

Bakalářská práce



České
vysoké
učení technické
v Praze

F3

Fakulta elektrotechnická
Katedra elektromagnetického pole

Rozptyl elektromagnetické vlny na planární dvoudimenzionálně periodické struktuře

Šimon Hykl

Školitel: doc. Ing. Lukáš Jelínek, Ph.D.
Obor: Otevřené elektronické systémy
Květen 2023

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Hykl** Jméno: **Šimon** Osobní číslo: **491887**
Fakulta/ústav: **Fakulta elektrotechnická**
Zadávající katedra/ústav: **Katedra radioelektroniky**
Studijní program: **Otevřené elektronické systémy**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Rozptyl elektromagnetické vlny na planární dvoudimenzionálně periodické struktuře

Název bakalářské práce anglicky:

Scattering of an Electromagnetic Wave on a Two-Dimensionally Periodic Structure

Pokyny pro vypracování:

Seznamte se s Bloch-Floquetovým teorémem a řešením Maxwellových rovnic v periodicky uspořádaném materiálovém prostředí. Využijte teorém ke spektrální formulaci elektrické integrální rovnice pro rozptyl rovinné vlny na planární dvoudimenzionálně periodické struktuře. Nastudujte možnosti urychlení konvergence řad a tyto algoritmy využijte při výpočtu spektrální Greenovy funkce. Získanou formulaci implementujte v prostředí MATLAB a porovnáním s komerčním simulátorem pole ověřte správnost implementace. Implementaci následně využijte na výpočet charakteristických módů na vybrané periodické struktuře.

Seznam doporučené literatury:

- [1] R. F. Harrington, Field Computation by Moment Methods, Wiley – IEEE Press, 1993.
- [2] S. M. Rao, D. R. Wilton, and A. W. Glisson, "Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape," IEEE Transaction on Antennas and Propagation, Vol. 30, pp. 409 – 418, 1982.
- [3] J. M. Jin, Theory and Computation of Electromagnetic Fields, Wiley, 2010.
- [4] K. Schab, "Sparsity of Radiating Characteristic Modes on Infinite Periodic Structures," IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, Vol. 21, pp. 312 – 316, 2022.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

doc. Ing. Lukáš Jelínek, Ph.D. katedra elektromagnetického pole FEL

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

doc. Ing. Miloslav Čapek, Ph.D. katedra elektromagnetického pole FEL

Datum zadání bakalářské práce: **17.02.2023** Termín odevzdání bakalářské práce: **26.05.2023**

Platnost zadání bakalářské práce: **22.09.2024**

doc. Ing. Lukáš Jelínek, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

doc. Ing. Stanislav Vítek, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Mgr. Petr Páta, Ph.D.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

Poděkování

Děkuji doc. Ing. Lukáši Jelínkovi, Ph.D. za odborné vedení práce, za velice přínosné rady a hlavně za trpělivost, kterou se mnou měl. Tato práce by bez něho nebyla možná.

Dík patří i mé rodině za podporu během celého studia.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

Praha, 26. května 2023

Abstrakt

Tato práce se věnuje popisu rozptylové úlohy v rámci dobře vodivých plošných objektů vykazujících periodicitu ve dvou směrech. Je ukázáno, že periodické rozšíření Greenovy funkce pro volný prostor poskytuje řešení ekvivalentní přímočarému použití proudové hustoty v rámci celé periodické struktury. Práce se krátce věnuje také problému pomalu konvergujících řad souvisejících s periodickou Greenovou funkcí a s jejich akcelerací. Jako ověření správnosti metody slouží výpočet spektra charakteristických módů na konkrétním periodickém povrchu a porovnání s výsledky komerčního simulátoru.

Klíčová slova: rozptyl elektromagnetického pole, Greenova funkce, metoda momentů, integrální rovnice pro elektrické pole, numerické řešení, periodičita, frekvenčně selektivní povrchy, charakteristické módy, akcelerace konvergence řady

Školitel: doc. Ing. Lukáš Jelínek, Ph.D. katedra elektromagnetického pole, České vysoké učení technické v Praze

Abstract

This thesis addresses the scattering from highly conductive two-dimensionally periodic bodies. It is shown that the periodic expansion of the free space Green's function yields an equivalent solution to the straightforward use of current density spanning the whole periodic structure. The thesis also shortly describes the problem of slowly converging series related to the periodic Green's function and their acceleration. The computation of the characteristic mode spectrum and its comparison with results acquired from a commercial simulator serve as validation of the method.

Keywords: electromagnetic scattering, Green's function, method of moments, electric field integral equation, numerical solution, periodicity, frequency selective surfaces, characteristic modes, series convergence acceleration

Title translation: Electromagnetic wave scattering on a planar two-dimensionally periodic structure

Obsah

1 Úvod	1
1.1 Cíle práce	2
1.2 Nástin řešení	2
2 Rozptyl elektromagnetické vlny na neperiodické struktuře	3
2.1 Greenova funkce ve volném prostoru	4
3 Formulace rozptylové úlohy v rámci metody momentů	5
4 Rozptyl elektromagnetické vlny na periodické struktuře	7
4.1 Greenova funkce pro periodické prostředí	7
4.2 Konstrukce impedanční matice ..	9
4.3 Volba bázových funkcí	10
4.4 Koeficienty odrazu a prostupu ..	11
5 Charakteristické módy a vyzářování periodické plochy	13
5.1 Numerické výsledky	14
6 Urychlení konvergence sumy pro efektivní výpočet impedanční matice	15
6.1 Shanksova transformace	17
6.2 ρ -Algoritmus	17
6.3 Levinova t -transformace	18
6.4 Porovnání popsaných akceleračních algoritmů	19
7 Závěr	21
Literatura	23
A Bloch-Floquetův teorém	25
B Explicitní tvar integrálů Φ a Ξ	27

Obrázky

2.1 Rozptyl elektromagnetické vlny na materiálovém objektu Ω	3
4.1 Rozptyl elektromagnetické vlny na periodické struktuře s periodami $a \times b$	7
4.2 Ilustrace RWG bázové funkce ψ_u na trojúhelnících T_u^+ a T_u^-	10
5.1 Spektrum charakteristických módů na periodické struktuře	14
6.1 Pomalá konvergence impedanční matice v závislosti na počtu vrstev (nahore) a celkovém počtu součtů (dole)	15
6.2 Vývoj reálné (nahore) a imaginární (dole) složky vybraného členu impedanční matice	16
6.3 Ilustrace vrstev Floquetovských módů, přes něž probíhá součet impedanční matice	17
6.4 Konvergence Levinovy t -transformace v závislosti na zvoleném řádu	18
6.5 Porovnání konvergence akceleračních algoritmů na monotonní (nahore) a oscilující (dole) řadě	19

Kapitola 1

Úvod

Studium interakce elektromagnetické vlny s materiálovým objektem patří k základním odvětvím elektromagnetismu. To platí i pro periodická uspořádání materiálů¹, která jsou v optické části spektra známá jako difrakční mřížky a jejichž odrazné vlastnosti jsou studovány již od 17. století [1]. Do výzkumu v ostatních oblastech spektra vstoupily periodické struktury až během druhé poloviny dvacátého století spolu se snahou snížit efektivní odrazovou plochu (radar cross section, RCS) vojenských letadel tak, aby byly hůře zachytitelné cizími radary bez ohrožení funkčnosti jejich vlastních antén. Řešením tohoto problému bylo použití vodivých periodických struktur zvaných frekvenčně selektivní povrchy (frequency selective surfaces, FSS) [2]. Interakce těchto povrchů s elektromagnetickým polem je frekvenčně závislá a manipulací s jejich strukturou lze ovládat chování okolního pole.

Frekvenčně selektivní povrchy mají v technice mnoho využití, významnou roli hrají hlavně v návrhu frekvenčních filtrů. Hybridní radomy pro letadlové radary zkonstruované z FSS plní funkci pásmové propusti [3], která propustí radarový svazek v požadovaném pásmu, avšak v ostatních pásmech záření pohlcuje. V kosmické technice našly FSS využití v konstrukci dichroických reflektorů v parabolických anténách. Ty tak mohou vysílat na větším počtu frekvenčních pásem, což vede na snížení hmotnosti a ceny satelitu [4]. Je-li periodický povrch vyroben na ztrátovém materiálu, lze ho použít k absorpci elektromagnetických vln s vyšší efektivitou, než jaké dosahují klasické absorbéry [2].

V posledních letech je v této oblasti pozornost soustředěna především na vývoj meta-povrchů [5], které fungují jako polarizační konvertory, tvarovače anténních svazků či jako umělé magnetické stěny.

Tato práce se omezuje na vodivé planární periodické povrchy a na jejich analýzu.

¹I samotné materiály jsou v případě krystalických látek periodickým uspořádáním elementárních buněk. Tato práce se však zaměřuje pouze na makroskopický elektromagnetismus, v němž je atomární periodicitata skryta.

1.1 Cíle práce

Hlavním cílem této práce je formulace úlohy o rozptylu elektromagnetické vlny na planárním periodickém objektu a implementace tohoto řešení v prostředí MATLAB. Součástí implementace jsou algoritmy urychlující konvergenci sumací použitých v periodické Greenově funkci. Posledním úkolem je validace implementace výpočtem spektra charakteristických módů a porovnáním s výsledky komerčního simulátoru elektromagnetického pole.

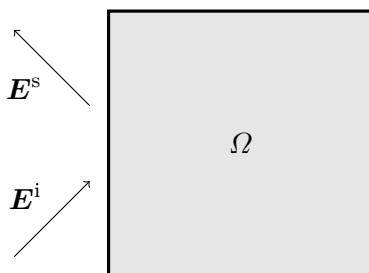
1.2 Nástin řešení

Práce začíná obecným popisem rozptylu elektromagnetické vlny na plošném objektu v kapitole 2 a definicí Greenovy funkce ve volném prostoru. Jako metoda nalezení řešení rozptylového problému je v kapitole 3 zvolena metoda momentů. V této kapitole je též popsána impedanční matice a konstrukce jejích členů. Tato obecná metodologie je v kapitole 4 aplikována na problém rozptylu na povrchu s dvoudimenzionální periodicitou. Je zavedena periodická Greenova funkce a je popsána konkrétní konstrukce impedanční matice s uvážením Rao-Wilton-Glisson (RWG) bázových funkcí. Kapitola 5 je věnována charakteristickým módům na periodických strukturách. Ukazuje i numerickou validaci navrženého řešení. Závěrem jsou v kapitole 6 popsány a porovnány vybrané algoritmy sloužící k urychlení konvergence řad obsažených ve výpočtu periodické Greenovy funkce. Práce je doplněna přílohami přibližujícími Bloch-Floquetův teorém (příloha A) a explicitní tvary integrálů použitých k numerickému výpočtu impedanční matice (příloha B) a kódem v prostředí MATLAB.

Kapitola 2

Rozptyl elektromagnetické vlny na neperiodické struktuře

Při rozptylu harmonické¹ elektromagnetické vlny na materiálovém objektu $\mathbf{r} \in \Omega$ můžeme výsledné elektrické pole rozdělit na pole zdrojové \mathbf{E}^i a pole rozptýlené \mathbf{E}^s . Znalost celkového elektrického pole \mathbf{E} v objemu rozptylující struktury je pak společně s vyzařovacími okrajovými podmínkami v nekonečnu úplným elektromagnetickým popisem [6].



Obrázek 2.1: Rozptyl elektromagnetické vlny na materiálovém objektu Ω .

Dle principu superpozice bude platit

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s, \quad (2.1)$$

přičemž rozptýlené elektrické pole \mathbf{E}^s lze zapsat jako [6]

$$\mathbf{E}^s = -j\omega\mu \left(\mathbf{A}^s + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \mathbf{A}^s \right), \quad (2.2)$$

kde $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ je vlnové číslo ve volném prostoru s permitivitou ε a permeabilitou μ a \mathbf{A}^s je vektorový potenciál pro rozptýlené pole. Ten lze obecně vyjádřit za pomoci proudové hustoty \mathbf{J} , která je při dopadu vlny indukována v rozptylujícím objemu. Vztah mezi vektorovým potenciálem a indukovanou proudovou hustotou je za použití Lorenzovy kalibrační podmínky dán Helmholtzovou rovnicí [6]

$$\nabla^2 \mathbf{A}^s + k^2 \mathbf{A}^s = -\mu \mathbf{J}, \quad (2.3)$$

která charakterizuje vyzařování proudové hustoty \mathbf{J} ve volném prostoru.

¹Předpokládá se časová konvence $e^{j\omega t}$, kde ω je úhlová rychlost.

2.1 Greenova funkce ve volném prostoru

Řešení rovnice (2.3) lze zapsat pomocí Greenovy funkce G_0 v integrálním tvaru

$$\mathbf{A}^s(\mathbf{r}) = \mu \int_{V_\infty} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}', \quad (2.4)$$

jenž bude středobodem popisu rozptylu na periodických strukturách v další části této práce.

V dalším textu bude nutné rozlišit veličiny související s periodickou strukturou od těch souvisejících s jedinou periodou. Dolní indexy 0 proto budou označovat neperiodické prostředí. Později při uvažování periodických struktur bude \mathbf{J}_0 značit proudovou hustotu v rámci jediné periody, zatímco \mathbf{J} bez indexu bude proudová hustota ve všech periodách.

Greenovu funkci lze ve volném prostoru vyjádřit klasickým vztahem [6]

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (2.5)$$

Přirozeným módem dvoudimenzionálně periodických struktur je rovinná vlna. Je proto výhodné Greenovu funkci vyjádřit jako zpětnou Fourierovu transformaci přes plochu (například x - y), tedy jako součet rovinných vln. Tento spektrální tvar Greenovy funkce lze nejnázne získat přímou aplikací Fourierovy transformace na rovnici (2.5), jejímž výsledkem je

$$G_0(\mathbf{k}_\perp, z, \mathbf{r}') = \frac{1}{2jk_z} e^{-jk_z|z-z'|} e^{-j\mathbf{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}'}, \quad (2.6)$$

kde $\mathbf{k}_\perp = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\rho}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ a $k_z = \sqrt{k^2 - |\mathbf{k}_\perp|^2}$. Transformací (2.6) zpět k prostorovým souřadnicím lze Greenovu funkci zapsat ve spektrálním tvaru

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2j(2\pi)^2} \int_{k_x} \int_{k_y} \frac{e^{-jk_z|z-z'|}}{k_z} e^{j[k_x(x-x') + k_y(y-y')]} dk_x dk_y, \quad (2.7)$$

který je zcela ekvivalentní vyjádření v (2.5). Výše uvedené vztahy předpokládají konvenci $\text{Im}\{k_z\} \leq 0$.

Kapitola 3

Formulace rozptylové úlohy v rámci metody momentů

Vyjádření elektrického pole \mathbf{E}^s vybudované v předchozí kapitole lze využít k vyřešení úlohy o rozptylu elektromagnetické vlny na překážce. V této práci bude překážka vodivým povrchem $\rho \in \rho_\Omega$ charakterizovaným povrchovou impedancí Z_S [7] [8]. V takovém případě bude pro celkové elektrické pole platit okrajová podmínka

$$\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s(\mathbf{K}) = Z_S \mathbf{K}, \quad \rho \in \rho_\Omega, \quad (3.1)$$

kde \mathbf{K} je neznámou ekvivalentní plošnou proudovou hustotou nahrazující materiálovou překážku.

Lineární operátorovou rovnicí (3.1) lze efektivně řešit metodou momentů [9] [10]. Tato numerická metoda je založena na aproximaci neznámé proudové hustoty

$$\mathbf{K} \approx \sum_v I_v \boldsymbol{\psi}_v \quad (3.2)$$

vektorem koeficientů i za pomoci báze funkcí $\boldsymbol{\psi}$. Řešení předpokládá také linearitu operátoru \mathbf{E}^s , která je zaručena vztahy (2.2) a (2.4). V kombinaci s rozkladem (3.2) potom operátor \mathbf{E}^s působí přímo na báze funkci.

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{K}) \approx \sum_v I_v \mathbf{E}^s(\boldsymbol{\psi}_v) \quad (3.3)$$

Tato operace spolu s Galerkinovským testováním [9] umožňuje přepis výchozího problému (3.1) na soustavu lineárních rovnic

$$\mathbf{Z}\mathbf{I} = \mathbf{V}, \quad (3.4)$$

kde

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{\psi}_1, Z_S \boldsymbol{\psi}_1 - \mathbf{E}^s(\boldsymbol{\psi}_1) \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{\psi}_1, Z_S \boldsymbol{\psi}_V - \mathbf{E}^s(\boldsymbol{\psi}_V) \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \boldsymbol{\psi}_V, Z_S \boldsymbol{\psi}_1 - \mathbf{E}^s(\boldsymbol{\psi}_1) \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{\psi}_V, Z_S \boldsymbol{\psi}_V - \mathbf{E}^s(\boldsymbol{\psi}_V) \rangle \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_V \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{\psi}_1, \mathbf{E}^i \rangle \\ \vdots \\ \langle \boldsymbol{\psi}_V, \mathbf{E}^i \rangle \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Vhodným reakčním součinem je zde

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, dS \quad (3.7)$$

pro pole \mathbf{A} a \mathbf{B} definované na ploše S , jenž se oproti běžnému skalárnímu součinu v této souvislosti používá běžněji. Použitím reakčního součinu v (3.5) lze členy impedanční matice \mathbf{Z} vyjádřit jako

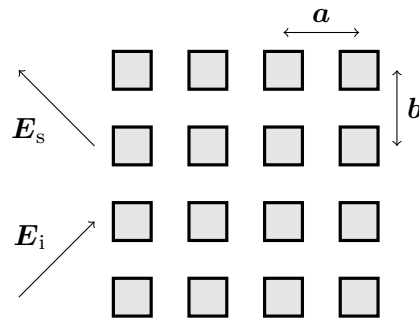
$$Z_{uv} = Z_S \int_{S_u} \psi_u \cdot \psi_v \, dS - \int_{S_u} \psi_u \cdot \mathbf{E}^s(\psi_v) \, dS. \quad (3.8)$$

Vektor \mathbf{V} na pravé straně (3.4) obsahuje reakční součiny bazových funkcí se známým vektorem dopadající vlny.

Kapitola 4

Rozptyl elektromagnetické vlny na periodické struktuře

Je-li rozptylová struktura periodická, zůstane výchozí problém v principu stejný jako v kapitolách 2 a 3. Periodicita povrchu se však promítne do konstrukce Greenovy funkce.



Obrázek 4.1: Rozptyl elektromagnetické vlny na periodické struktuře s periodami $a \times b$.

Pro zjednodušení zápisu uvažujme planární periodickou strukturu (viz obrázek 4.1) ležící v rovině $z = 0$ a předpokládejme dopadající rovinnou vlnu

$$\mathbf{E}^i(z = 0) = \mathbf{E}_0 e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}}. \quad (4.1)$$

4.1 Greenova funkce pro periodické prostředí

Vztah (2.4) pro vektorový potenciál platí obecně a formálně se nezmění, bude-li integrand obsahovat proud na celé periodické struktuře. Periodicitu proudu lze však použít k významnému zjednodušení. Hlavním krokem je Bloch-Floquetův teorém (v příloze A) [11], jenž ukazuje, že proudová hustota indukovaná elektromagnetickou vlnou \mathbf{E}^i dopadající na periodický povrch musí, stejně jako ostatní polní veličiny, mít tvar

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) = e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}} \sum_{m,n} \mathbf{K}_0(\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}_{mn}), \quad \boldsymbol{\rho}_{mn} = \begin{pmatrix} ma \\ nb \end{pmatrix}, \quad m, n \in \mathbf{Z} \quad (4.2)$$

kde \mathbf{K}_0 je definována na jedné elementární buňce struktury. Proudová hustota je tedy periodickou funkcí s periodami $a \times b$, která je násobena fázovým faktorem, vnuceným dopadající vlnou.

Dosazením vztahu (4.2) do (2.4) a použitím spektrálního tvaru Greenovy funkce $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ lze získat vztah

$$\mathbf{A}^s(\mathbf{r}) = \mu \int_{V_\infty} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' = \mu \int_{V_0} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_0(\mathbf{r}') dV', \quad (4.3)$$

kde

$$G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}} \sum_{m,n} \frac{e^{-jk_{zmn}|z-z'|} e^{j\mathbf{h}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')}}{2jabk_{zmn}}, \quad (4.4)$$

se nazývá periodická Greenova funkce a kde

$$\mathbf{h}_{mn} = \left(\frac{2\pi m}{\frac{a}{2\pi n}} \right), k_{zmn} = \sqrt{k^2 - |\mathbf{k}_\perp + \mathbf{h}_{mn}|^2}. \quad (4.5)$$

Integrace je takto omezena pouze na oblast jediné elementární buňky¹.

Rozptýlené elektrické pole \mathbf{E}^s (2.2) lze v případě Blochovsky periodické proudové hustoty počítat jako

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = -j\omega\mu e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}} \int_{V_p} \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_0(\mathbf{r}') dV' \quad (4.6)$$

$$\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = e^{-j\mathbf{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}} \left(I_3 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (4.7)$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Zavedení členu $e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}}$ ve vztahu (4.6) odpovídá Blochovu požadavku, že všechny veličiny společně sdílí tento fázový člen daný dopadající rovinnou vlnou. V rovnici typu (3.1) se tyto fázové členy vzájemně vyruší a nebudou proto vystupovat v reakčních integrálech metody momentů, což je numericky výhodné.

Explicitní tvar dyadické Greenovy funkce $\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ lze vyjádřit jako

$$\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{m,n} \frac{e^{-jk_{zmn}|z-z'|} e^{j\mathbf{h}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')}}{2jabk_{zmn}} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{k^2} \begin{pmatrix} (\mathbf{k}_\perp + \mathbf{h}_{mn})(\mathbf{k}_\perp + \mathbf{h}_{mn})^T & -k_{zmn}(\mathbf{k}_\perp + \mathbf{h}_{mn})\text{sign}(z-z') \\ -k_{zmn}(\mathbf{k}_\perp + \mathbf{h}_{mn})^T\text{sign}(z-z') & k_{zmn}^2 + 2jk_{zmn}\delta(z-z') \end{pmatrix} \right] \quad (4.9)$$

Přes svůj komplikovaný vzhled tento tvar umožňuje snadné numerické řešení reakčních integrálů, jak je ukázáno v následující sekci.

¹Jak již bylo uvedeno v kapitole 2, dolní index 0 zde označuje veličiny spojené s jedinou periodou povrchu.

4.2 Konstrukce impedanční matice

V této sekci je podrobně popsána konstrukce impedanční matice, jejímž základem je dyadická Greenova funkce (4.9) a rozklad proudu v jedné elementární buňce struktury do systému bázových funkcí

$$\mathbf{K}_0 \approx \sum_v I_v \boldsymbol{\psi}_v. \quad (4.10)$$

Dosazením (4.6) do (3.8) získáme (u, v) -tý člen impedanční matice

$$Z_{uv} = Z_S \int_{S_u} \boldsymbol{\psi}_u \cdot \boldsymbol{\psi}_v \, dS - j\omega\mu \int_{S_u} \int_{S_v} \boldsymbol{\psi}_u(\mathbf{r}) \cdot \bar{G}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}', z, z') \cdot \boldsymbol{\psi}_v(\mathbf{r}') \, dS' \, dS. \quad (4.11)$$

Bázové funkce popisují plošný proud. Za předpokladu umístění planárního periodického povrchu v rovině $z = 0$ budou komponenty $\mathbf{z}_0 \cdot \boldsymbol{\psi}$ nulové². Ve vztahu (4.11) se tak uplatní pouze horní 2×2 blok dyadické Greenovy funkce, která má za předpokladu $z = z' = 0$ tvar

$$\bar{G}_2 = \sum_{mn} \frac{e^{j\mathbf{h}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')}}{2j\text{ab}k_{zmn}} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{(\mathbf{k}_\perp + \mathbf{h}_{mn})(\mathbf{k}_\perp + \mathbf{h}_{mn})^\text{T}}{k^2} \right], \quad (4.12)$$

Funkce \bar{G}_2 je funkcí prostorových proměnných $\boldsymbol{\rho}$ a $\boldsymbol{\rho}'$ a každý její sčítanec je v součinném tvaru. Integraci (4.11) lze tedy rozdělit na součin dvou integrálů. Konkrétně lze každý člen impedanční matice vyjádřit jako

$$Z_{uv} = Z_S \int_{S_u} \boldsymbol{\psi}_u \cdot \boldsymbol{\psi}_v \, dS - j\omega\mu \sum_{m,n} \boldsymbol{\Gamma}_{u,mn} \cdot \bar{A}_{mn} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_{v,mn}^*, \quad (4.13)$$

kde

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\alpha,mn} = \int_{S_\alpha} \boldsymbol{\psi}_\alpha(\boldsymbol{\rho}) e^{j\mathbf{h}_{mn} \cdot \boldsymbol{\rho}} \, dS, \quad (4.14)$$

$$\bar{A}_{mn} = \frac{1}{2j\text{ab}k_{zmn}} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{(\mathbf{k}_\perp + \mathbf{h}_{mn})(\mathbf{k}_\perp + \mathbf{h}_{mn})^\text{T}}{k^2} \right], \quad (4.15)$$

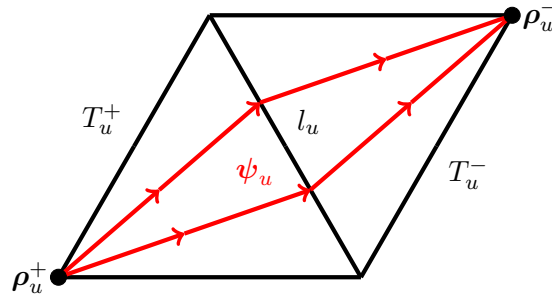
a kde byl využit předpoklad, že bázové funkce jsou reálné.

²Vektor \mathbf{z}_0 je jednotkový vektor ve směru z

4.3 Volba bázových funkcí

Bázové funkce ψ mohou být vybrány libovolně. Pro účely této práce jsou vhodnou volbou Rao-Wilton-Glisson (RWG) funkce [12], viz obrázek 4.2 (proudová hustota je vyznačena červeně). RWG funkce jsou reálné a jsou definovány na trojúhelnících T^+ a T^- s plochami A^+ a A^- . Tyto trojúhelníky mají jednu společnou stranu o délce l a koncové nespolečné vrcholy jsou označeny ρ^+ pro T^+ a ρ^- pro T^- . RWG funkce jsou nad trojúhelníkovými oblastmi lineární

$$\psi_u(\boldsymbol{\rho}) = \begin{cases} \frac{l_u}{2A_u^+}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_u^+), & \boldsymbol{\rho} \in T_u^+ \\ -\frac{l_u}{2A_u^-}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_u^-), & \boldsymbol{\rho} \in T_u^- \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (4.16)$$



Obrázek 4.2: Ilustrace RWG bázové funkce ψ_u na trojúhelnících T_u^+ a T_u^-

Volbou RWG bázových funkcí se integrály Γ rozpadnou na součet

$$\Gamma_{\alpha,mn} = l_\alpha \left(\Xi_{\alpha,mn}^+ - \Xi_{\alpha,mn}^- - \rho_\alpha^+ \Phi_{\alpha,mn}^+ + \rho_\alpha^- \Phi_{\alpha,mn}^- \right), \quad (4.17)$$

kde

$$\Phi_{\alpha,mn}^\pm = \frac{1}{2A_\alpha^\pm} \int_{S_\alpha^\pm} e^{j\mathbf{h}_{mn} \cdot \boldsymbol{\rho}} dS \quad (4.18)$$

$$\Xi_{\alpha,mn}^\pm = \frac{1}{2A_\alpha^\pm} \int_{S_\alpha^\pm} \boldsymbol{\rho} e^{j\mathbf{h}_{mn} \cdot \boldsymbol{\rho}} dS \quad (4.19)$$

Integrály Φ , Ξ lze určit analyticky s pomocí barycentrického souřadnicového systému

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \boldsymbol{\rho}_1 + \beta \boldsymbol{\rho}_2 + (1 - \alpha - \beta) \boldsymbol{\rho}_3, \quad (4.20)$$

kde $\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_3$ značí vrcholy trojúhelníka. Detaily výpočtu jsou uvedeny v příloze B.

4.4 Koeficienty odrazu a prostupu

Úplná znalost elektromagnetického pole není v praxi vždy nutná. Velice často se využívá popisu systému pomocí bezrozměrných koeficientů odrazu a prostupu, které popisují vztah rozptýlené a dopadající vlny.

Aplikací rozkladu proudové hustoty (3.2) na vztah (4.6) lze získat vyjádření elektrického pole rozptýleného konkrétním Floquetovským módem (m, n) ve tvaru

$$\mathbf{E}_{mn}^s(z = 0^\pm) = -j\omega\mu e^{j(\mathbf{k}_\perp + \mathbf{h}_{mn}) \cdot \boldsymbol{\rho}} \bar{A}_{mn} \sum_{\alpha} i_{\alpha} \mathbf{I}_{\alpha, mn}^*, \quad (4.21)$$

zatímco pro elektrickou složku dopadající rovinné vlny platí vztah

$$\mathbf{E}^i(z = 0) = \mathbf{E}_0 e^{j\mathbf{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}}. \quad (4.22)$$

Matici koeficientů odrazu R pak lze pro konkrétní Floquetovský mód (m, n) definovat rovností

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{E}_{mn}^s(z = 0^-) \\ \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{E}_{mn}^s(z = 0^-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{mn}^{xx} & R_{mn}^{xy} \\ R_{mn}^{yx} & R_{mn}^{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{E}^i(z = 0) \\ \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{E}^i(z = 0) \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Koeficienty odrazu lze takto vyjádřit jako podíl příslušných složek rozptýlené a dopadající vlny.

Koeficienty prostupu lze definovat stejným způsobem jako koeficienty odrazu v (4.23), tedy jako

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{E}_{mn}^s(z = 0^+) \\ \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{E}_{mn}^s(z = 0^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{mn}^{xx} & T_{mn}^{xy} \\ T_{mn}^{yx} & T_{mn}^{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{E}^i(z = 0) \\ \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{E}^i(z = 0) \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Jelikož je rozptylová struktura planární a nekonečně tenká, platí díky vztahu (4.21) pro koeficienty prostupu T rovnost [6]

$$T = 1 + R. \quad (4.25)$$

Kapitola 5

Charakteristické módy a vyzařování periodické plochy

Při studiu chování elektromagnetických systémů se široce využívá charakteristických módů [13] [14]. Předmětem studia modální analýzy v rámci rozptylu elektromagnetických vln na materiálových objektech obecného tvaru jsou impedanční matice a její vlastní vektory, které se běžně nazývají charakteristickými proudy.

Základní rovnicí modální analýzy je

$$\mathbf{Z}\mathbf{I}_n = \nu_n \mathbf{M}\mathbf{I}_n, \quad (5.1)$$

kde \mathbf{Z} je impedanční matice, \mathbf{M} je vhodný váhovací operátor, ν_n jsou vlastní čísla a \mathbf{I}_n jsou charakteristické proudy. Impedanční matice je obecně komplexní. Volbou $\nu_n = 1 + j\lambda_n$ a $\mathbf{M} = \mathbf{R}$ lze výchozí problém (5.1) přepsat na rovnici pro zobecněná vlastní čísla λ_n [14]

$$\mathbf{X}\mathbf{I}_n = \lambda_n \mathbf{R}\mathbf{I}_n, \quad (5.2)$$

kde matice \mathbf{X} a \mathbf{R} jsou definovány jako

$$\mathbf{X} = \frac{1}{2j}(\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^*) \quad (5.3)$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}^*), \quad (5.4)$$

pročež jsou reálné a platí rovnost

$$\mathbf{Z} = \mathbf{R} + j\mathbf{X}. \quad (5.5)$$

Řešením rovnice (5.2) lze nalézt Rayleighův kvocient λ_n , jenž lze definovat také jako

$$\lambda_n = \frac{\mathbf{I}_n^* \mathbf{X} \mathbf{I}_n}{\mathbf{I}_n^* \mathbf{R} \mathbf{I}_n} \quad (5.6)$$

a podle něhož lze posoudit povahu daného módu. Člen $\mathbf{I}_n^* \mathbf{X} \mathbf{I}_n$ souvisí s reaktivní energií módu. Záporné hodnoty Rayleighova kvocientu znamenají, že daný mód má kapacitní charakter. Naproti tomu induktivní módy mají

charakteristické číslo λ_n kladné. Pro rezonující charakteristické módy nabývá λ_n nulové hodnoty [15].

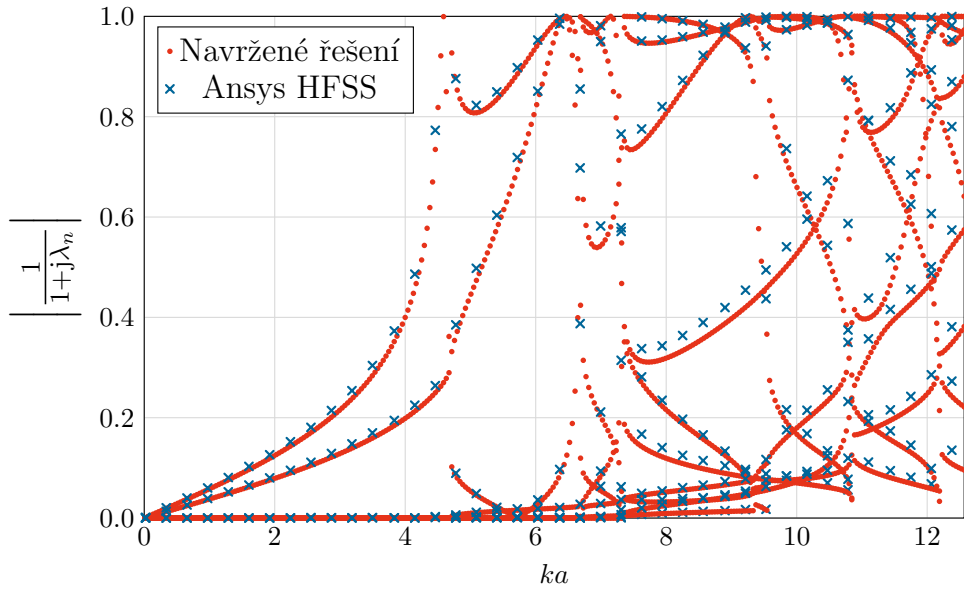
Člen $\mathbf{I}_n^* \mathbf{R} \mathbf{I}_n$ určuje vyzařěný výkon. Jelikož však vlastní vektory nemají jednoznačnou velikost, normalizují se běžně charakteristické proudy na jednotkový vyzařěný výkon [14]

$$\mathbf{I}_n^* \mathbf{R} \mathbf{I}_n = 1. \quad (5.7)$$

5.1 Numerické výsledky

V prostředí MATLAB bylo spočítáno spektrum charakteristických módů pro konkrétní periodickou strukturu sestávající z pole nekonečně tenkých obdélníků o rozměrech $0,4a \times 0,5a$ uvnitř elementární buňky $a \times a$ při ozáření elektromagnetickou vlnou pod úhlem $\vartheta = 20^\circ$. Výsledek byl porovnán s daty z komerčního simulátoru Ansys HFSS¹ (viz obrázek 5.1). K výpočtu byla použita sumace (4.13) s $m = -20..20$, $n = -20..20$, což odpovídá 20 vrstvám, jež jsou ilustrovány na obrázku 6.3. Výsledky navrženého řešení lze považovat za správné. Data potvrzují, že existuje konečný počet vyzařujících charakteristických módů, který se mezi frekvenčními pásmy skokově mění. Přechody mezi těmito pásmy lze pozorovat na obrázku 5.1 přibližně na hodnotách $ka \in \{4, 7; 7, 3; 9, 3; 10, 8; 12, 2\}$. Počet vyzařujících módů v každém pásmu odpovídá počtu řešení nerovnosti [15]

$$|\mathbf{k}_\perp + \mathbf{h}_{mn}| < k. \quad (5.8)$$



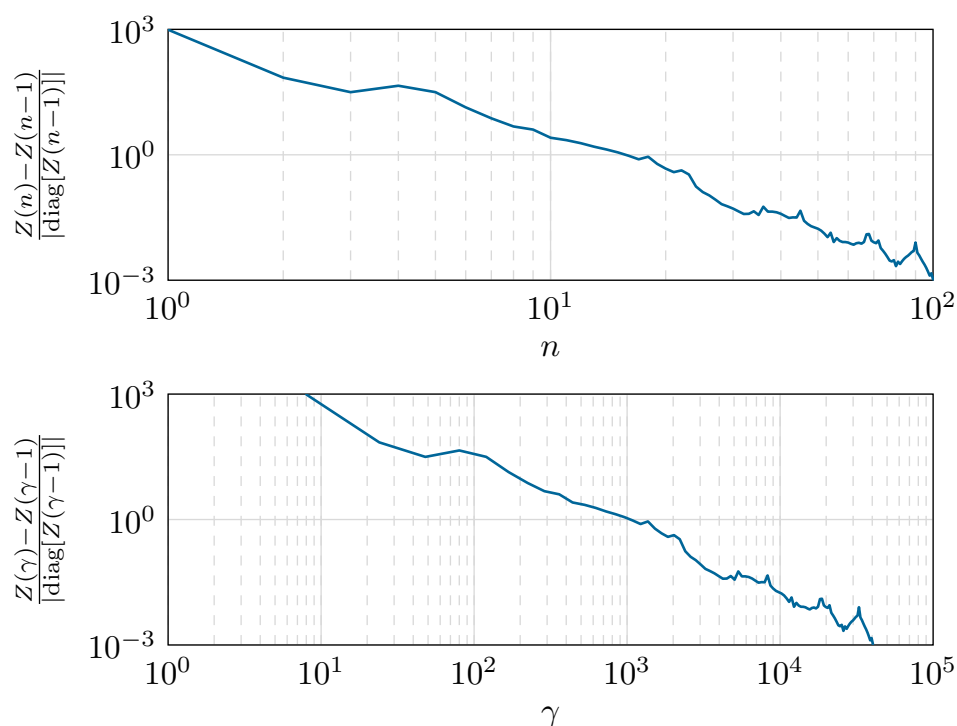
Obrázek 5.1: Spektrum charakteristických módů na periodické struktuře

¹Simulátor HFSS neumožňuje přímý výpočet charakteristických módů. K jejich výpočtu byl použit postup dle [16].

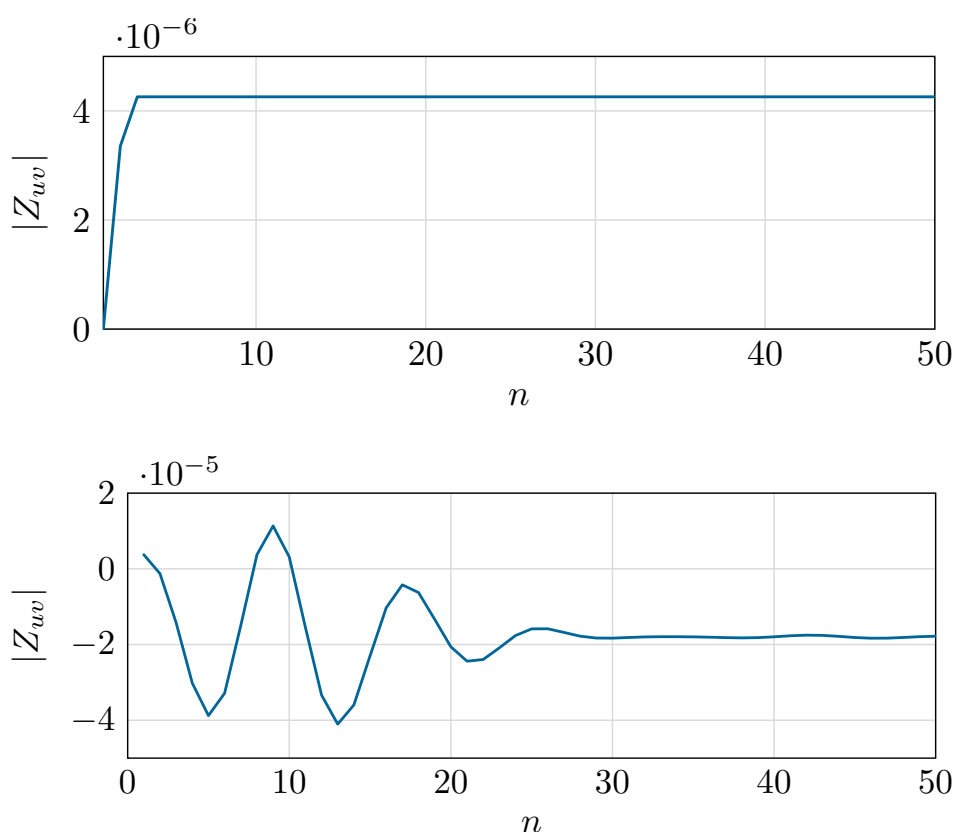
Kapitola 6

Urychlení konvergence sumy pro efektivní výpočet impedanční matice

Výpočet impedanční matice podle vztahu (4.13) zahrnuje sčítání příspěvků jednotlivých vrstev periodického prostředí. Při uvažování hustě navzorkovaných povrchů bude implementace výpočetně velice náročná. Řada obsahující periodickou Greenovu funkci navíc konverguje velmi pomalu [17] (viz obrázek 6.1) a v imaginární složce má oscilační charakter, jak ukazuje průběh vybraného členu Z na obrázku 6.2. Na ose x obrázku 6.1 dole je vynesena celkový počet součtů γ , což poskytuje praktičtější pohled na konvergenci impedanční matice.



Obrázek 6.1: Pomalá konvergence impedanční matice v závislosti na počtu vrstev (nahore) a celkovém počtu součtů (dole)



Obrázek 6.2: Vývoj reálné (nahore) a imaginární (dole) složky vybraného členu impedanční matice

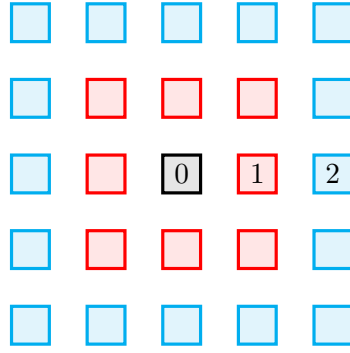
Problému akcelerace konvergence jednoduchých i dvojitých nekonečných sum se věnuje mnoho autorů [17] [18] [19] [20]. V této kapitole budou představeny a porovnány 3 vybrané akcelerační algoritmy. Všechny tyto algoritmy vychází z odhadu chování nekonečné posloupnosti s_m a jejích částečných součtů daných předpisem

$$S_n = \sum_{m=1}^n s_m. \quad (6.1)$$

Sumace v (4.13) probíhá přes 2 indexy, ne všechny akcelerační algoritmy však na dvojitých sumách fungují. Impedanční matice se sčítá po vrstvách n se středem ve Floquetovském módu $(m, n) = (0, 0)$. Tyto vrstvy jsou znázorněny na obrázku 6.3. V rámci každé vrstvy probíhá sumace přes indexy m . Dvojitý součet lze tedy vyjádřit jako jednoduchou sumu

$$\sum_{mn} a_{mn} = \sum_m \sum_{n(m)} a_{mn}, \quad (6.2)$$

kde se sčítá střídavě přes m a n .



Obrázek 6.3: Ilustrace vrstev Floquetovských módů, přes něž probíhá součet impedanční matice

6.1 Shanksova transformace

Prvním z vybraných algoritmů je Shanksova transformace popsaná podrobně v [21]. Posloupnost částečných součtů S_n lze transformovat vztahem

$$e(S_n) = \frac{S_{n+1}S_{n-1} - S_n^2}{S_{n+1} + S_{n-1} - 2S_n}. \quad (6.3)$$

Je-li původní posloupnost konečná, má její transformace o dva členy méně a zpravidla konverguje rychleji. Jak se ukázalo, akcelerace konvergence oscilujících řad Shanksovou transformací je velice efektivní [21]. Opětnou transformací

$$e^2(S_n) = e(e(S_n)) \quad (6.4)$$

lze konvergenci urychlit ještě více. Na konečné posloupnosti lze však provést pouze konečný počet transformací daný vztahem

$$N_{S,\max} = \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil - 1, \quad (6.5)$$

kde N je délka původní posloupnosti S_n a $\lceil x \rceil$ označuje zaokrouhlení na nejbližší vyšší celé číslo.

6.2 ρ -Algoritmus

ρ -Algoritmus nepřímo vychází ze Shanksovy transformace [22]. Jeho účelem je urychlovat konvergenci monotonních řad podle předpisu

$$\rho_k^{(n)} = \rho_{k-2}^{(n+1)} + \frac{k}{\left(\rho_{k-1}^{(n+1)} - \rho_{k-1}^{(n)}\right)}, \quad (6.6)$$

kde $k \in \mathbb{N}$ je řád algoritmu a kde se předpokládá

$$\rho_0^{(n)} = S_n, \quad \rho_{-1}^{(n)} = 0. \quad (6.7)$$

Algoritmus obsahuje dva druhy členů. Sudé členy tvoří novou řadu, která aproximuje původní částečné součty S_n a konverguje mnohem rychleji. Liché členy jsou pouze mezivýsledky a nemají jiný význam.

6.3 Levinova t -transformace

Akcelerace pomalu konvergující řady aplikací Levinovy t -transformace není omezena na jediný charakter (oscilující nebo monotonní) [17]. Transformace řádu $k \in \mathbb{N}$ řady částečných součtů S_n je dána vztahem

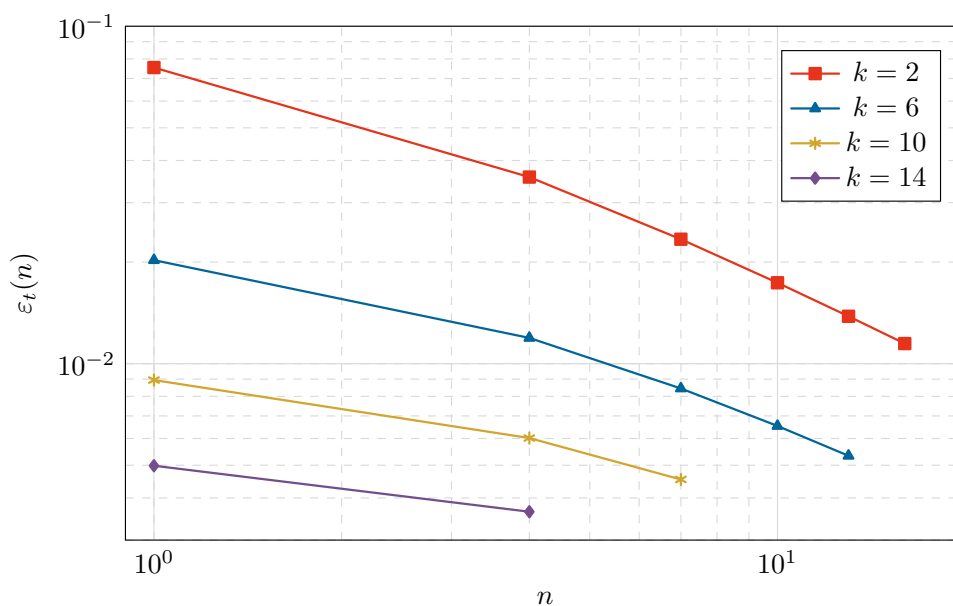
$$t_k^{(n)} = \frac{\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \left(\frac{n+i}{n+k}\right)^{k-1} \left(\frac{S_{n+i}}{S_{n+i+1} - S_{n+i}}\right)}{\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \left(\frac{n+i}{n+k}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{S_{n+i+1} - S_{n+i}}\right)} \quad (6.8)$$

Výhoda Levinovy t -transformace spočívá v tom, že není iterativní, tedy že transformace řádu k není závislá na výsledcích předchozích transformací nižších řádů, které zavádějí zaokrouhlovací chyby [17].

Rychlost konvergence t -transformace roste s řádem k , jak ilustruje obrázek 6.4. Na konečnou řadu lze, podobně jako u transformace Shanksovy použít transformaci maximálně řádu

$$k_{\max} = N - 2, \quad (6.9)$$

kde N je délka původní posloupnosti.

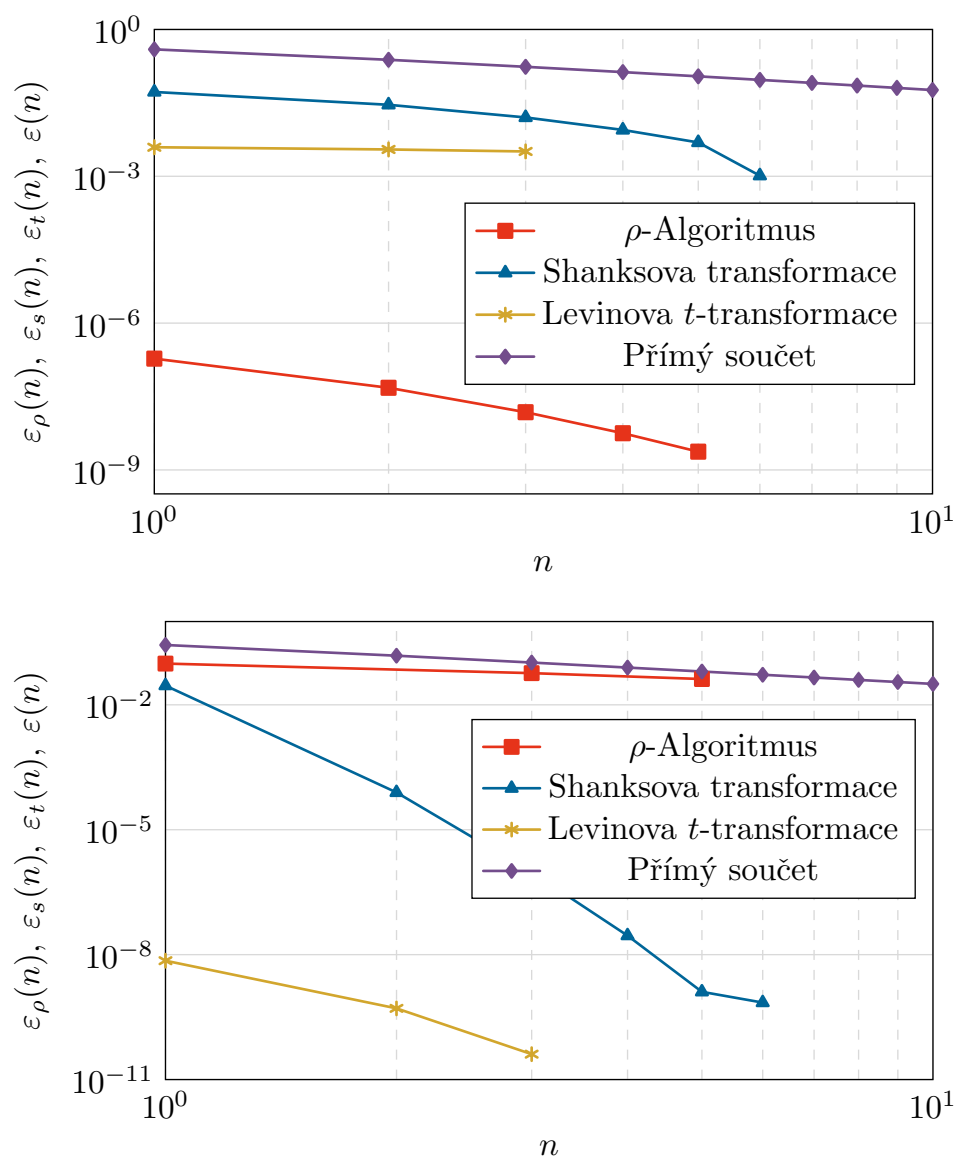


Obrázek 6.4: Konvergence Levinovy t -transformace v závislosti na zvoleném řádu

6.4 Porovnání popsaných akceleračních algoritmů

Každý ze širokého výběru akceleračních algoritmů se liší účelem i efektivitou. Některé cílí na konkrétní skupiny řady (například ρ -algoritmus pro monotonní [22], Shanksova transformace pro oscilující řady [21]), jiné adresují způsob výpočtu (d_2 -transformace pro dvojité sumy [23]; v této práci uvedena není). Zpravidla neexistuje ideální řešení na všechny problémy.

V této sekci je porovnávána efektivita algoritmů popsaných v sekcích 6.1, 6.2 a 6.3.



Obrázek 6.5: Porovnání konvergence akceleračních algoritmů na monotonní (nahore) a oscilující (dole) řadě

Všechny algoritmy byly testovány na monotonní řadě

$$A_n = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \quad (6.10)$$

s analytickým součtem

$$S_A = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,6449 \quad (6.11)$$

a na oscilující řadě

$$B_n = 4 \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad (6.12)$$

jejíž analytický součet je

$$S_B = \pi \approx 3,1416. \quad (6.13)$$

Obrázek 6.5 znázorňuje konvergenci řad urychlených těmito algoritmy. Patrný je rozdíl v chování Shanksovy transformace a ρ -algoritmu.

Pro akceleraci konvergence impedanční matice se jako nejvýhodnější jeví Levinova t -transformace, protože již při malých počtech částečných součtů poskytuje při aproximaci oscilujících řad řádově nižší odchylku, než ostatní algoritmy.

Kapitola 7

Závěr

V této práci bylo navrženo řešení rozptylu elektromagnetické vlny na planárním periodickém povrchu. Periodickým rozšířením Greenovy funkce pro volný prostor byl zformulován tvar impedanční matice, který slouží ke konečnému výpočtu rozptýleného pole a jehož výpočet byl implementován v prostředí MATLAB.

Bylo také ukázáno, že formulace rozptýleného elektrického pole pomocí bázových funkcí umožňuje na periodické struktuře definovat koeficienty odrazu a prostupu.

V rámci implementace byly otestovány a porovnány algoritmy akcelerující konvergenci impedanční matice. Ačkoliv tyto algoritmy fungují na testovacích řadách, po zavedení do implementace výpočtu impedanční matice selhávají. Další práce by měla tento problém adresovat.

Funkčnost implementace byla otestována porovnáním s výsledky komerčního simulátoru elektromagnetického pole Ansys HFSS při výpočtu spektra charakteristických módů na konkrétní periodické struktuře.

Napsaný kód je připraven k postupné implementaci do výpočetního balíčku AToM (Antenna Toolbox for MATLAB), jenž je vyvíjen na katedře elektromagnetického pole FEL ČVUT.



Literatura

- [1] S. Kinoshita, S. Yoshioka, and J. Miyazaki, “Physics of structural colors,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 71, no. 7, p. 076401, jun 2008.
- [2] B. Munk, *Frequency Selective Surfaces*. John Wiley & Sons, Apr. 2000.
- [3] E. Pelton and B. Munk, “A streamlined metallic radome,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 22, no. 6, pp. 799–803, nov 1974.
- [4] R. Hensell and P. Lantz, *A Dichroic Subreflector for Cassegrain Antenna Systems*, ser. NASA technical memorandum. Goddard Space Flight Center, 1964.
- [5] H.-T. Chen, A. J. Taylor, and N. Yu, “A review of metasurfaces: physics and applications,” *Reports on Progress in Physics* 79, 076401 (2016), May 2016.
- [6] A. Zangwill, *Modern Electrodynamics*. Cambridge University Press, Mar. 2019.
- [7] T. B. A. Senior and J. L. Volakis, *Approximate Boundary Conditions in Electromagnetics*. INSTITUTION OF ENGINEERING & T, Jun. 1995.
- [8] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. WILEY, Aug. 1998.
- [9] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*. Wiley-IEEE Press, Apr. 1993.
- [10] L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, *Functional analysis*. Elsevier, 2016.
- [11] K. Sakoda, *Optical Properties of Photonic Crystals*. Springer-Verlag GmbH, Nov. 2005.
- [12] S. Rao, D. Wilton, and A. Glisson, “Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 30, no. 3, pp. 409–418, may 1982.

- [13] R. J. Garbacz, “Modal expansions for resonance scattering phenomena,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 53, no. 8, pp. 856–864, 1965.
- [14] R. F. Harrington and J. R. Mautz, “Theory of characteristic modes for conducting bodies,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 19, no. 5, pp. 622–628, sep 1971.
- [15] K. Schab, “Sparsity of radiating characteristic modes on infinite periodic structures,” *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 21, no. 2, pp. 312–316, feb 2022.
- [16] M. Capek, J. Lundgren, M. Gustafsson, K. Schab, and L. Jelinek, “Characteristic mode decomposition using the scattering dyadic in arbitrary full-wave solvers,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 71, no. 1, pp. 830–839, jan 2023.
- [17] S. Singh and R. Singh, “On the use of levin's t-transform in accelerating the summation of series representing the free-space periodic green's functions,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 41, no. 5, pp. 884–886, may 1993.
- [18] —, “A convergence acceleration procedure for computing slowly converging series,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 1992.
- [19] E. E. Kummer, “Eine neue methode, die numerischen summen langsam convergirender reihen zu berechnen.” *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 16, pp. 206–214, 1837.
- [20] S. Singh, W. Richards, J. Zinecker, and D. Wilton, “Accelerating the convergence of series representing the free space periodic green's function,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 38, no. 12, pp. 1958–1962, 1990.
- [21] D. Shanks, “Non-linear transformations of divergent and slowly convergent sequences,” *Journal of Mathematics and Physics*, vol. 34, no. 1-4, pp. 1–42, apr 1955.
- [22] S. Singh and R. Singh, “On the use of rho -algorithm in series acceleration,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 39, no. 10, pp. 1514–1517, 1991.
- [23] C. Greif and D. Levin, “The d_2 -transformation for infinite double series and the D_2 -transformation for infinite double integrals,” *Mathematics of Computation*, vol. 67, no. 222, pp. 695–714, 1998.

Příloha A

Bloch-Floquetův teorém

Tato příloha odůvodňuje předpoklad použitý v kapitole 4, že všechny elektromagnetické veličiny na periodické struktuře ozářené rovinnou vlnou mají tvar periodické funkce násobené společným fázovým členem. Kapitola úzce sleduje výklad [11].

Uvažme monofrekvenční elektrické pole v periodické struktuře definované periodickým profilem permitivity

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r} + \mathbf{a}), \quad (\text{A.1})$$

kde \mathbf{a} je prostorová perioda. Elektrické pole splňuje vlnovou rovnici

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k_0^2 \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad (\text{A.2})$$

kde k_0 je vlnové číslo ve vakuu. Díky periodicitě můžeme $\varepsilon(\mathbf{r})$ rozvinout do Fourierovy řady

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} \hat{\varepsilon}(\mathbf{G}) e^{j\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}}, \quad (\text{A.3})$$

kde \mathbf{G} je vektorem reciproké mřížky. Platí

$$\mathbf{r} = x\mathbf{a}_1 + y\mathbf{a}_2 + z\mathbf{a}_3 \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{G} = h\mathbf{b}_1 + k\mathbf{b}_2 + l\mathbf{b}_3 \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = 2\pi\delta_{ij}, \quad i \in \{1, 2, 3\} \implies e^{j\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j} = 1. \quad (\text{A.6})$$

Dosazením (A.3) do (A.2) dostaneme

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k_0^2 \sum_{\mathbf{G}} \hat{\varepsilon}(\mathbf{G}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} = 0. \quad (\text{A.7})$$

Nyní můžeme rovnost transformovat Fourierovou transformací. Přejdeme k vlnovému vektoru \mathbf{k} , použijeme předpis

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k}. \quad (\text{A.8})$$

a posunovací pravidlo

$$\mathcal{F} \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} \right\} (\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k} - \mathbf{G}). \quad (\text{A.9})$$

Pro tyto obrazy bude platit

$$-|\mathbf{k}|^2 \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) + k_0^2 \sum_{\mathbf{G}} \hat{\varepsilon}(\mathbf{G}) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k} - \mathbf{G}) = 0. \quad (\text{A.10})$$

Na veličinu $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k} - \mathbf{G})$ lze nahlížet jako na diskretizaci $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k})$. Pro fixní \mathbf{k} bude řešení záviset pouze na těchto „vzorcích“. To znamená, že namísto vztahu (A.8) lze elektrické pole vyjádřit jako

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k} - \mathbf{G}) e^{j(\mathbf{k} - \mathbf{G}) \cdot \mathbf{r}}. \quad (\text{A.11})$$

Ze sumace můžeme vytknout tu část exponenciály, která nezávisí na \mathbf{G}

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \sum_{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k} - \mathbf{G}) e^{-j\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{A.12})$$

a zvolit

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k} - \mathbf{G}) e^{-j\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}}, \quad (\text{A.13})$$

kde $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ je periodická funkce, neboť

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{a}) &= \\ &= \sum_{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k} - \mathbf{G}) e^{-j\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} e^{-j\mathbf{G} \cdot \mathbf{a}} = \sum_{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k} - \mathbf{G}) e^{-j\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} = \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Pro elektrické pole $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ tedy platí

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (\text{A.15})$$

kde $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ je periodická funkce, což odůvodňuje předpoklad použitý v kapitole 4.

Příloha B

Explicitní tvar integrálů Φ a Ξ

Barycentrický souřadnicový systém $(\alpha, \beta, 1 - \alpha - \beta)^T$ se běžně používá k popisu bodu $\boldsymbol{\rho}$ uvnitř simplexu, tedy konvexního obalu $n + 1$ lineárně nezávislých bodů v prostoru \mathbb{R}^n . Simplexem v dvoudimenzionální rovině je trojúhelník a bod $\boldsymbol{\rho}$ uvnitř něho je popsán jako konvexní kombinace vrcholů $\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2$ a $\boldsymbol{\rho}_3$.

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \boldsymbol{\rho}_1 + \beta \boldsymbol{\rho}_2 + (1 - \alpha - \beta) \boldsymbol{\rho}_3 \quad (\text{B.1})$$

Převodem Φ a Ξ^1 do barycentrických souřadnic lze tyto integrály vypočítat snáz jako

$$\Phi = \int_0^1 \int_0^{1-\beta} e^{i\mathbf{h} \cdot [\alpha \boldsymbol{\rho}_1 + \beta \boldsymbol{\rho}_2 + (1-\alpha-\beta) \boldsymbol{\rho}_3]} d\alpha d\beta \quad (\text{B.2})$$

a

$$\Xi = \int_0^1 \int_0^{1-\beta} [\alpha \boldsymbol{\rho}_1 + \beta \boldsymbol{\rho}_2 + (1-\alpha-\beta) \boldsymbol{\rho}_3] e^{i\mathbf{h} \cdot [\alpha \boldsymbol{\rho}_1 + \beta \boldsymbol{\rho}_2 + (1-\alpha-\beta) \boldsymbol{\rho}_3]} d\alpha d\beta. \quad (\text{B.3})$$

Tyto integrály lze počítat analyticky, explicitní tvar Φ je

$$\Phi = \frac{-\mathbf{h} \cdot (\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2) e^{i\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\rho}_3} - \mathbf{h} \cdot (\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_3) e^{i\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\rho}_1} + \mathbf{h} \cdot (\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_3) e^{i\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\rho}_2}}{[\mathbf{h} \cdot (\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)][\mathbf{h} \cdot (\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_3)][\mathbf{h} \cdot (\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_3)]}. \quad (\text{B.4})$$

Výsledek integrace (B.3) je stejně přímočarý, jako (B.4), jeho zápis je však velice zdlouhavý a nepřehledný. Lze zapsat ve tvaru

$$\Xi = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

kde

$$D = [\mathbf{h}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_3)]^2 [\mathbf{h}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)]^2 [\mathbf{h}_{mn} \cdot (\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_3)]^2 \quad (\text{B.6})$$

a kde X a Y poskytne libovolný matematický výpočetní systém.

Jmenovatele v (B.4) a (B.5) nabývají v určitých bodech nulové hodnoty, což je pro numerickou implementaci problematické. Pořadí vrcholů $\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2$ a $\boldsymbol{\rho}_3$ však nemá na výsledek (B.4) vliv a lze je v případě potřeby cyklicky rotovat, což může problém dělení nulou vyřešit. Upraví-li se navíc tvar Ξ v (B.3) integrací po částech, lze k nalezení jeho explicitního tvaru využít implementaci výpočtu Φ .

¹Pro zjednodušení zápisu jsou zde dolní indexy mn vypuštěny.