

# Posudek vedoucího diplomové práce

**Student:** Bc. Rudolf Šmolka

**Vedoucí práce:** Ing. Jan Vysoký, Ph.D. (katedra fyziky FJFI ČVUT v Praze)

**Název práce:** Gradovaná Lieova teorie

Vznik teorie supervariet v sedmdesátých letech byl motivován potřebou nalézt vhodnou matematickou formulaci geometrie supersymetrických polních teorií. Jejich unikátní vlastností je přítomnost proměnných, které spolu antikomutují. Nemůžou tedy odpovídat souřadnicovým funkcím na žádném prostoru. Tuto konceptuální obtíž lze obejít formulací celé teorie výhradně v řeči příslušných gradovaně komutativních algeber funkcí. To vyžaduje pestrou paletu nástrojů zejména z (gradovaně) komutativní algebry a algebraické geometrie. Supergeometrie rozlišuje pouze dva druhy souřadnic – sudé (které komutují se vším) a liché (které vzájemně antikomutují). V jistých aplikacích se ukázala potřeba jemnějšího dělení, kde každá souřadnice má přiděleno unikátní celé číslo (tzv. stupeň), a (anti)komutuje v závislosti na něm. Výsledná modifikace teorie supervariet se nazývá  $Z$ -gradovaná geometrie. Přítomnost proměnných nenulového sudého stupně (zejména vyskytují-li se současně kladný a záporný) přináší jisté množství technických komplikací, které se podařilo vyřešit až v poslední době. Přirozeně se tak nabízí zajímavé možnosti zobecnění známých partií diferenciální geometrie.

Úkolem studenta bylo prozkoumat základy teorie Lieových grup a algeber a nalézt jejich zobecnění do světa gradovaných variet. Důležitým cílem bylo nalézt netriviální příklady nově zavedených struktur. Kromě samotné definice gradované Lieovy grupy měl autor práce za úkol zobecnit konstrukci příslušné (gradované) Lieovy algebry a nalézt vhodnou formulaci gradovaných hlavních fibrovaných prostorů. Nemožnost popisovat zobrazení a vektorová pole pomocí jejich „hodnoty v bodě“ vyžaduje opatrný přístup používající obecné abstraktní koncepty z teorie kategorií. Například gradované Lieovy grupy jsou tak zavedeny jako tzv. „grupový objekt“ v kategorii gradovaných variet. Pozoruhodným a novým výsledkem je na první pohled nezajímavý příklad zobecnění grupy invertibilních matic. Vyžaduje současnou přítomnost proměnných kladného a záporného stupně a zejména operace „inverze“ je velmi netriviální. Úspěšnou byla i autorova snaha nalézt vhodnou definici hlavního fibrovaného prostoru včetně netriviálního příkladu hlavní fibrace repérů, jehož strukturní gradovanou Lieovou grupou je ta výše zmíněná.

Práce tak nepochybně obsahuje nové výsledky, na jejichž základech v blízké době vznikne článek v odborném časopise. Matematická úroveň práce je excelentní – od autora vyžadovala znalost nejen diferenciální geometrie, ale i teorie kategorií a abstraktní algebry. V diplomové práci jsou netriviální a podrobné důkazy a je z nich na první pohled jasné, že autor do hloubky rozumí všem svým tvrzením. Pracoval samostatně a iniciativně, vedení práce vyžadovalo jen občasné nasměrování správným směrem. Formální a jazyková stránka jsou dle mého vynikající a bez větších komentářů. Jedinou výtku mám k trochu zbytečné časové tísní, do které se autor vlastní vinou dostal. K mému mírnému překvapení se však nakonec neprojevila na kvalitě výsledné práce.

Práci tedy doporučuji uznat jako diplomovou a navrhuji hodnocení stupněm **A (výborně)**.

V Praze, dne 15. května 2023

Ing. Jan Vysoký, Ph.D.

