

Posudek oponenta na diplomovou práci **Diracovy operátory s bariérami: rozptyl a Kleinův paradox**

autor: Bc. Lukáš Vácha

Téma rozptylu na potenciálních bariérách v systémech popsanych jedno- nebo dvou-dimenzionální Diracovou rovnicí je v současné matematické fyzice populárním tématem. Je totiž dobře motivováno fyzikou pevných látek, kde se kvazi-částice v krystalu chovají jako dvou-dimenzionální Diracovské fermiony. Rozmanitost efektivních interakcí, kterým dynamika těchto částic podléhá, inspiruje rigorozní studium lineárních bariér/defektů s netriviální maticovou strukturou potenciálu.

Pan kolega Vácha měl za úkol analyzovat rozptyl Diracovského fermionu s nenulovou hmotou na pravoúhlých bariérách vytvořených lokalizovaným elektrostatickým a skalárním polem. Dále měl tyto výsledky využít při studiu bariery ve formě Diracovy delta funkce. Cílem bylo lepší pochopení Kleinova tunelování, kdy Diracovská částice prochází bariérou bez odrazu. Zadání vyžadovalo nastudování některých pokročilejších partíí kvantové mechaniky a spektrální teorie operátorů na Hilbertových prostorech. Obtížnost zadání bych hodnotil jako zcela přiměřenou požadavkům kladeným na studenty posledního ročníku v zaměření Matematická fyzika.

Diplomová práce začíná diskusí rozptylových stavů pro Diracovskou volnou částici. Ty jsou odvozeny s pomocí formalismu “rigged” Hilbertových prostorů. V kap. 2. autor diskutuje stejnou úlohu pro Hamiltonián s konstantním potenciálem. V úvodu kap. 3 je využita Lippman-Schwingerova rovnice pro výpočet aproximativních rozptylových stavů pro Diracův operátor s obecným potenciálem (2.1). V sekcích 3.1 a 3.2 je řešen rozptyl na potenciálovém schodu a pravoúhlé bariéře. Zde je ovšem řešení provedeno bez využití výsledků získaných pomocí Lippman-Schwingerovy rovnice. V kapitole 4 autor pokračuje k řešení rozptylu na bariéře ve tvaru Diracovy delta funkce. Porovnává výsledky dvou přístupů. V prvním definuje hraniční podmínky viz (4.6) a na jejich základě definuje definiční obor Hamiltoniánu s delta funkcí. Druhý přístup, získaný limitou rezolventy, je zmíněn kolem formulky (4.7). Tyto dva přístupy nejsou ekvivalentní, druhý vede k přeškálování interakčních konstant. Je diskutován rozptyl v těchto dvou limitních systémech. Ukazuje se, že u modelu s přeškálovanými vazebnými konstantami se amplitudy průchodu a odrazu shodují s limitou těchto veličin u regulárního potenciálu.

Rozsahem je diplomová práce poměrně dost krátká, zejména pokud se uváží vysoký počet obrázků. Samozřejmě rozsah není klíčový, na rozdíl od obsahu. První tři kapitoly na mne působily jako předehra k hlubší analýze rozptylu na delta funkcích. Jednalo se v nich o rigorózněji pojatou analýzu rozptylových stavů v jednoduchých kvantově mechanických modelech. Uvedení Lippman-Schwingerovi rovnice pro výpočet rozptylových stavů pro obecný potenciál působilo slibně. Bohužel očekávání nebyla naplněna. Poslední kapitola pro mne byla spíše zklamáním. Například odvození správného tvaru Hamiltoniánu pomocí limity rezolventy, které vede k renormalizaci interakčních konstant, není nijak diskutováno. Je uveden pouze výsledek s odkazem na literaturu, ze které je rce (4.7) zřejmě přejata. Zde jsem skutečně čekal hlubší diskusi. Práce tak vyznívá poněkud povrchně. Téma šlo, dle mého názoru, zpracovat podstatně lépe.


Práce má i svá pozitiva. Je patrné, že se kolega Vácha seznámil s teorií nezbytnou k úspěšnému splnění zadaní diplomové práce. Např. s popisem rozptylových stavů pomocí rigged Hilbert space, nebo použitím Lippman-Schwingerovi rovnice. Není ale příliš vidět, že by tyto znalosti rozvinul pro hlubší analýzu zadaného problému. Práce je napsána velmi slušnou angličtinou. Líbil se mi výsledek v první formulce na str. 34, který poskytuje vzhled do oscilací koeficientu průchodu v závislosti na síle elektrostatického pole. Také chválím diagram (4.9), který pěkně shrnuje různé přístupy k limitnímu potenciálu.

Text na mne občas působil trochu zmatečně, vysvětlení mohla být lepší. Pan kolega Vácha se striktně držel zadání a soustředil se na čistý výpočet amplitud průchodu a odrazu. Zde mám ne nutně kritickou připomínku, že krátká diskuse o možné (ne)přítomnosti vázaných stavů by práci slušela.

Níže uvádím několik připomínek (1-6) a otázek (7-12):

1. První věta v první kapitole “In our three-dimensional world” v kontextu Diracovy rovnice působí trochu úsměvně. Většinou se zde mluví o čtyř-rozměrném prostoročasu.
2. Pod rci (1.5): “ This is an equation for the linear harmonic oscillator”. V kontextu kvantové mechaniky by bylo vhodnější mluvit o Schrodingerově rovnici pro volnou částici.
3. Rce (1.7): Normalizační konstanta A závisí na energii. Takto vyznívá rce (1.7) zavádějícím způsobem.
4. U rce (1.10) se mohlo dodat, že ony dvě funkce spolu souvisejí pomocí chirální symetrie, kterou Hamiltonián má.
5. Misprint v druhém řádku v (2.3) v m , a_3 ?
6. Fig. 3.10 má nadpis nekonzistentní s popiskem (electrostatic potential vs Lorentz scalar potential).
7. Nerozumím vztahu (3.2). Je tam misprint a Ψ má být ϕ ?
8. Nerozumím tomu, co označuje $\sigma(H_{\Theta})$ na str. 17 zhruba uprostřed. Jedná se o spektrum operátoru H_{Θ} , který byl zaveden na konci str. 16? Pokud ano, nikde nevidím výpočet tohoto spektra.
9. Co by se stalo, pokud bychom hodnotu $\psi(0)$ v rci pod (4.4.) volili jako jinou lineární kombinaci $\psi(0_+)$ a $\psi(0_-)$?
10. Odkud plyne, že podmínka (4.5) definuje samozdružené rozšíření operátoru (4.4)?
11. Proč v diskusi na konci str. 32 nabývá a_0 hodnot mezi 0 a 10?
12. Fig. 4.3: oscilace interakční konstanty odpovídá pouze polovině bodů, kde $|T|=1$. Jaký je původ totální transmise v těch zbývajících bodech?

Při hodnocení jsem vzal v potaz předvedenou náročnost výpočtů, rozsah práce a její zpracování. Také míru využití pokročilejších partií kvantové a spektrální teorie jdoucí za hranice standardního učiva. Tímto jsem dospěl k názoru, že diplomová práce pana Váchy má zcela uspokojivou úroveň. Uděluji jí tedy známku D (uspokojivě).


Ing. Wít Jakubský, PhD., Dsc.
Oddělení teoretické fyziky
Ústav jaderné fyziky AVČR, v.v.i.
Hlavní 130
25068 Řež

V Řeži 23.5.2023