Posudek vedoucího diplomové práce Bc. Lukáše Váchy *Diracovy operátory s bariérami: rozptyl a Kleinův paradox*

Matěj Tušek

23. května 2023

První část diplomová práce pojednává o rozptylové úloze pro jednorozměrný Diracův operátor s potenciálem $A \otimes \chi_{(-a,a)}$, kde $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ je hermitovská a $a > 0$. Rozptylové koeficienty se však podařilo najít jen pro volbu $A = a_0 I + a_1\sigma^1 + a_3\sigma^3$, přičemž vazebná konstanta a_1 odpovídá volbě kalibrace, a může tedy být položena rovna nule. I tak se jedná o rozšíření dosavadních klasických výsledků, které hovoří jen o volbě $A = a_0 I$, tedy elektrostatickém potenciálu. Za jeden z hlavních výsledků práce lze považovat pozorování, že ke Kleinově paradoxu dochází jen pokud $d := a_0^2 - a_3^2 > 0$, v případě opačné nerovnosti stále nastává tunelování–to je ale tlumeno podobně jako v nerelativistické situaci.

Dále je uvažována limita rozptylových koeficientů pro škálovaný potenciál $A \otimes \varepsilon^{-1}\chi_{(-\varepsilon/2,\varepsilon/2)}$. Ta se překvapivě neshoduje s v práci napočtenými rozptylovými koeficienty pro singulární potenciál $A \otimes \delta$, kde δ představuje Diracovu distribuci. Nicméně odpovídá koeficientům rozptylu pro potenciál $\tilde{A}\otimes\delta$ s volbou

$$\tilde{A} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{d}} \tan \frac{\sqrt{d}}{2} A & \text{pro } d > 0, \\ \frac{2}{\sqrt{-d}} \tanh \frac{\sqrt{-d}}{2} A & \text{pro } d < 0. \end{cases}$$

Stejná renormalizace vazebných konstant byla pozorována při studiu resolventní limity Diracova operátoru s výše jmenovaným škálovaným potenciálem a byla prakticky bez jakéhokoliv vysvětlení dána do souvislosti právě s Kleinovým paradoxem v [1]. Z výsledků diplomové práce vyplývá, že nikoliv samotná renormalizace ale její konkrétní funkční závislost odráží, zda bude ke Kleinovu paradoxu docházet. Uvažujme například případ, kdy $A = a_0 I$. Potom $\tilde{A} = 2\tan(a_0/2)I$, což díky periodičnosti funkce tan znamená, že pro libovolně vysoké bariéry můžeme dostat stejné limitní chování.

Předložená práce je dobře strukturovaná. Množství drobnějších chyb (např. na levé straně (4.2) se musí škálovat i vazebné konstanty) a jazykových nedostatků nepřesahuje běžné hodnoty. Musím pochválit řadu přiložených obrázků a vysvětlujících diagramů. Na druhou stranu po jejich odečtení od celkového objemu práce se rozhodně jedná o kratší text. To bych nepovažoval za problém, pokud by se jednalo o text perfektně provedený a obdržené výsledky by byly precizně odvozeny. Avšak i přes značná vylepšení oproti starším verzím zůstávají některé pasáže zbytečně těžce srozumitelné–byť jsem s problematikou dobře obeznámen, občas jsem měl potíž sledovat tok autorových myšlenek. Pokud se jedná o matematickou přesnost, mám následující zásadnější připomínky:

1) Pro další výpočty zásadní zobecněné vlastní funkce $\Psi_{\leftarrow}(E, m, x)$ z (1.10) a $\Psi_2(E, m, x)$ definována nad (1.10) jsou dle mého chybně uvedeny. Správná volba by měla být $\Psi_{\leftarrow}(E, m, x) = \sigma_3 \Psi_{\rightarrow}(E, m, -x)$, jak se lze přímým výpočtem přesvědčit. Tento bod jsme několikrát diskutovali, navíc výpočet lze porovnat se vztahem (4.78) z [2]. Poznamenávám, že správná volba pro $\Psi_{\leftarrow}(E, m, x)$ se shoduje s funkcí, která je v (1.8) označena rovněž jako $\Psi_2(E, m, x)$.

2) Při odvozování Lipmannovy-Schwingerovy rovnice jsou zavedeny funkce $\mathcal{V}_{\pm}$, které by alespoň na první pohled měly ve své definici obsahovat i skalární části funkcí $\Psi_{\leftarrow}$ a $\Psi_{\rightarrow}$. Tyto části jsou odlišné. Očekával bych proto i navzájem odlišnější formy pro přibližná řešení Lipmannovy-Schwingerovy rovnice. Závěrečný vztah (3.2) potom spadne z čistého nebe. Možná by bylo lepší příslušnou nehotovou sekci do práce vůbec nezahrnovat. Ještě neadekvátněji potom vyniká silné tvrzení ze závěru, že "we have made significant contributions to the field of scattering theory".

Vzhledem k výše uvedenému navrhuji diplomovou práci hodnotit známkou **C (dobře)**.

Reference

[1] Petr Šeba, Klein's paradox and the relativistic point interaction, *Letters in Mathematical Physics* 18, 1989.

[2] Bernd Thaller, *The Dirac equation*, Springer-Verlag, 1992.

V Praze dne 23.5. 2023

doc. Ing. Matěj Tušek, Ph.D.
katedra matematiky, FJFI, ČVUT v Praze