(1 + \varepsilon_0)^2 \\ = (1 + \nu)(1 + \varepsilon_0)^2 - (1 + \varepsilon_0)^4 \quad (2.66)$$

Coefficient $A(0, 0) = 1$ can be evaluated by direct substitution into (2.37). Quadratic equation (2.36) written at $r = 0$ and $u = 0$ thus reads

$$\eta^2 - (1 + \nu)\eta + (1 + \nu)(1 + \varepsilon_0)^2 - (1 + \varepsilon_0)^4 = 0 \quad (2.67)$$

and it has two real roots,

$$\eta_1 = (1 + \varepsilon_0)^2 \quad (2.68)$$

$$\eta_2 = 1 + \nu - (1 + \varepsilon_0)^2 \quad (2.69)$$

Root η_1 is always positive, and η_2 is positive if $\varepsilon_0 < \sqrt{1 + \nu} - 1$. Admissibility condition (2.61) reads

$$1 < \eta < \frac{(1 + \varepsilon_0)^2}{\nu} \quad (2.70)$$

and it is easy to see that η_1 is always admissible while η_2 is not. Interestingly, the resulting admissible solution for u' is $u'_1 = \sqrt{\eta_1} - 1 = \varepsilon_0$ (of course, provided that $\varepsilon_0 > -1$, which is quite natural).

The foregoing analysis is mathematically correct but its physical interpretation is somewhat tricky. In order to evaluate coefficients of quadratic Eq. (2.67) and to calculate the derivative u' at $r = 0$, we had to make the assumption that we know ε_0 defined in (2.62). The calculation then resulted into the conclusion that $u'(0) = \varepsilon_0$. But this should not be so surprising, since the right-hand side of (2.62) in fact represents the derivative of u at $r = 0$ (we have assumed that the limit is finite, which is only possible if $u(0) = 0$, and then the numerator can also be written as $u(r) - u(0)$). Therefore, the analysis does not really show how to compute $u'(0)$ without knowing it beforehand. Still, it is not worthless, because it reveals a special property of differential equation (2.33). Even though we know the value of $u = 0$ at point $r = 0$, the corresponding derivative u' cannot be determined from $F(u', 0, 0) = 0$. The equation can be satisfied in the limit sense for an arbitrary value of u' greater than -1 .

3. Computational approach

3.1. Adopted numerical scheme

The intriguing result obtained in the previous example is closely related to another peculiar feature of the problem at hand. After elimination of unknown functions w and h , we ended up with differential equation (2.33) for the remaining unknown function, u . It is unusual that the equation is of the first order but the solution should satisfy two boundary conditions, $u(0) = 0$ and $u(a) = u_a$. It might seem that the problem is overdetermined and there is a danger that no solution exists. Normally, one could use $u(0) = 0$ as the initial condition and integrate the governing first-order differential equation, e.g., by using the forward Euler scheme. This procedure would provide the entire function $u(r)$, including the value of $u(a)$. But then, the boundary condition $u(a) = u_a$ would be satisfied only by chance, for one particular value of u_a , and so the problem would in general have no solution.

Fortunately, as shown above, the governing equation has a special structure at $r = 0$ and the derivative $u'(0)$ can be completely

arbitrary. Therefore, the numerical procedure can in principle start from various values of $u'(0)$ and generate a family of solutions, and then one particular solution can be selected based on the prescribed value u_a at $r = a$. Such an approach could be implemented in the spirit of the shooting method, which converts the problem into a nonlinear algebraic equation $G(\varepsilon_0) = u_a$ where $G(\varepsilon_0)$ is defined as the value of $u(a)$ computed with $u'(0)$ set to ε_0 .

The shooting method would require an iterative solution of the nonlinear algebraic equation described above. However, the problem can be solved in a simpler way: The numerical integration procedure can start from $r = a$ and proceed in space in the opposite direction. At $r = a$, the initial value $u(a) = u_a$ is prescribed by the boundary condition, and coefficients $A(u_a, a)$, $B(u_a, a)$ and $C(u_a, a)$ can be evaluated without problems, since formulae (2.37)–(2.39) have no singularity at that point. Therefore, $u'(a)$ can be calculated from (2.33) and a standard integration scheme can be used to construct a numerical solution by marching backwards to $r = 0$. Interestingly, no matter which initial value u_a is imposed at $r = a$, the solution always tends to 0 as the point $r = 0$ is approached. Due to the special structure of the governing equation, different particular solutions have different derivatives $u'(0)$ but the same value $u(0) = 0$.

The most straightforward approach to the numerical solution of differential equation (2.33) can be based on the forward Euler scheme, which needs to be slightly adjusted because we start on the right boundary and proceed to the left. The interval $(0, a)$ is divided into N computational subintervals of size $\Delta r = a/N$, and the numerical approximation of $u(r_i)$ is denoted as u_i , with $r_i = i\Delta r$, $i = N, N-1, \dots, 0$. The procedure starts by setting $r_N = a$ and $u_N = u_a$. In a generic step, the value of u_i is known and the corresponding value of u'_i that approximates $u'(r_i)$ is calculated from Eq. (2.33), using the previously developed procedure that first computes the auxiliary variable η from quadratic equation (2.36). For simplicity, we slightly abuse notation and use u'_i to denote the value of u' at r_i , even though before we used u' with subscripts 1, 2, 3 and 4 to denote four values satisfying Eq. (2.33) at one given point. Now we already know which of these four solutions to choose and subscript i will be used to refer to the computational step number.

Denoting

$$\tilde{r}_i = r_i + u_i \quad (3.1)$$

$$g'_i = g'(\tilde{r}_i) \quad (3.2)$$

$$\alpha_i = \alpha(u_i, r_i) = \frac{\left(1 + \frac{u_i}{r_i}\right)^2}{\tilde{r}_i g''(\tilde{r}_i)/g'_i - 2 - 2g_i'^2} \quad (3.3)$$

$$A_i = 1 + g_i'^2 \quad (3.4)$$

$$B_i = \frac{2\nu u_i}{r_i} + \frac{\nu u_i^2}{r_i^2} - 1 + \nu(1 + g_i'^2)\alpha_i \quad (3.5)$$

$$C_i = \left(\frac{2u_i}{r_i} + \frac{u_i^2}{r_i^2} - \nu\right)\alpha_i \quad (3.6)$$

$$D_i = B_i^2 - 4A_i C_i \quad (3.7)$$

we can express the roots of quadratic Eq. (2.36) as

$$\eta_i^\pm = \frac{\pm\sqrt{D_i} - B_i}{2A_i} \quad (3.8)$$

and select the physically meaningful one based on condition (2.61). The corresponding value of displacement derivative is then calculated as

$$u'_i = \sqrt{\eta_i} - 1 \quad (3.9)$$

the value of u_{i-1} is approximated by

$$u_{i-1} = u_i - u'_i \Delta r \quad (3.10)$$

and the algorithm proceeds to the next step, with counter i decremented by 1. It is also possible to directly evaluate the membrane thickness at point r_i , which is according to (2.60) given by

$$h_i = \frac{p}{E} \times \left(-\frac{\tilde{r}_i^2}{r_i g'_i \sqrt{\eta_i}}\right) \times \frac{1}{(1 + g_i'^2)\eta_i - 1} \times \left(1 + \frac{\nu\eta_i}{\alpha_i}\right) \quad (3.11)$$

The forward Euler scheme is simple but leads only to a linear convergence rate. Quadratic convergence can be achieved by the modified forward Euler method, i.e., by treating the value of u'_i as a tentative estimate, from which we construct a mid-step approximation

$$u_{i-1/2} = u_i - u'_i \Delta r / 2 \quad (3.12)$$

Then the value of displacement derivative at mid-step, $u'_{i-1/2}$, is computed by using formulae analogous to (3.1)–(3.9) but with subscript i replaced by $i - 1/2$, and with $r_{i-1/2} = r_i - \Delta r/2$. Finally, the displacement at the end of the step is set to

$$u_{i-1} = u_i - u'_{i-1/2} \Delta r \quad (3.13)$$

No matter which integration scheme is adopted, the value of u_0 in the last step does not need to be computed because it is known to be zero. The numerical scheme would lead to values very close to zero. Thickness h_0 cannot be computed from (3.11) because $r_0 = 0$, $\tilde{r}_0 = 0$ and typically also $g'_0 = 0$, which leads to undetermined fractions $0/0$ in (3.11) and also in (3.3), needed for the evaluation of α_0 . Still, the thickness can be properly evaluated by taking into account that $u'(r)$ tends to a finite limit u'_0 as r tends to zero. In the limit of $r \rightarrow 0^+$, formula (2.60) yields

$$h_0 = -\frac{p}{E} \frac{1 - \nu}{(2u'_0 + u_0'^2)g_0''} \quad (3.14)$$

The value of u'_0 can be estimated, e.g., as $2u'_1 - u'_2$.

3.2. Example: Parabolic cap (part II)

The complete solution procedure will be illustrated by an example with the same data as in Section 2.3. The integration process starts from $r_N = a = 9$ mm with the displacement set to $u_N = u_a = 1$ mm. The objective is to obtain a membrane deformed into a parabolic cap with maximum deflection $g_0 = 3$ mm if the membrane is loaded by pressure $p = 0.001 E$. Poisson's ratio is set to $\nu = 0.4$.

Convergence of the finite difference method is documented in Fig. 2, which shows the displacement function u computed on grids with $\Delta r = 1$ mm, 0.5 mm and 0.25 mm. For reference, a highly accurate solution obtained with $\Delta r = 0.001$ mm is plotted as the solid curve. As expected, the standard forward Euler method (Fig. 2a) gives less accurate results than the modified method (Fig. 2b). In both cases, convergence is regular, but for the standard method the displacements converge from below while for the modified method they converge from above. All subsequent calculations are done with a very fine grid, so that the numerical error remains below the resolution level in presented graphs.

The results plotted in Fig. 2 correspond to the physical solution, with the selection of proper roots η_i that satisfy condition (2.61), and with the derivative u'_i calculated as $\sqrt{\eta_i} - 1$. To demonstrate the consequence of a wrong choice, the graphs in Fig. 3 compare

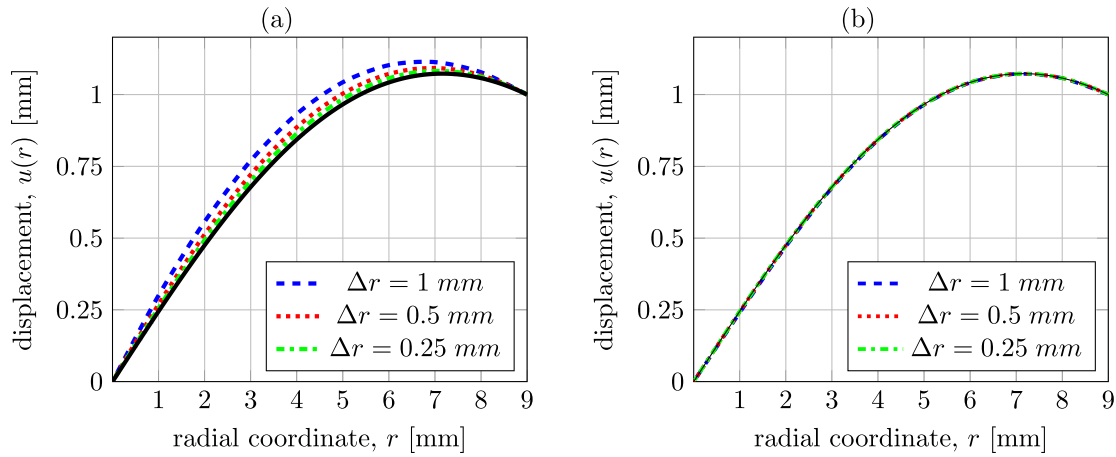


Fig. 2. Illustrative example with $a = 9$ mm, $u_a = 1$ mm, $g_0 = 3$ mm (parabolic cap), $p/E = 10^{-3}$ and $\nu = 0.4$: radial displacements computed on relatively coarse grids using the (a) forward Euler method, (b) modified forward Euler method; the solid curve is an accurate solution obtained with $\Delta r = 0.001$ mm.

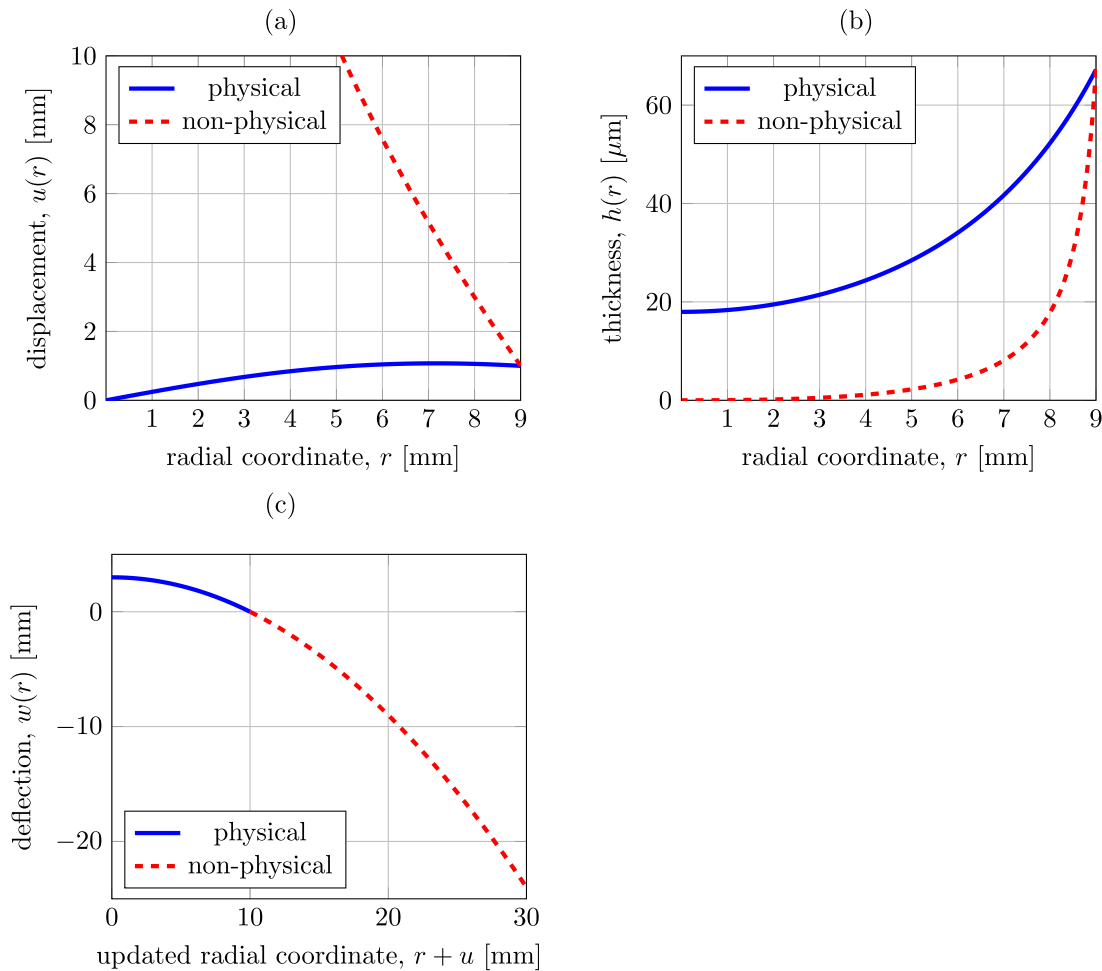


Fig. 3. Results of an illustrative example with $a = 9$ mm, $u_a = 1$ mm, $g_0 = 3$ mm (parabolic cap), $p/E = 10^{-3}$ and $\nu = 0.4$: (a) radial displacements, (b) variable thickness, (c) deformed shape.

the physically meaningful results (solid curves) to non-physical results (dashed curves) that would be obtained with the other root, say η_i^* . In this case, one would need to set $u_i' = -\sqrt{\eta_i^*} - 1$ in order to get a positive membrane thickness, but then $1 + u_i'$ would be negative and the updated radial coordinate $\tilde{r} = r_u$ would become larger than a_p and would grow as r is increased. As the radial coordinate r is decreased and approaches zero, the com-

puted displacement would not tend to zero but grow to infinity (Fig. 3a). The evaluated membrane thickness would be positive but very small compared to the thickness in the physically meaningful case (Fig. 3b). The deformed shapes of the membrane, shown in Fig. 3c, demonstrate that the non-physical solution formally satisfies Eq. (2.33) but points of the deformed membrane would be located on the outer part of the prescribed paraboloid. Of course,

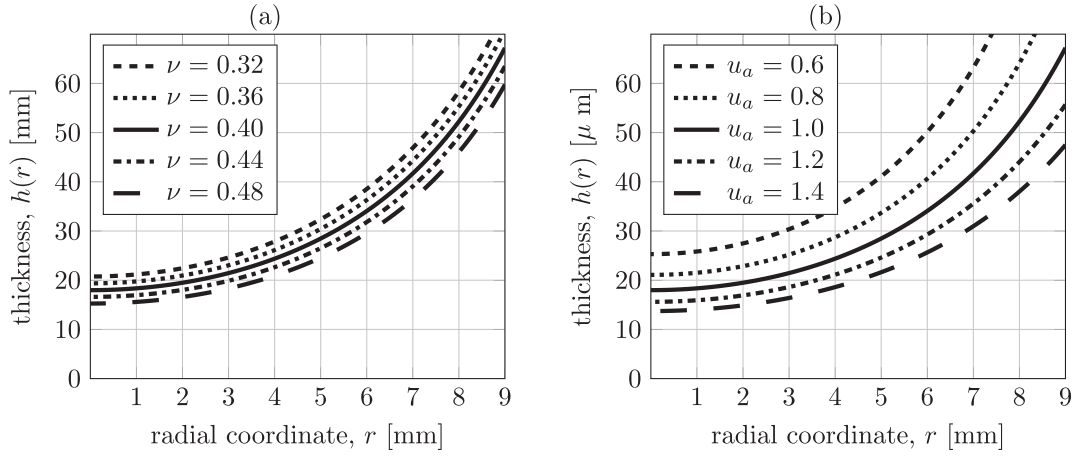


Fig. 4. Influence of (a) Poisson's ratio, (b) prestressing displacement on the optimized membrane thickness distribution; other parameters set to $a = 9$ mm, $g_0 = 3$ mm (parabolic cap) and $p/E = 10^{-3}$.

this configuration could not be attained by continuously increasing the pressure applied on a prestressed circular membrane.

Finally, let us check how the physically meaningful solution is affected by the values of various parameters. The optimal distribution of initial thickness along the radius computed with reference values of parameters is plotted in both parts of Fig. 4 by the thick solid curves. The other curves in Fig. 4a correspond to modified values of Poisson's ratio, and in Fig. 4b they correspond to modified values of initial prestress (expressed in terms of the radial displacement u_a applied on the boundary). The effect of Young's modulus and applied pressure is not shown because the thickness is simply proportional to the ratio p/E . The results in Fig. 4 are plotted for $p/E = 0.001$. If the prescribed maximum deflection g_0 remains the same and the ratio p/E is increased by a factor of 2 (either by doubling the pressure, or by reducing the elastic modulus to one half), the solution in terms of displacement function $u(r)$ remains the same and the membrane thickness must be increased by a factor of 2.

The plots of thickness distribution in Fig. 4 indicate that, in order to get a parabolic cap, the thickness near the border must be larger than near the membrane center. The variation of thickness becomes more dramatic if the prestressing displacement u_a is reduced. The effect of this parameter on the thickness directly at the border, $h(a)$, and at the membrane center, $h(0)$, is further documented in Fig. 5. As expected, for lower prestress the thickness must be larger. If the prestressing displacement tends to zero, the optimized thickness at the center tends to a finite value, but the thickness at the border tends to infinity. For an unprestressed membrane, a solution with bounded thickness cannot be obtained. Of course, in practice the thickness must be kept sufficiently small, otherwise the bending stiffness of the membrane could not be neglected.

4. Analytical solution for spherical cap

Numerical solutions have also been computed for a spherical shape of the deformed membrane, which is described by

$$g(\tilde{r}) = \sqrt{R^2 - \tilde{r}^2} - \frac{a_p^2 - g_0^2}{2g_0} \quad (4.1)$$

where

$$R = \frac{a_p^2 + g_0^2}{2g_0} \quad (4.2)$$

is the radius of the sphere. As usual, $a_p = a + u_a$ is the radius of the membrane in the prestressed state and $g_0 = g(0)$ is the maxi-

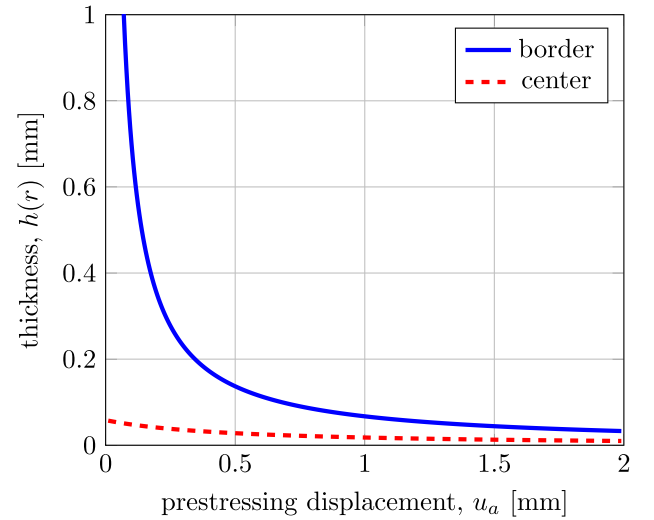


Fig. 5. Optimized values of membrane thickness at the border and at the center depending on the prestressing displacement u_a ; other parameters set to $a = 9$ mm, $g_0 = 3$ mm (parabolic cap), $p/E = 10^{-3}$ and $\nu = 0.4$.

mum deflection after application of pressure p . It is assumed that $g_0 \leq a_p$, because otherwise the deformed shape would represent more than a half of the full sphere and it could not be described by a unique function g . Differentiation of (4.1) leads to

$$\frac{dg(\tilde{r})}{d\tilde{r}} = -\frac{\tilde{r}}{\sqrt{R^2 - \tilde{r}^2}} \quad (4.3)$$

The optimal distribution of membrane thickness has been designed using the numerical procedure described in Section 3.1, and the behavior of the membrane has been checked by finite element simulations performed using the open-source package OOFEM (Patzák, 2012; Patzák and Bittnar, 2001); see Section 5.2 for more details. Based on numerically computed results, it has been found that, in the special case of a spherical cap, the radial strain is equal to the hoop strain (both strains still depend on the radial coordinate). An example is provided in Fig. 6 for a spherical cap with parameters $a = 9$ mm, $u_a = 1$ mm, $g_0 = 3$ mm, $p/E = 10^{-3}$ and $\nu = 0.4$. The thickness has been designed using a computational grid consisting of 9000 equally spaced points, and the same points have been used as finite element nodes. At each integration point of the finite element mesh, the numerically obtained values

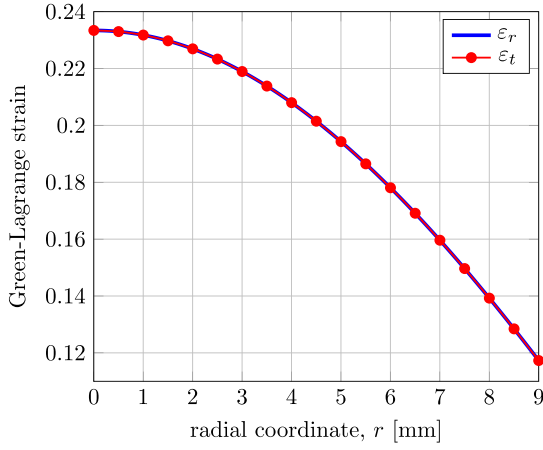


Fig. 6. Radial strain, ε_r , and hoop strain, ε_t , computed numerically for a membrane with variable thickness optimized such that the deformed shape corresponds to a spherical cap; parameters set to $a = 9$ mm, $u_a = 1$ mm, $g_0 = 3$ mm, $p/E = 10^{-3}$ and $\nu = 0.4$.

of the radial strain and of the hoop strain agree up to 5 significant digits. This interesting property of the solution permits an analytical treatment of the governing equations.

The analytical solution is based on the assumption that $\varepsilon_r(r) = \varepsilon_t(r)$ for all $r \in [0, a]$ (this equality is for the moment motivated by numerical results but later will be validated). The assumption of equal strains is equivalent with the assumption of equal stretches, $\lambda_r(r) = \lambda_t(r)$, which can be written in terms of displacements and their derivatives as

$$\sqrt{(1+u')^2 + w'^2} = 1 + \frac{u}{r} \quad (4.4)$$

Substituting

$$w' = (1+u')g' = -(1+u')\frac{r+u}{\sqrt{R^2 - (r+u)^2}} \quad (4.5)$$

into (4.4) and assuming that $1+u' > 0$, we obtain

$$(1+u')\frac{R}{\sqrt{R^2 - (r+u)^2}} = 1 + \frac{u}{r} \quad (4.6)$$

Introducing a transformed unknown function $\tilde{r}(r) = r+u(r)$ and taking into account that $\tilde{r}'(r) = 1+u'(r)$, we can rewrite (4.6) in the form

$$\tilde{r}'\frac{R}{\sqrt{R^2 - \tilde{r}^2}} = \frac{\tilde{r}}{r} \quad (4.7)$$

This differential equation for unknown function $\tilde{r}(r)$ can be handled by separation of variables, which leads to

$$\frac{R d\tilde{r}}{\tilde{r}\sqrt{R^2 - \tilde{r}^2}} = \frac{dr}{r} \quad (4.8)$$

Integrating on both sides, we obtain

$$\ln \frac{\tilde{r}}{R + \sqrt{R^2 - \tilde{r}^2}} = \ln r + C \quad (4.9)$$

where C is an arbitrary constant. After additional easy manipulations, we get the explicit formula

$$\tilde{r}(r) = \frac{2RKr}{1 + K^2r^2} \quad (4.10)$$

where $K = e^C$ is a transformed version of the integration constant.

The value of integration constant K can be determined from the boundary condition $\tilde{r}(a) = a_p$, which leads to the quadratic equation

$$a_p a^2 K^2 - 2RaK + a_p = 0 \quad (4.11)$$

Recall that the sphere radius R is given by (4.2). The discriminant of quadratic equation (4.11) can thus be expressed as

$$D = 4R^2 a^2 - 4a_p^2 a^2 = 4 \left(\frac{(a_p^2 + g_0^2)^2}{4g_0^2} - a_p^2 \right) a^2 = \frac{(a_p^2 - g_0^2)^2}{g_0^2} a^2 \quad (4.12)$$

and it is always non-negative. Consequently, quadratic equation (4.11) has two real roots,

$$K_{1,2} = \frac{2Ra \pm \sqrt{D}}{2a_p a^2} = \frac{a_p^2 + g_0^2 \pm a_p^2 - g_0^2}{2a_p a} = \begin{cases} \frac{a_p}{g_0 a} \\ \frac{g_0}{a_p a} \end{cases} \quad (4.13)$$

and differential equation (4.6) has two solutions,

$$u_{1,2}(r) = \tilde{r}_{1,2}(r) - r = \left(\frac{2RK_{1,2}}{1 + K_{1,2}^2 r^2} - 1 \right) r \quad (4.14)$$

Now we need to determine which of these solutions is physically meaningful. As discussed in Section 2.3, solutions for which $1+u'(a) < 0$ would lead to a deformed shape that formally satisfies the constraint equation but the membrane is stretched into a region located behind the outer support, and so such solutions should be excluded. It is easy to show that the sign of $1+u'(a)$ is the same as the sign of $1-K^2 a^2$. Since $1-K^2 a^2 = 1 - a_p/g_0$, $1-K^2 a^2 = 1 - g_0/a_p$ and g_0 is assumed to be smaller than a_p , we find that a physically meaningful solution is obtained only for $K = K_2 = g_0/(a_p a)$. This solution can be presented in the form

$$u(r) = \left(\frac{2Rg_0 a_p a}{a_p^2 a^2 + g_0^2 r^2} - 1 \right) r = \left(\frac{(a_p^2 + g_0^2) a_p a}{a_p^2 a^2 + g_0^2 r^2} - 1 \right) r \quad (4.15)$$

For a given set of parameters, it can be verified that this analytical solution agrees (up to the numerical error) with the numerical solution obtained by the method described in Section 3.1. An example computed with parameters $a = 9$ mm, $a_p = 10$ mm and $g_0 = 3$ mm (leading to $R = 18.1\bar{6}$ mm and $K = 0.0\bar{3}$ mm⁻¹) is presented in Fig. 7a.

Recall that the analytical expression (4.15) for the displacement function u has been constructed in a somewhat heuristic manner, based on the observation that numerical solutions of Eq. (2.33) lead to equal values of radial and circumferential strains. It is therefore necessary to check that the displacement function (4.15) indeed satisfies Eq. (2.33) with function g given by (4.1). Direct substitution would be possible but tedious. Instead of that, we can find expressions for strains, stresses and thickness, and verify the original equilibrium equations (2.17)–(2.18).

First of all, the circumferential stretch and strain can be evaluated from (2.2) and (2.4):

$$\lambda_t = 1 + \frac{u}{r} = \frac{2Rg_0 a_p a}{a_p^2 a^2 + g_0^2 r^2} \quad (4.16)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{2}(\lambda_t^2 - 1) = \frac{2R^2 g_0^2 a_p^2 a^2}{(a_p^2 a^2 + g_0^2 r^2)^2} - \frac{1}{2} \quad (4.17)$$

The radial strain, ε_r , could be evaluated independently from (2.1) and (2.3) combined with (4.5), but since the displacement function has been found by solving Eq. (4.6), which corresponds to the equality between the radial and circumferential strains, we can set $\varepsilon_r = \varepsilon_t$ and proceed to the evaluation of stresses

$$\sigma_r = \sigma_t = \frac{E}{1-\nu} \varepsilon_t = \frac{E}{2(1-\nu)} \left(\frac{4R^2 g_0^2 a_p^2 a^2}{(a_p^2 a^2 + g_0^2 r^2)^2} - 1 \right) \quad (4.18)$$

based on constitutive equations (2.6)–(2.7).

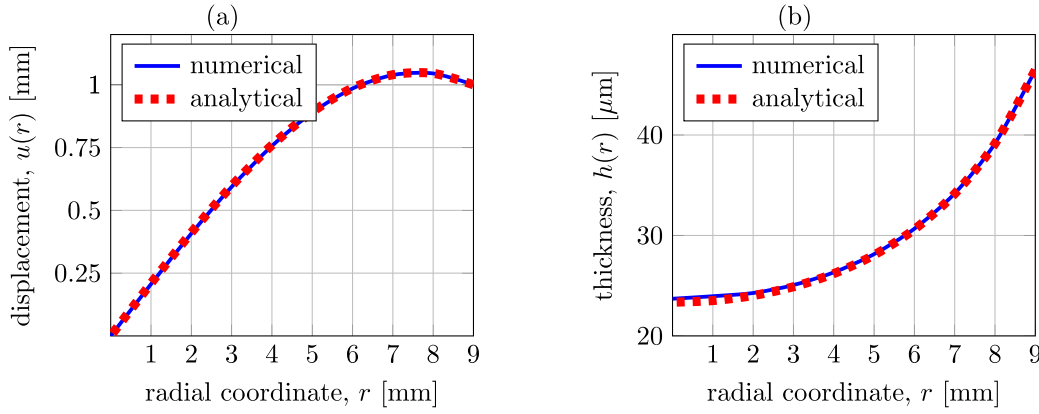


Fig. 7. Example of (a) radial displacement and (b) optimized thickness obtained analytically and numerically for a spherical cap with parameters $a = 9$ mm, $u_0 = 1$ mm, $g_0 = 3$ mm, $p/E = 10^{-3}$ and $\nu = 0.4$.

The thickness function, h , could be evaluated from the rather complicated expression (2.34), but since we already have a formula for stress, it is easier to make use of Eq. (2.28). In fact, instead of directly constructing a formula for h , it turns out to be useful to first evaluate

$$\begin{aligned} h\sigma_r &= -\frac{p}{2r} \frac{(r+u)^2}{1+u'} \frac{1}{g'} = \frac{p}{2r} \frac{r+u}{1+u'} \sqrt{R^2 - (r+u)^2} \\ &= \frac{p}{2r} \frac{2Rg_0a_p a r}{\frac{a_p^2 a^2 + g_0^2 r^2}{2Rg_0a_p a} \sqrt{R^2 - \left(\frac{2Rg_0a_p a r}{a_p^2 a^2 + g_0^2 r^2}\right)^2}} \\ &= \frac{pR}{2} \end{aligned} \quad (4.19)$$

This remarkably simple result means that the product $h\sigma_r$ has a constant value $pR/2$ over the whole membrane, and the same holds for the product $h\sigma_t$ because $\sigma_t = \sigma_r$. It is then easy to write the formula for the thickness,

$$\begin{aligned} h &= \frac{pR}{2\sigma_r} = \frac{(1-\nu)p}{E} \left(\frac{4Rg_0^2 a_p^2 a^2}{(a_p^2 a^2 + g_0^2 r^2)^2} - \frac{1}{R} \right)^{-1} \\ &= \frac{(1-\nu)p}{2Eg_0} \left(\frac{a_p^2 a^2 (a_p^2 + g_0^2)}{(a_p^2 a^2 + g_0^2 r^2)^2} - \frac{1}{a_p^2 + g_0^2} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (4.20)$$

For illustration, the optimal distribution of thickness obtained for parameters $a = 9$ mm, $a_p = 10$ mm, $g_0 = 3$ mm, $\nu = 0.4$ and $p/E = 10^{-3}$ is plotted in Fig. 7b. The numerical results shown in the figure have been obtained with a large step $\Delta r = 1$ mm, but they still agree quite well with the analytical solution. The relative error remains below 2%. For sufficiently refined steps, the difference would be indiscernible.

Knowing that $h\sigma_r = h\sigma_t = pR/2 = \text{const.}$ and taking into account (4.5), we can reduce equilibrium equations (2.17)–(2.18) to

$$r \left(u' + \frac{u}{r} \right)' = -\frac{2}{R} (r+u)(1+u') \frac{r+u}{\sqrt{R^2 - (r+u)^2}} \quad (4.21)$$

$$\left(r(1+u') \frac{r+u}{\sqrt{R^2 - (r+u)^2}} \right)' = \frac{1}{R} ((r+u)^2)' \quad (4.22)$$

Relation (4.22) directly follows from (4.6), i.e., from the differential equation from which we determined the displacement function. Making use of (4.6) once again, Eq. (4.21) can be rewritten as

$$\left(u' + \frac{u}{r} \right)' = -\frac{2}{R^2 r^2} (r+u)^3 \quad (4.23)$$

and its validity can be confirmed by direct substitution from (4.15). Evaluation of the left-hand side is facilitated by the fact that

$$u' + \frac{u}{r} = \frac{4Rg_0 a_p^3 a^3}{(a_p^2 a^2 + g_0^2 r^2)^2} - 2 \quad (4.24)$$

In summary, it has been demonstrated that the derived closed-form expressions for radial displacement and thickness given by formulae (4.15) and (4.20) lead to an exact satisfaction of the governing differential equations of the problem. This confirms that the assumption of equal strains, $\varepsilon_r(r) = \varepsilon_t(r)$, initially motivated by numerical results, is an exact identity and not just an approximation.

It might seem that the relation $h\sigma_r = h\sigma_t = pR/2$ is something trivial that could have been determined without tedious derivations. Of course, $pR/2$ is the well-known expression for the specific normal force n (considered as force per unit current width) in a spherical membrane of current radius R , uniformly loaded by internal pressure p . For a hollow sphere that has in the undeformed state a spherical shape and constant thickness, it is clear that, due to spherical symmetry, the specific normal force must be the same for all directions, and then the relation $2\pi Rn = \pi R^2 p$, leading to $n = pR/2$, easily follows from equilibrium in the deformed state. On the other hand, in our case the undeformed membrane is flat and its thickness is variable in the undeformed as well as in the deformed state. Moreover, the interpretation of the product $h\sigma_r$ or $h\sigma_t$ as the specific normal force is correct only if $\lambda_r = \lambda_t$, which is indeed the case for the state when the properly designed membrane is loaded precisely into a spherical cap, but not in general.

In the present notation, σ has the meaning of second Piola-Kirchhoff stress, and h refers to the membrane thickness in the undeformed state. The normal force per unit width in the undeformed state is the product of h with the first Piola-Kirchhoff normal stress, so it would be equal to $h\lambda_r\sigma_r$ for the radial direction and $h\lambda_t\sigma_t$ for the circumferential direction. The normal force per unit width in the deformed state is the product of the deformed thickness, $h\lambda_3$, with the Cauchy normal stress, which is given by $\sigma_r\lambda_r/(\lambda_t\lambda_3)$ for the radial direction and by $\sigma_t\lambda_t/(\lambda_r\lambda_3)$ for the circumferential direction, with λ_3 denoting the out-of-plane stretch. Only in the special case when $\lambda_r = \lambda_t$, we can interpret $h\sigma_r$ and $h\sigma_t$ as the specific normal forces per unit current width. If they are both equal to $pR/2$ at all points of the membrane midsurface, equilibrium is indeed guaranteed. However, this happens only for the single value of pressure p that was used when designing the membrane. For the same membrane but other values of pressure, the deformed shape will not be precisely spherical. Sensitivity of

the resulting membrane shape to modifications of parameters will be assessed in the next section.

5. Sensitivity to parameters

The boundary value problem derived in Section 2, which can be solved approximately by the numerical method described in Section 3.1, or in some cases even analytically, as demonstrated in Section 4, provides a tool for designing the optimal variation of membrane thickness. The design is optimal in the sense that if the membrane is loaded by a given uniform pressure p , its deflected midsurface perfectly matches a prescribed ideal shape, e.g., a spherical or parabolic cap. Of course, this is true only if the actual properties of the membrane and the actual applied pressure perfectly correspond to the values used in the design procedure. The optimal design is affected by the elastic constants of the membrane, E and ν , by the membrane radius in the undeformed state, a , by the radial displacement on the outer boundary that defines the prestressed state, u_a , and by the desired maximum deflection, g_0 . In practice, these parameters are not known exactly, and the purpose of the present section is to examine the sensitivity of the resulting deformed shape to the errors involved in the determination of these material and geometric parameters.

A related issue has already been briefly addressed in Section 3.2, where we studied how changes of certain parameters affect the optimal design. Here we will treat a somewhat different issue, namely how the imprecise knowledge of material properties and prestressing displacement affect the quality of the resulting deformed shape. The basic question can be formulated as follows: If the optimal design is performed using certain assumed values of elastic constants and prestressing displacement but the properties of the actual membrane are different, how much does the actual deformed shape deviate from the desired ideal shape?

It is obvious that if, for instance, the actual elastic modulus of the membrane material is lower than the value used in design, then the membrane deflection caused by the given design pressure will be higher than expected. However, if the main objective is to get as close as possible to the prescribed shape, it makes sense to adjust the pressure such that the maximum deflection would attain the prescribed value. In fact, in many cases one does not control directly the pressure but rather the mass of the fluid that is injected into the device. Provided that the maximum deflection can be measured during the loading process, it is possible to make sure that this deflection will attain the prescribed value, independently of how the actual parameter values differ from those used when designing the thickness distribution.

5.1. Effect of elastic modulus

One general observation that can be made based on the structure of the governing equations is that the designed thickness variation depends on the dimensionless ratio p/E but not on the pressure p and elastic modulus E separately. Indeed, Eq. (2.33) does not contain p and E at all, and Eq. (2.34) contains these parameters only in the form of the fraction p/E . Therefore, if the thickness is designed assuming pressure $p = p_d$ and modulus $E = E_d$ and the actual modulus E_a is different from E_d , it is sufficient to load the membrane by adjusted pressure $p_a = p_d E_a / E_d$ and the design will remain optimal, i.e., the deformed shape will exactly correspond to the desired one. In other words, an imprecise knowledge of the elastic modulus can be fully compensated by adjusting the applied pressure, making sure that the maximum deflection attains the prescribed value. This is true for an arbitrary ideal shape, because Eqs. (2.33)–(2.34) are general and have the same form for an arbitrary shape function g .

5.2. Effect of Poisson's ratio

The effect of Poisson's ratio is more difficult to assess. Eqs. (2.33)–(2.34) contain Poisson's ratio, ν , which multiplies certain terms and is not combined with any other parameter that could be adjusted so as to compensate the effect of imprecise knowledge of ν . Therefore, in general it can be expected that if the design is based on an assumed value of ν that differs from the actual one, the actual deformed shape will deviate from the ideal shape even if the pressure is adjusted to get the prescribed maximum deflection. To assess how important this deviation is, we have performed numerical simulations of the deformed membrane, using the finite element method with axisymmetric membrane elements based on linear interpolation of both displacement components, as described in our previous paper (Pokorný et al., 2017a). The calculations have been done within the OOFEM open-source package (Patzák, 2012; Patzák and Bittnar, 2001).

First of all, it is good to check that loading of an optimally designed membrane with all parameters kept the same as in the design indeed leads to the desired deformed shape. This simulation also represents an independent verification of the design procedure because the deflection is now evaluated by a different numerical technique. The objective is to determine the numerical error in the case when the theoretical result would be expected to be perfect. In general, the numerical error comes from the design procedure that defines the thickness distribution (performed numerically using the algorithm described in Section 3.1) as well as from the finite element solution of the membrane deflection. To isolate the second source of error, let us first consider the **spherical cap**, for which the optimal thickness distribution is described by an analytical formula. The calculations are done with parameter values considered in the previous examples, i.e., $a = 9$ mm, $g_0 = 3$ mm, $p/E = 10^{-3}$, $\nu = 0.4$ and $u_a = 1$ mm. The ideal shape is described by function g given in (4.1), with $a_p = a + u_a = 10$ mm and $R = (a_p^2 + g_0^2) / (2g_0) = 18.1\bar{6}$ mm. The optimum thickness distribution is evaluated analytically from (4.20), and the exact value of h is computed at each Gauss integration point of the finite element model, which uses 2 integration points per element. Local deviations from the optimal spherical shape along the membrane radius are plotted by blue solid curves in Fig. 8a–c for simulations with 90, 900 and 9000 finite elements. Already for 90 elements, the deviation of the computed surface from the ideal shape does not exceed 400 nm, and for 900 elements it is in the order of a few nanometers.

To characterize the deviation by one global quantity, the root-mean-square error is defined as

$$e_{RMS} = \left(\frac{1}{a_p} \int_0^a [w(r) - g(r + u(r))]^2 (1 + u'(r)) dr \right)^{1/2} \quad (5.1)$$

where u and w are the displacement components computed by finite elements. The dependence of this error on the number of finite elements is plotted by the red dashed curve in Fig. 8d. As the number of elements increases, the error tends to zero and is roughly proportional to the square of the element size, as may have been expected. Here, the error comes exclusively from the finite element simulation of the deformed shape, and the “actual” deformed shape obtained in the limit would be an ideal spherical cap. It is thus confirmed that the proposed method provides excellent designs, and if the membrane could indeed be manufactured with the assumed properties and loaded in the prescribed way, the final deformed shape would be perfect.

As the next step, we repeat the calculations for the **parabolic cap** described by formula (2.43), with all geometric and material parameters kept the same as before. No analytical expression for the optimal thickness is available, and so the thickness needs to be calculated numerically, which introduces an additional error. In

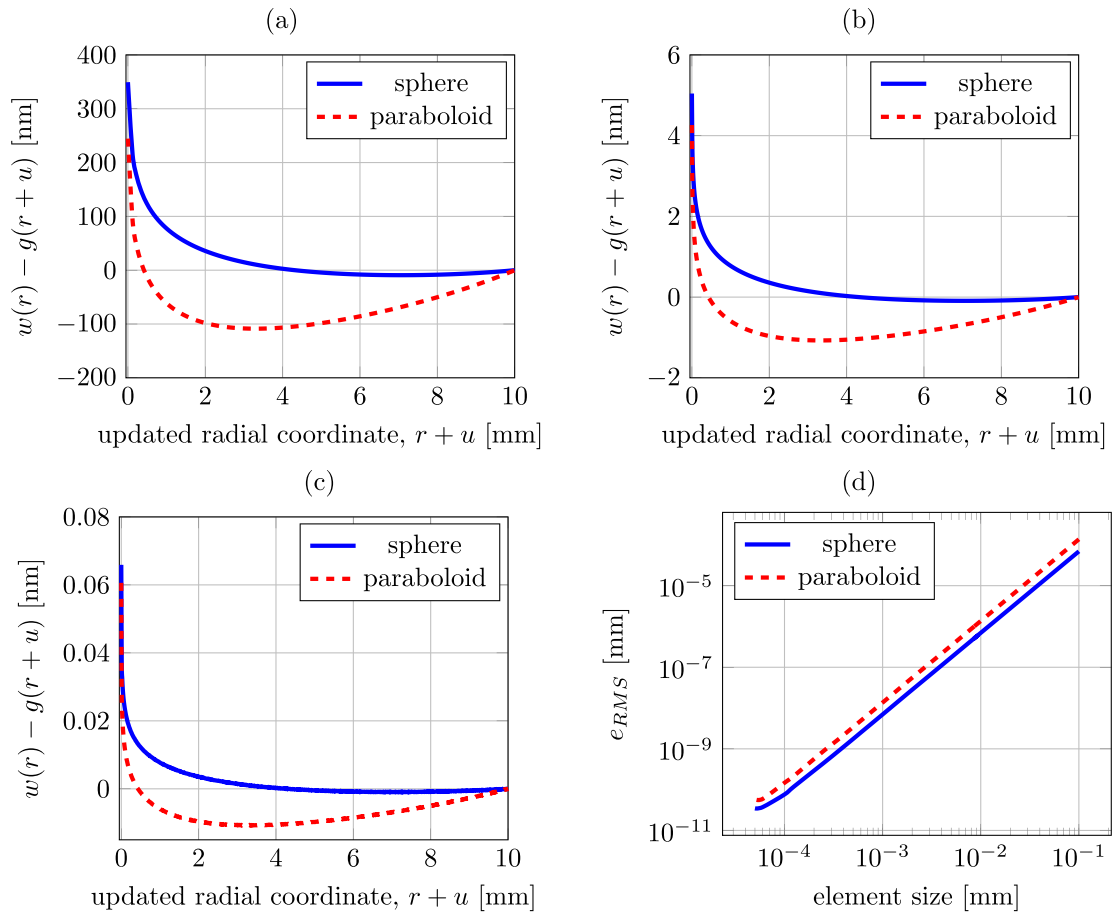


Fig. 8. Deviation of the numerically computed deflected shape from the ideal shape for simulations with (a) 90, (b) 900 and (c) 9000 finite elements; (d) dependence of the root-mean-square error on the element size.

all simulations, we use grid points for thickness evaluations coincident with finite element nodes, and the designed values of thickness calculated at the grid points are transmitted to the integration points of finite elements by linear interpolation. Local deviations from the optimal parabolic shape along the membrane radius for simulations with 90, 900 and 9000 finite elements and the dependence of the global root-mean-square error on the number of elements are plotted by dashed red curves in Fig. 8a-c. The deviations are slightly larger than for the spherical cap, which is caused by an additional error due to the numerical design of optimal thickness. Nevertheless, the error is again roughly proportional to the square of finite element size (equal to the grid spacing) and tends to zero as the mesh and grid are simultaneously refined.

The foregoing simulations show that the numerical error caused by the combined effect of numerical evaluation of optimal thickness and finite element simulation of the deflected shape is, for the reference set of parameters, in the order of nanometers if 900 elements (and the same number of grid intervals) are used. Now we proceed to the evaluation of the effect of Poisson's ratio. The thickness design is done for $\nu_d = 0.4$, as before, but the deflected shape is simulated for membranes with actual Poisson ratios $\nu_a = 0.36$ and 0.44 . The applied pressure is adjusted to get the prescribed maximum deflection, $g_0 = 3$ mm, and 900 elements are used.

For the **parabolic cap**, the resulting deviations from the ideal shape are in the order of micrometers, i.e., by three orders of magnitude larger than if the actual Poisson ratio is set equal to the value used in design; see Fig. 9a. Moreover, if the number of finite elements (and simultaneously of the grid intervals) is increased to 9000, the error is not visibly reduced. This indicates that the

shape distortion is caused by the deviation of the actual Poisson ratio from the value used in design. Still, from the practical point of view, the deviation from the ideal shape is relatively small, with the maximum local deviation of about 0.07% of the maximum deflection and the root-mean-square error below 0.05% of the maximum deflection, even though the change of Poisson's ratio from 0.4 to 0.36 or to 0.44 is quite large. Additional numerical simulations with other values of Poisson's ratio reveal that the deviation is roughly proportional to the difference between the actual value of Poisson's ratio and the value used in design of optimal thickness distribution. For the reference case, the root-mean-square error can be estimated as $e_{RMS} \approx |\nu_a - \nu_d| \times 35 \mu\text{m}$, where $\nu_d = 0.4$ is the design value of Poisson's ratio and ν_a is the actual one; see Fig. 9b.

An interesting result is obtained for the **spherical cap**. Even after a change of Poisson's ratio, the calculated error is of the same order of magnitude as for the original value of ν , i.e., in the order of nanometers if 900 elements are used, and it keeps decreasing with increasing number of elements (provided that the applied pressure is always adjusted so as to get the prescribed value of maximum deflection). This indicates that the error is purely numerical and vanishes in the limit. The design remains optimal even after a change of Poisson's ratio. The reason becomes clear if we examine formula (4.20) for the optimal thickness, in which a function dependent purely on the geometrical parameters g_0 , a_p and a is multiplied by the fraction $(1 - \nu)p/E$. This means that, for the spherical cap, inaccurate knowledge of both elastic constants can be fully compensated by adjusting the applied pressure. For the elastic modulus, a similar statement holds independently of the

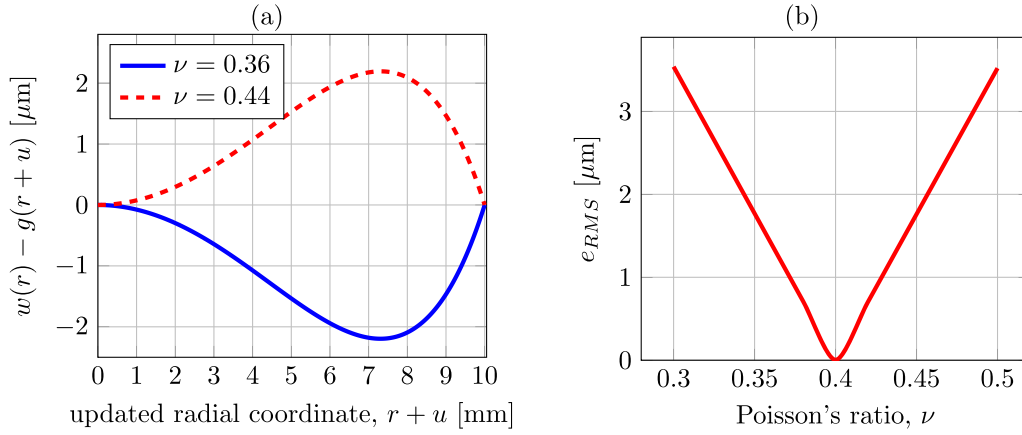


Fig. 9. Influence of Poisson's ratio ν on the deviation from the ideal parabolic shape: (a) deviation of deflections along the radius for $\nu = 0.36$ and 0.44 , (b) dependence of the root-mean-square error on Poisson's ratio in the range from 0.3 to 0.5 .

prescribed shape; see Section 5.1. The extension to Poisson's ratio is valid for the spherical cap only.

It may seem strange that Eq. (2.33), from which the radial displacement u is calculated, contains parameter ν , but the analytical solution (4.15) valid for the spherical cap is independent of ν . The only possible explanation is that the solution of the reduced version of (2.33) obtained for $\nu = 0$ automatically satisfies the full equation for any other ν , i.e., the expression that multiplies ν on the left-hand side of (2.33) vanishes if the solution of the reduced equation with $\nu = 0$ is substituted. The reduced equation reads

$$\frac{(r+u)^2}{2r^2g'} \left(\frac{u}{r} + \frac{u^2}{2r^2} \right) + (1+u')^2 \left(\frac{(r+u)g''}{2g'^2} - \frac{1}{g'} - g' \right) (u' + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}(1+u')^2g'^2) = 0 \quad (5.2)$$

and the condition that the complementary terms that are multiplied by ν vanish can be written as

$$(1+u')^2 \left(\frac{(r+u)g''}{2g'^2} - \frac{1}{g'} - g' \right) \left(\frac{u}{r} + \frac{u^2}{2r^2} \right) + \frac{(r+u)^2}{2r^2g'} (u' + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}(1+u')^2g'^2) = 0 \quad (5.3)$$

To prove that if function u satisfies (5.2) then it also automatically satisfies (5.3), it is sufficient to show that

$$\frac{u}{r} + \frac{u^2}{2r^2} = u' + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}(1+u')^2g'^2 \quad (5.4)$$

which can be rewritten as

$$\left(1 + \frac{u}{r} \right)^2 = (1+u')^2(1+g'^2) \quad (5.5)$$

This is found to be equivalent with Eq. (4.4) in which w' is replaced by $(1+u')g'$, as indicated in (4.5). Therefore, condition (5.4) corresponds to the differential equation from which the analytical solution for u was constructed in Section 4, and so it is natural that this condition is indeed satisfied. Of course, the validity of (5.4) could also be checked by directly substituting u given by (4.15) and g' given by (4.3).

5.3. Effect of prestressing displacement

In the preceding subsection we have examined how imprecise knowledge of the actual elastic constants affects the quality of the resulting deformed membrane shape. Another important parameter that may play a role is the initial radial displacement that induces prestress before the membrane is loaded by liquid pressure. The optimal design is based on an assumed value of u_a , but the

actually imposed displacement may slightly differ because technically it is quite difficult to impose precisely the prescribed value of the displacement on the boundary (especially since this displacement is taken with respect to the undeformed state of a very flexible membrane). Therefore, it is of interest to look at deviations from an ideal shape caused by changes of the actually prescribed displacement.

Of course, if the actually imposed radial displacement $u_a + \Delta u_a$ differs from the value u_a that was used in the design stage, the deformed shape must differ from the originally prescribed one, even if the pressure is adjusted such that the maximum deflection attains the prescribed value. The reason is that the original shape was supposed to have zero deflection at a circular boundary of radius $a + u_a$ but the actual boundary is now a circle of radius $a + u_a + \Delta u_a$. Instead of evaluating the deviation from the originally intended shape, we can take as a reference an ideal shape of the same type (a spherical or parabolic cap) but with adjusted parameters. For instance, if the originally intended shape was a spherical cap of a certain radius, the actual shape could be close to a spherical cap with a somewhat different radius.

The effect of prestressing displacement is illustrated by a numerically computed example, with the design of thickness distribution performed for a spherical or parabolic cap with the standard set of parameters used in previous examples. In particular, the radius of the undeformed membrane is taken as $a = 9$ mm and the prestressing displacement is in the design stage considered as $u_a = 1$ mm. The actual deformed shape is then computed by finite elements for prescribed displacements equal to 0.9 mm and 1.1 mm. In each case, the applied pressure is adjusted so as to produce the desired value of maximum deflection, $g_0 = 3$ mm. When evaluating the deviation, the ideal shape is taken as a spherical or parabolic cap characterized by g_0 as initially prescribed and by a_p equal to the actual value, i.e., 9.9 mm or 10.1 mm. Deviations from such adjusted ideal shapes are plotted in Fig. 10. It is worth noting that even though the prestressing displacement has been changed by $\pm 10\%$, deviations from the adjusted ideal shape (perfect sphere or perfect paraboloid) are still by three orders of magnitude smaller than the maximum deflection. In this sense, the optimum design can be considered as relatively robust, not too sensitive to imprecise enforcement of the actual prestressing displacement. This conclusion is confirmed by Fig. 11, which shows that when the prestressing displacement is varied between 0.5 mm and 2.0 mm, the root-mean-square error remains below 28 μm for the parabolic cap and below 15 μm for the spherical cap, i.e., it does not exceed 1% of the maximum deflection.

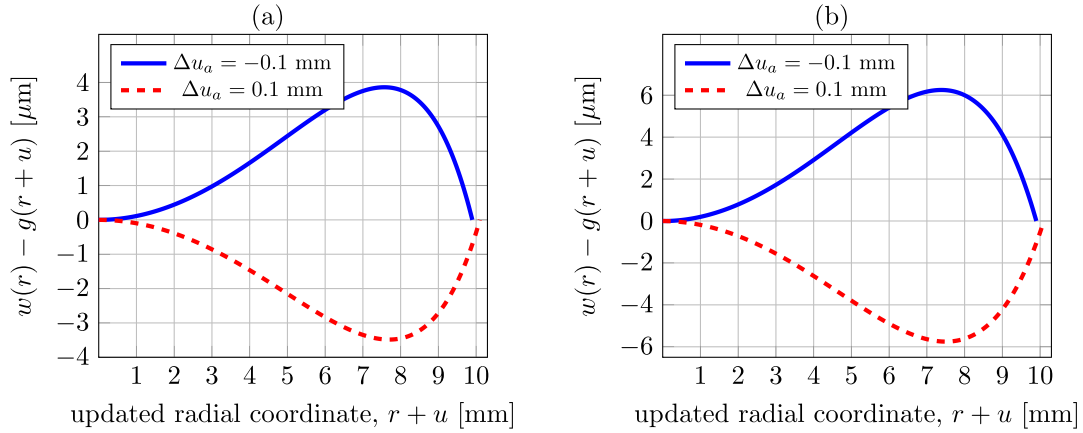


Fig. 10. Influence of prestressing displacement on the deviation from the ideal shape: (a) for a spherical cap, (b) for a parabolic cap.

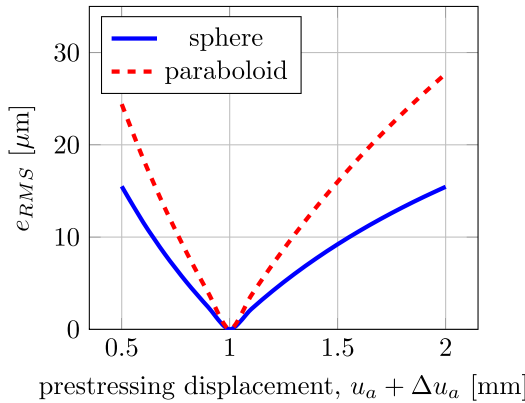


Fig. 11. Dependence of the root-mean-square error on prestressing displacement $u_a + \Delta u_a$ in the range from 0.5 to 2.0 mm.

6. Summary and conclusions

We have studied the mechanical behavior of axially symmetric elastic membranes that are first prestressed by imposing a radial displacement on the boundary and then subjected to a uniform hydrostatic pressure acting perpendicular to the deformed midsurface. The membrane material has been described by the Saint Venant-Kirchhoff material law, which provides a good approximation of the actual response of materials used for membranes in liquid lenses. The primary objective has been to develop techniques for design of variable thickness such that the deformed membrane would have a prescribed shape, e.g., a spherical or parabolic cap. The main conclusions can be summarized as follows:

- Under the given assumptions, the problem of optimum thickness design can be reduced to one nonlinear first-order differential equation for the radial displacement. Once this equation is solved, the corresponding thickness distribution can be evaluated by substitution into an algebraic expression.
- Formally, the solution of the governing first-order equation should satisfy two boundary conditions. However, the condition of zero radial displacement on the axis of symmetry is satisfied “automatically” due to the special asymptotic structure of the governing equation. Effectively, only one boundary condition that prescribes the displacement on the outer boundary needs to be enforced.
- Due to the implicit form of the governing equation, the solution is not unique. For a given value of displacement at a given

point, there are in general four possible values of the displacement derivative that satisfy the governing equation. However, only one of them leads to a physically admissible solution.

- A numerical algorithm based on a finite difference scheme has been developed for problems with an arbitrary shape of the prescribed deformed midsurface. Robustness and accuracy of this algorithm has been tested for prescribed surfaces that have the shape of a parabolic or spherical cap.
- The resulting distributions of membrane thickness continuously increase from the minimum value on the axis of symmetry to the maximum value on the outer boundary. They are strongly affected by the applied prestress. As the prestress is reduced to zero, the maximum thickness tends to infinity. Therefore, a certain minimum level of prestress is needed in order to keep the designed thickness physically realistic.
- For the special but practically important case of a spherical cap, an analytical solution for the optimum thickness distribution and for the displacements has been derived.
- It has been verified by finite element simulations that the optimally designed membranes indeed deform into the prescribed shape, provided that the material and geometric properties are the same as assumed in the design.
- Sensitivity to elastic constants and to the prescribed prestressing displacement has been studied analytically and numerically. If the actually applied pressure is adjusted so as to attain the prescribed value of the maximum deflection, the deformed shape exactly corresponds to the desired one even if the actual elastic modulus differs from the value assumed in design. This is true for an arbitrary shape. For the special case of a spherical shape, an analogous statement holds also for changes of Poisson’s ratio.
- Sensitivity to changes of Poisson’s ratio for a parabolic cap and to changes of prestressing displacement for parabolic and spherical caps has been evaluated and shown to be relatively mild. Therefore, the optimal thickness design remains useful even if the properties are not known in advance with absolute accuracy.

The developed thickness design procedure can be used for further analyses and simulations of imaging properties of the resulting optical elements. It would also be interesting to validate the obtained results experimentally. The numerical procedure and the analytical solution can serve for the development of high-precision optical elements.

If the designed thickness of the membrane is not sufficiently small, the solution may require additional corrections that remove certain simplifying assumptions. First, it should be taken into ac-

count that the optical surface is actually the top surface of the membrane (at contact with air) rather than the midsurface. Second, flexural stiffness may become important, especially near the clamped edge. These refinements are the subject of an ongoing research.

Declaration of Competing Interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

Acknowledgements

The first and third authors acknowledge financial support received from the [European Regional Development Fund](#) through the Center of Advanced Applied Sciences at the Czech Technical University in Prague (project No. CZ.02.1.01/0.0/0.0/16_019/0000778). The second author has received financial support from the [Czech Technical University](#) in Prague (internal projects No. SGS18/105/OHK1/2T/11 and SGS19/105/OHK1/2T/11).

Supplementary material

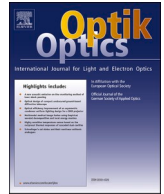
Supplementary material associated with this article can be found, in the online version, at doi:[10.1016/j.ijsolstr.2020.04.021](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.04.021).

References

- Allman, D., 1982. Variational solutions for the nonlinear deflexion of an annular membrane under axial load. *Int. J. Mech. Sci.* 24 (12), 749–753. doi:[10.1016/0020-7403\(82\)90025-X](https://doi.org/10.1016/0020-7403(82)90025-X).
- Audoly, B., Pomeau, Y., 2010. *Elasticity and Geometry: From Hair Curls to the Non-linear Response of Shells*. OUP Oxford.
- Campbell, J.D., 1956. On the theory of initially tensioned circular membranes subjected to uniform pressure. *Q. J. Mech. Appl. Math.* 9 (1). doi:[10.1093/qjmam/9.1.84](https://doi.org/10.1093/qjmam/9.1.84).
- Choi, H., Han, D.S., Won, Y.H., 2011. Adaptive double-sided fluidic lens of polydimethylsiloxane membranes of matching thickness. *Opt. Lett.* 36 (23), 4701–4703. doi:[10.1364/OL.36.004701](https://doi.org/10.1364/OL.36.004701).
- Ding, Z., Wang, C., Hu, Z., Cao, Z., Zhou, Z., Chen, X., Chen, H., Qiao, W., 2017. Surface profiling of an aspherical liquid lens with a varied thickness membrane. *Opt. Express* 25 (4), 3122–3132. doi:[10.1364/OE.25.003122](https://doi.org/10.1364/OE.25.003122).
- Du, J.-W., Wang, X.-Y., Liang, D., 2016. Bionic optical imaging system with aspheric solid-liquid mixed variable-focus lens. *Opt. Eng.* 55 (2), 23105. doi:[10.1117/1.OE.55.2.023105](https://doi.org/10.1117/1.OE.55.2.023105).
- Fichter, W., 1997. *Some Solutions for the Large Deflections of Uniformly Loaded Circular Membranes*. National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center.
- Fuh, Y.-K., Lin, M.-X., Lee, S., 2012. Characterizing aberration of a pressure-actuated tunable biconvex microlens with a simple spherically-corrected design. *Opt. Lasers Eng.* 50 (12), 1677–1682. doi:[10.1016/j.optlaseng.2012.07.013](https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2012.07.013).
- Fuh, Y.-K., Ming-XinLin, ShyongLee, 2012. Characterizing aberration of a pressure-actuated tunable biconvex microlens with a simple spherically-corrected design. *Opt. Lasers Eng.* 50, 1677–1682. doi:[10.1016/j.optlaseng.2012.07.013](https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2012.07.013).
- Goldberg, M.A., Pifko, A.B., 1963. Large deflection analysis of uniformly loaded annular membranes. *AIAA J.* 1, 2111–2115.
- Hasan, N., Banerjee, A., Kim, H., Mastrangelo, C.H., 2017. Tunable-focus lens for adaptive eyeglasses. *Opt. Express* 25 (2), 1221–1233. doi:[10.1364/OE.25.001221](https://doi.org/10.1364/OE.25.001221).
- Hencky, H., 1915. On the stress state in circular plates with vanishing bending stiffness. *Z. Math. Phys.* 63, 311–317.
- HoloChip. <http://www.holochip.com>.
- Huang, H., Wei, K., Wang, Q., Zhao, Y., 24 March 2016. Improved optical resolution for elastomer-liquid lens at high diopter using varied thickness membrane. In: *Proc. SPIE 9705, Microfluidics, BioMEMS, and Medical Microsystems XIV*, p. 970504. doi:[10.1016/j.ijleo.2013.01.022](https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2013.01.022).
- Johnston, I.D., McCluskey, D.K., Tan, C.K.L., Tracey, M.C., 2014. Mechanical characterization of bulk Sylgard 184 for microfluidics and microengineering. *J. Micromech. Microeng.* 24 (3), 35017. doi:[10.1088/0960-1317/24/3/035017](https://doi.org/10.1088/0960-1317/24/3/035017).
- Kao, R., Perrone, N., 1971. Large deflections of axisymmetric circular membranes. *Int. J. Solids Struct.* 7 (12), 1601–1612. doi:[10.1016/0020-7683\(71\)90001-1](https://doi.org/10.1016/0020-7683(71)90001-1).
- Kelkar, A., Elber, W., Raju, I., 1985. Large deflections of circular isotropic membranes subjected to arbitrary axisymmetric loading. *Comput. Struct.* 21 (3), 413–421. doi:[10.1016/0045-7949\(85\)90118-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(85)90118-X).
- Li, L., Wang, Q.-H., Jiang, W., 2011. Liquid lens with double tunable surfaces for large power tunability and improved optical performance. *J. Opt.* 13 (11), 115503.
- Liang, D., Wang, X.-Y., 2016. A bio-inspired optical system with a polymer membrane and integrated structure. *Bioinspir. Biomimet.* 11 (6), 66008.
- Mikš, A., Novák, J., Novák, P., 2013. Algebraic and numerical analysis of imaging properties of thin tunable-focus fluidic membrane lenses with parabolic surfaces. *Appl. Opt.* 52 (10), 2136–2144. doi:[10.1364/AO.52.002136](https://doi.org/10.1364/AO.52.002136).
- Mikš, A., Novák, P., 2014. Calculation of a surface shape of a pressure actuated membrane liquid lens. *Opt. Lasers Eng.* 58, 60–66. doi:[10.1016/j.optlaseng.2014.01.026](https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2014.01.026).
- Optotune. <http://www.optotune.com>.
- Patzák, B., 2012. OOFEM - an object-oriented simulation tool for advanced modeling of materials and structures. *Acta Polytech.* 52 (6), 59–66.
- Patzák, B., Bittnar, Z., 2001. Design of object oriented finite element code. *Adv. Eng. Softw.* 32 (10–11), 759–767.
- Perrone, N., Kao, R., 1971. A general nonlinear relaxation technique for solving nonlinear problems in mechanics. *J. Appl. Mech.* 38, 371–376.
- Pifko, A.B., Goldberg, M.A., 1964. Iterative and power series solutions for the large deflection of an annular membrane. *AIAA J.* 2, 1340–1342.
- Pokorný, P., Šmejkal, F., Kulmon, P., Novák, P., Novák, J., Mikš, A., Horák, M., Jirásek, M., 2017. Calculation of nonlinearly deformed membrane shape of liquid lens caused by uniform pressure. *Appl. Opt.* 56 (21), 5939–5947.
- Pokorný, P., Šmejkal, F., Kulmon, P., Novák, P., Novák, J., Mikš, A., Horák, M., Jirásek, M., 2017. Deformation of a prestressed liquid lens membrane. *Appl. Opt.* 56 (34), 9368–9376.
- Rawicz, A.H., Mikhailenko, I., 1996. Modeling a variable-focus liquid-filled optical lens. *Appl. Opt.* 35 (10), 1587–1589. doi:[10.1364/AO.35.001587](https://doi.org/10.1364/AO.35.001587).
- Ren, H., Wu, S., 2012. *Introduction to Adaptive Lenses*. Wiley Series in Pure and Applied Optics. Wiley.
- Ren, H., Wu, S.-T., 2007. Variable-focus liquid lens. *Opt. Express* 15 (10), 5931–5936. doi:[10.1364/OE.15.005931](https://doi.org/10.1364/OE.15.005931).
- Santiago-Alvarado, A., Gonzalez-Garca, J., Itubide-Jimnez, F., Campos-Garca, M., Cruz-Martinez, V., Rafferty, P., 2013. Simulating the functioning of variable focus length liquid-filled lenses using the finite element method (FEM). *Optik* 124 (11), 1003–1010. doi:[10.1016/j.ijleo.2013.01.022](https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2013.01.022).
- Shaw, D., Lin, C.-W., 2007. Design and analysis of an asymmetrical liquid-filled lens. *Opt. Eng.* 46 (12), 123002–123002–8. doi:[10.1117/1.2821426](https://doi.org/10.1117/1.2821426).
- Sheplock, M., Dugundji, J., 1998. Large deflections of clamped circular plates under initial tension and transitions to membrane behavior. *J. Appl. Mech.* 65 (1).
- Stanford, B., Ifju, P., 2008. The validity range of low fidelity structural membrane models. *Exp. Mech.* 48 (6), 697. doi:[10.1007/s11340-008-9152-2](https://doi.org/10.1007/s11340-008-9152-2).
- Sugiura, N., Morita, S., 1993. Variable-focus liquid-filled optical lens. *Appl. Opt.* 32 (22), 4181–4186. doi:[10.1364/AO.32.004181](https://doi.org/10.1364/AO.32.004181).
- Sylgard 184 Silicone Elastomer Kit. <http://www.dowcorning.com/applications/search/products/Details.aspx?prod=01064291>.
- Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S., 1959. *Theory of plates and shells*. Engineering Societies Monographs. McGraw-Hill.
- Volmir, A., 1967. *Flexible Plates and Shells*. Air Force Flight Dynamics Laboratory, Research and Technology Division, Air Force Systems Command.
- Wang, L., Oku, H., Ishikawa, M., 2013. Development of variable-focus lens with liquid-membrane-liquid structure and 30 mm optical aperture. *Proc. SPIE* 8617, 861706–861706–7. doi:[10.1117/12.2005531](https://doi.org/10.1117/12.2005531).
- Wang, L., Oku, H., Ishikawa, M., 2014. An improved low-optical-power variable focus lens with a large aperture. *Opt. Express* 22 (16), 19448–19456. doi:[10.1364/OE.22.019448](https://doi.org/10.1364/OE.22.019448).
- Yang, Q., Kobrin, P., Seabury, C., Narayanaswamy, S., Christian, W., 2008. Mechanical modeling of fluid-driven polymer lenses. *Appl. Opt.* 47 (20), 3658–3668. doi:[10.1364/AO.47.003658](https://doi.org/10.1364/AO.47.003658).
- Zhang, D.-Y., Justis, N., Lien, V., Berdichevsky, Y., Lo, Y.-H., 2004. High-performance fluidic adaptive lenses. *Appl. Opt.* 43 (4), 783–787. doi:[10.1364/AO.43.000783](https://doi.org/10.1364/AO.43.000783).
- Zhao, P., Çağlar Ataman, Zappe, H., 2015. Spherical aberration free liquid-filled tunable lens with variable thickness membrane. *Opt. Express* 23 (16), 21264–21278. doi:[10.1364/OE.23.021264](https://doi.org/10.1364/OE.23.021264).

Contents lists available at [ScienceDirect](https://www.sciencedirect.com)

Optik

journal homepage: www.elsevier.com/locate/ijleo

Original research article

Design of membrane thickness for a focus-variable liquid lens with a defined shape of the membrane's outer surface

Filip Šmejkal^{*}, Antonín Mikš, Petr Pokorný

Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Physics, Thakurova 6, 166 29 Prague, Czech Republic

ARTICLE INFO

Keywords:

Liquid lens
Membrane
Aberration
Thickness optimization

ABSTRACT

The paper presents an improved method for membrane liquid lens thickness optimization, such that for given value of optical liquid pressure, the membrane's outer surface is deformed to the prescribed shape. Furthermore, the influence of liquid pressure change on deformed membrane shape, as well as on imaging properties of the lens, is investigated on the example of plano-hyperbolic lens.

1. Introduction

Membrane liquid lenses have been increasingly popular topics in optics during past few years. These optical elements are usually composed of constant thickness axisymmetric membrane clamped at its edges, which encloses optical liquid filled chamber, see Fig. 1. (a). The change of volume of the optical liquid inside the lens induces membrane deformation and therefore change of imaging properties of the lens, see Fig. 1. (b).

This basic principle is in several variations usually present in almost every commercially available [1–4] or experimental [5–28] designs of these devices. The main benefit of using membranes in active optical elements is their capability to change shape by means of adjusting optical liquid pressure. However, one of the drawbacks of this property is the fact, that optical aberrations [29,30] introduced by deformed membrane shape (although they might be corrected e.g. by other optical elements) will differ for different values of liquid pressure.

Calculation of deformed shape of a constant thickness membrane actuated by hydrostatic pressure is described in detail in previous publications of the authors [31,32]. It has been discovered that to calculate accurately the deformed shape of a membrane, one can't simply accept simplifications commonly used in theory of elasticity [33,34], i.e. small deflections, small cross-sectional rotations, or small strains. One of the approaches to significantly reduce, or completely remove, (some) of the optical aberrations, is to use membrane with optimized variable thickness. This ensures that for given value of hydrostatic pressure, the membrane deforms exactly to the prescribed shape. The problem of thickness optimization to reach prescribed shape of a deformed membrane's midsurface is discussed in detail in previous paper of the authors [35].

The main goal of the present paper is to extend the aforementioned theory to allow optimization of variable thickness of membrane lens such that the prescribed shape of the membrane's outer surface is reached. The difference between shape of the midsurface and the outer surface, where the refraction actually occurs, has significant impact on imaging properties, especially for large deformations of the membrane.

In principle, the refraction on the membrane's inner surface can be neglected in the analysis because it is possible, and practical, to

^{*} Corresponding author.

E-mail address: filip.smejkal@fsv.cvut.cz (F. Šmejkal).

<https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2021.167507>

Received 23 January 2021; Received in revised form 24 May 2021; Accepted 19 June 2021

Available online 24 June 2021

0030-4026/© 2021 Elsevier GmbH. All rights reserved.

use optical liquid with almost identical value of refractive index as the membrane’s material (e.g., Sylgard [36] in liquid and solid form).

The second area of focus of the paper is the investigation of the influence of pressure change on deformed membrane shape and imaging properties. Prescribed shape can be achieved only for one specific value of pressure. If we change the value of pressure from the one, which was used to design an optimal thickness profile, the deformed shape changes as well, and it results in increase of aberrations of the optical system.

To our best knowledge, the derivations presented in this paper have not been published so far and the proposed formulas can significantly contribute in analysis and design procedures of membrane liquid lenses.

2. Membrane variable thickness optimization

2.1. Solution for prescribed midsurface shape

This section briefly summarizes the theory presented in authors’ previous publication [35] which can be used to find an optimal thickness profile for membrane whose midsurface is supposed to deform to the prescribed shape. Suppose we have a situation illustrated in Fig. 2 [35]. We consider a circular axisymmetric membrane of a liquid lens with axis of symmetry z and radial coordinate r . In undeformed state (stress-free), the membrane is characterized by its radius a and variable thickness $h(r)$ with h so small, that its flexural stiffness can be neglected. Along its circumference, the membrane can be generally prestressed in radial direction by prescribed displacement u_a , which can be understood as a distance the membrane has to be stretched by in radial direction before clamping into the liquid lens chamber with radius $a + u_a$. After applying the pressure of optical liquid, p , the membrane deforms and general point on its midsurface with original coordinates $[r,0]$ is displaced to the new position $[r + u(r),w(r)]$, where $u(r)$ is the radial displacement and $w(r)$ is the vertical displacement (displacement in direction of axis z). The deformed shape of the membrane can be described by function $g(r)$, which can be implicitly defined as $g(r + u(r)) = g(\tilde{r}) = w(r)$. The membrane thickness h is considered to be very small compared to the vertical displacement and therefore the deformed shape is characterized by the midsurface.

To find an optimal membrane thickness profile represented by the function $h(r)$, one can apply the following equations [35].

$$A(u, r)\eta^2 + B(u, r)\eta + C(u, r) = 0 \tag{1}$$

and

$$h = \frac{p}{E} \left(-\frac{(r + u)^2}{rg'\sqrt{\eta}} \right) \frac{1}{(1 + g'2)\eta - 1} \left(1 + \frac{\nu\eta}{\alpha} \right), \tag{2}$$

where

$$\eta = (1 + u')^2, \tag{3}$$

$$A(u, r) = 1 + g'2, \tag{4}$$

$$B(u, r) = \frac{2\nu u}{r} + \frac{\nu u^2}{r^2} - 1 + \nu(1 - g'2)\alpha(u, r), \tag{5}$$

$$C(u, r) = \left(\frac{2u}{r} + \frac{u^2}{r^2} - \nu \right) \alpha(u, r), \tag{6}$$

$$\alpha(u, r) = \frac{\left(1 + \frac{u}{r} \right)^2 g'}{(r + u)g'' - 2g' - 2g'3}, \tag{7}$$

$g(\tilde{r})$ is known function representing prescribed shape of a deformed membrane midsurface, $\tilde{r} = r + u(r)$ (see Fig. 2) is the deformed radial coordinate, E and ν are the Young’s modulus and Poisson’s ratio of the membrane material.

It is important to note, that the first and second derivative of function g , which occurs in (2–7), is with respect to the deformed radial

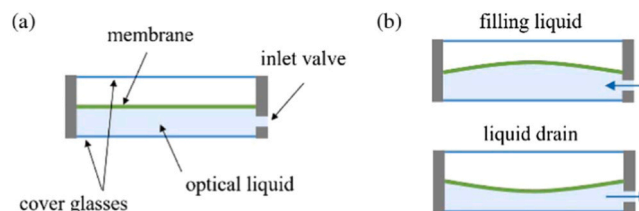


Fig. 1. (a) Schematic drawing of the membrane liquid lens and (b) result of optical liquid volume change.

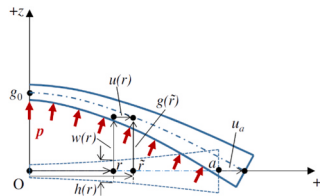


Fig. 2. Axisymmetric membrane with variable thickness actuated by constant hydrostatic pressure.

coordinate \tilde{r} (unlike the derivatives of functions $u(r)$ and $w(r)$, which are with respect to the radial coordinate r), therefore it reads $g' = \frac{dg(\tilde{r})}{d\tilde{r}}$ and $g'' = \frac{d^2g(\tilde{r})}{d\tilde{r}^2}$.

The expression (1) represents first order nonlinear differential equation with one unknown function $u(r)$, which has to satisfy two boundary conditions

$$u(0) = 0, \quad u(a) = u_a. \tag{8}$$

At the first glance, one could argue, that the problem is over constrained, since we have two boundary conditions for the first order differential equation. However, detailed analysis shows that the first boundary condition is always satisfied and therefore it does not have to be taken into account.

Solving the Eq. (1) and substituting its solution, function $u(r)$, to (2), we get function for variable thickness $h(r)$ optimized, such that membrane midsurface deforms to the prescribed shape $g(\tilde{r})$ for given value of pressure.

Eq. (1) can't be generally analytically solved, thus it is necessary to use some of the available numerical methods to obtain the solution. This procedure is described in detail in [35], where shooting method [41] is applied to find the solution of Eq. (1). This paper further assumes, that by means of the expressions (1–8) we are able to find function of optimal variable thickness $h(r)$ based on the given input parameters p, a, u_a, E, ν and $g(\tilde{r})$.

To further clarify the limitations of the presented theory, the following points should be noted:

- Although this theory takes into account the possibility of very large deformations (geometrical nonlinearity), it is based on the Saint Venant-Kirchhoff constitutive law [37], which postulates a linear relation between the Green-Lagrange strain and second Piola-Kirchhoff stress and is the simplest hyperelastic material law defined only by two parameters. Furthermore, presented formulas assume only static state, i.e. no dynamic actions are taken into account. This implies that the presented mechanical model can't in its current state take into account material nonlinearities like creep (deformation increasing in time while maintaining constant pressure), cycling (changing material parameters due to the repetitive loading), fatigue (material failure due to the repetitive loading before reaching its ultimate strength), viscoelastic behavior (deformation also depends on the driving speed), plasticity etc.
- In general, the membrane deformation would be also affected by the gravity (optical liquid self-weight), which is not taken into account in the presented mechanical model either. Strictly speaking, the gravity effect is always present, no matter in which orientation the lens is placed. However, with z axis positioned in vertical direction (upwards or downwards), one can imagine that the gravity effect will be less important than in case, where z axis is in horizontal position (the worst scenario). Placing the liquid lens z axis into different than vertical position and taking the liquid self-weight into account would cause non-symmetric deformation which would already require two dimensional mechanical model, because the presented mechanical model postulates only axisymmetric actions. This problem was briefly addressed in [10] where authors used commercial finite element software to investigate it. One can also conclude from works [5,10,39,40] that the effect of gravity can be neglected for large applied inner pressures. Although this is a very interesting and important topic for general analysis, it deserves its own study and it is beyond the scope of this paper.
- The presented mechanical model assumes idealized conditions at the membrane clamped edge. In fact, as mentioned earlier, it neglects the membrane flexural stiffness, which results in absence of points of inflection near to the edge of the membrane. In reality, those will be present, especially in the case of thick membranes. However, the presented model is very useful to apply and use in the case of thin membranes (usually used in optics) where the flexural stiffness is very small and points of inflection are very close to the clamped edge. And for both thick and thin membranes, while designing the optical system, one usually consider areas close to the optical axis because of optical aberrations in zones far from the axis. Another effect which affects idealized condition of the model is practical clamping of the membrane to the lens body during fabrication, as it is challenging to obtain uniform prestress.

The aforementioned limitations of the theory clearly described some challenging topics for usage of the presented model. However, for static initial analysis and design of most practically used liquid lenses the model gives satisfactory results and useful tool for analysis, as will be presented in the following parts of the paper.

2.2. Extension of the theory for membrane's outer surface

The above described theory for numerical design of the membrane midsurface using the optimization of the membrane thickness

can be successfully used for practical optical applications where small deformations occur. However, it is necessary to realize that the refraction of the light passing through the lens occurs mainly on the interface membrane-air. And this interface lays on the outer surface of the membrane and not on its midsurface, see Fig. 3 for plano-convex membrane lens. In optical practice it is therefore desirable to design variable thickness of the membrane, such that for above mentioned given input parameters, the membrane's outer surface deforms to the prescribed shape, because here, the refraction occurs. The difference between shape of the midsurface and the outer surface can have significant impact on imaging properties especially for large deformations of the membrane. Without loss of generality, the refraction on the membrane's inner surface can be neglected in the analysis because it is possible to use optical liquid with almost identical value of refractive index as the membrane material (e.g. Sylgard [36] in liquid and solid form).

To solve the aforementioned problem of designing the shape of outer membrane's surface, consider the situation in Fig. 4. Radial coordinates of the outer and inner surface of the membrane, \tilde{r}_{out} and \tilde{r}_{in} , respectively, can be expressed as:

$$\tilde{r}_{out} = \tilde{r} - \frac{1}{2}\tilde{h}(r)\sin(\varphi), \quad \tilde{r}_{in} = \tilde{r} + \frac{1}{2}\tilde{h}(r)\sin(\varphi) \tag{9}$$

and the corresponding vertical coordinates, g_{out} and g_{in} as:

$$g_{out} = g(\tilde{r}) + \frac{1}{2}\tilde{h}(r)\cos(\varphi), \quad g_{in} = g(\tilde{r}) - \frac{1}{2}\tilde{h}(r)\cos(\varphi), \tag{10}$$

where φ is cross-section rotation angle, which can be further expressed as $\varphi = \arctan(g')$, therefore $\sin \varphi = \frac{g'}{\sqrt{g'^2+1}}$ and $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{g'^2+1}}$. Here, $\tilde{h}(r)$ is the notation for the membrane's thickness, deformed due to the plane stress, and for this mechanical model it can be expressed as [38].

$$\tilde{h}(r) = h(r)\sqrt{2\varepsilon_z + 1} = h(r)\sqrt{\frac{2\nu(\varepsilon_r + \varepsilon_t)}{\nu - 1} + 1}, \tag{11}$$

where $\varepsilon_r = u' + \frac{1}{2}(u'^2 + w'^2)$ and $\varepsilon_t = \frac{u}{r} + \frac{u'^2}{2r^2}$ are the radial and tangential strains.

Similarly, as in the situation for the midsurface calculation summarized in the previous section, the procedure to find an optimal thickness profile of the membrane such that its outer surface deforms to the prescribed shape, has to be solved numerically.

Suppose we have an even function $g(\tilde{r})$, where $g(0) = 0$, which represents desired shape of the membrane liquid lens outer surface. Furthermore, the input parameters p , a , u_a , E and ν are known. To get the finite thickness at the edge of the membrane $h(a)$, one has to prescribe nonzero, positive value of u_a [35]. Let us define functions $g_i(\tilde{r}_i)$, $u_i(r)$ and $h_i(r)$, where $i = 1, 2, 3...n$ corresponds to the iteration count. For $i = 1$ it follows $g_1(\tilde{r}_1) = g(\tilde{r})$ and by solving Eq. (1) and substituting its solution to (2) we get functions $u_1(r)$ and $h_1(r)$. Proceeding in the calculation we have $w_1(r) = g_1(\tilde{r}_1)$ and substituting into expressions (9–11) for the membrane's outer surface to get functions $\tilde{h}_1(r)$, $\tilde{r}_{out,1}(\tilde{r}_1, r)$ and $g_{out,1}(\tilde{r}_1, r)$. In the end of the iteration it is necessary to check the difference between the current shape of the membrane's outer surface and the prescribed shape. An arbitrary point of the membrane's outer surface in the current iteration is so far expressed by means of parameters \tilde{r}_1 and r as $[\tilde{r}_{out,1}(\tilde{r}_1, r), g_{out,1}(\tilde{r}_1, r)]$ and to find the above mentioned difference we need to express it by means of a single parameter \tilde{r}_1 as $[\tilde{r}_1, \bar{g}_{out,1}(\tilde{r}_1)]$.

Considering that the whole process is solved numerically and therefore the only function we know in analytical form is the function of prescribed shape $g(\tilde{r})$, one of the suitable ways to obtain an analytical form of function $\bar{g}_{out,1}(\tilde{r}_1)$ is to use an approximation with even power series in the sense of least squares fit:

$$\bar{g}_{out,1}(\tilde{r}_1) = \sum_{j=1}^N A_{2j,1} \tilde{r}_1^{2j}, \tag{12}$$

where $A_{2j,1}$ are even coefficients and N is the number of coefficients.

Now, we can express deviation $\delta g_1(\tilde{r}_1)$ of the membrane's outer surface in the current iteration from the prescribed shape. For

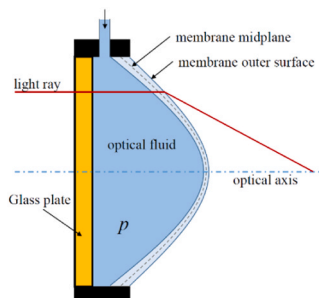


Fig. 3. Schematic drawing of light refraction on plano-convex membrane liquid lens.

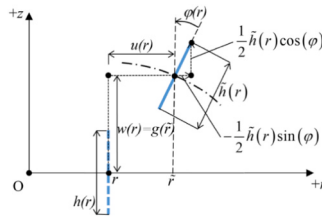


Fig. 4. Schematic drawing of membrane cross-section displacement and rotation.

$\delta g_1(0) = 0$ it yields:

$$\delta g_1(\tilde{r}_1) = g(\tilde{r}) - \bar{g}_{out,1}(\tilde{r}_1) + \bar{g}_{out,1}(0). \tag{13}$$

Thus, for input prescribed shape for the next iteration, we can write:

$$g_2(\tilde{r}) = g(\tilde{r}) + \frac{1}{2} \delta g_1(\tilde{r}_1). \tag{14}$$

For $i = 2, 3 \dots n$, the procedure stays the same, until the condition $\delta g_n(0) \approx 0$ is satisfied with sufficient accuracy. Membrane with variable thickness $h_n(r)$ is then deformed for given input parameters, such that its outer surface exactly corresponds to the originally prescribed shape $g(\tilde{r})$.

3. Calculation of optical aberrations induced by the change of actuating pressure

Suppose the optical system of a liquid lens whose variable thickness membrane deforms exactly to the defined shape (e.g. spherical) for certain value of pressure. The change of the pressure induces the change in the vertex radius of curvature (thus change in paraxial focal length) and in general, change in the whole deformed shape (it won't be spherical anymore). If the deformed shape of the membrane was spherical even after the pressure change, wave aberration $W_{2,s}$ would be introduced to the system. However, due to the change of the membrane's shape from spherical to generally aspherical, the wave aberration $W_{2,a}$ will be introduced to the system. The difference between the aberrations is therefore expressed as $\delta W_2 = W_{2,a} - W_{2,s}$.

Let us investigate the above described situation for the case of aspherical surface, which can be expressed as

$$z = \bar{z} + \sum_{i=2}^N \alpha_{2i} r^{2i}, \quad \bar{z} = \frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - (1 - \epsilon^2)c^2r^2}}, \tag{15}$$

where \bar{z} represents the conic section of the surface, $c = 1/R$, R is the vertex radius of curvature, r is the radial coordinate (the surface is axisymmetric along the z -axis), ϵ is the numerical eccentricity [41], α_{2i} are the aspherical coefficients, and N is the number of power series coefficients. Let us now approximate the conic section in Eq. (15) by Taylor series [41]. For 10th order we get:

$$\bar{z} = \frac{c}{2}r^2 - \frac{c^3(\epsilon^2 - 1)}{8}r^4 + \frac{c^5(\epsilon^2 - 1)^2}{16}r^6 - \frac{5c^7(\epsilon^2 - 1)^3}{128}r^8 + \frac{7c^9(\epsilon^2 - 1)^4}{256}r^{10}. \tag{16}$$

Maximal error Δz_{max} of the approximation (16) can be estimated with the following member of higher order of the Taylor series, one gets [41]:

$$\Delta z_{max} \approx -\frac{21 c^{11}(\epsilon^2 - 1)^5}{1024}r^{12}. \tag{17}$$

In the following chapter, we will be investigating the difference between the ideal hyperboloidal shape of the membrane's outer surface that would correspond to the focal length 2 and the actual shape which developed from the ideal hyperboloidal shape optimized for the focal length 1 by changing the actuating pressure such that the paraxial focal length corresponds to the focal length 2. Because the actual shape is general (it is not an exact conic section anymore), it is necessary to approximate it by an appropriate function.

For many purposes, as will be shown in the following chapter, it is more convenient to use parabolic approximation instead of spherical approximation with aspherical coefficients expressed by formula (15). One can simply obtain the parabolic approximation of the axially symmetric optical surface, also commonly used in optical practice, by substituting $\epsilon = 1$ into (15). The membrane shape optimized for given pressure p can then be expressed as:

$$z(p) = \sum_{i=1}^N A_{2i} r^{2i}. \tag{18}$$

For further analysis, suppose that the value of actuating pressure p will be changed to p_1 , therefore the shape is to become not ideal (as it was optimized for the pressure p). Then the corresponding shape of the membrane surface changes from (18) to:

$$z_1(p_1) = \sum_{i=1}^N B_{2i} r^{2i}, \tag{19}$$

Where B_{2i} are the coefficients corresponding to the parabolic approximation of the surface that developed from (18) by changing the actuating pressure from p to p_1 . Considering that the optimal shape of the membrane for the pressure p_1 would be given by:

$$z_0(p_1) = \sum_{i=1}^N C_{2i} r^{2i}, \tag{20}$$

where C_{2i} are (in analogy to A_{2i}) the coefficients corresponding to the parabolic approximation of the optimal shape of the membrane for the actuating pressure p_1 , the difference between the real and ideal shape of the membrane surface for pressure p_1 can be therefore expressed as:

$$\delta z(p_1) = \sum_{i=1}^N (B_{2i} - C_{2i}) r^{2i} = \sum_{i=1}^N D_{2i} r^{2i}. \tag{21}$$

Ideally, the coefficients D_{2i} would be zero. However, this scenario can't occur, because the optimal thickness is designed only for one specific value of pressure. It is expected, that the more the actuating pressure differs from the value for which the optimal thickness was designed, the more the resulting deformed shape differs from the one, which was originally prescribed (spherical, parabolic, hyperbolic etc.). As a result of this deviation, the membrane introduces certain wave aberration [29,30], which depends on the actuating pressure.

Without the loss of generality, the refraction on the membrane's inner surface can be neglected in the analysis because it is possible to use optical liquid with almost identical value of refractive index as the membrane material (e.g. Sylgard [36] in liquid and solid form). Afterwards, wave aberration $\delta W(p_1)$ introduced to the system due to the difference of the real and the ideal surface $\delta z(p_1)$ can be approximately expressed as [29,30].

$$\delta W(p_1) = \left(n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon \right) \delta z(p_1) = \left(n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon \right) \sum_{i=1}^N D_{2i} r^{2i} \approx \left(n' - n \right) \sum_{i=1}^N D_{2i} r^{2i}, \tag{22}$$

where n' , n are the refractive indexes of the substance outside and inside of the liquid lens, and ε , ε' are the angles of incident and refracted ray on the membrane's outer surface. Expression (22) is sufficiently accurate for our purpose, but reader can find more accurate formulas in [42,43].

By means of the first derivative with respect to r of the expression (22), we get transverse ray aberration $\delta y'$ [29,30].

$$\delta y' \approx 2R' \left(n' - n \right) \sum_{i=1}^N i D_{2i} r^{2i-1}, \tag{23}$$

where R' denotes the radius of the reference sphere in the image space.

Denoting the transverse ray aberration $\delta y'_k$, which corresponds to the value of radial coordinate $r = r_k$, we can estimate the radius ρ of the circle of confusion as [29,30].

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\delta y'_k - \bar{\delta y}')^2}, \quad \bar{\delta y}' = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \delta y'_k, \tag{24}$$

where K is the number of rays.

4. Examples

4.1. Example 1

The first example demonstrates the effect of difference between the outer surface and midsurface of the membrane, which are considered for a membrane's thickness and shape optimization, on imaging properties of the focus-variable liquid membrane lens.

Suppose that the lens is composed of a glass plate and a hyperboloidal membrane surface filled with optical liquid, see Fig. 3. From geometrical optics [30] it is known, that axisymmetric plano-hyperboloidal lens is spherical aberration free for the light beam parallel to its optical axis and entering from the side of its planar surface. Formula (25) expresses the general equation of the second-order curve (conic section):

$$r^2 = 2Rz + (\varepsilon^2 - 1)z^2, \tag{25}$$

where R is the vertex radius of curvature. From geometrical optics, for this hyperboloidal lens it further yields:

$$R = -f'(n - 1), \quad \varepsilon = n. \tag{26}$$

Substituting (26) into (25), expressing the variable z and replacing radial coordinate r for \tilde{r} (Section 2), we get for the prescribed hyperboloidic shape of the outer surface of the membrane:

$$z(\tilde{r}) = \frac{\tilde{r}^2}{f'(1-n) \left(1 + \sqrt{1 - \frac{(1+n)\tilde{r}^2}{f'^2(1-n)}} \right)} \tag{27}$$

Suppose next that the membrane radius after introducing prestress is $a_p = 10$ mm, prestressing displacement is $u_a = 1$ mm and therefore the radius of the membrane before introducing prestress (before clamping into the lens chamber) is $a = a_p - u_a = 9$ mm. The membrane is made of the material Sylgard 184 [36], whose Young’s modulus and Poisson’s ratio is assumed to be $E = 1.97$ MPa and $\nu = 0.4$. It is further demanded that for actuating pressure $p = 0.001E = 1.97$ kPa, the paraxial focal length is $f' = 100$ mm. The refractive index of the optical liquid in this example is assumed to be $n = 1.4118$, which corresponds to the material Sylgard 184 in liquid form for the wavelength 633 nm. This kind of lens can be widely used in the field of optical scanners [44], for example.

In the next part of this example it is convenient to use parabolic approximation of the expression (27). Let us investigate, how the exact formula for hyperbola $z(\tilde{r})$ (27) differs for this specific example from its approximation with Taylor series $\tilde{z}(\tilde{r})$ (16) presented in the previous chapter. Using the formula (17) one gets the approximate value of maximal error of this approximation, $\Delta z_{\max} \approx 3.4 \times 10^{-8}$ mm, which tells us that the approximation accuracy is sufficient.

To demonstrate the effect of difference between the outer surface and midsurface on optical imaging properties, consider the following scenario. Let the membrane thickness is optimized for the desired hyperbolic shape of the midsurface, as was presented in previous publication of the authors [35]. Therefore, the paraxial focal plane is supposed to lay at a distance behind the vertex of the midsurface which corresponds to desired focal length f . Let z denotes coordinate behind the membrane in a direction of ray propagation. Further, let z_m is the coordinate of the maximal deformation of the midsurface (i.e., $z_m = 0$ for zero applied pressure), then the paraxial focal plane will intersect the optical axis at coordinate $z_{Fm} = z_m + f$. However, as the difference between optimized midsurface and real outer surface of the membrane is neglected, the outer shape of the membrane will differ from supposed hyperbolic shape, and it will affect imaging quality in the image (detection) plane. Fig. 5 shows transverse ray aberration $\delta y'$ in the detection plane of z -coordinate $z_d = z_{Fm}$ for the supposed situation as a function of impinging height y on the planar surface of the lens. Fig. 6 then shows transverse ray aberration in the detection plane where the gyration radius ρ (the radius of the circle of confusion), for the real imaging by the outer surface of the supposed lens, is minimal. In the title of Fig. 6, z_o is the vertex coordinate of the outer surface of the membrane, z_{Fo} denotes coordinate of the effective focal point, $\Delta s = z_{Fo} - z_{Fm}$, s'_{Fo} is the axial distance from the outer surface of the membrane to the detection plane, and ρ is the value of the gyration radius.

From the presented figures, one can simply see that neglecting the difference between the midsurface and the outer surface of the membrane during the thickness optimization can result in enormous errors in optical imaging. Therefore, the proposed optimization of the outer membrane’s shape, presented in this paper, has to be performed for correct designing of the membrane liquid lenses.

4.2. Example 2

This example demonstrates the influence of pressure change in liquid membrane lens on deformed membrane shape and imaging properties of the lens. Let the nominal value of pressure, the one the lens membrane thickness and the shape of outer surface was optimized for, is p , and it varies.

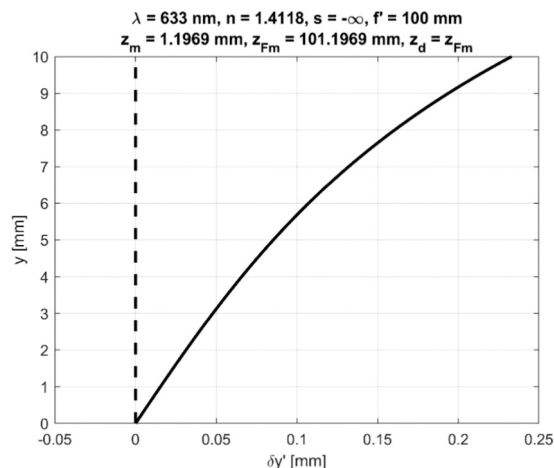


Fig. 5. Difference in transverse ray aberration in the paraxial focal plane for the case of optimized hyperbolic midsurface of the membrane lens (dashed line – supposed compensated aberration for hyperbolic shape of the midsurface, solid line – real aberration induced by neglecting the effect of membrane thickness and incorrect shape of the outer surface).

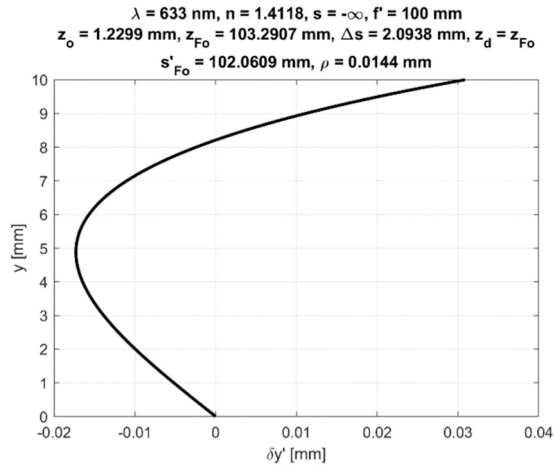


Fig. 6. Real transverse ray aberration in the plane with minimal radius of circle of confusion ρ .

Consider the material and geometrical parameters the same as in the previous example. If we change the value of the pressure from $p = 1.97$ kPa to $p_1 = 1.5249$ kPa, the paraxial focal length changes from $f = 100$ mm to $f_1 = 125$ mm, and the vertex radius of curvature from $R = -41.18$ mm to $R_1 = -51.475$ mm. If we further change the pressure to $p_2 = 1.2502$ kPa, the paraxial focal length changes to $f_2 = 150$ mm and the vertex radius of curvature to $R_2 = -61.77$ mm. The deformed shape of the membrane after the change of actuating pressure can be determined by minimizing of the total potential energy by means of using various numerical methods. This procedure is described in detail in [31,32,38]. For the purpose of this paper, the power series method [41] combined with optimization of its coefficients is applied to minimize the total potential energy. The corresponding shapes of the membrane's outer surface $z_{1,1}(\tilde{r})$ and $z_{1,2}(\tilde{r})$ (for actuating pressures p_1 and p_2 , respectively) can be described using the formula (19), for $N = 5$ it yields

$$z_1(\tilde{r}) = B_2\tilde{r}^2 + B_4\tilde{r}^4 + B_6\tilde{r}^6 + B_8\tilde{r}^8 + B_{10}\tilde{r}^{10}, \tag{28}$$

where the values of the coefficients B_{2i} for the functions $z_{1,1}(\tilde{r})$ and $z_{1,2}(\tilde{r})$ are specified in Table 1.

To assess the difference between the functions $z_{1,1}(\tilde{r})$, $z_{1,2}(\tilde{r})$ and the corresponding ideal hyperbolic shapes for given values of paraxial focal lengths f_1 and f_2 , it is necessary to express the ideal shapes in the form of the power series as well. The approximation of the general conic section with Taylor series (16) can be applied for this purpose, thus for functions $\bar{z}_{0,1}(\tilde{r})$ and $\bar{z}_{0,2}(\tilde{r})$ we can write:

$$\bar{z}_0(\tilde{r}) = C_2\tilde{r}^2 + C_4\tilde{r}^4 + C_6\tilde{r}^6 + C_8\tilde{r}^8 + C_{10}\tilde{r}^{10}, \tag{29}$$

where the values of the coefficients $C_2 = \frac{1}{2R}$, $C_4 = -\frac{e^2-1}{8R^3}$, $C_6 = \frac{(e^2-1)^2}{16R^5}$, $C_8 = -\frac{5(e^2-1)^3}{128R^7}$ and $C_{10} = \frac{7(e^2-1)^4}{256R^9}$ after substituting (26) for focal lengths f_1 and f_2 are specified in Table 2.

Using the values of coefficients specified in Tables 1 and 2 we can proceed to the calculation of the diameter of the circle of confusion [30] for the given focal lengths of the membrane liquid lens $f = 100$ mm, $f_1 = 125$ mm and $f_2 = 150$ mm. The calculation was performed using approximate formulas (21–26) and compared with the results obtained from OSLO software [45]. Fig. 7 shows the dependence of the focal length on the diameter of circle of confusion generated by liquid lens due to the change of the shape of the membrane's outer surface from the ideal hyperboloid to the general axisymmetric aspherical surface. The calculation is performed for two values of the diameter of the light beam entering the lens from the side of its planar surface, $D_1 = 15$ mm and $D_2 = 20$ mm.

4.3. Example 3

Suppose we have membrane liquid lens with identical parameters as in example 1. The membrane is, again, made of the material

Table 1
Values of coefficients B_{2i} .

Coeff.	Function	
	$z_{1,1}(\tilde{r})$	$z_{1,2}(\tilde{r})$
B_2	$-9.712788414425 \times 10^{-3}$	$-8.094344629507 \times 10^{-3}$
B_4	$2.305369478 \times 10^{-6}$	$2.411960994 \times 10^{-6}$
B_6	2.963174×10^{-9}	2.310320×10^{-9}
B_8	3.6524×10^{-11}	-3.0162×10^{-11}
B_{10}	1.43×10^{-13}	1.19×10^{-13}

Table 2
Values of coefficients C_{2i} .

Coeff.	Function	
	$\bar{z}_{0,1}(\bar{r})$	$\bar{z}_{0,2}(\bar{r})$
C_2	$-9.713453132589 \times 10^{-3}$	$-8.094544277157 \times 10^{-3}$
C_4	$9.10224624 \times 10^{-7}$	$5.26750361 \times 10^{-7}$
C_6	-1.70590×10^{-10}	-6.8556×10^{-11}
C_8	4.0×10^{-14}	1.1×10^{-14}
C_{10}	0	0

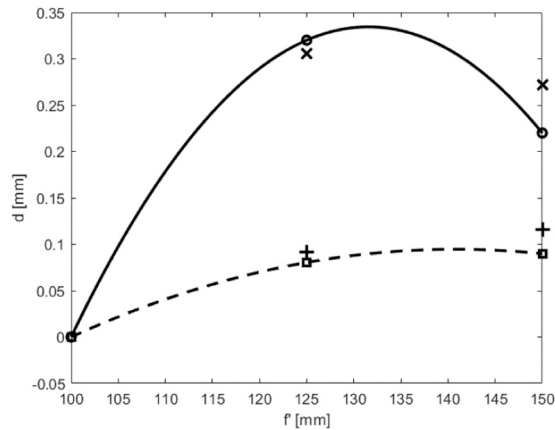


Fig. 7. Dependence of the diameter of the circle of confusion on the focal length (solid – parabolic fit of values obtained from OSLO for $D_2 = 20$ mm, circle - values obtained from OSLO for $D_2 = 20$ mm, cross – values obtained from approximate formulas for $D_2 = 20$ mm, dashed – parabolic fit of values obtained from OSLO for $D_1 = 15$ mm, square - values obtained from OSLO for $D_1 = 15$ mm, plus sign – values obtained from approximate formulas for $D_1 = 15$ mm).

Sylgard 184 [36], whose refractive index is $n_1 = 1.4118$. However, this time the optical liquid inside the lens is distilled water with refractive index $n = 1.3318$. Design of the desired shape of the membrane’s outer surface for focal length $f = 100$ mm is again performed using formula (27) and the thickness profile for this specific shape for actuating pressure $p = 1.97$ kPa is determined by means of using an iterative procedure derived in Section 2. In this example, all the surfaces will be expressed by means of formula (19) for $N = 5$. Coefficients B_{2i} for the membrane’s inner and outer surface, $z_{0,i}(\bar{r})$ and $z_{0,o}(\bar{r})$ for the focal length $f = 100$ mm are specified in Table 3.

If we change the value of the pressure from $p = 1.97$ kPa to $p_1 = 1.4975$ kPa, the paraxial focal length changes from $f = 100$ mm to $f_1 = 125$ mm and the vertex radius of curvature from $R = -33.181$ mm to $R_1 = -41.475$ mm. If we further change the pressure to $p_2 = 1.2156$ kPa, the paraxial focal length changes to $f_2 = 150$ mm and the vertex radius of curvature to $R_2 = -49.77$ mm. Coefficients B_{2i} for the membrane’s inner and outer surface, $z_{1,i}(\bar{r})$ and $z_{1,o}(\bar{r})$ and $z_{2,i}(\bar{r})$ and $z_{2,o}(\bar{r})$ for the focal lengths $f_1 = 125$ mm and $f_2 = 150$ mm are specified in Tables 4 and 5.

Using the values of coefficients specified in Tables 3–5 we can proceed to the calculation of the diameter of the circle of confusion for the given focal lengths of the membrane liquid lens $f = 100$ mm, $f_1 = 125$ mm and $f_2 = 150$ mm. The results are obtained from OSLO software.

Fig. 8 shows the dependence of the diameter d of the circle of confusion on the focal length, which was generated by liquid lens due to the change of the shape of the membrane’s outer surface from the ideal hyperboloid to the general axisymmetric aspherical surface. The calculation is, again, performed for two values of the diameter of the light beam entering the lens from the side of its planar surface, $D_1 = 15$ mm and $D_2 = 20$ mm.

From Figs. 7 and 8 it is clear, that if we change the actuating pressure from its original value, for which the optimal thickness profile of the membrane was designed and for which the membrane’s outer surface deforms exactly to the hyperboloidic shape, the deformed shape changes to the general axisymmetric aspherical surface. Consequently, the optical aberrations introduced to the system by the membrane increase. Considering that example 2 represents more complex lens, which composes of more optical substances (refractive indexes of distilled water and membrane differ) and one of its surfaces has hyperboloidic shape, it can be expected, that the value of the diameter of circle of confusion won’t intersect zero even for the original focal length $f = 100$ mm, see Fig. 8.

5. Conclusions

The paper presents the problem of optimal design of the variable thickness profile of the membrane in membrane liquid lens.

Table 3

Values of coefficients B_{2i} of membrane's inner and outer surface for $f = 100$ mm, membrane's vertex deformed thickness $\tilde{h}(0) = 46.5 \times 10^{-3}$ mm.

Coeff.	Function	
	$z_{0,i}(\tilde{r})$ - inner	$z_{0,o}(\tilde{r})$ - outer
B_2	$-1.5427681909898 \times 10^{-2}$	$-1.5069111713259 \times 10^{-2}$
B_4	$1.796443969 \times 10^{-6}$	$2.633718250 \times 10^{-6}$
B_6	-1.876658×10^{-9}	-5.72136×10^{-10}
B_8	-4.836×10^{-12}	-3.528×10^{-12}
B_{10}	1.2×10^{-14}	1.5×10^{-14}

Table 4

Values of coefficients B_{2i} of membrane's inner and outer surface for $f_1 = 125$ mm, membrane's vertex deformed thickness $\tilde{h}(0) = 47.4 \times 10^{-3}$ mm.

Coeff.	Function	
	$z_{1,i}(\tilde{r})$ - inner	$z_{1,o}(\tilde{r})$ - outer
B_2	$-1.2406949245625 \times 10^{-2}$	$-1.2055457579851 \times 10^{-2}$
B_4	$3.236978306 \times 10^{-6}$	$3.982282655 \times 10^{-6}$
B_6	-1.629885×10^{-9}	-6.18083×10^{-10}
B_8	-2.080×10^{-12}	-1.228×10^{-12}
B_{10}	1.0×10^{-14}	1.1×10^{-14}

Table 5

Values of coefficients B_{2i} of membrane's inner and outer surface for $f_2 = 150$ mm, membrane's vertex deformed thickness $\tilde{h}(0) = 47.85 \times 10^{-3}$ mm.

Coeff.	Function	
	$z_{2,i}(\tilde{r})$ - inner	$z_{2,o}(\tilde{r})$ - outer
B_2	$-1.0393807675511 \times 10^{-2}$	$-1.0046215531050 \times 10^{-2}$
B_4	$3.519069108 \times 10^{-6}$	$4.216893073 \times 10^{-6}$
B_6	-1.820727×10^{-9}	-9.25025×10^{-10}
B_8	-9.09×10^{-13}	-2.12×10^{-13}
B_{10}	0.7×10^{-14}	0.8×10^{-14}

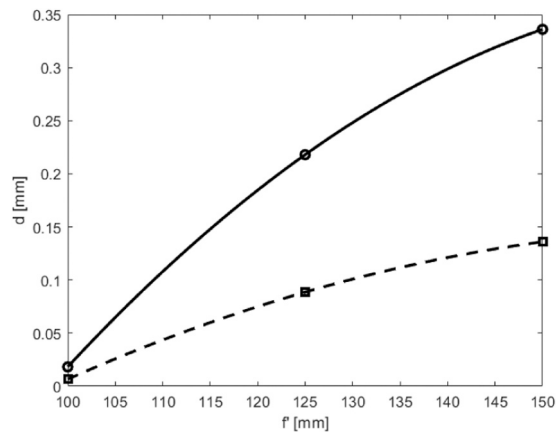


Fig. 8. Dependence of the diameter d of the circle of confusion on the focal length (solid – parabolic fit of values obtained from OSLO for $D_2 = 20$ mm, circle - values obtained from OSLO for $D_2 = 20$ mm, dashed – parabolic fit of values obtained from OSLO for $D_1 = 15$ mm, square - values obtained from OSLO for $D_1 = 15$ mm).

Firstly, the general formulas allowing us to design variable thickness profile, such that for specific value of actuating pressure the membrane's midsurface deforms exactly to the prescribed shape, are introduced. Secondly, an iterative procedure, which can be applied to obtain variable thickness profile, such that the membrane's outer surface deforms to the prescribed shape, is derived.

Furthermore, the influence of the pressure change on the deformed membrane shape and on its optical aberrations is investigated. In the end, the example for a specific plano-hyperbolic lens demonstrates the effect of difference between the outer surface and mid-surface of the membrane, which are considered for a membrane's thickness and shape optimization, on imaging properties of the focus-variable liquid membrane lens. One can see that neglecting the difference between the midsurface and outer surface can result in enormous errors in optical imaging. Further, two examples that show how the diameter of circle of confusion of the liquid lens depends on the focal length when the actuating pressure is changed from the value for which the optimal thickness was designed, are presented.

Declaration of Competing Interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

Acknowledgements

This work was supported by the Grant Agency of the Czech Technical University in Prague, grant No. SGS20/093/OHK1/2T/11.

References

- [1] Varioptic, (<http://www.varioptic.com>).
- [2] Optotune, (<http://www.optotune.com>).
- [3] Flexible optical, (<http://www.okotech.com>).
- [4] TAG optics, (<http://www.tag-optics.com>).
- [5] N. Sugiura, S. Morita, Variable-focus liquid-filled optical lens, *Appl. Opt.* 32 (1993) 4181–4186.
- [6] A.H. Rawicz, I. Mikhailenko, Modeling a variable-focus liquid-filled optical lens, *Appl. Opt.* 35 (1996) 1587–1589.
- [7] D.Y. Zhang, N. Justis, V. Lien, Y. Berdichevsky, Yu-Hwa Lo, High-performance fluidic adaptive lenses, *Appl. Opt.* 43 (2004) 783–787.
- [8] H. Ren, S.-T. Wu, Variable-focus liquid lens, *Opt. Express* 15 (2007) 5931–5936.
- [9] L. Wang, H. OkuM. Ishikawa, Development of Variable-Focus Lens with Liquid-Membrane-Liquid Structure and 30 mm Optical Aperture, 2013.
- [10] S.T. Choi, B.S. Son, G.W. Seo, S.-Y. Park, K.-S. Lee, Optomechanical analysis of nonlinear elastomer membrane deformation under hydraulic pressure for variable-focus liquid-filled microlenses, *Opt. Express* 22 (2014) 6133–6146.
- [11] Q. Yang, P. Kobrin, C. Seabury, S. Narayanaswamy, W. Christian, Mechanical modeling of fluid-driven polymer lenses, *Appl. Opt.* 47 (2008) 3658–3668.
- [12] L. Wang, H. Oku, M. Ishikawa, An improved low-optical-power variable focus lens with a large aperture, *Opt. Express* 22 (2014) 19448–19456.
- [13] D. Shaw, C.-W. Lin, Design and analysis of an asymmetrical liquid-filled lens, *Opt. Eng.* 46 (2007), 123002.
- [14] N. Hasan, A. Banerjee, H. Kim, C.H. Mastrangelo, Tunable-focus lens for adaptive eyeglasses, *Opt. Express* 25 (2017) 1221–1233.
- [15] H. Choi, D.S. Han, Y.H. Won, Adaptive double-sided fluidic lens of polydimethylsiloxane membranes of matching thickness, *Opt. Lett.* 36 (2011) 4701–4703.
- [16] L. Li, Q.-H. Wang, W. Jiang, Liquid lens with double tunable surfaces for large-hour tunability and improved optical performance, *J. Opt.* 13 (2011), 115503.
- [17] Y.-K. Fuh, M.-X. Lin, S. Lee, Characterizing aberration of a pressure-actuated tunable biconvex microlens with a simple spherically corrected design, *Opt. Lasers Eng.* 50 (2012) 1677–1682.
- [18] D. Liang, X.-Y. Wang, A bio-inspired optical system with a polymer membrane and integrated structure, *Bioinspir. Biomim.* 11 (2016), 066008.
- [19] J.-W. Du, X.-Y. Wang, D. Liang, Bionic optical imaging system with aspheric solid-liquid mixed variable-focus lens, *Opt. Eng.* 55 (2016), 023105.
- [20] K. Mishra, C. Murade, B. Carreel, I. Roghair, J.M. Oh, G. Manukyan, D. Van, Optofluidic lens with tunable focal length and asphericity, *Sci. Rep.* 4 (2014) 6378.
- [21] D. Shaw, T.E. Sun, Optical properties of variable-focus liquid-filled optical lenses with different membrane shapes, *Opt. Eng.* 46 (2007), 024002.
- [22] H. Yu, G. Zhou, H.M. Leung, F.S. Chau, Tunable liquid-filled lens integrated with aspherical surface for spherical aberration compensation, *Opt. Express* 18 (2010) 9945–9954.
- [23] G.-H. Feng, Y.-C. Chou, Flexible meniscus/biconvex lens system with fluidic-controlled tunable-focus applications, *Appl. Opt.* 48 (2009) 3284–3290.
- [24] F. Schneider, J. Draheim, R. Kamberger, P. Waibel, U. Wallrabe, Optical characterization of adaptive fluidic silicone-membrane lenses, *Opt. Express* 17 (2009) 11813–11821.
- [25] A. Santiago-Alvarado, J. González-García, F. Itubide-Jiménez, M. Campos-García, V. Cruz-Martínez, P. Rafferty, Simulating the functioning of variable focus length liquid-filled lenses using the finite element method (fem), *Optik* 124 (2013) 1677–1682.
- [26] H. Huang, K. Wei, Q. Wang, Y. Zhao, Improved optical resolution for elastomer-liquid lens at high diopter using varied thickness membrane, in: Proceedings of the SPIE 9705, Microfluidics, BioMEMS, and Medical Microsystems XIV, 24 March, 2016, 970504.
- [27] Z. Ding, C. Wang, Z. Hu, Z. Cao, Z. Zhou, X. Chen, H. Chen, W. Qiao, Surface profiling of an aspherical liquid lens with a varied thickness membrane, *Opt. Express* 25 (2017) 3122–3132.
- [28] P. Zhao, A. Çağlar, H. Zappe, Spherical aberration free liquid-filled tunable lens with variable thickness membrane, *Opt. Express* 23 (2015) 21264–21278.
- [29] M. Born, E. Wolf. Principles of Optics, seventh ed., Cambridge University Press, 1999.
- [30] W.T. Welford, Aberrations of the Symmetrical Optical Systems, Academic Press, London, 1974.
- [31] P. Pokorný, F. Šmejkal, P. Kulmon, P. Novák, J. Novák, A. Mikš, M. Horák, M. Jirásek, Calculation of nonlinearly deformed membrane shape of liquid lens caused by uniform pressure, *Appl. Opt.* 56 (2017) 5939–5947.
- [32] P. Pokorný, F. Šmejkal, P. Kulmon, P. Novák, J. Novák, A. Mikš, M. Horák, M. Jirásek, Deformation of a prestressed liquid lens membrane, *Appl. Opt.* 56 (2017) 9368–9376.
- [33] S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, Theory of plates and shells. Engineering Societies Monographs, McGraw-Hill, 1959.
- [34] A.S. Volmir, Flexible Plates and Shells, Technical Report, Air Force Flight Dynamics Laboratory, Research and Technology Division, Air Force Systems Command, 1967.
- [35] M. Jirásek, F. Šmejkal, M. Horák, Pressurized axisymmetric membrane deforming into a prescribed shape, *Int. J. Solids Struct.* 198 (2020) 1–16.
- [36] Sylgard 184 Silicone Elastomer Kit. (<http://www.dowcorning.com/applications/search/products/Details.aspx?prod=01064291>).
- [37] B. Audoly, Y. Pomeau, Elasticity and Geometry: from Hair Curls to the Non-linear Response of Shells, OUP, Oxford, 2010.
- [38] A. Mikš, F. Šmejkal, Dependence of the imaging properties of the liquid lens with variable focal length on membrane thickness, *Appl. Opt.* 57 (2018) 6439–6445.
- [39] Kevin Newman, Kyle Stephens, Analysis of gravitational effects on liquid lenses (ANGEL), in: Proceedings of the SPIE 8450, Modern Technologies in Space- and Ground-based Telescopes and Instrumentation II, 84500G, 13 September, 2012. (<https://doi.org/10.1117/12.926520>).
- [40] Pengpeng Zhao, Çağlar Ataman, Hans Zappe, Gravity-immune liquid-filled tunable lens with reduced spherical aberration, *Appl. Opt.* 55 (2016) 7816–7823, <https://doi.org/10.1364/AO.55.007816>.
- [41] K. Rektorys, Survey of Applicable Mathematics, Springer, 1994.
- [42] M. Rimmer, Analysis of perturbed lens systems, *Appl. Opt.* 9 (1970) 533–537.

- [43] H.H. Hopkins, H.J. Tiziani, A theoretical and experimental study of lens centring errors and their influence on optical image quality, *Br. J. Appl. Phys.* 17 (1966) 33–54.
- [44] P. Pokorny, A. Mijs, 3D optical two-mirror scanner with focus-tunable lens, *Appl. Opt.* 54 (2015) 6955–6960.
- [45] OSLO, Lambda Research Corporation, Littleton, USA, 2020. (<http://www.lambdare.com/oslo>).

Deformation of a spherical lens caused by its own weight

PETR POKORNÝ,*  FILIP ŠMEJKAL, AND ANTONÍN MIKŠ

Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Physics, Thákurova 7, 166 29 Prague, Czech Republic

*Corresponding author: petr.pokorny@fsv.cvut.cz

Received 29 August 2017; revised 2 November 2017; accepted 19 November 2017; posted 21 November 2017 (Doc. ID 305910); published 14 December 2017

This paper presents a method for calculation of a surface deformation of a spherical lens or a plane-parallel plate caused by its own weight. Formulas for the case of support at the edge or for the inner radius support are presented. Since it is not possible to find an analytical solution with appropriate boundary conditions, this paper presents numerical methods enabling us to calculate an approximate solution. The mentioned deflection has enormous impact in the field of optical metrology of large lenses where it has to be taken into account during precise measurements. © 2017 Optical Society of America

OCIS codes: (080.3630) Lenses; (120.3940) Metrology; (120.4630) Optical inspection; (220.4840) Testing.

<https://doi.org/10.1364/AO.56.009984>

1. INTRODUCTION

It is very important to measure geometrical and optical parameters very accurately during manufacturing of optical components. Surface topography is the one of the parameters that has a significant impact on imaging quality. Many approaches exist of precise measuring of the surface in the case of spherical or aspherical lenses [1–11], and interferometrical measurements are the most precise of them [12]. Many companies offer interferometers for very accurate measuring of optical surface topographies [7–11]. Deflection from a nominal shape of a surface under test is caused by manufacturing errors and by deformation caused by its own weight that can be present during the measuring process. Moreover, there are some limits for the accuracy that can be achieved during the surface shape measurement.

Many researchers presented works dealing with theory of deformation of plates over the past years. The deflection in individual points of supported planes was studied by Nadai [13,14]. Similarly, determination of plainness and bending of optical flats were presented by Emerson [15]. Elastic deflections of a thick circular mirror horizontally placed on a ring support was studied by Selke [16]. A paper on point supports of a telescope mirror and its deflections was shown by Nelson *et al.* [17]. A study of the symmetrical bending of an elastic circular plate supported at numerous internal points was published by Nong and Bao-lian [18]. Deflections of a thin or thick annular mirror and application to active mirror support optimization were studied by Arnold [19]. Mikš and Novák [20] presented in detail the effect of self-deflection of a plane-parallel plate caused by its own weight on interferometrical measurements.

The main goal of this paper is to present an analysis of a deformation of a spherical lens positioned horizontally together with several approaches of a numerical approximate solution of derived governing equations. Vertically positioned lenses are not investigated in this paper as the influence of self-deflection is not practically measurable in this case for typical lenses. Moreover, in practical industrial applications there are almost no situations of vertical positioning because of complications with fastening of lenses that could lead to unwanted tensions and deformations.

First, fundamental equations for the calculation of the deformation are presented. Afterward, different numerical approximate solutions are compared. The importance of the presented topic for very accurate measurements is shown in an example. To the best of the authors' knowledge, such a study for a spherical lens has not been published yet. Therefore, the reader can find the solution and a useful tool for practical modeling of the aforementioned issue in this paper.

2. GOVERNING EQUATIONS FOR A CALCULATION OF DEFORMATION OF A SPHERICAL LENS CAUSED BY ITS OWN WEIGHT

A lens can be considered as a circular plate of variable thickness from the point of view of a theory of elasticity. And a deflection caused by a lens's own weight will be much smaller than its own thickness.

First, consider a lens to be supported at the edge. As is known from the theory of elasticity, a deflection w in a vertical

direction, if one supposes a symmetrical loading, can be described by the equations [21–24]

$$\varphi = -\frac{dw}{dr}, \quad M = D(r) \left[\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right], \quad (1)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} \right] \frac{d\varphi}{dr} + \left[\frac{\nu}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} - \frac{1}{r} \right] \frac{\varphi}{r} = \frac{Q(r)}{D(r)}, \quad (2)$$

$$D(r) = \frac{Ed^3(r)}{12(1-\nu^2)}, \quad q(r) = d(r)\rho g, \quad (3)$$

where $w = w(r)$ is a vertical deflection of the plate (lens), r is a radial distance from the center, ν is the Poisson number, E is the Young modulus of elasticity, ρ is a volume density, g is the gravitational acceleration, $d(r)$ is a plate's thickness in the position r from its center, $\varphi = \varphi(r)$ is a slope of a tangent to the centerline, $M = M(r)$ is a radial inner moment on a length unit, $D(r)$ is a bending stiffness, $q(r)$ is a flat load, and $Q(r)$ is a pushing force per a unit distance. Note that the aforementioned formulas are valid only for thin circular plates where a ratio of its thickness and diameter is less than or equal to 1/8. This condition covers usual optical components that come for testing in output control processes during construction of optical systems.

Suppose now that the lens is spherical (it has both surfaces spherical), and therefore its thickness can be described as

$$d(r) = d_0 - R_1 \left(1 - \sqrt{1 - (r/R_1)^2} \right) + R_2 \left(1 - \sqrt{1 - (r/R_2)^2} \right), \quad (4)$$

$$\approx d_0 - a_2 r^2 - a_4 r^4 - a_6 r^6,$$

where

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad a_4 = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3} \right), \quad a_6 = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{R_1^5} - \frac{1}{R_2^5} \right),$$

where R_1 and R_2 are radii of the curvature of the lens and d_0 is its axial thickness. Using Eqs. (3) and (4) one gets

$$\frac{1}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} = \frac{3r}{d(r)} \left[\frac{1}{R_2 \sqrt{1 - (r/R_2)^2}} - \frac{1}{R_1 \sqrt{1 - (r/R_1)^2}} \right] \approx -\frac{6(a_2 r + 2a_4 r^3 + 3a_6 r^5)}{d(r)}. \quad (5)$$

With the use of Eq. (5) and appropriate boundary conditions one can numerically solve Eq. (2). Boundary conditions characterize a way of supporting a lens. For example, in the case of support at the edge (as is shown in Fig. 1) boundary conditions have the form

$$w(r)|_{r=a} = 0, \quad M(r)|_{r=a} = 0, \quad (6)$$

where a denotes the radius of the lens, and the pushing force $Q(r)$ can be calculated as

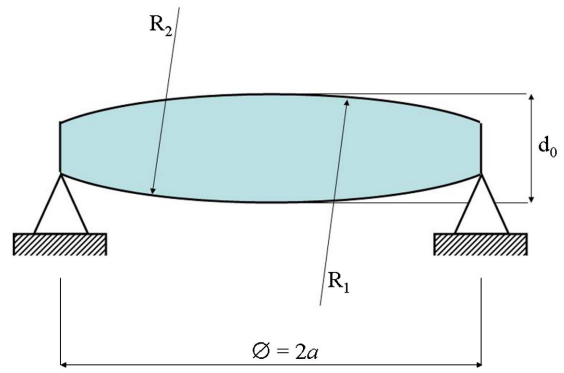


Fig. 1. Scheme of an edge support of a spherical lens.

$$Q(r) = \frac{1}{r} \int_0^r q(r)rdr = \rho g [I(r) - I(0)] \approx \rho g (d_0 r / 2 - a_2 r^3 / 4 - a_4 r^5 / 6 - a_6 r^7 / 8), \quad (7)$$

where

$$I(r) = \int d(r)rdr = \frac{r^2}{2} (d_0 - R_1 + R_2) - \frac{R_1 \sqrt{1 - (r/R_1)^2}}{3} (R_1^2 - r^2) + \frac{R_2 \sqrt{1 - (r/R_2)^2}}{3} (R_2^2 - r^2), \quad (8)$$

$$I(0) = \frac{R_2^3 - R_1^3}{3}.$$

In the case of an inner support of the lens on a chosen radius R_2 (see Fig. 2), there will be a discontinuity at the point $r = r_s$, and one has to find a solution in two cases as a function $w_1(r)$ in interval $r \in [0, r_s]$ and as a function $w_2(r)$ in interval $r \in [r_s, a]$. The boundary conditions then become

$$w_1(r)|_{r=r_s} = w_2(r)|_{r=r_s} = 0, \quad M_2(r)|_{r=a} = 0. \quad (9)$$

Further, conditions of continuity have to be prescribed at the point $r = r_s$; they hold

$$\varphi_1(r)|_{r=r_s} = \varphi_2(r)|_{r=r_s}, \quad M|_{r=r_s} = M|_{r=r_s}. \quad (10)$$

The pushing force $Q(r)$ will be the same for the interval $r \in [0, r_s]$ as in the case of the edge-supported lens. At the point $r = r_s$, there will be a change as a result of reaction of the support, and therefore the following formulas become valid:

$$Q_1(r) = \frac{1}{r} \int_0^r q(r)rdr = \frac{\rho g}{r} [I(r) - I(0)], \quad (11)$$

$$Q_2(r) = -\frac{1}{r} \int_r^a q(r)rdr = -\frac{\rho g}{r} [I(a) - I(r)].$$

A difference in forces $Q_1(r_s)$ and $Q_2(r_s)$ is equal to the support reaction.

In the following part of this paper, a numerical solution of the problem described by Eq. (2) will be presented.

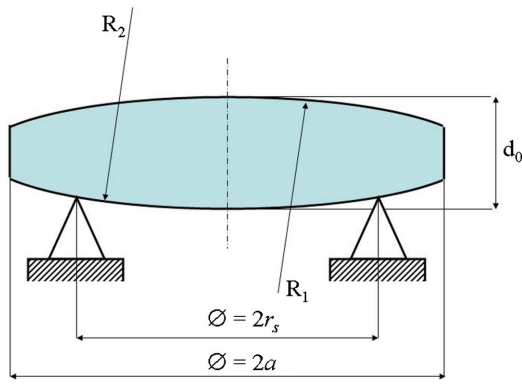


Fig. 2. Scheme of an inner support of a spherical lens.

3. NUMERICAL SOLUTION

This part is going to study several solutions of a calculation of the lens deformation. First, a power series solution is shown, presenting a universal method with transforming the problem to a nonlinear optimization issue. It is followed by the Runge-Kutta method and the finite differences method.

A. Power Series Solution Using Optimization Algorithms

Suppose that a lens is supported at its edge. If a deflection is prescribed as a power series of order $2N$,

$$w = \sum_{i=0}^N b_{2i} r^{2i}, \tag{12}$$

where b_{2i} are coefficients of the supposed power series and r is the radius. Then it holds

$$\varphi = -\frac{dw}{dr} = -\sum_{i=0}^N (2i) b_{2i} r^{2i-1}, \tag{13}$$

and therefore

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dr} &= -\sum_{i=0}^N (2i)(2i-1) b_{2i} r^{2(i-1)}, \\ \frac{d^2\varphi}{dr^2} &= -\sum_{i=0}^N (4i)(i-1)(2i-1) b_{2i} r^{2(i-3)}. \end{aligned} \tag{14}$$

Boundary conditions of Eq. (9) then have the following form:

$$w(r)|_{r=a} = 0 = \sum_{i=0}^N b_{2i} a^{2i}, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} M(r)|_{r=a} &= 0 \\ &= D(a) \left[-\sum_{i=0}^N (2i)(2i-1) b_{2i} a^{2(i-1)} - \nu \sum_{i=0}^N (2i) b_{2i} a^{2(i-1)} \right]. \end{aligned} \tag{16}$$

It is obvious that the following condition has to be valid to fulfill Eq. (16):

$$\sum_{i=0}^N (2i)(2i-1+\nu) b_{2i} a^{2(i-1)} = 0. \tag{17}$$

An approximate numerical solution of a problem defined by Eq. (2) can be found with Eqs. (5)–(8), e.g., within an optimization algorithm [25,26].

Suppose now an inner support of the lens. Let a deflection $w_1(r)$ be an even series of order $2N_1$ (considering function $w_1(r)$ symmetrical about axis $x = 0$), and let a deflection $w_2(r)$ be a general power series of order N_2 (e.g., function $w_2(r)$ cannot be approximated with even powers of r only). Then,

$$w_1 = \sum_{i=0}^{N_1} b_{2i} r^{2i}, \quad w_2 = \sum_{i=0}^{N_2} c_i r^i, \tag{18}$$

where b_{2i} and c_i are coefficients of the supposed power series and r is the radius. Therefore,

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{dw_1}{dr} = -\sum_{i=0}^{N_1} (2i) b_{2i} r^{2i-1}, \\ \varphi_2 &= -\frac{dw_2}{dr} = -\sum_{i=0}^{N_2} i c_i r^{i-1}, \end{aligned} \tag{19}$$

and similarly

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dr} &= -\sum_{i=0}^{N_1} (2i)(2i-1) b_{2i} r^{2(i-1)}, \\ \frac{d\varphi_2}{dr} &= -\sum_{i=0}^{N_2} i(i-1) c_i r^{i-2}, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi_1}{dr^2} &= -\sum_{i=0}^{N_1} (4i)(i-1)(2i-1) b_{2i} r^{2i-3}, \\ \frac{d^2\varphi_2}{dr^2} &= -\sum_{i=0}^{N_2} i(i-1)(i-2) c_i r^{i-3}. \end{aligned} \tag{21}$$

Boundary conditions for the aforementioned situation will have the form

$$w_1(r)|_{r=r_s} = 0 = \sum_{i=0}^{N_1} b_{2i} r_s^{2i} = w_2(r)|_{r=r_s} = \sum_{i=0}^{N_2} c_i r_s^i, \tag{22}$$

$$M(r)|_{r=a} = 0 = -D(a) \sum_{i=0}^{N_2} i(i-1+\nu) c_i a^{i-2}, \tag{23}$$

and conditions of continuity

$$\varphi_1(r)|_{r=r_s} = \varphi_2(r)|_{r=r_s} = -\sum_{i=0}^{N_1} (2i) b_{2i} r_s^{2i-1} = -\sum_{i=0}^{N_2} i c_i r_s^{i-1}, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} M_1(r)|_{r=r_s} &= M_2(r)|_{r=r_s}, \\ &= -D(r_s) \sum_{i=0}^{N_1} (2i)(2i-1+\nu) b_{2i} r_s^{2(i-1)} \\ &= -D(r_s) \sum_{i=0}^{N_2} i(i-1+\nu) c_i r_s^{i-2}. \end{aligned} \tag{25}$$

Optimization algorithms [25,26] are a very powerful tool for solving many problems. The main goal of those methods is to minimize a user-defined function of variable unknowns (find function minimum). In the presented case of the solution of differential Eq. (2) the coefficients of the power series of Eq. (12) or Eq. (18) become the unknowns. A goal function to be minimized will be shown below.

Substituting Eqs. (12)–(14) into Eq. (2), one gets

$$\sum_{i=0}^N E_i(r)b_{2i} = C(r), \tag{26}$$

where

$$\begin{aligned} E_i(r) &= e_i(r) + A(r)c_i(r) + B(r)a_i(r), \\ e_i(r) &= -(4i)(i-1)(2i-1)r^{2i-3}, \\ c_i(r) &= -(2i)(2i-1)r^{2(i-1)}, \\ a_i(r) &= -(2i)r^{2i-1}, \\ A(r) &= \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} \right], \\ B(r) &= \frac{1}{r} \left[\frac{\nu}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} - \frac{1}{r} \right], \quad C(r) = \frac{Q(r)}{D(r)}. \end{aligned}$$

If coefficients b_{2i} in Eq. (26) are converging to a correct solution, then the formula

$$\phi_1(r_m) = \left[\sum_{i=0}^N E_i(r_m)b_{2i} \right] - C(r_m) \tag{27}$$

is converging to zero for given point r_m . Similarly, for boundary conditions Eqs. (15) and (16) one can write

$$\phi_2 = \sum_{i=0}^N b_{2i}a^{2i}, \quad \phi_3 = \sum_{i=0}^N (2i)(2i-1+\nu)b_{2i}a^{2(i-1)}. \tag{28}$$

The goal function ϕ for $M+1$ points $r_m (m=0, \dots, M)$ in the interval $[0, a] (r_0=0, r_M=a)$ defined in a least-squares sense can be formulated as

$$\phi = \left[\sum_{m=0}^M W_1 \phi_1^2(r_m) \right] + W_2 \phi_2^2 + W_3 \phi_3^2, \tag{29}$$

where $W_1, W_2,$ and W_3 are weight coefficients. One can choose the goal function in a sense of a sum of absolute values, and it holds as follows:

$$\phi = \left[\sum_{m=0}^M W_1 |\phi_1(r_m)| \right] + W_2 |\phi_2| + W_3 |\phi_3|. \tag{30}$$

If the algorithm finds such coefficients b_{2i} , which will minimize the goal function of Eq. (29) or Eq. (30), then such coefficients define the approximate solution of Eq. (2) with the boundary conditions Eq. (9).

For the lens with the inner support, the goal function can be defined in a similar approach,

$$\phi = \sum_{m=0}^{M_s} W_1 \phi_1^2(r_m) + \sum_{m=M_s+1}^M W_2 \phi_2^2(r_m) + \sum_{j=3}^8 W_j \phi_j^2, \tag{31}$$

where $m = M_s$ denotes the position of the support in the interval $[0, a]$, W_1, \dots, W_8 are weights, and

$$\begin{aligned} \phi_1(r_m) &= \left[\sum_{i=0}^{N_1} E_i(r_m)b_{2i} \right] - \frac{Q_1(r_m)}{D(r_m)}, \\ \phi_2(r_m) &= \left[\sum_{i=0}^{N_2} F_i(r_m)c_i \right] - \frac{Q_2(r_m)}{D(r_m)}, \\ F_i(r_m) &= p_i(r_m) + A(r_m)b_i + B(r_m)q_i, \\ p_i(r_m) &= -i(i-1)(i-2)r^{i-3}, \\ b_i(r_m) &= -i(i-1)r^{i-2}, \quad q_i(r_m) = -ir^{i-1}, \\ \phi_3 &= \sum_{i=0}^{N_1} b_{2i}r_s^{2i}, \quad \phi_4 = \sum_{i=0}^{N_2} c_i r_s^i, \\ \phi_5 &= \sum_{i=0}^{N_2} i(i-1+\nu)c_i a^{i-2}, \\ \phi_6 &= \sum_{i=0}^{N_1} (2i)b_{2i}r_s^{2i-1} - \sum_{i=0}^{N_2} ic_i r_s^{i-1}, \\ \phi_7 &= \sum_{i=0}^{N_1} (2i)(2i-1+\nu)b_{2i}r_s^{2(i-1)}, \\ \phi_8 &= \sum_{i=0}^{N_1} i(i-1+\nu)c_i r_s^{i-2}. \end{aligned} \tag{32}$$

The goal function as a sum of absolute values can be constructed similarly, as in Eq. (30).

The aforementioned formulas present an approximate solution for function φ . Deflection w then can be easily calculated with, for example, numerical integration [27,28], with respect to Eq. (1),

$$w(r) = - \int_0^r \phi(\xi) d\xi + c, \tag{33}$$

where c denotes an integration constant, which can be calculated from boundary conditions.

B. Calculation of Deflection with Runge–Kutta Method

One can modify Eq. (2) as follows:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} &= \frac{Q(r)}{D(r)} - \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} \right] \frac{d\varphi}{dr} \\ &\quad - \left[\frac{\nu}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} - \frac{1}{r} \right] \frac{\varphi}{r}. \end{aligned} \tag{34}$$

Denoting Eq. (34) as $\varphi'' = f(r, \varphi, \varphi')$, one can find an approximate solution for the function φ with the Runge–Kutta Method of the fourth order [28]. Recursion formulas then hold

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \varphi_n + h\varphi'_n + \frac{h}{6}(k_1 + k_2 + k_3), \\ \varphi'_{n+1} &= \varphi'_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 &= hf(r_n, \varphi_n, \varphi'_n), \quad k_2 = hf\left(r_n + \frac{h}{2}, \varphi_n + \frac{h}{2}\varphi'_n, \varphi'_n + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf\left(r_n + \frac{h}{2}, \varphi_n + \frac{h}{2}\varphi'_n + \frac{h}{4}k_1, \varphi'_n + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= hf\left(r_n + h, \varphi_n + h\varphi'_n + \frac{h}{2}k_2, \varphi'_n + k_3\right), \end{aligned} \tag{35}$$

where h is a calculation step. The resulting solution has to satisfy the boundary conditions of Eq. (9). It is obvious that one should make an initial guess of starting values in a way to represent the form of expected shape as close a possible.

To find a solution for the internally supported lens at the radius r_s , the aforementioned Eq. (35) can be used without any changes assuming Eqs. (1)–(5) and (7)–(8) for interval $[0, r_s]$, and Eqs. (1)–(5) and the second formula of Eq. (11) for interval $[r_s, a]$ with the appropriate solution of continuity in the point r_s .

C. Calculation of Deflection with Finite Differences Method

The finite differences method [27] is based on expressing derivations of a given function in a given point as a linear combination of function values in surrounding points. In our case, derivations of the function φ can be expressed as

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dr} &\approx \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h}, \\ \frac{d^2\varphi}{dr^2} &\approx \frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{h^2}, \end{aligned} \tag{36}$$

where φ_i is the value of the function to be found in given point r_i ($i = 0, \dots, N$, therefore interval $[0, a]$ is divided into $N + 1$ points), $\varphi_{i\pm 1}$ is the function value in the point $r_{i\pm 1}$ (see Fig. 3), and $h = r_i - r_{i-1} = r_{i+1} - r_i$ is the distance between calculation points.

Substituting Eq. (36) in Eq. (2) one gets the governing equation for a solution of the aforementioned problem with the use of the finite differences method; it holds

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{h^2} + A(r_i) \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h} \\ + B(r_i)\varphi_i = C(r_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \end{aligned} \tag{37}$$

where

$$\begin{aligned} A(r) &= \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} \right], \\ B(r) &= \frac{1}{r} \left[\frac{\nu}{D(r)} \frac{dD(r)}{dr} - \frac{1}{r} \right], \\ C(r) &= \left[\frac{Q(r)}{D(r)} \right] \end{aligned} \tag{38}$$

could be calculated with Eqs. (5)–(7).

Considering an assumption of a symmetric problem the boundary conditions of Eq. (9) can be extended with

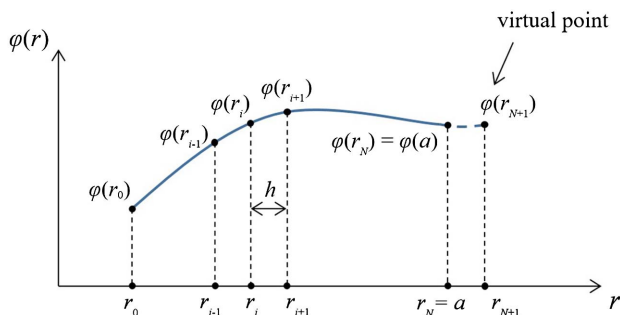


Fig. 3. Method of finite differences.

$$\varphi(r)|_{r=0} = \varphi_0 = 0. \tag{39}$$

Therefore, the value of function $\varphi(r)$ in point $r = 0$ is known and does not have to be assumed as an unknown to be calculated [note $i \neq 0$ in Eq. (37)]. Using Eq. (1) the moment the boundary condition of Eq. (9) has the following form:

$$M(r)|_{r=a} = D(r_N) \left[\frac{\varphi_{N+1} - \varphi_{N-1}}{2h} + \frac{\nu}{r} \varphi_N \right] = 0. \tag{40}$$

Besides the value of φ_{N+1} is not an unknown value in the considered interval, this value states in the last formula, where $i = N$, and therefore it is necessary to calculate it from the boundary condition (40) as

$$\varphi_{N+1} = -\frac{2h\nu}{r_N} \varphi_N + \varphi_{N-1}, \tag{41}$$

and, consequently, it has to be substituted into the last formula.

For an illustration let one formulate the system of Eq. (37) using matrix notation. The values of function φ in discrete points of the interval $(0, a]$ are calculated from the system of equations

$$\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{C}, \tag{42}$$

where $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ is a tridiagonal matrix of the system whose elements δ_{ij} ($i = 1, 2, \dots, N$) on the main diagonal can be expressed as follows:

$$\begin{aligned} \delta_{ij}|_{i < N} &= -\frac{2}{h^2} + B(r_i), \\ \delta_{ij}|_{i=N} &= -\frac{2}{h^2} - \frac{2\nu}{r_N h} - A(r_N) \frac{\nu}{r_N} + B(r_N). \end{aligned} \tag{43}$$

The upper collateral diagonal elements α_i ($i = 1, 2, \dots, N - 1$) are then given with formula

$$\alpha_i = \frac{1}{h^2} + \frac{A(r_i)}{2h}, \tag{44}$$

and the lower collateral diagonal elements β_i ($i = 2, \dots, N$) as

$$\beta_i|_{i < N} = \frac{1}{h^2} - \frac{A(r_i)}{2h}, \quad \beta_i|_{i=N} = \frac{2}{h^2}. \tag{45}$$

Next, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ in Eq. (42) denotes a column matrix of values φ_i ($i = 1, \dots, N$) to be found, and $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ is a matrix with elements $C(r_i)$ ($i = 1, \dots, N$).

Similarly to the previous approaches, the aforementioned formulas present an approximate solution for function φ . Deflection w then can be easily calculated with, for example, numerical integration [27,28], with respect to Eq. (1).

4. EXAMPLE

In this section, first, all the aforementioned methods are compared within each other and to the finite elements method used in a commercially available software ANSYS [29], too. Afterward, a dependency of the deflection on material parameters of the lens is presented in the second subsection.

A. Comparison of Presented Numerical Solutions

To compare the presented numerical approaches, suppose a lens with the following parameters: $R_1 = 600$ mm, $R_2 = -600$ mm, $d_0 = 5$ mm, $a = 50$ mm, $E = 82$ GPa, $\rho = 2510$ kg/m³, $\nu = 0.206$. Results of the approximate solution

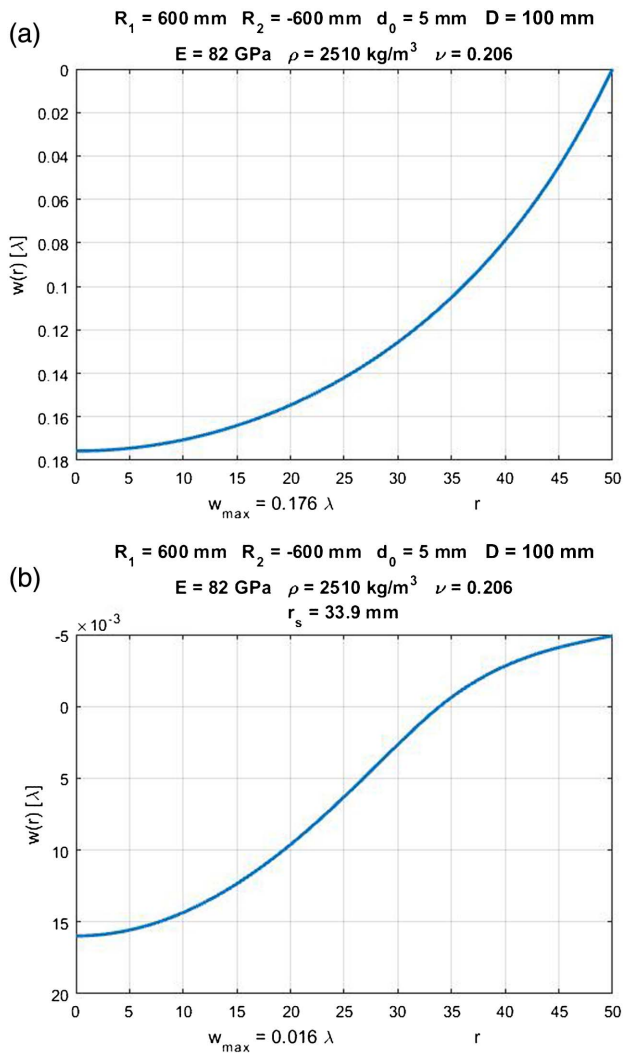


Fig. 4. Example of calculation of lens deflection.

presented in the previous part of the paper are shown in Fig. 4. Figure 4(a) shows the result for a lens supported at the edge, and Fig. 4(b) shows the result for a support in radial distance $r_s = 33.9$ mm. Please note that the scale of the second figure is in 10^{-3} . It demonstrates a large difference between the deflection for edge and inner support. The figure shows only one result for all presented methods, because differences between chosen numerical approaches are negligible. Besides the presented method the finite elements method was used with the software ANSYS giving the same results. Note that the interval h of the division in the radial direction was chosen, $h = 0.05$ mm.

B. Dependency of Deflections on a Material of a Lens

Let one study the effect of a material of a lens on deflections. First, suppose a positive (biconvex) lens with the following geometrical parameters: $R_1 = 300$ mm, $R_2 = -300$ mm, $d_0 = 10$ mm, $a = 50$ mm. Material parameters chosen for a calculation are shown in Table 1. In the table, E denotes the Young modulus, ρ is the volume density, and ν is the

Table 1. Material Parameters of a Lens

Glass Type	E [GPa]	ρ [g/cm ³]	ν
SF57	54	5.51	0.248
N-BK7	82	2.51	0.206
N-LAF21	124	4.28	0.295

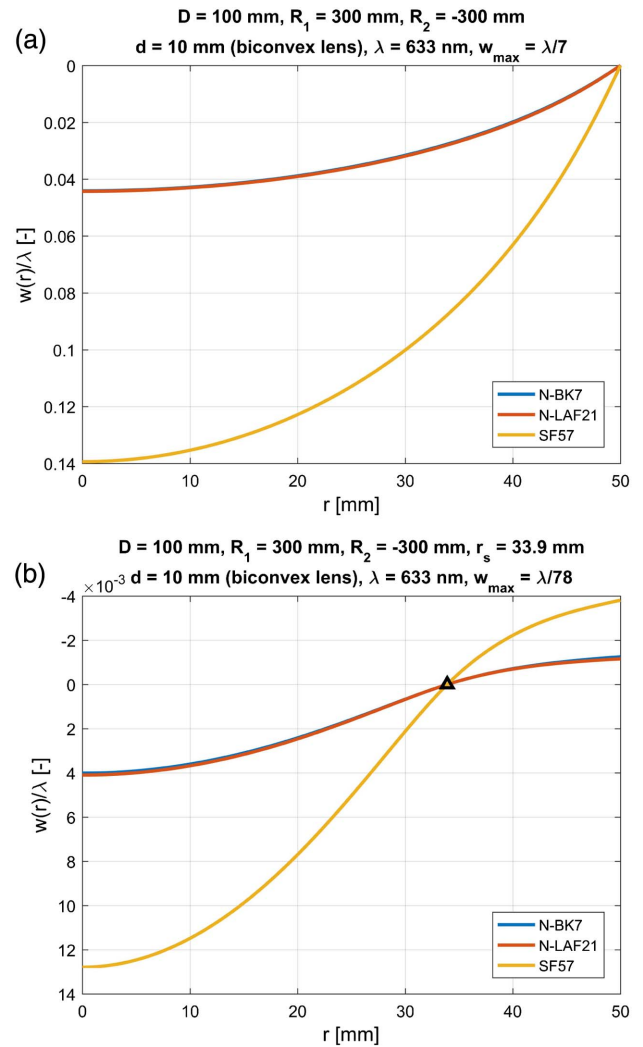


Fig. 5. (a) Comparison of deflections of a positive (biconvex) lens for different materials and support at the edge (related to the wavelength $\lambda = 633$ nm), and (b) comparison of deflections of a positive (biconvex) inner-supported lens for different materials (related to the wavelength $\lambda = 633$ nm). Note that the curves for materials N-BK7 and N-LAF21 coincide in this example despite the fact that materials are different.

Poisson ratio. The deflections of the lens for support at the edge are shown in Fig. 5(a), and results for the inner support at the radius $r_s = 33.9$ mm = $0.678a$ are shown in Fig. 5(b). Note that the curves for materials N-BK7 and N-LAF21 coincide in this example despite the fact that materials are different. As is obvious, the maximal deflection for the edge support is $w_{max} = \lambda/7$ (where $\lambda = 633$ nm) for the material SF57, and the maximal deflection for the inner support is $w_{max} = \lambda/78$.

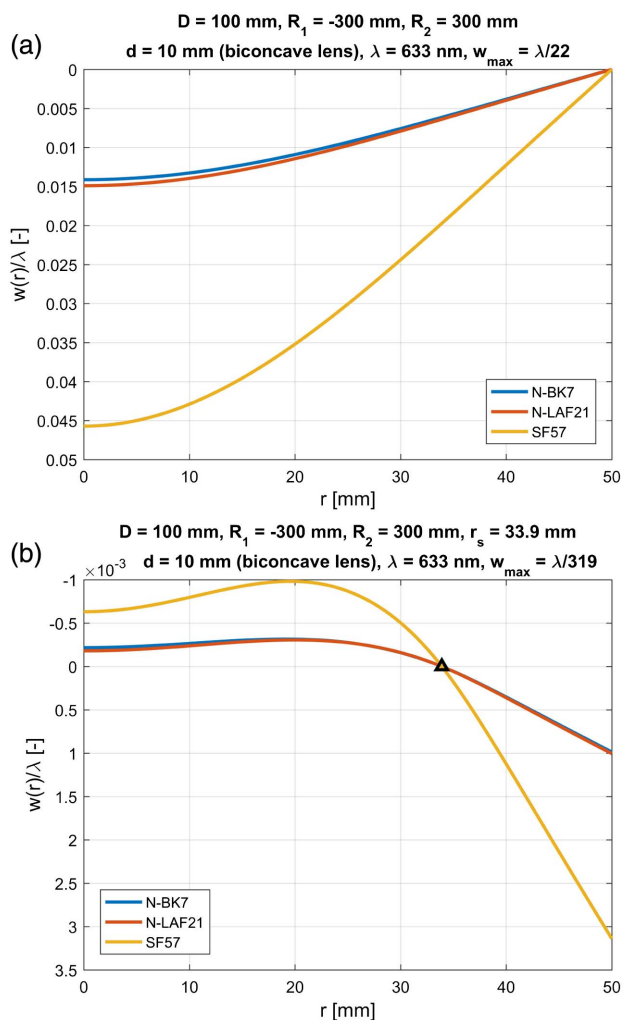


Fig. 6. (a) Comparison of deflections of a negative (biconcave) lens for different materials and support at the edge (related to the wavelength $\lambda = 633$ nm), and (b) comparison of deflections of a negative (biconcave) inner-supported lens for different materials (related to the wavelength $\lambda = 633$ nm).

One can see that the self-deflection could result in non-negligible errors in combination with inappropriate support of the lens under test.

Second, a similar analysis is done for a negative (biconcave) lens with the following geometrical parameters: $R_1 = -300$ mm, $R_2 = 300$ mm, $d_0 = 10$ mm, $a = 50$ mm. The lens is again made by three different materials, which are the same as in the previous example (see Table 1). Results for the edge support of the lens are shown in Fig. 6(a) and for the inner support in Fig. 6(b).

As is obvious from the presented results of numerical examples, the self-deflection caused by the lens's weight cannot be neglected for the case of measurements with high accuracy, e.g., interferometry. Especially, with the use of inappropriate material the deflection can enormously affect measured results.

5. CONCLUSION

This paper presented an analysis of a numerical solution of a differential equation characterizing a deflection of a spherical

lens caused by its own weight, based on a chosen support and lens material. Several calculation methods were shown and formulas for an easy implementation were presented.

Deflection of lenses depends on geometrical and material parameters of the tested component. One of the examples presented in this paper shows a case study for the positive lens with diameter of 100 mm, edge thickness of 10 mm, and radii of curvatures equal to 300 mm. The deflection for this case, considering a material SF57, was approximately $\lambda/7$ for the edge support. Such a value is easily measurable during interferometrical testing. Therefore, if one does not include such a phenomenon into the correction of measurement results, it can lead to a wrong evaluation of optical quality of the final product. In the presented case, if a production tolerance would be $\lambda/10$, for example, the self-deflection effect could lead to an elimination of a component that should remain in the production process.

The reader can use the derived formulas and calculation procedures presented in this paper for solving specific problems in practice that can vary for different geometries of tested components. Especially during measurements with high accuracy, e.g., interferometrical testing of large lenses, it is very important to consider self-deflection of tested parts.

Generally, there are other effects that affect the testing procedure, e.g., variation in temperature, which can affect atmospheric condition as well as elongation of component itself. Usually, conditions for testing of a high accuracy are of such quality that these phenomena are eliminated (temperature stabilization, etc.). Nevertheless, the self-deflection cannot be practically removed; therefore, one has to use inner support for the tested component or numerically correct final results.

Funding. Czech Technical University in Prague (CTU). (SGS17/004/OHK1/1T/11).

REFERENCES

1. D. Malacara, *Optical Shop Testing*, Wiley Series in Pure and Applied Optics (Wiley, 2007).
2. B. Dörband and H. Gross, *Handbook of Optical Systems, Metrology of Optical Components and Systems*, Gross/Optical Systems V1-V6 special prices until 6 V ST published (Wiley, 2012).
3. R. Leach, *Optical Measurement of Surface Topography* (Springer Berlin Heidelberg, 2011).
4. T. Yoshizawa, *Handbook of Optical Metrology: Principles and Applications*, 2nd ed. (CRC Press, 2015).
5. A. Mikš, *Applied Optics* (CTU Publishing, 2009).
6. P. Hariharan, *Optical Interferometry*, Electronics & Electrical (Academic, 2003).
7. <http://www.zygo.com>.
8. <http://www.triopic.com>.
9. <http://www.4dtechnology.com>.
10. <http://www.optotech.de>.
11. <http://www.schneider-om.com>.
12. A. Mikš, "Interferometrical methods for evaluation spherical surfaces in optics," *Fine Mech. Opt.* **46**, 29–35 (2001).
13. A. Nadai, "Die verbiegungen in einzelnen punkten unterstützter kreisfiirmiger platten," *Physik* **23**, 366–376 (1922).
14. A. Nadai, "Theorie der plattenbiegung und ihre experimentelle bestigung," *Z. Angew. Math. Mech.* **2**, 381–398 (1922).
15. W. B. Emerson, "Determination of planeness and bending of optical flats," *J. Res. Natl. Bur. Stand.* **49**, 241–247 (1952).
16. L. A. Selke, "Theoretical elastic deflections of a thick horizontal circular mirror on a ring support," *Appl. Opt.* **9**, 149–153 (1970).

17. J. E. Nelson, J. Lubliner, and T. S. Mast, "Telescope mirror supports: plate deflections on point supports," *Proc. SPIE* **322**, 212–228 (1982).
18. L. Nong and F. Bao-lian, "The symmetrical bending of an elastic circular plate supported at K internal points," *Appl. Math. Mech.* **12**, 1091–1096 (1991).
19. L. Arnold, "Uniform-load and actuator influence functions of a thin or thick annular mirror: application to active mirror support optimization," *Appl. Opt.* **35**, 1095–1106 (1996).
20. A. Mikš and J. Novák, "Influence of the gravity induced deflection of a reference flat of the Fizeau interferometer on the measurement accuracy of testing flat surfaces in optics," *Fine Mech. Opt.* **59**, 228–232 (2014).
21. S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, Engineering Societies Monographs (McGraw-Hill, 1959).
22. A. Volmir, *Flexible Plates and Shells* (Defense Technical Information Center, 1967).
23. E. Ventsel and T. Krauthammer, *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications* (CRC Press, 2001).
24. R. Szilard, *Theories and Applications of Plate Analysis: Classical Numerical and Engineering Methods* (Wiley, 2004).
25. L. E. Scales, *Introduction to Non-Linear Optimization*, Macmillan Computer Science Series (Springer, 1985).
26. M. Aoki, *Introduction to Optimization Techniques: Fundamentals and Applications of Nonlinear Programming*, Macmillan Series in Applied Computer Science (Macmillan, 1971).
27. J. van Kan, A. Segal, and F. Vermolen, *Numerical Methods in Scientific Computing* (Delft Academic, 2014).
28. G. Korn and T. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review*, Dover Civil and Mechanical Engineering (Dover, 2013).
29. <http://www.ansys.com>.

Příloha B – Seznam ostatních publikací autora

- B.1. BRZOBOHATÝ, J., F. ŠMEJKAL, P. POKORNÝ. “Fundamental characterization of a priori measurement accuracy of terrestrial laser scanning”, Applied Optics. 2020, 59(33), 10243-10252. ISSN 1559-128X.
- B.2. POKORNÝ, P., F. ŠMEJKAL. Zařízení pro zjišťování průhybu a sklonu stavebních konstrukcí, Czech Republic. Utility Model CZ 34505. 2020-11-03.
- B.3. ŠMEJKAL, F., P. POKORNÝ. Jednoduchý optický senzor posunů a rotací Jemná mechanika a optika. 2020, 65(9), 231-234. ISSN 0447-6441.
- B.4. ŠMEJKAL, F., A. MIKŠ. Vliv deformace membrány proměnné tloušťky na zobrazovací vlastnosti kapalinové čočky. Jemná mechanika a optika. 2020, 65(7-8), 210-216. ISSN 0447-6441.
- B.5. POKORNÝ, P., F. ŠMEJKAL. Numerické řešení prostorového trasování paprsku v izotropním nehomogenním prostředí pro Cauchyho a Dirichletovu okrajovou podmínku metodou založenou na vektorové formulaci zákona lomu Jemná mechanika a optika. 2020, 65(5), 147-152. ISSN 0447-6441.
- B.6. POKORNÝ, P., F. ŠMEJKAL, A. MIKŠ. Aplikace maticových diodových polí a dataprojektorů v mikroskopii. Jemná mechanika a optika. 2019, 64(9), 236-240. ISSN 0447-6441.
- B.7. POKORNÝ, P., F. ŠMEJKAL, P. NOVÁK, J. NOVÁK, A. MIKŠ. Výpočet chodu obecného paprsku rotačně symetrickými asférickými plochami In: Sborník příspěvků multioborové konference LASER59. Brno: Ústav přístrojové techniky AV ČR, v. v. i., 2019. p. 31-32. ISBN 978-80-87441-26-8.
- B.8. ŠMEJKAL, F., R. PUKL, J. ČERVENKA, Fully stochastic nonlinear analysis of slender reinforced concrete column, In: Proceedings of extended abstracts Modelling in Mechanics 17th International Conference 23rd and 24th May 2019. Ostrava: VŠB - Technical University of Ostrava, 2019. p. 31. ISBN 9788024842967.

- B.9. MIKŠ, A., J. NOVÁK, P. NOVÁK, P. POKORNÝ, F. ŠMEJKAL, Determination of paraxial focal length of lens using Strehl definition measurement In: Optical Measurement Systems for Industrial Inspection XI. Baltimore: SPIE, 2019. vol. 11056. ISSN 0277-786X. ISBN 978-1-5106-2792-5.
- B.10. POKORNÝ, P., F. ŠMEJKAL, P. NOVÁK, J. NOVÁK, A. MIKŠ, Automated fine-focusing in digital microscopy. In: Digital Optical Technologies 2019. Baltimore: SPIE, 2019. vol. 11062. ISSN 0277-786X. ISBN 9781510628038.
- B.11. JIRÁSEK, M., F. ŠMEJKAL, M. HORÁK, Modeling of Elastic Membranes in Liquid Lenses. In: ISCAMI 2019, Book of Abstracts. Prague: Czech Technical University, Faculty of Civil Engineering, 2019.
- B.12. ŠMEJKAL, F. a A. MIKŠ. Vliv prohnutí referenční plochy plan-hyperboloidické čočky Fizeauova interferometru na přesnost měření rovinných ploch. Jemná mechanika a optika. 2019, 64(2), 51-54. ISSN 0447-6441.
- B.13. ŠMEJKAL, F., M. ŠMEJKAL a A. MIKŠ. Určení materiálových konstant tenké desky. Jemná mechanika a optika. 2019, 64(3), 85-89. ISSN 0447-6441.
- B.14. MIKŠ, A. a F. ŠMEJKAL. Závislost tloušťky membrány na jejím poloměru zakřivení a vliv na kvalitu zobrazení kapalinové čočky s proměnnou ohniskovou vzdáleností. Jemná mechanika a optika. 2018, 63(5), 146-151. ISSN 0447-6441.
- B.15. MIKŠ, A. a F. ŠMEJKAL. Dependence of the imaging properties of the liquid lens with variable focal length on membrane thickness. Applied Optics. 2018, 57(22), 6439-6445. ISSN 1559-128X. DOI 10.1364/AO.57.006439.
- B.16. NOVÁK, J. et al. Analysis of method of determination of refractive index and Abbe number of lens. In: SCHRÖDER, S. a R. GEYL, eds. Optical Fabrication, Testing, and Metrology VI. Optical Fabrication, Testing, and Metrology VI (Optical systems design 2018), Frankfurt am Main, 2018-05-15/2018-05-17. Bellingham (stát Washington): SPIE, 2018. Proceedings of SPIE. sv. 10692. ISSN 0277-786X. ISBN 978-1-5106-1921-0. DOI 10.1117/12.2313295.

- B.17. MIKŠ, A. et al. Analysis of Seidel aberration coefficients of thick lens with arbitrary focal length. In: MAZURAY, L., R. WARTMANN a A.P. WOOD, eds. Optical Design and Engineering VII. Optical Design and Engineering VII (Optical systems design 2018), Frankfurt am Main, 2018-05-14/2018-05-17. Bellingham (stát Washington): SPIE, 2018. Proceedings of SPIE. sv. 10690. ISSN 0277-786X. ISBN 978-1-5106-1917-3. DOI 10.1117/12.2313321.
- B.18. POKORNÝ, P., F. ŠMEJKAL a A. MIKŠ. Deformation of a spherical lens caused by its own weight. Applied Optics. 2017, 56(36), 9984-9991. ISSN 1559-128X. DOI 10.1364/AO.56.009984.
- B.19. POKORNÝ, P. et al. Deformation of a prestressed liquid lens membrane. Applied Optics. 2017, 56(34), 9368-9376. ISSN 1559-128X. DOI 10.1364/AO.56.009368.
- B.20. POKORNÝ, P. et al. Odstranění 2π nejednoznačnosti rekonstrukce fáze řešením rovnice pro transport intenzity elektromagnetického pole. In: RŮŽIČKA, B., ed. Sborník multioborové konference LASER57. Multioborová konference LASER57, Třešť, 2017-11-08/2017-11-10. Brno: Ústav přístrojové techniky AV ČR, v. v. i., 2017. s. 52-53. ISBN 978-80-87441-21-3.
- B.21. POKORNÝ, P. et al. Calculation of nonlinearly deformed membrane shape of liquid lens caused by uniform pressure. Applied Optics. 2017, 56(21), 5939-5947. ISSN 1559-128X. DOI 10.1364/AO.56.005939.
- B.22. POKORNÝ, P. et al. Modelling of influence of spherical aberration coefficients on depth of focus of optical systems. In: Proceedings of SPIE: Modeling Aspects in Optical Metrology VI. SPIE Optical Metrology 2017, Mnichov, 2017-06-25/2017-06-29. Baltimore: SPIE, 2017. sv. 10330. ISSN 0277-786X. ISBN 9781510611054. DOI 10.1117/12.2270082.
- B.23. POKORNÝ, P. et al. Numerical solution of deformation of circular membrane of liquid lens under uniform hydrostatic pressure. In: Proceedings of SPIE: Modeling Aspects in Optical Metrology VI. SPIE Optical Metrology 2017, Mnichov, 2017-06-25/2017-06-29. Baltimore: SPIE, 2017. s. 1033016-1-1033016-8. sv. 10330. ISSN 0277-786X. ISBN 9781510611054. DOI 10.1117/12.2269505.
- B.24. POKORNÝ, P. et al. Srovnání metod výpočtu tvaru membrány kapalinové čočky zatížené rovnoměrným tlakem. Jemná mechanika a optika. 2017, 62(5), 148-154. ISSN 0447-6441.
- B.25. ŠMEJKAL, F. a A. MIKŠ. Vliv vlastního průhybu čočky na přesnost měření tvaru jejích ploch. Jemná mechanika a optika. 2016, 61(10), 258-261. ISSN 0447-6441.

- B.26. POKORNÝ, P. et al. Vliv vlastního průhybu testovaných sférických optických prvků na přesnost interferometrických měření. In: ŘŮŽIČKA, B., ed. Sborník příspěvků multioborové konference LASER56. Multioborová konference LASER56, Třešť, 2016-10-19/2016-10-21. Brno: Ústav přístrojové techniky AV ČR, v.v.i., 2016. s. 51-52. ISBN 978-80-87441-18-3.
- B.27. ŠMEJKAL, F. a A. MIKŠ. Měření deformací zobrazovací metodou. Jemná mechanika a optika. 2015, 60(10), 289-293. ISSN 0447-6441.
- B.28. ŠMEJKAL, F. a A. MIKŠ. Bezkontaktní optická metoda měření průhybu a deformací mostních konstrukcí. Jemná mechanika a optika. 2015, 60(4), 136-139. ISSN 0447-6441.
- B.29. NOVÁK, J., P. NOVÁK a F. ŠMEJKAL. Proudově řízený stabilizovaný DC zdroj s plynule regulovatelným výstupním proudem. [Funkční vzorek] 2012.

Příloha C – Citace a významná ocenění autora

C.1. Citace

Celkem 18 citací u 5 publikací, na kterých se autor podílel:

- **JIRÁSEK, M., F. ŠMEJKAL, M. HORÁK. Pressurized axisymmetric membrane deforming into a prescribed shape. International Journal of Solids and Structures. 2020, 198 1-16. ISSN 0020-7683.**

Citace v:

LIU, T., L. CHEN, X. ZHANG, X. ZHANG, X. QIU. Stress wave response in a two-dimensional membrane subjected to hypervelocity impact of a micro-flyer INTERNATIONAL JOURNAL OF IMPACT ENGINEERING, vol. 167, 2022. ISSN 0734-743X.

SENEL ESAT C., I. DERMAN, S. SATAK, C. ERTEN AHMET, O. FERHANOGLU. A 3D-printed tunable fluidic lens with collagen-enriched membrane. MICROSYSTEM TECHNOLOGIES-MICRO-AND NANOSYSTEMS-INFORMATION STORAGE AND PROCESSING SYSTEMS, vol. 27, no. 5, pp. 1993 - 2000, 2021. ISSN 0946-7076.

MIKS, A., P. POKORNY. Double curvature membrane lens. APPLIED OPTICS, vol. 59, no. 32, pp. 9924 - 9930, 2020. ISSN 1559-128X.

- **MIKŠ, A., F. ŠMEJKAL. Dependence of the imaging properties of the liquid lens with variable focal length on membrane thickness. Applied Optics. 2018, 57(22), 6439-6445. ISSN 1559-128X.**

Citace v:

XU, J., Y. ZHAO, C. LIU, Q. WANG. Triple-layer spherical electrowetting liquid lens with large-aperture and high zoom ratio, OPTICS AND LASERS IN ENGINEERING, vol. 160, 2023. ISSN 0143-8166.

WANG, DI, J. XU, R. YUAN, Y. ZHAO, C. LIU, Q. WANG. High stability liquid lens with optical path modulation function, OPTICS EXPRESS, vol. 29, no. 17, pp. 27104 - 27117, 2021. ISSN 1094-4087.

MAJUMDER, A., C. GHOSH, U. MOHIT KARKHANIS, A. BANERJEE, R. LIKHITE, H. CARLOS MASTRANGELO, T. GHOSH. Creep deformation in elastomeric membranes of liquid-filled tunable-focus lenses. APPLIED OPTICS, vol. 58, no. 23, pp. 6446 - 6454, 2019. ISSN 1559-128X.

LIU, C., DI WANG, Q. WANG. Variable aperture with graded attenuation combined with adjustable focal length lens. OPTICS EXPRESS, vol. 27, no. 10, pp. 14075 - 14084, 2019. ISSN 1094-4087.

- **POKORNÝ, P., F. ŠMEJKAL, A. MIKŠ. Deformation of a spherical lens caused by its own weight. Applied Optics. 2017, 56(36), 9984-9991. ISSN 1559-128X.**

Citace v:

WANG, Y., L. CHEN, C. HU, J. CHEN, Z. ZHANG, D. ZHENG, T. WULAN. Iterative deformation calibration of a transmission flat via the ring-point support on a 300-mm-perture vertical Fizeau interferometer. OPTICS EXPRESS, vol. 29, no. 3, pp. 2984 - 3000, 2021. ISSN 1094-4087.

GAN, L., HE ZHANG, B. LIU, J. WANG. Influence of high overload on the collimating lenses of laser ranging systems. DEFENCE TECHNOLOGY, vol. 16, no. 2, pp. 354 - 361, 2020. ISSN 2214-9147.

- **POKORNÝ, P., F. ŠMEJKAL, P. KULMON, P. NOVÁK, J. NOVÁK, A. MIKŠ, M. HORÁK, M. JIRÁSEK. Deformation of a prestressed liquid lens membrane Applied Optics. 2017, 56(34), 9368-9376. ISSN 1559-128X.**

Citace v:

HARTMANN, F., L. PENKNER, D. DANNINGER, N. ARNOLD, M. KALTENBRUNNER. Soft Tunable Lenses Based on Zipping Electroactive Polymer Actuators. ADVANCED SCIENCE, 2020.

BEEEX, L. A. A. Fusing the Seth-Hill strain tensors to fit compressible elastic material responses in the nonlinear regime. INTERNATIONAL JOURNAL OF MECHANICAL SCIENCES, vol. 163, 2019. ISSN 0020-7403.

GU, H., H. HONG, J. FAN. Research status and development of liquid lens. Journal of Applied Optics, vol. 40, no. 6, pp. 1126 - 1138, 2019. ISSN 10022082.

ATTOTA, R. Through-focus or volumetric type of optical imaging methods: a review. JOURNAL OF BIOMEDICAL OPTICS, vol. 23, no. 7, 2018. ISSN 1083-3668.

- **POKORNÝ, P., F. ŠMEJKAL, P. KULMON, P. NOVÁK, J. NOVÁK, A. MIKŠ, M. HORÁK, M. JIRÁSEK.** Calculation of nonlinearly deformed membrane shape of liquid lens caused by uniform pressure. *Applied Optics*. 2017, 56(21), 5939-5947. ISSN 1559-128X.

GU, H., Z. GAN, H. HONG, K. HE. Deformation of the PDMS Membrane for a Liquid Lens Under Hydraulic Pressure. *CURRENT OPTICS AND PHOTONICS*, vol. 5, no. 4, pp. 391 - 401, 2021. ISSN 2508-7266.

JIA, W., S. LI. Liquid progressive multifocal lenses based on asymmetrical freeform surface structure using non-uniform thickness membranes. *OPTICAL AND QUANTUM ELECTRONICS*, vol. 52, no. 3, 2020. ISSN 0306-8919.

HUANG XIANG, X., X. SI-YING LIN, X. DAN-DAN GU, X. ZHEN-XIANG BU, X. WEI-JIN YI, X. PEI-QIN XIE, X. LING-YUN WANG. Review on progress of variable-focus liquid lens. *CHINESE OPTICS*, vol. 12, no. 6, pp. 1179 - 1194, 2019. ISSN 2095-1531.

JIA, W., B. ZHANG, S. LI. Progressive Multifocal Liquid Lenses Based on Asymmetric Freeform Surface Structure of Nonuniform Thickness Elastic Membranes with Different Constraints. *INTERNATIONAL JOURNAL OF OPTICS*, vol. 2019, 2019. ISSN 1687-9384.

MAJUMDER, A., C. GHOSH, U. MOHIT KARKHANIS, A. BANERJEE, R. LIKHITE, H. CARLOS MASTRANGELO, T. GHOSH. Creep deformation in elastomeric membranes of liquid-filled tunable-focus lenses. *APPLIED OPTICS*, vol. 58, no. 23, pp. 6446 - 6454, 2019. ISSN 1559-128X.

C.2. Významná ocenění autora

- Cena ministra školství, mládeže a tělovýchovy pro vynikající studenty a absolventy studia ve studijním programu a za mimořádné činy studentů

listopad 2017