FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ ČVUT V PRAZE

Zadání bakalářské práce

Název:	Stability koalic a změna agentů
Student:	Suzan Catay
Vedoucí:	doc. RNDr. Dušan Knop, Ph.D.
Studijní program:	Informatika
Obor / specializace:	Teoretická informatika
Katedra:	Katedra teoretické informatiky
Platnost zadání:	do konce letního semestru 2023/2024

Pokyny pro vypracování

Cílem je pochopit a shrnout používané koncepty stability řešení a agentských profilů v různých verzích Hedonických her. Zaměřte se na konkrétní použítí v aplikacích pro malé skupiny agentů s případnými dalšími strukturálními omezeními jejich profilů. Soustřeďte se na prostředí, kde lze očekávat změnu v množině agentů (někteří agenti organizaci opustí a noví agenti přijdou) a je třeba přetvořit staré řešení do nového. Definujte pro tyto účely smysluplnou míru optimálnosti nového řešení. Prostudujte algoritmickou složitost výsledného vámi definovaného výpočetního problému.

Elektronicky schválil/a doc. Ing. Jan Janoušek, Ph.D. dne 7. února 2023 v Praze.

ČVUT

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

F8

Fakulta informačních technologií
Katedra teoretické informatiky

Bakalářská práce

Stability koalic a změna agentů

Suzan Catay

11. května 2023
Vedoucí práce: doc. RNDr. Dušan Knop, Ph.D.

Poděkování / Prohlášení

Děkuji vedoucímu této práce, panu doc. RNDr. Dušanu Knopovi, Ph.D., za cenné rady, povzbuzování, vstřícnost a ochotu. Z konzultací jsem vždy odcházela namotivovaná a plná nápadů k další práci. Také děkuji rodině a kamarádům za podporu.

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracovala samostatně a že jsem uvedla veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona, ve znění pozdějších předpisů, zejména skutečnost, že České vysoké učení technické v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 citovaného zákona.

V Praze dne 11. května 2023

....

Abstrakt / Abstract

Práce se věnuje Hedonickým hrám a přináší přehled používaných konceptů stability a omezení preferenčních profilů. Dále se zaměřuje na upravenou verzi Hedonických her, při které se z existující struktury koalic tvoří nová, protože došlo ke změně množiny agentů odchodem části původních a příchodem stejného počtu nových. Omezuje se na doplnění nových agentů na místa, která část původních opustila, a to v rámci anonymních Hedonických her. Pro tento případ byl vytvořen polynomiální algoritmus pro nalezení striktně core stabilní struktury koalic, navržen pomalý algoritmus pro core stabilní strukturu koalic a pro ni bylo také popsáno několik způsobů převodu na toky v sítích.

Klíčová slova: Hedonické hry, core stabilita, anonymní preference, noví agenti, výpočetní složitost, toky v sítích

In this work, we study Hedonic games and provide an overview of stability concepts and restrictions of preference profiles. Then, we focus on a version in which the set of agents has been changed by some of the former agents leaving and the same amount of new ones coming, and we are expected to find an updated coalition structure. We restrict the problem to filling the new agents to places that had been emptied by the leaving former agents, and to the subclass of anonymous Hedonic games. We describe a polynomial-time algorithm for finding a strictly core stable coalition structure, and for the case of core stable coalition structure, a slow algorithm for finding it and several methods of transforming the problem to flows in networks.

Keywords: Hedonic games, core stability, anonymous preferences, new agents, computational complexity, network flows

/ Obsah

1 Úvod **1**

2 Hedonické hry **2**
2.1 Základní pojmy 3
2.2 Koncepty stability 3
2.2.1 Deviace jednoho agenta . . . 3
2.2.2 Skupinové deviace 5
2.3 Vztahy mezi koncepty stability . 8
2.4 Výpočetní složitost 10
2.5 Preferenční profily 13
2.5.1 Problém Stabilních Spolubydlících 13
2.5.2 Striktní preference 14
2.5.3 Anonymní Hedonické hry . 14
2.5.4 $\mathscr{B}$-preference a $\mathscr{W}$--preference 15
2.5.5 Aditivně separabilní Hedonické hry 17
2.5.6 Další možnosti omezení preferenčních profilů 18

3 Nahrazování agentů **19**
3.1 Hedonické hry s fixními velikostmi koalic 20
3.2 Doplnění novými agenty 21
3.2.1 Anonymní Hedonické hry . 23

4 Core stabilní doplnění **28**
4.1 Hledání hrubou silou 28
4.2 Toky v sítích 29
4.2.1 Maximální tok 30
4.2.2 Tok s minimální cenou . . . 32
4.3 Převod problému na toky . . . 33
4.3.1 Více cen 34
4.3.2 Prázdné nebo nasycené hrany 35
4.3.3 Zakázání použití některých hran dohromady . 36
4.4 Speciální případy toků v sítích 36
4.5 Pokusy o dokázání NP-úplnosti 40

5 Závěr **42**

Literatura **43**

A Přílohy **49**

Kapitola 1
Úvod

Lidé jsou tvorové společenští a odjakživa se sdružují do skupin. Přitom přirozeně dáváme některým skupinám přednost před jinými, ať už kvůli snaze přežít díky silnějším jedincům oproti oslabeným a zraněným, nebo podle podobných hodnot, víry, politických názorů atd., či jednoduše podle toho, s kým si zrovna chceme popovídat. Je ale jasné, že nejpreferovanější skupiny různých lidí se mohou navzájem vylučovat – aby vyhrál, chce být i méně fyzicky zdatný žák v týmu se sportovně nadanými spolužáky, kteří ho ale ze stejného důvodu odmítnou.

Témata spojená s formováním skupin se týkají řady oborů, od psychologie přes politologii a ekonomii k teoretické informatice. Zkoumá se jak samotný proces, kterým se skupiny tvoří, tak jejich rovnováha. Formováním skupin v rámci daného kolektivu se zabývá část teorie her a existují různé modely.

V této práci se budeme zabývat Hedonickými hrami, ve kterých se skupiny, nazývané *koalice*, tvoří podle toho, jestli jsou členové spokojení ve své skupině a nebyli by raději v nějaké jiné. Preference určuje složení koalice, pro jednoduchost naše obliba ostatních členů. Na rozdíl od některých jiných modelů členům vůbec nezáleží na složení ostatních koalic.

Cílem této práce je shrnout základní koncepty vyskytující se v Hedonických hrách, definovat problém, kdy z existující množiny koalic část členů odejde a musíme je nahradit novými, přičemž se snažíme nezměnit koalice úplně, a prostudovat jeho algoritmickou složitost. V Kapitole 2 si proto podrobně představíme Hedonické hry, nejprve obecné, pak i některé podtřídy, a prozkoumáme výpočetní složitost s nimi spojených problémů. V Kapitole 3 poté zadefinujeme verzi Hedonických her pro upravení existujících koalic, když je někteří staří členové opustí a do kolektivu místo nich přijdou nováčci. Také si ukážeme polynomiální algoritmus pro nalezení takových upravených skupin, který je *striktně core stabilní*. Nakonec se v Kapitole 4 budeme věnovat *core stabilitě* a popíšeme algoritmus pro přímé nalezení core stabilního řešení a pár způsobů převodu problému na toky v sítích.

Kapitola 2
Hedonické hry

V této kapitole si představíme Hedonické hry. V následujících odstavcích si je přiblížíme na příkladech z běžného života. Poté si formálně zadefinujeme používané pojmy, uvedeme různé typy Hedonických her a konceptů stability.

Vraťme se na chvilku do školních lavic a představme si, že se jako žáci máme rozdělit do skupinek, ve kterých pak budeme vypracovávat zadaný úkol. Učitel se chce vyhnout konfliktům, proto by byl rád, kdyby se žáci v rámci jedné skupinky dobře snášeli. Situace ve třídě ale není jednoduchá. Gabriel se pohádal s Aničkou, takže spolu odmítají mluvit. Eliot a Eliáš jsou nerozdělitelná dvojčata a veškeré pokusy zařadit je do odlišných týmů skončily katastrofou. Bára, Cecílie, Dana a Františka by rády byly spolu, ale nevadí jim, když se ještě někdo přidá. Každý žák má nějaké preference, s kým by chtěl být a jaké skupinky by se mu nelíbily.

O několik let později žáci dospěli a někteří z nich se stali zaměstnanci úspěšné firmy. Ta zrovna dokončila stavbu nového komplexu kanceláří a rozhodla se, že by zaměstnanci mohli ovlivnit, s kým budou sdílet své pracoviště, protože pak jistě budou spokojenější, a tudíž i pracovitější. A tak všichni zodpovědně vyplnili dotazník, ze kterého se zjistilo, že pan Černý nedokáže vystát telefonáty paní Fialové, paní Šedivou ruší odkašlávání pana Zeleného a pan Modrý s paní Oranžovou soupeří o přízeň paní Žluté, se kterou by tedy byli nejradši sami, ale hlavně bez toho druhého.

Abychom utekli z každodenního světa povinností, přenesme se ještě krátce do volnočasových aktivit, konkrétně k sportovnímu vyžití. Několik týmů se rozhodlo uspořádat soutěž, ve které se nejdříve rozdělí do základních skupin, v nichž proběhnou zápasy každého s každým, a jejich vítězi pak budou hrát dále vylučovací formou (určí se dvojice a postoupí vítěz, dokud nezbyde jen jeden). Každý tým si může říct, s kým by rád v základní skupině začínal. Preference mohou být strategické, tedy postavit se nejdříve proti slabším týmům a tím si téměř zaručit postup, nebo mohou také zohledňovat kratší dojezdovou vzdálenost na společný zápas. Někdo může chtít být ve skupině s nejbližšími přáteli, aby tak měli zaručený zápas, jiní by naopak chtěli být v odlišných skupinách, aby měli šanci se přátelům postavit ve velkolepém finále.

Ve všech těchto příkladech vystupuje množina *agentů* (žáci, zaměstnanci, sportovní týmy), které chceme rozdělit do *koalic* (skupin) tak, aby každý agent patřil právě do jedné. Toto rozdělení určujeme na základě preferencí agentů, kteří nám řeknou, jaké koalice by se jim líbily. K tomu nám slouží *preferenční profily.* Tyto základní pojmy zadefinujeme v Sekci 2.1. Dále bude nutné upřesnit, kdy jsou naši agenti spokojení a v jejich koalici se jim líbí a kdy ne. S tím nám pomůžou *koncepty stability* definované v Sekci 2.2. Vztahy mezi některými koncepty stability si popíšeme v Sekci 2.3. V Sekci 2.4 se podíváme na výpočetní složitost problémů spojených s obecnými Hedonickými hrami. Nakonec si v Sekci 2.5 ukážeme několik možných omezení preferenčních profilů, které se používají v různých verzích Hedonických her.

V prostředí Hedonických her agenti berou v úvahu jen svou současnou koalici. Například žákyně Bára je spokojená, protože skončila s Cecílií, Danou a Františkou, což byla její první volba. Hedonická hra nedovoluje zohlednit fakt, že se Báře nelíbí, jak se Anička ocitla ve skupince s Eliotem, do kterého se obě dívky zahleděly.

2.1 Základní pojmy

Abychom mohli formálně zadefinovat Hedonické hry, potřebujeme se nejdříve seznámit s několika pojmy.

Zápis 2^X značí potenční množinu množiny X, tedy množinu všech podmnožin množiny X, tj. $2^X = \{Y \subseteq X\}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Pro definici relace se odkážeme na Matouška a Nešetřila [44].

Definice 2.1 Reflexivní, úplná a tranzitivní relace. *Relace R na množině X je:*

- reflexivní *právě tehdy, když $\forall x \in X$ platí xRx;*
- úplná *právě tehdy, když $\forall x, y \in X$ platí xRy nebo yRx;*
- tranzitivní *právě tehdy, když $\forall x, y, z \in X$ platí $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.*

Definice 2.2 Základní pojmy. *Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme $A = [n]$ jako množinu n* agentů. *Neprázdnou množinu $S \subseteq A$ nazveme* koalicí. Struktura koalic *π je rozklad množiny agentů A do disjunktních koalic, tj. množina $\pi = \{S_1, \ldots, S_p\}, p \in \mathbb{N}$, taková, že $\forall i, j \in [p], i \neq j$, platí $S_i \subseteq A$, $S_i \cap S_j = \emptyset$ a $\bigcup_{S \in \pi} S = A$. Koalici, do které agent $a \in A$ patří v rámci struktury koalic π, značíme $\pi(a)$. Množinu všech koalic, jejichž členem je agent a, značíme A_a, tj. $A_a = \{a\} \cup 2^{A \setminus \{a\}}$. Pro dvě různé koalice $S, T \in A_a$ používáme následující značení: $S \succ_a T$, pokud agent a* striktně preferuje *S před T, a $S \sim_a T$, pokud agent a je* lhostejný *mezi S a T.*

Definice 2.3 Hedonická hra. Hedonická hra *je uspořádaná dvojice $(A, \succsim)$, kde A je množina agentů a $\succsim$ je* preferenční profil *definující pro každého agenta $a \in A$ reflexivní, úplnou a tranzitivní relaci $\succsim_a$ na A_a.*

Agenti jsou hráči Hedonické hry. Jak bylo vidět v úvodu kapitoly, mohou je představovat lidé nebo týmy a dále třeba roboti. Koalice jsou například skupiny vytvořené žáky v rámci školních projektů a sdružením[1] těchto koalic vytvořených v rámci jedné třídy získáme strukturu koalic. V následujícím textu budeme o agentech pro jednoduchost mluvit v mužském rodě, třebaže jejich gender může být libovolný.

2.2 Koncepty stability

Pokud dostaneme nějakou strukturu koalic v Hedonické hře, zpravidla nás zajímá, jestli je stabilní. Neformálně řečeno chceme vědět, zda jsou agenti ve svých koalicích „spokojení“ a nechtějí se přesunout jinam. Možností, jak definovat stabilitu, je řada. V této sekci uvedeme některé z nich.

2.2.1 Deviace jednoho agenta

Nejprve si představíme koncepty, které se dívají na každého agenta jako na jednotlivce a zkoumají, zda se v rámci dané struktury koalic chce přesunout do jiné koalice, než ve které se nachází.

Definice 2.4 Deviace agenta. *Mějme Hedonickou hru $(A, \succsim)$ a strukturu koalic π.* Deviace agenta *$a \in A$ je jeho přesun z koalice $\pi(a)$ do nějaké jiné koalice $S \in \pi \cup \emptyset$, $a \notin S$. Agent a má* sklon k deviaci, *pokud tuto novou koalici preferuje, tj. $S \cup \{a\} \succsim_a \pi(a)$.*

[1] Sdružením zde nemyslíme sjednocení množin, nýbrž vytvoření nové množiny, která jednotlivé koalice obsahuje jako prvky.

Dovolujeme i přesun do prázdné koalice, čímž by agent vytvořil koalici novou, ve které by byl sám.

Velmi snadno pochopitelná je individuální racionalita. Každý agent si u ní položí otázku, zda je ve své koalici aspoň natolik spokojen, jako kdyby byl sám. Pokud by nějaký agent preferoval být sám, struktura koalic individuálně racionální není.

Definice 2.5 Individuální racionalita – IR. *Buď $(A, \succsim)$ Hedonická hra. Struktura koalic π je* individuálně racionální*, pokud pro každého agenta $a \in A$ platí $\pi(a) \succsim_a \{a\}$.*

Příklad 2.1. Mějme hru tří hráčů $A = \{1, 2, 3\}$, jejichž preference jsou:

1. agent $\succsim_1$: $\{1,2\} \sim_1 \{1\} \sim_1 \{1,2,3\} \sim_1 \{1,3\}$
2. agent $\succsim_2$: $\{1,2\} \succ_2 \{2\} \sim_2 \{1,2,3\} \succ_2 \{2,3\}$
3. agent $\succsim_3$: $\{3\} \succ_3 \{2,3\} \succ_3 \{1,2,3\} \sim_3 \{1,3\}$

Struktura koalic $\pi_1 = \{\{1,3\},\{2\}\}$ individuálně racionální není, protože agent 3 striktně preferuje být sám před koalicí $\{1,3\}$. Struktura koalic $\pi_2 = \{\{1,2\},\{3\}\}$ naopak podmínky individuální racionality splňuje.

Tento požadavek je často považován za základ, aby byla struktura koalic stabilní. Umožňuje pak alespoň částečně zkrátit zápis preferencí, a to tak, že koalice, před kterými agent striktně preferuje být sám, se vůbec neuvádí. V dalších příkladech budeme také některé koalice ze zápisu preferencí vynechávat, ale mohou to být i takové, které v příkladu nehrají významnou roli, třebaže by individuálně racionální byly.

Další často používaný koncept je Nash stabilita, při níž se žádný agent nechce v rámci struktury koalic přesunout ze své současné koalice do jiné koalice.

Definice 2.6 Nash stabilita – NS. *Buď $(A, \succsim)$ Hedonická hra. Struktura koalic π je* Nash stabilní*, pokud neexistuje agent $a \in A$ takový, že pro nějakou koalici $S \in \pi \cup \emptyset$, $a \notin S$, je $S \cup \{a\} \succ_a \pi(a)$.*

Příklad 2.2. Mějme $A = \{1, 2, 3, 4\}$ s následujícími preferencemi:

1. $\{1,3,4\} \succ_1 \{1,4\} \succ_1 \{1,2\} \succ_1 \{1\} \succ_1 \cdots$
2. $\{1,2\} \succ_2 \{2\} \succ_2 \cdots$
3. $\{3,4\} \succ_3 \{1,3,4\} \succ_3 \{3\} \succ_3 \cdots$
4. $\{3,4\} \sim_4 \{1,4\} \succ_4 \{1,3,4\} \succ_4 \{4\} \succ_4 \cdots$

Struktura koalic $\pi_1 = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$ není Nash stabilní, protože agent 1 striktně preferuje $\{1,3,4\}$ před $\{1,2\}$, takže se k agentům 3 a 4 chce přesunout. Oproti tomu struktura koalic $\pi_2 = \{\{1,3,4\},\{2\}\}$ Nash stabilní je. Agent 1 je ve své nejpreferovanější koalici, takže nemá důvod se přesouvat. Agent 2 by byl raději sám s agentem 1, ale agenti 3 a 4 mu překáží. Agenti 3 a 4 by si odchodem do jiné koalice nepomohli.

Smluvní Nash stabilita oproti „obyčejné“ Nash stabilitě zohledňuje i preference agentů v koalici, ze které se agent a chce přesunout, a to tak, že si nesmí pohoršit.

Definice 2.7 Smluvní Nash stabilita – CNS[2]. *Buď $(A, \succsim)$ Hedonická hra. Struktura koalic π je* smluvně Nash stabilní*, pokud neexistuje agent $a \in A$ takový, že pro nějakou koalici $S \in \pi \cup \emptyset$, $a \notin S$, je $S \cup \{a\} \succ_a \pi(a)$ a zároveň pro všechny ostatní agenty $b \in \pi(a)$, $b \neq a$, je $\pi(a) \setminus \{a\} \succsim_b \pi(a)$.*

Příklad 2.3. Struktura koalic π_1 z Příkladu 2.2 je smluvně Nash stabilní, protože jediný, kdo by se chtěl přesunout, je agent 1, ale agent 2 ho „nechce pustit“ ($\{1,2\} \succ_2 \{2\}$, tedy $\{2\} \not\succsim_2 \{1,2\}$).

Individuální stabilita se podobá smluvní Nash stabilitě, ale zohledňuje preference agentů v koalici, kam se agent a chce přesunout.

[2] Přeloženo z anglického contractual Nash stability.

Definice 2.8 Individuální stabilita – IS. *Buď $(A, \succsim)$ Hedonická hra. Struktura koalic π je* individuálně stabilní*, pokud neexistuje agent $a \in A$ takový, že pro nějakou koalici $S \in \pi \cup \emptyset$, $a \notin S$, je $S \cup \{a\} \succ_a \pi(a)$ a zároveň pro všechny agenty $b \in S$ je $S \cup \{a\} \succsim_b S$.*

Příklad 2.4. Struktura koalic π_1 z Příkladu 2.2 je individuálně stabilní, protože jediný, kdo by se chtěl přesunout, je agent 1, ale agent 3 ho „nechce přijmout“ ($\{3,4\} \succ_3 \{1,3,4\}$).

Smluvní individuální stabilita spojuje individuální a smluvní Nash stabilitu tak, že si přesunem nějakého agenta nesmí pohoršit ani ti v jeho bývalé koalici, ani ti v jeho nové koalici.

Definice 2.9 Smluvní individuální stabilita – CIS[3]. *Buď $(A, \succsim)$ Hedonická hra. Struktura koalic π je* smluvně individuálně stabilní*, pokud neexistuje agent $a \in A$ takový, že*

(i) pro nějakou koalici $S \in \pi \cup \emptyset$, $a \notin S$, je $S \cup \{a\} \succ_a \pi(a)$ a zároveň
(ii) pro všechny agenty $b \in S$ je $S \cup \{a\} \succsim_b S$ a zároveň
(iii) pro všechny agenty $b \in \pi(a)$, $b \neq a$, je $\pi(a) \setminus \{a\} \succsim_b \pi(a)$.

2.2.2 Skupinové deviace

Nyní se přesuneme k deviacím více agentů najednou. Jako první si uvedeme core stabilitu. Při ní hledáme množinu agentů, kteří by spolu vytvořili novou koalici, kterou každý z nich striktně preferuje před svou současnou koalicí. Pokud žádná taková koalice není, je struktura koalic core stabilní.

Definice 2.10 Core stabilita – C. *Buď $(A, \succsim)$ Hedonická hra a π struktura koalic. Koalice $S \notin \pi$ taková, že pro všechny agenty $a \in S$ je $S \succ_a \pi(a)$,* silně blokuje strukturu koalic π*. Struktura koalic π je* core stabilní*, pokud neexistuje žádná silně blokující koalice.*

Příklad 2.5. Struktura koalic π_1 z Příkladu 2.2 je core stabilní. Jediný, kdo by byl ochotný vytvořit novou koalici, je agent 1, ale sám být nechce. Na druhou stranu struktura koalic π_2 core stabilní není, protože agenti 3 a 4 by vlastní koalici chtěli vytvořit ($\{3,4\} \succ_3 \{1,3,4\}$ a obdobně pro agenta 4).

Striktní core stabilita uvolňuje podmínky pro vytvoření nové koalice. To je možné už v případě, že si aspoň jeden z agentů v nové koalici polepší a ostatní si nepohorší. Najít takovou koalici je možné ve více situacích než u core stability, jak je patrné na Příkladu 2.6, proto je řešení splňujících striktní core stabilitu méně.

Definice 2.11 Striktní core stabilita – SC. *Buď $(A, \succsim)$ Hedonická hra a π struktura koalic. Koalice $S \notin \pi$ taková, že pro všechny agenty $a \in S$ je $S \succsim_a \pi(a)$ a zároveň pro alespoň jednoho agenta $b \in S$ je $S \succ_b \pi(b)$,* slabě blokuje strukturu koalic π*. Struktura koalic π je* striktně core stabilní*, pokud neexistuje žádná slabě blokující koalice.*

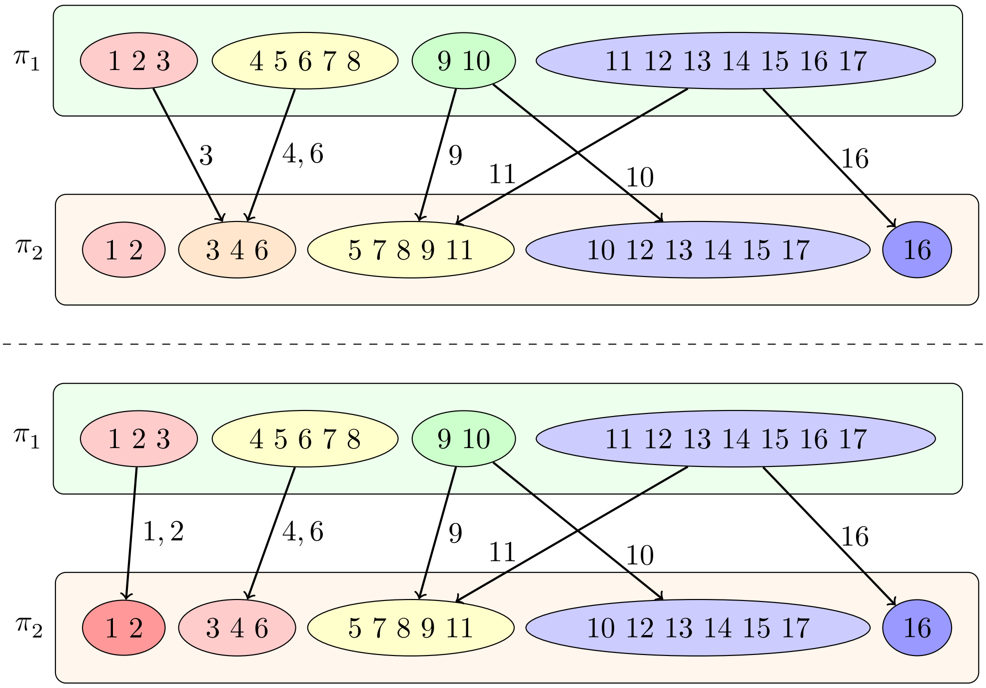
Pokud je z kontextu zřejmé, zda mluvíme o core stabilitě nebo striktní core stabilitě, vynecháváme přívlastky silně, resp. slabě, a říkáme pouze *blokující koalice*.

Pozorování 2.1. *Mějme Hedonickou hru $(A, \succsim)$ a strukturu koalic π. Pokud je π striktně core stabilní, je i core stabilní.*

Důkaz. Očividně pokud neexistuje žádná koalice, ve které by oproti π získal alespoň jeden agent a nikdo si nepohoršil, nebude existovat ani taková, kde by si polepšili agenti všichni. □

Příklad 2.6. Struktura koalic π_1 z Příkladu 2.2 není striktně core stabilní. Na rozdíl od core stability zohledňujeme i koalice, mezi kterými jsou agenti lhostejní, takže pro agenta 4 přichází v úvahu vytvořit koalici s agentem 1 a platí $\{1,4\} \succ_1 \{1,2\}$ (agent 1 si polepší) a $\{3,4\} \sim_4 \{1,4\}$ (agent 4 si nepohorší).

[3] Přeloženo z anglického contractual individual stability.



Obrázek 2.1. Příklad dosažitelnosti struktury koalic pohybem agentů. Struktura koalic π_2 je dosažitelná z π_1 pohybem agentů $\{3,4,6,9,10,11,16\}$ (nahoře) nebo např. pohybem agentů $\{1,2,4,6,9,10,11,16\}$ (dole).

U následujících tří konceptů se také přesouvá množina agentů, ale mají více možností. Kromě vytvoření i více nových koalic se mohou přidat k již existujícím koalicím a každý z nich se může rozhodnout jinak.

Jeden takový přesun, který nazveme *pohybem agentů*, ukazuje Obrázek 2.1. Při něm vznikly dvě nové koalice. V horní části obrázku agent 3 odešel z červené koalice a spolu s agenty 4 a 6 ze žluté koalice vytvořil oranžovou koalici. Agent 16 opustil modrou koalici a vytvořil vlastní tmavě modrou koalici. Zelená koalice zanikla přesunem agentů 9 a 10 do žluté, resp. modré, koalice. Agent 11 se přesunul z modré koalice do žluté koalice.

Výsledná struktura koalic π_2 ale mohla vzniknout i pohybem jiné množiny agentů. Například mohli agenti 1 a 2 opustit agenta 3 a vytvořit vlastní tmavě červenou koalici, přičemž agenti 4 a 6 by se místo vytvoření nové koalice přesunuli k agentovi 3, jak ukazuje dolní část obrázku.

Jak bude jasné po definování silné Nash stability, tato možnost více voleb se nám může hodit, když chceme, aby v množině pohybujících agentů byli jen ti, kteří si změnou polepší.

Definice 2.12 Struktura koalic dosažitelná pohybem agentů. *Buď $(A,\succsim)$ Hedonická hra a π struktura koalic. Struktura koalic $\pi' \neq \pi$ je* dosažitelná z π pohybem agentů $H \subseteq A$, *značeno $\pi \xrightarrow{H} \pi'$, pokud $\forall a,b \in A \setminus H$ platí $\pi(a) = \pi(b) \iff \pi'(a) = \pi'(b)$.*

Definice 2.13 Silná Nash stabilita – SNS. *Buď $(A,\succsim)$ Hedonická hra. Neprázdná podmnožina agentů $H \subseteq A$ je* silně Nash blokující, *pokud existuje struktura koalic $\pi' \neq \pi$ taková, že $\pi \xrightarrow{H} \pi'$ a $\forall a \in H\colon \pi'(a) \succ_a \pi(a)$. Struktura koalic π je* silně Nash stabilní, *pokud nedovoluje žádnou silně Nash blokující množinu $H \subseteq A$.*

Příklad 2.7. Mějme $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ s následujícími preferencemi:

1. $\{1,2\} \sim_1 \{1,2,3\} \succ_1 \cdots$
2. $\{1,2\} \succ_2 \{1,2,3\} \succ_2 \cdots$
3. $\{1,2,3\} \succ_3 \{3,4,6\} \succ_3 \cdots$

4. $\{3,4,6\} \sim_4 \{4,5,6\} \succ_4 \cdots$
5. $\{4,5,6\} \sim_5 \{5\} \succ_5 \cdots$
6. $\{3,4,6\} \succ_6 \{4,5,6\} \succ_6 \cdots$

Rozmysleme si, zda struktura koalic $\pi_1 = \{\{1,2,3\},\{4,5,6\}\}$ (jako na Obrázku 2.1, ale omezena jen na prvních 6 agentů) je silně Nash stabilní. Agenti 1, 3, 4 a 5 jsou v jedné ze svých nejvíce preferovaných koalic, takže nemohou být v žádné silně Nash blokující množině. Agent 2 by raději byl jen s agentem 1, ale ten s ním neuteče a agent 3 neodejde. Obdobně ani agent 6 si nemůže polepšit, takže struktura koalic π_1 je silně Nash stabilní.

Definice 2.14 Striktně silná Nash stabilita – SSNS. *Buď $(A, \succsim)$ Hedonická hra. Neprázdná podmnožina agentů $H \subseteq A$ je* slabě Nash blokující*, pokud existuje struktura koalic $\pi' \neq \pi$ taková, že $\pi \xrightarrow{H} \pi'$ a $\forall a \in H\colon \pi'(a) \succsim_a \pi(a)$ a existuje agent $b \in H$, pro něhož platí $\pi'(b) \succ_b \pi(b)$. Struktura koalic π je* striktně silně Nash stabilní*, pokud nedovoluje žádnou slabě Nash blokující množinu $H \subseteq A$.*

Příklad 2.8. Uvažme strukturu koalic π_1 z Příkladu 2.7. Hned si můžeme všimnout, že povolením přesunů mezi koalicemi, vůči kterým je agent lhostejný, mohou v slabě Nash blokující množině být kromě agentů 2 a 6 i agenti 1, 4 a 5. Pohybem agentů z množiny $H = \{1,2,4,6\}$ (dolní část Obrázku 2.1 omezená na agenty 1 až 6) dosáhneme struktury koalic $\pi_2 = \{\{1,2\},\{3,4,6\},\{5\}\}$ a navíc platí, že žádný z těchto agentů si nepohorší a zároveň agenti 2 a 6 si polepší, takže H je slabě Nash blokující množina, tudíž struktura koalic π_1 není striktně silně Nash stabilní. Využít pohybu agentů z množiny $\{3,4,6\}$, který ukazuje horní část Obrázku 2.1, bychom nemohli, protože agent 3 striktně preferuje koalici $\{1,2,3\}$ před $\{3,4,6\}$.

Vztah mezi striktně silnou Nash stabilitou a silnou Nash stabilitou je podobný jako mezi striktní core stabilitou a core stabilitou. I zde pokud nenajdeme slabě Nash blokující množinu agentů, nemůžeme najít ani silně Nash blokující množinu agentů. Z toho plyne následující pozorování.

Pozorování 2.2 Žluté. *Mějme Hedonickou hru $(A, \succsim)$ a strukturu koalic π. Pokud je π striktně silně Nash stabilní, je i silně Nash stabilní.*

Obě tyto stability také fungují podobně jako Nash stabilita v tom ohledu, že se neptají na názor ostatních agentů, tedy těch, kteří se nepohybují. Tím se odlišuje silná individuální stabilita, která pro vznik blokující množiny vyžaduje, aby s pohybem aspoň jednoho agenta souhlasili všichni agenti v jeho nové koalici.

Definice 2.15 Silná individuální stabilita – SIS. *Buď $(A, \succsim)$ Hedonická hra. Neprázdná podmnožina agentů $H \subseteq A$ je* silně individuálně blokující*, pokud existuje struktura koalic $\pi' \neq \pi$ taková, že*

(i) $\pi \xrightarrow{H} \pi'$,
(ii) $\forall a \in H\colon \pi'(a) \succ_a \pi(a)$,
(iii) $\exists a \in H$ *takový, že* $\forall b \in \pi'(a)\colon \pi'(b) \succsim_b \pi(b)$.

Struktura koalic π je silně individuálně stabilní*, pokud nedovoluje žádnou silně individuálně blokující množinu $H \subseteq A$.*

Příklad 2.9. Uvažme strukturu koalic π_1 z Příkladu 2.2 a pokusme se najít silně individuálně blokující množinu H. Pro splnění druhé podmínky může být v H pouze agent 1 (u ostatních neexistuje koalice, kterou by striktně preferovali před svou současnou). Agent 1 se chce přesunout do koalice $\{3,4\}$. Pak ale není splněna třetí podmínka, protože $\{1,3,4\} \not\succsim_3 \{3,4\}$. Žádná silně blokující množina tedy neexistuje a struktura koalic je silně individuálně stabilní.

U porušení Pareto optimality bychom mohli říct, že jde o pohyb všech agentů, kterým si nikdo nesmí pohoršit a aspoň někdo si musí polepšit. Aby byla struktura koalic Pareto optimální, musí v každé jiné struktuře koalic existovat nějaký agent, který si pohorší, nebo si nikdo nesmí polepšit.

Definice 2.16 Pareto optimalita – PO. *Buď $(A, \succsim)$ Hedonická hra. Struktura koalic π je* Pareto optimální*, pokud neexistuje žádná jiná struktura koalic π' taková, že pro všechny agenty $a \in A$ platí $\pi'(a) \succsim_a \pi(a)$ a pro alespoň jednoho agenta $b \in A$ je $\pi'(b) \succ_b \pi(b)$.*

Příklad 2.10. Uvažme strukturu koalic π_1 z Příkladu 2.2. Ta musí být Pareto optimální, protože aby si agenti 2 a 3 nepohoršili, musí být právě v těch koalicích, které jim π_1 přiřazuje, a ty dohromady určují tuto strukturu koalic.

Naopak struktura koalic $\pi_3 = \{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$ Pareto optimální není, protože agenti 3 a 4 si polepší spojením do koalice $\{3,4\}$ a pro agenty 1 a 2 se koalice nezmění, takže si nepohorší.

Nakonec si uvedeme koncept, při jehož splnění musí být každý naprosto spokojený.

Definice 2.17 Perfektní stabilita. *Buď $(A, \succsim)$ Hedonická hra. Struktura koalic π je* perfektně stabilní*, pokud pro každého agenta $a \in A$ a libovolnou koalici $S \in A_a$ je $\pi(a) \succsim_a S$.*

Příklad 2.11. Struktura koalic $\pi_2 = \{\{1,2\},\{3\}\}$ z Příkladu 2.1 je perfektně stabilní. Oproti tomu $\pi_1 = \{\{1,3\},\{2\}\}$ perfektně stabilní není, protože agent 2 by se raději přidal k agentovi 1 a agent 3 by byl raději sám.

Podle definice tedy každý agent patří do jedné ze svých nejpreferovanějších koalic, takže nemá důvod se přesouvat do jiné koalice a jsou splněny i požadavky na všechny dále uvedené definice stability. Není ale žádným překvapením, že taková struktura koalic často neexistuje, jeden takový případ ukazuje Příklad 2.12.

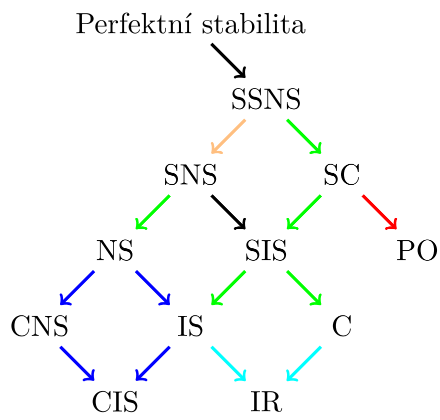
Příklad 2.12. Zadání z Příkladu 2.2 nedovoluje perfektní stabilitu. Agent 1 vyžaduje, aby byl v koalici s agenty 3 a 4 a s nikým jiným, zatímco agent 2 chce být jen a jen s agentem 1. Není tedy možné uspokojit oba dva zároveň.

2.3 Vztahy mezi koncepty stability

Při představování konceptů stability jsme vycházeli z Aziz a Savani [9]. Individuální stabilitu a smluvní individuální stabilitu pro model Hedonických her definovali Bogomolnaia a Jackson [14]. Koncept perfektní stability zavedli Aziz, Brandt a Harrenstein [7]. Karakaya [38] formuloval koncept silné Nash stability. Na jeho práci navázali Aziz a Brandl [5] zesílením konceptu silné Nash stability na striktně silnou Nash stabilitu a také zavedením silné individuální stability. Smluvní Nash stabilitu uvedli Sung a Dimitrov [52].

Schéma na Obrázku 2.2 ukazuje inkluzivní vztahy mezi uvedenými koncepty stability. Šipka z konceptu X do Y značí, že splňuje-li struktura koalic koncept stability X, pak splňuje i Y. Ekvivalentně můžeme říci, že pokud struktura koalic nesplňuje koncept stability Y, nemůže splňovat ani X. Pokud je tedy struktura koalic perfektní, pak splňuje i požadavky na všechny ostatní uvedené koncepty stability. To lze snadno vidět, protože aby struktura koalic nebyla stabilní podle nějakého dalšího z uvedených konceptů stability, musel by si někdo z agentů chtít polepšit. Nikdo takový ale není, protože každý patří do jedné ze svých nejvíce preferovaných koalic a vůči ostatním je nejlépe lhostejný. Naopak, pokud je struktura koalic Pareto optimální, nemusí být striktně core stabilní, jak ukazují Příklad 2.10 a 2.6.

Pozorování 2.1 a 2.2 ukazují vztah mezi striktní core stabilitou a core stabilitou, resp. striktně silnou Nash stabilitou a silnou Nash stabilitou.



Obrázek 2.2. Vztahy mezi koncepty stability Hedonických her [9]. Vztahy Perfektní stabilita → SSNS a SNS → SIS jsou vysvětleny v textu. Vztah SSNS → SNS dokazuje Žluté pozorování 2.2. Vztahy NS → CNS → CIS a NS → IS → CIS ukazuje Modré pozorování 2.4. Vztahy SSNS → SC → SIS → C, SNS → NS a SIS → IS, odůvodňuje Zelené tvrzení 2.6. Vztahy IS → IR a C → IR dokazuje Tyrkysové pozorování 2.3. Nakonec vztah SC → PO vysvětluje Červené pozorování 2.5.

Pozorování 2.3 Tyrkysové. *Mějme Hedonickou hru $(A, \succsim)$ a strukturu koalic π. Pokud π není individuálně racionální, není ani core stabilní, ani individuálně stabilní.*

Důkaz. Pokud struktura koalic π není individuálně racionální, pak existuje nějaký agent $a \in A$, pro kterého platí $\{a\} \succ_a \pi(a)$. Tento agent pak ale tvoří jednočlennou koalici $\{a\}$, kvůli které π nemůže být core stabilní. Tato koalice také představuje původně prázdnou koalici, která je ochotna agenta a přijmout, takže π není ani individuálně stabilní. $\square$

Příklad 2.13. Mějme $A = \{1, 2, 3\}$ s následujícími preferencemi:

1. $\{1, 3\} \succ_1 \{1, 2\} \succ_1 \{1\} \succ_1 \cdots$
2. $\{1, 2\} \succ_2 \{2\} \succ_2 \cdots$
3. $\{3\} \succ_3 \cdots$

Struktura koalic $\pi = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$ není individuálně racionální, protože agent 3 preferuje být sám. Je ale smluvně Nash stabilní, protože agent 1 ho nechce pustit. Je také Pareto optimální, protože aby si agent 1 nepohoršil, musí být s agentem 3, což tuto strukturu koalic určuje.

Pozorování 2.4 Modré. *Mějme Hedonickou hru $(A, \succsim)$ a strukturu koalic π. Pokud π je:*

1. *Nash stabilní, je také smluvně Nash stabilní a individuálně stabilní;*
2. *Nash stabilní nebo smluvně Nash stabilní nebo individuálně stabilní, je také smluvně individuálně stabilní.*

Důkaz. Když struktura koalic π splňuje Nash stabilitu, neexistuje žádný agent, který by si deviací polepšil, takže nemá smysl hledat agenta, kterému deviaci dovolíme jen za omezenějších podmínek. Podobně pokud nenajdeme agenta, který by si mohl polepšit, bez pohoršení někomu ze současné (v případě smluvní Nash stability), resp. preferovanější koalice, kam by se chtěl přesunout (individuální stabilita), nemůže existovat žádný agent, který by si polepšil, když nesmí pohoršit ani nikomu z preferovanější, resp. současné koalice. $\square$

Příklad 2.14. Mějme $A = \{1, 2, 3\}$ s následujícími preferencemi:

1. $\{1, 3\} \succ_1 \{1, 2\} \succ_1 \{1\} \succ_1 \cdots$
2. $\{1, 2\} \sim_2 \{2\} \succ_2 \cdots$
3. $\{3\} \succ_3 \{1, 3\} \succ_3 \cdots$

a strukturu koalic $\pi = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$.

Tato struktura koalic je individuálně stabilní, a tedy i smluvně individuálně stabilní, protože agenti 2 a 3 jsou ve svých nejvíce preferovaných koalicích, takže nemají důvod se přesouvat a agent 3 nepřijme agenta 1. Není ale smluvně Nash stabilní, protože agent 2 agenta 1 pustí pryč. Také není Nash stabilní, protože agent 1 se chce přesunout.

Pozorování 2.5 Červené. *Mějme Hedonickou hru $(A, \succsim)$ a strukturu koalic π. Pokud π není Pareto optimální, není ani striktně core stabilní.*

Důkaz. Nechť π je struktura koalic, která není Pareto optimální. Potom existuje jiná struktura koalic $\pi' \neq \pi$, pro kterou platí, že každý agent $a \in A$ striktně preferuje $\pi'(a)$ před $\pi(a)$ nebo je mezi nimi lhostejný a aspoň jeden agent $b \in A$ koalici $\pi'(b)$ před $\pi(b)$ striktně preferuje. Tento agent b si tedy polepšil a nikdo jiný v $\pi'(b)$ si nemohl pohoršit, takže struktura koalic π není ani striktně core stabilní. □

Nakonec se odkážeme na vysvětlení zbývajících vztahů z obrázku 2.2. V následujících dvou tvrzeních jsou také ukázané některé další vztahy mezi koncepty stability, které naopak implikovány nejsou.

Tvrzení 2.6 Zelené; (Aziz a Brandl [5; Proposition 1, 2, 3])**.** *Mějme Hedonickou hru $(A, \succsim)$ a strukturu koalic π. Potom:*

1. *striktní core stabilita implikuje silnou individuální stabilitu, která implikuje individuální stabilitu a zároveň core stabilitu;*
2. *silná Nash stabilita implikuje Nash stabilitu a také core stabilitu. Navíc pokud struktura koalic je zároveň core stabilní a Nash stabilní, nemusí být silně Nash stabilní;*
3. *striktně silná Nash stabilita implikuje silnou Nash stabilitu, striktní core stabilitu a Pareto optimalitu. Na druhou stranu silná Nash stabilita neimplikuje striktní core stabilitu, ani Pareto optimalitu.*

V důkazu také zmiňují, že silná Nash stabilita implikuje silnou individuální stabilitu. Důvod je podobný tomu u Modrého pozorování 2.4.

Tvrzení 2.7 (Bogomolnaia a Jackson [14; Example 2, 3])**.** *Mějme Hedonickou hru $(A, \succsim)$ a strukturu koalic π. Potom splnění:*

1. *core stability neimplikuje Nash stabilitu a splnění Nash stability neimplikuje core stabilitu;*
2. *core stability neimplikuje individuální stabilitu.*

Že splnění core stability neimplikuje Nash stabilitu a vztah neplatí ani naopak, je vidět i na Příkladech 2.5 a 2.2.

2.4 Výpočetní složitost

Při studiu výpočetní složitosti problémů nás zajímá, jaké prostředky pro vyřešení daného problému potřebujeme. Zpravidla zkoumáme složitost časovou, případně paměťovou. K tomu potřebujeme definovat výpočetní model a kódování vstupu.

Rozlišujeme různé druhy problémů. Mezi ně patří:

- Rozhodovací. Na daný vstup odpovídáme buď „ano“, nebo „ne“. V případě Hedonických her se tedy můžeme například ptát, zda pro danou Hedonickou hru existuje core stabilní struktura koalic.
- Konstrukční. Pokud existuje výstup splňující dané podmínky, najdi ho. V tomto případě bychom tedy na výstupu chtěli core stabilní strukturu koalic.
- Optimalizační. V množině přípustných řešení maximalizujeme nebo minimalizujeme dané kritérium. Například bychom chtěli minimalizovat počet koalic.

V příkladech na začátku kapitoly bychom dostali množinu agentů s preferencemi definující naši Hedonickou hru, určili bychom si koncept stability, který se nám pro danou situaci nejvíce hodí, a pokusili bychom se najít stabilní strukturu koalic. Samozřejmě bychom nejdříve museli vymyslet, jak toto hledání uskutečnit, a to pokud možno efektivně.

Na Příkladu 2.12 jsme viděli, že perfektně stabilní struktura koalic existovat ani nemusí. Dává tedy smysl se ptát i zda řešení existuje. Ačkoli by nám pro praktické použití byla kladná odpověď bez oné stabilní struktury koalic spíše k ničemu (chceme sestavit týmy, ne jen vědět, že to lze), ukazuje se, že v řadě případů není znám efektivní algoritmus ani pro rozhodovací problémy.

Dále se zaměříme na problémy existence a verifikace, které definujeme následovně:

Problém: α-Existence
Instance: Hedonická hra $(A, \succsim)$, koncept stability α
Otázka: Existuje α-stabilní struktura koalic?

Problém: α-Verifikace
Instance: Hedonická hra $(A, \succsim)$, koncept stability α, struktura koalic π
Otázka: Je struktura koalic π α-stabilní?

V této práci budeme uvažovat výpočetní model RAM [43]. Obecné Hedonické hry budeme reprezentovat pomocí *individuálně racionálního seznamu koalic* (IRCL; individually rational coalition lists) [10], který obsahuje jen ty koalice, jež jsou pro daného agenta individuálně racionální, tedy před nimi nepreferuje být sám. Prostorová složitost takové reprezentace je $\mathrm{O}(2^n)$, kde $n \in \mathbb{N}$ je počet agentů.

Další možností jsou *Hedonické sítě koalic* (HCN; hedonic coalition nets), reprezentující preference agenta jako množinu pravidel, které formuli výrokové logiky přiřazují reálné číslo. Vztahy mezi koalicemi jsou dány porovnáním hodnot koalic. K určení hodnoty koalice sečteme přiřazená čísla u těch pravidel, která jsou pravdivá při ohodnocení daném touto koalicí. Výhoda HCN je, že dokážou vyjádřit stejné preference jako IRCL, ale ve speciálních případech mohou být až exponenciálně kompaktnější. [26]

Při studiu výpočetní složitosti se neobejdeme bez definice třídy problémů NP a s ní spojených pojmů. Teorii lze krásně vybudovat pomocí Turingových strojů, ale jelikož pro nás není tak důležitá, odkážeme se na knihu autorů Arora a Barak [4] (tam viz též definice dalších pojmů z tohoto odstavce, jako jsou SAT, Tautologie, doplněk jazyka). My si definujeme třídu problémů NP jako problémy, které lze v polynomiálním čase převést na problém splnitelnosti výrokových formulí (SAT), tedy existuje nějaký deterministický polynomiální algoritmus, který z instance našeho problému vytvoří instanci SAT, na níž bude odpověď „ano“ právě tehdy, když byla „ano“ odpověď na původní instanci. Tento převod nazveme redukcí. Jedná se o tzv. Karpovu redukci. Obdobně pomocí redukce na problém Tautologie definujeme třídu coNP, o které můžeme také říct, že se jedná o množinu jazyků, jejichž doplňky jsou ve třídě NP.

Definice 2.18 Třídy P, NP, coNP. Třída P *obsahuje takové rozhodovací problémy, pro které známe deterministický algoritmus pracující v polynomiálním čase.* Třída NP *obsahuje takové rozhodovací problémy, které lze redukovat na* SAT. Třída coNP *obsahuje takové rozhodovací problémy, které lze redukovat na problém* Tautologie.

Definice 2.19 NP-úplný problém. *Problém je* NP-těžký*, pokud na něj lze redukovat všechny problémy z třídy NP. Problém je* NP-úplný*, pokud je NP-těžký a patří do třídy NP.*

Problém, který je *coNP-těžký* a *coNP-úplný*, definujeme analogicky. Všechny problémy patřící do třídy P jsou i ve třídách NP a coNP. Převládá názor (např. podle ankety Gasarcha [31]), že P $\neq$ NP, ale nikomu se dosud nepodařilo vztah dokázat, ani vyvrátit. Pokud nerovnost platí, polynomiální algoritmy pro NP-úplné problémy ani nemohou existovat. Také se předpokládá, že NP $\neq$ coNP.

V této sekci si uvedeme některé složitější problémy, ale začneme pozitivní zprávou. Když si nebudeme klást vysoké nároky na strukturu koalic v našich příkladech, můžeme říct, že individuálně racionální struktura koalic vždy existuje a najdeme ji v lineárním čase. Také existuje smluvně individuálně stabilní a Pareto optimální struktura koalic, takže pro tyto koncepty stability bude odpověď na problém Existence triviálně ano, ale konstrukce už je časově složitější, i když z důkazu nám pro ni vyplynou naivní algoritmy.

Věta 2.8. *Mějme Hedonickou hru* $(A, \succsim)$*. Pro každý z následujících konceptů existuje struktura koalic* π*, která je stabilní:*

- *individuální racionalita,*
- *smluvní individuální stabilita,*
- *Pareto optimalita.*

Důkaz. Začněme individuální racionalitou. Struktura koalic $\pi = \{\{a\} \mid a \in A\}$ je individuálně racionální triviálně, protože preference jsou reflexivní. (A nebudeme si kazit radost tím, že při tvoření týmů obvykle nechceme, aby každý skončil sám.)

Existenci struktury koalic splňující smluvní individuální stabilitu dokázal Ballester [10]. Nejprve si vezmeme libovolnou strukturu koalic, která vždy existuje, například $\pi = \{\{a\} \mid a \in A\}$. Pokud je smluvně individuálně stabilní, máme řešení a skončíme. Jinak musí existovat agent $a \in A$, který se může přesunout, to znamená, že existuje koalice $S \in \pi \cup \emptyset$, $a \notin S$, kterou a striktně preferuje před $\pi(a)$, a zároveň $\forall b \in S$ je $S \cup \{a\} \succsim_b S$ a $\forall b \in \pi(a)$, $b \neq a$ je $\pi(a) \setminus \{a\} \succsim_b \pi(a)$. Tohoto agenta a přesuneme, tedy vytvoříme novou strukturu koalic $\pi' = \{S' \in \pi \mid S' \neq \pi(a) \wedge S' \neq S\} \cup \{\pi(a) \setminus \{a\}\} \cup \{S \cup \{a\}\}$. Tímto krokem si přinejmenším agent a polepší a nikdo další si nepohorší, protože se změna dotkne jen agentů z jeho původní a nové koalice, kteří s ní souhlasili (dokonce si mohli také polepšit). Tento krok provádíme, dokud se nějaký agent může přesunout. Když žádný takový není, našli jsme smluvně individuálně stabilní strukturu koalic. Je jisté, že se v určitou chvíli zastavíme, protože každý agent má ve svém preferenčním profilu konečný počet koalic (konkrétně $2^{|A|-1}$) a v každém kroku se někomu počet koalic, které by preferoval před svou současnou, sníží a nikomu se nezvýší.

U Pareto optimální struktury koalic je situace podobná té smluvně individuálně stabilní, ale nehledáme pouze jednoho agenta se sklonem k deviaci, nýbrž zkoumáme všechny další možné struktury koalic. Opět je jich konečný počet a každou změnou se sníží.

Počet všech možných stuktur koalic odpovídá počtu možných rozdělení množiny o $|A|$ prvcích, který popisuje Bellovo číslo $B_{|A|}$, pro které je známá horní hranice $B_n < \left(\frac{0{,}792n}{\ln(n+1)}\right)^n$ pro $n \in \mathbb{N}$. [12] □

V roce 2004 Ballester [10] zanalyzoval složitost Existence pro core stability, Nash stabilitu a individuální stabilitu v případě obecných preferencí reprezentovaných pomocí IRCL. Elkind a Wooldridge [26] zavedli reprezentaci pomocí HCN a prozkoumali řadu výpočetních problémů. Peters a Elkind [49] pak identifikovali podmínky, při jejichž splnění nějakou reprezentací Hedonické hry, se problém Existence stane výpočetně složitým. Ukázali, že tyto podmínky jsou splněny v řadě případů, např. při reprezentaci pomocí IRCL nebo HCN, u Hedonických her s $\mathscr{W}$-preferencemi nebo aditivně separabilních Hedonických her. V Tvrzení 2.9 shrnujeme jejich závěry týkající se obecných Hedonických her.

Tvrzení 2.9 Složitost obecných Hedonických her.

- *Problémy* C-Existence*,* NS-Existence *a* IS-Existence *při reprezentaci pomocí IRCL jsou NP-úplné.* [10; Proposition 1, 2, 3]
- *Problém* C-Verifikace *při reprezentaci pomocí HCN je coNP-úplný.* [26; Theorem 4]
- *Problém* C-Existence *při reprezentaci pomocí HCN je NP-těžký.* [26; Theorem 5]
- *Problémy* IR-Verifikace*,* NS-Verifikace*,* IS-Verifikace *a* CIS-Verifikace *při reprezentaci pomocí HCN jsou polynomiálně řešitelné.* [26]
- *Problémy* NS-Existence *a* IS-Existence *při reprezentaci pomocí HCN jsou NP--úplné.* [26]
- *Problém* SC-Existence *při reprezentaci pomocí IRCL délky* ≤ 9 *je NP-úplný.* [49]
- *Problém* SNS-Existence *při reprezentaci pomocí IRCL délky* ≤ 9 *je NP-těžký.* [49]
- *Problémy* SC-Existence *a* SNS-Existence *při reprezentaci pomocí HCN jsou NP--těžké.* [49]

2.5 Preferenční profily

Jak jsme si ukázali v Sekci 2.4, řada problémů spojených s obecnými Hedonickými hrami je paměťově i výpočetně složitá. Jak poukazují Cechlárová a Hajduková [16], potíž nastává již při samotném sestavování preferencí. Těžko představitelné je porovnávat už jen $2^5 = 32$ koalic v případě pouhých 6 agentů a u třídy složené z 30 žáků bychom od každého dítěte potřebovali porovnání přes půl miliardy možných koalic.

Existují však i další verze Hedonických her, které kladou na preferenční profily striktnější požadavky. V této sekci si představíme některé z nich. Nejprve se v části 2.5.1 podíváme na známý problém Stabilních Spolubydlících, který omezuje velikost koalic na 2. S ohledem na rozdílnou složitost při zakázání či povolení lhostejnosti v problému Stabilních Spolubydlících, pak v části 2.5.2 prozkoumáme, jak u Hedonických her ovlivní situaci zakázání lhostejnosti mezi dvěma různými koalicemi. V části 2.5.3 si ukážeme *anonymní Hedonické hry*, kde agentům záleží jen na velikosti koalice. Dále se zaměříme na verze Hedonických her, ve kterých agenti preference mezi koalicemi určují na základě preferencí mezi agenty. Sem patří *Hedonické hry s* $\mathscr{B}$*-preferencemi* a *s* $\mathscr{W}$*-preferencemi* (viz část 2.5.4) či *aditivně separabilní Hedonické hry* (viz část 2.5.5).

2.5.1 Problém Stabilních Spolubydlících

V problému Stabilních Spolubydlících (anglicky Stable Roommates Problem) máme množinu agentů A, které chceme rozdělit do dvojic. Jako preference každý agent uvede seznam ostatních agentů seřazený od nejvíce preferovaného po nejméně preferovaného. Cílem je vytvořit stabilní párování $M \subseteq \binom{A}{2} = \{\{a, b\} \mid a, b \in A\}$, což znamená, že neexistuje žádná dvojice agentů (blokující pár), která v M není spolu, ale jeden druhého preferují před svým partnerem z M (když žádného partnera nemají, automaticky preferují).

Jedná se o Hedonickou hru, kde každý agent určuje preference jen mezi koalicemi velikosti 2 a hledáme core stabilní řešení. Je snadné ukázat, že žádné stabilní párování existovat nemusí.

Příklad 2.15. Mějme množinu agentů $A = \{1, 2, 3\}$ s následujícími preferencemi:

agent	1. nejpreferovanější partner	2. nejpreferovanější partner
1	2	3
2	3	1
3	1	2

V tomto případě neexistuje stabilní párování. Když $M = \{\{1,2\}\}$, agenti 2 a 3 tvoří blokující pár. Když $M = \{\{1,3\}\}$, agenti 1 a 2 tvoří blokující pár. Nakonec když $M = \{\{2,3\}\}$, agenti 1 a 3 tvoří blokující pár.

Pro případ, kdy preference jsou striktní (tedy nedovolujeme lhostejnost mezi různými koalicemi), popsal Irving [37] efektivní algoritmus, který v čase $O(n^2)$, najde stabilní párování, pokud existuje. Ronn [50] později dokázal, že povolením lhostejnosti se problém rozhodnutí o existenci stabilního řešení stane NP-úplným.

2.5.2 Striktní preference

Vzhledem k tomu, že povolení lhostejnosti způsobí u problému Stabilních Spolubydlících NP-úplnost, nabízí se otázka, zda vynucení striktních preferencí naopak nepomůže s efektivním hledáním stabilního řešení.

Ballester [10] ale ukázal, že problémy C-Existence, NS-Existence i IS-Existence zůstanou NP-úplné.

Na druhou stranu Aziz a kol. [7; Proposition 1] tvrdí, že v případě striktních preferencí mezi koalicemi lze v polynomiálním čase najít Pareto optimální a individuálně stabilní strukturu koalic. Pareto optimální struktury koalic dosáhneme použitím mechanismu *sériového diktátorství.* Při něm vždy najdeme agenta „diktátora“, který zatím nemá žádnou koalici, z jeho preferencí vybereme nejvíce preferovanou koalici, jejíž všichni členové zatím v žádné koalici nejsou a těm ji přiřadíme. Při první iteraci bude agent přiřazen do své nejvíce preferované koalice a skončíme, když budou všichni agenti v nějaké koalici. Vzniklá struktura koalic musí být Pareto optimální, protože díky striktním preferencím jsou koalice vybrané diktátory jednoznačně určené, a v každé odlišné struktuře koalic by si tak aspoň jeden z diktátorů pohoršil.

2.5.3 Anonymní Hedonické hry

U anonymních Hedonických her agentům záleží jen na velikosti koalic, nikoli na tom, jací agenti jsou členy.

Definice 2.20 Anonymní Hedonická hra. *Mějme Hedonickou hru $(A, \succsim)$. Agent $a \in A$ má* anonymní preference, *když pro každé dvě koalice $S, T \in A_a$ platí, že pokud $|S| = |T|$, pak $S \sim_a T$. Pokud každý agent z množiny A má anonymní preference, řekneme, že $(A, \succsim)$ je* anonymní Hedonická hra.

Preference agentů v anonymních Hedonických hrách můžeme reprezentovat efektivněji než v obecných Hedonických hrách, a to pro každého agenta seřazeným seznamem velikostí od nejpreferovanějších po nejméně preferované. K tomu potřebujeme jen polynomiálně velké místo v paměti, konkrétně $O(|A|^2)$. Pro tento účel zavedeme značení preferencí mezi velikostmi.

Definice 2.21 Preference mezi velikostmi. *Mějme Hedonickou hru $(A, \succsim)$ a agenta $a \in A$ s anonymními preferencemi.* Preference agenta a mezi velikostmi *tvoří reflexivní, úplnou a tranzitivní relaci $\succsim_a^s$ na $[|A|]$ a pro dvě různé velikosti $\ell, m \in [|A|]$ zapisujeme $\ell \succ_a^s m$, pokud agent a striktně preferuje ℓ před m, a $\ell \sim_a^s m$, pokud je mezi nimi agent a lhostejný.*

Příklad 2.16. Mějme anonymní Hedonickou hru $(A, \succsim)$, kde $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ a preference agentů mezi velikostmi jsou určeny následovně:

- a_1: $4 \succ_{a_1}^s 3 \succ_{a_1}^s 2 \succ_{a_1}^s 1 \succ_{a_1}^s 5$
- a_2: $4 \succ_{a_2}^s 3 \succ_{a_2}^s 2 \succ_{a_2}^s 1 \succ_{a_2}^s 5$
- a_3: $5 \succ_{a_3}^s 2 \succ_{a_3}^s 1 \succ_{a_3}^s 4 \succ_{a_3}^s 3$
- a_4: $3 \succ_{a_4}^s 2 \succ_{a_4}^s 1 \succ_{a_4}^s 4 \sim_{a_4}^s 5$
- a_5: $5 \succ_{a_5}^s 4 \succ_{a_5}^s 2 \succ_{a_5}^s 1 \succ_{a_5}^s 3$

Struktura koalic $\pi_1 = \{\{a_1, a_2, a_4\, a_5\}, \{a_3\}\}$ není ani individuálně racionální, protože agent a_4 striktně preferuje být sám.

Struktura koalic $\pi_2 = \{\{a_1, a_2, a_4\}, \{a_3, a_5\}\}$ je striktně core stabilní. Agent a_4 je ve koalici své nejvíce preferované velikosti. Agenti a_1, a_2, a_5 by preferovali velikost 4, ale není jich dost. Agent a_5 by také preferoval velikost 5, ale do té by byl dále ochoten jít jen agent a_3.

Banerjee a kol. [11] ukázali, že core stabilní struktura koalic nemusí existovat. Ballester [10] dokázal, že problémy C-Existence, NS-Existence a IS-Existence jsou NP-úplné, ať už povolíme lhostejnost, nebo ne.

2.5.4 $\mathscr{B}$-preference a $\mathscr{W}$-preference

Koncept $\mathscr{B}$-preferencí a $\mathscr{W}$-preferencí zavedli Cechlárová a Romero-Medina [18]. V obou případech každý agent seřadí všechny agenty (včetně sebe samotného) od nejméně oblíbeného po nejoblíbenějšího. U $\mathscr{B}$-preferencí pak v porovnání dvou koalic vyhrává ta, ve které má agent lepšího kamaráda, u $\mathscr{W}$-preferencí naopak ta, ve které je ten nejméně oblíbený člen o něco více oblíbený než u druhé koalice.

Cechlárová a Romero-Medina [18] preference popisují pomocí seřazení ostatních agentů od nejvíce preferovaných po nejméně. Toho můžeme dosáhnout, i když každý agent ostatním přiřadí nějakou číselnou hodnotu a seřadí je podle ní. V definici využijeme právě číselných ohodnocení, které následně použijeme i u aditivně separabilních Hedonických her.

Definice 2.22 Ohodnocení agentů. *Nechť A je množina agentů.* Ohodnocením agentů *agentem $a \in A$ rozumíme funkci $v_a \colon A \to \mathbb{R}$.*

Definice 2.23 Hedonická hra s $\mathscr{B}$-preferencemi. *Nechť A je množina agentů a mějme agenta $a \in A$ s ohodnocením agentů v_a. Preference agenta a jsou $\mathscr{B}$-preference, pokud platí:*

1. *Agent a striktně preferuje koalici $S \in A_a$ před koalicí $T \in A_a$, zapsáno $S \succ_{\mathscr{B},a} T$, pokud:*
   - $\max_{b \in S} v_a(b) > \max_{b \in T} v_a(b)$*, nebo*
   - $\max_{b \in S} v_a(b) = \max_{b \in T} v_a(b)$ *a zároveň* $|S| < |T|$.
2. *Agent a je lhostejný mezi koalicemi S a T, zapsáno $S \sim_{\mathscr{B},a} T$, když $|S| = |T|$ a zároveň* $\max_{b \in S} v_a(b) = \max_{b \in T} v_a(b)$.

Když mají všichni agenti z A $\mathscr{B}$-preference, mluvíme o Hedonické hře s $\mathscr{B}$--preferencemi, *kterou zapisujeme jako $(A, \mathscr{B})$, kde $\mathscr{B} = (\succsim_{\mathscr{B},a})_{a \in A}$.*

Všimněme si porovnání velikosti koalic v případě rovnosti nejpreferovanějších agentů z obou koalic. Kdybychom tuto podmínku nezavedli struktura koalic složená z tzv. *grand koalice*, což je množina všech agentů, by vždy byla perfektně stabilní.

U $\mathscr{W}$-preferencí je toto porovnání zbytečné, ale naopak musíme vyčlenit případ, kdy je agent v koalici sám, protože jinak ho chceme z hledání minima vynechat, aby nebyl lhostejný mezi všemi koalicemi, kde je sám tím nejnižším ohodnocením. Jsou to totiž právě ty příklady, kdy koalice preferuje před bytím sám, které chceme umět odlišit. Když koalice obsahuje dalšího agenta s nižším ohodnocením, než které má agent sám pro sebe, striktně preferuje být sám, takže struktura koalic obsahující takovou koalici není ani individuálně racionální.

Definice 2.24 Hedonická hra s $\mathscr{W}$-preferencemi. *Nechť A je množina agentů a mějme agenta $a \in A$ s ohodnocením agentů v_a. Pro agenta a a koalici $S \in A_a$ definujeme hodnotu $\mathscr{W}_a(S)$ jako $\mathscr{W}_a(S) = v_a(a)$, pokud $S = \{a\}$, a $\mathscr{W}_a(S) = \min_{b \in S \setminus \{a\}} v_a(b)$ jinak. Agent a má $\mathscr{W}$-preference, pokud platí:*

1. *Agent a striktně preferuje koalici $S \in A_a$ před koalicí $T \in A_a$, zapsáno $S \succ_{\mathscr{W},a} T$, pokud $\mathscr{W}_a(S) > \mathscr{W}_a(T)$.*
2. *Agent a je lhostejný mezi koalicemi S a T, zapsáno $S \sim_{\mathscr{W},a} T$, když $\mathscr{W}_a(S) = \mathscr{W}_a(T)$.*

Když mají všichni agenti z A $\mathscr{W}$-preference, mluvíme o Hedonické hře s $\mathscr{W}$--preferencemi, *kterou zapisujeme jako $(A, \mathscr{W})$, kde $\mathscr{W} = (\succsim_{\mathscr{W},a})_{a \in A}$.*

Příklad 2.17. Mějme množinu agentů $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, s ohodnoceními agentů podle Tabulky 2.1 (i-tý řádek popisuje ohodnocení agentů agentem i).

	1	2	3	4	5
1	0	10	10	-2	-5
2	10	0	-1	-1	-1
3	10	-1	0	-5	-5
4	-2	-1	-5	0	100
5	-5	-1	-5	100	0

Tabulka 2.1. Ohodnocení agentů.

V Hedonické hře s $\mathscr{B}$-preferencemi $(A, \mathscr{B})$ struktura koalic $\pi_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$ není core stabilní a struktura koalic $\pi_2 = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$ je core stabilní, ale není striktně core stabilní.

Agenti 4 a 5 jsou ve své unikátní nejvíce preferované koalici, protože ostatní dvojčlenné koalice mají horšího nejlépe ohodnoceného agenta, takže nebudou součástí žádné blokující koalice. V případě struktury koalic π_1 díky porovnávání velikostí koalic agent 1 striktně preferuje koalice $\{1, 2\}$ a $\{1, 3\}$ a agenti 2, resp. 3, striktně preferují koalice $\{1, 2\}$, resp. $\{1, 3\}$, které tedy jsou silně blokujícími koalicemi. V případě struktury koalic π_2 je agent 1 lhostejný mezi svou koalicí a $\{1, 3\}$, kterou agent 3 striktně preferuje, takže tvoří slabě blokující koalici, tudíž π_2 není striktně core stabilní. Silně blokující koalice neexistuje, protože jediný, kdo si může polepšit, je agent 3, takže π_2 je core stabilní.

V Hedonické hře s $\mathscr{W}$-preferencemi $(A, \mathscr{W})$ struktura koalic π_1 není individuálně racionální (tedy ani core stabilní), protože agenti 2 i 3 striktně preferují být sami, a struktura koalic π_2 je core stabilní, ale není striktně core stabilní, protože agent 3 by se chtěl spojit s agentem 1, který je v případě striktní core stability ochotný blokující koalici vytvořit, jinak jsou ostatní agenti ve své nejvíce preferované koalici.

Cechlárová a Romero-Medina [18] dokázali, že v případě $\mathscr{B}$-preferencí, které jsou navíc striktní, vždy existuje striktně core stabilní struktura koalic a představili algoritmus na její nalezení. Z toho plyne též existence core stabilní struktury. Také ukázali, že Hedonické hry s $\mathscr{W}$-preferencemi se podobají problému Stabilních Spolubydlících a Irvingův algoritmus lze použít na nalezení striktně core stabilní struktury koalic. Cechlárová a Hajduková [17] Irvingův algoritmus upravily pro hledání core stabilní struktury koalic, opět za podmínky $\mathscr{W}$-preferencí, když jsou striktní. Při povolení lhostejnosti dokázaly, že je problém C-Existence NP-úplný. Aziz a kol. [7] dokázali, že v Hedonické hře s $\mathscr{W}$-preferencemi lze strukturu koalic, která je Pareto optimální a zároveň individuálně racionální, vypočítat v polynomiálním čase. Cechlárová a Hajduková [16] dále dokázaly, že problémy C-Existence a SC-Existence, když $\mathscr{B}$-preference nemusí být striktní, jsou NP-úplné.

2.5.5 Aditivně separabilní Hedonické hry

Aditivně separabilními Hedonickými hrami se zabývali již Bogomolnaia a Jackson [14], když dokázali, že při dodatečném vyžadování symetrie vždy existuje individuálně stabilní a Nash stabilní struktura koalic. Banerjee a kol. [11] naopak uvedli příklad, kdy v zadané hře neexistuje core stabilní struktura koalic.

Zatímco u $\mathscr{B}$-, resp. $\mathscr{W}$-preferencí zkoumáme maximální, resp. minimální ohodnocení v koalici, u aditivně separabilních Hedonických her ohodnocení agentů v koalici sčítáme. Další možností by bylo ohodnocení průměrovat, což je případ tzv. *Fractional Hedonic games* (FHG), které ale popisovat nebudeme a odkážeme se na Aziz a kol. [6].

Definice 2.25 Aditivně separabilní Hedonická hra – ASHG. *Nechť A je množina agentů a mějme agenta $a \in A$ s ohodnocením agentů v_a. Preference agenta a jsou aditivně separabilní, pokud platí: agent a preferuje koalici $S \in A_a$ před koalicí $T \in A_a$, zapsáno $S \succsim_{\Sigma,a} T$, pokud $\sum_{b \in S} v_a(b) \geq \sum_{b \in T} v_a(b)$.*

Když mají všichni agenti z A aditivně separabilní preference, mluvíme o aditivně separabilní Hedonické hře*, kterou zapisujeme (A, Σ), kde $\Sigma = (\succsim_{\Sigma,a})_{a \in A}$.*

Pokud navíc pro každou dvojici agentů $a, b \in A$ platí $v_a(b) = v_b(a)$, říkáme, že preferenční profil je symetrický*.*

Snadno si všimneme, že pokud žádné ohodnocení agentů není záporné, grand koalice bude u každého agenta patřit k nejpreferovanějším, takže je perfektně (a tudíž i core a striktně core) stabilní.

Příklad 2.18. Mějme množinu agentů A, strukturu koalic $\pi_1 = \{\{1,2,3\},\{4,5\}\}$ a ohodnocení agentů jako v Příkladu 2.17. Struktura koalic π_1 je v rámci aditivně separabilní Hedonické hry (A, Σ) striktně core stabilní. Pokud by agenti 4 nebo 5 byli v koalici s někým dalším, součet ohodnocení by se snížil, takže jsou ve své unikátní nejvíce preferované koalici. Agenti 2 a 3 by každý preferovali být sami v koalici s agentem 1, kterému by se ale součet ohodnocení snížil, takže s nimi do blokující koalice nepůjde.

Aditivně separabilní Hedonické hry jsou v literatuře často zmiňované, zabývali se jimi již výše zmínění Bogomolnaia a Jackson [14] a Banerjee a kol. [11] v článcích, které jsou spolu s Dréze a Greenberg [24] považovány za počátky Hedonických her. Sung a Dimitrov [53] dokázali, že problém C-Verifikace je coNP-úplný. Olsen [46] dokázal, že problém NS-Existence (když chceme netriviální řešení, tedy ne grand koalici) je NP-úplný, když preference jsou symetrické a nezáporné. Sung a Dimitrov [54] dále dokázali, že problémy C-Existence a SC-Existence jsou NP-těžké a problémy NS-Existence a IS-Existence jsou NP-úplné.

Později podrobnou studii výpočetní složitosti u ASHG ve svém článku představili Aziz, Brandt a Seedig [8]. Dokázali, že problémy C-Existence a SC-Existence jsou NP-těžké, i když jsou preference symetrické, a problém SC-Verifikace je coNP-úplný. Navrhli polynomiální algoritmus pro nalezení smluvně individuálně stabilní struktury koalic. Vypozorovali, že NS-Verifikace, IS-Verifikace a CIS-Verifikace patří do třídy P a tutéž vlastnost ukázali i pro problémy Perfect-Verifikace a Perfect-Existence. Dále dokázali, že PO-Verifikace je coNP-úplná, i když jsou preference symetrické a striktní nebo když je struktura koalic grand koalicí. Věnovali se i dalším problémům týkajících se konceptů stability, které jsme ani nezmiňovali, a proto je vynecháme.

Woeginger [55] dokázal, že problém C-Existence je Σ_2^p-úplný. Σ_2^p je třída složitosti, která obsahuje všechny problémy ze tříd NP a coNP a předpokládá se, že i nějaké další, což by znamenalo, že vyřešit problém C-Existence je ještě složitější než vyřešit problém z NP.

2.5.6 Další možnosti omezení preferenčních profilů

Kromě uvedených případů existují i další možnosti omezení preferenčních profilů, které podrobněji popisovat nebudeme. Jako příklad jsme již uvedli FHG. Dále můžeme vyžadovat splnění vlastností jako top-coalition, mutuality, single-peakedness [11], friends appreciation, enemies aversion [21]... a různě koncepty kombinovat.

Nakonec si shrneme uvedené poznatky ze složitosti problému existence v Tabulce 2.2. Soustředíme se na koncepty core stability a striktní core stability, protože na ty se zaměříme v dalších kapitolách. Problém SC-Existence v Hedonických hrách s $\mathscr{W}$-preferencemi nechaly Cechlárová a Hajduková [17] otevřený. V roce 2015 Peters a Elkind [49] v tabulce se svými a dřívějšími výsledky pro tento problém žádný výsledek také neuvedli a ani nám se nepodařilo dohledat, že by problém někdo vyřešil. Složitost ostatních vynechaných problémů se nám také přes veškerou snahu nepovedlo najít.

Verze HG	Poznámky	C	SC
Obecné	IRCL	NP-c [10; Prop. 1]	NP-h[49]
	IRCL, striktní pref.	NP-c [10; Prop. 4]	
	HCN	NP-h [26; Th. 5]	NP-h[49]
Anonymní		NP-c [10; Prop. 7]	
	striktní pref.	NP-c [10; Prop. 7]	
$\mathscr{B}$-pref.		NP-c [16; Th. 5]	NP-c [16; Th. 4]
	striktní pref.	triv. [16]	triv. [18; Th. 1]
$\mathscr{W}$-pref.		NP-c [17; Th. 25]	
	striktní pref.	P [17; Sec. 4]	P [18; Th. 6]
ASHG		Σ_2^p-c [55; Th. 2.2]	NP-h [54; Th. 1]
	sym. pref.	NP-h [8; Th. 2]	NP-h [8; Th. 2]

Tabulka 2.2. Porovnání složitostí problému Existence vybraných konceptů stability a verzí Hedonických her. Zkratky: pref. – preference, sym. – symetrické, NP-c – NP-úplný problém, Σ_2^p-c – Σ_2^p-úplný problém, NP-h – NP-těžký problém, P – problém je ve třídě P, triv. – triviální (vždy existuje), Th. – Theorem, Prop. – Proposition, Sec. – Section.

Kapitola 3
Nahrazování agentů

Přejděme nyní k problému, kdy se nám změní množina agentů, jehož složitostí se nadále budeme zabývat. Představme si, že jsme vedoucí skautského oddílu s funkčním družinovým systémem, tedy členové jsou rozdělení do menších skupinek, ve kterých se velmi dobře znají, kamarádí se a tvoří sehraný tým. Přišel ale konec školního roku a po táboře část členů přestoupí do oddílu starších skautů, Čáp se stěhuje do jiného města a Sokol s Vlaštovkou dají před skautingem přednost svému oblíbenému sportu. Místo nich přijmeme nováčky. Tím se jistě změní zaběhnuté družiny. Nechceme však, aby se celé rozdělení do družin přestavělo a abychom museli všechno budovat od začátku. V každé družině by mělo zůstat jádro z dosavadních členů, kteří zachovají družinovou identitu a snadněji pomůžou s rozběhem.

V jiném případě získala firma prostředky na přestavbu svých kanceláří, ale jen části. Z organizačních důvodů bylo rozhodnuto, že několik oddělení zůstane beze změny tak, jak bylo, ostatní se mohou přeměnit libovolně, tedy sloučit, rozdělit, prohodit část zaměstnanců, přijmout další zaměstnance apod.

Z hlediska Hedonických her vycházíme z nějaké struktury koalic a snažíme se ji přetvořit v jinou, která obsahuje jinou množinu agentů, ale té původní se nějakým způsobem podobá. Tuto míru změny si musíme také definovat. Z úvodu této kapitoly plyne pár možností, další příklady můžeme snadno doplnit:

- V každé koalici z původní struktury koalic musí být zůstat část členů.
- Několik koalic musí zůstat beze změny.
- Koalice v nové struktuře koalic musí mít stejné velikosti jako v té původní.
- Do každé koalice může být přiřazen nejvýše jeden nováček.
- Každý agent, který zůstává, musí mít ve své nové koalici aspoň 2 agenty, se kterými byl v koalici v původní struktuře koalic.

S výběrem naší míry chvíli počkáme a nejprve si zadefinujeme upravenou verzi Hedonických her, kde agenty rozdělíme na ty původní a na nováčky.

Definice 3.1 Hedonická hra s novými agenty. *Mějme množinu* starých agentů A*, neprázdnou množinu* nových agentů N*,* $A \cap N = \emptyset$*, a preferenční profil* $\succsim$ *definující pro každého agenta* $a \in A \cup N$ *reflexivní, úplnou a tranzitivní relaci* $\succsim_a$ *na* $(A \cup N)_a$. Hedonická hra s novými agenty *je uspořádaná trojice* $(A, N, \succsim)$.

V původní struktuře koalic se mohli vyskytovat i další agenti nezahrnovaní do množiny starých agentů, kteří pro nás svým odchodem ztratili význam kromě faktu, že ve své koalici potenciálně uvolnili místo někomu dalšímu. Abychom tuto informaci zachovali, zavedeme si v koalicích volná místa.

Definice 3.2 Koalice s volnými místy. *Mějme množinu agentů* A *a číslo* $k \in \mathbb{N}_0$. Koalice s k volnými místy *je množina* $S^{\bigcirc} = S \cup \{\bigcirc_1, \bigcirc_2, \dots, \bigcirc_k\}$*, kde* $S \subseteq A$*,* $\bigcirc_i \notin A$ *pro všechna* $i \in [k]$. Koalice s volnými místy *je koalice s* $k \geq 1$ *volnými místy. Prvky* $\bigcirc_i$ *se v rámci jedné struktury koalic mohou opakovat. Pro zdůraznění, že ve struktuře koalic je nějaká koalice s volnými místy, budeme takovou strukturu koalic značit* $\pi^{\bigcirc}$.

3.1 Hedonické hry s fixními velikostmi koalic

Dále se budeme zabývat případy, kdy koalice mají pevně dané velikosti. Může se jednat o situace, kdy rozřazujeme zaměstnance do kanceláří s pevně daným počtem pracovních míst, táborníky do různě velkých stanů nebo do skupinek na programy, s různými kapacitami účastníků. Poslední příklad se blíží problému zvanému Group Activity Selection Problem (výběr skupinových aktivit), ve kterém si agenti kromě samotných koalic vybírají ještě aktivitu, které se chtějí věnovat [20]. V našem případě ale můžeme předpokládat, že účastníci nevědí, jakým aktivitám se budou věnovat, a volí si tedy skupinku jen podle toho, jak preferují jednotlivé koalice.

Již jsme zmínili, že problém Stabilních Spolubydlících je speciálním případem Hedonických her, kdy všechny koalice mají velikost 2. Když agenty rozdělíme do dvou skupin a hledáme párování mezi nimi (v žádné dvojici nesmí oba patřit do stejné skupiny), dostaneme problém Stabilních Manželství zavedený roku 1962 [30]. Nepřekvapivě byly také uvažovány jiné velikosti. Alkan [3] protipříkladem ukázal, že když jsou agenti podobně jako v problému Stabilních Manželství rozděleni do 3 skupin (např. ženy, muži a děti), stabilní struktura koalic nemusí existovat. V takové situaci mluvíme o trojdimenzionálním párování. Boros a kol. [15] se zabývali případem, kdy skupin je s a dokázali, že když je počet členů v každé skupině roven nejvýše s a preference jsou cyklické, tedy např. muži hodnotí koalice jen podle žen, ženy jen podle dětí, děti jen podle psů a psi jen podle mužů, vždy existuje stabilní řešení. Obdobně existuje trojdimenzionální problém Stabilních Spolubydlících s koalicemi velikosti 3. Ng a Hirschberg [45] ukázali, že problém rozhodnutí o existenci stabilního řešení trojdimenzionálních Stabilních Spolubydlících i Stabilních Manželství je NP-úplný.

Cseh a kol. [19] se zabývali složitostí problémů PO-Existence, PO-Verifikace a hledáním Pareto optimální struktury koalic, když jsou velikosti koalic fixní. Uvažovali mimo jiné případy, kdy preference jsou striktní, $\mathscr{W}$-preference nebo podle nejlepšího agenta (ale od $\mathscr{B}$-preferencí se liší tím, že díky fixním velikostem koalic jsou lhostejní mezi koalicemi se stejným nejlepším agentem) a kdy velikosti koalic jsou nejvýše 3. PO-Verifikace je coNP-úplná ve všech jimi zkoumaných případech. Když agenti mohou prohlásit jiné za neakceptovatelné, je PO-Existence NP-úplná. Také ukázali, že aplikací sériového diktátorství lze ve třech případech dospět k Pareto optimální struktuře koalic.

Bilò a kol. [13] se zabývali ASHG se symetrickými preferencemi. Řešili případ *swap stability*, která vyžaduje, aby žádná dvojice agentů nezískala, když se prohodí. Podle toho, jak se definuje zisk, rozpoznávají tři druhy swap stability a dokázali, že swap stabilní struktura koalic vždy existuje. Argumentovali, že koncepty stability, ve kterých se velikost koalic mění (Nash stabilita) nebo vznikají nové koalice (core stabilita), nejsou použitelné, protože v jejich příkladu aplikace není možno velikosti koalic změnit.

My se takto omezovat nebudeme a i si uvedeme příklad, který nás k tomu opravňuje. Na táboře mají všechny stany danou kapacitu, a kdyby kontrola z hygienické stanice zjistila, že nějaké děti nemají dostatek osobního prostoru, nebyla by spokojená. Dětem samotným tento fakt vůbec nevadí, a když budou chtít, klidně se do omezeného prostoru namačkají (zkušenosti říkají, že i když se to nezdá, vejdou se). Proti sobě tedy stojí požadované velikosti koalic a možné blokující koalice jiných velikostí, zabývat se core stabilitou proto dává smysl.

Definice 3.3 Struktura koalic s fixními velikostmi koalic. *Mějme Hedonickou hru* $(A, \succsim)$ *a soubor velikostí koalic* $L = (\ell_1, \dots, \ell_n)$*, kde* $\sum_{i=1}^{n} \ell_i = |A|$ *a* $n \in \mathbb{N}$. Struktura koalic s velikostmi L *je struktura koalic* $\pi = \{S_1, \dots, S_n\}$*, kde pro každé* $i \in [n]$ *platí* $|S_i| = \ell_i$.

Věta 3.1. *Mějme Hedonickou hru $(A, \succsim)$ reprezentovanou pomocí IRCL a soubor velikostí koalic $L = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$, kde $\sum_{i=1}^{n} \ell_i = |A|$ a $n \in \mathbb{N}$. Problém rozhodnutí o existenci core stabilní struktury koalic s velikostmi L je NP-úplný.*

Důkaz. Jedná se o zobecnění problému Stabilních Spolubydlících S Lhostejností (preference nemusí být striktní), o kterém víme, že je NP-úplný. Množina agentů zůstává stejná. Soubor velikostí koalic obsahuje $\frac{|A|}{2}$-krát velikost 2. Preference agenta $a \in A$ mezi koalicemi tvoří nejprve dvojčlené koalice, mezi kterými jsou vztahy podle toho, jak a ohodnotil ostatní agenty, ty striktně preferuje před vlastní koalicí $\{a\}$, kterou striktně preferuje před zbývajícími koalicemi (mezi nimi mohou být vztahy libovolné).

Pokud M je stabilní párování pro instanci problému Stabilních Spolubydlících S Lhostejností, tak také určuje core stabilní strukturu koalic. Každý agent je totiž v dvojčlenné koalici, které jsou v preferencích první, takže blokovat by mohla jen jiná dvojčlenná koalice, která by ale tvořila pár blokující M.

Pokud je π core stabilní struktura koalic instance Hedonické hry s fixními velikostmi, tak jsou všichni agenti v dvojčlenné koalici, která určuje párování a jelikož neexistuje žádná blokující koalice, neexistuje ani žádný blokující pár.

Problém je v NP, protože když dostaneme core stabilní strukturu koalic, v polynomiálním čase zjistíme, zda má správné velikosti a stejným způsobem jako u obecné Hedonické hry poznáme, zda nevznikne blokující koalice. □

3.2 Doplnění novými agenty

My se zaměříme na situace, kdy se pouze snažíme obsadit prázdná místa novými agenty. Jinak se původní koalice nemění.

Definice 3.4 Doplnění nových agentů. *Mějme koalici $S^{\bigcirc}$ s k volnými místy a množinu agentů X, kde $|X| = k$.* Doplněním *agentů X do koalice $S^{\bigcirc}$ rozumíme vytvoření koalice $S = (S^{\bigcirc} \setminus \{\bigcirc_1, \bigcirc_2, \ldots, \bigcirc_k\}) \cup X$.*

Definice 3.5 Doplněná struktura koalic. *Mějme Hedonickou hru s novými agenty $(A, N, \succsim)$ a strukturu koalic $\pi^{\bigcirc} = \{S_1^{\bigcirc}, S_2^{\bigcirc}, \ldots, S_p^{\bigcirc}\}$, kde $S_i^{\bigcirc}$ je koalice s k_i volnými místy pro $i \in [p]$ a platí $\sum_{i=0}^{p} k_i = |N|$.* Doplněná struktura koalic *π' je struktura koalic vytvořená doplněním agentů $N_i \subseteq N$ do každé koalice $S_i^{\bigcirc}$ pro $i \in [p]$, přičemž platí, že $N_i \cap N_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$, $j \in [p]$.*

V obecném případě se v preferencích jednotlivých agentů mohou různě střídat koalice, ve kterých jsou ostatní agenti jen staří, nebo jen noví, nebo jsou tyto dvě skupiny různě namíchané.

I v běžném životě se ale může stát, že dobře zaběhnutý kolektiv žádné nováčky přijímat nechce, a tak všichni agenti preferují koalice složené jen ze starých agentů. Noví agenti, kteří by do takové skupiny přišli, si mohou také říct, že jednoho člověka přijmou snáze než více lidí a i v jejich preferencích budou na prvním místě koalice složené ze starých agentů (a jich samotných). Podobně si lze představit situaci, kdy po delší době strávené se stejnými lidmi jejich obliba klesne natolik, že každý dá přednost neznámým tvářím ze skupiny nových agentů. Tyto dva případy popisují následující definice.

Definice 3.6 Preferování množiny agentů. *Mějme Hedonickou hru s novými agenty $(A, N, \succsim)$ a množinu agentů $X \subseteq A \cup N$. Pokud pro každého agenta $a \in A \cup N$ a libovolné koalice $S, T \in (A \cup N)_a$ takové, že $S \subseteq \{a\} \cup X$ a $T \nsubseteq \{a\} \cup X$, platí $S \succ_a T$, řekneme, že* agenti z množiny *X* jsou preferovaní.

Pokud $X = A$, tvrdíme, že staří agenti jsou preferovaní.

Pokud $X = N$, tvrdíme, že noví agenti jsou preferovaní.

Lemma 3.2. *Mějme Hedonickou hru s novými agenty* $(A, N, \succsim)$. *Pokud jsou preferovaní staří agenti, pak v žádné individuálně racionální struktuře koalic nemůže existovat koalice obsahující zároveň starého agenta* $a \in A$ *a nového agenta* $n \in N$.

Důkaz. Předpokládejme, že existuje struktura koalic π, ve které je koalice obsahující zároveň starého a nového agenta. Buď $S \in \pi$ tato koalice obsahující zároveň starého agenta $a \in A$ a nového agenta $n \in N$. Protože jsou preferovaní staří agenti a $n \in S$, tedy $S \nsubseteq A$, musí ale platit $\{a\} \succ_a S$, tudíž struktura koalic π není core stabilní. □

Důsledek 3.3. *Mějme Hedonickou hru s novými agenty* $(A, N, \succsim)$ *a strukturu koalic* $\pi^{\bigcirc}$. *Pokud jsou preferovaní staří agenti a nějaká koalice* $S^{\bigcirc} \in \pi^{\bigcirc}$ *velikosti* ≥ 2 *má* $k \geq 1$ *volných míst, pak neexistuje individuálně racionální (tedy ani core stabilní) doplněná struktura koalic.*

V případě preferování nových agentů platí podobné tvrzení, protože každý nový agent preferuje být sám před libovolnou koalicí obsahující nějakého starého agenta.

Pozorování 3.4. *Mějme Hedonickou hru s novými agenty* $(A, N, \succsim)$ *a strukturu koalic* $\pi^{\bigcirc}$. *Pokud jsou preferovaní noví agenti a nějaká koalice* $S^{\bigcirc} \in \pi^{\bigcirc}$ *obsahující aspoň jednoho starého agenta má* $k \geq 1$ *volných míst, pak neexistuje individuálně racionální (tedy ani core stabilní) doplněná struktura koalic.*

Situaci nám v případě preferování nových agentů komplikuje fakt, že noví agenti se nechtějí přidávat ke starým. Můžeme si ale říci, že nám na názoru nových agentů nezáleží, protože se jedná o nováčky, kteří se musí podřídit ostatním.

Definice 3.7 Zanedbání preferencí množiny agentů. *Mějme Hedonickou hru s novými agenty* $(A, N, \succsim)$ *a množinu agentů* $X \subseteq (A \cup N)$. *Pokud pro každého agenta* $a \in X$ *a libovolné dvě koalice* $S, T \in (A \cup N)_a$ *platí* $S \sim_a T$, *řekneme, že* zanedbáváme preference agentů z množiny X.

Pokud $X = N$, *tvrdíme, že* zanedbáváme preference nových agentů.

Pokud $X = A$, *tvrdíme, že* zanedbáváme preference starých agentů.

Případ, kdy nebereme ohled na názor starých agentů může vypadat nerealisticky, ale může se jednat například o rozdělování dětí do družin s danými rádci. Rádci zpravidla patří ke starším dětem, jsou zkušenější a mají vůdcovské schopnosti, takže při jejich výběru vedoucí nemusí mít jiné možnosti. Když navíc každý rádce má možnost vést schůzky jen v jeden určený čas, nemůže se rozhodnout přestoupit do jiné družiny a nezohledňování jeho preferencí pak ani není zásahem zlých vedoucích.

Lemma 3.5. *Mějme Hedonickou hru s novými agenty* $(A, N, \succsim)$. *Pokud jsou preferovaní noví agenti a zanedbáváme preference nových agentů, pak v žádné striktně core stabilní struktuře koalic nemůže existovat koalice obsahující alespoň dva různé staré agenty.*

Důkaz. Předpokládejme, že existuje striktně core stabilní struktura koalic π, ve které je koalice obsahující alespoň dva různé staré agenty. Buď $S \in \pi$ taková koalice, tedy splňující $a, b \in (S \cap A)$, $a \neq b$, a buď $n \in N$ nový agent. Pak $\{n, a\} \succ_a S$, protože jsou preferovaní noví agenti, a $\{n, a\} \sim_n \pi(n)$, protože zanedbáváme preference nových agentů, takže struktura koalic π není striktně core stabilní. □

Důsledek 3.6. *Mějme Hedonickou hru s novými agenty* $(A, N, \succsim)$ *a strukturu koalic* $\pi^{\bigcirc}$. *Pokud jsou preferovaní noví agenti, zanedbáváme preference nových agentů a nějaká koalice* $S^{\bigcirc} \in \pi^{\bigcirc}$ *obsahuje aspoň dva staré agenty, pak neexistuje striktně core stabilní doplněná struktura koalic.*

Z těchto pozorování a důsledků nám plynou jednoduché algoritmy na rozhodnutí, že při preferování nových nebo starých agentů nemůže existovat core stabilní doplněná struktura koalic. Pokud však algoritmus neodpoví, že core stabilní doplněná struktura koalic neexistuje, stále nemáme zaručeno, že existovat bude. Zjistit v obecném případě, zda core stabilní doplněná struktura koalic existuje je těžké.

Věta 3.7. *Mějme Hedonickou hru s novými agenty $(A, N, \succsim)$ a strukturu koalic $\pi^{\bigcirc}$. Problém rozhodnutí o existenci core stabilní doplněné struktury koalic je NP-úplný.*

Důkaz. Budeme redukovat z problému core stabilní struktury koalic s velikostmi L, viz Věta 3.1, což je jen speciální případ doplňování, ve kterém nejsou ve struktuře koalic s prázdnými místy žádní staří agenti. Mějme tedy Hedonickou hru $(A, \succsim)$ a soubor velikostí koalic $L = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$, kde $\sum_{i=1}^{n} \ell_i = |A|$ a $n \in \mathbb{N}$. Tato množina agentů A se stane novými agenty, které budeme doplňovat do $\pi^{\bigcirc}$. Každá koalice $S_i^{\bigcirc} \in \pi^{\bigcirc}$ se skládá z ℓ_i volných míst a neobsahuje žádného starého agenta. Novou instancí je tedy Hedonická hra s novými agenty $(\emptyset, A, \succsim)$ a struktura koalic $\pi^{\bigcirc}$. Jde jen o přepsání zadání tak, aby vyhovovalo definici problému doplňování, takže pokud existuje core stabilní struktura koalic s velikostmi L, bude přímo určovat i core stabilní doplněnou strukturu koalic a naopak core stabilní doplněná struktura koalic dá core stabilní strukturu koalic s velikostmi L.

O struktuře koalic zjistíme v polynomiálním čase, zda vznikla doplněním do $\pi^{\bigcirc}$ a core stabilitu také ověříme v polynomiálním čase, takže problém je v NP. $\square$

3.2.1 Anonymní Hedonické hry

Zaměřme se nyní na anonymní Hedonické hry. Definice pro verzi s novými agenty je jen drobnou obměnou v Definici 2.20.

Definice 3.8 Anonymní Hedonická hra s novými agenty. *Mějme Hedonickou hru s novými agenty $(A, N, \succsim)$. Pokud každý agent z množiny $A \cup N$ má anonymní preference, řekneme, že $(A, N, \succsim)$ je* anonymní Hedonická hra s novými agenty*.*

Ukažme si nyní na příkladu, co doplnění znamená.

Příklad 3.1. Mějme anonymní Hedonickou hru z Příkladu 2.16, tedy množinu agentů $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, jejichž preference mezi velikostmi jsou určeny následovně:

- $a_1 : 4 \succ^s_{a_1} 3 \succ^s_{a_1} 2 \succ^s_{a_1} 1 \succ^s_{a_1} 5$
- $a_2 : 4 \succ^s_{a_2} 3 \succ^s_{a_2} 2 \succ^s_{a_2} 1 \succ^s_{a_2} 5$
- $a_3 : 5 \succ^s_{a_3} 2 \succ^s_{a_3} 1 \succ^s_{a_3} 4 \succ^s_{a_3} 3$
- $a_4 : 3 \succ^s_{a_4} 2 \succ^s_{a_4} 1 \succ^s_{a_4} 4 \sim^s_{a_4} 5$
- $a_5 : 5 \succ^s_{a_5} 4 \succ^s_{a_5} 2 \succ^s_{a_5} 1 \succ^s_{a_5} 3$

Nyní ale agenti a_4 a a_5 odešli a místo nich chceme na jimi vytvořená volná místa doplnit agenty n_1 a n_2, jejichž preference jsou:

- $n_1 : 3 \succ^s_{n_1} 4 \succ^s_{n_1} 2 \succ^s_{n_1} 1 \succ^s_{n_1} 5$
- $n_2 : 5 \succ^s_{n_2} 4 \succ^s_{n_2} 3 \succ^s_{n_2} 2 \succ^s_{n_2} 1$

Tím máme určenou anonymní Hedonickou hru s novými agenty $(A, N, \succsim)$, kde $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ a $N = \{n_1, n_2\}$.

Struktura koalic $\pi_1 = \{\{a_1, a_2, a_4\, a_5\}, \{a_3\}\}$ nebyla kvůli agentovi a_4 ani individuálně racionální. Odchodem agentů však vznikla struktura koalic s volnými místy $\pi^{\bigcirc} = \{\{a_1, a_2, \bigcirc_1, \bigcirc_2\}, \{a_3\}\}$, do které můžeme doplnit nové agenty a vznikne striktně core stabilní $\pi = \{\{a_1, a_2, n_1\, n_2\}, \{a_3\}\}$.

Oproti tomu struktura koalic $\pi_2 = \{\{a_1, a_2, a_4\}, \{a_3, a_5\}\}$ byla striktně core stabilní. Vznikla struktura koalic s volnými místy $\pi^{\bigcirc} = \{\{a_1, a_2, \bigcirc_1\}, \{a_3, \bigcirc_1\}\}$. Oba noví agenti striktně preferují velikost 3 před velikostí 2, takže když do koalice $\{a_1, a_2, \bigcirc_1\}$ doplníme libovolného z nich, spolu s agenty a_1 a a_2 bude ten druhý tvořit slabě blokující koalici a žádná doplněná struktura koalic nemůže být striktně core stabilní. Struktura koalic $\{\{a_1, a_2, n_1\}, \{a_3, n_2\}\}$ je aspoň core stabilní.

Pro nalezení striktně core stabilní doplněné struktury si popíšeme algoritmus `DoplnAnonSC`. Každého nového agenta musíme přiřadit na nějaké volné místo a pro tento účel si vytvoříme graf, ve kterém potom zkusíme najít perfektní párování. Hranu mezi nového agenta a volné místo dáme jen tehdy, pokud by agent v koalici odpovídající velikosti neměl možnost vytvořit blokující koalici. Navíc si spočítáme, jestli se mezi novými a starými agenty nenajde dost agentů na vytvoření blokující koalice velikosti, která se ve struktuře koalic nevyskytuje. U starých agentů ještě zkontrolujeme, zda neblokují z toho důvodu, že nějakou existující velikost koalice preferují před velikostí své přiřazené koalice.

Algoritmus 3.2.1 ukazuje pseudokód. Nejprve inicializujeme používané struktury. Pak zjistíme, kde mohou blokovat staří agenti. Poté zjistíme, kde mohou blokovat noví agenti, a zapamatujeme si, na která volná místa je můžeme přiřadit. Následně zkontrolujeme, jestli vznikla blokující koalice, a pokud ne, najdeme párování mezi novými agenty a volnými místy.

Věta 3.8. *Mějme anonymní Hedonickou hru s novými agenty $(A, N, \succsim)$ a strukturu koalic $\pi^{\bigcirc}$ s celkem $|N|$ volnými místy. Algoritmus* `DoplnAnonSC` *najde doplněnou striktně core stabilní strukturu koalic π, pokud existuje.*

Důkaz. Chceme dokázat, že Algoritmus 3.2.1 vrátí doplněnou strukturu koalic, která je striktně core stabilní, když to lze, a že pokud ji nevrátí, tak skutečně nemůže existovat.

Rozdělme si velikosti koalic v preferencích každého agenta $a \in A \cup N$ do tří množin. Množina X_1^a obsahuje takové velikosti koalic, které agent a striktně preferuje před velikostmi, které se vyskytují ve vstupní struktuře koalic $\pi^{\bigcirc}$. Množina X_2^a obsahuje takovou velikost ℓ' koalice v $\pi^{\bigcirc}$, kterou agent a nejvíce preferuje, a všechny další velikosti m, mezi kterými je agent lhostejný. Množina X_3^a obsahuje zbývající velikosti, tedy takové, před kterými agent a striktně preferuje velikost ℓ'. Formálně:

- Velikost koalice $\ell' \in \{|S^{\bigcirc}| \mid S^{\bigcirc} \in \pi^{\bigcirc}\}$ je libovolná taková, že pro všechny další $\ell \in \{|S^{\bigcirc}| \mid S^{\bigcirc} \in \pi^{\bigcirc}\}$ platí $\ell' \succsim_a^s \ell$.
- Množina $X_1^a := \{\ell \mid \ell \succ_a^s \ell'\}$.
- Množina $X_2^a := \{\ell \mid \ell \sim_a^s \ell'\}$.
- Množina $X_3^a := \{\ell \mid \ell' \succ_a^s \ell\}$.

Nyní si dokážeme pomocná tvrzení, ze kterých důkaz korektnosti vyplyne.

Nejprve si všimneme, že jelikož všechny množiny X_1^a obsahují jen takové velikosti koalic, které se ve struktuře koalic $\pi^{\bigcirc}$ nevyskytují, a doplněním nových agentů se velikosti koalic nezmění, nemůže žádný agent a patřit do koalice velikosti $\ell \in X_1^a$.

Pozorování 3.9. *Žádný agent $a \in A \cup N$ nemůže v doplněné struktuře koalic π patřit do koalice velikosti $\ell \in X_1^a$.*

Lemma 3.10. *Žádný nový agent $n \in N$ nemůže být ve striktně core stabilní doplněné struktuře koalic π doplněn do koalice velikosti $\ell \in X_3^n$.*

Důkaz. Předpokládejme, že agent $n \in N$ byl v π doplněn do koalice velikosti $\ell \in X_3^n$, přitom π je striktně core stabilní. Z definice množiny X_3^n ale víme, že agent n před ℓ striktně preferuje nějakou jinou velikost ℓ', která se ve struktuře koalic π vyskytuje. Když si nyní vezmeme koalici $S \in \pi$ velikosti ℓ', tak libovolných $\ell' - 1$ agentů z S spolu s agentem n tvoří blokující koalici, protože n ji striktně preferuje a ostatní jsou lhostejní, což je spor. $\square$

U starých agentů je situace podobná, ale protože jim v tomto problému jsou koalice pevně přiřazeny, striktně core stabilní doplněná struktura koalic by vůbec existovat nemohla.

Pozorování 3.11. *Pokud nějaký starý agent a patří v $\pi^{\bigcirc}$ do koalice velikosti $\ell \in X_3^a$, pak striktně core stabilní doplněná struktura koalic π neexistuje.*

Důsledek 3.12. *Pokud je doplněná struktura koalic π striktně core stabilní, pak každý agent $a \in A \cup N$ patří do koalice velikosti $\ell \in X_2^a$.*

```
Algoritmus DoplnAnonSC
Vstup:
    Anonymní Hedonická hra s novými agenty $(A, N, \succsim)$.
    Struktura koalic $\pi^{\bigcirc}$ s celkem $|N|$ volnými místy.
Výstup:
    Striktně core stabilní doplněná struktura koalic $\pi$, pokud existuje.
```

```
1  Pro každou velikost $\ell \in [|A| + |N|]$:
2      $muzeBlokovat[\ell] \leftarrow 0$
3      $volne[\ell] \leftarrow$ počet volných míst v koalicích velikosti $\ell$ v $\pi^{\bigcirc}$
4  $V \leftarrow \{v_i^\ell \mid i \in \{1, \dots, volne[\ell]\}\}$
5  $E \leftarrow \emptyset$
6  Pro každého agenta $a \in A$:
7      Pro každou velikost $\ell$ v preferencích agenta $a$ od nejpreferovanější:
8          Pokud v $\pi^{\bigcirc}$ neexistuje koalice velikosti $\ell$:
9              $muzeBlokovat[\ell]$++.
10         Jinak:
11             Pro $m \leftarrow \ell$ a všechna následující $m$ taková, že $\ell \sim_a^s m$:
12                 $muzeBlokovat[m]$++
13             Pokud $a$ nepatří do žádné koalice velikosti $m, m \sim_a^s \ell$:
14                 Striktně core stabilní doplněná struktura koalic neexistuje.
15             Pokračuj s dalším agentem.
16 Pro každého agenta $n \in N$:
17     Pro každou velikost $\ell$ v preferencích agenta $n$ od nejpreferovanější:
18         Pokud v $\pi^{\bigcirc}$ neexistuje koalice velikosti $\ell$:
19             $muzeBlokovat[\ell]$++.
20         Jinak:
21             Pro $m \leftarrow \ell$ a všechna následující $m$ taková, že $\ell \sim_a^s m$:
22                 $muzeBlokovat[m]$++
23                 Pro každé $i \in \{1, \dots, volne[m]\}$ přidej hranu $\{n, v_i^m\}$ do $E$.
24             Pokračuj s dalším agentem.
25 Pro každou velikost $\ell \in [|A| + |N|]$:
26     Pokud $muzeBlokovat[\ell] \geq \ell$
27     a nějaký agent $\ell$ striktně preferuje před svými možnostmi:
28         Striktně core stabilní doplněná struktura koalic neexistuje.
29 Vytvoř bipartitní graf $G = (N \cup V, E)$.
30 Najdi párování $M$ v $G$.
31 Pokud $|M| < |N|$:
32     Striktně core stabilní doplněná struktura koalic neexistuje.
33 Jinak doplň nové agenty do koalic v $\pi^{\bigcirc}$ podle $M$.
```

Algoritmus 3.2.1. DoplnAnonSC.

Důkaz. Plyne z Pozorování 3.9, 3.11 a Lemmatu 3.10. □

Na řádku 13 Algoritmu 3.2.1 kontrolujeme, že každý starý agent $a \in A$ patří do koalice velikosti $\ell \in X_2^a$. Řádky 17–24 zaručují, že se všechny nové agenty $n \in N$ snažíme přiřadit jen do nějaké koalice velikosti $\ell \in X_2^n$ a z Důsledku 3.12 plyne, že jsme tím nepřišli o žádné core stabilní řešení.

Dále si ukážeme, že algoritmus správně rozpozná, zda nemůže existovat blokující koalice nějaké velikosti, která se nevyskytuje v $\pi^{\bigcirc}$. Pokud by existovala blokující koalice velikosti ℓ, která se v $\pi^{\bigcirc}$ nevyskytuje, museli bychom napočítat aspoň ℓ agentů, kteří by byli ochotni se stát její součástí, a aspoň jeden z nich by musel ℓ striktně preferovat před velikostí své koalice. V zavedeném značení to znamená, že aspoň pro jednoho agenta $a \in A \cup N$ platí $\ell \in X_1^a$ a pro dalších aspoň $\ell - 1$ agentů $b \in A \cup N$ je $\ell \in X_1^b \cup X_2^b$. Předpokládáme, že všichni agenti patří do koalice, jejíž velikost je v odpovídající množině X_2^a, protože kdyby tomu nebylo, již víme, že nějaká blokující koalice bude existovat.

Lemma 3.13. *Mějme anonymní Hedonickou hru s novými agenty $(A, N, \succsim)$ a strukturu koalic $\pi^{\bigcirc}$ s celkem $|N|$ volnými místy. Dále mějme doplněnou strukturu koalic π a nechť každý agent $a \in A \cup N$ patří v π do koalice velikosti $\ell \in X_2^a$. Doplněná struktura koalic π je striktně core stabilní právě tehdy, když pro žádnou velikost koalice $\ell \in [|A| + |N|]$ neplatí zároveň $L := |\{a \mid \ell \in X_1^a, a \in A \cup N\}| \geq 1$ a $L + |\{a \mid \ell \in X_2^a, a \in A \cup N\}| \geq \ell$.*

Důkaz. Ukažme nejprve, že pokud je π striktně core stabilní, pak pro žádnou velikost koalice $\ell \in [|A| + |N|]$ neplatí zároveň $L := |\{a \mid \ell \in X_1^a, a \in A \cup N\}| \geq 1$ a $L + |\{a \mid \ell \in X_2^a, a \in A \cup N\}| \geq \ell$.

Pro spor předpokládejme, že doplněná struktura koalic π je striktně core stabilní, a přitom ℓ je taková velikost koalice, že $L := |\{a \mid \ell \in X_1^a, a \in A \cup N\}| \geq 1$ a zároveň $L + |\{a \mid \ell \in X_2^a, a \in A \cup N\}| \geq \ell$. Buď a takový agent, že $\ell \in X_1^a$. V π nemůže existovat koalice velikosti ℓ, protože jinak by ℓ nepatřila do X_1^a. To znamená, že agent a velikost ℓ striktně preferuje před velikostí své koalice $\pi(a)$ a dalších aspoň $\ell - 1$ agentů je alespoň lhostejných, takže společně tvoří blokující koalici a π není striktně core stabilní.

Nyní dokážeme obrácenou implikaci. Předpokládejme, že struktura koalic π není striktně core stabilní, třebaže pro žádnou velikost koalice $\ell \in [|A| + |N|]$ neplatí zároveň $L := |\{a \mid \ell \in X_1^a, a \in A \cup N\}| \geq 1$ a $L + |\{a \mid \ell \in X_2^a, a \in A \cup N\}| \geq \ell$.

Jelikož π není striktně core stabilní, existuje nějaká blokující koalice S. V S musí být nějaký agent $a \in A \cup N$, který S striktně preferuje před $\pi(a)$. Jelikož $|\pi(a)| \in X_2^a$, musí platit $|S| \in X_1^a$. Navíc pro všechny agenty $b \in S$ je $S \succsim_b \pi(b)$, takže $|S| \in X_1^b \cup X_2^b$.

Označme nyní $\ell := |S|$. Musí platit $|\{a \mid \ell \in X_1^a, a \in S\}| \geq 1$, jelikož tato množina obsahuje alespoň agenta a. Množiny X_1^b a X_2^b jsou navíc pro každého agenta b disjunktní, takže $|\{b \mid \ell \in X_1^b, b \in S\}| + |\{b \mid \ell \in X_2^b, b \in S\}| = \ell$, což je ale spor. ☐

Na řádcích 25–28 kontrolujeme právě to, jestli se někde nemůže vytvořit blokující koalice pro velikost koalice nevyskytující se v $\pi^{\bigcirc}$. Podmínka na řádku 13 zaručuje, že každý starý agent a patří do X_2^a. Pokud i každý nový agent n v π patří do X_2^n, je struktura koalic π striktně core stabilní.

Pro doplnění nových agentů na volná místa využijeme párování, protože každé volné místo musí být obsazeno novým agentem a každý nový agent musí být doplněn na volné místo. Hrany jsou v grafu $G = (N \cup X, E)$ tvořeny mezi agentem $n \in N$ a volnými místy z koalic velikosti $\ell \in X_2^n$, takže pokud nenajdeme perfektní párování, nějaký nový agent n by musel být doplněn do koalice velikosti $\ell \in X_3^n$, což by podle Lemmatu 3.10 znamenalo, že π není striktně core stabilní. Jinak nám perfektní párování určuje, na jaká volná místa nové agenty doplnit. (konec důkazu Věty 3.8) ☐

Věta 3.14. *Algoritmus* `DoplnAnonSC` *má časovou složitost* $O(|A|^2 + |N|^{2,5})$.

Důkaz. Označme $k := |A| + |N|$. Pro inicializaci používaných struktur potřebujeme projít strukturu koalic $\pi^{\bigcirc}$ na zjištění počtu volných míst a vytvoření vrcholů grafu odpovídajících volným místům, což můžeme zvládnout v čase $O(k)$.

U starých agentů následně procházíme v nejhorším případě celé jejich preference, ale u každé strávíme jen konstantní čas, protože jakmile narazíme na velikost koalice existující v $\pi^{\bigcirc}$, pokračujeme v čtení dalších preferencí, dokud je agent lhostejný, pak zkontrolujeme, že jsme narazili na velikost koalice, kam agent patří, a přejdeme na dalšího agenta. U nových agentů je situace podobná, ale musíme také přidat hrany mezi agenty a volnými místy. Hranu k určitému volnému místu přidáme pro každého agenta nejvýše jednou, takže dostáváme složitost $\mathrm{O}(k+|N|) = \mathrm{O}(k)$. Celkem tedy prací s preferencemi agentů strávíme čas $\mathrm{O}(k^2)$.

Kontrola vzniku blokujících koalic zabere čas $\Theta(k)$.

Pro nalezení párování v grafu G můžeme použít Hopcroft-Karpův algoritmus pracující v čase $\mathrm{O}((m+n)\sqrt{n})$, kde m je počet hran a n počet vrcholů. [34] Pro náš graf G platí $n = 2 \cdot |N|$ a $m \leq |N|^2$, takže dostaneme $\mathrm{O}((|N|^2 + 2 \cdot |N|) \cdot \sqrt{2 \cdot |N|}) = \mathrm{O}(|N|^{2,5})$.

Složitost celého algoritmu je $\mathrm{O}(2 \cdot k + k^2 + |N|^{2,5}) = \mathrm{O}(k^2 + |N|^{2,5}) = \mathrm{O}(|A|^2 + |N|^{2,5})$, kde poslední rovnost platí, protože $\mathrm{O}((|A| + |N|)^2) = \mathrm{O}(|A|^2 + |N|^2)$. $\square$

Algoritmus vyžaduje prostor velikosti $\mathrm{O}(|A|^2 + |N|^2)$. Preference na vstupu zaberou $\mathrm{O}(|A|^2 + |N|^2)$. Pro pomocná pole a proměnné potřebujeme $\mathrm{O}(|A| + |N|)$. Graf reprezentujeme pomocí seznamu sousedů, který bude velký nejvýše $\mathrm{O}(|N|^2)$. Pro hledání párování budeme dále potřebovat jen $\mathrm{O}(|N|)$.

Zjednodušení algoritmu můžeme použít i pro nalezení individuálně racionální doplněné struktury koalic. U starých agentů jen zkontrolujeme, že před velikostí své koalice nepreferují velikost 1. Novým agentům přidáme hrany k takovým místům, která odpovídají koalicím velikostí, které jsou před velikostí 1 preferované (nebo jsou mezi nimi lhostejní). Tím zařídíme, že žádný z agentů nemá sklon k deviaci, a opět pomocí párování zkusíme najít doplněnou strukturu koalic. Na rozdíl od striktní core stability nemusíme vůbec zkoumat blokující koalice, čímž ušetříme čas i prostor.

U core stability je situace v porovnání se striktní core stabilitou složitější, protože jak lze vidět na Příkladu 3.1, agenti nemusí blokovat, ani když patří do koalice velikosti z množiny X_3^a. Core stabilitě se proto budeme věnovat v celé následující kapitole.

Kapitola 4
Core stabilní doplnění

V této kapitole se pokusíme vyřešit hledání core stabilní doplněné struktury v anonymních Hedonických hrách s novými agenty. Nejprve si v Sekci 4.1 ukážeme algoritmus hledající řešení hrubou silou. Pak si v Sekci 4.3 předvedeme několik způsobů převedení našeho problému na toky v sítích, které si pro tento účel v Sekci 4.2 zadefinujeme. V Sekci 4.4 pak porovnáme naše transformace se speciálními případy toků v sítích. Nakonec v Sekci 4.5 zmíníme pokusy o dokázání NP-těžkosti.

4.1 Hledání hrubou silou

Nejprve si popíšeme hrubou silou pracující algoritmus `DoplnAnonCNaiv`, který se rekurzivně pokouší agenty přiřadit na volné místo v koalici pro ně nejlepší velikosti, při neúspěchu potom druhé nejlepší, třetí nejlepší... Když se agent dostane v preferencích tak daleko, že už jistě s dříve doplněnými agenty bude blokovat, musí se změnit doplnění některého z předchozích agentů, tedy backtrackovat. Pseudokód viz Algoritmus 4.1.1.

Algoritmus DoplnAnonCNaiv
Vstup:
  Anonymní Hedonická hra s novými agenty $(A, N, \succsim)$.
  Struktura koalic $\pi^{\bigcirc}$ s celkem $|N|$ volnými místy.
Výstup:
  Core stabilní doplněná struktura koalic π, pokud existuje.

Pro každou velikost $\ell \in [|A| + |N|]$:
  $volne[\ell] \leftarrow$ počet volných míst v koalicích velikosti ℓ v $\pi^{\bigcirc}$
  $blokuje[\ell] \leftarrow$ počet starých agentů, kteří mohou blokovat
  Zkontroluj, že staří agenti netvoří blokující koalici.
Urči novým agentům pořadí.
Zavolej DoplnAgentaI(n_0, $volne$, $blokuje$)

DoplnAgentaI(agent n_i, pole $volne$, pole $blokuje$)
  Pro velikost koalice ℓ v preferencích agenta a_i od nejpreferovanější:
    Pokud $volne[\ell] > 0$:
      $volne[\ell]$--
      Pokud n_i je poslední nebo DoplnAgentaI(n_{i+1}, $volne$, $blokuje$):
        Agent i je v koalici velikosti ℓ.
        Vrať true
    $blokuje[\ell]$++
    Pokud $blokuje[\ell] \geq \ell$:
      Vrať false
  Vrať false

Algoritmus 4.1.1. `DoplnAnonCNaiv`.

Věta 4.1. *Mějme anonymní Hedonickou hru s novými agenty* $(A, N, \succsim)$ *a strukturu koalic* $\pi^{\bigcirc}$ *s celkem* $|N|$ *volnými místy. Algoritmus* `DoplnAnonCNaiv` *najde doplněnou core stabilní strukturu koalic* π*, pokud existuje.*

Důkaz. Starým agentům jsou koalice předem určené a z toho vyplývá, v jakých mohou blokovat. Pro každou velikost koalice ℓ, kterou starý agent $a \in A$ striktně preferuje před velikostí své koalice $|\pi^{\bigcirc}(a)|$ zvýšíme počet agentů, kteří by blokovali v koalici velikosti ℓ o 1. Na řádku 4 Algoritmu 4.1.1 porovnáním počtu blokujících agentů a velikosti zjistíme, zda má cenu pokračovat.

Novým agentům určíme nějaké pořadí a na prvního zavoláme rekurzivní funkci `DoplnAgentaI`. Pokud vrátí `true`, každý agent byl přiřazen na nějaké unikátní volné místo, protože přiřazením vždy snížíme jejich počet, a nevznikla blokující koalice, protože při každém posunu v preferencích zvýšíme počet blokujících agentů u dané velikosti koalice a pak zkontrolujeme, že nedosáhla potřebného počtu na vznik blokující koalice. Pokud funkce vrátí `false`, tak v každé vyzkoušené možnosti vznikla blokující koalice. Když vrátí `false` u i-tého agenta, znamená to, že buď tento agent dospěl ve svých preferencích do situace, kdy spolu s dříve přiřazenými agenty tvoří blokující koalici, takže nemá cenu zkoušet pro něho další možnosti a je nutné změnit přiřazení předchozích agentů, nebo pro něho byly vyzkoušeny všechny možnosti a pokaždé $i+1$-ní agent vrátil `false` (z jednoho z těchto důvodů), takže je opět třeba backtrackovat. $\square$

Algoritmus tedy očividně funguje a je snadno popsatelný, ale potíž je v jeho časové složitosti. Každou možnost doplnění vyzkouší nejvýše jednou, jenže to nám dává čas $\mathrm{O}(|N|^{|N|})$. V některých případech jistě dojde již dříve ke zjištění, že část již dosazených agentů tvoří blokující koalici, takže se nevyzkouší všechna možná doplnění agentů zbývajících. Je to však zaručené za každé situace? Existuje lepší odhad časové složitosti?

Co se týká prostorové složitosti, na vstupu očekáváme preferenční profily velikosti $\mathrm{O}(|A|^2 + |N|^2)$. Rekurzivní volání se dostane do hloubky nejvýše $\mathrm{O}(|N|)$ a potřebuje dvě pole velikosti $\mathrm{O}(|A|+|N|)$ spolu s několika proměnnými konstantní velikosti. Celkem si tedy vystačíme s prostorem $\mathrm{O}(|A|^2 + |N|^2)$.

4.2 Toky v sítích

Další pokusy o nalezení algoritmu pro hledání core stabilní doplněné struktury koalic v anonymní Hedonické hře s novými agenty vedly přes toky v sítích, které si v této sekci zadefinujeme. Nejprve si ale popíšeme, k čemu toky v sítích mohou sloužit.

Toky v sítích nám umožňují modelovat řadu situací z běžného života. Potrubí rozvádí vodu nebo ropu, kabely elektřinu pro spotřebiče či data v počítačové síti. Pro přepravu zboží se může využít železniční a dálniční sítě. Ve všech případech komodity proudí z místa na místo, těchto míst je celá řada a jen některá jsou spojena přímo. Spojení tvoří právě trubky, kabely, železnice a dálnice a zpravidla mají omezenou kapacitu. Místa jsou města, domácnosti, počítače, továrny nebo obchody. V síti se nemusí pohybovat jen jeden druh komodity, může jít i o různé druhy zboží, které se ale pohybují stejnými prostředky, takže dohromady musí splňovat požadavky na maximální kapacitu.

Všechny tyto akce se odehrávají na jakýchsi cestách mezi body, které můžeme převést do grafové reprezentace pomocí orientovaných hran a vrcholů. Každé hraně přiřadíme nějakou kapacitu, kterou tok nesmí převýšit, a cenu, kterou zaplatíme za transport jedné jednotky komodity. U vrcholů určíme číslem, zda komoditu do sítě dodávají (číslo bude kladné), nebo ji naopak odebírají (číslo bude záporné), a rozdíl množství komodit, které z vrcholu odteče a které do vrcholu přiteče, se této hodnotě musí rovnat.

Jednou ze základních otázek pak je, jak tyto požadavky vrcholů uspokojit za minimální cenu, pokud to vůbec lze. Tím se zabýváme při hledání *toku v síti s minimální cenou*. Můžeme také požadavky všech vrcholů až na dva speciální nazývané zdroj a stok nastavit na nulu a zkoumat, jaký největší tok může téct ze zdroje do stoku. V takovém případě se jedná o hledání *maximálního toku v síti*. S maximálními toky se seznámíme v části 4.2.1, tokům s minimální cenou se věnuje část 4.2.2.

Toky v sítích lze využít k řešení zdánlivě nesouvisejících problémů. Jen v oblasti grafů nám mohou pomoci k nalezení párování v bipartitních grafech nebo zjištění počtu hranově či vrcholově disjunktních cest mezi dvěma vrcholy [51]. Ahuja, Magnanti a Orlin [2] uvádí jako možné aplikace mimo jiné plánování úkolů pro paralelní stroje, určování podobnosti sekvencí DNA a zjištění minimálního času nutného k dokončení projektu.

Nyní přejdeme k formální definici. Předpokládáme znalost základních pojmů z teorie grafů, v případě nutnosti viz Mareš a Valla [43; Kap. 5].

Definice 4.1 Tok v síti. Sítí *nazveme uspořádanou trojici* (G, c, u)*, kde* $G = (V, E)$ *je orientovaný graf,* $c\colon E \to \mathbb{R}$ *je funkce přiřazující hranám jejich* ceny *a* $u\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ *je funkce přiřazující hranám jejich* kapacity*.*

Funkce $b\colon V \to \mathbb{R}$ *přiřazuje vrcholům jejich* požadavky *na dodávku nebo odběr komodity.*

Tok v síti *je funkce* $f\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ *splňující:*

- *Pro každou hranu* $e \in E$ *platí* $0 \leq f(e) \leq u(e)$*.*
- Kirchhoffův zákon*: Pro každý vrchol* $v \in V$ *platí*

$$\sum_{(v,x)\in E} f(v,x) - \sum_{(y,v)\in E} f(y,v) = b(v).$$

Tok v síti (dále také jen *tok*) je tedy libovolná funkce, která splňuje požadavky na kapacity a Kirchhoffův zákon, ale v problémech zabývajících se toky hledáme toky, které jsou pro nás nějakým způsobem speciální.

4.2.1 Maximální tok

Nyní se podrobněji zaměříme na hledání maximálního toku. Dva vybrané vrcholy jsou pro nás zvláště důležité. Jednomu říkáme *zdroj* a je to jediný vrchol v celé síti, kterému dovolujeme mít kladné požadavky. Síť tedy zásobuje komoditou, kterou pak dopravujeme do druhého speciálního vrcholu nazývaného *stok*. Cestou se nesmí nic ztratit, takže požadavky zbylých vrcholů se rovnají nule a do stoku má dorazit stejné množství komodity, jako ze zdroje bylo vypraveno. Toto množství se snažíme maximalizovat. Ceny nás v základní variantě nezajímají.

Definice 4.2 Velikost toku. *Mějme síť* (G, c, u)*, kde* $G = (V, E)$*, zdroj* $z \in V$ *a stok* $s \in V$ *a požadavky takové, že pro všechny vrcholy* $v \in V \setminus \{z, s\}$ *platí* $b(v) = 0$ *a* $b(z) = -b(s)$*.* Velikost toku *je rovna* $b(z)$*.*

Problém: Maximální tok
Instance: Síť (G, c, u), kde $G = (V, E)$, zdroj $z \in V$, stok $s \in V$
Otázka: Najdi maximální tok ze zdroje z do stoku s.

Tento problém má smysl, protože maximální tok vždy existuje. [29] Algoritmů na jeho hledání je známo více. Podrobněji si popíšeme Fordův-Fulkersonův algoritmus. Myšlenka je jednoduchá. Začínáme v situaci, kdy všemi hranami teče nulový tok. Tento tok zaručeně existuje. Dokud to jde, pak nalézáme *zlepšující cesty*, kterými posíláme nenulový tok, až snad dospějeme k maximálnímu toku.

Definice 4.3 Řez. *Mějme síť (G, c, u), kde $G = (V, E)$, zdroj $z \in V$ a stok $s \in V$.* Řezem *nazveme množinu hran $R \subseteq E$ takovou, že v síti (G', c, u) neexistuje žádná orientovaná cesta ze zdroje do stoku, kde $G' = (V, E \setminus R)$.* Kapacita řezu *je $u(R) = \sum_{e \in R} u(e)$.*

Tvrzení 4.2 Hlavní věta o tocích; (Ford a Fulkerson [28; Theorem 1]**.** *Mějme síť (G, c, u), kde $G = (V, E)$, zdroj $z \in V$, stok $s \in V$ a požadavky, pro které platí, že pro všechna $v \in V \setminus \{z, s\}$ je $b(v) = 0$ a $b(z) = -b(s)$. Velikost maximálního toku se rovná kapacitě minimálního řezu:*

$$\max_{f \text{ tok}} b(z) = \min_{R \text{ řez}} u(R).$$

Definice 4.4 Zlepšující cesta. *Mějme síť (G, c, u), kde $G = (V, E)$, zdroj $z \in V$, stok $s \in V$ a požadavky, pro které platí, že pro všechna $v \in V \setminus \{z, s\}$ je $b(v) = 0$ a $b(z) = -b(s)$.* Cesta v síti *je posloupnost $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{m-1}, e_m, v_m)$, kde $v_0, \ldots, v_m \in V$ jsou navzájem různé a pro každé $i \in [m]$ je $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ nebo $e_i = (v_i, v_{i-1})$. Cesta v síti je* nasycená*, pokud pro nějakou hranu $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ je $f(e_i) = u(e_i)$ nebo pro nějakou protisměrnou hranu $e_i = (v_i, v_{i-1})$ je $f(e_i) = 0$. Cesta v síti, která není nasycená, je* zlepšující *(zkráceně jí říkáme zlepšující cesta). Tok, ve kterém je každá cesta ze zdroje do stoku nasycená, nazveme* nasycený*.*

Díky Hlavní větě o tocích (Tvrzení 4.2) nalezením maximálního toku objevíme i řez s minimální kapacitou. Důkaz nebudeme uvádět celý, ale popíšeme si hlavní myšlenky, protože z něj vyplývá algoritmus pro nalezení maximálního toku.

Intuitivně nám připadá, že tok nemůže být větší než kapacita minimálního řezu, protože jím protlačíme jen tak velký tok, jaká je kapacita řezu, a tento řez nám úplně odděluje zdroj od stoku, takže jinudy tok ze zdroje do stoku nedostaneme. Když najdeme tok, jehož velikost se kapacitě nějakého řezu bude rovnat, znamená to, že takový tok je maximální.

Tvrdíme, že tok je maximální právě tehdy, když je nasycený. Kdyby maximální tok nebyl nasycený, najdeme totiž zlepšující cestu, kterou dokážeme protlačit ještě nějaký kladný tok tak velký, abychom v posměrných hranách jeho přičtením nepřesáhli kapacitu a v protisměrných jeho odečtením nešli do záporných hodnot. Pro nasycený tok najdeme řez rozdělující síť na vrcholy, do kterých existuje zlepšující cesta ze zdroje, a na zbylé vrcholy. Tok na hranách tohoto řezu je buď nulový nebo roven kapacitě hrany a dohromady dává kapacitu řezu, takže tok je maximální. [51]

Fordův-Fulkersonův algoritmus dospěje k maximálnímu toku, když jsou kapacity hran celočíselné. Racionální hodnoty lze přenásobit nejmenším společným násobkem, takže i takovou situaci vyřeší. Problém nastává u iracionálních kapacit hran. Ford a Fulkerson [29] sami ukázali, že pro iracionální kapacity algoritmus nemusí skončit. Mnohem jednodušší příklady o 6 vrcholech a 9, nebo 8 hranách představil Zwick [56]. V reálných situacích ale také dosahujeme jen omezené přesnosti, takže se s tímto omezením dokážeme smířit.

Fordův-Fulkersonův algoritmus nespecifikuje způsob hledání zlepšující cesty a to může vést k velmi pomalému výpočtu. V jednoduché síti může vždy nalezená zlepšující cesta přinést zvýšení toku o jen 1, třebaže tok může být až nějaké velmi velké K. Vylepšení přináší Edmonds-Karpův algoritmus [25] z roku 1972, který zlepšující cestu hledá pomocí BFS a docílí tím časové složitosti $\mathrm{O}(nm^2)$ (n je počet vrcholů, m počet hran).

O dva roky dříve publikoval v Sovětském svazu Dinitz [23] algoritmus pracující v čase $\mathrm{O}(n^2 m)$, který také využívá BFS, ale navíc tvoří speciální datovou strukturu zvanou *layered network* (vrstvená síť nebo síť hladin podle hladin z běhu BFS), která v dané fázi algoritmu obsahuje sjednocení všech nejkratších zlepšujících cest ze zdroje do stoku a nemá žádné slepé konce (vrcholy mimo zdroj s nulovým vstupním stupněm nebo vrcholy mimo stok s nulovým výstupním stupněm). V této struktuře se opakovaně hledají cesty ze zdroje do stoku (hledání ale probíhá v opačném směru, od stoku) a pokaždé dojde k odstranění nasycených hran a slepých konců. Když žádná cesta nezbyde, přejde se do další fáze. Když v této fázi strukturu nedokážeme vytvořit, našli jsme maximální tok.

Na Západě se stal známý pod úpravou Evena [27], která se liší např. odstraňováním slepých konců až při hledání zlepšujících cest, které probíhá použitím DFS. [22]

Goldberg a Tarjan [32] předvedli algoritmus pracující v čase $O(nm \log(n^2/m))$. Ve svém článku také vytvořili přehlednou tabulku časové složitosti dalších algoritmů pro hledání maximálního toku. King a kol. [40] navrhli algoritmus, který má časovou složitost $O(nm)$ pro $n > m^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Algoritmus Orlina má časovou složitost $O(nm + m^{31/16} \log^2 n)$, a když je $m = O(n^{16/15-\varepsilon})$, dostaneme tím čas $O(nm)$, takže maximální tok lze najít v čase $O(nm)$. [48]

Pokud chceme mít zdrojů a stoků více, stačí nám definovat nový zdroj, ze kterého povedeme hrany s neomezenou kapacitou do původních zdrojů (kapacitu stačí mít aspoň tak velkou, jako je součet kapacit hran vycházejících z daného původního zdroje). Z původních stoků bychom obdobně vedli hrany s neomezenou kapacitou do nového stoku.

4.2.2 Tok s minimální cenou

Dalším ze základních problémů je tok s minimální cenou. Na rozdíl od maximálního toku máme přesně stanoveny požadavky všech vrcholů, ale hledáme takový tok, za který zaplatíme nejméně. Cena může být dána například vzdáleností mezi městy, které musí automobil ujet, aby dopravil komoditu.

Definice 4.5 Cena toku. *Mějme síť (G, c, u), kde $G = (V, E)$ a tok f.* Cena toku C_f *je součet cen toku na všech hranách, tedy*

$$C_f = \sum_{(u,v)\in E} c(u, v) \cdot f(u, v).$$

> **Problém**: TOK S MINIMÁLNÍ CENOU
> **Instance**: Síť (G, c, u), kde $G = (V, E)$, požadavky b
> **Otázka**: Najdi tok, jehož cena je minimální.

Podobně jako maximální toky jsou i toky s minimální cenou velmi zkoumané a existuje řada algoritmů na jejich nalezení. Ahuja a kol. [2] uvádí pět základních algoritmů pro nalezení toku s minimální cenou.

- `Cycle-cancelling` zlepšuje tok iterativně pomocí cyklů se zápornou cenou toku. Začíná nějakým tokem, který splňuje požadavky, a končí, když žádný zlepšující cyklus se zápornou cenou není.
- `Successive shortest path` zvyšuje pseudotok posláním toku z nějakého zdroje do nějakého stoku nejkratší cestou, až dospěje k toku. *Pseudotok* nemusí splňovat Kirchhoffův zákon. Nejkratší cesta zde nezávisí jen na počtu hran, nýbrž zohledňuje i cenu.
- `Primal-dual` postupně vylepšuje pseudotok po několika nejkratších cestách současně, ty najde pomocí maximálního toku.
- `Out-of-kilter` ve svém běhu splňuje Kirchhoffův zákon, ale dovoluje velikost toku na hraně mimo vymezený interval a k minimální ceně se postupně přibližuje. Také se postupně blíží ke splnění omezení kladených na velikost toku na hraně. V jednotlivých iteracích tok vylepšuje po nalezené nejkratší cestě.
- `Relaxation` uvolňuje podmínky kladené Kirchhoffovým zákonem. Algoritmus si udržuje vektor potenciálů vrcholů a pseudotok, které společně splňují uvolněné podmínky, a tyto prvky postupně upravuje, až dospěje k řešení.

Pro nalezení nějakého toku, který musí splňovat omezení daná kapacitami hran a požadavky vrcholů, použijeme nějaký algoritmus na nalezení maximálního toku v upravené síti, kam přidáme nové vrcholy zdroj a stok a povedeme hranu s kapacitou $b(i)$ ze zdroje do vrcholu i, když $b(i) > 0$, a pro vrcholy j s $b(j) < 0$ naopak povedeme hranu z nich do stoku s kapacitou $b(j)$. [2; Application 6.1]

Rychlejší algoritmus s časovou složitostí $\mathrm{O}(nm(\log\log U)\log(nC))$, kde n je počet vrcholů, m počet hran, U maximální kapacita hran a C je maximální cena hran, představili Ahuja a kol. [1] Orlin [47] předvedl algoritmus pracující v čase $\mathrm{O}(m\log n(m + n\log n))$.

4.3 Převod problému na toky

V této sekci si ukážeme způsoby řešení problému hledání core stabilní doplněné struktury v anonymní Hedonické hře s novými agenty pomocí toků. Na začátku projdeme preference každého starého agenta a zjistíme, jaké velikosti koalic preferují před svou přiřazenou a u těch zvýšíme počet agentů, kteří by blokovali, o 1. U nových agentů provedeme tutéž akci, ale zastavíme se už u první velikosti koalice, která se ve struktuře koalic vyskytuje a má aspoň jedno volné místo. Když zkontrolujeme, že žádná blokující koalice zatím nevznikla, přejdeme k transformaci na toky.

Vycházíme z myšlenky, že každý nový agent si koalice s volnými místy může seřadit od nejpreferovanějších po nejméně preferované. Když se nedostane do žádné z nejvíce preferovaných, musí do nějaké z druhých a všem velikostem, které jsme tím přeskočili[1], zvýšíme počet agentů, kteří by blokovali, o 1. Aby byla doplněná struktura koalic core stabilní, nesmí počet agentů, kteří by blokovali, dosáhnout dané velikosti. Můžeme navíc zohlednit fakt, že žádný agent v core stabilní struktuře nemůže být doplněn do koalice velikosti méně preferované, než je velikost 1.

Abychom si usnadnili popis transformací, zavedeme si rozdělení preferencí mezi velikostmi koalic agenta do tříd rozkladu, které budou určeny velikostmi koalic, do kterých agenta lze doplnit. Takovým velikostem budeme říkat *dostupné velikosti* a pro každou možnou velikost koalice v preferencích daného agenta definujeme *nejbližší dostupnou velikost*. S využitím nejbližších dostupných velikostí definujeme relaci ekvivalence na množině možných velikostí, která nám určí potřebný rozklad.

Definice 4.6 Dostupné velikost. *Mějme anonymní Hedonickou hru s novými agenty* $(A, N, \succsim)$ *a strukturu koalic s volnými místy* $\pi^{\bigcirc}$. *Množinu* dostupných velikostí $\mathrm{av}(\pi^{\bigcirc})$ *tvoří takové velikosti koalic, pro které v* $\pi^{\bigcirc}$ *existuje koalice s volným místem, tedy je to množina* $\mathrm{av}(\pi^{\bigcirc}) := \{\ell \mid \exists S \in \pi^{\bigcirc}\colon |S| = \ell \wedge S \textit{ má aspoň } 1 \textit{ volné místo}\}$.

Nejbližší dostupná velikost velikosti koalice $\ell \in [|A|+|N|]$ agenta $n \in N$ *je* $m \in \mathrm{av}(\pi^{\bigcirc})$ *taková, že* $\ell \succsim_n^s m$ *a pro všechny velikosti* $m' \in \mathrm{av}(\pi^{\bigcirc})$ *splňující* $\ell \succsim_n^s m'$, *je* $m \succsim_n^s m'$. *Pokud pro žádnou velikost* $m \in \mathrm{av}(\pi^{\bigcirc})$ *neplatí* $\ell \succsim_n^s m$, *dodefinujeme nejbližší dostupnou velikost velikosti koalice* ℓ *jako* ∞.

Nejbližších dostupných velikostí nějaké konkrétní velikosti koalice může být i více, pokud je mezi nimi agent lhostejný, a může to být ta velikost samotná.

Definice 4.7. *Mějme anonymní Hedonickou hru s novými agenty* $(A, N, \succsim)$, *strukturu koalic s volnými místy* $\pi^{\bigcirc}$ *a agenta* $n \in N$. Relaci R^n na $[|A| + |N|]$ *definujeme jako* $xR^ny \Leftrightarrow (\exists \ell \in \mathrm{av}(\pi^{\bigcirc}) \cup \{\infty\}\colon \ell$ *je nejbližší dostupná velikost* x *i* $y)$, *kde* $x, y \in [|A| + |N|]$.

[1] Sem patří ty nejvíce preferované velikosti koalic, ke kterým je v zadané struktuře koalic nějaké volné místo, a dále všechny velikosti koalic, do kterých agenta nelze doplnit, protože žádné odpovídající volné místo není (koalice takové velikosti ani nemusí ve struktuře koalic existovat) a agent je striktně preferuje před velikostmi koalic s volnými místy ze skupiny druhých nejvíce preferovaných.

Definice 4.8 Ekvivalence. *Relace R na množině X je* symetrická *právě tehdy, když $\forall x, y \in X$ platí $xRy \Leftrightarrow yRx$. Relace R na množině X je* ekvivalence*, pokud je reflexivní, symetrická a tranzitivní.*

Všimněme si, že relace R^n triviálně splňuje symetrii a reflexivitu. Splňuje i tranzitivitu, protože když $xR^n y$ díky velikosti ℓ a $yR^n z$ díky velikosti m, musí z definice nejbližší dostupné velikosti platit $\ell \sim_n^s m$, takže ℓ je i nejbližší dostupná velikost pro z, a tudíž $xR^n z$.

Pozorování 4.3. *Mějme anonymní Hedonickou hru s novými agenty $(A, N, \succsim)$, strukturu koalic s volnými místy $\pi^{\bigcirc}$ a agenta $n \in N$. Relace R^n na $[|A| + |N|]$ je ekvivalence na $[|A| + |N|]$.*

Od Matouška a Nešetřila [44] víme, že třídy ekvivalence tvoří rozklad, čehož využijeme pro definici tříd velikostí. Třídy velikostí jsou třídy rozkladu určeného relací R^n, které navíc seřadíme podle preferencí agenta n. Když budeme dále v textu hovořit o třídách, myslíme tím třídy velikostí, leda by bylo řečeno jinak.

Definice 4.9 Třídy velikostí. *Mějme anonymní Hedonickou hru s novými agenty $(A, N, \succsim)$, agenta $n \in N$ a strukturu koalic s volnými místy $\pi^{\bigcirc}$.* Třídy velikostí *$L_1^n, L_2^n, \ldots L_x^n$ jsou množiny určené rozkladem na množině $[|A| + |N|]$ podle relace R^n, kde x je počet tříd rozkladu. Tyto množiny jsou uspořádané podle preferencí agenta n tak, že pro všechny $\ell_i \in L_i^n$, $\ell_{i+1} \in L_{i+1}^n$ je $\ell_i \succ_n^s \ell_{i+1}$, kde $i \in [x-1]$.*

Teď můžeme přejít na popis samotných převodů. Pomocí maximálních toků těžko zajistíme kontrolu vzniku blokujícíh koalic a u toků s minimální cenou se potýkáme s problémem, kdy nelze snadno rozlišit, zda cena 5 znamená 5 agentů, kteří chtějí do koalice velikosti 2, nebo do koalice velikosti 10. Abychom namodelovali, co potřebujeme, ukážeme si několik myšlenek na převod pomocí speciálních toků.

4.3.1 Více cen

První způsob převodu využívá speciální cenu c_ℓ pro každou možnou velikost koalice ℓ. Tato cena nesmí nesmí být vyšší nebo rovna počtu agentů, kteří po úvodní kontrole zbývají, aby vznikla blokující koalice.

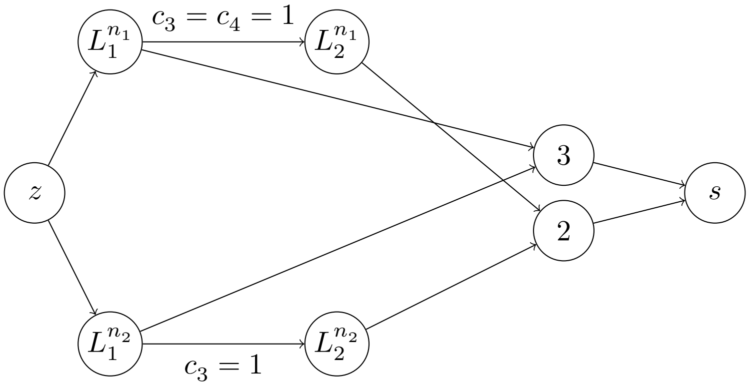
V síti máme jeden vrchol pro každé volné místo, ze kterého vede hrana s jednotkovou kapacitou do stoku. Tím zajistíme, že na každé volné místo bude přiřazen nejvýše jeden agent. Dále pro každého nového agenta $n \in N$ vytvoříme vrcholy odpovídající třídám velikostí. Z každého takového vrcholu odpovídajícího třídě velikostí L_i^n vedeme hrany do volných míst, které patří koalicím velikostí z této třídy. Z tohoto „třídního" vrcholu také vedeme hranu do vrcholu následující třídy L_{i+1}^n (pokud existuje), která má cenu 1 pro každou velikost z třídy L_i^n (pokud nepatří do třídy L_1^n a nebyla předzpracována). Nakonec povedeme pro každého agenta $n \in N$ hranu ze zdroje do vrcholu třídy L_1^n.

Kapacity všech hran nastavíme na 1. Všechny ceny, které jsme dosud neurčili, budou nulové. Požadavky všech vrcholů až na zdroj a stok jsou nulové. Zdroj síť do sítě dodává komoditu v množství počtu nových agentů, stok toto množství odebírá.

Hledáme takový tok, který splňuje podmínky kladené na ceny. Z pohledu maximálních toků je jeho velikost rovna počtu nových agentů.

Příklad 4.1. Mějme anonymní Hedonickou hru s novými agenty z Příkladu 3.1, tedy $(A, N, \succsim)$, kde $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ a $N = \{n_1, n_2\}$, jejichž preference mezi velikostmi jsou určeny následovně:

- $a_1 \colon 4 \succ_{a_1}^s 3 \succ_{a_1}^s 2 \succ_{a_1}^s 1 \succ_{a_1}^s 5$
- $a_2 \colon 4 \succ_{a_2}^s 3 \succ_{a_2}^s 2 \succ_{a_2}^s 1 \succ_{a_2}^s 5$
- $a_3 \colon 5 \succ_{a_3}^s 2 \succ_{a_3}^s 1 \succ_{a_3}^s 4 \succ_{a_3}^s 3$
- $n_1 \colon 3 \succ_{n_1}^s 4 \succ_{n_1}^s 2 \succ_{n_1}^s 1 \succ_{n_1}^s 5$



Obrázek 4.1. Síť pro příklad převodu problému hledání core stabilní doplněné struktury koalic v anonymní Hedonické hře s novými agenty na tok s více cenami. Na hranách jsou vyznačeny ceny, které nejsou nulové. Kapacity všech hran jsou jednotkové. Vrchol označený jako 3, resp. 2, odpovídá volnému místu v koalici velikosti 3, resp. 2.

- n_2: $5 \succ^s_{n_2} 4 \succ^s_{n_2} 3 \succ^s_{n_2} 2 \succ^s_{n_2} 1$

Dále mějme strukturu koalic s volnými místy $\pi^{\bigcirc} = \{\{a_1, a_2, \bigcirc_1\}, \{a_3, \bigcirc_1\}\}$. Síť pro převod na tok s více cenami ukazuje Obrázek 4.1. Pro ceny musí platit $c_1 < 1$, $c_2 < 2$, $c_3 < 3$, $c_4 < 1$ a $c_5 < 3$.

4.3.2 Prázdné nebo nasycené hrany

Další možností je místo penalizace pomocí různých cen vést z třídních vrcholů hrany do vrcholů „velikostních" pro každou možnou velikost koalice, ze kterých povedou hrany omezené kapacity (nejvýše tolik, aby nevznikla blokující koalice). Pokud by nestačily, chceme rozpoznat, že blokujeme. Jak ale zařídit, aby tyto hrany vždy byly využity a nenašel se jen tok, který agenty přiřadí na volná místa bez zohlednění jejich preferencí? Obyčejný maximální tok by se prostě zastavil, kdyby měl začít blokovat. Kdybychom chtěli použít tok s minimální cenou, museli bychom zdrojům nastavit jejich požadavky na dodávku, která musí být dostatečná, aby zařídilo blokování až téměř všech velikostí, ale zároveň když využijeme hned velikost z první třídy, toku se někde potřebujeme zbavit. Když to zařídíme přidáním hrany přímo do stoku, nesmí být využita, když bude agent přiřazen na velikost z další třídy.

Potřebujeme nějaký přepínač, který řekne: „Buď jsi byl dosazen na volné místo z této třídy, nebo jsi se nevešel, takže u těchto všech velikostí blokuješ a potečeš tam." Toho bychom mohli docílit, když každá hrana bude buď nasycená, nebo na ní bude tok nulový. Musíme ale vhodně nastavit kapacity hran.

V síti tedy budeme mít opět vrcholy pro volná místa, zdroj a stok a navíc vrcholy „velikostní". Z vrcholů pro volná místa vedeme opět hrany s jednotkovou kapacitou do stoku. Z každého „velikostního" vrcholu vedeme do stoku tolik hran, kolik nejvýše může přibýt nových agentů, aby nevznikla blokující koalice této velikosti. Pokud nechceme paralelní hrany, vedeme hrany do unikátních pomocných vrcholů, ze kterých až půjdeme do stoku (kapacity by byly též jednotkové). Jedna hrana s kapacitou rovnou součtu těchto paralelních hran nestačí, protože pak bychom vyžadovali, aby vždy blokoval právě tento počet, nebo nikdo, přitom chceme umožnit libovolné číslo mezi těmito hodnotami.

Pro každého nového agenta $n \in N$ a každou jeho třídu velikostí L_i^n vytvoříme celkem tři vrcholy. Jeden „třídní" ukazuje umístění agenta do koalice velikosti z této třídy. Z něj vede hrana s jednotkovou kapacitou do vrcholu, který zajistí umístění agenta v koalici velikosti z této třídy velikostí. Z každého takového „umisťujícího“ vrcholu vedeme hrany do vrcholů volných míst, které patří koalicím velikostí z této třídy. Zbývající vrchol je „blokující“. Z něj povedou hrany s jednotkovou kapacitou do všech vrcholů „velikostních“ odpovídajících velikostem z tříd předcházejících L_i^n (ze třídy L_1^n opět bereme jen ty nepředzpracované velikosti). „Třídní“ vrchol spojíme se stokem „zbytkovou“ hranou, která bude odvádět tok nevyužitý k blokování následných velikostí koalic.

Pro každého agenta vytvoříme jejich vrchol, ze kterého povedeme hrany do „třídních“ vrcholů. Všechny tyto hrany budou mít stejnou kapacitu, která musí být tak velká, aby se daly blokovat všechny velikosti kromě poslední a část toku nám určila umístění. Celkem si tedy vystačíme s kapacitou $|A| + |N|$. Ze zdroje povedeme hranu do vrcholů agentů také s touto kapacitou.

Všechny vrcholy kromě zdroje a stoku budou mít opět nulové požadavky, takže kapacity „zbytkových“ hran nastavíme tak, aby se součet kapacit hran vycházejících z „třídních“ vrcholů rovnal $|A| + |N|$. Požadavek zdroje bude $|N| \cdot (|A| + |N|)$ a požadavek stoku bude $-|N| \cdot (|A| + |N|)$.

Na tok klademe takovou podmínku, že na každé hraně bude buď nulový, nebo roven její kapacitě. To znamená, že pro každého agenta vybereme právě jednu třídu a z jejího „třídního“ vrcholu tok díky Kirchhoffovým zákonům bude muset vést jak k umístění, tak do všech potřebných „blokujících“ vrcholů a „zbytkovou“ hranou odvedeme přebytek. Ceny mohou být nulové, stačí nám najít tok, který uspokojí požadavky vrcholů.

Síť pro převod instance z Příkladu 4.1 ukazuje Obrázek 4.2. Jelikož preference vyšly tak, že agenti a_1, a_2 a n_2 vždy budou ochotni vytvořit blokující koalici velikosti 4, z „velikostního“ vrcholu, který odpovídá této velikosti, nemůže vést žádná hrana do stoku, takže bychom síť mohli ještě zjednodušit.

4.3.3 Zakázání použití některých hran dohromady

V převodu pomocí prázdných nebo nasycených hran jsme zajistili vybrání jedné možnosti zakázáním jen částečného využití hran. Co kdybychom ale mohli přímo říct, že se z dané množiny hran smí použít jen jedna? U sítě z části 4.3.2 bychom takové množiny určili jako hrany vycházející od agenta do jeho „třídních“ vrcholů. Aby byly uspokojeny požadavky zdroje, stejně by se jedna z těch hran musela využít naplno, takže by se zajistilo i blokování.

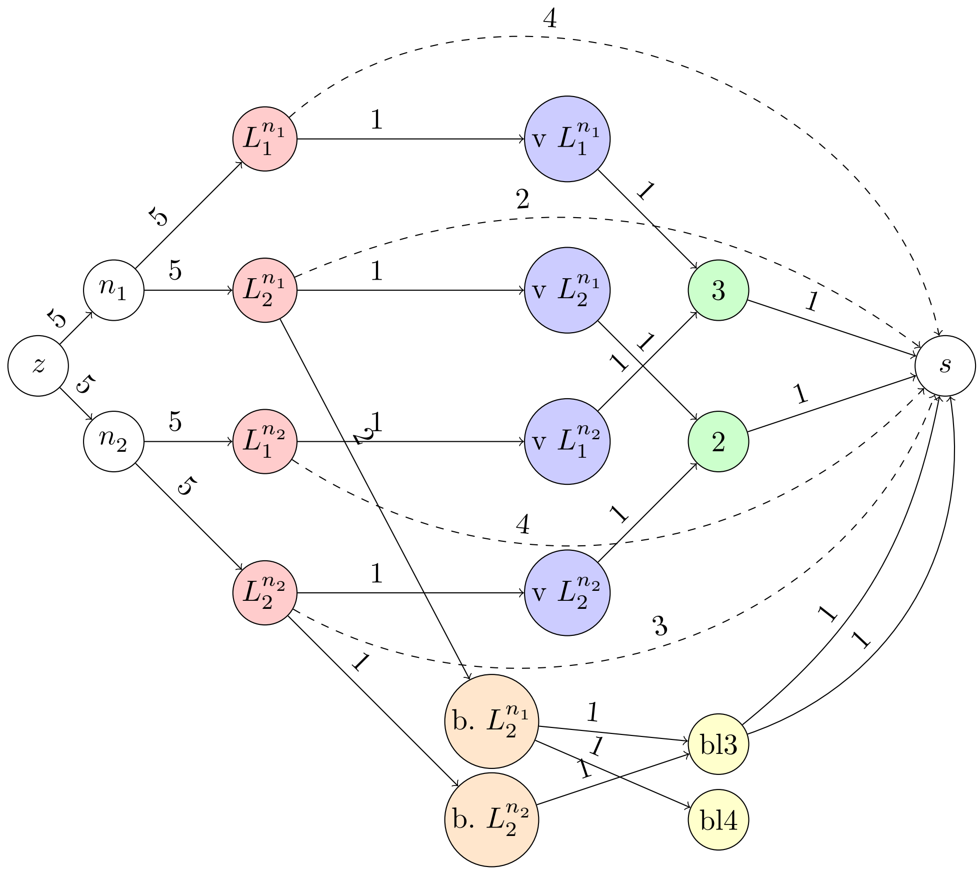
4.4 Speciální případy toků v sítích

Představili jsme si několik způsobů převodu našeho problému na toky, ale zůstává otázkou, jestli jsme si tím pomohli. Vymyslel již někdo algoritmy na řešení transformovaných problémů?

Zdá se, že neexistuje žádný přehled různých verzí toků, který by vyjmenovával více problémů než jen pár základních jako maximální toky, minimální cena, zobecněné toky. Není pochyb, že vytvořit a ještě udržovat takový přehled by bylo velmi časově náročné (protože studium toků v sítích se rozvinulo v 50. a 60. letech 20. století a od té doby se nezastavilo) a dá se i pochybovat o užitečnosti. Bohužel nám to značně ztížilo hledání a je docela možné, že nám nějaký zajímavý (a pro nás užitečný) tok unikl.

První popsaná transformace vedla na použití více cen. Cen potřebujeme $|A| + |N|$, což nevzbuzuje důvěru ve snadnost řešení.

Podrobně jsme si popsali transformaci pomocí toků, které jsou na každé hraně buď nulové, nebo nasycené. Bohužel problém rozhodnutí o existenci takového toku je NP-těžký.



Obrázek 4.2. Síť pro příklad převodu problému hledání core stabilní doplněné struktury koalic v anonymní Hedonické hře s novými agenty na tok s prázdnými nebo nasycenými hranami. Pro zjednodušení vynecháváme „blokující“ vrcholy třídy L_1^n, protože ty jsou zpracovány ještě před transformací, a „velikostní“ vrcholy, do kterých by žádné hrany nevedly. Na hranách jsou vyznačeny jejich kapacity. Červeně jsou obarveny „třídní“ vrcholy, modře „umisťující“, oranžově „blokující“, žlutě „velikostní“ a zeleně vrcholy odpovídající volným místům. „Zbytkové“ hrany jsou přerušované.

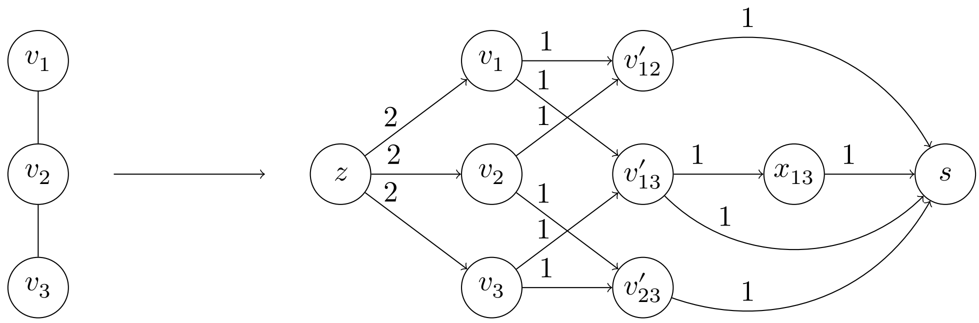
Věta 4.4. *Mějme síť (G, c, u), zdroj z a stok s. Rozhodnutí o existenci toku f velikosti $k \in \mathbb{N}$, pro který platí $f(e) = u(e)$ nebo $f(e) = 0$ pro všechny $e \in E(G)$, je NP-těžké.*

Důkaz. Ukážeme si redukci z problému Nezávislé Množiny Vrcholů. Instancí tohoto problému je graf $G = (V, E)$, kde $V = \{v_i \mid i \in [n]\}, n \in \mathbb{N}$, a přirozené číslo k. Chceme zjistit, zda v grafu G existuje množina alespoň k vrcholů takových, že žádné dva nejsou sousední.

Redukovanou instancí bude síť (G', c, u), kde $G' = (V \cup V' \cup X \cup \{z, s\}, E')$, a požadavky b. Vytvoříme ji následujícím způsobem[2]:

- Vezmeme vrcholy V a přidáme k nim zdroj z, stok s a množinu V' odpovídající všem neuspořádaným dvojicím různých vrcholů: $V' := \{v'_{ij} = v'_{ji} \mid v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j\}$. (Označení v'_{ij} a v'_{ji} znamená ten stejný vrchol.)
- Pro každý vrchol z původního grafu přidáme hranu ze zdroje do tohoto vrcholu s kapacitou $|V| - 1$: $\forall v_i \in V\colon (z, v_i) \in E', u(z, v_i) = |V| - 1$.

[2] Inspirace z `https://cs.stackexchange.com/questions/50932/maximum-flow-with-all-or-nothing-through-each-edge`



Obrázek 4.3. Příklad redukce z problému Nezávislé Množiny Vrcholů pro instanci $G = (\{v_1, v_2, v_3\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}\})$, $k = 2$. Čísla na hranách určují jejich kapacitu.

- Pro každý vrchol v'_{ij} odpovídající dvojici vrcholů v_i a v_j přidáme hrany do tohoto vrcholu z v_i a v_j a jednu hranu do stoku. Pokud navíc vrcholy v_i a v_j nejsou v původním grafu sousední, přidáme druhou hranu do pomocného vrcholu x_{ij} a z něho do stoku. Kapacity všech těchto hran budou jednotkové. Formálně $\forall v'_{ij} \in V'$:
  - $(v_i, v'_{ij}) \in E', (v_j, v'_{ij}) \in E'$, $u(v_i, v'_{ij}) = u(v_j, v'_{ij}) = 1$,
  - $(v'_{ij}, s) \in E'$, $u(v'_{ij}, s) = 1$.
  - pokud $\{v_i, v_j\} \notin E$, pak do množiny X přidáme vrchol x_{ij} a přidáme hrany $(v'_{ij}, x_{ij}) \in E', (x_{ij}, s) \in E'$, $u(v'_{ij}, x_{ij}) = u(x_{ij}, s) = 1$.

Pro instanci $G = (\{v_1, v_2, v_3\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}\})$, $k = 2$ transformaci ukazuje Obrázek 4.3.

Předpokládejme, že v grafu G existuje nezávislá množina vrcholů I velikosti k. Tvrdíme, že pak v síti existuje tok velikosti $(|V| - 1) \cdot k$. Ukážeme si, jak takový tok f najít.

Pro každý vrchol $v_i \in I$ nastavíme $f(z, v_i) = |V| - 1$. Pro vrcholy $v_j \in V \setminus I$ je $f(z, v_j) = 0$. Jelikož $|I| = k$, ze zdroje proudí tok velikosti $(|V|-1) \cdot k$. Z každého vrcholu $v_i \in V$ vede $(|V| - 1)$ hran, protože to je počet dvojic různých vrcholů obsahujících vrchol v_i. Každá tato hrana $(v_i, v'_{ij}), i \neq j \in [n]$, má kapacitu 1 a pošleme po ní tok velikosti 1 právě tehdy, když $v_i \in I$. Tím bude splněn Kirchhoffův zákon na vrcholech v_i. Když do nějakého vrcholu $x_{ij} \in X$ přiteče tok velikosti 1 (jediná možnost je z hrany (v'_{ij}, x_{ij})), pošleme ho dále do stoku, jinak $f(x_{ij}, z) = 0$.

U zbylých vrcholů také jen přeposíláme tok po hranách, které z něho vycházejí. Jediný problém by mohl nastat u vrcholů v'_{ij}, kdyby $f(v_i, v'_{ij}) = 1$ a zároveň $f(v_j, v'_{ij}) = 1$, přičemž jediná hrana z v'_{ij} by byla (v'_{ij}, z), která má jednotkovou kapacitu. Rovnost $f(v_i, v'_{ij}) = 1$ ale platí jen, když $v_i \in I$, ze stejného důvodu i $v_j \in I$, a protože I je nezávislá množina, nemůže být $\{v_i, v_j\} \in E$, takže z v'_{ij} vede i hrana do x_{ij} a Kirchhoffův zákon je zachován i v tomto případě.

Jsou tedy splněny podmínky kladené na velikost toku na jednotlivých hranách i požadavky vrcholů, takže jsme vytvořili tok velikosti $(|V| - 1) \cdot k$.

V druhém směru máme tok f velikosti $(|V| - 1) \cdot k$ a chceme ukázat, že tedy existuje nezávislá množina velikosti k. Označíme $I := \{v_i \mid f(z, v_i) > 0\}$. Protože $f(z, v_i) > 0$, musí platit $f(z, v_i) = u(z, v_i) = |V| - 1$, takže velikost I je k. Tvrdíme, že I je nezávislá množina. Pro spor předpokládejme, že není, takže musí existovat nějaké dva různé vrcholy $v_i, v_j \in I$ takové, že $\{v_i, v_j\} \in E$. Protože ale $f(z, v_i) = |V| - 1$, což je rovno výstupnímu stupni vrcholu v_i, musí být pro zachování Kirchhoffova zákona $f(v_i, v'_{ij}) = 1$ a obdobně i $f(v_j, v'_{ij}) = 1$. To znamená, že do vrcholu v'_{ij} přiteče tok velikosti 2 a odtéct může jen tok velikosti 1 (protože $\{v_i, v_j\} \in E$), takže f není tok, což je spor. $\square$

Ani pro jeden z těchto dvou převodů jsme nenašli algoritmy, které by se blížily naší představě nebo nás napadl nějaký způsob pro jejich využití. Místo toho si uvedeme další speciální případy toků, na které nás hledání zavedlo. Tento výčet se zdaleka neblíží všem existujícím tokům a například zcela ignoruje dynamické toky, ve kterých se uvažuje i čas nutný pro převoz komodity (pro přehled viz Kotnyek [41])

Sítě se zvláštní strukturou. Karzanov [39] se věnoval sítím, které mají speciální vlastnosti, a přesněji pro ně určil časovou složitost Dinitzova algoritmu. Může jít o jednotkové kapacity všech hran nebo o tzv. *jednoduché sítě*. Pro každý vrchol kromě zdroje a stoku jednoduché sítě platí, že buď z něj vede jen jedna hrana, a ta má jednotkovou kapacitu, nebo do něj vede jen jedna hrana, a ta má jednotkovou kapacitu.

Toky s nelineární cenou. V základních tocích s minimální cenou předpokládáme, že tato cena roste lineárně s velikostí toku. To nemusí odpovídat skutečnosti, protože náklady mohou růst i kvadraticky. Dokonce někdy větší tok může cenu snížit („Přidejte do košíku ještě zboží v hodnotě 50 Kč a získáte dopravu zdarma.“). Tokům s konvexní cenou kapitolu věnovali Ahuja a kol. [2]

Generalized Flow (zobecněný tok). U základních toků předpokládáme ideální podmínky, kdy do sítě pošleme určité množství komodity a to stejné také odebereme. V reálných situacích ale dochází ke ztrátám třeba kvůli nedokonalému těsnění na spojích mezi trubkami. Můžeme také chtít modelovat případ, kdy svou činností naopak zvyšujeme hodnotu výrobku, takže dojde k zisku. Na pomoc přichází zobecněné toky, které každé hraně (i, j) přiřadí kladný koeficient q_{ij}, a když z vrcholu i pošleme po hraně (i, j) tok velikosti 1, do vrcholu j dorazí tok velikosti q_{ij}. Pro seznámení se zobecněnými toky se odkážeme na Ahuja a kol. [2]

Multicommodity Flow (vícekomoditní tok). Jak název napovídá, ve vícekomoditním toku máme několik různých druhů komodity, které se společně pohybují po síti. Vrcholy specifikují své požadavky na jednotlivé komodity (v jednodušší verzi pro každou komoditu určíme zdroj a stok). Po jedné hraně může téct takový součet množství komodit, že nepřesáhne její kapacitu, a můžeme omezit i kapacity na jednotlivé druhy komodit. I pro multikomoditní toky viz Ahuja a kol. [2]

Edge Disjoint Paths (hranově disjunktní cesty). Vstup tvoří graf a množina k uspořádaných dvojic (z_i, s_i), kde z_i je zdroj pro komoditu i a s_i je stok pro komoditu i, $i \in [k]$. Maximální počet těchto dvojic chceme spojit hranově disjunktními cestami. Pro více informací se odkážeme na Chekuri a Khanna [35].

All-or-Nothing Multicommodity Flow (v češtině znamená zhruba „vícekomoditní tok typu všechno, nebo nic“). Slibný název, který bohužel neznamená jen nulové nebo nasycené hrany, nýbrž uspokojení buď celých požadavků vrcholu, nebo žádných. Vstup je stejný jako pro Edge Disjoint Paths. Hledáme největší možnou množinu dvojic zdrojů a stoků takovou, že současně zvládneme poslat jednotkový tok mezi všemi odpovídajícími si zdroji a stoky, na rozdíl od Edge Disjoint Paths ale tok můžeme dělit, nemusí být celočíselný. Pro více informací se odkážeme na Chekuri, Khanna a Shepherd [36].

Potential Based Flow (tok založený na potenciálech). Používají se např. pro modelování vodovodního potrubí, plynovodů nebo elektrických sítí. Vycházíme z grafu, ve kterém je každému vrcholu a každé hraně přiřazena nějaká dolní a horní mez potenciálu. Hrany navíc mají svou specifickou rezistenci, která bývá odvozena z fyzických vlastností jako délka a průměr. Hledá se tok a potenciály takové, že se vejdou do daných mezí a splňují rovnici závislosti toku na rozdílu potenciálů incidentních vrcholů (v ní se projeví právě rezistence hrany a ještě lichá spojitá rostoucí funkce definovaná podle aplikace sítě). Jeden z novějších článků, který zkoumá výpočetní složitost, napsali Groß a kol. [33]

Unfortunate Flow (Kupferman a Vardi [42]; nešťastný tok). Problém modeluje situace, kdy ve vrcholech dochází ke ztrátám toku, např. paketů v přetížených routerech. Rozhoduje se při něm, zda nejmenší *vlna* (anglicky preflow) v síti, která je *nasycená*, přesáhne zadaný parametr. Vlna se podobá toku v tom, že se musí na všech hranách vejít do jejich kapacit, ale místo rovnosti v Kirchhoffově zákonu dovoluje, aby součet hodnot vlny přicházející do vrcholu byl větší než součet hodnot vlny odcházející z vrcholu (takže ve vrcholu může dojít ke ztrátě komodity). U nasycené vlny k takové ztrátě smí dojít jen v případě, že součet kapacit hran odcházejících z vrcholu je menší než velikost vlny, která do vrcholu přijde. V hledané vlně tedy jsou všechny hrany vycházející ze zdroje nasycené, ale balíky komodity byla směrovány tak nešťastně, že došlo k největším možným ztrátám kvůli přetížení (nasycení hran vycházejících z vrcholu, balíky nebylo kudy poslat).

4.5 Pokusy o dokázání NP-úplnosti

Když se nepovedlo navrhnout efektivní algoritmus na nalezení core stabilní doplněné struktury koalic, dává smysl zvážit možnost, že problém je NP-úplný. Rozhodně patří do třídy NP, protože když dostaneme doplněnou strukturu koalic, snadno zkontrolujeme, že je core stabilní. Pro každou možnou velikost koalice napočítáme, kolik agentů tuto velikost striktně preferuje před velikostí své koalice, a ověříme, že jich není dost na vytvoření blokující koalice. Tyto kontrolu můžeme provést podobně jako v Algoritmu 3.2.1 a stihneme ji v polynomiálním čase.

V literatuře se pro dokazování NP-těžkosti různých verzí Hedonických her využívá redukce z ExactCoverBy3Sets (např. Aziz a kol. [8]), Partition nebo jiné NP--úplné verze Hedonických her (např. Ballester [10]).

Přetransformovat původní instanci na náš problém tak, abychom při kladné odpovědi na ní získali kladnou odpověď pro nás, není těžké. V opačném směru ale narážíme na kombinaci tří požadavků.

1. Jedná se o Hedonickou hru, takže agenti pro stabilitu každého agenta hraje roli jen jeho přiřazená koalice.
2. Preference jsou anonymní, takže agenti nerozlišují, s kým v koalici jsou, zajímá je jen její velikost.
3. Nové agenty chceme doplnit, takže potřebujeme přesně určené velikosti koalic a počet nových agentů se musí rovnat počtu volných míst.

Ukážeme si, co to pro nás znamená u pokusů o redukci z ExactCoverBy3Sets.

Problém: ExactCoverBy3Sets
Instance: Množina R, $|R| = 3\ell$ pro nějaké $\ell \in \mathbb{N}$, množina $S \subseteq \{s \subseteq R \mid |s| = 3\}$.
Otázka: Existuje podmnožina $S' \subseteq S$, která tvoří rozklad R?

Pro každý prvek z množiny R vytvoříme nového agenta, kterému chceme v preferencích dát jako přijatelné ty koalice, které odpovídají množinám z S, jejichž je prvkem. Protože v preferencích jsou jen velikosti, každé množině z S přiřadíme unikátní velikost, necháme jí 3 volná místa a zbytek obsadíme starými agenty, kteří tuto velikost budou mít jako nejpreferovanější. Jelikož předem nevíme, které z těchto množin chceme využít, musíme mít ve struktuře koalic s prázdnými místy všechny tyto koalice, ale tím nám pravděpodobně vzroste počet volných míst, takže potřebujeme více nových agentů. Tito „doplňkoví“ noví agenti musí mít na výběr z alespoň několika koalic. Kvůli anonymním preferencím ale agenti nerozliší, s kým v koalici jsou, takže nikdo nepozná, jestli je do koalice doplněna trojice doplňkových nových agentů, nebo někteří jsou i „z R“. Když ale nezaručíme, že vždy doplňujeme trojice stejného typu nových agentů, můžeme získat core stabilní řešení i v případě, kdy původní instance žádné řešení nemá. Přitom vynucení trojic stejného typu se nám nijak nepodařilo dosáhnout, ať už různým nastavením preferencí, přidáním dalších nových agentů nebo vytvořením struktury koalic, kde v každé koalici je jen jedno volné místo.

Netvrdíme, že kvůli zmíněným obtížím NP-úplnost dokázat nelze, ale nenapadá nás způsob, jak je obejít (jinou množinou agentů, strukturou koalic, redukcí z jiného problému. . .), a zdá se nám, že kladená omezení mohou náš problém zjednodušovat dostatečně, aby byl řešitelný v polynomiálním čase.

Kapitola 5
Závěr

Cílem této práce bylo představit Hedonické hry, a to zejména používané koncepty stability řešení a možná omezení preferenčních profilů agentů. Dále bylo vyžadováno definovat upravený výpočetní problém, při kterém se změní množina agentů a je třeba přetvořit existující strukturu koalic, a prostudovat jeho výpočetní složitost.

Zaměřili jsme se na případ, kdy když část původních agentů odešla, ve struktuře koalic uvolnila svá místa, která chceme obsadit novými agenty. Určili jsme několik podmínek, za kterých žádná upravená struktura koalic nemůže být core stabilní nebo striktně core stabilní. V obecném případě jsme dokázali, že problém rozhodnutí o existenci core stabilní doplněné struktury koalic je NP-úplný.

Z tohoto důvodu jsme se poté soustředili na anonymní Hedonické hry, pro které jsme popsali polynomiální algoritmus na nalezení striktně core stabilní doplněné struktury koalic. V případě core stability se efektivní algoritmus navrhnout nepodařilo. Místo něho jsme nabídli pomalý algoritmus, u kterého zůstává otázkou, zda s ohledem na vlastnosti vzniklých struktur neumožňují odhad časové složitosti zpřesnit, a pár způsobů převodu problému na toky v sítích. Jelikož je řada problémů spojených s core stabilitou NP-úplná, zkusili jsme se vydat i touto cestou, ale ani dokázat NP-úplnost se nám nepodařilo a spíše předpokládáme, že problém patří do třídy P. Další práce by tedy mohly navázat a zkusit najít polynomiální algoritmus.

Literatura

[1] Ahuja, Ravindra K., Goldberg, Andrew V., Orlin, James B. a Tarjan, Robert E. Finding minimum-cost flows by double scaling. *Mathematical Programming* [online]. 1992, ročník 53, s. 243–266 [vid. 2023/05/10]. Dostupné na DOI 10.1007/BF01585705.

[2] Ahuja, Ravindra K., Magnanti, Thomas L. a Orlin, James B. *Network Flows: Theory, Algorithms and Applications*. New Jersey: Prentice Hall, 1993. ISBN 978-0-13-617549-0.

[3] Alkan, Ahmet. Nonexistence of stable threesome matchings. *Mathematical Social Sciences* [online]. 1988, ročník 16, č. 2, s. 207-209 [vid. 2023/04/23]. ISSN 1879-3118. Dostupné na DOI 10.1016/0165-4896(88)90053-4.

[4] Arora, Sanjeev a Barak, Boaz. *Computational Complexity: A Modern Approach*. USA: Cambridge University Press, 2009. ISBN 978-0-521-42426-4. Dostupné na `http://www.cambridge.org/catalogue/catalogue.asp?isbn=9780521424264`.

[5] Aziz, Haris a Brandl, Florian. Existence of stability in hedonic coalition formation games. In: Hoek, Wiebe van der, Padgham, Lin, Conitzer, Vincent a Winikoff, Michael, editoři. *Proceedings of the 11th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS 2012)* [online]. Richland, SC: IFAAMAS, 2012 [vid. 2023/04/23]. s. 763–770. ISBN 0981738125. Dostupné na `https://dl.acm.org/doi/10.5555/2343776.2343806`.

[6] Aziz, Haris, Brandl, Florian, Brandt, Felix, Harrenstein, Paul, Olsen, Martin a Peters, Dominik. Fractional Hedonic Games. *ACM Transactions on Economics and Computation* [online]. 2019, ročník 7, č. 2, s. 6:1–6:29 [vid. 2023/04/23]. Dostupné na DOI 10.1145/3327970.

[7] Aziz, Haris, Brandt, Felix a Harrenstein, Paul. Pareto optimality in coalition formation. *Games and Economic Behavior* [online]. 2013, ročník 82, s. 562–581 [vid. 2023/04/23]. ISSN 1090-2473. Dostupné na DOI 10.1016/j.geb.2013.08.006.

[8] Aziz, Haris, Brandt, Felix a Seedig, Hans Georg. Computing desirable partitions in additively separable hedonic games. *Artificial Intelligence* [online]. 2013, ročník 195, s. 316–334 [vid. 2023/05/10]. ISSN 1872-7921. Dostupné na DOI 10.1016/j.artint.2012.09.006.

[9] Aziz, Haris a Savani, Rahul. Hedonic Games. In: Brandt, Felix, Conitzer, Vincent, Endriss, Ulle, Lang, Jérôme a Procaccia, Ariel D.Editors, editoři. *Handbook of Computational Social Choice*. Cambridge: Cambridge University Press, 2016. s. 356–376. ISBN 9781107060432.

[10] Ballester, Coralio. NP-completeness in hedonic games. *Games and Economic Behavior* [online]. 2004, ročník 49, č. 1, s. 1–30 [vid. 2023/04/23]. ISSN 1090-2473. Dostupné na DOI 10.1016/j.geb.2003.10.003.

[11] Banerjee, Suryapratim, Konishi, Hideo a Sönmez, Tayfun. Core in a simple coalition formation game. *Social Choice and Welfare* [online]. 2001, ročník 18, č. 1, s. 135–153 [vid. 2023/05/10]. Dostupné na DOI 10.1007/s003550000067.

[12] Berend, Daniel a Tassa, Tamir. Improved Bounds on Bell Numbers and on Moments of Sums of Random Variables. *Probability and Mathematical Statistics* [online]. 2010, ročník 30, č. 2, s. 185–205 [vid. 2023/05/10]. ISSN 0208-4147. Dostupné na `https://wuwr.pl/pms/article/view/6890`.

[13] Bilò, Vittorio, Monaco, Gianpiero a Moscardelli, Luca. Hedonic Games with Fixed-Size Coalitions. In: *Proceedings of the 36th AAAI Conference on Artificial Intelligence* [online]. Palo Alto, California USA: AAAI Press, 2022 [vid. 2023/04/06]. s. 9287–9295. ISSN 2374-3468. Dostupné na DOI 10.1609/aaai.v36i9.21156.

[14] Bogomolnaia, Anna a Jackson, Matthew O. The Stability of Hedonic Coalition Structures. *Games and Economic Behavior* [online]. 2002, ročník 38, č. 2, s. 201–230 [vid. 2023/04/23]. ISSN 1090-2473. Dostupné na DOI 10.1006/game.2001.0877.

[15] Boros, Endre, Gurvich, Vladimir, Jaslar, Steven a Krasner, Daniel. Stable matchings in three-sided systems with cyclic preferences. *Discrete Mathematics* [online]. 2004, ročník 289, č. 1-3, s. 1–10 [vid. 2023/04/23]. ISSN 1872-681X. Dostupné na DOI 10.1016/j.disc.2004.08.012.

[16] Cechlárová, Katarína a Hajduková, Jana. Computational complexity of stable partitions with B-preferences. *International Journal of Game Theory* [online]. 2003, ročník 31, č. 3, s. 353–364 [vid. 2023/02/28]. ISSN 1432-1270. Dostupné na DOI 10.1007/s001820200124.

[17] Cechlárová, Katarína a Hajduková, Jana. Stable partitions with W-preferences. *Discrete Applied Mathematics* [online]. 2004, ročník 138, č. 3, s. 333–347 [vid. 2023/04/23]. Dostupné na DOI 10.1016/S0166-218X(03)00464-5.

[18] Cechlárová, Katarína a Romero-Medina, Antonio. Stability in coalition formation games. *International Journal of Game Theory* [online]. 2001, ročník 29, č. 4, s. 487–494 [vid. 2023/02/28]. ISSN 1432-1270. Dostupné na DOI 10.1007/s001820000053.

[19] Cseh, Ágnes, Fleiner, Tamás a Harján, Petra. *Pareto optimal coalitions of fixed size* [online]. 2019 [vid. 2023/04/23]. Dostupné na `http://arxiv.org/abs/1901.06737`.

[20] Darmann, Andreas, Elkind, Edith, Kurz, Sascha, Lang, Jérôme, Schauer, Joachim a Woeginger, Gerhard J. Group Activity Selection Problem. In: Goldberg, Paul W., editor. *Proceedings of the 8th International Workshop, Internet and Network Economics (WINE 2012)* [online]. Berlin, Heidelberg: Springer, 2012 [vid. 2023/04/13]. s. 156–169. Lecture Notes in Computer Science. Dostupné na DOI 10.1007/978-3-642-35311-6_12.

[21] Dimitrov, Dinko, Borm, Peter, Hendrickx, Ruud a Sung, Shao Chin. Simple Priorities and Core Stability in Hedonic Games. *Social Choice and Welfare* [online]. 2006, ročník 26, č. 2, s. 421–433 [vid. 2023/05/10]. ISSN 1432-217X. Dostupné na DOI 10.1007/s00355-006-0104-4.

[22] Dinitz, Yefim. Dinitz' Algorithm: The Original Version and Even's Version. In: Goldreich, Oded, Rosenberg, Arnold L. a Selman, Alan L., editoři. *Theoretical Computer Science, Essays in Memory of Shimon Even* [online]. Germany: Springer, 2006 [vid. 2023/05/10]. s. 218–240. Lecture Notes in Computer Science. Dostupné na DOI 10.1007/11685654_10.

[23] Dinitz, Yefim A. Algorithm for Solution of a Problem of Maximum Flow in Networks with Power Estimation. *Soviet Mathematics Doklady* [online]. 1970, roč-

ník 11, s. 1277-1280 [vid. 2023/05/10]. Dostupné na `https://www.researchgate.net/publication/228057696_Algorithm_for_Solution_of_a_Problem_of_Maximum_Flow_in_Networks_with_Power_Estimation`.

[24] Drèze, Jacques a Greenberg, Joseph. Hedonic Coalitions: Optimality and Stability. *Econometrica* [online]. 1980, ročník 48, č. 4, s. 987-1003 [vid. 2023/05/10]. Dostupné na DOI 10.2307/1912943.

[25] Edmonds, Jack a Karp, Richard M. Theoretical Improvements in Algorithmic Efficiency for Network Flow Problems. *Journal of the ACM* [online]. 1972, ročník 19, č. 2, s. 248–264 [vid. 2023/05/10]. Dostupné na DOI 10.1145/321694.321699.

[26] Elkind, Edith a Wooldridge, Michael J. Hedonic coalition nets. In: Sierra, Carles, Castelfranchi, Cristiano, Decker, Keith S. a Sichman, Jaime Simão, editoři. *Proceedings of the 8th International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS 2009)* [online]. Budapest, Hungary: IFAAMAS, 2009 [vid. 2023/04/24]. s. 417–424. Dostupné na `https://dl.acm.org/citation.cfm?id=1558070`.

[27] Even, Shimon. *Graph Algorithms, Second Edition*. United Kingdom: Cambridge University Press, 2012. ISBN 978-0-521-73653-4.

[28] Ford, Lester R., Jr. a Fulkerson, Delbert R. Maximal Flow Through a Network. *Canadian Journal of Mathematics* [online]. Cambridge University Press, 1956, ročník 8, s. 399–404 [vid. 2023/05/10]. Dostupné na DOI 10.4153/CJM-1956-045-5.

[29] Ford, Lester R., Jr. a Fulkerson, Delbert R. *Flows in Networks*. USA: Princeton University Press, 1962. ISBN 9780691625393.

[30] Gale, David a Shapley, Lloyd S. College Admissions and the Stability of Marriage. *The American Mathematical Monthly* [online]. Mathematical Association of America, 1962, ročník 69, č. 1, s. 9–15 [vid. 2023/04/23]. ISSN 19300972. Dostupné na DOI 10.2307/2312726.

[31] Gasarch, William I. Guest Column: The Third P=?NP Poll. *SIGACT News* [online]. 2019, ročník 50, č. 1, s. 38–59 [vid. 2023/04/24]. Dostupné na DOI 10.1145/3319627.3319636.

[32] Goldberg, Andrew V. a Tarjan, Robert E. A New Approach to the Maximum-Flow Problem. *Journal of the ACM* [online]. 1988, ročník 35, č. 4, s. 921–940 [vid. 2023/05/10]. Dostupné na DOI 10.1145/48014.61051.

[33] Gross, Martin, Pfetsch, Marc E., Schewe, Lars, Schmidt, Martin a Skutella, Martin. Algorithmic results for potential-based flows: Easy and hard cases. *Networks* [online]. 2019, ročník 73, č. 3, s. 306–324 [vid. 2023/05/10]. Dostupné na DOI 10.1002/net.21865.

[34] Hopcroft, John E. a Karp, Richard M. An $n^{5/2}$ Algorithm for Maximum Matchings in Bipartite Graphs. *SIAM Journal on Computing* [online]. 1973, ročník 2, č. 4, s. 225–231 [vid. 2023/04/24]. Dostupné na DOI 10.1137/0202019.

[35] Chekuri, Chandra a Khanna, Sanjeev. Edge-disjoint paths revisited. *ACM Transactions on Algorithms* [online]. 2007, ročník 3, č. 4, s. 46 [vid. 2023/05/10]. Dostupné na DOI 10.1145/1290672.1290683.

[36] Chekuri, Chandra, Khanna, Sanjeev a Shepherd, F. Bruce. The All-or-Nothing Multicommodity Flow Problem. *SIAM Journal on Computing* [online]. 2013, ročník 42, č. 4, s. 1467–1493 [vid. 2023/05/10]. Dostupné na DOI 10.1137/100796820.

[37] IRVING, Robert W. An Efficient Algorithm for the "Stable Roommates" Problem. *Journal of Algorithms* [online]. 1985, ročník 6, č. 4, s. 577–595 [vid. 2023/04/23]. Dostupné na DOI 10.1016/0196-6774(85)90033-1.

[38] KARAKAYA, Mehmet. Hedonic coalition formation games: A new stability notion. *Mathematical Social Sciences* [online]. 2011, ročník 61, č. 3, s. 157–165 [vid. 2023/04/23]. ISSN 0165-4896. Dostupné na DOI 10.1016/j.mathsocsci.2011.03.004.

[39] KARZANOV, Alexander V. *On finding a maximum flow in a network with special structure and some applications* [online]. 1973 [vid. 2023/05/10]. Dostupné na `https://alexander-karzanov.net/ScannedOld/73_spec-net-flow_transl.pdf`.

[40] KING, Valerie, RAO, Satish a TARJAN, Robert E. A Faster Deterministic Maximum Flow Algorithm. *Journal of Algorithms* [online]. 1994, ročník 17, č. 3, s. 447–474 [vid. 2023/05/10]. Dostupné na DOI 10.1006/jagm.1994.1044.

[41] KOTNYEK, Balázs. *An annotated overview of dynamic network flows* [online]. 2003 [vid. 2023/05/10]. Dostupné na `https://inria.hal.science/inria-00071643`.

[42] KUPFERMAN, Orna a VARDI, Gal. The Unfortunate-Flow Problem. In: CHATZIGIANNAKIS, Ioannis, KAKLAMANIS, Christos, MARX, Dániel a SANNELLA, Donald, editoři. *Proceedings of the 45th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2018)* [online]. Dagstuhl, Germany: Schloss Dagstuhl, 2018 [vid. 2023/05/10]. s. 157:1–157:14. LIPIcs. Dostupné na DOI 10.4230/LIPIcs.ICALP.2018.157.

[43] MAREŠ, Martin a VALLA, Tomáš. *Průvodce labyrintem algoritmů*. Praha: CZ.NIC, 2017. ISBN 978-80-88168-19-5.

[44] MATOUŠEK, Jiří a NEŠETŘIL, Jaroslav. *Kapitoly z diskrétní matematiky*. 5. vyd. Praha: Karolinum, 2022. ISBN 978-80-246-5084-5.

[45] NG, Cheng a HIRSCHBERG, Daniel S. Three-Dimensional Stable Matching Problems. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* [online]. 1991, ročník 4, č. 2, s. 245–252 [vid. 2023/04/23]. Dostupné na DOI 10.1137/0404023.

[46] OLSEN, Martin. Nash Stability in Additively Separable Hedonic Games and Community Structures. *Theory of Computing Systems* [online]. 2009, ročník 45, č. 4, s. 917–925 [vid. 2023/05/10]. Dostupné na DOI 10.1007/s00224-009-9176-8.

[47] ORLIN, James B. A Faster Strongly Polynomial Minimum Cost Flow Algorithm. *Operations Research* [online]. 1993, ročník 41, č. 2, s. 338–350 [vid. 2023/05/10]. Dostupné na DOI 10.1287/opre.41.2.338.

[48] ORLIN, James B. Max Flows in O(nm) Time, or Better. In: *Proceedings of the 45th Annual ACM Symposium on Theory of Computing* [online]. New York, USA: ACM, 2013 [vid. 2023/05/10]. s. 765–774. STOC '13. Dostupné na DOI 10.1145/2488608.2488705.

[49] PETERS, Dominik a ELKIND, Edith. Simple Causes of Complexity in Hedonic Games. In: YANG, Qiang a WOOLDRIDGE, Michael J., editoři. *Proceedings of the 24th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)* [online]. Palo Alto, California, USA: AAAI Press, 2015 [vid. 2023/04/24]. s. 617–623. Dostupné na `http://ijcai.org/Abstract/15/093`.

[50] RONN, Eytan. NP-Complete Stable Matching Problems. *Journal of Algorithms* [online]. 1990, ročník 11, č. 2, s. 285–304 [vid. 2023/04/23]. Dostupné na DOI 10.1016/0196-6774(90)90007-2.

[51] SUCHÝ, Ondřej a VALLA, Tomáš. *BI-AG2, Přednáška č. 1–12 Algoritmy a grafy 2* [online]. [vid. 2023/04/23]. Dostupné na `https://courses.fit.cvut.cz/BI-AG2/media/lectures/bi-ag2-p-vse.pdf`. Vyžaduje přihlášení do sítě ČVUT.

[52] SUNG, Shao Chin a DIMITROV, Dinko. On Myopic Stability Concepts for Hedonic Games. *Theory and Decision* [online]. 2007, ročník 62, č. 1, s. 31-45 [vid. 2023/04/23]. ISSN 1573-7187. Dostupné na DOI 10.1007/s11238-006-9022-2.

[53] SUNG, Shao Chin a DIMITROV, Dinko. On core membership testing for hedonic coalition formation games. *Operations Research Letters* [online]. 2007, ročník 35, č. 2, s. 155–158 [vid. 2023/05/10]. Dostupné na DOI 10.1016/j.orl.2006.03.011.

[54] SUNG, Shao Chin a DIMITROV, Dinko. Computational complexity in additive hedonic games. *European Journal of Operational Research* [online]. 2010, ročník 203, č. 3, s. 635–639 [vid. 2023/05/10]. Dostupné na DOI 10.1016/j.ejor.2009.09.004.

[55] WOEGINGER, Gerhard J. A hardness result for core stability in additive hedonic games. *Mathematical Social Sciences* [online]. 2013, ročník 65, č. 2, s. 101–104 [vid. 2023/05/10]. Dostupné na DOI 10.1016/j.mathsocsci.2012.10.001.

[56] ZWICK, Uri. The Smallest Networks on Which the Ford-Fulkerson Maximum Flow Procedure may Fail to Terminate. *Theoretical Computer Science* [online]. 1995, ročník 148, č. 1, s. 165–170 [vid. 2023/05/10]. Dostupné na DOI 10.1016/0304-3975(95)00022-O.

Příloha A
Přílohy

`readme.txt`	Stručný návod pro kompilaci textu práce (tohoto dokumentu).
`Makefile`	Soubor Makefile sloužící ke zkompilování textu práce.
`thesis.pdf`	Text práce.
`tex_src/`	Složka se zdrojovými soubory textu práce.