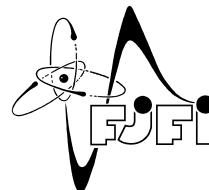




ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



Obor: Matematické inženýrství

Systemy iterovaných funkcí, jejich invariantní množiny a míra

Iterated Function Systems, Their Invariant Sets and Measure

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Autor: Bc. Michaela Diasová
Vedoucí práce: prof. Dr. Ing. Michal Beneš
Rok: 2023

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: Bc. Michaela Diasová
Studijní program: Matematické inženýrství
Název práce (česky): Systémy iterovaných funkcí, jejich invariantní množiny a míra
Název práce (anglicky): Iterated Function Systems, Their Invariant Sets and Measure

Pokyny pro vypracování:

- 1) Zohledněte nejnovější výsledky v oblasti matematické analýzy invariantních množin pro iterační soubory funkcí a v oblasti jejich použití.
- 2) Prozkoumejte různé způsoby konstrukce invariantních množin pro iterační soubory funkcí.
- 3) Využijte matematické metody analýzy invariantních množin s ohledem na konstrukci míry a integrálu na těchto množinách.
- 4) Pokračujte ve vývoji vlastních vizualizačních postupů pro invariantní množiny v rovině.
- 5) Analyzujte invariantní množiny z hlediska jejich topologických a geometrických parametrů.

Doporučená literatura:

- 1) G. A. Edgar, Integral, Probability, and Fractal Measures, Springer Verlag, Berlin, 1998.
- 2) K. Falconer, Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications, Wiley, New York, 3d edition, 2014.
- 3) S. Krantz, H. Parks, Geometric Integration Theory, Springer Verlag, Berlin, 2008.
- 4) J. Malmquist, R. S. Strichartz, Numerical integration for fractal measures. J. Fractal Geom. 5(2), 2018, 165–226
- 5) W. D. Withers, Fundamental Theorems of Calculus for Hausdorff Measures on the Real Line, Journal of Mathematical Analysis and Applications 129, 1988, 581-595
- 6) M. Morán, J.-M. Rey, Geometry of Self-Similar Measures, Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Mathematica, 22, 1997, 365–386

Jméno a pracoviště vedoucího diplomové práce:

prof. Dr. Ing. Michal Beneš

Katedra matematiky, FJFI ČVUT v Praze, Trojanova 13, 120 00 Praha 2

Jméno a pracoviště konzultanta:

Datum zadání diplomové práce: 28.2.2022

Datum odevzdání diplomové práce: 5.1.2023

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

V Praze dne 28.02.2022

B. Beneš

.....
garant oboru

P. Hudec

.....
vedoucí katedry

M. Beneš

.....
děkan



Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci vypracovala samostatně a použila jsem pouze podklady uvedené v příloženém seznamu.

V Praze dne 3. 5. 2023

Bc. Michaela Diasová

Diasová

Poděkování

Ráda bych tímto poděkovala především vedoucímu své diplomové práce prof. Dr. Ing. Michalu Benešovi za veškerou podporu a čas, který mi věnoval již od mé bakalářské práce.

Bc. Michaela Diasová

Název práce:

Systémy iterovaných funkcí, jejich invariantní množiny a míra

Autor: Bc. Michaela Diasová

Obor: Matematické inženýrství

Druh práce: Diplomová práce

Vedoucí práce: prof. Dr. Ing. Michal Beneš
Katedra matematiky
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
České vysoké učení technické v Praze

Abstrakt: Tato práce se zabývá systémy iterovaných funkcí (IFS) a jejich invariantními množinami. Jsou zde definovány různé dimenze, které je možné pro tyto množiny zkoumat. Zejména se pak zaměřujeme na dimenzi Hausdorffovu a její vztah ke zbylým dimenzím jako jsou podobnostní a mřížková. Zabýváme se dále numerickým odhadem mřížkové dimenze pro množiny generované chaotickým algoritmem. Dále je zde zavedena Hausdorffova míra a na jejím základě je definován Hausdorffův integrál a určeny jeho vlastnosti. V závěrečné části je pak představena numerická aproximace tohoto integrálu.

Klíčová slova: systém iterovaných funkcí, chaotický algoritmus, Hausdorffova míra, Hausdorffův integrál, mřížková dimenze

Title:

Iterated Function Systems, Their Invariant Sets and Measure

Author: Bc. Michaela Diasová

Abstract: This thesis deals with iterated function systems and their invariant sets. There are defined various dimension which can be used to analyze these sets. Especially we focus on the Hausdorff dimension and its relation to the other dimensions as similarity and box-counting dimension. We further study the numerical estimation of the box-counting dimension for sets generated by the chaos game algorithm. Furthermore, the Hausdorff measure is introduced and based on it, the Hausdorff integral is defined and its properties are determined. In the final section, a numerical approximation of this integral is then presented.

Key words: iterated function system, chaos game algorithm, Hausdorff measure, Hausdorff integral, box-counting dimension

Obsah

Úvod	1
1 Systémy iterovaných funkcí, jejich invariantní množiny a nástroje analýzy těchto množin	2
1.1 Hausdorffův nadprostor	2
1.2 Systémy iterovaných funkcí	3
1.3 Podobnostní dimenze	5
1.4 Induktivní dimenze	6
1.5 Konstrukce vnější míry	8
1.6 Hausdorffova míra a dimenze	9
1.7 Mřížková dimenze	11
2 Algoritmická aproximace invariantních množin pro IFS a jejich mřížkové dimenze	13
2.1 Chaotický algoritmus	13
2.2 Odhad mřížkové dimenze	16
3 Míra a integrál fraktálních množin	28
3.1 Vlastnosti Hausdorffovy míry	28
3.2 Hausdorffův integrál	30
3.3 Hausdorffova míra vybraných množin	34
3.3.1 Cantorovo diskontinuum	35
3.3.2 Sierpiňského trojúhelník a podobně konstruované množiny	35
3.3.3 Otevřené problémy	37
3.4 Hodnoty Hausdorffova integrálu	38
3.5 Numerický odhad Hausdorffova integrálu	40
3.5.1 Jednoduché množiny	40
3.5.2 Cantorovo diskontinuum	42
3.5.3 Cantorův prach	43
3.5.4 Sierpiňského trojúhelník	44
Závěr	47
Seznam použité literatury	48

Úvod

Tato diplomová práce se zabývá studiem systémů iterovaných funkcí, především se pak zaměřuje na jejich invariantní množiny a jejich vlastnosti. V práci jsou představeny základní nástroje, pomocí kterých můžeme tyto množiny zkoumat. Velmi důležité v tomto kontextu jsou různé dimenze, které jsme pro tyto množiny schopni určit. Numerickým odhadem jedné z těchto dimenzí se také zabýváme. Dále zkoumáme vlastnosti Hausdorffovy míry ve vztahu k míře Lebesgueově a je zde definován integrál na Hausdorffově míře. Ač některé z množin, které v práci rozebíráme, jsou známy již dlouho, jejich Hausdorffova míra často známa doposud není. To je způsobeno tím, že plné pochopení Hausdorffovy míry je velmi náročné a je stále předmětem zkoumání mnoha matematiků. Práce přímo navazuje na mou bakalářskou práci [1] a výzkumný úkol [2].

V první části představíme topologické dimenze a dimenzi Hausdorffovu, které se vyskytují v definici fraktálu, jak ji zavedl Benoit B. Mandelbrot. Tato definice pracuje s porovnáním těchto dimenzí, a proto je nutné je pro strukturálně složitě množiny určovat. V této části je také zavedena Hausdorffova míra a jí podobné míry, které je možné využít k získání Hausdorffovy dimenze. Následně představujeme samotné systémy iterovaných funkcí, rekurentní systémy iterovaných funkcí, jejich invariantní množiny a některé vlastnosti. Zavádíme také další z dimenzí, které typicky používáme k získání nebo alespoň odhadu dimenze Hausdorffovy.

Další kapitola je pak převážně praktická a zabývá se odhadem mřížkové dimenze pro množiny zobrazené pomocí chaotického algoritmu, který je obecně možné použít pro zobrazení libovolné množiny, která je invariantní množinou nějakého systému iterovaných funkcí.

V závěrečné kapitole pak dále zkoumáme vlastnosti Hausdorffovy míry a definujeme na ní tzv. Hausdorffův integrál. Rozebíráme podrobně, pro které množiny je Hausdorffova míra známá a pro které jsou stále známy pouze odhady. Obdobně pak hledáme hodnoty Hausdorffova integrálu z jednoduchých funkcí na některých množinách. V závěru pak představujeme způsob, jakým je numericky možné hodnoty Hausdorffovy míry a integrálu odhadovat pro libovolné množiny, které jsme schopni v počítači reprezentovat.

Kapitola 1

Systemy iterovaných funkcí, jejich invariantní množiny a nástroje analýzy těchto množin

V této kapitole shrneme základní poznatky o systémech iterovaných funkcí, o jejich rekurentní variantě a invariantních množinách pro tyto systémy. Zavedeme několik dimenzí, které pro jednotlivé množiny můžeme určit např. horní a dolní induktivní, podobnostní či mřížkovou. Dále definujeme Hausdorffovu míru a dimenzi a uvedeme jejich základní vlastnosti. Většina poznatků již byla představena v rámci předchozích prací [1, 2], ale vzhledem k následujícímu textu a zejména praktické části, ve které jsme odhadovali dimenze těchto množin, je důležité tyto základní poznatky zopakovat. Důkazy vět v této části je tedy možné najít ve výše uvedených zdrojích.

1.1 Hausdorffův nadprostor

Tato část shrnuje konstrukci Hausdorffova nadprostoru a zabývá se zejména jeho úplností za dodatečných podmínek, neboť tato vlastnost hraje důležitou roli v nalezení jedinečné invariantní množiny pro systémy iterovaných funkcí. Další vlastnosti Hausdorffova nadprostoru jsou rozebrány např. v [3].

Definice 1.1.1. Buď (S, ρ) metrický prostor. Označme množinu S^* jako

$$S^* = \{A \subset S, \text{ kde } A \text{ je neprázdná, kompaktní}\}$$

a funkci $u : S^* \times S^* \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ jako $u(A, B) = \max\{\rho(x, B) \mid x \in A\}$ pro $A, B \in S^*$, kde $\rho(x, B) = \inf\{\rho(x, y) \mid y \in B\}$. Potom definujeme

$$\rho^*(A, B) := \max\{u(A, B), u(B, A)\}.$$

Věta 1.1.2. Za podmínek a značení z Definice 1.1.1 platí, že $\rho^* : S^* \times S^* \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ je na prostoru S^* metrika.

Důkaz. Viz [2]. □

Definice 1.1.3. Metrický prostor (S^*, ρ^*) se nazývá Hausdorffův nadprostor a ρ^* je Hausdorffova metrika na tomto prostoru.

Následující věta mluví o úplnosti Hausdorffova nadprostoru. O důležitosti této věty vypovídá už to, že jejím důkazem se zabývalo mnoho matematiků a je možné ho provést několika způsoby. Některé z možných variant důkazu následující věty je možné nahlédnout v [3, 4, 5]. Jedna z těchto variant byla uvedena také v [2]. Znění věty není nijak složité, její důsledky jsou ale pro systémy iterovaných funkcí významné.

Věta 1.1.4. Metrický prostor (S, ρ) je úplný právě tehdy, když jeho Hausdorffův nadprostor (S^*, ρ^*) je úplný.

1.2 Systémy iterovaných funkcí

Nyní přejdeme k definici a vlastnostem samotných systémů iterovaných funkcí. Díky těmto systémům jsme schopni nacházet množiny fraktálního charakteru a u některých z nich jsme dokonce schopni dokázat, že splňují definici fraktálu, jak ji vyslovil Benoit Mandelbrot v [6]. Mezi známé množiny, které jsou invariantními množinami systémů iterovaných funkcí, patří například Cantorovo diskontinuum, Sierpiňského trojúhelník nebo Kochova křivka. Tyto množiny jsou matematikům známé již od devatenáctého století, ale byla jim věnována jenom okrajová pozornost, protože byly považovány za zvláštní výjimky. Dnes jsou ale nadále předmětem zkoumání, protože jejich struktura je natolik složitá, že ji v některých případech dodnes nejsme schopni uspokojivě popsat.

Definice 1.2.1. Necht f_1, \dots, f_n , $n \in \mathbb{N}$, jsou kontrahující podobnostní zobrazení na metrickém prostoru (S, ρ) . Pak (f_1, \dots, f_n) nazýváme systém iterovaných funkcí (IFS). Řekneme dále, že neprázdná množina $T \subseteq S$ je invariantní vůči tomuto systému funkcí, pokud platí

$$T = \bigcup_{i=1}^n f_i[T].$$

Následující věta říká, že k danému systému iterovaných funkcí na úplném metrickém prostoru existuje pouze jedna invariantní množina. Opačné tvrzení však neplatí, tj. pro jednu množinu může existovat více IFS takových, že daná množina bude vůči nim invariantní. To ukazuje např. Příklad 5.1.5 v [1].

Věta 1.2.2. Necht S je neprázdný úplný metrický prostor a na něm je dán systém iterovaných funkcí (f_1, \dots, f_n) , $n \in \mathbb{N}$. Pak existuje právě jedna neprázdná kompaktní invariantní množina pro daný systém funkcí, ozn. T . Množina T je tedy v S^* pevným bodem zobrazení

$$F[A] = \bigcup_{i=1}^n f_i[A].$$

Důkaz. Viz např. [1, 5]. □

Abychom získali poslední větu v této části, potřebujeme vědět, že Hausdorffův nadprostor je úplný, právě když původní metrický prostor je také úplný, což uvádí Věta 1.1.4.

Věta 1.2.3. Necht (S, ρ) je úplný metrický prostor a (S^*, ρ^*) je k němu přidružený Hausdorffův nadprostor. Necht je dále T libovolná podmnožina S^* a $\varepsilon > 0$ je také

dáno libovolně. Buď dále (f_1, \dots, f_n) , $n \in \mathbb{N}$, systém iterovaných funkcí s podobnostními koeficienty (r_1, \dots, r_n) . Pokud $\rho^*\left(T, \bigcup_{i=1}^n f_i(T)\right) \leq \varepsilon$, pak

$$\rho^*(T, A) \leq \frac{\varepsilon}{1 - \max\{r_1, \dots, r_n\}},$$

kde A je invariantní množinou daného IFS.

Tuto větu známou jako překrývací teorém, angl. *Collage theorem*, vyslovil a dokázal Michael Barnsley, viz [7, 8]. Ten se také zasloužil o vznik základní teorie kolem systémů iterovaných funkcí a rozebral mnohé jejich vlastnosti. Konkrétně tato věta má velký vliv na možnost vizualizace invariantních množin jednotlivých IFS, neboť dává podklad pro chaotický algoritmus, angl. *chaos game algorithm*, který budeme rozebírat později.

Rekurentní systémy iterovaných funkcí

Systémy iterovaných funkcí, tak jak jsme je definovali, je možné modifikovat přidáním pravděpodobnosti pro každou dvojici funkcí z IFS. Tímto způsobem pak obdržíme rekurentní IFS. I tento pojem definoval M. Barnsley, konkrétně v článku [9]. Tam je také možné najít důkazy k následujícím tvrzením.

Definice 1.2.4. Nechť (S, ρ) je metrický prostor a (f_1, \dots, f_n) , $n \in \mathbb{N}$ je systém iterovaných funkcí. Rekurentní systém iterovaných funkcí definujeme jako tento IFS společně s maticí pravděpodobností $\{p_{ij} \in [0, 1] \mid i, j \in \hat{n}\}$ takovou, že platí

$$p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{in} = 1 \text{ pro } i \in \{1, \dots, n\}$$

a zároveň pro všechny i, j existuje konečná posloupnost čísel $a, b, \dots, m \in \{1, \dots, n\}$ taková, že

$$p_{ia}p_{ab} \dots p_{mj} > 0.$$

Tato matice pravděpodobností pak reprezentuje Markovův řetězec, který řídí použití zobrazení ze systému iterovaných funkcí.

Více se těmito rekurentními systémy a tím, co přesně jejich rekurence znamená, budeme zabývat v následující kapitole při užití chaotického algoritmu, viz Kapitola 2.1. Definice rekurentního systému iterovaných množin není o tolik komplikovanější než definice klasického IFS. Definovat invariantní množinu vůči tomuto rekurentnímu systému je ale mnohem náročnější.

Definice 1.2.5. Nechť (S, ρ) je kompaktní metrický prostor a (S^*, ρ^*) jeho přidružený Hausdorffův nadprostor. Nechť dále máme kontrahující zobrazení $f_i : S \rightarrow S$ a maticí pravděpodobností (p_{ij}) , $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ z definice výše. Definujeme zobrazení $F_{ij} : S^* \rightarrow S^*$ pro všechna $(i, j) \in I$, kde $I(i) = \{j \mid p_{ji} > 0\}$ jako

$$F_{ij}(T) = \{f_i(x) \mid x \in T, T \in S^*\}.$$

Buď dále $S^{**} = \underbrace{S^* \times S^* \times \dots \times S^*}_{n\text{-krát}}$ prostor, který spojíme s metrikou definovanou jako

$$\rho^{**}((A_1, \dots, A_n), (B_1, \dots, B_n)) = \max\{\rho_j^*(A_j, B_j) \mid j \in \hat{n}\},$$

kde $A_j, B_j \in S^*$ pro všechna $j \in \{1, \dots, n\}$. (S^{**}, ρ^{**}) je kompaktní metrický prostor a definujeme na něm zobrazení $F : S^{**} \rightarrow S^{**}$ předpisem

$$F(A_1, \dots, A_n) = \left(\bigcup_{j \in I(1)} F_{1j}(A_j), \dots, \bigcup_{j \in I(n)} F_{nj}(A_j) \right).$$

Věta 1.2.6. Necht' je dán (S, ρ) kompaktní metrický prostor a na něm rekurentní IFS ve tvaru (f_i, p_{ij}) , kde $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak pro $F : S^{**} \rightarrow S^{**}$ platí

$$\rho^{**}(F(A), F(B)) \leq r \rho^{**}(A, B), \text{ pro všechna } A, B \in S^{**},$$

kde $r = \max\{r_{ij} \mid (i, j) \in I\}$.

Důsledek 1.2.7. Mějme stejné předpoklady jako v předchozí větě, potom existuje právě jedna množina $A = (A_1, \dots, A_n) \in S^{**}$ taková, že

$$A_i = \bigcup_{j \in I(i)} F_{ij}(A_j) \text{ pro } i \in \{1, \dots, n\}.$$

To znamená, že $F(A) = A$ a množinu A nazveme invariantní množinou rekurentního systému iterovaných funkcí.

Uvedeme také obdobu překrývacího teorému pro rekurentní IFS, abychom měli opět zajištěno, že výsledkem chaotického algoritmu bude aproximace správné invariantní množiny.

Věta 1.2.8. Buď dán (S, ρ) kompaktní metrický prostor a na něm rekurentní IFS ve tvaru $(f_i, (p_{ij}))$, kde $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Pokud pro libovolnou množinu $T \in S^{**}$ a $\varepsilon > 0$ libovolné platí

$$\rho^{**}(T, F(T)) \leq \varepsilon,$$

potom

$$\rho^{**}(T, A) \leq \frac{\varepsilon}{1 - r},$$

kde A je invariantní množina daného rekurentního IFS a $r = \max\{r_1, \dots, r_n\}$.

1.3 Podobnostní dimenze

Tato dimenze je úzce spojena se systémy iterovaných funkcí, pro danou množinu však nemusí být jednoznačná.

Věta 1.3.1. Necht' máme (r_1, \dots, r_n) , $n \in \mathbb{N}$, $0 < r_i < 1$ pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$. Pak existuje právě jedno $s > 0$ takové, že

$$\sum_{i=1}^n r_i^s = 1$$

a platí, že $s = 0$ právě tehdy, když $n = 1$.

Důkaz. Viz [1, 5]. □

Definice 1.3.2. Buď (f_1, \dots, f_n) , $n \in \mathbb{N}$, systém iterovaných funkcí na metrickém prostoru S s podobnostními koeficienty (r_1, \dots, r_n) a $T \subseteq S$ neprázdná invariantní množina k tomuto IFS. Pak hodnotu s z Věty 1.3.1 nazýváme podobnostní dimenze množiny T .

Jak už víme, pro daný IFS existuje právě jedna invariantní množina. Problémem je, že opačná implikace neplatí, a tedy jedna množina může být invariantní množinou více systémů. To způsobuje, že daná množina pak může mít přiřazeno více různých hodnot podobnostní dimenze. Výhodou této dimenze ale je, že ji je typicky možné jednoduše vypočítat. Jak bude uvedeno dále, za specifických podmínek je pro danou množinu možné najít pouze jednu podobnostní dimenzi a ta v tomto případě dokonce může být rovna dimenzi Hausdorffově.

Nyní shrneme další pojmy, které jsou obecně důležité pro zkoumání fraktálních množin. Konkrétně se pak zaměříme na ty z vlastností, které jsou užitečné pro zkoumání invariantních množin systémů iterovaných funkcí. Protože původní definice fraktálu obsahuje porovnání Hausdorffovy a topologické dimenze, uvedeme tyto pojmy. Definice Hausdorffovy dimenze je založena na Hausdorffově míře a jejích vlastnostech, resp. Hausdorffově vnější míře, která je ale obecně obtížněji vyčíslitelná. Zmíníme také způsoby, jak definovat další míry, pomocí kterých můžeme za určitých podmínek Hausdorffovu dimenzi také nalézt.

1.4 Induktivní dimenze

První dimenze, kterými se budeme zabývat, jsou topologické dimenze. Pro nás zajímavé jsou dimenze induktivní, protože jejich konstrukce je vhodná pro zkoumání fraktálních množin. Jejich vlastnosti byly podrobně zkoumány již v bakalářské práci, tj. [1], a proto zde budou věty uvedeny bez důkazů. Ty je možné dohledat také v [5]. Toto samozřejmě není jediný způsob, jak definovat topologické dimenze. Za dodatečných podmínek je ale často možné ukázat, že jednotlivé dimenze jsou si ekvivalentní.

První zkoumanou dimenzí je dolní induktivní dimenze. Tato dimenze je založena na zkoumání báze topologie metrického prostoru.

Definice 1.4.1. Buď S metrický prostor. Dolní induktivní dimenzi, $\text{ind } S$, definujeme následovně.

- $\text{ind } S = -1$, pokud $S = \emptyset$,
- $\text{ind } S \leq k \in \mathbb{N}_0$, pokud existuje \mathcal{B} báze S taková, že pro všechna $B \in \mathcal{B}$ platí $\text{ind } \partial B \leq k - 1$.
 $\text{ind } S = k$, pokud $\text{ind } S \leq k \wedge \text{ind } S \not\leq k - 1$.
- $\text{ind } S = +\infty$, pokud pro žádné $k \in \mathbb{N}$ neplatí $\text{ind } S \leq k$.

Tuto dimenzi také někdy nazýváme Mengerova-Urysohnova nebo slabá induktivní dimenze, viz. [5, 10].

Jak bychom očekávali pro dolní induktivní dimenzi také platí, že podmnožina má nejvýše stejnou hodnotu dolní induktivní dimenze jako původní množina samotná.

Věta 1.4.2. Buď S metrický prostor, $T \subseteq S$. Pak $\text{ind } T \leq \text{ind } S$.

Nyní představíme ještě horní induktivní dimenzi, která na první pohled nepůsobí příliš podobně. Za dodatečných podmínek jsme však schopni dokázat rovnost s dolní induktivní dimenzí.

Definice 1.4.3. Buď A, B disjunktní množiny v metrickém prostoru S . Řekneme, že množina L odděluje A a B právě tehdy, když existují otevřené množiny $U, V \subset S$ takové, že $A \subseteq U, B \subseteq V, U \cap V = \emptyset$ a $L = S \setminus (U \cup V)$.

Definice 1.4.4. Nechť S je metrický prostor. Horní induktivní dimenzi, $\text{Ind } S$, definujeme následovně.

- $\text{Ind } S = -1$, pokud $S = \emptyset$.
- $\text{Ind } S \leq k \in \mathbb{N}_0$, pokud pro všechny $A, B \subseteq S$ uzavřené, $A \cap B = \emptyset$, existuje L oddělující A, B a zároveň $\text{Ind } L \leq k - 1$.
 $\text{Ind } S = k \in \mathbb{N}_0$, pokud $\text{Ind } S \leq k$ a zároveň $\text{Ind } S \not\leq k - 1$.
- $\text{Ind } S = +\infty$, pokud pro žádné $k \in \mathbb{N}$ neplatí $\text{Ind } S \leq k$.

Tato dimenze se někdy také nazývá Brouwerova-Čechova nebo silná induktivní dimenze, viz. [5, 10].

Jak už jsme zmínili, chceme ukázat rovnost horní a dolní induktivní dimenze. Je tedy potřebné ukázat obě nerovnosti mezi nimi, pro důkazy viz [1, 5]. Platí tedy následující věta.

Věta 1.4.5. Buď S metrický prostor. Pak $\text{ind } S \leq \text{Ind } S$.

Tuto nerovnost není příliš obtížné dokázat a platí obecně pro libovolný metrický prostor. Aby bylo možné dokázat nerovnost opačnou, a tím ve výsledku rovnost těchto dimenzí, musíme se omezit na separabilní resp. kompaktní metrické prostory.

Věta 1.4.6. Je-li S separabilní metrický prostor, pak $\text{ind } S = \text{Ind } S$.

Zvláštní místo mezi topologickými dimenzemi zaujímají množiny nulové dimenze. Předpokládali bychom, že tyto množiny budou po prázdné množině nejjednodušší. Ne vždy tomu tak ale ve skutečnosti je. Jako příklad můžeme uvést např. Cantorovo diskontinuum.

Definice 1.4.7. Buď S metrický prostor a A jeho podmnožina. Řekneme, že množina A je obojetná právě tehdy, když je otevřená a zároveň uzavřená v S .

Věta 1.4.8. Separabilní metrický prostor S má nulovou dimenzi, $\text{ind } S = 0$, právě když platí alespoň jedna z následujících podmínek.

1. Existuje \mathcal{B} báze topologie S taková, že pro všechna $B \in \mathcal{B}$ platí, že B je obojetná.
2. Pro všechna $x \in S$ a všechny $V \subset S$ otevřené a $x \in V$ existuje $U \subset S$ obojetná taková, že $x \in U \subset V$,
3. Pro všechna $x \in S$ a všechny $A \subset S$ uzavřené takové, že $x \notin A$, prázdná množina odděluje $\{x\}, A$.

Dále také platí, že každý neprázdný podprostor prostoru s nulovou dimenzí má také nulovou dimenzi.

Tato věta ukazuje, že definice nulové dimenze odpovídá definici horní i dolní induktivní dimenze a není s nimi v rozporu. Typicky je ale nejjednodušší k určení nulové dimenze použít její charakterizaci, jak je uvedena v prvním bodě předchozí věty. Její použití ukážeme v následujícím příkladě.

Příklad 1.4.9. Cantorovo diskontinuum C má nulovou dimenzi.

Důkaz: Berme topologii τ_C danou \mathbb{R} . Připomeňme, že Cantorovo diskontinuum $C = \bigcap_{i=1}^{+\infty} C_n$, kde $C_n = \bigcup_{i_j \in \{0,1\}} \Delta_{i_1, \dots, i_n}$ a Δ_{i_1, \dots, i_n} jsou uzavřené intervaly v n -tém kroku konstrukce, viz. [1]. Definujeme

$$\delta_{i_1, \dots, i_n} = \left(-\varepsilon_n + \sum_{j=1}^n \frac{2i_j}{3^j}, \sum_{j=1}^n \frac{2i_j}{3^j} + \varepsilon_n \right).$$

Definujme tedy dále $\mathcal{B} = \{\delta_{i_1, \dots, i_n} \cap C, n \in \mathbb{N}, i_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n\}$. Ukážeme, že tato množina je bází topologie τ_C . Berme libovolné $x_0 \in C$ a libovolné $\varepsilon > 0$ můžeme najít $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{3^{n_0}} < \varepsilon$. Odtud pak plyne, že existují indexy i_1, \dots, i_{n_0} takové, že $x_0 \in \delta_{i_1, \dots, i_{n_0}} \cap C \subset B(x_0, \varepsilon)$. To už přímo znamená, že $x_0 \in \delta_{i_1, \dots, i_{n_0}} \cap C$, a \mathcal{B} je tedy bází topologie τ_C .

První ukážeme, že $\delta_{i_1, \dots, i_n} \cap C$ jsou otevřené v C . To je zřejmé, jelikož δ_{i_1, \dots, i_n} jsou v \mathbb{R} otevřené intervaly. Množiny $\delta_{i_1, \dots, i_n} \cap C$ jsou uzavřené v C , platí totiž, že $\delta_{i_1, \dots, i_n} \cap C = \Delta_{i_1, \dots, i_n} \cap C$ a Δ_{i_1, \dots, i_n} jsou uzavřené v \mathbb{R} . \square

1.5 Konstrukce vnější míry

V souvislosti s Hausdorffovou mírou, která je potřebná k definici Hausdorffovy dimenze, připravíme nástroje ke konstrukci obecné vnější míry.

Definice 1.5.1. Buď X množina a \mathcal{F} σ -algebra na X . Pak vnější mírou na \mathcal{F} nazýváme funkci $\overline{\mathcal{M}} : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$, pro kterou platí

1. $\overline{\mathcal{M}}(\emptyset) = 0$.
2. Pokud $A \subseteq B$, pak $\overline{\mathcal{M}}(A) \leq \overline{\mathcal{M}}(B)$.
3. $\overline{\mathcal{M}}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{M}}(A_n)$.

Uvedeme nyní dvě metody, které lze použít ke konstrukci vnější míry. Tyto postupy pak použijeme ke konstrukci samotné míry Hausdorffovy. Detaily pro tyto konstrukce a jejich použití lze najít v [1, 5].

Věta 1.5.2. (Metoda I) Necht X je libovolná množina a \mathcal{A} soubor podmnožin X , které X pokrývají. Necht je dále $c : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ libovolná funkce. Pak existuje jednoznačně daná vnější míra $\overline{\mathcal{M}}$ na X taková, že

1. $\overline{\mathcal{M}}(A) \leq c(A)$ pro všechna $A \in \mathcal{A}$.
2. Pokud $\overline{\mathcal{N}}$ je libovolná vnější míra na X , splňující podmínku 1, pak

$$\overline{\mathcal{N}}(B) \leq \overline{\mathcal{M}}(B) \text{ pro všechna } B \subseteq X.$$

Poznámka 1.5.3. Při důkazu existence takovéto míry dostáváme přímo tvar, jak má daná míra být zkonstruována.

Pro všechny neprázdné množiny $B \subseteq X$ definujeme

$$\overline{\mathcal{M}}(B) := \inf \sum_{A \in \mathcal{D}} c(A),$$

kde infimum je přes všechna spočetná pokrytí \mathcal{D} množiny B množinami z \mathcal{A} .

Touto metodou však dostáváme vnější míru, která může pro jisté borelovské množiny selhat, což nechceme, viz [5]. Proto zavádíme ještě druhou metodu, která Metodu I vylepšuje a odstraňuje její problémy.

Definice 1.5.4. (Metoda II) Nechť S je metrický prostor, \mathcal{A} soubor podmnožin tohoto metrického prostoru a máme funkci $c : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$. Předpokládejme dále, že pro všechna $x \in S$ a libovolné $\varepsilon > 0$ existuje množina $A \in \mathcal{A}$ taková, že $x \in A$ a zároveň $\text{diam } A \leq \varepsilon$. Pak pro všechna $\varepsilon > 0$ definujeme soubor množin

$$\mathcal{A}_\varepsilon := \{A \in \mathcal{A} \mid \text{diam } A \leq \varepsilon\}.$$

Nechť $\overline{\mathcal{M}}_\varepsilon$ je navíc vnější míra konstruovaná podle Metody I, omezená funkcí c a definovaná na souboru \mathcal{A}_ε . Pak dle Věty 4.1.5 z [1] pro libovolnou množinu $F \subseteq S$ platí, že pokud ε klesá, pak $\overline{\mathcal{M}}_\varepsilon(F)$ roste. Definujeme tedy

$$\overline{\mathcal{M}}(F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\mathcal{M}}_\varepsilon(F) = \sup_{\varepsilon > 0} \overline{\mathcal{M}}_\varepsilon(F).$$

Věta 1.5.5. Za předpokladů z předchozí definice je $\overline{\mathcal{M}}(F)$ vnější míra.

Důkaz. Viz. [1]. □

Tato konstrukce vnější míry pomocí Metod I a II, která se na σ -algebře svých měřitelných množin stává mírou, se někdy nazývá také Carathéodoryho konstrukce.

Poznámka 1.5.6. Pokud použijeme Metodu II ke konstrukci vnější míry pro funkci $c(A) = \text{Vol}_n(A)$, kde Vol_n označuje n -rozměrný objem, pak dostáváme Lebesgueovu vnější míru, ozn. $\overline{\mathcal{L}}^n$.

1.6 Hausdorffova míra a dimenze

Použijeme-li Metodu II ke konstrukci míry na metrickém prostoru S , zatímco za funkci $c : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ z předpokladů této metody bereme $c(A) = (\text{diam } A)^s$, kde s je nějaké kladné číslo, dostáváme Hausdorffovu vnější míru.

Definice 1.6.1. Nechť S je metrický prostor, $s > 0$ a navíc je dáno $\varepsilon > 0$. Máme-li \mathcal{A} spočetné ε -pokrytí množiny $F \subseteq S$, tedy spočetné pokrytí takovými množinami, že $\text{diam } A \leq \varepsilon$ pro všechna $A \in \mathcal{A}$, pak definujeme s -dimenzionální Hausdorffovu vnější míru pomocí množinové funkce $c(A) = (\text{diam } A)^s$ a značíme ji $\overline{\mathcal{H}}_\varepsilon^s$. Platí tedy

$$\overline{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(F) = \inf \sum_{A \in \mathcal{A}} (\text{diam } A)^s,$$

kde infimum je přes všechna spočetná ε -pokrytí \mathcal{A} množinami z S . Pokud ε klesá, pak hodnota $\overline{\mathcal{H}}_\varepsilon^s$ roste. Dostáváme tedy, že

$$\overline{\mathcal{H}}^s(F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(F) = \sup_{\varepsilon > 0} \overline{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(F)$$

je s -dimenzionální Hausdorffova vnější míra pro množinu F . Zúžením této vnější míry na σ -algebru $\overline{\mathcal{H}}^s$ -měřitelných množin dostáváme s -dimenzionální Hausdorffovu míru, ozn. \mathcal{H}^s .

Věta 1.6.2. Necht S je metrický prostor, $F \subseteq S$ je borelovská množina a $0 < s < t$. Pokud $\overline{\mathcal{H}}^s(F) < +\infty$, pak $\overline{\mathcal{H}}^t(F) = 0$. Pokud $\overline{\mathcal{H}}^t(F) > 0$, pak $\overline{\mathcal{H}}^s(F) = +\infty$.

Definice 1.6.3. Necht S je metrický prostor. Hausdorffovu dimenzi množiny $F \subseteq S$ definujeme jako

$$\dim_{\mathcal{H}} F = \inf\{s \in [0; +\infty] \mid \overline{\mathcal{H}}^s(F) = 0\}.$$

Může se pochopitelně stát, že $\overline{\mathcal{H}}^s(F) = 0$ pro všechna $s > 0$, potom klademe $\dim_{\mathcal{H}}(F) = 0$. Obdobně může být $\overline{\mathcal{H}}^s(F) = +\infty$ pro všechna $s > 0$, potom $\dim_{\mathcal{H}}(F) = +\infty$.

Věta 1.6.4. Necht S je metrický prostor a $A, B \subseteq S$ jsou borelovské množiny. Pak platí následující tvrzení.

1. Pokud $A \subseteq B$, pak $\dim_{\mathcal{H}} A \leq \dim_{\mathcal{H}} B$.
2. $\dim_{\mathcal{H}}(A \cup B) = \max\{\dim_{\mathcal{H}} A, \dim_{\mathcal{H}} B\}$.

Uvedeme ještě některé další vlastnosti spojené s Hausdorffovou mírou a dimenzí, které jsou potřebné pro následující text.

Definice 1.6.5. Necht je dána množina S a na ní libovolná σ -algebra \mathcal{A} . Pak uspořádanou dvojici (S, \mathcal{A}) nazýváme měřitelný prostor. Řekneme, že míra μ na měřitelném prostoru (S, \mathcal{A}) je konečná, pokud platí $\mu(S) < +\infty$.

Lemma 1.6.6. Necht S je metrický prostor a μ je konečná míra na množině $A \subseteq S$. Předpokládejme, že pro nějaké s existují konstanty $K, \varepsilon > 0$, pro které najdeme měřitelné množiny U_i takové, že $\mu(U_i) \leq K(\text{diam } U_i)^s$, $\text{diam } U_i \leq \varepsilon$ a $\{U_i\}_i$ je spočetné pokrytí A . Potom

$$\overline{\mathcal{H}}^s(A) \geq \frac{\mu(A)}{K}.$$

Tato věta je známá v angl. jako *mass distribution principle* a je jedním ze způsobů, jak se dostat k dolnímu odhadu Hausdorffovy míry, viz. [11].

Tvrzení 1.6.7, které nyní uvedeme, je důležité v kontextu systémů iterovaných funkcí, protože ukazuje, jaký je vztah Hausdorffovy míry a dimenze pro množinu původní a její obrazy dané nějakým zobrazením.

Věta 1.6.7. Necht S je metrický prostor, $A \subseteq S$ a $f : S \rightarrow A$ je podobnost s koeficientem $r > 0$. Buď dále $s > 0$, $F \subseteq A$. Pak

$$\overline{\mathcal{H}}^s(f[F]) = r^s \overline{\mathcal{H}}^s(F),$$

a tedy $\dim_{\mathcal{H}} f[F] = \dim_{\mathcal{H}} F$.

Toto ale není jediná varianta Hausdorffovy míry, která se v praxi používá, často se můžeme setkat také se sférickou Hausdorffovou mírou nebo například centrovanou Hausdorffovou mírou. Tyto míry se zavádí zejména proto, že klasická Hausdorffova míra pracuje s infimem přes všechna spočetná ε -pokrytí dané množiny a skupina těchto pokrytí je velmi rozsáhlá. Naopak v případě sférické a centrované Hausdorffovy míry se omezujeme jen na část z těchto pokrytí. U obou případů existují porovnání s klasickou Hausdorffovou mírou, která ukazuje jejich vztah. Díky tomu lze například u některých množin jednodušeji určit Hausdorffovu dimenzi.

Hausdorffova sférická vnější míra je konstruována přes Metodu II stejně jako klasická míra Hausdorffova s jediným rozdílem a to tím, že hledáme infimum přes pokrytí tvořené uzavřenými koulemi o průměru maximálně ε . Tato míra se označuje $\overline{\mathcal{S}}^s$. Více detailů o této míře lze nahlédnout v [12].

Věta 1.6.8. Necht S je metrický prostor, $s > 0$ a $A \subseteq S$ je $\overline{\mathcal{H}}^s$ -měřitelná množina. Potom platí

$$\overline{\mathcal{H}}^s(A) < \overline{\mathcal{S}}^s(A) < 2^s \overline{\mathcal{H}}^s(A).$$

Hausdorffova centrovaná míra, viz [13], je pak doplněna ještě o podmínku, že pokrývací koule musí mít střed v množině, kterou pokrývají. Tuto míru označujeme \mathcal{C}^s a někdy se také nazývá pokrývací míra angl. *covering measure*. Touto mírou se zabýval G. A. Edgar už v roce 1995 a dostal zajímavé výsledky, které však příliš nezjednodušily praktické využití, viz. [14]. Jedny z novějších výsledků pro tuto míru jsou pak představeny např. v [15], kde jsou uvedeny dohromady také s centrovanou hustotou a ve vztahu k tzv. Hausdorffovým funkcím. Další zajímavé výsledky pro tuto míru z jiného pohledu pak byly představeny v [16], kde je tato míra také zobecněna pro další množinové funkce použité ke konstrukci obecné vnější míry (nejen $c(A) = (\text{diam } A)^s$).

1.7 Mřížková dimenze

Další možností, jak se přiblížit dimenzi Hausdorffově, je definovat tzv. dimenzi mřížkovou, viz. např [17]. Uvádíme ji zde zejména proto, že tuto dimenzi dokážeme numericky odhadnout, pokud umíme na počítači reprezentovat množinu, jejíž dimenzi chceme spočítat. Těmito odhady jsme se zabývali a jejich výsledky budou představeny v následující kapitole.

Definice 1.7.1. Necht $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná omezená množina a $N_\delta(A)$ je nejmenší počet množin s průměrem menším než δ pokrývajících A . Potom definujeme dolní resp. horní mřížkovou dimenzi jako

$$\underline{\dim}_B A = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(A)}{\log \frac{1}{\delta}},$$

$$\overline{\dim}_B A = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(A)}{\log \frac{1}{\delta}}.$$

Definice 1.7.2. Necht $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná omezená množina a $N_\delta(T)$ je nejmenší počet množin s průměrem menším než δ pokrývajících T . Potom pokud $\underline{\dim}_B A = \overline{\dim}_B A$, pak definujeme mřížkovou dimenzi, angl. *box-counting dimension*, jako

$$\dim_B A = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(A)}{\log \frac{1}{\delta}}.$$

Velmi důležité jsou vztahy mezi jednotlivými dimenzemi. Je to tak proto, že Hausdorffova dimenze je za obecných podmínek těžko určitelná a tak hledáme podmínky, za kterých ji určit dokážeme, příp. za kterých dostaneme alespoň její odhad.

Věta 1.7.3. Bud $A \subset \mathbb{R}^n$ neprázdná omezená množina a necht existuje $\delta_0 > 0$ pro všechna $\delta \leq \delta_0$ tak, že $1 \leq \overline{\mathcal{H}}_\delta^s(A)$, kde $s = \dim_{\mathcal{H}} A$. Potom platí

$$\dim_{\mathcal{H}} A \leq \underline{\dim}_B A \leq \overline{\dim}_B A.$$

Tuto jsme větu vyslovili a dokázali v [2]. Obdobné tvrzení je možné ukázat také bez dodatečných předpokladů na δ a $\overline{\mathcal{H}}_\delta^s(A)$. Detaily k tomuto lze najít např. v [18].

Definice 1.7.4. Necht $(f_1, \dots, f_n), n \in \mathbb{N}$ je systém iterovaných funkcí na metrickém prostoru S . Řekneme, že tento IFS splňuje podmínku otevřenosti, pokud existuje množina V taková, že

$$\bigcup_{i=1}^n f_i(V) \subseteq V \text{ a } f_i(V) \cap f_j(V) = \emptyset \quad (1.1)$$

pro všechna $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Tato podmínka říká, že se obrazy $f_i(V)$ překrývají „jen trochu“. Tato podmínka byla poprvé představena už v roce 1946 v článku [19]. Následující větu jsme dokázali v [2] za slabších podmínek, kdy jsme předpokládali, že obrazy invariantní množiny jsou disjunktní. Použijeme-li podmínku otevřenosti, věta zůstává stále v platnosti a je možné ji použít pro více množin. Její důkaz lze nahlédnout v [11].

Věta 1.7.5. Necht $(f_1, \dots, f_n), n \in \mathbb{N}$ je systém iterovaných funkcí na metrickém prostoru S splňující podmínka otevřenosti a A jeho invariantní množina. Potom platí

$$\dim_H A = \dim_B A = s,$$

kde s označuje podobnostní dimenzi množiny A . Navíc o Hausdorffově míře víme, že $0 < \mathcal{H}^s(A) < +\infty$.

Tato věta je velmi významná, protože s její pomocí jsme schopni spočítat Hausdorffovu dimenzi alespoň některých množin, máme-li systém iterovaných funkcí. Mezi invariantní množiny nějakých IFS, které splňují podmínku otevřenosti, patří například Cantorovo diskontinuum nebo Sierpińského trojúhelník.

Kapitola 2

Algoritmická aproximace invariantních množin pro IFS a jejich mřížkové dimenze

Navážeme přímo na předchozí kapitolu a představíme nyní, jak lze využít předchozí teorii k zobrazení invariantních množin některých systémů iterovaných funkcí pomocí tzv. chaotického algoritmu. Zabýváme se zde také numerickým odhadem mřížkové dimenze pro množiny, které jsme tímto způsobem schopni zobrazit. Tím zpřesňujeme výsledky získané v práci [2].

2.1 Chaotický algoritmus

Chaotický algoritmus, angl. *chaos game algorithm*, umožňuje zobrazit aproximaci invariantních množin systémů iterovaných funkcí. Budou uvedeny dvě varianty tohoto algoritmu, kdy první z nich je přizpůsobena klasickým IFS a druhá se potom zabývá rekurentními IFS. Obě varianty tohoto algoritmu byly popsány M. Barnsleym v již dříve uvedených knihách [7, 8]. Chaotický algoritmus může být zapsán ve více formách. My jsme vybrali tu, která pracuje vždy pouze s jedním bodem v prostoru.

Pomocí tohoto algoritmu často nedostaneme přesný tvar invariantní množiny daného IFS jednoduše proto, že některé z těchto invariantních množin mají nekonečně členitou strukturu a to nejsme schopni zachytit, jelikož pracujeme pouze s konečnou aritmetikou. Při dostatečně dlouhém výpočtu však dostáváme vizuálně dostačující aproximaci, při které lidské oko nevidí ztrátu detailů.

Chaotický algoritmus pro klasické IFS

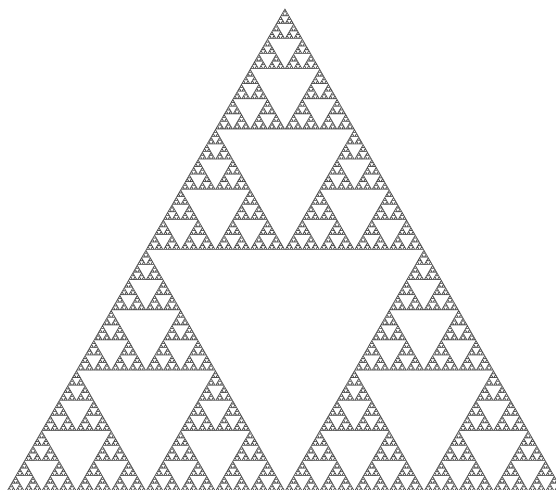
1. Vybereme náhodně bod $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
2. Vybereme náhodně $s_0 \in \{1, \dots, k\}$, kde k odpovídá počtu iteračních funkcí v systému.
3. Vypočítáme $(x_1, y_1) = f_{s_0}(x_0, y_0)$.
4. Vybereme náhodně $s_1 \in \{1, \dots, k\}$.
5. Vypočítáme $(x_2, y_2) = f_{s_1}(x_1, y_1)$.

6. Body 4, 5 obdobně opakujeme dále.

Jednou z množin, které je možné díky chaotickému algoritmu zobrazit, je například Sierpiňského trojúhelník S . Zde IFS má tvar (f_1, f_2, f_3) a platí

$$S = f_1[S] \cup f_2[S] \cup f_3[S], \quad (2.1)$$
$$f_i(x) = \frac{1}{2}(z_i + x) \text{ pro } i \in \{1, 2, 3\},$$

kde z_i jsou souřadnice vrcholů trojúhelníku a $x \in S$. Zobrazení působí na daný bod po složkách. Výsledek algoritmu můžeme vidět na Obrázku 2.1.



OBRÁZEK 2.1: Sierpiňského trojúhelník zobrazený pomocí chaotického algoritmu

Obdobně jako pro klasické IFS tedy můžeme dostat také algoritmus pro zobrazení invariantních množin rekurentních IFS.

Chaotický algoritmus pro rekurentní IFS

1. Vybereme náhodně bod $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
2. Vybereme náhodně s rovnoměrným rozdělením $s_0 \in \{1, \dots, k\}$, kde k odpovídá počtu iteračních funkcí v systému.
3. Index s_0 nyní určuje řádek v matici pravděpodobností přidružené k IFS. Vybereme tedy $s_1 \in \{1, \dots, k\}$ náhodně s ohledem na diskrétní pravděpodobnosti $p_{s_0 1}, \dots, p_{s_0 k}$ v daném řádku.
4. Vypočítáme $(x_1, y_1) = f_{s_1}(x_0, y_0)$.
5. Vybereme $s_2 \in \{1, \dots, k\}$ náhodně s ohledem na diskrétní pravděpodobnosti $p_{s_1 1}, \dots, p_{s_1 k}$ v řádku daném indexem s_1 .
6. Vypočítáme $(x_2, y_2) = f_{s_2}(x_1, y_1)$.

7. Body 5, 6 obdobně opakujeme dále.

V jistých případech lze tento algoritmus pro rekurentní systémy iterovaných funkcí chápat také trochu jinak. Pokud je matice pravděpodobností v některých speciálních tvarech, je možné rekurenci v daném systému vyjádřit pomocí jednoduchých pravidel. Pravidlo může znít například tak, že v následujícím kroku algoritmu nesmíme vybrat funkci stejnou jako tu, která byla použita naposledy. Takovéto pravidlo přidané k funkcím na Sierpiňského trojúhelníku lze reprezentovat maticí pravděpodobností uvedenou v Tabulce 2.1.

i	p_{i1}	p_{i2}	p_{i3}
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

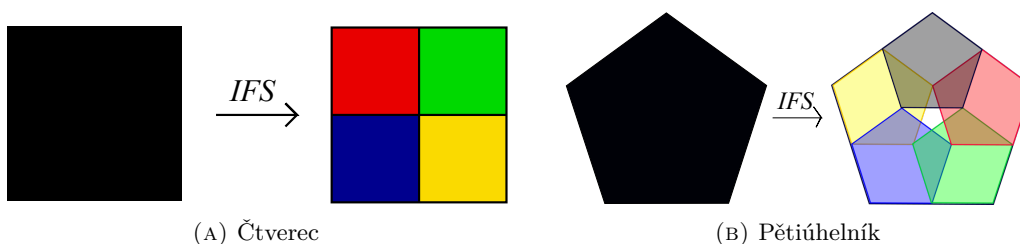
TABULKA 2.1: Pravděpodobnosti pro trojúhelník s pravidlem P1

Takovýchto pravidel bychom mohli vymyslet mnoho, několik z nich jsme zkoumali a zobrazili s jejich pomocí invariantní množiny. Zabývali jsme se systémy iterovaných funkcí Sierpiňského typu pro některé rovnostranné n -úhelníky, tj. vzali jsem obdobné funkce jako pro Sierpiňského trojúhelníku ve tvaru

$$f_i(x) = z_i - \frac{1}{2}(z_i - x), \quad (2.2)$$

kde $i \in \{1, \dots, n\}$ a z_i odpovídá souřadnicím vrcholů daného n -úhelníku.

Tyto systémy iterovaných funkcí mají ale evidentní efekt pouze pro n -úhelníky, kde n je liché číslo. Pro n sudé se obrazy množiny dotknou nebo překryjí a nevzniká tedy žádná zajímavá struktura, viz. Obrázek 2.2. Přidáním jednoduchých pravidel (rekurence) ale můžeme dostat komplikovanou strukturu i v těchto množinách.



OBRÁZEK 2.2: Jak působí IFS ve tvaru (2.2) na čtverec a pětiúhelník

Nyní budou uvedena pravidla, která jsme zkoumali a používali při generování aproximace invariantních množin. Kromě těchto pravidel budou uvedeny také výsledky aproximace pomocí chaotického algoritmu pro invariantní množiny systémů iterovaných funkcí Sierpiňského typu při použití pravidla P1. Všechna pravidla jsme zkoumali na čtverci, pěti-, šesti- a osmiúhelníku jako výchozích množinách, s jejichž vrcholy jsou spojené jednotlivé funkce IFS. Zjistili jsme, že každé z těchto pravidel způsobuje vznik podobných struktur bez ohledu na to, ze kterého n -úhelníku vycházíme. Rozbor jednotlivých pravidel je možné najít v [2].

Pravidla:

- P1 Vybrané zobrazení nesmí být použito v dalším kroku znova.
- P2 Vybrané zobrazení nesmí být spojeno s žádným sousedním vrcholem vzhledem k předchozímu.
- P3 Vybrané zobrazení nesmí být spojeno se svým sousedním vrcholem (po směru hodinových ručiček).
- P4 Vybrané zobrazení nesmí být spojeno s vrcholem ob jeden (po směru hodinových ručiček).
- P5 Pokud se vybere dvakrát po sobě stejné zobrazení, pak příští nesmí být spojeno s žádným ze sousedních vrcholů.
- P6 Pokud se vybere dvakrát po sobě stejné zobrazení, pak další nesmí být spojeno s vrcholem ob jeden (po směru hodinových ručiček).

TABULKA 2.2: Pravidla použitá pro aproximaci invariantních množin IFS Sierpiňského typu pomocí chaotického algoritmu

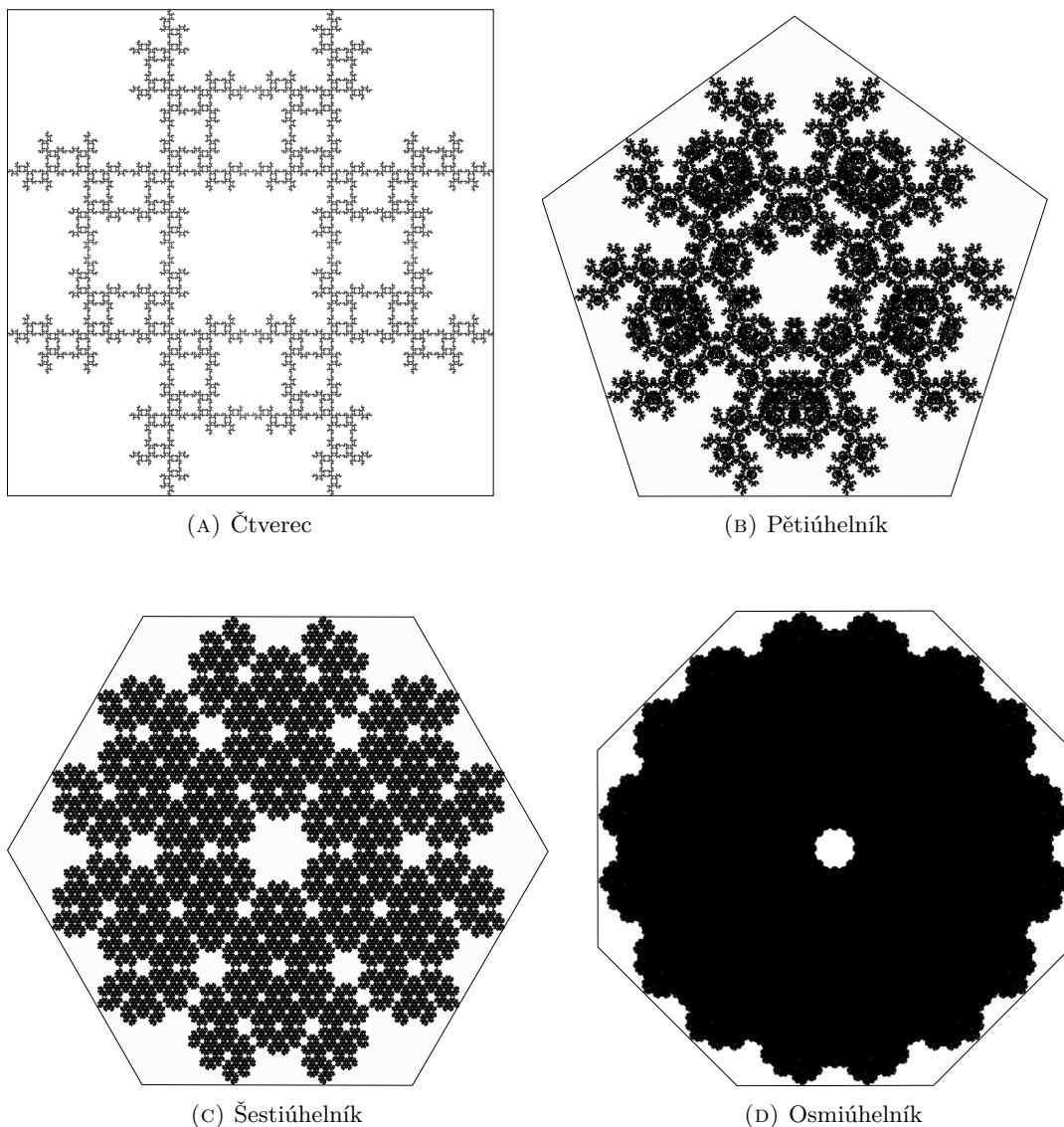
Rozeberme zde alespoň jedno z těchto pravidel a to **P1**, pro které můžeme vidět výsledek jeho vizualizace na Obrázku 2.3. Toto pravidlo zakazuje použít v chaotickém algoritmu jedno zobrazení dvakrát za sebou a v matici pravděpodobností dostáváme vždy $p_{ij} = 0$ pro $i = j$. Díky tomu se body množiny nikdy nemohou dostat až k samotnému vrcholu původního n -úhelníku.

Pokud se nyní zaměříme na chaotický algoritmus, tak si můžeme představit, že abychom dostali body blízko takovému vrcholu, potřebovali bychom, aby se zobrazení spojené s daným vrcholem mohlo použít mnohokrát (ideálně nekonečněkrát) po sobě. To jediné může způsobit, že bod bude kontrakcí přitahován směrem k vrcholu. V tomto případě ale máme zakázáno použít funkci více než jednou. Proto se invariantní množina IFS k vrcholu původního n -úhelníku přiblížit nemůže. To „nejlepší“, co se může v daném případě stát, je, že budeme opakovat dokola stále dvě z vybraných zobrazení. Tím ale konvergujeme k periodickému řešení, které obsahuje body ve vzdálenosti $\frac{1}{3}d$ a $\frac{2}{3}d$ od některého z vrcholů. Přitom d je vzdálenost mezi vrcholy, které jsou asociované se zobrazeními, která se střídají. Toto chování je dobře vidět na obvodu původních n -úhelníků, kde jediné body, které se obvodu dotýkají, jsou právě body ve vzdálenosti $\frac{1}{3}d$ a $\frac{2}{3}d$ od vrcholů.

Obecně struktura, která se objevuje na okraji množiny, se pak zrcadlí také uvnitř množiny. U osmiúhelníku však není evidentní téměř žádná vnitřní struktura, kromě samotného středu množiny. To je způsobeno tím, že překryv obrazů je příliš velký a detaily jsou tedy vidět jen na úplném okraji a ve středu.

2.2 Odhad mřížkové dimenze

Definici mřížkové dimenze jsme uvedli již v kapitole o dimenzních množinách, přesněji to byla Definice 1.7.1. Je důležité si uvědomit, že při výpočtu této dimenze pokrýváme danou



OBRÁZEK 2.3: Invariantní množiny pro IFS Sierpiňského typu při použití pravidla P1 dle Tabulky 2.2 zobrazené pomocí chaotického algoritmu

množinu množinami o maximálním průměru δ a zjišťujeme počet takových množin. Jak K. J. Falconer ukázal v [11], ekvivalentně můžeme pokrýt množinu čtvercovou sítí s oky o velikosti strany δ a zjistit jejich počet. Výsledek po provedení limity bude stejný v obou případech. To je také důvod, proč se tato dimenze nazývá mřížková, angl. *box-counting*.

V našem případě jsme takto pokrývali množiny generované chaotickým algoritmem. Přesněji řečeno, odhadovali jsme tímto způsobem mřížkovou dimenzi na čtverci s využitím pravidel z Tabulky 2.2. Využili jsme toho, že samotná množina je zobrazena v určitém rozlišení, což samo o sobě určuje síť. Brali jsme tedy v úvahu, že strana čtverce má délku 1 a oko sítě tedy délku strany $\frac{1}{\text{rozlišení}}$. Pak jsme napočítali, kolik pixelů je obarvených, a tedy do kolika z nich množina zasahuje. Tuto hodnotu jsme pak označili N_δ , kde δ^{-1} je rovno rozlišení. Tento postup jsme použili pro pět různých rozlišení, která jsou zapsána v Tabulce 2.3. Vždy jsme napočítali hodnoty N_δ dvacetkrát a jako výslednou hodnotu

jsme brali jejich průměr. To jsme provedli s ohledem na to, že výsledek chaotického algoritmu není vždy stejný. Závisí totiž na náhodně zvoleném prvním bodu i zobrazeních, která na něj použijeme. Jednotlivé výsledky se ale neliší nijak signifikantně. Vždy bylo provedeno 10^8 iterací v chaotickém algoritmu, což se při daných rozlišeních ukázalo jako dostatečné. Takto napočítané hodnoty $(\log \delta, \overline{N}_\delta)$ pak byly vyneseny do grafu a proloženy přímkou pomocí lineární regrese. Směrnice této přímky udává přímo hodnotu odhadu mřížkové dimenze.

δ^{-1}	$\log \delta^{-1}$
512	2,70927
1024	3,01030
2048	3,31133
4096	3,61236
8192	3,91339

TABULKA 2.3: Hodnoty rozlišení a jejich logaritmy

V našem případě měření vycházela velmi přesně. Při použití lineární regrese se odchylky jednotlivých bodů od přímky pohybovaly řádově v hodnotách 10^{-4} . To je způsobeno pravděpodobně tím, že na čtverci se zobrazením Sierpiňského typu, je pokrytí pomocí čtverců ideální ve smyslu zaznamenání detailů struktury.

Čtverec pro pravidlo **P1**

Pravidlo **P1** říká, že dané zobrazení nemůžeme v rámci chaotického algoritmu použít dvakrát po sobě. V Tabulce 2.4 jsou zapsána napočítaná data pro rozlišení obrázku, která jsou uvedena v prvním řádku tabulky. Dále je zde vypočtena hodnota průměru z N_δ pro tyto napočítané hodnoty a jednotlivá rozlišení a jejich logaritmus.

Rovnice pro přímku, kterou jsme dostali pomocí lineární regrese, na Obrázku 2.4 má tvar

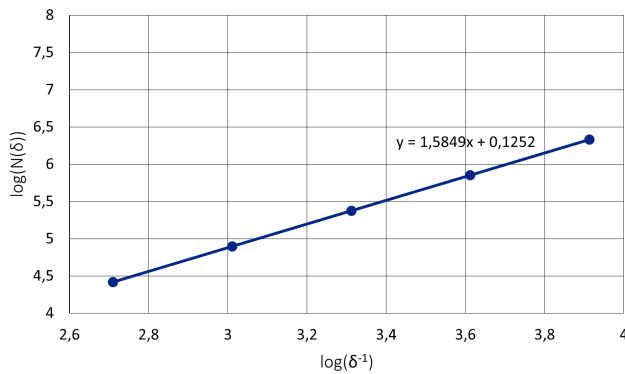
$$y = 1,5849x + 0,1252. \quad (2.3)$$

Odtud tedy plyne, že odhad mřížkové dimenze pro takovou množinu je 1,5849. To zhruba odpovídá našim předpokladům podle vzhledu struktury. To proto, že množina vznikala ze čtverce, který má topologickou dimenzi rovnou 2. Na druhou stranu je množina „děravá“, ale vypadá to, že stále obsahuje alespoň úsečku, jejíž topologická dimenze je rovna jedné. Očekávali jsme tedy hodnotu mezi těmito dvěma extrémy.

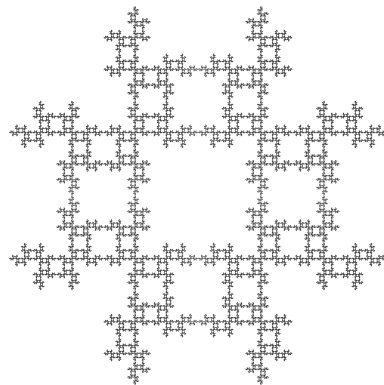
	512	1024	2048	4096	8192
1	26247	78733	236205	708594	2125776
2	26249	78737	236205	708598	2125776
3	26250	78740	236198	708598	2125775
4	26252	78734	236206	708599	2125776
5	26249	78741	236206	708589	2125774
6	26249	78742	236206	708598	2125769
7	26252	78740	236200	708594	2125775
8	26248	78739	236203	708598	2125776
9	26250	78740	236204	708595	2125775
10	26252	78741	236206	708594	2125773
11	26252	78735	236205	708599	2125776
12	26248	78740	236206	708595	2125771
13	26248	78741	236205	708599	2125775
14	26250	78735	236197	708594	2125771
15	26251	78736	236204	708599	2125765
16	26247	78739	236205	708596	2125773
17	26252	78733	236206	708598	2125775
18	26251	78738	236206	708595	2125773
19	26253	78740	236203	708599	2125774
20	26248	78741	236203	708597	2125764

\overline{N}_δ	26249,95	78738,25	236203,95	708596,4	2125773,1
$\log \overline{N}_\delta$	4,419128	4,896186	5,3732872	5,850399	6,3275169

TABULKA 2.4: Počet obarvených pixelů N_δ ve čtverci, který je generovaný podle pravidla **P1** z Tabulky 2.2 pro různá rozlišení, a jejich průměrný počet \overline{N}_δ . První řádek udává rozlišení a první sloupec číslo výpočtené hodnoty.



(A) Graf pro určení mřížkové dimenze



(B) Množina pro pravidlo P1

OBRÁZEK 2.4: Výsledky pro čtverec podle pravidla P1 dle Tabulky 2.2

Čtverec pro pravidlo P3

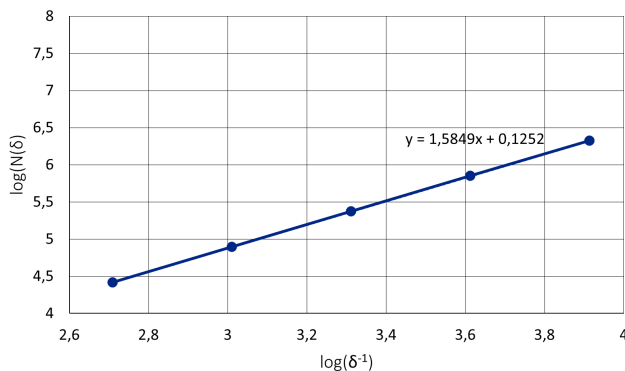
Zopakujeme, že toto pravidlo říká, že v rámci chaotického algoritmu nemůžeme vybrat zobrazení, které je spojené se sousedním vrcholem po směru hodinových ručiček vůči poslednímu použitému zobrazení. Toto pravidlo v konečném důsledku v daném kroku nepřipouští vždy jednu z funkcí v IFS stejně jako tomu bylo v předchozím případě. Rozdíl spočívá v tom, které zobrazení je v daném kroku zakázáno. Z konstrukce tedy odhadujeme, že mřížková dimenze by měla vycházet obdobně jako v předchozím případě.

Jednotlivé napočítané hodnoty jsou opět zaneseny v Tabulce 2.5 společně s průměrnými hodnotami a jejich logaritmy, které pak vynásíme do grafu na Obrázku 2.5.

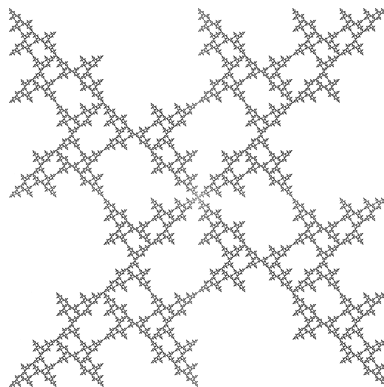
Rovnice přímky dané lineární regresí je pro tento případ ve tvaru

$$y = 1,5849x + 0,1252. \quad (2.4)$$

Tato rovnice je v tomto tvaru zapsaném na čtyři desetinná místa shodná s rovnicí (2.3). Odtud vyplývá, že také jejich odhad mřížkových dimenzí je shodný a je roven 1,5849. To odpovídá našemu předpokladu, dokonce odhad vyšel přímo shodný a to i přesto, že množiny vizuálně nevypadají příliš podobně. Jejich struktura a zaplnění prostoru jsou si ale, zdá se, velmi blízké.



(A) Graf pro určení mřížkové dimenze



(B) Množina pro pravidlo P3

OBRÁZEK 2.5: Výsledky pro čtverec podle pravidla P3 dle Tabulky 2.2

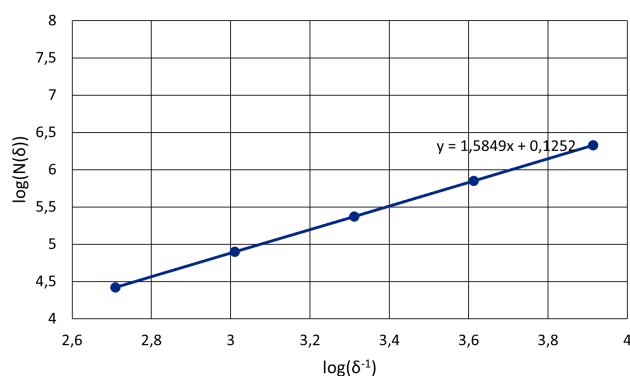
	512	1024	2048	4096	8192
1	26249	78740	236201	708598	2125775
2	26251	78741	236204	708595	2125770
3	26248	78738	236197	708593	2125767
4	26252	78742	236206	708598	2125775
5	26250	78741	236201	708595	2125772
6	26250	78739	236205	708599	2125770
7	26249	78732	236205	708599	2125775
8	26249	78741	236204	708594	2125775
9	26244	78741	236204	708598	2125775
10	26249	78740	236200	708598	2125776
11	26248	78732	236202	708597	2125770
12	26252	78741	236204	708595	2125774
13	26252	78741	236206	708597	2125773
14	26250	78733	236205	708599	2125776
15	26247	78738	236205	708596	2125776
16	26251	78740	236205	708601	2125772
17	26244	78739	236204	708597	2125774
18	26252	78737	236205	708599	2125775
19	26244	78740	236206	708591	2125775
20	26252	78738	236198	708588	2125774

\overline{N}_δ	26249,15	78738,8	236203,35	708596,35	2125773,45
$\log \overline{N}_\delta$	4,419115	4,89619	5,3732861	5,8503989	6,32751698

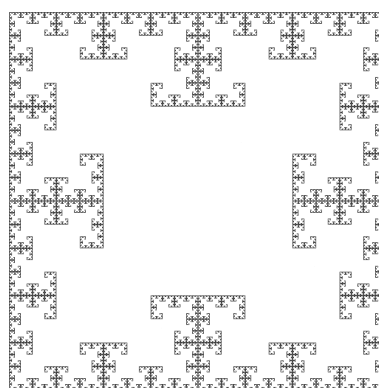
TABULKA 2.5: Počet obarvených pixelů N_δ ve čtverci, který je generovaný podle pravidla P3 z Tabulky 2.2 pro příslušná rozlišení, a jejich průměrný počet \overline{N}_δ . První řádek udává rozlišení a první sloupec číslo výpočtené hodnoty.

Čtverec pro pravidlo P4

Další z pravidel, která jsme přidali k systému iterovaných funkcí Sierpiňského typu, říká, že další zobrazení v chaotickém algoritmu nesmí být spojené s vrcholem, který je ob jeden vůči zobrazení předchozímu. Toto pravidlo se ale dá na čtverci vyjádřit jednodušeji a to přímo tak, že následující zobrazení nesmí být spojeno s protějším vrcholem. I toto pravidlo však v daném kroku algoritmu zakazuje vybrat právě jednu funkci z IFS, a proto opět očekáváme podobný výsledek pro odhad mřížkové dimenze jako v předchozích dvou případech. Hodnoty, které jsme dostali použitím numerických odhadů jsou zapsány v Tabulce 2.6 a množina samotná společně s grafem, kam jsme vypočítané hodnoty vynášeli, jsou uvedeny na Obrázku 2.6.



(A) Graf pro určení mřížkové dimenze



(B) Množina pro pravidlo P4

OBRÁZEK 2.6: Výsledky pro čtverec podle pravidla P4 dle Tabulky 2.2

Nyní opět uvedeme rovnici, která odpovídá přímce dané lineární regrese, jak jsme ji vykreslili v grafu na Obrázku 2.6.

$$y = 1,5849x + 0,1252. \quad (2.5)$$

I v tomto případě jsme dostali shodnou rovnici jako v případech (2.3), (2.4), což opět odpovídá našemu předpokladu. Opět vidíme vizuální odlišnost dané množiny od předchozích dvou, ale strukturálně jsou jejich rozdíly pravděpodobně zanedbatelné.

	512	1024	2048	4096	8192
1	26248	78740	236200	708593	2125820
2	26244	78735	236209	708603	2125786
3	26251	78744	236201	708598	2125800
4	26247	78741	236210	708595	2125800
5	26253	78738	236206	708602	2125780
6	26252	78741	236209	708590	2125781
7	26252	78735	236197	708596	2125777
8	26250	78740	236210	708598	2125790
9	26252	78741	236205	708602	2125787
10	26251	78740	236207	708592	2125805
11	26250	78740	236205	708599	2125792
12	26245	78740	236215	708598	2125810
13	26251	78736	236205	708600	2125787
14	26254	78741	236208	708603	2125792
15	26252	78741	236207	708597	2125790
16	26249	78732	236200	708606	2125780
17	26251	78736	236205	708597	2125787
18	26251	78738	236210	708597	2125782
19	26249	78738	236199	708598	2125789
20	26251	78733	236203	708607	2125791

\overline{N}_δ	26250,15	78738,5	236205,55	708598,55	2125791,3
$\log \overline{N}_\delta$	4,419132	4,89619	5,3732901	5,8504003	6,3275206

TABULKA 2.6: Počet obarvených pixelů N_δ ve čtverci, který je generovaný podle pravidla P4 z Tabulky 2.2 pro příslušná rozlišení, a jejich průměrný počet \overline{N}_δ . První řádek udává rozlišení a první sloupec číslo výpočtené hodnoty.

	512	1024	2048	4096	8192
1	89160	304384	1039238	3548088	12113072
2	89158	304390	1039237	3548074	12113116
3	89159	304389	1039238	3548073	12113106
4	89152	304392	1039238	3548079	12113039
5	89158	304386	1039242	3548100	12113147
6	89152	304388	1039232	3548082	12113047
7	89159	304389	1039241	3548086	12113061
8	89158	304393	1039239	3548071	12113132
9	89157	304391	1039241	3548091	12113082
10	89160	304388	1039237	3548097	12113065
11	89158	304384	1039232	3548096	12113119
12	89158	304384	1039232	3548084	12113074
13	89158	304391	1039234	3548089	12113022
14	89152	304388	1039238	3548074	12113093
15	89158	304385	1039242	3548076	12113053
16	89159	304388	1039233	3548095	12113131
17	89159	304394	1039239	3548095	12113058
18	89153	304390	1039239	3548072	12113104
19	89157	304384	1039235	3548109	12113142
20	89152	304385	1039237	3548094	12113096

\bar{N}_δ	89156,85	304388,15	1039237,2	3548086,25	12113087,95
$\log \bar{N}_\delta$	4,950155	5,4834277	6,0167147	6,54999417	7,083254871

TABULKA 2.7: Počet obarvených pixelů N_δ ve čtverci, který je generovaný podle pravidla **P5** z Tabulky 2.2 pro příslušná rozlišení, a jejich průměrný počet \bar{N}_δ . První řádek udává rozlišení a první sloupec číslo vypočtené hodnoty.

Čtverec pro pravidlo **P5**

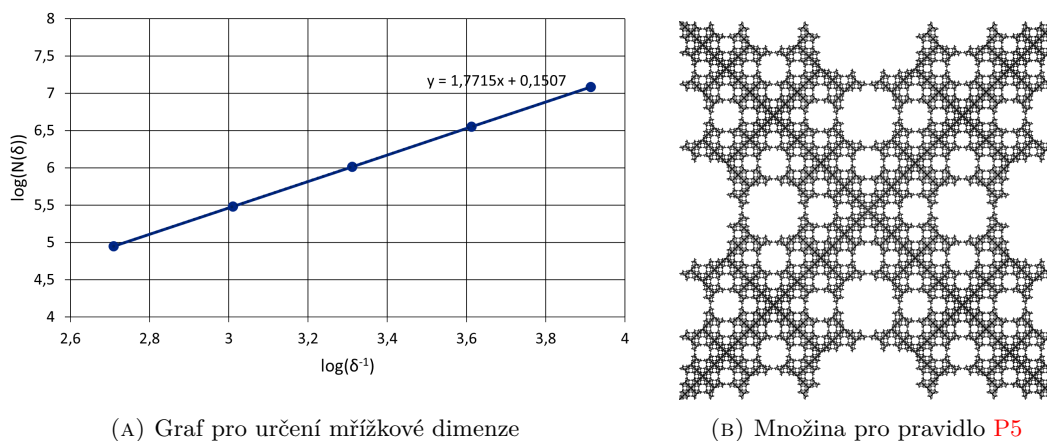
Nyní se přesuneme k trochu odlišným pravidlům, která jsou dána určitou hlubší podmínkou. V obou případech, kterými se budeme zabývat, podmínka říká, že pokud dané zobrazení použijeme dvakrát po sobě, pak další nesmí být spojené s některým z vrcholů. V tomto konkrétním případě další zobrazení nesmí být spojeno ani s jedním ze sousedních vrcholů. Toto pravidlo je oproti předchozím, která jsme již používali, o něco slabší, neboť funkce zakazujeme, až pokud splníme první podmínku. Zůstává stále v platnosti, že očekáváme odhad mřížkové dimenze v hodnotách mezi jedničkou a dvojkou, ale očekáváme, že invariantní množina se bude více blížit původnímu čtverci, a tedy že odhadnutá hodnota bude vyšší než v předchozích případech.

Opět jsme napočítali pro každé rozlišení dvacet hodnot a ty jsme zapsali do Tabulky 2.7 včetně jejich průměrů a logaritmů těchto průměrů. Na Obrázku 2.7 je uveden graf k příslušným hodnotám proložený přímkou danou lineární regresí a vizualizace invariantní množiny pomocí chaotického algoritmu.

Rovnice přímky pro lineární regresi v tomto případě odpovídá

$$y = 1,7715x + 0,1507. \quad (2.6)$$

Odhad pro mřížkovou dimenzi je roven 1,7715. To i v tomto případě odpovídá předpokladu. Dostali jsme hodnotu vyšší než 1,5849, což byl náš odhad mřížkové dimenze pro předchozí tři množiny. Stále jsme ale dostali hodnotu nižší než 2, což jsme také předpokládali.



OBRÁZEK 2.7: Výsledky pro čtverec podle pravidla P5 dle Tabulky 2.2

Čtverec pro pravidlo P6

Poslední množina, kterou budeme zkoumat, je invariantní množinou systému iterovaných funkcí Sierpiňského typu společně s pravidlem P6. Toto pravidlo pro čtverec říká, že pokud je nějaké zobrazení použito dvakrát po sobě, pak následující nesmí být spojeno s protějším vrcholem. Toto je obdoba pravidla P4, jehož invariantní množinu už jsme zkoumali. Toto pravidlo je ale evidentně slabší ve smyslu, že první musíme splnit podmínku, abychom zobrazení použili dvakrát a teprve pak toto pravidlo aplikujeme. To je dobře vidět i na vizualizacích daných množin a to tak, že invariantní množina podle pravidla P4 je podmnožinou invariantní množiny pro P6. Oproti předchozí zkoumané množině dané pravidlem P5, ale zakazujeme po splnění podmínky na dvojnásobné použití zobrazení pouze jednu funkci, zatímco v předchozím případě jsme zakazovali funkce dvě. Opět bychom tedy čekali, že mřížková dimenze bude ještě o něco vyšší než tomu bylo právě v předchozím případě, ale stále nepřesáhne 2.

Napočítané hodnoty pro jednotlivá rozlišení, průměrné hodnoty a jejich logaritmy jsou zapsány v Tabulce 2.8. Graf podle napočítaných hodnot a invariantní množina zobrazená chaotickým algoritmem jsou zobrazeny na Obrázku 2.8.

Rovnice přímky pro tuto množinu odpovídá

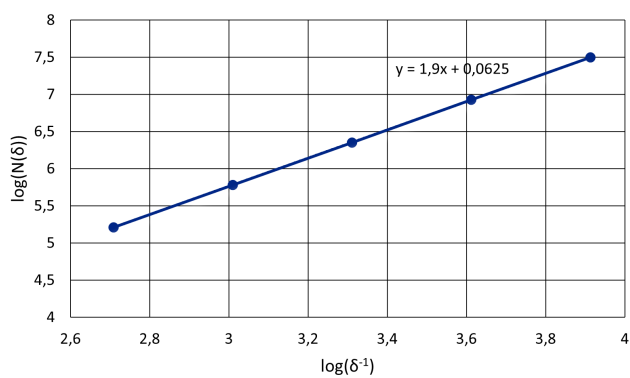
$$y = 1,9x + 0,0625. \quad (2.7)$$

Odhad mřížkové dimenze je v tomto případě 1,9. Tato hodnota už je poměrně blízko 2, to ale také odpovídá tomu, co můžeme vidět při vizualizaci dané množiny. Množina je totiž stále „děravá“, ale už je podobnější spíše čtverci než úsečce (resp. síti dané úsečkami). To celkově odpovídá našemu odhadu.

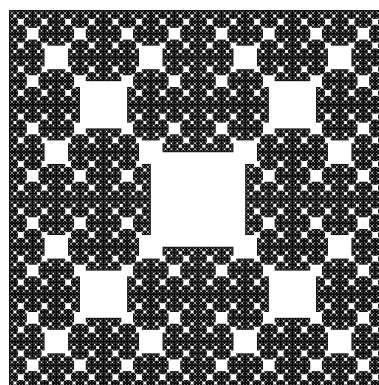
	512	1024	2048	4096	8192
1	162180	605264	2258877	8430244	31462046
2	162181	605268	2258876	8430247	31462044
3	162180	605265	2258876	8430238	31462018
4	162180	605273	2258886	8430237	31462039
5	162187	605270	2258876	8430248	31462038
6	162182	605270	2258876	8430238	31462037
7	162180	605264	2258876	8430248	31462042
8	162182	605264	2258876	8430239	31462033
9	162187	605270	2258883	8430242	31462041
10	162180	605270	2258876	8430238	31462046
11	162184	605271	2258883	8430237	31462030
12	162180	605264	2258876	8430239	31462039
13	162180	605264	2258885	8430246	31462037
14	162180	605264	2258876	8430248	31462033
15	162180	605270	2258876	8430239	31462047
16	162180	605265	2258876	8430239	31462035
17	162180	605268	2258876	8430239	31462036
18	162187	605264	2258883	8430236	31462046
19	162180	605264	2258876	8430237	31462033
20	162180	605265	2258876	8430239	31462026

\overline{N}_δ	162181,5	605266,85	2258878,05	8430240,9	31462037,3
$\log \overline{N}_\delta$	5,210001	5,7819469	6,35389279	6,92584	7,49778684

TABULKA 2.8: Počet obarvených pixelů N_δ ve čtverci, který je generovaný podle pravidla **P6** z Tabulky 2.2 pro příslušná rozlišení, a jejich průměrný počet \overline{N}_δ . První řádek udává rozlišení a první sloupec číslo výpočtené hodnoty.



(A) Graf pro určení mřížkové dimenze



(B) Množina pro pravidlo P6

OBRÁZEK 2.8: Výsledky pro čtverec podle pravidla P6 dle Tabulky 2.2

Kapitola 3

Míra a integrál fraktálních množin

V této kapitole se zaměříme na to, jakým způsobem lze využít Hausdorffovu míru fraktálních množin, především těch daných pomocí IFS, a jak na této míře zkonstruovat integrál. Rozebereme, pro které množiny jsme schopni Hausdorffovu míru a její integrál určit přesně a pro které jsou tyto hodnoty stále neznámé. Ukážeme také algoritmický způsob, jak integrál pro takovéto množiny odhadnout.

3.1 Vlastnosti Hausdorffovy míry

Protože definici a základní vlastnosti Hausdorffovy míry jsme představili už v předchozí kapitole, nebudeme je znovu opakovat a přejdeme rovnou k dalším vlastnostem Hausdorffovy míry a především jejímu vztahu k míře Lebesgueově. Hausdorffovu míru totiž můžeme chápat jako jisté zobecnění Lebesgueovy míry, a tak je důležité si ukázat jejich souvislosti. Zároveň nám to také umožní vypočítat Hausdorffovu míru některých základních (typicky nefraktálních) množin.

Poznámka 3.1.1. Připomeňme, že $\#A$ značí počet prvků konečné množiny A .

Lemma 3.1.2. $\overline{\mathcal{H}}^0(A) = \#A$ pro $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konečnou.

Důkaz. Mějme bod $x \in \mathbb{R}^n$. Z definice Hausdorffovy míry přímo dostáváme, že $\overline{\mathcal{H}}_\delta^0(\{x\}) = 1$ pro libovolné pevné δ , a tedy i $\overline{\mathcal{H}}^0(\{x\}) = 1$. Dále pak pro $\overline{\mathcal{H}}^0$ platí

$$\overline{\mathcal{H}}^0(A) = \sum_{x \in A} \overline{\mathcal{H}}^0(\{x\}) = \#A,$$

pro všechny konečné množiny $A \subset \mathbb{R}^n$. □

Lemma 3.1.3. $\overline{\mathcal{H}}^1 = \overline{\mathcal{L}}^1$ on \mathbb{R}

Důkaz. Berme $A \subset \mathbb{R}$ a $\delta > 0$ libovolně. Každý interval v \mathbb{R} můžeme zapsat jako sjednocení intervalů o maximální délce ε . Víme také, že na \mathbb{R} odpovídá délka intervalu jeho průměru. Pak platí pro všechna $A \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{L}}^1(A) &= \inf \left\{ \sum_k |I_k| \mid A \subset \bigcup_k I_k \right\} = \inf \left\{ \sum_k |I_k| \mid A \subset \bigcup_k I_k, \text{diam } I_k < \varepsilon \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_k \text{diam } I_k \mid A \subset \bigcup_k I_k, \text{diam } I_k < \varepsilon \right\} = \overline{\mathcal{H}}_\varepsilon^1(A) \end{aligned}$$

Odtud už limitním přechodem pro $\varepsilon \rightarrow 0$ dostáváme, že $\overline{\mathcal{L}}^1(A) = \overline{\mathcal{H}}^1(A)$. \square

Věta 3.1.4. Pro Hausdorffovu a Lebesgueovu vnější míru na \mathbb{R}^n platí

$$\sigma(n) \overline{\mathcal{H}}^n(A) = \overline{\mathcal{L}}^n \text{ pro } n \geq 2,$$

kde $\sigma(n) = \frac{\overline{\mathcal{L}}^n(B)}{2^n}$, přičemž B je jednotková koule v \mathbb{R}^n .

Důkaz. Ukážeme první nerovnost $\overline{\mathcal{L}}^n \leq \sigma(n) \overline{\mathcal{H}}^n$.

Použijeme izodiametrickou nerovnost, např. dle [12], která říká, že koule má mezi množinami s daným poloměrem největší objem, tj. pro všechna $A \in \mathbb{R}^n$

$$\overline{\mathcal{L}}^n(A) \leq \sigma(n)(\text{diam } A)^n.$$

Berme takové pokrytí $A \subset \bigcup_j A_j$, kde $\text{diam } A_j < \varepsilon$ pro všechna j a libovolné pevné ε , potom

$$\overline{\mathcal{L}}^n(A) \leq \sum_j \overline{\mathcal{L}}^n(A_j) \leq \sum_j \sigma(n)(\text{diam } A_j)^n = \sigma(n) \sum_j (\text{diam } A_j)^n.$$

Vezmeme-li infimum přes všechna taková pokrytí, dostáváme pro všechna A

$$\overline{\mathcal{L}}^n(A) \leq \sigma(n) \overline{\mathcal{H}}_\varepsilon^n(A) \leq \sigma(n) \overline{\mathcal{H}}^n(A).$$

Nyní je potřeba dokázat také druhou nerovnost $\overline{\mathcal{L}}^n \geq \sigma(n) \overline{\mathcal{H}}^n$.

Ukažme první, že existuje taková konstanta K , pro kterou platí $\sigma(n) \overline{\mathcal{H}}^n(A) \leq K \overline{\mathcal{L}}^n(A)$ pro všechna $A \subset \mathbb{R}^n$. Protože pro $A \subset \mathbb{R}^n$ takovou, že $\overline{\mathcal{L}}^n(A) = +\infty$ nerovnost platí triviálně, předpokládejme nyní, že pro dané A platí $\overline{\mathcal{L}}^n(A) < +\infty$. Pro každé $\varepsilon > 0$ nyní můžeme najít pokrytí množiny A pomocí shodných krychlí $\{P_j\}$ o straně l takové, že

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{L}}^n(A) + \varepsilon &\geq \sum_j \overline{\mathcal{L}}^n(P_j) = \sum_j l^n = \sum_j \left(\frac{\text{diam } P_j}{\sqrt{n}} \right)^n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n \sum_j (\text{diam } P_j)^n \\ &\geq \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n \overline{\mathcal{H}}_{\sqrt{nl}}^n(A) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Pokud nyní pošleme l k nule a potom také ε půjde k nule, tak dostáváme, že hledaná nerovnost platí a $K = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n$.

Využijme nyní toho, že pro každé ε můžeme najít takové krychlové pokrytí $\{P_j\}$, pro které $\text{diam } P_j < \delta$ a platí (3.1). Použitím Vitaliho podmínky (viz. [20]), která říká, že každé P_j můžeme nahradit sjednocením koulí $B_{j,k} \subset A$ tak, že

$$\overline{\mathcal{L}}^n \left(P_j \setminus \bigcup_k B_{j,k} \right) = 0. \quad (3.2)$$

Dostáváme tedy, že

$$\overline{\mathcal{L}}^n(A) + \varepsilon \geq \sum_{j,k} \overline{\mathcal{L}}^n(B_{j,k}) = \sigma(n) \sum_{j,k} (\text{diam } B_{j,k})^n \geq \sigma(n) \overline{\mathcal{H}}_\delta^n \left(\bigcup_{j,k} B_{j,k} \right).$$

Protože platí (3.1), tak z (3.2) vyplývá, že také $\overline{\mathcal{H}}^n(P_j \setminus \bigcup_k B_{j,k}) = 0$, a tedy i $\overline{\mathcal{H}}^n \left(\bigcup_j (P_j \setminus \bigcup_k B_k) \right) = 0$. Dále také můžeme odvodit, že

$$\overline{\mathcal{H}}_\delta^n \left(\bigcup_{j,k} B_{j,k} \right) = \overline{\mathcal{H}}_\delta^n \left(\bigcup_j P_j \right) - \overline{\mathcal{H}}_\delta^n \left(\bigcup_j (P_j \setminus \bigcup_k B_k) \right) = \overline{\mathcal{H}}_\delta^n \left(\bigcup_j P_j \right) \geq \overline{\mathcal{H}}_\delta^n(A).$$

Dohromady tedy máme $\overline{\mathcal{L}}^n(A) + \varepsilon \geq \sigma(n) \overline{\mathcal{H}}_\delta^n(A)$. Odtud už pro δ a ε jdoucí k nule dostáváme nerovnost $\overline{\mathcal{L}}^n(A) \geq \sigma(n) \overline{\mathcal{H}}^n(A)$. \square

Poznámka 3.1.5. Konstantu $\sigma(s)$ ve tvrzení Věty 3.1.4 je možné zobecnit i pro jiná než přirozená s , viz [20]. Někdy je verze obsahující tuto konstantu dokonce uváděna přímo jako definice Hausdorffovy míry. To ve skutečnosti nezpůsobuje mnoho problémů, protože vlastnosti zůstávají zachovány, pouze hodnoty se liší o konstantu. Funkce $\sigma(s)$ má potom tvar

$$\sigma(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{2^s \Gamma(\frac{s}{2} + 1)}, \text{ kde } \Gamma(t) = \int_0^\infty \exp^{-x} x^{t-1} dx.$$

My ale tento tvar dále využívat nebudeme.

3.2 Hausdorffův integrál

Definice 3.2.1. Buď S, T metrické prostory, $\mathcal{A}_S, \mathcal{A}_T$ σ -algebry na S resp. T a μ_S, μ_T míry na S resp. T . Zobrazení $f : S \rightarrow T$ nazveme μ -měřitelné pokud pro všechna $Y \in \mathcal{A}_T$ platí $f^{-1}(Y) \in \mathcal{A}_S$.

Speciálně pokud $g : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, pak g nazýváme měřitelné zobrazení, pokud je měřitelné vůči borelovské σ -algebře na $\overline{\mathbb{R}}$ a standardní topologii dané otevřenými intervaly.

Definice 3.2.2. Nechť S je metrický prostor s mírou \mathcal{H}^s a \mathcal{A} je jeho σ -algebra \mathcal{H}^s -měřitelných množin, s libovolné kladné a necht' $A \in \mathcal{A}$ je \mathcal{H}^s -měřitelná množina.

1. Buď $p : A \rightarrow [0, +\infty)$ stupňovitá funkce ve tvaru $p = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$, kde $\alpha_i \in [0, +\infty)$ a $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ jsou \mathcal{H}^s -měřitelné. Hausdorffův integrál z funkce p přes množinu A je číslo $\int_A p d\mathcal{H}^s \in [0, +\infty]$ definované jako

$$\int_A p d\mathcal{H}^s := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{H}^s(A_i).$$

2. Buď $f : A \rightarrow [0, +\infty]$ \mathcal{H}^s -měřitelná funkce. Pak Hausdorffův integrál z funkce f přes množinu $A \in \mathcal{A}$ je číslo $\int_A f d\mathcal{H}^s \in [0, +\infty]$ definované jako

$$\int_A f d\mathcal{H}^s := \sup_{p \leq f} \int_A p d\mathcal{H}^s,$$

kde supremum bereme přes všechny \mathcal{H}^s -měřitelné stupňovité funkce $p : S \rightarrow [0, +\infty]$ takové, že platí $p(x) \leq f(x)$ pro všechna $x \in S$.

Korektnost definice a detaily pro stupňovité funkce je možné nalézt v [21, 22]. Nyní ukážeme základní vlastnosti takto definovaného Hausdorffova integrálu.

Věta 3.2.3. Nechť S je metrický prostor s mírou \mathcal{H}^s a \mathcal{A} je jeho σ -algebra \mathcal{H}^s -měřitelných množin. Necht' dále $f, g \geq 0$ jsou \mathcal{H}^s -měřitelné funkce a necht' $A \in \mathcal{A}$. Pak platí následující.

1. Pokud $f \leq g$, pak $\int_S f d\mathcal{H}^s \leq \int_S g d\mathcal{H}^s$.
2. $\int_A f d\mathcal{H}^s = \int_S f \chi_A d\mathcal{H}^s$
3. Pokud $f(x) = 0$ pro všechna $x \in A$, pak $\int_A f d\mathcal{H}^s = 0$.
4. Pokud $\mathcal{H}^s(A) = 0$, pak $\int_A f d\mathcal{H}^s = 0$.
5. Pokud $A, B \in \mathcal{A}$ a $A \subset B$, pak $\int_A f d\mathcal{H}^s \leq \int_B f d\mathcal{H}^s$.

6. Pokud $c \in [0, +\infty)$, pak $\int_A c \cdot f \, d\mathcal{H}^s = c \int_A f \, d\mathcal{H}^s$.

Důkaz. 1. Nechť $p : S \rightarrow [0, +\infty)$ je stupňovitá funkce taková, že $p \leq f$. Potom také $p \leq g$, a tedy z definice integrálu platí

$$\int_S p \, d\mathcal{H}^s \leq \int_S g \, d\mathcal{H}^s.$$

Jestliže nyní vezmeme supremum přes všechny stupňovité funkce, pro které platí $p \leq f$, pak $\int_S f \, d\mathcal{H}^s \leq \int_S g \, d\mathcal{H}^s$.

2. Přímo z definice integrálu můžeme psát

$$\int_A f \, d\mathcal{H}^s = \sup_{p \leq f} \int_A p \, d\mathcal{H}^s = \sup_{p \leq f} \int_S p \chi_A \, d\mathcal{H}^s = \sup_{t \leq f \chi_A} \int_S t \, d\mathcal{H}^s = \int_S f \chi_A \, d\mathcal{H}^s,$$

kde p, t jsou stupňovité funkce.

3. Využijeme již dokázaný bod **1**, kde volíme $g \equiv 0$ a z definice integrálu platí $0 \leq \int_A f \, d\mathcal{H}^s$. Z toho už plyne hledaná rovnost.

4. Pro všechny stupňovité funkce z předpokladu platí $\int_A p \, d\mathcal{H}^s = 0$, protože $\mathcal{H}^s(A) = 0$ a tedy i supremum přes všechny tyto stupňovité funkce je nulové.

5. Víme, že $f \chi_A \leq f \chi_B$ pro $f \geq 0$, pokud $A \subset B$. Díky tomu využitím bodů **1**, **2** dostáváme

$$\int_A f \, d\mathcal{H}^s = \int_S f \chi_A \, d\mathcal{H}^s \leq \int_S f \chi_B \, d\mathcal{H}^s = \int_B f \, d\mathcal{H}^s.$$

6. Pro všechny stupňovité funkce p z definice Hausdorffova integrálu pro funkci f platí

$$\int_A c \cdot p \, d\mathcal{H}^s = \sum_{i=1}^n c \alpha_i \mathcal{H}^s(A_i) = c \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{H}^s(A_i) = c \int_A p \, d\mathcal{H}^s.$$

□

Je zřejmé, že všechny základní vlastnosti jsou odvozeny od typu konstrukce integrálu, ne od vlastností míry samotné. Díky tomu jsou tyto vlastnosti pro Hausdorffův integrál shodné s vlastnostmi Lebesgueova integrálu. Uvedeme si ještě některé další vlastnosti, jejichž důkazy ale nyní nebudeme uvádět. Důkazy je možné provést analogicky k důkazům těchto vlastností pro Lebesgueův integrál. Např. viz [21, 23, 22].

Věta 3.2.4. Nechť S je metrický prostor s mírou \mathcal{H}^s a \mathcal{A} je jeho σ -algebra \mathcal{H}^s -měřitelných množin.

1. Pokud $f, g : S \rightarrow [0, +\infty)$ jsou \mathcal{H}^s -měřitelné a $A \in \mathcal{A}$, pak

$$\int_A (f + g) \, d\mathcal{H}^s = \int_A f \, d\mathcal{H}^s + \int_A g \, d\mathcal{H}^s.$$

2. Nechť $f_n : S \rightarrow [0, +\infty)$ je posloupnost \mathcal{H}^s -měřitelných funkcí. Definujme $f : S \rightarrow [0, +\infty]$ tak, že $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ pro $x \in S$. Pak $f : S \rightarrow [0, +\infty)$ je \mathcal{H}^s -měřitelná a pro všechna $A \in \mathcal{A}$ platí

$$\int_A f \, d\mathcal{H}^s = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_A f_n \, d\mathcal{H}^s.$$

3. Pokud $f : S \rightarrow [0, +\infty)$ je \mathcal{H}^s -měřitelná funkce a $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ je posloupnost po dvou disjunktálních \mathcal{H}^s -měřitelných množin, pak

$$\int_A f \, d\mathcal{H}^s = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f \, d\mathcal{H}^s,$$

kde $A := \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$.

Hausdorffův integrál je samozřejmě možné zobecnit také pro funkce, které nabývají i jiných než kladných hodnot, stejně jako to bylo možné pro Lebesgueův integrál.

Definice 3.2.5. Hausdorffův integrál

Nechť S je metrický prostor s mírou \mathcal{H}^s a \mathcal{A} je jeho σ -algebra \mathcal{H}^s -měřitelných množin, $A \in \mathcal{A}$. Mějme dále funkci $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a k ní přidružené funkce $f^\pm : A \rightarrow [0, +\infty)$, které jsou definovány jako $f^+(x) := \max\{f(x), 0\}$ a $f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}$.

Pokud alespoň jeden z Hausdorffových integrálů $\int_A f^+ \, d\mathcal{H}^s$ a $\int_A f^- \, d\mathcal{H}^s$ je konečný, pak definujeme $\int_A f^+ \, d\mathcal{H}^s - \int_A f^- \, d\mathcal{H}^s$ a pokládáme

$$\int_A f \, d\mathcal{H}^s = \int_A f^+ \, d\mathcal{H}^s - \int_A f^- \, d\mathcal{H}^s.$$

V případě, že oba integrály $\int_A f^+ \, d\mathcal{H}^s$ a $\int_A f^- \, d\mathcal{H}^s$ jsou nekonečné, pak $\int_A f \, d\mathcal{H}^s$ je nedefinovaný.

Definice 3.2.6. Nechť S je metrický prostor s mírou \mathcal{H}^s a \mathcal{A} je jeho σ -algebra \mathcal{H}^s -měřitelných množin. Funkce $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá \mathcal{H}^s -integrabilní, pokud f je \mathcal{H}^s -měřitelná a platí, že Hausdorffův integrál $\int_S |f| \, d\mathcal{H}^s$ je konečný.

Obdobně jako v předchozím případě je možné podle postupu pro Lebesgueův integrál dokázat následující vlastnosti.

Věta 3.2.7. Nechť S je metrický prostor s mírou \mathcal{H}^s a \mathcal{A} je jeho σ -algebra \mathcal{H}^s -měřitelných množin. Pak platí následující.

1. Množina všech \mathcal{H}^s -integrabilních funkcí je reálný vektorový prostor a pro všechna $A \in \mathcal{A}$ platí, že pokud máme \mathcal{H}^s -integrabilní funkce f, g a $c \in \mathbb{R}$, pak také $f + g, cf$ jsou \mathcal{H}^s -integrabilní funkce a platí

$$\int_A (f + g) \, d\mathcal{H}^s = \int_A f \, d\mathcal{H}^s + \int_A g \, d\mathcal{H}^s, \quad \int_A cf \, d\mathcal{H}^s = c \int_A f \, d\mathcal{H}^s.$$

2. Pro všechny f, g \mathcal{H}^s -integrabilní funkce a pro všechna $A \in \mathcal{A}$ platí, že pokud $f \leq g$ na A , pak $\int_A f \, d\mathcal{H}^s \leq \int_A g \, d\mathcal{H}^s$.
3. Pokud f je \mathcal{H}^s -integrabilní, pak také $|f|$ je \mathcal{H}^s -měřitelná a pro všechna $A \in \mathcal{A}$ platí $\left| \int_A f \, d\mathcal{H}^s \right| \leq \int_A |f| \, d\mathcal{H}^s$.
4. Pokud f je \mathcal{H}^s -integrabilní funkce a A_1, A_2, A_3, \dots je posloupnost po dvou disjunktálních měřitelných množin takových, že $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, pak

$$\int_A f \, d\mathcal{H}^s = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{A_n} f \, d\mathcal{H}^s.$$

5. Pro všechna $A \in \mathcal{A}$ a všechny \mathcal{H}^s -integrabilní funkce f platí $\int_A f \, d\mathcal{H}^s = \int_S f \chi_A \, d\mathcal{H}^s$.
6. Nechť $A \in \mathcal{A}$ a f je \mathcal{H}^s -integrabilní funkce. Pokud $\mathcal{H}^s(A) = 0$ nebo $f|_A = 0$, pak $\int_A f \, d\mathcal{H}^s = 0$.

Věta 3.2.8. Buď $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ lineární zobrazení na této množině ve tvaru $h(x) = mx + n$, kde $m \geq 0$, $n \in \mathbb{R}$ a f je \mathcal{H}^s -integrabilní funkce na $[h(a), h(b)]$.

$$\int_{h(a)}^{h(b)} f(x) \, d\mathcal{H}^s = m^s \int_a^b f(h(x)) \, d\mathcal{H}^s. \quad (3.3)$$

Důkaz. První rovnost ukážeme pro charakteristické funkce uzavřených intervalů. To pak lze z linearity rozšířit i na otevřené intervaly a dále na stupňovité funkce. Díky tomu pak rovnost platí i pro $f \geq 0$. Pro obecné funkce pak opět z linearity platí rovnost zvláště pro f^+ , f^- a jejich součtem pak dostaneme hledanou rovnost v obecné podobě, jak jsme ji vyslovili. Berme tedy interval $[c, d] \subseteq [h(a), h(b)] = [ma + n, mb + n]$. Potom platí

$$\int_{h(a)}^{h(b)} \chi_{[c,d]}(x) \, d\mathcal{H}^s = \int_c^d 1 \, d\mathcal{H}^s = (d - c)^s. \quad (3.4)$$

Zároveň ale také máme

$$\begin{aligned} m^s \int_a^b \chi_{[c,d]}(h(x)) \, d\mathcal{H}^s &= m^s \int_a^b \chi_{[c,d]}(mx + n) \, d\mathcal{H}^s \\ &= m^s \int_a^b \chi_{[\frac{1}{m}c - n, \frac{1}{m}d - n]}(x) \, d\mathcal{H}^s = m^s \int_{\frac{1}{m}c - n}^{\frac{1}{m}d - n} 1 \, d\mathcal{H}^s \\ &= m^s \left(\frac{1}{m}d - n - \left(\frac{1}{m}c - n \right) \right)^s = (d - c)^s. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Jelikož jsou si výrazy (3.4), (3.5) rovny, dostáváme hledané tvrzení. \square

Rádi bychom větu o substituci v Hausdorffově integrálu zobecnili. Uvádíme ji však pouze jako hypotézu.

Hypotéza 3.2.9. Buď M \mathcal{H}^s -měřitelná množina na \mathbb{R}^n pro nějaké $s > 0$ a $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ zobrazení na této množině. Pak pro všechna $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ reprezentující rotaci, zrcadlení, škálování ve všech směrech stejným faktorem, ozn. $a \in (0, +\infty)$, nebo jejich kombinaci a $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ platí následující

$$\int_{\mathbb{A}M + \vec{b}} f(\vec{x}) \, d\mathcal{H}^s = a^s \int_M f(\mathbb{A}\vec{x}) \, d\mathcal{H}^s. \quad (3.6)$$

Další vlastnost, kterou je zajímavé zkoumat, je analogie k Fubiniho teorému pro Lebesgueův integrál. Předpokládali jsme, že by taková analogie mohla existovat pouze s úpravami, které by vzaly v úvahu průměr dané množiny. Ukázalo se však, že toto není možné. Jako protipříklad uvedeme Hausdorffův integrál z 1 na čtverci.

Příklad 3.2.10. Chceme-li spočítat Hausdorffův integrál ze čtverce, bereme v úvahu nejjednodušší možnost a to $S = [0, 1]^2$. Uvažujme nyní systém iterovaných funkcí, který

obsahuje čtyři funkce (f_1, f_2, f_3, f_4) , $f_i : (0, 1)^2 \rightarrow (0, 1)^2$ v následujícím tvaru. Pro $\vec{x} \in [0, 1]^2$

$$\begin{aligned} f_1(\vec{x}) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & f_2(\vec{x}) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix} \\ f_3(\vec{x}) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix} & f_4(\vec{x}) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tento systém iterovaných funkcí zobrazí čtverec sám na sebe a v této kombinaci splňuje podmínku otevřenosti. Aby byla podmínka splněna stačí brát vnitřek čtverce a obrazy pak budou mít požadované vlastnosti. Dle Věty 1.7.5 tedy podobnostní dimenze této množiny odpovídá dimenzi Hausdorffově. Podobnostní a tedy i Hausdorffova dimenze je v tomto případě rovna $\dim_{\mathcal{H}}(S) = s = \frac{\log 4}{\log 2} = 2$.

Hausdorffova dimenze je tedy přirozené číslo a dle Věty 3.1.4 platí vztah mezi Hausdorffovou a Lebesgueovou mírou.

$$\int_S 1 \, d\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}^2(S) = \frac{1}{\sigma(2)} \mathcal{L}^2(S) = \frac{4}{\pi} \quad (3.7)$$

Nyní spočítáme zvlášť integrál z úsečky $[0, 1]$ obdobným způsobem, kdy použijeme jako IFS dvě funkce $f_1(x) = \frac{1}{2}x$, $f_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Takto opět splníme podmínku otevřenosti a $\dim_{\mathcal{H}} = 1$.

$$\int_0^1 1 \, d\mathcal{H}^1 = \mathcal{H}^1([0, 1]) = \frac{1}{\sigma(1)} \mathcal{L}^1([0, 1]) = 1 \quad (3.8)$$

Odtud už je zřejmé, že $\int_S 1 \, d\mathcal{H}^2 \neq \int_0^1 1 \, d\mathcal{H}^1 \int_0^1 1 \, d\mathcal{H}^1$ a dokonce ani

$$\int_S 1 \, d\mathcal{H}^2 \neq (\text{diam } S)^2 \int_0^1 1 \, d\mathcal{H}^1 \int_0^1 1 \, d\mathcal{H}^1.$$

Obdoby Fubiniho teorému, je pro Hausdorffovu míru samozřejmě možné hledat, ale není to jednoduché. Ve smyslu obecné míry a její konstrukce se tím zabývali např. K. J. Falconer a R. D. Mauldin v [24], další částečné výsledky je možné najít v [12].

3.3 Hausdorffova míra vybraných množin

Hodnoty Hausdorffovy míry množin jsou známé jen vzácně, protože najít ideální pokrytí určující její hodnotu je velmi obtížné a v některých případech dokonce nemožné. Jednou z nemnoha výjimek, pro kterou je Hausdorffova míra známá, je Cantorovo diskontinuum. Hodnoty Hausdorffovy míry pro Sierpiňského trojúhelník a Kochovu křivku jsou zkoumány již od roku 1987, jejich přesná hodnota je však dodnes neznámá.

Pro jednoduché množiny (nefraktálního charakteru) jako jsou například kruh nebo čtverec, dokážeme Hausdorffovu míru získat jednoduše. Díky Větě 3.1.4 se totiž normalizovaná Hausdorffova 2-rozměrná míra rovná odpovídající míře Lebesgueově. Jak už jsme ukázali, pro čtverec o straně délky 1 platí, že Hausdorffova míra je rovna $\frac{4}{\pi}$. Pro kruh o průměru jedna pak dostaneme, že Hausdorffova 2-rozměrná míra je rovna 1. Obdobně bychom mohli pokračovat do vyšších dimenzí, které odpovídají přirozeným číslům, a zkoumat zde jednoduchá tělesa.

3.3.1 Cantorovo diskontinuum

Tato množina byla zkoumána už od konce devatenáctého století, a díky tomu jsou její vlastnosti dobře popsány. Systém iterovaných funkcí této množiny evidentně splňuje podmínku otevřenosti (1.1), jelikož obrazy jednotlivých zobrazení pro Cantorovu množinu jsou disjunktní. Známe tedy Hausdorffovu dimenzi a ta je rovna $s = \frac{\log 2}{\log 3}$.

Nyní uvedeme hodnotu Hausdorffovy míry pro Cantorovo diskontinuum a její důkaz podle [25].

Věta 3.3.1. Pro Cantorovo diskontinuum platí $\mathcal{H}^s(C) = 1$, kde s odpovídá Hausdorffově dimenzi Cantorova diskontinua, tj. $s = \frac{\log 2}{\log 3}$.

Důkaz. Nejdříve chceme ukázat, že $\mathcal{H}^s(C) \leq 1$. Víme, že pro libovolné k můžeme Cantorovu množinu pokrýt 2^k intervaly o délce 3^{-k} . Dostáváme tedy, že $\mathcal{H}_{3^{-k}}^s(C) \leq 2^k 3^{-sk} = 2^k 2^{-k} = 1$ a pro $k \rightarrow +\infty$ dostáváme hledanou nerovnost.

Nyní potřebujeme dokázat také opačnou nerovnost. Ukážeme, že pro libovolnou množinu intervalů \mathcal{J} pokrývající C platí

$$1 \leq \sum_{I \in \mathcal{J}} |I|^s. \quad (3.9)$$

Jestliže každý interval nepatrně zvětšíme a použijeme-li kompaktnosti C , stačí danou nerovnost ukázat pro uzavřené intervaly. Dále budeme brát nejmenší intervaly $I \in \mathcal{J}$ takové, které obsahují dvojici intervalů Δ', Δ'' z konstrukce C (ne nutně náležící do stejného C_k). Pokud jsou Δ', Δ'' největší takové intervaly, pak se I nutně skládá z intervalu Δ' následovaného intervalem J a po něm intervalem Δ'' , kde interval J je součástí doplňku k množině C v \mathbb{R} . Z konstrukce C_k je jasné, že $|\Delta'|, |\Delta''| \leq |J|$. Odtud plyne, že $|J| \geq \frac{1}{2}|\Delta'| + \frac{1}{2}|\Delta''| = \frac{1}{2}(|\Delta'| + |\Delta''|)$. S použitím konkavity funkce x^s tedy můžeme odvodit následující

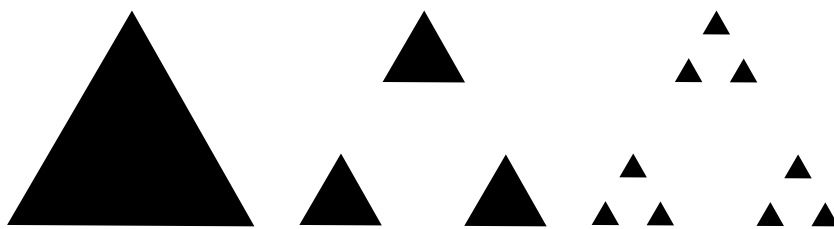
$$\begin{aligned} |I|^s &= (|\Delta'| + |J| + |\Delta''|)^s \geq \left(\frac{3}{2}(|\Delta'| + |\Delta''|)\right)^s = 2 \left(\frac{1}{2}|\Delta'| + \frac{1}{2}|\Delta''|\right)^s \\ &\geq 2 \left(\frac{1}{2}|\Delta'|^s + \frac{1}{2}|\Delta''|^s\right) = |\Delta'|^s + |\Delta''|^s. \end{aligned}$$

Pokud nyní nahradíme interval I v sumě intervaly Δ', Δ'' , tak sumu (3.9) určitě nezvětšíme. Takto postupně nahrazujeme intervaly, abychom po konečném počtu kroků dostali pokrytí pomocí intervalů délky 3^{-k} , pro nějaké k . Tyto intervaly nutně obsahují všechny intervaly C_k . Proto pro toto pokrytí platí (3.9), a tedy tato nerovnost platí i pro původní pokrytí \mathcal{J} . \square

Cantorova množina je velmi důležitá, protože její obdoby se kromě samotné teorie fraktálů objevují také např. v teorii čísel nebo při zpracování signálu. Proto se zkoumá nejenom základní Cantorova množina, ale také mnoho dalších podobných množin, které vznikají podobně, jen nutně nemusí být vyjmuta přesně prostřední třetina intervalu, viz např. [26].

3.3.2 Sierpińského trojúhelník a podobně konstruované množiny

Hausdorffova míra Sierpińského trojúhelníku není doposud známá, existují pouze odhady pro míru této množiny, které jsou shrnuty v článku [27]. Ten nám dává pro Sierpińského trojúhelník odhad $0,77 \leq \mathcal{H}^s(S) \leq 0,81794$, kde $s = \frac{\log 3}{\log 2}$. I přesto ale můžeme hledat Hausdorffovu míru množin, které mají obdobnou konstrukci jako Sierpińského trojúhelník,



OBRÁZEK 3.1: Konstrukce Sierpiňského trojúhelníku pro $q = \frac{1}{3}$

ale používají jiné zmenšení než $\frac{1}{2}$. Podmínkou ale je, že jejich Hausdorffova dimenze je rovna 1. To v případě, že hledáme míru množiny, která je invariantní množinou nějakého IFS, který splňuje podmínku otevřenosti (1.1) a má pro všechny funkce stejné podobnostní koeficienty, znamená, že tyto koeficienty odpovídají převrácené hodnotě počtu funkcí v systému iterovaných funkcí.

Jednu z těchto množin je možné konstruovat přímo na rovnostranném trojúhelníku. Jediný rozdíl v konstrukci oproti klasickému Sierpiňského trojúhelníku je v tom, že používáme podobnostní koeficient $\frac{1}{3}$, viz. Obrázek 3.1.

V článku [28] je ukázáno, že hodnota Hausdorffovy míry pro tuto množinu je rovna 1 pro $s = 1$. Hodnota Hausdorffovy míry se určuje pomocí dvou nerovností, jednu z nich lze jednoduše nahlédnout a její důkaz si předvedeme v následujícím lemmatu, druhá nerovnost je zdlouhavá a obsahuje diskuzi mnoha případů a je možné ji najít ve výše zmíněném článku.

Lemma 3.3.2. Pro Sierpiňského trojúhelník T používající ke konstrukci zmenšení $\frac{1}{3}$ platí $\overline{\mathcal{H}}^s(T) \leq 1$ pro $s = -\frac{\log 3}{\log \frac{1}{3}} = 1$.

Důkaz: V tomto případě je více možností, jak danou nerovnost dokázat. Nejjednodušší způsob vychází z konstrukce vnější míry, pro tu totiž přímo platí, že

$$\overline{\mathcal{H}}^s(T) \leq (\text{diam } T)^s = 1.$$

Druhou možností, kterou je obecně možné použít pro systémy iterovaných funkcí, je uvědomit si, že v k -té iteraci jsme schopni danou množinu pokrýt zmenšeninami původní množiny, v tomto případě trojúhelníky, které mají průměr $\text{diam } T \cdot \frac{1}{3^k} = 3^{-k}$ a těchto množin je 3^k . Pro Hausdorffovu míru pak dostaneme

$$\overline{\mathcal{H}}^s(T) \leq 3^k \cdot 3^{-sk} = 1.$$

Tento postup jsme použili i v předchozím případě pro Cantorovo diskontinuum. \square

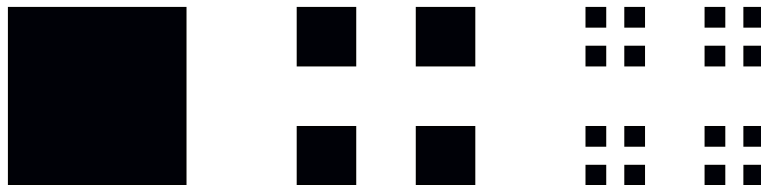
Oba tyto postupy je možné použít obecně pro libovolné systémy iterovaných funkcí a jejich invariantní množiny.

Nyní ještě zmíníme Cantorův prach, který je obdobou Cantorova diskontinua v \mathbb{R}^2 , viz Obrázek 3.2. Přesněji řečeno Cantorův prach je kartézský součin dvou Cantorových množin. Pro klasický Cantorův prach, ozn. D , hodnotu Hausdorffovy míry neznáme. Existují odhady této míry, které jsou shrnuty v článku [29]. Platí tedy

$$1,48329 \leq \mathcal{H}^s(D) \leq 1,500886,$$

pro $s = \frac{\log 4}{\log 3}$, které odpovídá Hausdorffově dimenzi této množiny. Předpokládaná hodnota Hausdorffovy míry by měla být blízko horního odhadu.

Pokud ke konstrukci Cantorova prachu použijeme zobrazení, které mají koeficient zmenšení roven $\frac{1}{4}$, pak dle článku [30] dostáváme, že Hausdorffova míra takové množiny, ozn. K , je rovna $\mathcal{H}^s(K) = (\text{diam } K)^s = \sqrt{2}$ pro $s = \dim_{\mathcal{H}} = 1$. Pokud bychom použili postup uvedený v předchozím lemmatu, dostali bychom právě horní odhad Hausdorffovy míry rovný $\sqrt{2}$.



OBRÁZEK 3.2: Konstrukce klasického Cantorova prachu

Poslední množinou, kterou zde zmíníme a jejíž Hausdorffova míra je doposud neznámá, ale která byla podrobena zkoumání, je Kochova křivka. Její Hausdorffova dimenze odpovídá $\frac{\log 4}{\log 3}$, což je stejné jako pro Cantorův prach. V tomto případě je Hausdorffova míra odhadnuta shora a to hodnotou 0,5890, viz. [31].

3.3.3 Otevřené problémy

Na závěr této kapitoly shrneme dosud otevřené otázky, které byly představeny v [32]. Základní otázkou se stává to, za jakých podmínek existuje pokrytí $\{U_i\}_{i=1}^n$ množiny $A \subseteq S$, pro $n \in \mathbb{N}$, kde S je metrický prostor, pro které platí $\mathcal{H}^s(A) = \sum_{i=1}^n (\text{diam } U_i)^s$. Takovéto pokrytí nazýváme nejlepší pokrytí množiny A . Hned následující otázkou pak je, zda pokud existuje nejlepší pokrytí, jestli je pak přirozené pokrytí zároveň nejlepším pokrytím. Přirozené pokrytí ve smyslu systémů iterovaných funkcí je původní množina, jejíž podmnožinou je invariantní množina daného IFS. Přirozeným pokrytím pro Cantorovu množinu je uzavřený interval $[0, 1]$, pro všechny varianty Sierpiňského trojúhelníků je to trojúhelník s vrcholy v bodech $[0, 0]$, $[0, 1]$, $[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$, pro Cantorův prach a jeho varianty je to pak čtverec o straně délky jedna s vrcholem v počátku souřadnicového systému. Pro Cantorovu množinu platí, že přirozené pokrytí je zároveň nejlepším pokrytím. Stejně tak je toto pravda pro Sierpiňského trojúhelník při použití zmenšení $\frac{1}{3}$ a pro Cantorův prach při použití zmenšení $\frac{1}{4}$. Tato otázka je však spojená také s termínem hustoty příp. horní konvexní hustoty, viz. [32], nebo funkcemi inverzní hustoty, viz. [16].

Definice 3.3.3. Necht (f_1, \dots, f_m) , $m \in \mathbb{N}$ je nějaký systém iterovaných funkcí na \mathbb{R}^n a $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je invariantní množina tohoto IFS. Pak definujeme přirozenou pravděpodobnostní míru na množině A pro borelovské množiny B v \mathbb{R}^n jako

$$\mu(B) = \frac{\mathcal{H}^s(A \cap B)}{\mathcal{H}^s(A)}.$$

Definujeme dále horní konvexní hustotu množiny A v bodě $x \in A$, ozn. $d : \mathcal{C} \rightarrow [0, +\infty]$, kde \mathcal{C} je systém všech kompaktních neprázdných konvexních množin, $C_x \in \mathcal{C}$, $x \in C_x$, jako

$$d(A, x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\text{diam } C_x \leq \delta} \frac{\mu(C_x)}{(\text{diam } C_x)^s}.$$

Otázkou pak je, kdy jsme schopni najít takové C_x , že $d(A, x) = \frac{\mu(C_x)}{(\text{diam } C_x)^s}$. Tím se pak dostáváme k závěrečné otázce a to za jakých podmínek platí, že $\mathcal{H}^s(A) = (\text{diam } A)^s$? Pro

Cantorovu množinu a modifikovaný Sierpiňského trojúhelník, který jsme zmínili výše, toto opět platí. Autoři článku [32] předkládají domněnky, že pokud je Hausdorffova dimenze větší než jedna, pak nejsme schopni najít nejlepší pokrytí a platí $\mathcal{H}^s(A) < (\text{diam } A)^s$. Domnívají se také, že pakliže existuje nejlepší pokrytí dané množiny, pak také platí rovnost $\mathcal{H}^s(A) = (\text{diam } A)^s$.

Za jakých podmínek může být dosaženo rovnosti $\mathcal{H}^s(A) = (\text{diam } A)^s$ bylo dále zkoumáno. Již v roce 1987 ukázal J. Marion v [33], že pakliže IFS splňuje podmínku otevřenosti, pak platí $\mathcal{H}^s(A) \leq (\text{diam } A)^s$, kde A je invariantní množina daného IFS. V článku [34] pak bylo pro množiny Cantorova typu na přímce ukázáno, jak najít interval, který maximalizuje hustotu, a dokonce jak najít systém iterovaných funkcí, aby $\mathcal{H}^s(A) = (\text{diam } A)^s$. Na to pak bylo navázáno v [35], kde bylo dokázáno, že pro libovolné $s \in (0, d)$ a $c \in (0, 1)$ existuje množina $A \subset \mathbb{R}^d$ taková, že $\mathcal{H}^s(A) = c(\text{diam } A)^s$.

3.4 Hodnoty Hausdorffova integrálu

Protože známe Hausdorffovu míru Cantorova diskontinua, je možné určit také hodnoty Hausdorffova integrálu pro některé funkce.

Poznámka 3.4.1. Z Věty 3.3.1 přímo plyne, že $\int_C 1 \, d\mathcal{H}^s = 1$ pro $s = \frac{\log 2}{\log 3}$, protože $\mathcal{H}^s(C) = 1$.

Zaměříme se první na funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$, pro kterou jsme také schopni najít hodnotu integrálu. Postup vychází z článku [36].

Příklad 3.4.2. Integrál pro $f(x) = x$ na Cantorově diskontinuu

Chceme ukázat, že $\int_C x \, d\mathcal{H}^{s_0} = \frac{1}{2}$, kde $s_0 = \dim_{\mathcal{H}} C = \frac{\log 2}{\log 3}$.

$$\int_C f(x) \, d\mathcal{H}^s = \int_{C \cap \Delta_0} f(x) \, d\mathcal{H}^s + \int_{C \cap \Delta_1} f(x) \, d\mathcal{H}^s.$$

Použijeme dále podle Věty 3.2.8 pro první část substituci $x = \frac{1}{3}y$ a pro druhou část $x = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int_C x \, d\mathcal{H}^s(x) &= \left(\frac{1}{3}\right)^s \int_C \frac{1}{3}y \, d\mathcal{H}^s(y) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \int_C \frac{1}{3}y + \frac{2}{3} \, d\mathcal{H}^s(y) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^s \int_C y \, d\mathcal{H}^s(y) + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^s \underbrace{\int_C 1 \, d\mathcal{H}^s}_{\overline{\mathcal{H}^s(C)}=1}. \end{aligned}$$

Pokud nyní položíme $s = s_0$, pak $\left(\frac{1}{3}\right)^{s_0} = \frac{1}{2}$, a tedy

$$\int_C x \, d\mathcal{H}^{s_0} = \frac{1}{3} \int_C x \, d\mathcal{H}^{s_0} + \frac{1}{3}.$$

Odtud už dostáváme hledaný výsledek, tj. $\int_C x \, d\mathcal{H}^{s_0} = \frac{1}{2}$.

Ze samotné definice Hausdorffova integrálu plyne, že je možné také použít aproximaci integrálu pomocí integrální sumy. Tento způsob nyní ukážeme jako druhou možnost pro Cantorovo diskontinuum.

Příklad 3.4.3. Integrál pro $f(x) = x$ na Cantorově diskontinuu - aproximace integrální sumou

Zavedeme $c_{i_1, \dots, i_n} = \Delta_{i_1, \dots, i_n} \cap C$. Berme hodnotu $f(x)$ v levém kraji zvoleného intervalu c_{i_1, \dots, i_n} tj. v bodě

$$x_{i_1, \dots, i_n} = \sum_{j=1}^n \frac{2i_j}{3^j}.$$

Víme, že $\text{diam } c_{i_1, \dots, i_n} = \frac{1}{3^n}$ a $f(x) = x$. Proto odhad pomocí integrální sumy pro obecné s vypadá následovně

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i_j \in \{0,1\} \\ j \in \hat{n}}} f(x_{i_1, \dots, i_n}) \text{diam}(c_{i_1, \dots, i_n})^s &= \sum_{\substack{i_j \in \{0,1\} \\ j \in \hat{n}}} x_{i_1, \dots, i_n} \text{diam}(c_{i_1, \dots, i_n})^s \\ &= \sum_{\substack{i_j \in \{0,1\} \\ j \in \hat{n}}} \left(\sum_{j=1}^n \frac{2i_j}{3^j} \right) \left(\frac{1}{3^n} \right)^s = S_n \end{aligned}$$

Pokud použijeme výsledky a postup uvedené v závěrečné části článku [36], pak lze S_n lze také zapsat jako

$$S_n = \frac{2}{3^{s+1}} S_{n-1} + 2^{n-1} \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(3^s)^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3^s} S_{n-1} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3^s} \right)^n.$$

Dosažením za s a provedením limity pro $n \rightarrow \infty$ dostáváme

$$\begin{array}{lll} \text{pro } s = s_0 & S = \frac{1}{3}S + \frac{1}{3} & \text{tj. } \int_C x \, d\mathcal{H}^{s_0} = \frac{1}{2}, \\ \text{pro } \frac{2}{3^s} > 1 & S = +\infty & \text{tj. } \int_C x \, d\mathcal{H}^s = +\infty, \\ \text{pro } \frac{2}{3^s} < 1 & S = 0 & \text{tj. } \int_C x \, d\mathcal{H}^s = 0. \end{array}$$

Pomocí této aproximace jsme dostali nejen hodnoty integrálu pro $s = \frac{\log 2}{\log 3}$, ale také pro ostatní hodnoty s . Tento výsledek není nijak překvapivý s ohledem na to, že podle Věty 1.7.5 může míra dané množiny mít jinou hodnotu než 0 nebo $+\infty$ pouze pro jednu hodnotu s .

Stejným postupem jako v příkladu 3.4.2 můžeme spočítat také hodnoty pro jiné funkce.

Příklad 3.4.4. Integrál pro $f(x) = x^2$ na Cantorově diskontinuu

Chceme spočítat hodnotu $\int_C x \, d\mathcal{H}^{s_0}$, kde stále $s_0 = \dim_{\mathcal{H}} C = \frac{\log 2}{\log 3}$. Stejně jako v prvním příkladu použijeme rozdělení integrálu na dvě části.

$$\int_C f(x) \, d\mathcal{H}^s = \int_{C \cap \Delta_0} f(x) \, d\mathcal{H}^s + \int_{C \cap \Delta_1} f(x) \, d\mathcal{H}^s$$

Použijeme také stejnou substituci, ta pro první část odpovídá $x = \frac{1}{3}y$ a pro druhou část $x = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int_C x^2 d\mathcal{H}^s(x) &= \left(\frac{1}{3}\right)^s \int_C \frac{1}{9}y^2 d\mathcal{H}^s(y) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \int_C \frac{1}{9}y^2 + \frac{4}{9}y + \frac{4}{9} d\mathcal{H}^s(y) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^s \left(\frac{2}{9} \int_C y^2 d\mathcal{H}^s(y) + \underbrace{\frac{4}{9} \int_C y^2 d\mathcal{H}^s(y)}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{4}{9} \int_C 1 d\mathcal{H}^s}_{=1} \right). \end{aligned}$$

Pokud nyní položíme $s = s_0$, pak $\left(\frac{1}{3}\right)^{s_0} = \frac{1}{2}$, a tedy

$$\int_C x^2 d\mathcal{H}^{s_0} = \frac{1}{9} \int_C x^2 d\mathcal{H}^{s_0} + \frac{3}{9}.$$

Výsledkem je tedy

$$\int_C x^2 d\mathcal{H}^{s_0} = \frac{3}{8}.$$

Tímto postupem bychom iterativně mohli dostat hodnotu integrálu pro libovolný polynom na Cantorově diskontinuu.

3.5 Numerický odhad Hausdorffova integrálu

Pro odhadnutí Hausdorffova integrálu chceme použít aproximaci integrální sumou. Pro invariantní množinu nějakého systému iterovaných funkcí můžeme použít chaotický algoritmus, abychom dostali její aproximaci a pro takto reprezentovanou množinu už můžeme integrální sumou aproximovat. Chceme tedy dostat odhad Hausdorffova integrálu pro funkci $f(x) : A \rightarrow \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ přes množinu A ve tvaru

$$\int_A f(x) d\mathcal{H}^s \approx \sum_{i=1}^m \alpha_i (\text{diam } A_i)^s, \quad (3.10)$$

kde $\bigcup_{i=1}^m A_i = A, A_i \cap A_j = \emptyset, m \in \mathbb{N}$ pro všechna $i \neq j$ a α_i reprezentuje hodnotu $f(x)$ na množině A_i .

Vždy musíme určit, ze které části množiny A_i budeme brát reprezentační hodnotu α_i , případně můžeme porovnat různé přístupy v tomto smyslu.

3.5.1 Jednoduché množiny

Začneme s odhadem míry a integrálu množin, na které jsme zvyklí v Euklidovské geometrii. První budeme zkoumat čtverec a kruh a na těchto množinách popíšeme postup, kterým jsme odhady prováděli, jeho výhody a nevýhody.

Pro čtverec víme, že hodnota jeho Hausdorffovy míry odpovídá $\frac{4}{\pi} \approx 1,2732$. Chtěli bychom tedy odhadnout integrál $\int_S 1 d\mathcal{H}^s$, kde $s = 2$ je Hausdorffova dimenze pro čtverec. Postupujeme podobně jako při odhadu mřížkové dimenze. Čtverec o straně délky 1 je reprezentován jako obrázek složený z pixelů. Ty můžeme zapsat pomocí matice obsahující jedničky a nuly podle toho, zda je daný pixel černý, a tedy množinu obsahuje, a proto zapisujeme jedničku, nebo zda je bílý, a tedy žádnou část množiny neobsahuje, a díky tomu do matice zapisujeme nulu. Podle velikosti rozlišení tedy dostáváme pokrytí pomocí čtverců o různé délce strany. Předpokládáme, že pro čtverec je pokrytí pomocí těchto

čtverců vhodné, protože respektuje tvar původní množiny. Jak bylo navrženo v článku [32], je možné, že pro tuto množinu nejlepší pokrytí neexistuje, protože její Hausdorffova dimenze je větší než jedna. V každém případě bychom s pomocí tohoto pokrytí ale měli dostat horní odhad. Každá pokrývací množina má délku strany $\frac{1}{\text{rozlišení}}$, a průměr každé z těchto pokrývacích množin tedy odpovídá $\frac{\sqrt{2}}{\text{rozlišení}}$. Protože integrujeme jedničku přes celou množinu, hodnota α_i z výrazu (3.10) je rovna ve všech případech 1.

Není tedy příliš překvapivé, že v tomto případě absolutně nezáleží na rozlišení, ozn. R , resp. hustotě sítě kterou k odhadu použijeme, protože

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i (\text{diam } A_i)^s = \sum_{i=1}^{R \cdot R} 1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{R} \right)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2.$$

Přesně tento výsledek jsme dostali i pomocí numerického odhadu. To tedy neodpovídá Hausdorffově míře čtverce, ale alespoň jsme dostali předpokládaný horní odhad. Vidíme však, že odhad je poměrně hrubý.

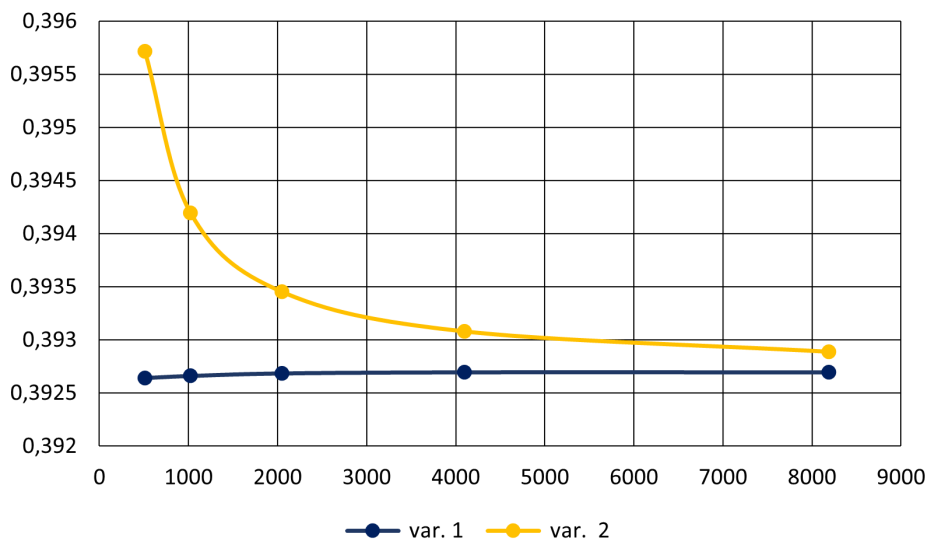
Můžeme se pokusit odhadnout i integrály pro jiné funkce než je identita. Pro takové integrály už však neznáme konkrétní hodnoty. Ve chvíli kdy budeme odhadovat hodnotu funkcí nějaké proměnné, je potřeba se rozhodnout, ze které části pokrývací množiny budeme brát reprezentační hodnotu. Protože pokrývací množiny mají tvar čtverce, zajímavé se zdá být srovnání pro reprezentační hodnotu z levého dolního rohu, pravého horního rohu a středu pokrývací množiny. V závislosti na typu funkce mohou být zajímavé srovnání i z jiných reprezentačních bodů, ale ve skutečnosti bychom ve všech případech měli směřovat ke stejné hodnotě. Budeme tedy zkoumat intergál pro funkci $f(\vec{x}) = x \cdot y$ na čtverci, kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Vezmeme-li reprezentační hodnotu z levého dolního rohu dostáváme odhad integrálu rovný 0,499, v případě, že reprezentujeme pravým horním rohem dostáváme 0,501 a v případě reprezentace pomocí středu pokrývací množiny dostáváme 0,499. Ve všech případech tato hodnota není závislá na rozlišení stejně, jako tomu bylo při integraci jedničky. I v tomto případě však bude pravděpodobně odhad nadhodnocený.

Obdobný odhad můžeme provést pro kruh, ozn. K . Pro kruh víme, že Hausdorffova 2-rozměrná míra odpovídá 1. V tomto případě už však nedostaneme pro každý numerický odhad stejnou hodnotu. To je způsobeno především tím, že kruh ve čtvercové síti nejsme nikdy schopni zobrazit dokonale. Dostali jsme následující hodnoty.

R	$\int_K 1 \, d\mathcal{H}^2$	$\int_K x \cdot y \, d\mathcal{H}^2$ var. 1	$\int_K x \cdot y \, d\mathcal{H}^2$ var. 2
512	1,57058	0,392641	0,392889
1024	1,57065	0,392661	0,393081
2048	1,57075	0,392686	0,393454
4096	1,57079	0,392697	0,394196
8192	1,57079	0,392697	0,395715

TABULKA 3.1: Odhad integrálů pro kruh

Vidíme, že tyto hodnoty v prvních dvou sloupcích se se zvyšujícím se rozlišením nezlepšují, naopak dostáváme čím dál tím vyšší hodnoty, přestože rozdíl není nijak signifikantní. To je způsobeno pravděpodobně tím, že čím vyšší rozlišení máme, tím víc se reprezentace blíží reálnému kruhu a vyplňuje čím dál více prostoru. Je tomu tak pro oba integrály, protože v prvním případě je každý pixel reprezentován jedničkou



OBRÁZEK 3.3: Graf pro odhady integrálu $\int_K x \cdot y \, d\mathcal{H}^2$ dle Tabulky 3.1

a v druhém případě jsme jako reprezentační bod brali z levého dolního rohu. V třetím případě bereme reprezentační bod pravého horního rohu. Protože $f(x, y) = x \cdot y$ je rostoucí funkce, bereme vlastně nejvyšší hodnotu z dané pokrývací množiny, díky tomu v rámci zjemňování dostáváme lepší odhady. Hodnoty z druhého a třetího sloupce Tabulky 3.1 pro odhad funkce $f(\vec{x}) = x \cdot y$ na kruhu ukazujeme na Obrázku 3.3.

3.5.2 Cantorovo diskontinuum

Nyní se od geometricky jednoduchých množin přesuneme zpět k množinám strukturálně složitějším. Začneme opět s Cantorovým diskontinuem. Protože Cantorovo diskontinuum je množina v \mathbb{R}^1 , tak bez ohledu na to, že na její zobrazení používáme pixely, tj. čtverce, budeme chápat pokrývací množiny jako intervaly o určité délce. Pokud tedy množina zasáhne do určitého pixelu, tak bereme, že jsme tuto část Cantorova diskontinua pokryli intervalem o délce strany daného pixelu, tedy $\frac{1}{R}$, kde R odpovídá rozlišení obrázku za předpokladu, že Cantorovo diskontinuum je jeden pixel vysoké, ale široké přes celý obrázek.

Cantorovo diskontinuum generujeme pomocí chaotického algoritmu, který byl popsán již v předchozí kapitole. V tomto případě nemusíme množinu v daném rozlišení generovat vícekrát, protože umíme určit některý z vnitřních bodů, který do Cantorova diskontinua určitě patří např. $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}$, ale také $\frac{1}{4}$. Pokud jeden z těchto bodů určíme jako počáteční bod pro chaotický algoritmus, pak body, které tímto algoritmem dostaneme, také patří do Cantorova diskontinua. Může samozřejmě dojít k drobným nepřesnostem, které jsou dané konečnou aritmetikou počítače a případným potřebným zaokrouhlením.

Z teoretické části již víme, že $\int_C x \, d\mathcal{H}^s = \mathcal{H}^s(C) = 1$, za předpokladu, že $s = \frac{\log 2}{\log 3}$. Chtěli bychom tedy tento integrál odhadnout. Obdobně bychom chtěli odhadnout integrál pro funkci $f(x) = x$, jehož hodnotu také známe. Ta odpovídá $\int_C 1 \, d\mathcal{H}^s = \frac{1}{2}$. Algoritmické odhady těchto dvou integrálů jsou uvedeny v Tabulce 3.2. Odhady pro integrál z $f(x) = x$ jsme jako reprezentační hodnoty brali levý kraj pokrývacího intervalu.

R	$\int_C 1 d\mathcal{H}^s$	$\int_C x d\mathcal{H}^s$
512	1,99178	0,99394
1024	1,94193	0,970015
2048	1,95432	0,976681
4096	1,90355	0,95154
8192	1,93533	0,95749
16384	1,94720	0,932677

TABULKA 3.2: Odhad integrálů pro Cantorovo diskontinuum pro $s = \frac{\log 2}{\log 3}$

Vidíme, že odhady, které jsme dostali, jsou opět značně nadhodnocené. Hodnoty, které poskytnul algoritmus, jsou dokonce téměř dvojnásobné. Zaměřili jsme se tedy na to, zda by nebylo možné využít strukturu této množiny k dosažení lepších odhadů. Strukturou množiny v tomto případě myslíme především to, že při konstrukci Cantorova diskontinua pracujeme se třetinami celkové množiny. Zkusíme tedy množinu zobrazit pro rozlišení, která budou mocninami 3. V tomto případě by se nemělo tolik stávat, že množina do daného pixelu zasahuje jenom malinkou částí, ale i přesto ji jako pokrývací potřebujeme použít. Při stejném algoritmu jako v předchozím případě pro takováto rozlišení dostaneme výsledky zapsané v Tabulce 3.3. Var. 1 v tomto případě znamená, že jsme brali reprezentační hodnotu z levého kraje pokrývacího intervalu a var. 2 odpovídá pravému okraji pokrývací množiny.

R	$\int_C 1 d\mathcal{H}^s$	$\int_C x d\mathcal{H}^s$ var. 1	$\int_C x d\mathcal{H}^s$ var. 2
243	1	0,497942	0,502058
729	1	0,499314	0,500686
2187	1,00781	0,499771	0,505530
6561	1,03516	0,499924	0,526938
19683	1,03125	0,528120	0,523669

TABULKA 3.3: Odhad integrálů pro Cantorovo diskontinuum pro $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ při $R = 3^k$

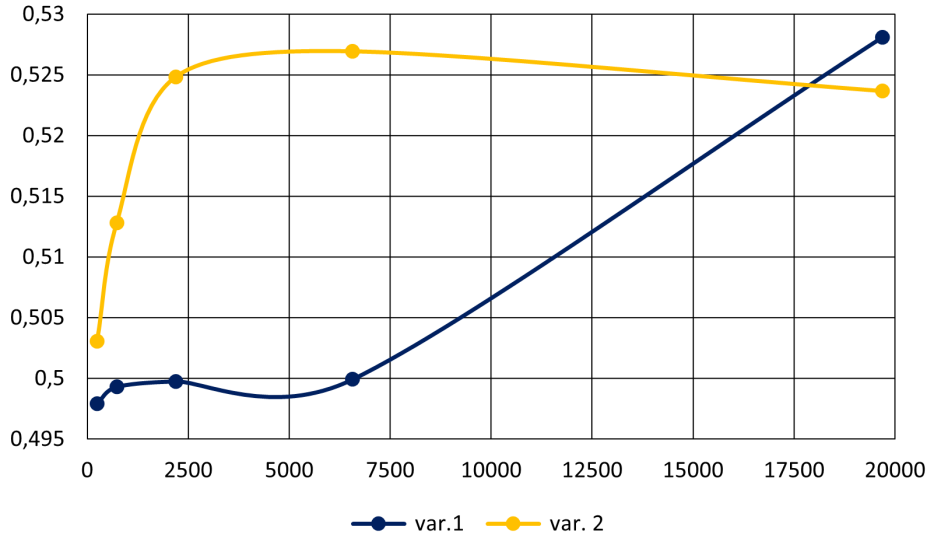
Pro tuto variantu pokrytí jsem dostali mnohem přesnější odhady než v prvním případě. Vidíme však že speciálně v případě var. 1 dostáváme zpočátku dolní odhad integrálu, ale později překročíme hledanou hodnotu. To je způsobeno nepřesnostmi v zobrazení Cantorova diskontinua pomocí chaotického algoritmu. Napočítané hodnoty jsme pak vynesli do grafu na Obrázku 3.4, kde je viditelné, že jsme sice dostali jisté odhady, ale daly nám spíše hrubou představu o reálné hodnotě.

3.5.3 Cantorův prach

Nyní bychom chtěli využít znalosti získané pro čtverec a Cantorovo diskontinuum. Pokusíme se tedy ještě provést odhad Hausdorffova integrálu pro Cantorův prach, D v jeho klasické podobě. Pro tu již víme, že

$$1,48329 \leq \mathcal{H}^s(D) \leq 1,500886,$$

pro $s = \frac{\log 4}{\log 3}$. Naše odhady jsme zapsali do druhého sloupce Tabulky 3.4, přičemž první sloupec udává hodnotu R . Jako pokrývací množiny v tomto případě, stejně jako v případě čtverce, bereme jednotlivé pixely, tj. čtverce o průměru $\frac{\sqrt{2}}{R}$. Dále odhadujeme také



OBRÁZEK 3.4: Graf pro odhady integrálu $\int_C x d\mathcal{H}^2$ dle Tabulky 3.3

hodnotu Hausdorffova integrálu pro funkci $f(x, y) = x \cdot y$ přes Cantorův prach. Pro tento integrál výslednou hodnotu neznáme. Stejně jako v případě čtverce bereme reprezentační hodnotu první z levého dolního a pak pravého horního rohu pokrývacího čtverce. Po vysčítání jsou výsledné hodnoty v třetím resp. čtvrtém sloupci Tabulky 3.4.

R	$\int_D 1 d\mathcal{H}^s$	$\int_D x \cdot y d\mathcal{H}^s$ var. 1	$\int_D x \cdot y d\mathcal{H}^s$ var. 2
243	1,55070	0,385343	0,390334
729	1,54856	0,387087	0,388544
2187	1,54951	0,387101	0,387634
6561	1,54889	0,387124	0,387446
19683	1,54876	0,387221	0,387253

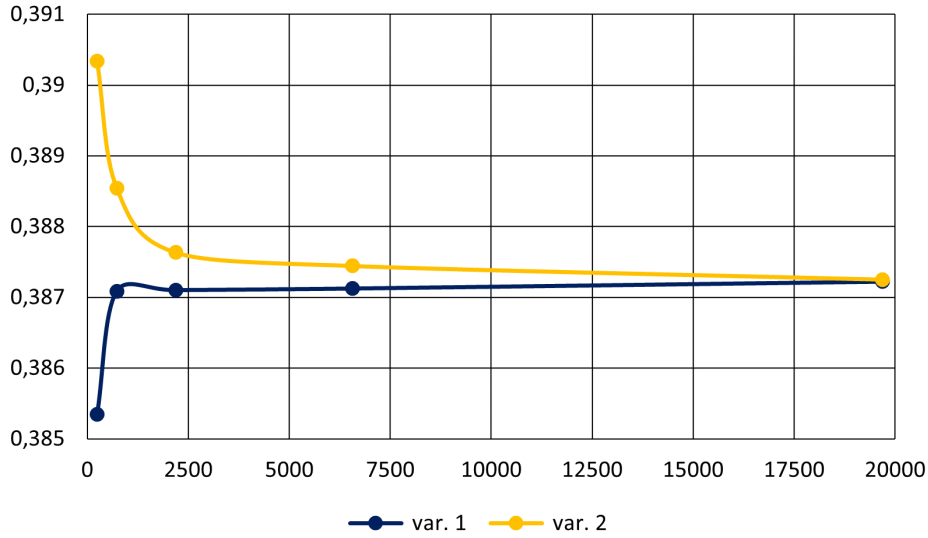
TABULKA 3.4: Odhad integrálů pro Cantorův prach pro $s = \frac{\log 4}{\log 3}$ při $R = 3^k$

Výsledky pro $\mathcal{H}^s(D) = \int_D 1 d\mathcal{H}^s$ dávají velmi dobrý odhad reálných hodnot. Je tomu tak pravděpodobně proto, že pokrývací množiny mají ideální tvar pro Cantorův prach a nijak se nepřekrývají. Toto je samozřejmě pouze domněnka, protože jak jsme ukázali na čtverci, ideální tvar pokrytí rozhodně neznamená blízkou hodnotu odhadu. Vzhledem k dobré aproximaci tohoto integrálu, ale usuzujeme, že také odhad integrálu $\int_D x \cdot y d\mathcal{H}^s$ je blízký reálné hodnotě.

3.5.4 Sierpiňského trojúhelník

Poslední množinou, jejíž Hausdorffovu míru a integrál se pokusíme odhadnout, je Sierpiňského trojúhelník S . Na něm ukážeme problematické chování odhadů v případě, že základní množina není čtverec a ani její vnitřní struktura není čtverci jednoduše pokrývatelná. Sierpiňského trojúhelník navíc zobrazujeme pomocí chaotického algoritmu, který nám také nedává stoprocentně přesný obraz hledané množiny.

Již víme, že $0,77 \leq \mathcal{H}^s(S) \leq 0,81794$, kde $s = \frac{\log 3}{\log 2}$. Odhady jsou zapsány v Tabulce 3.5. Hned na první pohled je však zřejmé, že odhady vyšly velmi nadhodnocené. To je



OBRÁZEK 3.5: Graf pro odhady integrálu $\int_D x d\mathcal{H}^2$ dle Tabulky 3.4

způsobeno právě tím, že čtverce nevhodně popisují vnitřní strukturu, která je tvořena trojúhelníky o šířce $\frac{1}{R}$ a výšce $\frac{\sqrt{3}}{2R}$, kde $R \times R$ je rozlišení obrázku. Pokusili jsme se odhadnout také funkci $f(x) = x$ jako v předchozích případech, ale očekáváme, že výsledek je opět značně nadhodnocen, stejně jako při integrování jedničky. Proto tentokrát uvádíme pouze odhad založený na reprezentační hodnotě, kterou jsme brali z levého dolního rohu pokrývací množiny.

R	$\int_S 1 d\mathcal{H}^s$	$\int_S x d\mathcal{H}^s$
512	2,58677	0,373483
1024	2,57759	0,371043
2048	2,57667	0,371357
4096	2,57136	0,370916
8192	2,56368	0,370045
16384	2,55051	0,368056

TABULKA 3.5: Odhad integrálů pro Sierpińského trojúhelník pro $s = \frac{\log 3}{\log 2}$ při pokrytí čtverci

Chtěli bychom i tentokrát pokrytí adaptovat tak, aby vhodně reprezentovalo vnitřní strukturu množiny, tedy Sierpińského trojúhelníku. Nejjednodušší úpravou je nepokrývat množiny pomocí čtverců, ale pomocí obdélníků, kde šířka zůstane $\frac{1}{R}$ a výška bude $\frac{\sqrt{3}}{2R}$. Při takovémto pokrytí odpovídá průměr pokrývací množiny $\frac{\sqrt{7}}{2}$. Tímto postupem jsme sice dostali lepší výsledky, stále je však odhad velmi hrubý.

Celkově bychom tedy chtěli shrnout, že navržený postup pro odhadování Hausdorffova integrálu pomocí integračních sum je možný, ale kvalita výsledných odhadů velmi závisí na naší schopnosti najít vhodné pokrytí dané množiny. Jak bylo navíc navrženo v [32], ideální pokrytí ani nemusí existovat. V takových případech pak dostáváme pouze hrubé odhady hledaných integrálů. I to ale někdy může být více než jsme schopni zjistit analyticky.

R	$\int_S 1 d\mathcal{H}^s$	$\int_S x d\mathcal{H}^s$
512	2,07806	0,345237
1024	2,07766	0,345775
2048	2,07757	0,346017
4096	2,07752	0,346130
8192	2,07750	0,346188
16384	2,07751	0,346220

TABULKA 3.6: Odhad integrálů pro Sierpińského trojúhelník pro $s = \frac{\log 3}{\log 2}$ při pokrytí obdélníky

Závěr

V této práci jsme se zabývali systémy iterovaných funkcí, jejich rekurentní variantou a jejich invariantními množinami. Představili jsme základní nástroje jejich analýzy, zejména pak různé dimenze, které lze pro tyto množiny zkoumat. Zaměřili jsme se především na Hausdorffovu dimenzi a její vztah k dimenzím ostatním např. podobnostní a mřížkové dimenzi. Mřížkovou dimenzi jsme pak numericky odhadovali. Uvedli jsme také Hausdorffovu míru a její vlastnosti, na jejichž základě jsme zkonstruovali Hausdorffův integrál. Ten jsme se pokusili také numericky odhadnout. Touto prací jsme navázali na [1] a [2].

V první části byly shrnuty teoretické poznatky ohledně systémů iterovaných funkcí (IFS) a jejich invariantních množin. Představili jsme konstrukci obecné vnější míry, s jejíž pomocí jsme pak definovali Hausdorffovu míru. Byly zde popsány jak topologické dimenze tak dimenze Hausdorffova, které se objevují v definici fraktální množiny podle Benoita B. Mandelbrota. Protože Hausdorffova míra a dimenze jsou obtížně získatelné, uvedli jsme také podobnostní a mřížkovou dimenzi, které za jistých okolností mohou být dokonce dimenzi Hausdorffově rovny.

Dále jsme podrobněji zkoumali, jakým způsobem je možné invariantní množiny systémů iterovaných funkcí zobrazit. Uvedli jsme chaotický algoritmus, který představil Michael Barnsley, a s jeho pomocí jsme pak zobrazili některé invariantní množiny. Zaměřili jsme se na invariantní množiny rekurentních IFS a ukázali jsme, že je možné v některých případech rekurenci vyjádřit pomocí jednoduchých pravidel používaných pro chaotický algoritmus. Pro takto zobrazené množiny jsme pak numericky odhadovali hodnotu mřížkové dimenze. Tyto hodnoty odpovídaly našim očekáváním a korespondují se strukturou daných množin.

V závěrečné kapitole jsme se pak znovu zabývali Hausdorffovou mírou a jejím vztahem k míře Lebesgueově. Obdobně jako pro míru Lebesgueovu jsme definovali Hausdorffův integrál a zkoumali jeho vlastnosti. Určit Hausdorffovu míru je obecně obtížné, a tak jsme představili množiny, pro které je Hausdorffova míra známá, a shrnuli jsme také odhady této míry pro další významné množiny. Určili jsme pak také hodnotu pro Hausdorffův integrál na Cantorově diskontinuu pro několik funkcí. Pokusili jsme se také odhadnout hodnotu Hausdorffova integrálu numericky pomocí integračních sum a to nejen pro Cantorovo diskontinuum. To se nám částečně podařilo, ale zjistili jsme, že jsou tyto odhady velmi citlivé na volbu množin, kterými zkoumanou množinu pokrýváme.

Seznam použité literatury

- [1] M. Diasová. *Bakalářská práce - Matematické metody fraktální geometrie*. Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT, 2020.
- [2] M. Diasová. *Výzkumný úkol - Matematické metody fraktální geometrie*. Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT, 2021.
- [3] E. Čech and V. Jarník. *Bodové množiny*. Jednota Československých matematiků a fysiků, 1936.
- [4] J. Henrikson. Completeness and total boundedness of the hausdorff metric. *MIT Undergraduate Journal of Mathematics*, 1999.
- [5] G. A. Edgar. *Measure, Topology and Fractal Geometry*. Springer, 2nd edition, 2008.
- [6] B. B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman and Company, New York, 1983.
- [7] M. F. Barnsley. *Fractals Everywhere*. Academic Press, 2nd edition, 1993.
- [8] M. F. Barnsley. *SuperFractals*. Cambridge University Press, 2006.
- [9] M. F. Barnsley, J. H. Elton, and D. P. Hardin. Recurrent iterated function systems. *Constructive Approximation*, 5:3–31, 1989.
- [10] R. Engelking. *Dimension Theory*. North-Holland publishing company, 1978.
- [11] K. Falconer. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Wiley, 3rd edition, 2014.
- [12] H. Federer. *Geometric Measure Theory*. Classics in Mathematics. Springer Berlin, Heidelberg, 1996.
- [13] A. Schechter. On the Centred Hausdorff Measure. *Journal of the London Mathematical Society*, 62(3):843–851, 12 2000.
- [14] G. A. Edgar. Fine Variations and Fractal Measures. *Real Analysis Exchange*, 20(1):256 – 280, 1995.
- [15] G. A. Edgar. Centered densities and fractal measures. *The New York Journal of Mathematics*, 13:33–87, 2007.
- [16] M. Llorente and M. Morán. Advantages of the hausdorff centered measure from the computability point of view. *Mathematica Scandinavica*, 107(1):103–122, 2010.

- [17] H.-O. Peitgen, H. Jürgens, and D. Saupe. *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*. Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 2004.
- [18] R. Temam. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*. Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 1998.
- [19] P. A. P. Moran. Additive functions of intervals and Hausdorff measure. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 42:15 – 23, 1946.
- [20] L. Evans and R. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions, Revised Edition*. EMS Textbooks in Mathematics. CRC Press, 2015.
- [21] D. A. Salamon. *Measure and Integration*. European Mathematical Society, 2016.
- [22] S. Krantz and H. Parks. *Geometric Integration Theory*, volume 80 of *Cornerstones*. Birkhäuser Boston, MA, 2008.
- [23] G. A. Edgar. *Integral, probability, and fractal measures*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [24] K. J. Falconer and R. D. Mauldin. Fubini-type theorems for general measure constructions. *Mathematika*, 47(1-2):251–265, 2000.
- [25] K. J. Falconer. *The Geometry of Fractal Sets*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 1985.
- [26] S. Pedersen and J. Phillips. Exact Hausdorff Measure of Certain Non-Self-Similar Cantor Sets. *Fractals*, 21, 12 2013.
- [27] P. Móra. Estimate of the Hausdorff measure of the Sierpinski triangle. *Fractals*, 17:137–148, 2009.
- [28] M. Wang. The Hausdorff measure of a Sierpinski-like fractal. *Hokkaido Mathematical Journal*, 36:9–19, 2007.
- [29] J. Deng, H. Rao, and Wen Z.-Y. Hausdorff Measure of Cartesian Product of the Ternary Cantor Set. *Fractals*, 20(01):77–88, 2012.
- [30] Z. Zhou and M. Wu. The Hausdorff measure of a Sierpinski carpet. *Science in China Series A: Mathematics*, 42:673–680, 1999.
- [31] Z. Zhou. The Hausdorff measure of the self-similar sets. *Science in China Series A: Mathematics*, 41:723–728, 07 1998.
- [32] Z. Zhou and L. Feng. Twelve open problems on the exact value of the Hausdorff measure and on topological entropy: A brief survey of recent results. *Nonlinearity*, 17:493–502, 12 2003.
- [33] J. Marion. Mesures de Hausdorff d’ensembles fractals. *Ann. Cs. Math. Québec*, 11(1):111–132, 1987.
- [34] E. Ayer and R. S. Strichartz. Exact Hausdorff Measure and Intervals of Maximum Density for Cantor Sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 9:3725–3741, 01 1999.

- [35] C.-Y. Ma and Y.-F. Wu. A note on Hausdorff measures of self-similar sets in R^d . *Annales Fennici Mathematici*, 46(2):957–963, 08 2021.
- [36] R. Strichartz. Evaluating Integrals Using Self-Similarity. *American Mathematical Monthly*, 107:316–326, 04 2000.