

**ČESKÉ VYSOKÉ
UČENÍ TECHNICKÉ
V PRAZE**

**FAKULTA
STAVEBNÍ**



**DIPLOMOVÁ
PRÁCE**

2023

**JAN
SEDLMAJER**

Tato stránka je záměrně ponechána prázdná.



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta stavební

Katedra betonových a zděných konstrukcí

**Vázané kroucení železobetonových
prvků s masivním průřezem**

**Warping torsion of reinforced concrete
members with a solid cross-section**

Diplomová práce

Vypracoval: Bc. Jan Sedlmajer

Studijní program: Stavební inženýrství

Obor: Konstrukce pozemních staveb

Vedoucí práce: Doc. Ing. Lukáš Vráblík, Ph.D., FEng.

Ing. Jan Vesecký

Praha 2023

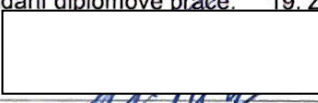
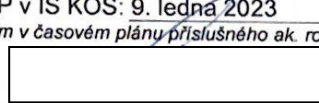
Tato stránka je záměrně ponechána prázdná.

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

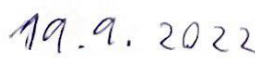
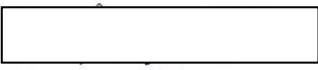
I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: Sedlmajer	Jméno: Jan	Osobní číslo: 477181
Zadávací katedra: K11133 - Katedra betonových a zděných konstrukcí		
Studijní program: Stavební inženýrství		
Studijní obor/specializace: Konstrukce pozemních staveb		

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce: Vázané kroucení železobetonových prvků s masivním průřezem	
Název diplomové práce anglicky: Warping Torsion of Reinforced Concrete Members with a Solid Cross-Section	
Pokyny pro vypracování: Úkolem diplomanta je zaměřit se v rámci závěrečné práce na stále nedostatečně prozkoumanou problematiku vázaného kroucení železobetonových prvků. Primárním bodem zájmu budou prvky s typickými masivními průřezy, provedené z betonů běžných pevností a vyztužené standardní betonářskou výztuží. Práce by měla obsahovat především následující části: - volné a vázané kroucení dle teorie pružnosti, včetně obecného analytického řešení - popis současného stavu poznání problematiky kroucení železobetonových prvků (stav norem i odborné literatury) - příklady typických masivních ŽB průřezů a typických kombinací okrajových podmínek a zatížení prvků - lineární analytické řešení typických případů kroucení z předchozího bodu - lineární numerické řešení vybraných případů z předchozího bodu s využitím vhodného výpočetního programu - plně nelineární numerické řešení reprezentativních případů z předchozích dvou bodů, zohledňující především vliv poškození betonu trhlinami a plasticitu betonářské výztuže, s využitím vhodného výpočetního programu - validace výsledků nelineární analýzy pomocí experimentálních výsledků dostupných z literatury - porovnání výsledků se stávajícími normovými postupy, příp. dostupnými teoretickými postupy z literatury - kritické zhodnocení získaných poznatků a doporučení pro návrhové postupy, příp. praktické rady pro projektanty návrhující konstrukce namáhané kroucením a náměty pro navazující výzkum problematiky vázaného kroucení	
Seznam doporučené literatury: Hoogenboom, P. C. J. (2006), Vlasov torsion theory Sapountzakis, J. & Mokos, V. (2003), Warping shear stresses in nonuniform torsion by BEM Valencia, C. G. & Lantsoght E. O. L. (2020), Overview of Torsion Design Methods Vítek, J. L. et al. (2020), Torsion of Rectangular Concrete Sections Platná znění normových předpisů (Eurokód 2, Model Code, ACI 318 apod.) Manuály a uživatelské příručky k použitým programům	
Jméno vedoucího diplomové práce: doc. Ing. Lukáš Vráblík, Ph.D., FEng.	
Datum zadání diplomové práce: 19. září 2022	Termín odevzdání DP v IS KOS: 9. ledna 2023 <i>Údaj uveďte v souladu s datem v časovém plánu příslušného ak. roku</i>
 Podpis vedoucího práce	 Podpis vedoucího katedry

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

<i>Beru na vědomí, že jsem povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je nutné uvést v diplomové práci a při citování postupovat v souladu s metodickou příručkou ČVUT „Jak psát vysokoškolské závěrečné práce“ a metodickým pokynem ČVUT „O dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací“.</i>	
 Datum převzetí zadání	 Podpis studenta(ky)

Tato stránka je záměrně ponechána prázdná.

SPECIFIKACE ZADÁNÍ

Jméno diplomanta: Jan Sedlmajer

Název diplomové práce: Vázané kroucení železobetonových prvků s masivním průřezem

Základní část: K133 _____ podíl: 100 %

Formulace úkolů: Viz zadání diplomové práce.

Podpis vedoucího DP: _____

Datum: 16.12.2022

Případné další části diplomové práce (části a jejich podíl určí vedoucí DP):

2. Část: _____ podíl: _____ %

Konzultant (jméno, katedra): _____

Formulace úkolů:

Podpis konzultanta: _____

Datum: _____

3. Část: _____ podíl: _____ %

Konzultant (jméno, katedra): _____

Formulace úkolů:

Podpis konzultanta: _____

Datum: _____

4. Část: _____ podíl: _____ %

Konzultant (jméno, katedra): _____

Formulace úkolů:

Podpis konzultanta: _____

Datum: _____

Tato stránka je záměrně ponechána prázdná.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou závěrečnou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s *Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských prací*.

Nemám námitek proti použití tohoto školního díla ve smyslu §60 Zákona č. 121/2000 sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne: _____

Jan Sedlmajer

Tato stránka je záměrně ponechána prázdná.

Poděkování

Děkuji panu docentu Lukáši Vráblikovi za jeho odborné vedení, přátelský přístup, věcné připomínky a rady, které mi poskytnul při zpracování této diplomové práce.

Poděkování patří také panu inženýru Janu Veseckému za jeho skvělý přístup při konzultacích, trpělivost a rady, které mi velmi pomohly při psaní této diplomové práce.

Dále bych také chtěl poděkovat profesoru Vítu Šmilauerovi za poskytnuté konzultace a rady v otázkách týkající se stavební mechaniky.

V neposlední řadě bych chtěl poděkovat inženýru Boháčkovi a profesoru Janu Vítkovi za poskytnutí podkladů z jejich experimentálního výzkumu kroucení na železobetonových prvcích, jejichž výsledky byly použity v této práci.

Tato stránka je záměrně ponechána prázdná.

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá nedostatečně probádanou problematikou vázaného kroucení železobetonových prvků s masivním průřezem, která většinou nebývá ani okrajově zmíněná v dnes používaných normách pro navrhování konstrukcí. Problematika vázaného kroucení u betonových konstrukcí je často považována za zanedbatelnou nebo dokonce zbytečnou. Předložená práce tyto jednoduché a dosud všeobecně neprokázané závěry vystavuje objektivní kritické analýze.

V úvodu této práce je představena teorie volného a vázaného kroucení, doplněná o nezbytnou matematickou teorii řešení diferenciálních rovnic, které tyto druhy kroucení popisují. Následně jsou popsány druhy napětí vznikající na masivních průřezích od volného a vázaného kroucení a výsledná hlavní napětí. Současný stav hlavních mezinárodních norem je popsán především z hlediska přístupu k návrhu pro volně kroucený prvek, jelikož vázané kroucení není v těchto normách prakticky řešeno.

V rámci další části práce je provedena lineární analýza vázaného kroucení využívající poznatky z teoretické části, jejímž výsledkem jsou průběhy pootočení, poměrného zkroucení, krouticích momentů a napětí po délce nosníku pro vybrané okrajové podmínky, průřezy a způsoby zatížení. Z jednotlivých složek napětí je stanoveno hlavní napětí, které je porovnáno s lineárním numerickým výpočtem v MKP programu ATENA Science.

Nelineární analýza vázaného kroucení představuje nejobsáhlejší část této práce. Pro výpočet je použit MKP program ATENA Science. Numerický model je sestaven na základě výsledků studie citlivosti a porovnání s výsledky experimentálních zkoušek z literatury. Výsledky nelineárních výpočtů a jejich porovnání s normovými postupy jsou v práci podrobně popsány a vyhodnoceny.

Závěrem této práce je představena parametrická studie, která zkoumá vliv vybraných parametrů na únosnost prvků ve volném a vázaném kroucení.

Klíčová slova

vázané kroucení, bimoment, masivní průřez, železobeton, nelineární numerická analýza, ATENA, parametrická studie, globální návrhová únosnost v kroucení

Tato stránka je záměrně ponechána prázdná.

Abstract

The presented master's thesis deals with the insufficiently understood topic of warping torsion within reinforced concrete members with a solid cross-section, which usually is not even mentioned in existing standards for structural design. Warping torsion of concrete structures is often considered as negligible or even irrelevant. The following thesis subjects these simple and generally unproven conclusions to objective and critical analysis.

In the opening of this paper, the basic theory of St. Venant and warping torsion is presented, supplemented by the mathematical theory of differential equations, which describes these two types of torsion. Then, the types of stresses developed within the solid cross-sections caused by St. Venant and warping torsion are described as well as the resulting principal stresses. The state of existing main international standards is described primarily within the context of St. Venant torsion design because there are almost no provisions for the design of members under warping torsion.

In the following part of this work, a linear analysis of the warping torsion is performed using the knowledge from the theoretical part. The results are presented in the form of rotation, relative twist, torsional moments and stresses along the beam for selected boundary conditions, cross-sections and types of loading. The principal stress is determined from the individual stress components and is then compared with the results of the linear numerical calculation in the FEM software ATENA Science.

The nonlinear analysis of the warping torsion represents the most extensive part of this thesis. The FEM software ATENA Science is used for the computations. The numerical model is based on the results of the sensitivity study and comparison with the results of experimental studies obtained from the scientific literature. The results of nonlinear computations and their comparison with code-based calculations are presented and evaluated in detail.

Finally, a parametric study is presented, which examines the influence of selected parameters on the torsional resistance of members under St. Venant and warping torsion.

Keywords

warping torsion, bimoment, solid cross-section, reinforced concrete, nonlinear numerical analysis, ATENA, parametric analysis, global design resistance in torsion

Tato stránka je záměrně ponechána prázdná.

Obsah

1. Úvod	21
1.1 Předmluva	21
1.2 Obsah závěrečné práce.....	21
1.3 Vymezení řešené problematiky závěrečné práce	22
1.4 Motivace	22
1.5 Cíle závěrečné práce	22
2. Úvod do problematiky kroucení prutových prvků	23
2.1 Volné kroucení.....	23
2.2 Vázané kroucení	24
2.2.1 Zdroje bránění deplanace.....	25
2.3 Příklady železobetonových konstrukcí namáhaných kroucením.....	25
3. Lineární teorie kroucení.....	27
3.1 Matematická teorie diferenciálních rovnic	27
3.1.1 Řešení diferenciálních rovnic druhého řádu	27
3.1.2 Řešení diferenciálních rovnic vyšších řádů	28
3.2 Řídící rovnice kroucení.....	29
3.2.1 Volné kroucení.....	29
3.2.2 Vázané kroucení	31
3.2.3 Okrajové podmínky prvků vystavených vázanému kroucení.....	32
3.3 Numerická analýza průřezů	33
3.3.1 Momenty setrvačnosti průřezu pro volné a vázané kroucení	33
3.3.2 Složky napětí na průřezu od kroucení.....	34
4. Nelinearity – základní teorie	36
4.1 Materiálové nelinearity	37
4.1.1 Poškození betonu	37
4.1.2 Plasticita.....	39
4.1.3 Shrnutí materiálových nelinearit.....	44
4.2 Geometrické nelinearity.....	44
4.3 Metody řešení nelineárních úloh.....	44
4.3.1 Plná Newton-Raphsonova metoda.....	44
4.3.2 Modifikovaná Newton-Raphsonova metoda	45
4.3.3 Metoda délky oblouku	46
5. Kroucení železobetonových prvků – normy a literatura	48
5.1 Vybrané návrhové postupy pro kroucené prvky.....	48
5.1.1 Model příhradové analogie	48
5.1.2 ČSN EN 1992 (Eurokód 2).....	50
5.1.3 ACI 318-19	52

5.1.4	Model Code 2010.....	53
5.2	Vázané kroucení v odborné literatuře	54
6.	Lineární analýza vázaného kroucení	56
6.1	Typické masivní železobetonové průřezy.....	56
6.1.1	Průřezové charakteristiky	57
6.1.2	Normálová a smyková napětí na průřezu	60
6.1.3	Hlavní napětí na průřezu.....	63
6.2	Značení okrajových podmínek (podpor) při kroucení	64
6.3	Analytické řešení rovnice volného kroucení	65
6.4	Analytické řešení rovnice vázaného kroucení	66
6.4.1	Geometrie, uspořádání a zatížení řešených nosníků.....	66
6.4.2	Ukázka podrobného řešení vybrané úlohy.....	68
6.4.3	Výsledky analytického řešení pro ostatní typické případy	70
6.4.4	Zhodnocení analytických výsledků	90
6.5	Parametrická studie.....	90
6.5.1	Vliv tvaru průřezu.....	90
6.5.2	Vliv velikosti průřezu	91
6.5.3	Vliv délky nosníku.....	91
6.6	Porovnání s kruhovým průřezem.....	92
6.7	Lineární numerická analýza vybraných případů kroucení.....	94
6.8	Výsledky numerického řešení a porovnání s analytickým řešením.....	94
6.8.1	Výsledky pro obdélníkový průřez.....	94
6.8.2	Porovnání výsledků pro obdélníkový průřez	98
6.8.3	Výsledky pro průřez tvaru I.....	100
6.8.4	Porovnání výsledků pro průřez tvaru I	103
7.	Nelineární analýza vázaného kroucení	105
7.1	Předpoklady pro nelineární řešení	105
7.1.1	Vstupní parametry výpočtu.....	105
7.1.2	Zatěžování výpočetních modelů	106
7.1.3	Vyztužení vybraných modelů	107
7.2	Validace výpočtu pomocí dostupných experimentálních výsledků.....	108
7.2.1	Experiment s čistým volným kroucením	108
7.2.2	Experiment s významným vázaným kroucením.....	109
7.3	Studie citlivosti	112
7.3.1	Geometrie konečných prvků.....	112
7.3.2	Velikost konečných prvků	113
7.3.3	Typ bazové funkce.....	114
7.3.4	Metoda výpočtu	115
7.4	Nelineární analýza kroucení pro vybraná statická uspořádání	116
7.4.1	Numerické modely.....	117
7.4.2	Výsledky nelineární analýzy pro obdélníkový průřez	117

7.4.3	Výsledky nelineární analýzy pro průřez tvaru I.....	125
7.4.4	Shrnutí a vyhodnocení výsledků nelineární analýzy	131
7.5	Globální návrhová únosnost v kroucení s využitím nelineární analýzy ...	137
7.5.1	Plně pravděpodobnostní metoda	138
7.5.2	Metoda ECOV	138
7.5.3	Metoda založená na EN 1992-2.....	139
7.5.4	Metoda dílčích součinitelů spolehlivosti	140
7.6	Porovnání výsledků s normovými postupy.....	140
7.7	Parametrická studie	145
7.7.1	Vliv koncové tuhosti v deplanaci.....	145
7.7.2	Poměr podélné a příčné výztuže	146
7.7.3	Délka prvku.....	148
7.7.4	Počet prutů podélné výztuže	149
7.7.5	Poloha podélné výztuže uvnitř průřezu	149
8.	Závěr	151
8.1	Zhodnocení splnění cílů diplomové práce	151
8.2	Hlavní poznatky a doporučení pro praxi.....	152
8.3	Náměty na rozšíření práce	153
9.	Zdroje.....	154
9.1	Literatura.....	154
9.2	Software	157
10.	Přílohy.....	158
10.1	Příloha A – výsledky lineárního numerického a analytického řešení.....	158
10.2	Příloha B – výsledky lineárního numerického a analytického řešení.....	164

Tato stránka je záměrně ponechána prázdná.

1. Úvod

1.1 Předmluva

Betonové konstrukce a jejich prvky jsou vystaveny čtyřem hlavním typům namáhání – normálovému, ohybovému, smykovému a kroucení. První tři případy z uvedených namáhání jsou všem stavebním inženýrům dobře známé, byla jim věnována při výzkumu dostatečná pozornost hlavně proto, že z drtivé většiny rozhodují o návrhu konstrukce.

Kroucení byla naproti tomu věnována velmi malá pozornost, nemluvě o vázaném kroucení, které je výsadou hlavně ocelových konstrukcí nebo obecně prvků s tenkostěnným průřezem. S ohledem na dnešní trend, kdy je většina vědeckého výzkumu v oblasti betonových konstrukcí zaměřena na nové materiály jako jsou vysokohodnotné betony, jejich vyztužování pomocí FRP a využití v praxi, se jen vzácně najde někdo, kdo by se vázaným kroucením železobetonových konstrukcí zabýval, zvláště pokud jsou tvořeny masivními průřezy. Problematika vázaného kroucení je pak často považována za zanedbatelnou až zbytečnou.

Předložená práce tyto jednoduché a dosud všeobecně neprokázané závěry vystavuje objektivní zkoušce.

1.2 Obsah závěrečné práce

Diplomová práce obsahuje celkem osm kapitol, v úvodu (kapitola 1) je představena především motivace k řešení daného tématu a vymezen rozsah práce.

Kapitola 2 slouží k představení problematiky kroucení prutových prvků, jsou v ní popsány pojmy volného a vázaného kroucení, a znázorněny typické příklady železobetonových konstrukcí namáhaných kroucením.

V kapitole 3 je představena lineární teorie kroucení včetně řešení vybraných typů diferenciálních rovnic týkající se problematiky vázaného kroucení, jsou zde uvedeny řídicí rovnice kroucení, okrajové podmínky pro úlohy kroucených prutů a dále i potřebné průřezové charakteristiky a složky napětí vznikající na průřezu při kroucení. Všechny poznatky uvedené v této kapitole jsou využity dále při lineární analýze vázaného kroucení.

Základní teorie nelinearity je stručně popsána v kapitole 4, především se zaměřením na materiálové nelinearity – poškození betonu a plasticitu betonářské výztuže i betonu.

V kapitole 5 jsou krátce představeny současné normové postupy při navrhování kroucených betonových prvků a odborná literatura, která se věnuje především vázanému kroucení.

Kapitola 6 obsahuje lineární analýzu vázaného kroucení pro typické případy uspořádání okrajových podmínek a zatížení. Nejprve jsou představeny vybrané masivní průřezy včetně jejich průřezových charakteristik a napětí od jednotkových vnitřních sil. Následně je ukázáno podrobné řešení diferenciální rovnice vázaného kroucení pro jeden

případ okrajových podmínek a dále výsledky řešení pro ostatní případy. Také je provedena parametrická studie pro vhodně zvolené parametry. V závěru této kapitoly je provedeno porovnání lineárního analytického a numerického řešení pomocí vhodného softwaru pro vybrané případy.

Nelineární analýza vázaného kroucení je provedena v kapitole 7, součástí je představení zavedených předpokladů, okrajových podmínek a vstupních parametrů pro nelineární výpočet. Je provedena studie citlivosti pro vybrané parametry a validace na vhodných experimentech pro ověření správnosti výpočetního modelu. Dále jsou představeny výsledky nelineárních výpočtů včetně porovnání s normovými postupy a postupy dostupnými v literatuře. Závěr kapitoly se věnuje parametrické studii, ve které je zkoumán vliv vybraných parametrů na únosnost prvku v kroucení.

V závěru je zhodnoceno splnění cílů diplomové práce, dále jsou představeny hlavní poznatky a doporučení pro praxi a náměty na další rozšíření práce.

1.3 Vymezení řešené problematiky závěrečné práce

V rámci této diplomové práce je uvažováno namáhání výhradně kroucivým momentem, který generuje volné, respektive vázané kroucení, kombinace tohoto typu namáhání s ostatními jako je například ohyb, smyk, normálová síla (příp. předpětí), by bylo z pohledu autora velmi zajímavé, avšak z časového hlediska značně náročné. Pruty uvažované ve výpočtech jsou prismatické (tj. konstantního průřezu) a zároveň vždy přímé. Rozměry průřezů a délka nosníků jsou zvoleny s ohledem na rozměry obvyklé u prováděných železobetonových konstrukcí. Betony jsou běžných pevnostních tříd a vyztužení je uvažováno výhradně betonářskou výztuží, předpínací ani rozptýlená výztuž nejsou uvažovány. Osa x je vždy podélnou osou prvku a osy y, z definují rovinu průřezu.

1.4 Motivace

Motivací k řešení problematiky vázaného kroucení na prvcích s masivním průřezem byly především poznatky získané v rámci projektové výuky magisterského studia. V rámci této výuky se autor věnoval především popisu lineárního chování kroucených prvků a získané výsledky byly z pohledu autora velmi zajímavé pro další zkoumání v rámci diplomové práce.

Dalším faktorem bylo, že se jedná o poměrně málo probádanou problematiku a normové postupy v podstatě ve výpočtech vázané kroucení pro masivní průřezy neumožňují zohlednit. Například v normě ČSN EN 1992-1-1 [1] je doslova uvedeno: „Pro uzavřené tenkostěnné průřezy a plné průřezy lze vázané kroucení běžně zanedbat“. Tato skutečnost výrazně přispěla k zájmu autora o toto téma.

1.5 Cíle závěrečné práce

Cílem této diplomové práce je komplexní řešení problému vázaného kroucení železobetonových prvků s masivním průřezem – popsání teorie týkající se kroucení, současného stavu poznání, provedení lineární a nelineární analýzy vázaného kroucení na vybraných případech nosníků a porovnáním těchto výsledků s normovými postupy.

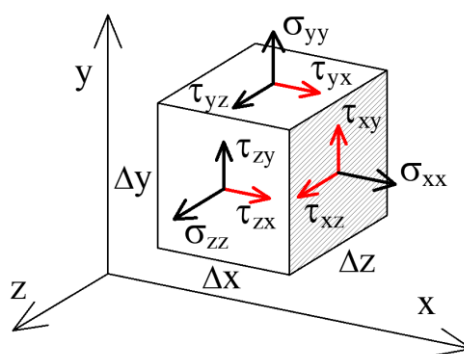
2. Úvod do problematiky kroucení prutových prvků

Prutový konstrukční prvek (v případě kroucení typicky nosník) je namáhán kroucením, pokud je zatížen přímo momentem působícím okolo vlastní osy prvku, případně pokud na něj působí příčné zatížení, jehož výslednice neprochází středem smyku průřezu. Kroucení lze obecně rozdělit na volné a vázané, převládající typ je dán především okrajovými podmínkami, tvarem průřezu, a typem zatížení způsobujícím kroucení.

2.1 Volné kroucení

Prvek je namáhán pouze volným kroucením, pokud není zabráněno deplanaci průřezu, tj. deformaci z jeho původní roviny, anebo pokud průřez nedeplanuje vůbec nehledě na okrajové podmínky (např. masivní kruhový průřez a některé speciální typy tenkostěnných průřezů). Volné kroucení prismatických prutů popsal Saint-Venant již v roce 1855 ve své publikaci *Memoire sur la Torsion des Prismes* [3], proto bude nadále tento typ kroucení značen indexem „SV“.

Namáhání volným kroucením vede výhradně ke vzniku smykových napětí na průřezu a normálové napětí je rovno nule, jak je patrné z tenzoru napětí pro volné kroucení (2.1), protože se však nejedná o problém rovinné napjatosti, nelze použít známý vztah pro výpočet hlavních napětí za rovinné napjatosti, ale je potřeba stanovit hlavní napětí přímo z tenzoru napětí $\bar{\sigma}_{SV}$ pomocí stanovení jeho vlastních čísel [4]. Celkový kroučicí moment je roven přímo momentu od volného kroucení.



Obrázek 2.1 - Jednotlivé složky napětí na elementární krychli, barevně jsou označeny nenulové složky vznikající při volném kroucení.

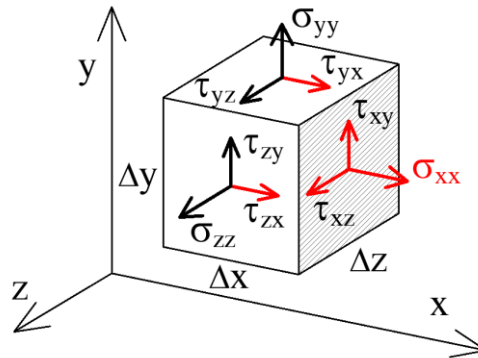
$$\bar{\sigma}_{SV} = \begin{pmatrix} 0 & \tau_{SV,xy} & \tau_{SV,xz} \\ \tau_{SV,yx} & 0 & 0 \\ \tau_{SV,zx} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

kde $\tau_{SV,xy}$ je smykové napětí od prostého kroucení v rovině kolmé k ose x , ve směru osy y (analogicky i pro ostatní indexy)

Vzhledem ke vzájemnosti smykových napětí platí $\tau_{SV,xy} = \tau_{SV,yx}$ a $\tau_{SV,xz} = \tau_{SV,zx}$, tenzor napětí je tedy symetrický.

2.2 Vázané kroucení

Pokud je v jakémkoliv místě prvku zabráněno volné deplanaci průřezu vznikají, kromě smykových napětí od prostého kroucení, také druhotná smyková napětí od vázaného kroucení jejichž účinek se sčítá, a navíc vlivem vázaného kroucení vzniká normálové napětí. Pro tento případ kroucení se při stanovení hlavních napětí musí rovněž vycházet z vlastních čísel tenzoru napětí $\bar{\sigma}_\omega$ a nelze uvažovat základní vzorec pro rovinnou napjatost. Vázané kroucení bude dále značeno indexem „ ω “.



Obrázek 2.2 - Jednotlivé složky napětí na elementární krychli, barevně jsou označeny nenulové složky vznikající při vázaném kroucení.

$$\bar{\sigma}_\omega = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{SV,xy} + \tau_{\omega,xy} \quad (2.3)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{SV,xz} + \tau_{\omega,xz} \quad (2.4)$$

kde σ_{xx} je normálové napětí ve směru osy x

Celkový kroučící moment působící na konstrukci se tedy rozdělí na působení volného a vázaného kroucení podle okrajových podmínek konstrukce, způsobu zatížení a tvaru průřezu. U některých typů konstrukcí mohou být převládající účinky volného kroucení, naopak u jiných konstrukcí se nezanedbatelně projevuje vliv vázaného kroucení.

$$T_{tot} = T_{SV} + T_\omega \quad (2.5)$$

kde T_{SV} je příspěvek volného kroucení do celkového kroucení, viz kap. 3.2.1
 T_ω je příspěvek vázaného kroucení do celkového kroucení, viz kap. 3.2.2

2.2.1 Zdroje bránění deplance

K bránění deplance, a tedy k vázanému kroucení dochází některými z těchto způsobů, případně jejich kombinací:

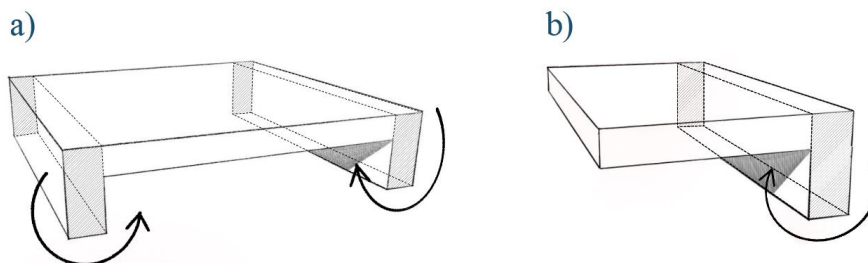
- Dokonalým či nedokonalým vetknutím libovolného průřezu na nosníku ve smyslu bránění deformace z jeho roviny;
- změnou geometrie průřezu po délce prvku;
- změnou materiálových vlastností po délce prvku (modul pružnosti, Poissonovo číslo, ...);
- jakoukoliv jinou změnou tuhosti v kroucení (např. poškozením nebo plasticitou);
- jiným než konstantním průběhem vnitřního kroučícího momentu po délce prvku.

2.3 Příklady železobetonových konstrukcí namáhaných kroucením

Způsoby zatížení, při kterých je prvek namáhán kroucením, byly již naznačeny na začátku této kapitoly, z těchto poznatků můžeme odvodit základní typy železobetonových konstrukcí namáhaných kroucením.

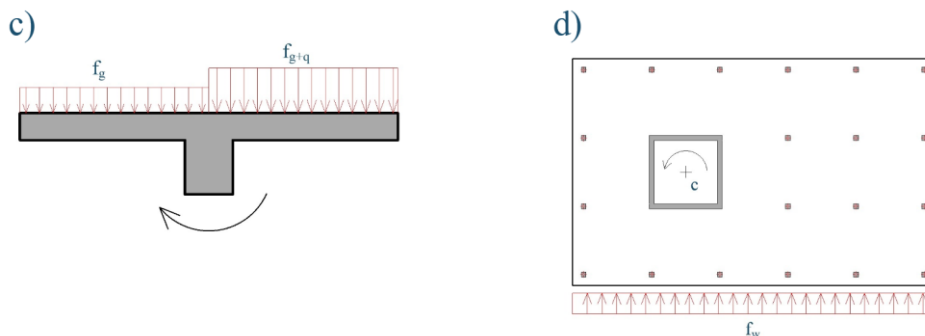
Mezi typicky kroucené železobetonové konstrukce patří:

- Vetknuté krajní průvlaky podporující stropní desky;
- vetknutý průvlak monoliticky spojený s konzolovou deskou;



Obrázek 2.3 - Příklady typicky kroucených železobetonových konstrukcí.

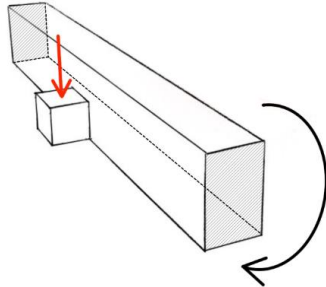
- nesymetricky zatížené vnitřní průvlaky vetknuté do stěn;
- nesymetricky umístěné stěnové jádro;



Obrázek 2.4 - Příklady typicky kroucených železobetonových konstrukcí.

- e) průvlaky s nepřímo uloženou konzolou;
- f) mosty zatížené nesymetricky;
- g) mosty půdorysně zakřivené.

e)



g)



Obrázek 2.5 - Příklady typicky kroucených železobetonových konstrukcí.

3. Lineární teorie kroucení

Jak bude ukázáno dále, volné a vázané kroucení lze popsat pomocí obyčejných diferenciálních rovnic druhého a čtvrtého řádu. Pro potřeby analytického řešení vázaného kroucení jednoduchých konstrukcí je proto nejprve představena základní matematická teorie řešení tohoto typu rovnic.

3.1 Matematická teorie diferenciálních rovnic

3.1.1 Řešení diferenciálních rovnic druhého řádu

Při řešení diferenciálních rovnic druhého řádu je vycházeno z textů [5], [33] a [35], zabývající se řešením diferenciálních rovnic vyšších řádů.

Diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty lze obecně zapsat ve tvaru:

$$ay'' + by = f(x) \quad (3.1)$$

S ohledem na řešení problém bude uvedeno řešení diferenciální rovnice pouze pro případ, že konstanta a je záporná, konstanta b je kladná a pravá strana rovnice je nulová, konstantní c nebo polynom prvního stupně. Tvar rovnice a řešení pro konstantní pravou stranu zapíšeme následovně:

$$ay'' + by = c \quad (3.2)$$

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{\frac{|b|}{|a|}} \cdot x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{|b|}{|a|}} \cdot x} + \frac{c}{b} \quad (3.3)$$

Tvar rovnice a řešení pro případ kdy je pravá strana rovna polynomu prvního stupně:

$$ay'' + by = cx \quad (3.4)$$

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{\frac{|b|}{|a|}} \cdot x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{|b|}{|a|}} \cdot x} + \frac{cx}{b} \quad (3.5)$$

Kde c_1 a c_2 jsou integrační konstanty, které se získají dosazením konkrétních okrajových podmínek. Více o okrajových podmínkách je uvedeno v kapitole 3.2.3.

Řešení je možné zapsat s výhodou pomocí hyperbolických funkcí (které jsou speciálním případem exponenciálních funkcí), v takovémto tvaru je řešení přehlednější, lépe se hledá řešení a dosazují okrajové podmínky, vzhledem k triviální definici derivací těchto funkcí. Řešení výše uvedených rovnic má v takovém případě tvar:

$$y(x) = c_1 \cosh\left(\sqrt{\frac{|b|}{|a|}} \cdot x\right) + c_2 \sinh\left(\sqrt{\frac{|b|}{|a|}} \cdot x\right) + \frac{c}{b} \quad (3.6)$$

respektive:

$$y(x) = c_1 \cosh\left(\sqrt{\frac{|b|}{|a|}} \cdot x\right) + c_2 \sinh\left(\sqrt{\frac{|b|}{|a|}} \cdot x\right) + \frac{cx}{b} \quad (3.7)$$

Konstanty c_1 a c_2 ale v tomto případě nabývají obecně jiných hodnot než při předchozí formulaci řešení pomocí exponenciálních funkcí. Výsledný graf funkce, která danou diferenciální rovnici řeší je ale v obou případech stejný.

3.1.2 Řešení diferenciálních rovnic vyšších řádů

V této kapitole bude vzhledem k jejímu praktickému uplatnění uvedena pouze diferenciální rovnice čtvrtého řádu v obecném tvaru a její řešení. V části věnované analytickým výpočtům budou pro jednotlivé praktické případy uvedeny výsledky řešení rovnice a její derivace využívané při analýze vázaného kroucení. Rovněž budou uvedeny soustavy rovnic, ze kterých byly získány integrační konstanty pro jednotlivé kombinace okrajových podmínek.

Diferenciální rovnice čtvrtého řádu ve tvaru rovnice kroucení (viz dále kap. 3.2.2) nabývá tvaru:

$$ay^{(4)} - by'' = f(x) \quad (3.8)$$

Kde jsou konstanty a , b kladné a pravá strana rovnice je nulová nebo konstantní, což při praktickém uplatnění odpovídá zatížení prutu osamělým nebo konstantním vnějším kroučícím momentem. Tvar rovnice a řešení pro nulovou pravou stranu lze vyjádřit následovně:

$$ay^{(4)} - by'' = 0 \quad (3.9)$$

Aby bylo možné použít obecné řešení diferenciální rovnice je nutné vydělit celou rovnici pomocí členu a u nejvyšší derivace:

$$y^{(4)} - \frac{b}{a}y'' = 0 \quad (3.10)$$

Řešení takovéto rovnice je:

$$y(x) = \frac{ae^{-\sqrt{\frac{b}{a}}x} \cdot \left(c_1 e^{2\sqrt{\frac{b}{a}}x} + c_2\right)}{b} + c_4x + c_3 \quad (3.11)$$

Tvar rovnice a řešení pro případ kdy je pravá strana rovna konstantě c lze zapsat:

$$ay^{(4)} - by'' = c \quad (3.12)$$

Ze stejného důvodu jako v předchozím případě rovnici vydělíme konstantou a :

$$y^{(4)} - \frac{b}{a}y'' = \frac{c}{a} \quad (3.13)$$

Dále zavedeme substituci pro konstanty k usnadnění zápisu řešení rovnice, tuto substituci lze použít i na předchozí tvary diferenciálních rovnic:

$$\frac{b}{a} = A; \frac{c}{a} = B \quad (3.14)$$

Řešení této diferenciální rovnice v obecném tvaru:

$$y(x) = \frac{c_1 e^{\sqrt{A}x} + c_2 e^{-\sqrt{A}x} - \frac{Bx^2}{2}}{A} + c_4 x + c_3 \quad (3.15)$$

3.2 Řídící rovnice kroucení

3.2.1 Volné kroucení

Volné kroucení se popisuje pomocí poměrného zkroucení θ , to představuje derivaci úhlu pootočení φ_x po délce prutu. Následující text vychází z [42], [43].

$$\theta = \frac{d\varphi_x}{dx} \quad (3.16)$$

Pro kruhové průřezy byla odvozena jednoduchá rovnice pro krouticí moment:

$$T = GI_p \theta = GI_p \frac{d\varphi_x}{dx} \quad (3.17)$$

kde G je modul pružnosti ve smyku průřez
 I_p je polární moment setrvačnosti

Naopak pro obecný průřez je třeba nejdříve najít deplanační funkci, která se získá řešením Laplaceovy rovnice:

$$\frac{\partial^2 \psi(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(y, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (3.18)$$

Okrajová podmínka diferenciální rovnice je založena na předpokladu, že smykové napětí působí na okraji průřezu ve směru tečny, a zároveň je hodnota deplanační funkce ve středu smyku rovna nule:

$$\frac{\partial \psi(y, z)}{\partial n} = n_y z - n_z y \quad (3.19)$$

$$\psi(y_s, z_s) = 0 \quad (3.20)$$

kde n_y, n_z jsou složky jednotkového vektoru který je kolmý k povrchu
 y_s, z_s jsou souřadnice středu smyku

Nalezení analytického řešení deplanační funkce je možné pouze ve speciálních případech a pro obecný průřez je nezbytné využít software, který umožňuje problém řešit numericky, např. pomocí metody konečných prvků.

Podélný posun v rovině průřezu s uvážením deplanace je úměrné deplanační funkci a poměnému zkroucení dle následující rovnice:

$$u(x, y, z) = \psi(y, z) \cdot \theta(x) \quad (3.21)$$

Existují i obecnější teorie, ve kterých je deplanace definována nezávisle na poměrném zkroucení (respektive φ_x') a zavádí se takzvaný sedmý stupeň volnosti χ , jenž představuje míru deplanace, zavedení této funkce umožňuje, aby byla deplanace po délce popsána obecněji [45]. V této práci však bude využito klasických modelů pro kroucení.

Ze známé deplanační funkce lze vyjádřit moment setrvačnosti v prostém kroucení pomocí dvojitého integrálu přes oblast průřezu Ω :

$$I_{SV} = \iint_{\Omega} (y^2 + z^2 + \frac{\partial \psi}{\partial z} y + \frac{\partial \psi}{\partial y} z) d\Omega = I_p + \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} y + \frac{\partial \psi}{\partial y} z \right) d\Omega \quad (3.22)$$

Pro obecné průřezy lze rovnici (3.17) upravit do podoby:

$$T_{SV} = G I_{SV} \theta = G I_{SV} \frac{d\varphi_x}{dx} \quad (3.23)$$

Případně lze rovnici pro volný kroticí moment upravit do integrační podoby:

$$T_{SV} = \iint_{\Omega} (\tau_{SV,xy} \cdot z + \tau_{SV,xz} \cdot y) d\Omega \quad (3.24)$$

Napětí od volného kroucení se vypočtou pomocí následujících vztahů:

$$\tau_{SV,xy} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) \quad (3.25)$$

$$\tau_{SV,xz} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) \quad (3.26)$$

Rovnováhu mezi vnějším působením kroucení po délce prutu a vnitřním momentem od prostého kroucení popisuje statická rovnice:

$$m_x = - \frac{dT_{SV}}{dx} \quad (3.27)$$

A nakonec dosazením předchozích vztahů do této rovnice dostaneme diferenciální rovnici druhého řádu (tzv. řídicí rovnici) pro volné kroucení:

$$m_x = -GI_{SV} \frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} = 0 \quad (3.28)$$

3.2.2 Vázané kroucení

V případě, že je průřezu bráněno v deplanaci, je nutné kroucení obecně rozdělit na volné a vázané. Pro část volného kroucení využijeme výše odvozené rovnice a pro vázané kroucení použijeme rovnice vycházející z tzv. Vlasovovy teorie vázaného kroucení, který představil dvě nové vnitřní síly vztahující se k deplanaci – bimoment B a moment vázaného kroucení T_ω . Text vychází z [37], [27] a [30].

$$B = -EI_\omega \frac{d\theta}{dx} = -EI_\omega \frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} \quad (3.29)$$

$$T_\omega = \frac{dB}{dx} = \frac{d}{dx} \left(-EI_\omega \frac{d\theta}{dx} \right) = -\frac{d}{dx} \left(EI_\omega \frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} \right) \quad (3.30)$$

kde E je modul pružnosti materiálu
 I_ω je výsečový modul setrvačnosti

Bimoment lze zapsat i v integrační podobě pomocí výsečové souřadnice ω jako:

$$B = \iint_{\Omega} (\sigma_x \cdot \omega) d\Omega \quad (3.31)$$

Celkový kroučící moment je součtem momentů od volného a vázaného kroucení a musí splňovat rovnováhu s vnějším kroučícím momentem působícím na konstrukci. Rovnice pro celkový kroučící moment vypadá tedy takto:

$$T_{tot} = T_{SV} + T_\omega = GI_{SV} \frac{d\varphi_x}{dx} - \frac{d}{dx} \left(EI_\omega \frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} \right) \quad (3.32)$$

Odkud dostaneme derivací (zavedením rovnice rovnováhy) finální diferenciální rovnici čtvrtého řádu popisující vázané kroucení, která je dále využita pro výpočty v praktické části této práce:

$$m_x = -\frac{dT_{tot}}{dx} = \frac{d^2}{dx^2} \left(EI_\omega \frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} \right) - GI_{SV} \frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} \quad (3.33)$$

Pro některé případy okrajových podmínek, a za předpokladu známého průběhu celkového kroučícího momentu na konstrukci, je možné pro řešení vázaného kroucení použít diferenciální rovnici s redukováným řádem:

$$T_{tot} = T_{SV} + T_\omega = GI_{SV} \theta - \frac{d^2}{dx^2} (EI_\omega \theta) \quad (3.34)$$

3.2.3 Okrajové podmínky prvků vystavených vázanému kroucení

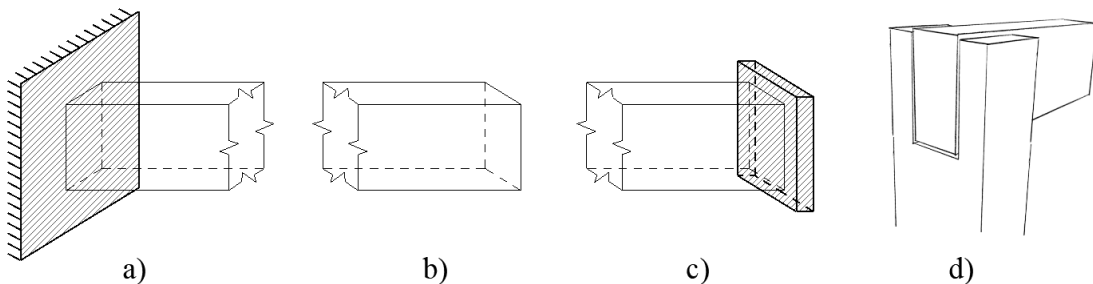
Okrajové podmínky vycházejí z typu podepření prutového prvku. Jelikož rovnice vázaného kroucení je diferenciální rovnice čtvrtého řádu vyskytují se v jejím řešení obecně čtyři integrační konstanty, které získáme dosazením čtveřice okrajových podmínek (dvou na každém konci nosníku, nebo jeho části) a vyřešení soustavy čtyř rovnic o čtyřech neznámých. Složitost soustavy rovnic je dána především typem okrajové podmínky, která představuje různý stupeň derivace.

Typické okrajové podmínky pro nosník o jednom poli jsou:

- Dokonalé vetknutí:** v tomto případě se jedná především o vetknutí prvku a zabránění pootočení i deplanaci průřezu, na tomto konci tedy zapisujeme okrajovou podmínku $\varphi_x = 0$ spolu s $\varphi_x' = 0$
- Volný konec:** na volném konci prutu, kde není bráněno deplanaci pomocí tuhé výztuhy je nulový bimoment a zároveň známá hodnota krouticího momentu, který je v případě spojitého krouticího momentu nulový, respektive roven lokálnímu krouticím momentu působícím na tomto konci. Zapisujeme tedy okrajové podmínky $\varphi_x'' = 0$ spolu s $T_{tot} = 0$, respektive $T_{tot} = c$. Podmínka pro celkový krouticí moment představuje složitější podmínku, protože se v rovnici vyskytují dva různé stupně derivace.

$$T_{tot} = M_x = GI_{SV} \frac{d\varphi_x}{dx} - \frac{d}{dx} \left(EI_{\omega} \frac{d^2\varphi_x}{dx^2} \right) = 0 \quad (3.35)$$

- Volný konec se zdvojenou příčnou výztuhou nebo tuhým příčnícem:** na rozdíl od předešlého případu je místo nulového bimomentu (který je v tomto případě neznámý) bráněno deplanaci, podmínku pro známý krouticí moment $T_{tot} = 0$, respektive $T_{tot} = c$ tedy doplníme podmínkou $\varphi_x' = 0$
- Podpora bránící natočení, ale umožňující deplanaci:** tento případ si lze představit přibližně jako uložení prutu na konci do tzv. vidlice, která neumožní pootočení, ale umožní deformaci průřezu z jeho roviny. Okrajové podmínky tedy jsou $\varphi_x = 0$ a $\varphi_x'' = 0$



Obrázek 3.1 - Příklady interpretace okrajových podmínek pro kroucení.

Tyto okrajové podmínky představují základní podepření prutového prvku, v kapitole 6 budou kombinovány jednotlivé možnosti na nosnících tak, aby postihly nejčastěji používané podepření betonových prvků. Je třeba poznamenat, že u skutečných

konstrukcí zpravidla nelze dosáhnout dokonale tuhých nebo naopak dokonale volných typů podepření, a proto výše uvedené případy představují určitý stupeň idealizace.

Mimo tyto okrajové podmínky (zatížení působící rovnoměrně nebo na konci prutu) je obecně nutné řešit i složitější případ, kdy lokální krouticí moment působí v libovolném místě mezi podporami, v části věnující se analytickým výpočtům budou ukázány případy, kdy působí osamělý krouticí moment uprostřed rozpětí nosníku. V takovémto případě je nutné rozdělit nosník na dvě části a řešit dvě diferenciální rovnice čtvrtého řádu sjednocené pomocí podmínky v místě působení krouticího momentu, kde si je rovno pootočení průřezu (tedy že v tomto místě má funkce pootočení nulovou derivaci, tzn. $\varphi_x' = 0$) a zároveň je součet absolutních hodnot krouticích momentů v levé a pravé části roven působícímu krouticímu momentu. Celkové řešení se získá součtem řešení obou částí nosníku.

3.3 Numerická analýza průřezů

K analýze průřezů byl použitý specializovaný software Scia Engineer [B], který výpočty provádí pomocí metody konečných prvků (MKP). Pro kontrolu výpočtu průřezových charakteristik a jednotkových složek napětí byl použit i software Dlubal RSECTION [C]. Hodnoty momentu setrvačnosti ve volném kroucení byly porovnány i s hodnotami vypočtenými pomocí přibližných vzorců (viz kapitola 6.1.1).

Pro porovnání náchylnosti průřezů k vázanému kroucení je v kapitole 6 použit poměr tuhosti průřezu ve volném kroucení a ve vázaném kroucení:

$$\lambda = \sqrt{\frac{GI_{SV}}{EI_{\omega}}} \quad (3.36)$$

Protože modul pružnosti ve smyku a Youngův modul pružnosti jsou v lineárně pružné oblasti materiálovými konstantami, je důležitý především poměr obou momentů setrvačnosti. Čím nižší bude hodnota λ , tím větší bude vliv vázaného kroucení na prutu, a obráceně. Analýza konkrétních průřezů s číselnými hodnotami je obsahem praktické části v následujících kapitolách, kde jsou průřezy porovnávány pomocí poměrů I_{SV} a I_{ω} . Zjednodušený poměr λ_I je tedy definován takto:

$$\lambda_I = \sqrt{\frac{I_{SV}}{I_{\omega}}} \quad (3.37)$$

3.3.1 Momenty setrvačnosti průřezu pro volné a vázané kroucení

Jednotlivé momenty setrvačnosti byly vypočítány pomocí MKP programu, pro představu zde budou uvedeny analytické vztahy pro jednotlivé momenty setrvačnosti týkající se této problematiky (mimo analytického vztahu pro moment setrvačnosti ve volném kroucení, který byl již představen v kapitole 3.2.1).

Výsečový moment setrvačnosti:

$$I_{\omega} = \int_s \omega^2 ds = \iint_{\Omega} \psi(y, z)^2 d\Omega \quad (3.38)$$

kde ω je výsečová souřadnice průřezu

Polární moment setrvačnosti:

$$I_p = \int_{\Omega} (y^2 + z^2) dA = I_y + I_z \quad (3.39)$$

kde y je pořadnice elementární plochy ve směru osy y

z je pořadnice elementární plochy ve směru osy z

I_y je moment setrvačnosti průřezu k ose y

I_z je moment setrvačnosti průřezu k ose z

Moment setrvačnosti ve volném kroucení – přibližný empirický vztah pro obecný masivní průřez:

$$I_{sv,an} = \frac{A^4}{40I_p} \quad (3.40)$$

kde A je plocha průřezu

3.3.2 Složky napětí na průřezu od kroucení

Kroucení způsobuje v ploše průřezu primární smykové napětí od volného kroucení, a dále sekundární smykové napětí a normálové napětí od vázaného kroucení. Protože jednotlivé složky napětí na průřezu nedosahují maximálních hodnot ve stejných místech (viz dále), nelze jednoduše sčítat dílčí maximální hodnoty. Namísto toho je nutné stanovit místa kde bude hlavní napětí dosahovat nejvyšších hodnot.

Hlavní napětí jsou rovna vlastním číslům tenzorů napětí pro volné a vázané kroucení uvedených v kapitole 2:

$$\bar{\sigma}_{\omega} - \lambda \cdot I = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - \lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & -\lambda & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

$$\det(\bar{\sigma}_{\omega} - \lambda \cdot I) = 0 \quad (3.42)$$

$$(\sigma_{xx} - \lambda) \cdot \lambda^2 + \tau_{xy}^2 \cdot \lambda + \tau_{xz}^2 \cdot \lambda = 0 \quad (3.43)$$

$$\lambda_{1,3} = \sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} \quad (3.44)$$

$$\lambda_2 = \sigma_2 = 0 \quad (3.45)$$

kde σ_{xx} je normálové napětí ve směru osy x
 τ_{xy} je smykové napětí
 τ_{xz} je smykové napětí
 I je jednotková matice
 σ_i je hlavní napětí

Protože při volném kroucení nevzniká normálové napětí ve směru osy x je pro tento případ výpočet hlavních napětí zjednodušen na:

$$\sigma_{1,3} = \pm \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} \quad (3.46)$$

Pro potřebu provádění kontroly analytických výpočtů s výsledky z numerických modelů je v praktické části používáno celkové hlavní napětí spočítané z jednotkových složek napětí vznikajících při vázaném kroucení a působících sil:

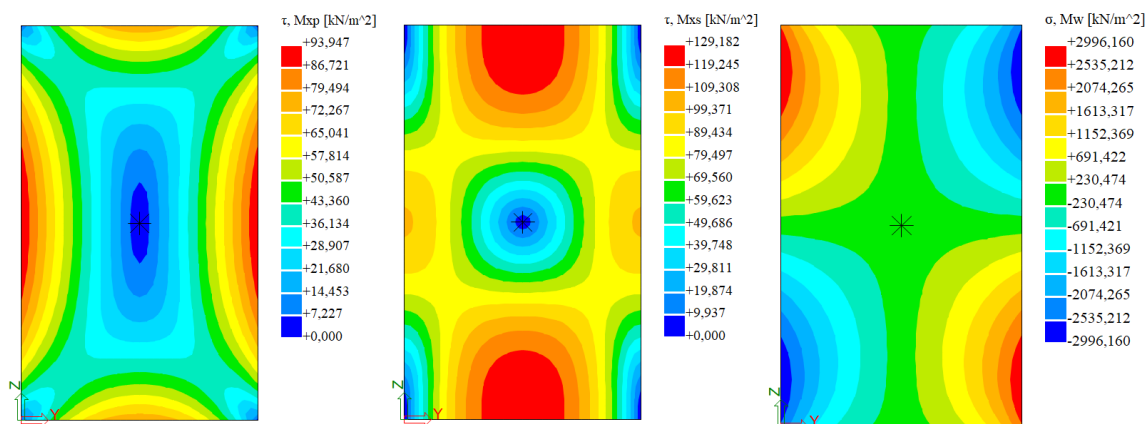
$$\sigma_{1,3} = \frac{B \cdot \sigma_{\omega,unit}}{2} \pm \sqrt{\frac{(B \cdot \sigma_{\omega,unit})^2}{4} + (\tau_{xy,tot})^2 + (\tau_{xz,tot})^2} \quad (3.47)$$

$$\tau_{xy,tot} = T_{SV} \cdot \tau_{xy,SV,unit} + T_{\omega} \cdot \tau_{xy,\omega,unit} \quad (3.48)$$

$$\tau_{xz,tot} = T_{SV} \cdot \tau_{xz,SV,unit} + T_{\omega} \cdot \tau_{xz,\omega,unit} \quad (3.49)$$

kde $\sigma_{\omega,unit}$ je normálové napětí od jednotkového bimomentu
 $\tau_{xy,SV,unit}$ je smykové napětí od jednotkového volného kroucení
 $\tau_{xy,\omega,unit}$ je smykové napětí od jednotkového vázaného kroucení

Na níže uvedeném obrázku jsou ukázány jednotkové průběhy složek napětí $\tau_{SV,unit}$ (τ_{Mxp}), $\tau_{\omega,unit}$ (τ_{Mxs}) a $\sigma_{\omega,unit}$ (σ_{Mw}) na obdélníkovém průřezu, v závorkách je uvedeno značení programem SCIA Engineer. Průběhům složek napětí na konkrétních průřezích zvolených pro výpočty se věnuje kapitola 6.1.2.



Obrázek 3.2 - Průběhy složek napětí od jednotkových vnitřních sil na obdélníkovém průřezu.

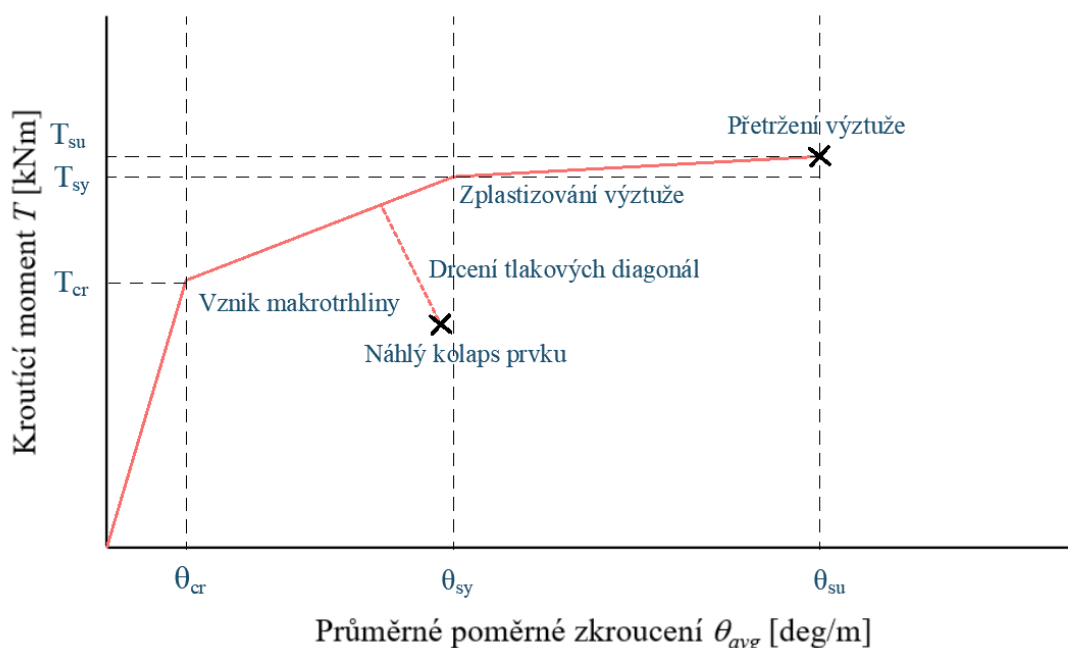
4. Nonlinearity – základní teorie

S ohledem na řešenou problematiku nelineárních výpočtů v této práci je důležité popsat základní teorii nelinearity související s problematikou kroucení železobetonových prutových prvků.

Nonlinearity lze obecně rozdělit do dvou základních skupin:

- materiálové;
- geometrické.

Při analýze masivních železobetonových prvků vystavených kroucení mají zpravidla převládající vliv nelinearity materiálové (fyzikální) – poškození betonu trhlinami nebo drcením a plasticita betonářské výztuže i betonu. Ty zásadním způsobem ovlivňují konstitutivní vztahy (fyzikální rovnice) [6], především tuhost průřezu i materiálu. Vliv materiálových nelinearit je ukázán na následujícím zjednodušeném pracovním diagramu pro kroucený prvek [46].



Obrázek 4.1 – Typický idealizovaný (bilineární) pracovní diagram pro kroucený průřez.

Před vznikem první makrotrhliny (hodnota T_{cr}) se beton chová dle teorie pružnosti, ocel není významně zapojena do přenosu krouticího momentu. První makrotrhlina vzniká po překročení tahové pevnosti betonu, dochází tak ke snížení tuhosti prvku a přenosu zatížení betonem i výztuží. Při dalším zvyšování krouticího momentu dochází ke zplastizování výztuže a tím k nárůstu deformací, dochází rovněž k dalšímu rozvoji trhlin v betonu. Mírné zvyšování únosnosti v této části diagramu je dáno zpevněním výztuže. Kolaps prvku nastává při přetržení betonářské výztuže důsledkem nadměrného přetvoření, případně drcením tlakových diagonál. Kolaps drcením tlakových diagonál je

však nežádoucí, pokud nastane ještě před zplastizováním výztuže, neboť se jedná o náhlé křehké porušení.

Geometrické nelinearity mají zpravidla zanedbatelný vliv na chování typických kroucených železobetonových prvků s masivním průřezem, a proto jsou v další části této kapitoly popsány pouze velmi stručně.

4.1 Materiálové nelinearity

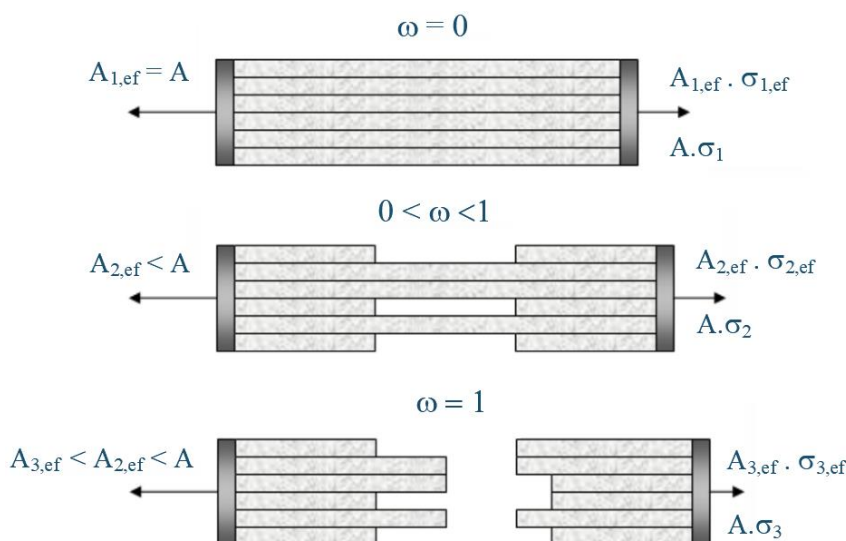
4.1.1 Poškození betonu

Následující text vychází z literatury [47], [48]

Většina materiálů (včetně betonu) obsahuje již od počátku drobné defekty vzniklé během výroby (např. vzduchové dutiny) nebo s časovým odstupem (např. smršťovací trhliny). Při následném zatěžování se mohou tyto drobné defekty zvětšovat, případně i spojovat do větších, jejich růst vede postupně až k porušení konstrukčního prvku.

Pokud jsou tyto defekty poměrně malé a rovnoměrně rozptýlené (během tzv. počáteční fáze deformačního procesu), používá se k popisu chování takového prvku teorie poškození. Ta vychází z představy kontinua a vliv trhlin je zohledněn snížením tuhosti (oslabením) průřezu, respektive snížením tuhosti určitého objemu materiálu. Z pohledu teorie prutových prvků dochází k poklesu průřezových charakteristik (plochy, momentů setrvačnosti apod.). Poškození může být vyvoláno tlakovým (drcení) i tahovým (trhliny) namáháním. V případě že deformace překročí určitou kritickou úroveň, růst defektů se začíná převážně koncentrovat do konkrétních míst, tento jev se nazývá lokalizace nepružného přetváření.

Jednoosý model poškození:



Obrázek 4.2 – Jednoosý model poškození – svazek dokonale pružných vláken s rozdílnou pevností, převzato z [48], upraveno.

Tento model poškození sestává ze svazku vláken, která se chovají lineárně a praskají při různých protaženích. Protože se tato mez liší pro různá vlákna, je zavedena efektivní plocha A_{ef} , která představuje plochu ještě nepoškozených vláken. K této ploše je vztaženo efektivní napětí σ_{ef} , které představuje sílu působící na efektivní plochu. Písmeno ω v této kapitole představuje parametr poškození, což je skalární veličina popisující nepřímo úměrně integritu materiálu.

$$\omega = \frac{A - A_{ef}}{A} \quad (4.1)$$

Pro nepoškozený materiál je $\omega = 0$ a v důsledku šíření defektů materiálem je v konečné fázi $\omega = 1$, což odpovídá plně poškozenému materiálu s nulovou efektivní plochou. Vývoj poškození materiálu je možné charakterizovat zákonem poškození, ten udává, jak se poškození mění v závislosti na deformaci.

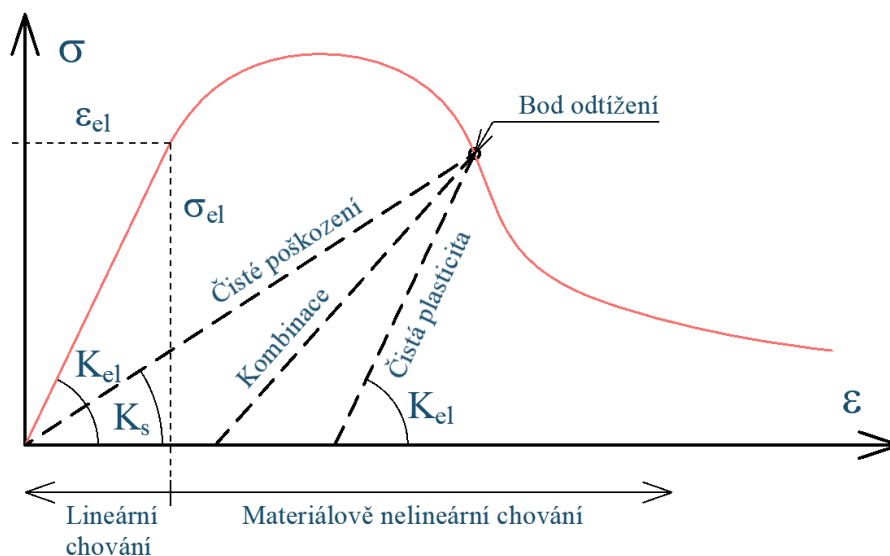
$$\omega = g(\kappa) \quad (4.2)$$

Funkce g souvisí s tvarem pracovního diagramu a je možné jí přímo odvodit z jednoosé tahové zkoušky. Vnitřní proměnná κ představuje nejvyšší úroveň přetvoření materiálu dosaženého během jeho zatěžování.

Parametr poškození lze aplikovat na tuhost materiálu a tím převádět mezi tuhostí elastickou K_e (materiál bez poškození) a sečnou tuhostí poškozeného materiálu K_s .

$$K_s = (1 - \omega)K_e \quad (4.3)$$

Chování materiálového bodu při zatěžování a odtěžování je patrné na následujícím pracovním diagramu.



Obrázek 4.3 - Pracovní diagram zobrazující chování materiálového bodu při odtižení.

Modely poškození pro víceosou napjatost:

V případě trojosé napjatosti se v modelu pracuje s napětím a deformacemi uskupenými do sloupcových matic $\boldsymbol{\sigma}$ a $\boldsymbol{\varepsilon}$. Tuhost nepoškozeného materiálu je dána maticí pružné tuhosti \boldsymbol{D}_e . Nejjednodušší model poškození je založen na předpokladu, že všechny prvky této matice se redukují stejně, pomocí již představeného parametru poškození (tzv. izotropní poškození). Tentokrát ve formě faktoru integrity $1 - \omega$, pomocí kterého je stanovena matice sečné tuhosti:

$$\boldsymbol{D}_s = (1 - \omega)\boldsymbol{D}_e \quad (4.4)$$

Vztah mezi napětím a deformací je ve tvaru:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}_s \boldsymbol{\varepsilon} = (1 - \omega)\boldsymbol{D}_e \boldsymbol{\varepsilon} = (1 - \omega)\bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (4.5)$$

Parametr poškození je potřeba definovat pomocí dalších rovnic – zákonem poškození, podmínkou přípustnosti a podmínkou komplementarity, podobně jako v případě jednoosé napjatosti.

Představený model pro víceosou napjatost je ten nejjednodušší model popsáný pouze jedním parametrem poškození. Vhodný popis pro poškození materiálu za prostorové napjatosti by vyžadoval větší množství veličin (např. tzv. model ortotropního poškození uvažuje se čtyřmi parametry poškození – tři popisují tahová poškození a jeden tlakové poškození).

4.1.2 Plasticita

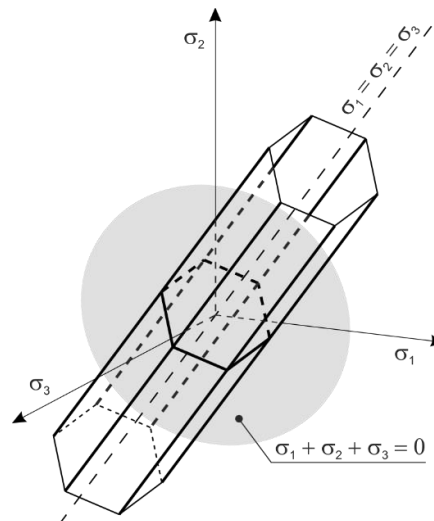
Haigh-Westergaardův prostor: [14], [15], [16]

Haigh-Westergaardův prostor je trojrozměrný prostor sloužící k popisu pružno-plastického chování materiálů a posuzování jejich způsobu přetváření. Je to trojrozměrný kartézský prostor, jehož souřadnice představují velikost hlavních napětí, popisující napjatost v bodě tělesa.

V tomto prostoru jsou definované dvě významné množiny bodů – hydrostatická osa, která je definována předpisem (4.6) a deviatorická rovina, která představuje množinu bodů dle předpisu (4.7), prochází počátkem souřadnic a je kolmá na hydrostatickou osu.

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \quad (4.6)$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (4.7)$$



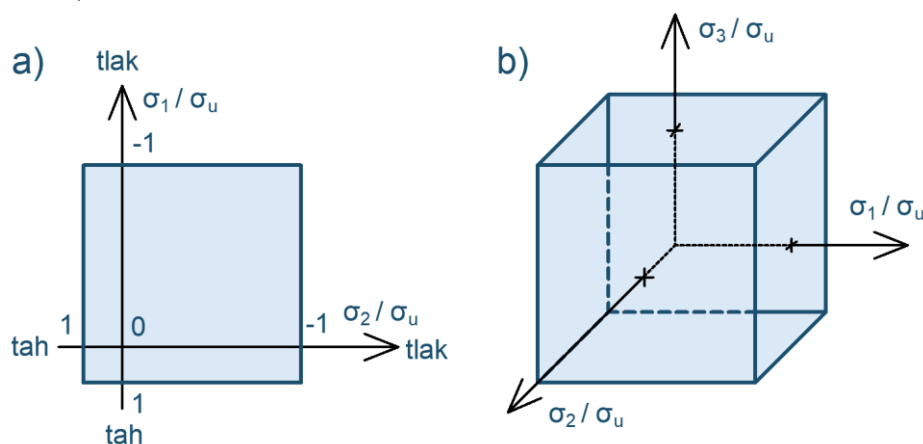
Obrázek 4.4 - Zobrazení mezní plochy plasticity dle hypotézy největšího smykového napětí (tzv. Trescova podmínka plasticity) v Haigh-Westergaardově prostoru, převzato z [16].

Rankinova podmínka plasticity: [7], [8], [9]

Rankinova podmínka plasticity neboli hypotéza maximálních normálových napětí říká, že k plastickému přetváření dochází při překročení maximálního přípustného tlakového či tahového napětí, znázornění podmínky je zobrazeno na obrázku níže. Jedná se o teorii vhodnou pro křehké materiály jako je beton nebo keramické prvky při porušení tahem.

$$\begin{aligned} -\sigma_{U,c} &\leq \sigma_1 \leq \sigma_{U,t} \\ -\sigma_{U,c} &\leq \sigma_2 \leq \sigma_{U,t} \\ -\sigma_{U,c} &\leq \sigma_3 \leq \sigma_{U,t} \end{aligned} \quad (4.8)$$

kde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ jsou hlavní napětí
 $\sigma_{U,c}$ je dovolené tlakové napětí
 $\sigma_{U,t}$ je dovolené tahové napětí

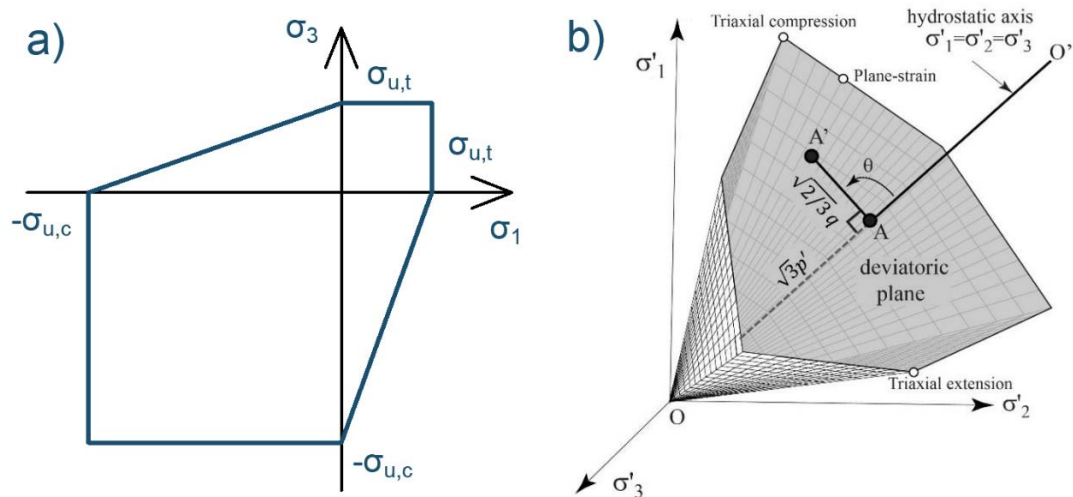


Obrázek 4.5 - Znázornění Rankinovy teorie (plochy plasticity) a) pro dvojosou; b) pro trojosou napjatost.

Mohr-Coulombova podmínka plasticity: [10], [12], [13]

Podobně jako Rankinova teorie poškození je tato teorie vhodná spíše pro křehké materiály s vnitřním třením a rozdílnými mezními hodnotami napětí v tlaku a tahu. Mohr-Coulombova podmínka plasticity je zobecněnou Trescovou podmínkou (viz Obrázek 4.4) a vychází z Coulombova zákona tření. Nejčastěji se používá pro popis pružnoplastického chování zemin a hornin. Při sestavování podmínek plasticity se vychází z Mohrovy kružnice.

$$\begin{aligned} -\sigma_{U,c} &\leq \sigma_1 - \frac{\sigma_{U,t}}{\sigma_{U,c}} \sigma_2 \leq \sigma_{U,t} \\ -\sigma_{U,c} &\leq \sigma_2 - \frac{\sigma_{U,t}}{\sigma_{U,c}} \sigma_3 \leq \sigma_{U,t} \\ -\sigma_{U,c} &\leq \sigma_3 - \frac{\sigma_{U,t}}{\sigma_{U,c}} \sigma_1 \leq \sigma_{U,t} \end{aligned} \quad (4.9)$$



Obrázek 4.6 – Znáornění Mohr-Coulombovy plochy plasticity a) pro dvouosou napjatost, b) pro trojosou napjatost v Haigh-Westergaardově prostoru, převzato z [11].

Je důležité zmínit že existují i další modifikace Mohr-Coloumbovy hypotézy, například parabolické či jiné aproximace, které mohou být za určitých podmínek vhodné i pro typicky plastické materiály. Výhodou modifikací s vyhlazenými rohy je, že mají na celé ploše jednoznačně definovány derivace a normály, které určují, jakým směrem bude docházet k přetváření při dosažení plastického stavu.

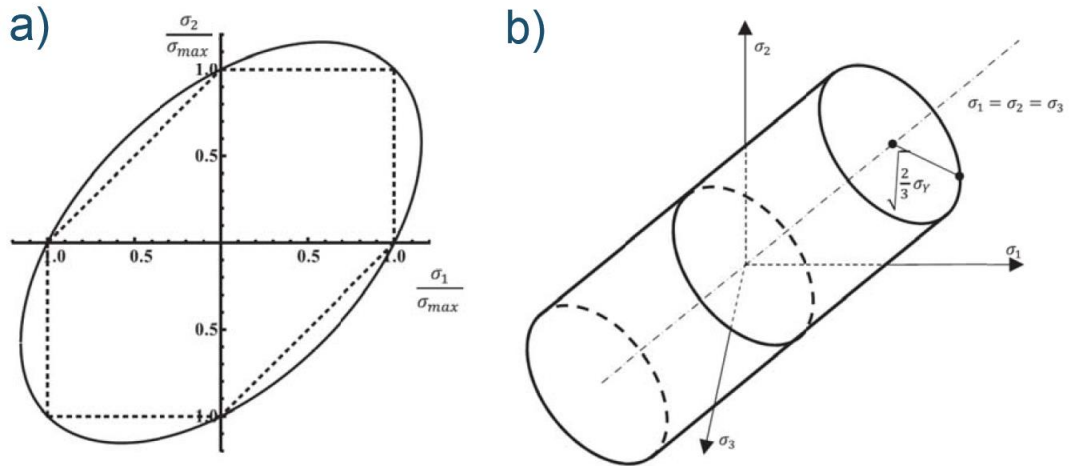
Von Misesova podmínka plasticity: [17], [18]

Tato podmínka plasticity vychází z předpokladu, že k plastickému tečení materiálu dochází v okamžiku, kdy druhý invariant deviatorického napětí dosáhne mezní hodnoty. Je nezávislá na hydrostatickém napětí, tudíž čistý trojosý tlak ani čistý trojosý tah nemůže způsobit zplastizování materiálu. Jedná se o teorii plasticity nejlépe aplikovatelnou na duktilní materiály jako jsou například kovy (ve stavební praxi tedy nejčastěji ocel), před dosažením plastického stavu se uvažuje elastické chování materiálu. Druhý invariant deviatorického napětí je definován v hlavních napětích takto:

$$J_2 = \frac{1}{6} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (4.10)$$

$$\sigma_{mises} = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} \leq \sigma_y \quad (4.11)$$

kde J_2 je druhý invariant deviatorického napětí
 σ_y je mez kluzu materiálu



Obrázek 4.7 - Znázornění Von Misesovy podmínky plasticity a) pro dvousou napjatost b) pro trojosou napjatost v Haigh-Westergaardově prostoru, převzato z [19].

Drucker-Pragerova podmínka plasticity: [20], [13]

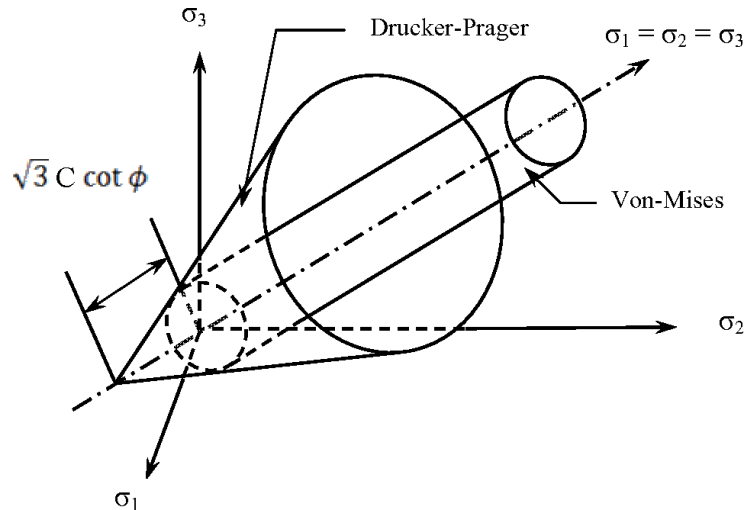
Jedná se o modifikaci Von Misesovy podmínky plasticity pro kvazikřehké materiály, tato podmínka je rozšířena o výraz, který zavádí vliv středního napětí na porušení materiálu. Tato podmínka je závislá na prvním invariantu I_1 a bývá vyjádřena ve tvaru:

$$\sqrt{J_2} = A + B \cdot I_1 \quad (4.12)$$

kde I_1 je první invariant tenzoru napětí
 A, B jsou konstanty určené z experimentů

Tuto podmínku lze zapsat i s použitím hlavních napětí jako:

$$\sqrt{\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = A + B \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (4.13)$$

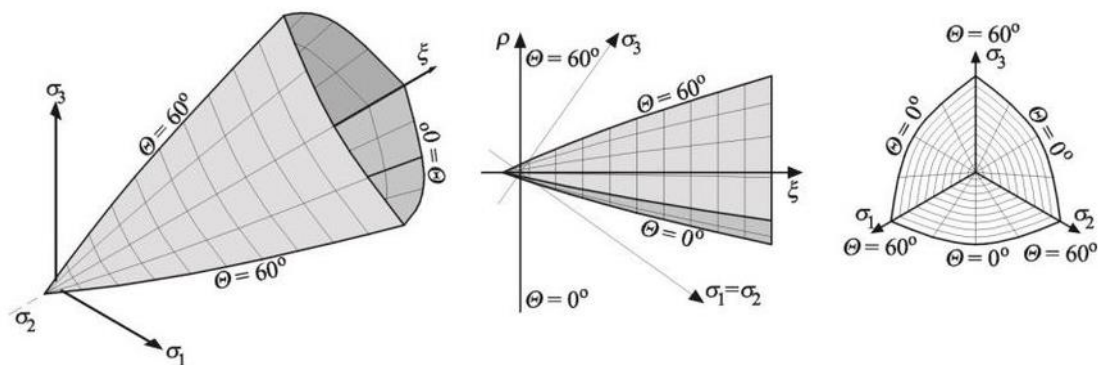


Obrázek 4.8 - Drucker-Pragerova podmínka v porovnání s Von Misesovou podmínkou, převzato z [21].

Drucker-Pragerova podmínka je vhodná pro materiály s vnitřním třením a rozdílnými hodnotami meze kluzu v tlaku a tahu. Mezi takové materiály patří například zeminy, horniny, keramika a beton.

Menétrej-Willamova podmínka plasticity: [22], [23]

Menétrej-Willamův model má oproti některým jiným teoriím výhodu ve schopnosti uvažovat změkčení v plastické oblasti, to je typické pro křehké materiály jako je beton. Ve výpočtech tak snadněji dosahuje konvergence. Model není v prostoru pevně zafixován a může se pohybovat okolo hydrostatické osy v závislosti na změkčení, respektive zpevnění. Tvar plochy plasticity lze modifikovat pomocí bezrozměrného parametru β od trojbokého jehlanu s ostrými rohy až po kužel. Tato podmínka plasticity se s výhodou používá při nelineární analýze betonových konstrukcí, například v programu ATENA Science.



Obrázek 4.9 – Menétrej-Willamův model porušení v Haigh-Westergaardově prostoru, převzato z [24].

4.1.3 Shrnutí materiálových nelinearit

Pro betony běžných pevností lze obecně říci, že při namáhání v tahu dominuje poškození trhlinami. Při namáhání v tlaku, které způsobuje relativně malé deformace převládá plastické chování, které při velkých deformacích přerůstá v poškození drcením.

U nelineárních výpočtů v numerických programech jsou často využity vhodné kombinace teorií poškození a plasticity, takto vzniklý model lze nazvat modelem plastického poškození.

4.2 Geometrické nelinearity

Geometrické nelinearity zahrnují teorii II. řádu a teorii velkých deformací, resp. velkých posunutí. Ačkoliv tyto nelinearity obecně bývají při analýze uvažovány, nemají v případě kroucení železobetonových prvků s masivním průřezem výrazný vliv, a proto nejsou dále podrobně popisovány.

4.3 Metody řešení nelineárních úloh

V následující kapitole budou jsou stručně popsány hlavní metody používané k řešení nelineárních úloh použité především v programu ATENA Science [A], s jehož pomocí jsou řešeny nelineární výpočty v dalších kapitolách této práce.

Jedná se o metody:

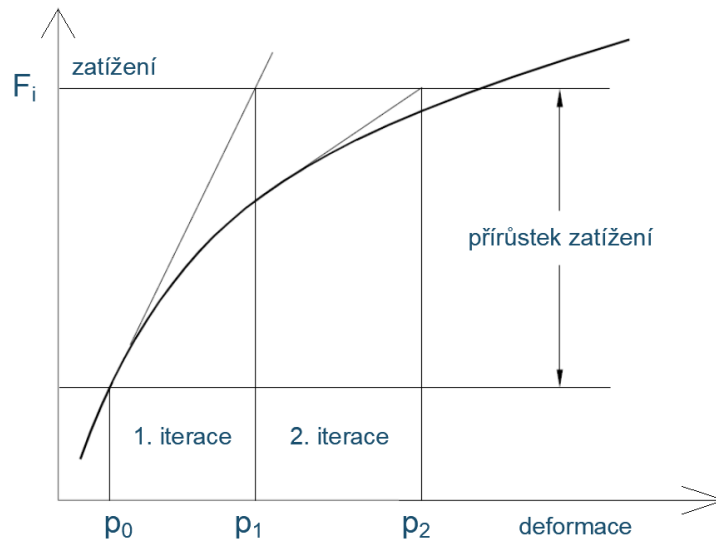
- Plná Newton-Raphsonova metoda
- Modifikovaná Newton-Raphsonova metoda
- Metoda délky oblouku

Další využívané metody, které nebudou podrobně představeny, zahrnují například:

- Kvazi-Newton-Raphsonova metoda
- Newton-Raphsonova metoda s počáteční tuhostí
- Picardova metoda
- Dopředná Eulerova metoda
- Line-Search

4.3.1 Plná Newton-Raphsonova metoda

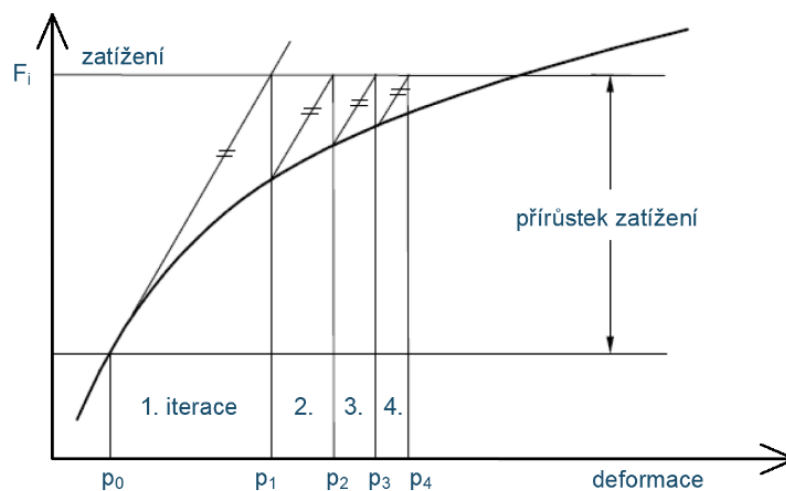
Plná Newton-Raphsonova metoda neboli metoda tečen je iterační numerická metoda která slouží k nalezení řešení nelineárních rovnic. Princip metody spočívá v hledání řešení ve směru tečny v počátečním bodě výpočetního kroku. Pro úlohy mechaniky kontinua udává směr této tečny tuhost konstrukce, respektive tečnou matici tuhosti. Řešení je rozděleno do více zatěžovacích a iteračních kroků, v každém z iteračních kroků je vypočtena nová tečná matice tuhosti. Tato metoda konverguje s užitím menšího počtu iteračních kroků. Zatěžovací krok končí, pokud je splněna podmínka maximálního přípustného rozdílu řešení mezi dvěma po sobě jdoucími iteracemi. [7], [25]



Obrázek 4.10 - Ukázka principu plné N-R metody, převzato z [7], upraveno.

4.3.2 Modifikovaná Newton-Raphsonova metoda

Tato metoda oproti plné N-R metodě nepřepočítává matici tuhosti v každém iteračním kroku, což je často nejnáročnější část výpočtu. Naopak v rámci zatěžovacího kroku pro výpočet používá matici tuhosti z první iterace, a to má za následek značné snížení času potřebného pro výpočet jednotlivých iteračních kroků. Protože metoda používá k výpočtu původní matici tuhosti, je snížena rychlost její konvergence, a k dosažení požadované přesnosti je potřeba více iterací oproti plné N-R metodě. Pro optimální výpočet je vhodné zkombinovat obě metody. Obecně je doporučeno začít řešení s původní metodou a později, blíže extrému využít modifikované metody, tak aby se zamezilo divergenci výpočtu. [7]

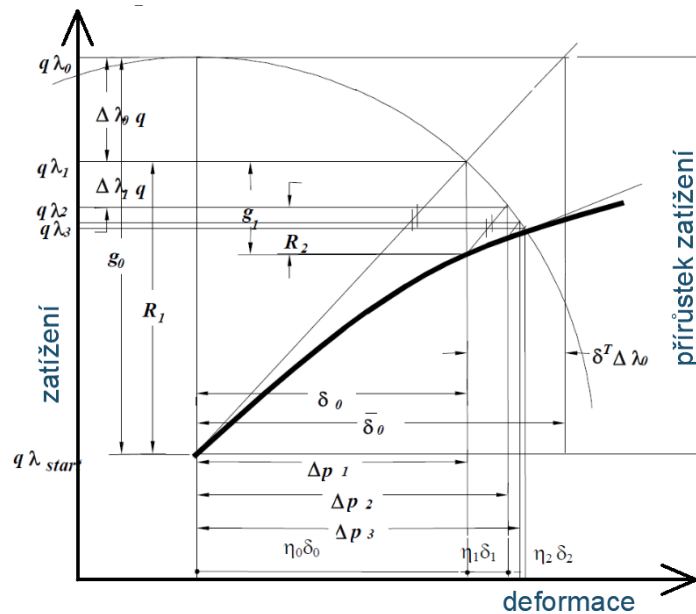


Obrázek 4.11 - Ukázka principu modifikované N-R metody, převzato z [7], upraveno.

4.3.3 Metoda délky oblouku

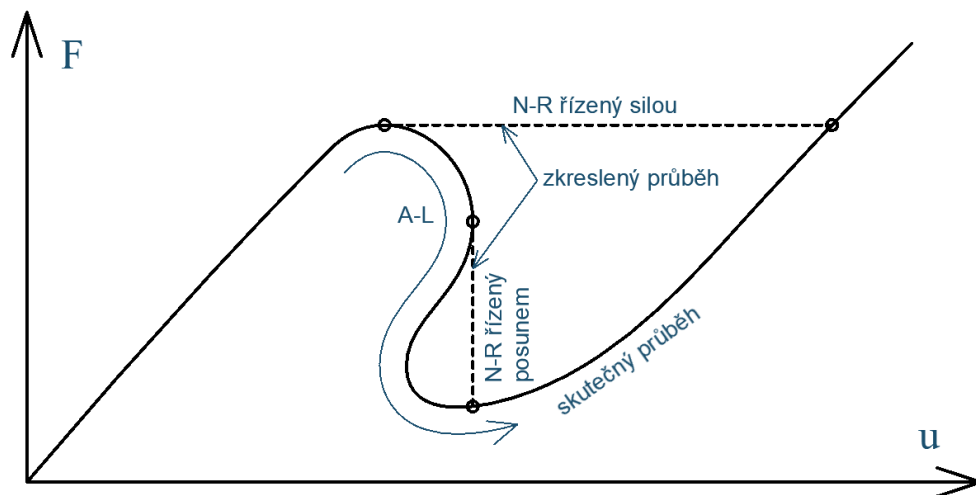
Metoda délky oblouku neboli metoda Arc-Length je jedna z nejrozšířenějších metod pro výpočet nelineárních úloh. Tato metoda byla poprvé použita pro výpočet geometricky nelineárních konstrukcí. Díky svým vlastnostem se tato metoda však nyní používá nejen pro geometricky, ale také pro materiálově nelineární výpočty.

Důvodem takovéto popularity je především robustnost této metody a rychlost výpočtů, které zajišťují dobré výsledky i v případech kdy Newton-Raphsonova metoda neposkytuje přesné řešení, například při lokálních extrémech funkce, kdy N-R metoda není vždy schopná postihnout klesající průběh (viz Obrázek 4.13). V metodě Arc-Length jsou navíc iterovány přírůstky zatížení i přírůstky sil, to umožňuje snižovat i zvyšovat působící zatížení podle potřeby. Matematicky to znamená zavedení dodatečného stupně volnosti spojeného se stupněm zatěžování, který se většinou značí λ , podobně je zaveden i v konečně prvkovém programu ATENA. Nevýhodou metody je neznámý počet kroků potřebný pro kompletní řešení dané úlohy [7], [26]



Obrázek 4.12 - Ukázka principu metody Arc-Length, převzato z [7], upraveno.

Na následujícím obrázku je zobrazeno, jak se jednotlivé typy metod výpočtů chovají v oblastech, kdy na diagramu dochází ke stavům tzv. Snap-back a Snap-through. K prvnímu zmíněnému jevu dochází v případě N-R metody řízené posunem, kdy tato metoda nedokáže vystihnou zápornou změnu deformace a dochází ke zkreslení výsledků. K jevu Snap-through dochází, pokud je metoda N-R řízená silou, která v každém zatěžovacím kroku roste a není umožněn její pokles. Tyto nedostatky odstraňuje právě metoda Arc-Length.



Obrázek 4.13 - Porovnání metod Arc-Length a Newton-Raphson a ukázka kritických bodů na pracovním diagramu, kdy Newton-Raphsonova metoda selhává.

5. Kroucení železobetonových prvků – normy a literatura

Tato kapitola stručně shrnuje současný stav poznání problematiky kroucení železobetonových prvků. Jsou představeny vybrané návrhové postupy a relevantní odborná literatura. Právě v odborné literatuře se objevuje i problematika vázaného kroucení, ale jen výjimečně se týká masivních průřezů.

5.1 Vybrané návrhové postupy pro kroucené prvky

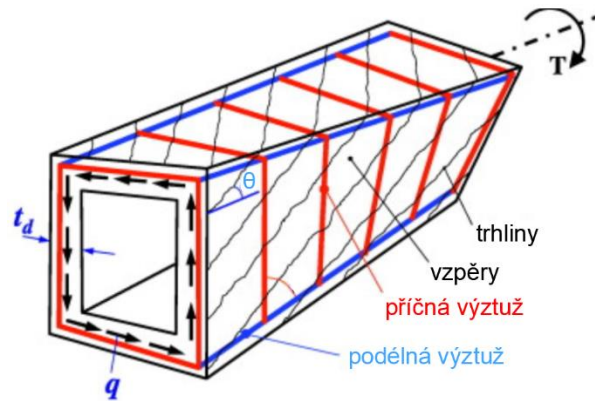
Jedním z cílů této práce je porovnání únosnosti získané z nelineární analýzy kroucených prvků s výsledky dle platných normových postupů. Proto je důležité popsat postup dle normy ČSN EN 1992-1-1 [1]. Dále jsou výsledky porovnávány i s výpočtem provedeným podle příhradové analogie, jehož princip je také představen. Pro celkovou představu o přístupu k navrhování kroucených konstrukcí jsou uvedeny také postupy z americké normy ACI 318-19 [38] a všeobecného návrhového předpisu *fib* Model Code 2010 [39].

Všechny zmíněné přístupy jsou založené na modelu prostorové příhradové analogie a modelu náhradního tenkostěnného průřezu. Většina z nich pak ve výpočtu neuvažuje vliv betonu na celkovou únosnost prvku, s výjimkou II. a III. úrovně aproximace dle Model Code 2010.

Ačkoliv v některých případech na prvcích vázané kroucení vzniká, všechny normy předpokládají, že celkový působící krouticí moment se rovná krouticímu momentu pouze od volného kroucení, a tedy že dochází pouze k namáhání smykovým napětím. I přesto, že různé tvary průřezu mají různé rozložení napětí od kroucení, žádná z těchto norem nedává jasné postupy pro případy, kdy je významné namáhání prvku vázaným kroucením. Tato skutečnost je i jednou z motivací řešení tohoto tématu.

5.1.1 Model příhradové analogie

Příhradová analogie se nejčastěji používá pro navrhování těch částí betonových konstrukcí, u kterých není splněna Bernoulli-Navierova hypotéza rovinnosti průřezu. V rámci železobetonových konstrukcí o těchto místech hovoříme jako o D-oblastech, kterým je potřeba při návrhu věnovat zvýšenou pozornost. Model příhradové analogie pro prvky namáhané kroucením v kombinaci s ohybem nebo osovou silou představili v roce 1972 Lampert a Thürlimann ve své publikaci [40]. Při modelování příhradové analogie se využívají dva základní prvky – vzpěry a táhla.



Obrázek 5.1 - Model náhradní příhradové analogie, převzato z [41], upraveno.

Únosnost prvku je dána pouze jeho příčnou a podélnou výztuží, a odpovídá krouticímu momentu při dosažení meze kluzu ve výztuži. Únosnost vychází z hledání největšího staticky přípustného a nejmenšího kinematicky přípustného krouticího momentu, který nabývá hodnoty:

$$T_{R,S} = 2 \cdot A_k \cdot \sqrt{\frac{A_{sw} \cdot f_{yw}}{s_w} \cdot \frac{A_{sl} \cdot f_y}{u_k}} \quad (5.1)$$

kde	A_k	je plocha vymezena spojnici os podélných prutů
	A_{sw}	je plocha jedné větve třmínku
	f_{yw}	je mez kluzu třmínku
	s_w	je osová vzdálenost třmínků
	A_{sl}	je celková plocha podélné výztuže na kroucení
	f_y	je mez kluzu podélné výztuže
	u_k	je obvod plochy A_k

Dále lze pomocí následujícího vztahu jednoznačně stanovit úhel sklonu tlakových diagonál θ , ten teoreticky může nabývat hodnot v rozmezí 0° až 90° , ale při návrhu je vhodné držet se stanovených mezí pro tangens tohoto úhlu od 0,5 do 2,0 (tj. θ v rozmezí $26,6^\circ$ až $63,4^\circ$), tak aby nedocházelo k drcení betonu v tlakových diagonálách před dosažením meze kluzu výztuže. [40]

$$\operatorname{tg}(\theta) = \sqrt{\frac{A_{sw} \cdot f_{yw}}{s_l} \cdot \frac{u_k}{A_{sl} \cdot f_y}} \quad (5.2)$$

Je důležité zmínit že tento výpočet, na rozdíl výpočtu uvedeném v Eurokódu 2, je možné použít pro výpočet únosnosti i pro jiné hodnoty materiálových vlastností než návrhové. Proto tento vztah bude využit v dalších kapitolách pro stanovení únosnosti s použitím středních hodnot materiálových charakteristik.

5.1.2 ČSN EN 1992 (Eurokód 2)

Eurokód 2 představuje hlavní normu pro navrhování betonových konstrukcí nejen v České republice, ale i ostatních zemích Evropské unie a některých dalších státech světa. Norma udává, že pokud statická rovnováha konstrukce závisí na únosnosti prvku v kroucení, tak musí být proveden přímý návrh dle postupu níže. Pokud ovšem je konstrukce staticky neurčitá, kroucení vzniká pouze vlivem kompatibility a konstrukce z hlediska stability nezávisí na únosnosti v kroucení, má se návrh provést podle minimálních požadavků na výztuž, aby se omezila nadměrná šířka trhlin [1].

Návrh je založen na převodu skutečného průřezu na analogický tenkostěnný dutý průřez. Tento průřez je uzavřený a má konstantní smykový tok. Pro případ složených průřezů norma doporučuje tento průřez rozdělit na dílčí obdélníkové průřezy a sečíst únosnosti jednotlivých částí. Zatížení působící na dílčí část se má stanovit z původního zatížení rozděleného v poměru tuhostí jednotlivých částí.

Smykové napětí od kroucení v i -té stěně analogického tenkostěnného průřezu se stanoví podle následujícího vztahu:

$$\tau_{t,i} = \frac{T_{Ed,i}}{2 \cdot A_{k,i} \cdot t_{ef,i}} \quad (5.3)$$

kde	A_k	je plocha vymezena střednicemi stěn průřezu
	$\tau_{t,i}$	je smykové napětí
	T_{Ed}	je kroučící moment působící na příslušnou část
	$t_{ef,i}$	je účinná tloušťka stěny, kterou lze uvažovat hodnotou A/u , ale nemá být menší než dvojnásobek vzdálenosti mezi okrajem a středem podélné výztuže, vymežující polohu vnějšího uzavřeného třmínku. Pro duté průřezy je horní mezí skutečná tloušťka stěn.
	A_{sl}	je celková plocha podélné výztuže na kroucení
	f_{yd}	je návrhová mez kluzu podélné výztuže
	u_k	je obvod plochy A_k

Vypočtené smykové napětí lze následně převést na ekvivalentní smykovou sílu, pomocí které se nahradí účinek kroucení:

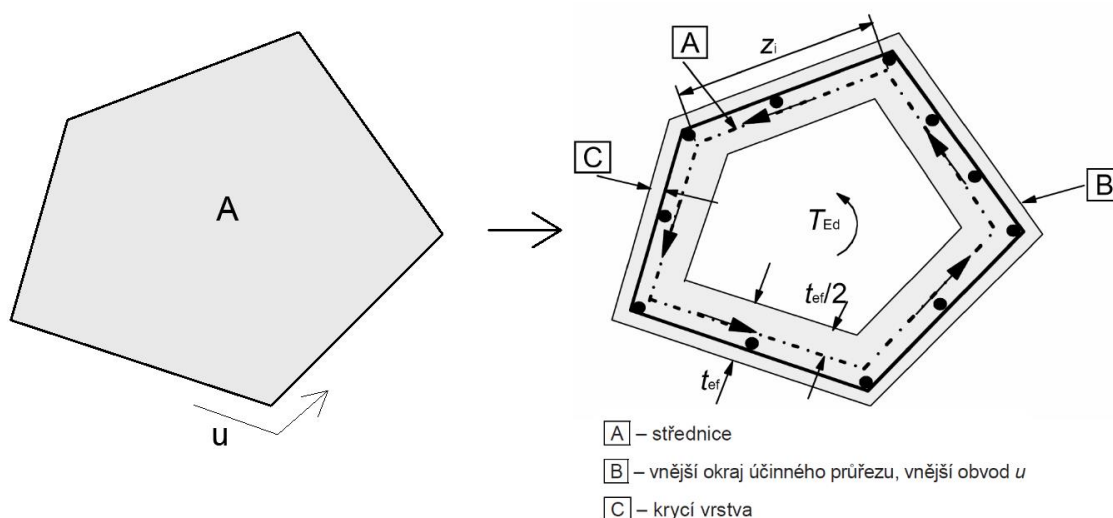
$$V_{Ed,i} = \tau_{t,i} \cdot t_{ef,i} \cdot z_i \quad (5.4)$$

kde	z_i	je délka střednice i -té stěny, definovaná jako vzdálenost mezi průsečíky se střednicemi sousedních stěn, pro dosažení maximální hodnoty se dosadí z_i stěny s nejdelší střednicí
-----	-------	---

Příčnou výztuž je možné navrhnout pomocí vztahů pro návrh příčné výztuže na účinky posouvající síly, místo které se dosadí ekvivalentní smyková síla. Po provedení několika úprav je možné vyjádřit návrhový moment na mezi kluzu smykové výztuže ve tvaru:

$$T_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s_l} \cdot 2 \cdot A_k \cdot f_{ywd} \cdot \cotg(\theta) \quad (5.5)$$

Hodnota úhlu θ má být zvolena v rozmezí $29,7^\circ$ až 45° , tj. $\cotg(\theta)$ v rozmezí 1,75 až 1,00 (pro prvky bez významné osové síly).



Obrázek 5.2 - Princip převodu na analogický tenkostěnný průřez, převzato z [1], upraveno.

Při návrhu je nutné zkontrolovat, zda dochází k požadovanému způsobu porušení dosažením meze kluzu ve výztuži, nikoliv dosažením krouticího momentu na mezi únosnosti tlakových diagonál, který se vypočte [34]:

$$T_{Rd,max} = v \cdot \alpha_{cw} \cdot f_{cd} \cdot A_k \cdot t_{ef} \cdot \sin(2\theta) \quad (5.6)$$

$$v = 0,6 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \quad (5.7)$$

kde	v	je redukční součinitel pevnosti betonu při porušení smykem
	α_{cw}	je součinitel zohledňující stav napětí v tlačeném pásu
	f_{cd}	je návrhová hodnota pevnosti betonu v tlaku
	f_{ck}	je charakteristická hodnota pevnosti betonu v tlaku

Návrhový krouticí moment při vzniku trhliny lze přibližně stanovit dle následujícího vzorce, který bere v potaz pouze samotný beton bez vlivu výztuže. Pokud je prvek z prostého nebo slabě vyztuženého betonu, je vznik trhliny považován za mezní stav únosnosti.

$$T_{Rd,cr} = f_{ctd} \cdot 2A_k \cdot t_{ef,i} \quad (5.8)$$

kde W_t je modul průřezu v kroucení
 f_{ctd} je návrhová tahová pevnost betonu

5.1.3 ACI 318-19

ACI 318-19 je americká norma pro navrhování betonových konstrukcí vydávaná americkým betonářským institutem (ACI). Protože se nejedná o normu platnou v České republice, bude návrhový postup představen ve stručnosti.

Návrh prvku na kroucení je založen na stejném principu jako v již zmíněné EC2-1-1. Je proveden převod skutečného průřezu na náhradní tenkostěnný průřez. Norma představuje termín mezní kroucení, které vymezuje hranici, při které je nutné provést podrobný návrh dle postupů předepsaných v normě. Hodnota mezního kroucení je stanovena jako čtvrtina hodnoty kroučícího momentu při vzniku trhlin (počítaného dle ACI). Do níže uvedených vzorců je nutné dosazovat imperiální jednotky.

Vzorec pro výpočet momentu při vzniku trhlin pro nepředpjaté prvky:

$$T_{cr} = \frac{4\lambda\sqrt{f_c'} A_{cp}^2}{p_{cp}} \quad (5.9)$$

kde f_c' je pevnost betonu v tlaku, značeno dle ACI 318-19
 λ je redukční součinitel
 A_{cp} je plocha betonového průřezu
 p_{cp} je obvod betonového průřezu

Únosnost výztuže je stanovena jako menší z následujících vztahů:

$$T_n = \frac{2A_o A_t f_{yt}}{s} \cdot \cot\theta \quad (5.10)$$

$$T_n = \frac{2A_o A_l f_y}{p_h} \cdot \tan\theta \quad (5.11)$$

kde A_o je plocha vymežující smykový tok, stanovena jako 85 % z plochy vymezené střednicemi krajních větví třmínků
 A_t je plocha jedné větve třmínku
 s je plocha betonového průřezu
 f_{yt} je mez kluzu příčné výztuže
 A_l je celková plocha podélné výztuže
 f_y je mez kluzu podélné výztuže
 p_h je obvod střednic krajních větví třmínků

Návrhová únosnost výztuže je potom vypočtena jako:

$$T_u = T_n \cdot \phi \quad (5.12)$$

kde ϕ je součinitel redukované únosnosti, pro návrh na účinky smyku a kroucení

Hodnotu úhlu θ je možné volit v rozmezí 30° až 60°.

Vzorec pro únosnost tlakových diagonál není v normě přesně specifikován, namísto toho jsou uvedena kritéria, která musí kroucený průřez splňovat.

Z popsaného postupu je patrné, že návrhová únosnost je stanovena pomocí velmi podobných rovnic jako v Eurokódu 2, kdy se počítá moment při dosažení meze kluzu výztuže, pouze s odlišnou filozofií použití dílčích součinitelů spolehlivosti, typickou pro ACI. Dílčí součinitele spolehlivosti, které jsou obsaženy v EC2 již v rámci materiálových charakteristik, vstupují do výpočtu dle ACI v podobě součinitele ϕ , kterým se redukuje výsledná únosnost na únosnost návrhovou. Další mírnou odlišností je výpočet plochy, která vymezuje smykový tok (A_o), ta se počítá pouze jako 85 % plochy vymezené střednicemi třmínků, oproti celé ploše vymezené střednicí analogického tenkostěnného dutého průřezu dle Eurokódu 2. [38]

5.1.4 Model Code 2010

Fib Model Code [39] slouží jako předloha pro ostatní normy a reflektuje nejaktuálnější vědecké poznatky v oblasti betonových konstrukcí. V aktuální platné verzi (2010) jsou představeny čtyři úrovně aproximace (Levels of Approximation neboli LoA), poskytující různou míru komplexnosti návrhu.

Při analýze kroucení, se tyto odlišné úrovně projeví při určení minimální hodnoty úhlu sklonu tlakových diagonál θ_{min} (= 30° pro betonové prvky bez předpětí), hodnoty jsou pro I. úroveň aproximace udány přímo pro různě zatížené prvky. V úrovních II. a III. se θ_{min} stanoví za pomoci podélného poměrného přetvoření betonu ve středu ramene vnitřních sil průřezu. Úroveň IV. udává, že úhel sklonu tlačené diagonály se stanoví na vhodně zvoleném modelu pomocí metody konečných prvků. [31] Úhel sklonu tlakových diagonál musí splňovat následující dvojitou nerovnost:

$$\theta_{min} \leq \theta_{MC} \leq 45^\circ \quad (5.13)$$

Další hodnotou, která je ovlivněna různými úrovněmi aproximace je hodnota k_c , která představuje redukční součinitel pevnosti betonu, tvořený dvěma členy – úrovní napětí v tlačené části průřezu a možností křehkého porušení u betonů s pevností vyšší než 30 MPa. Tento součinitel tedy dokáže postihnout kombinaci kroucení s ohybem a tlakem. Pro úroveň aproximace I. nebo pro namáhání pouze kroucením je jeho hodnota rovna 0,55.

Přístup k samotnému výpočtu únosnosti v kroucení je podobný jako u předchozích norem. Stanoví se náhradní dutý uzavřený tenkostěnný průřez, následuje převod na ekvivalentní smykovou sílu a posouzení podle příslušných vztahů.

$$t_{ef} \leq \frac{d_k}{8} \quad (5.14)$$

kde d_k je průměr kružnice vepsané do nejúžší části průřezu

Únosnost tlakových diagonál (obdobný vzorec jako u EC2):

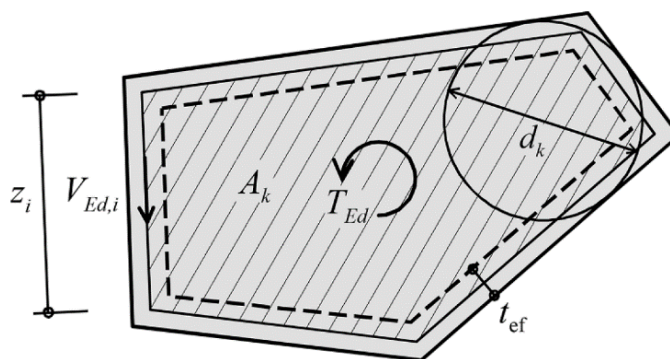
$$T_{Rd,max} = k_c \cdot f_{cd} \cdot 2A_k \cdot t_{ef} \cdot \sin(\theta_{MC}) \cdot \cos(\theta_{MC}) \quad (5.15)$$

Návrhová únosnost výztuže je dána menším z těchto vztahů:

$$T_{Rd} = \frac{2A_k A_{sw} f_{ywd}}{s_w} \cdot \cot g(\theta_{MC}) \quad (5.16)$$

$$T_{Rd} = \frac{4A_k A_{sl} f_{yd}}{z_i} \cdot \tan(\theta_{MC}) \quad (5.17)$$

kde z_i je příslušná délka strany náhradního tenkostěnného průřezu



Obrázek 5.3 - Definice náhradního dutého průřezu dle Model Code 2010, převzato z [39].

5.2 Vázané kroucení v odborné literatuře

Podobně jako v případě norem, se i odborná literatura v drtivé většině věnuje volnému kroucení u masivních železobetonových průřezů, případně vázanému kroucení tenkostěnných průřezů, zpravidla z oceli.

Vázanému kroucení masivních železobetonových prvků se jako jeden z mála ve svých pracích věnuje Sapountzakis (například [28], [49]). Ten se zabývá především použitím metody hraničních prvků pro výpočet napětí od volného i vázaného kroucení na prvcích s libovolným průřezem.

Další literatura se věnuje hlavně principům stanovení napětí od vázaného kroucení, a následné implementaci tohoto výpočtu do některého z konečně prvkového programu. V nedávné době byla například představena 2D MKP analýza průřezu v programech

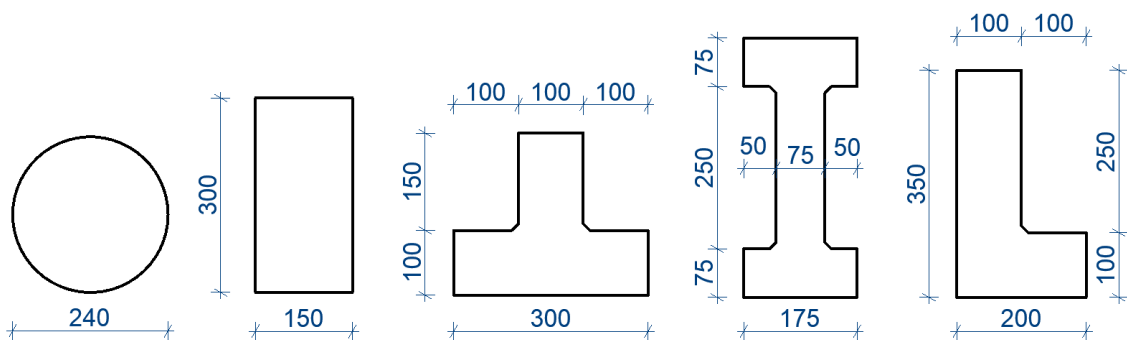
Scia Engineer a Dlubal RSECTION. Ty umožňují stanovit napětí od volného či vázaného kroucení. Jako zdroje tohoto řešení jsou uvedeny publikace od Kabeláče [50], a Kindmanna a Krause [51]. Především druhá zmíněná publikace podrobně popisuje stanovení výsečové souřadnice pomocí principu virtuálních prací s použitím konečných prvků na libovolných průřezech (včetně masivních). Výsledky získané tímto výpočtem jsou s výhodou použity při řešení vázaného kroucení v této práci.

6. Lineární analýza vázaného kroucení

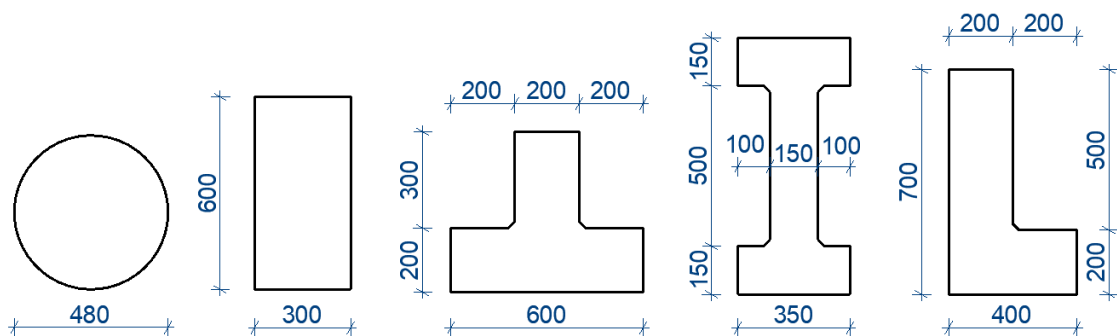
Tato část práce je věnována chování kroucení betonových prvků před vznikem trhlin, tedy v oblasti lineárního působení. Je provedeno analytické řešení kroucení na betonových prvcích s typickými masivními průřezy a jeho porovnání s lineárním numerickým řešením v programu ATENA Science. Výsledky lineární analýzy slouží také jako podklad nelineárních výpočtů, pro zvolení vhodného numerického modelu, stanovení míst vzniku prvních trhlin, trhlin od volného kroucení a k vhodnému zatížení konstrukce.

6.1 Typické masivní železobetonové průřezy

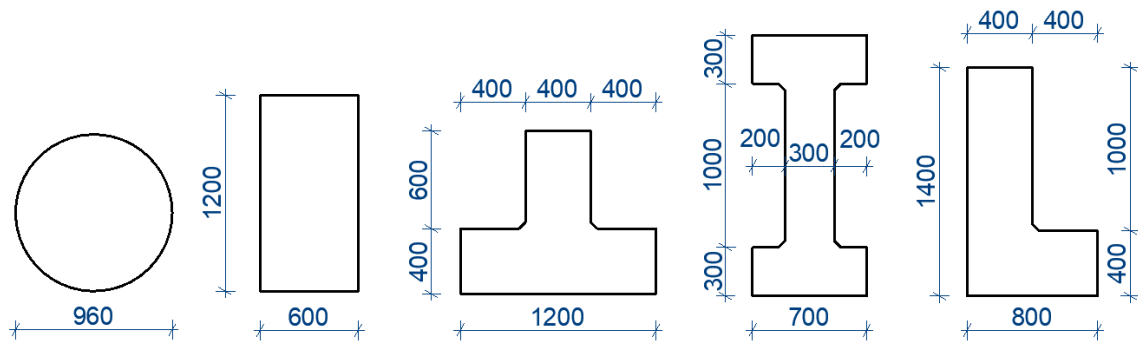
Pro zkoumání vlivu kroucení na prvky s různými průřezy bylo vybráno několik, masivních průřezů typických pro betonové konstrukce. Tyto průřezy byly zvoleny ve třech velikostech tak, aby mohl být posouzen vliv velikosti na úroveň napětí od jednotlivých složek kroucení po délce nosníku. Průřezy jsou masivní a pro jednotlivé velikosti (malá – s, střední – m, velká – l) mají všechny jednotnou plochu. Jedná se o průřezy tvaru – obdélník, T, I, L. Tato skupina průřezů je doplněna o kruhový průřez tak, aby bylo provedeno srovnání s průřezem, který nedeplanuje, a ze všech možných masivních průřezů teoreticky nejlépe vzdoruje účinkům kroucení.



Obrázek 6.1 - Zvolené typické průřezy – geometrie malá.



Obrázek 6.2 - Zvolené typické průřezy – geometrie střední.



Obrázek 6.3 - Zvolené typické průřezy – geometrie velká

Na výše uvedených obrázcích je představena geometrie zvolených průřezů, rozdíl mezi jednotlivými velikostmi s:m:l je v poměru 1:2:4.

6.1.1 Průřezové charakteristiky

V následující tabulce jsou uvedeny jednotlivé momenty setrvačnosti potřebné pro řešení rovnic volného a vázaného kroucení. Pro zajímavost a pro porovnání je zde uvedena hodnota polárního momentu setrvačnosti spočtená dle SCIA Engineer uvedeného na straně 34 manuálu [36], viz rovnice (6.1).

Tabulka 6.1 - Průřezové charakteristiky zvolených průřezů

Průřezy		A	$I_{SV,mkp}$	I_{ω}	I_p	$I_{p,scia}$	$I_{SV,an}$	$I_{SV,scia,an}$
		[m ²]	[m ⁴]	[m ⁶]	[m ⁴]	[m ⁴]	[m ⁴]	[m ⁴]
MALÉ	Kruh	0,045	3,26E-04	0	3,26E-04	2,30E-04	3,15E-04	4,45E-04
	Obdélník	0,045	2,32E-04	2,32E-07	4,22E-04	3,48E-04	2,43E-04	2,95E-04
	T	0,045	1,47E-04	2,31E-07	4,47E-04	3,17E-04	2,29E-04	3,24E-04
	I	0,045	8,83E-05	1,60E-06	8,79E-04	8,07E-04	1,17E-04	1,27E-04
	L	0,045	1,36E-04	5,32E-07	6,02E-04	5,01E-04	1,70E-04	2,05E-04
STŘEDNÍ	Kruh	0,18	5,21E-03	0	5,21E-03	3,68E-03	5,04E-03	7,12E-03
	Obdélník	0,18	3,71E-03	1,48E-05	6,75E-03	5,57E-03	3,89E-03	4,71E-03
	T	0,18	2,35E-03	1,48E-05	7,15E-03	5,07E-03	3,67E-03	5,18E-03
	I	0,18	1,41E-03	1,02E-04	1,41E-02	1,29E-02	1,87E-03	2,03E-03
	L	0,18	2,18E-03	3,41E-05	9,64E-03	8,01E-03	2,72E-03	3,28E-03
VELKÉ	Kruh	0,72	8,26E-02	0	8,27E-02	5,84E-02	8,13E-02	1,15E-01
	Obdélník	0,72	5,93E-02	9,49E-04	1,08E-01	8,91E-02	6,22E-02	7,54E-02
	T	0,72	3,76E-02	9,47E-04	1,14E-01	8,11E-02	5,87E-02	8,29E-02
	I	0,72	2,26E-02	6,55E-03	2,25E-01	2,07E-01	2,99E-02	3,25E-02
	L	0,72	3,48E-02	2,18E-03	1,54E-01	1,28E-01	4,36E-02	5,24E-02

kde

A	je plocha průřezu
$I_{SV,mkp}$	je moment setrvačnosti ve volném kroucení spočten pomocí MKP
I_{ω}	je výsečový moment setrvačnosti
I_p	je polární moment setrvačnosti spočten pomocí vzorce (3.39)
$I_{p,scia}$	je polární moment setrvačnosti spočten dle (6.1)
$I_{SV,an}$	je moment setrvačnosti ve volném kroucení dle vzorce (3.40)
$I_{SV,scia,an}$	je moment setrvačnosti ve volném kroucení spočtený dle vzorce (3.40) s využitím hodnoty $I_{p,scia}$

$$I_p = \sqrt{I_y^2 + I_z^2} \quad (6.1)$$

Při porovnání se vztahem (3.39) je zřejmé, že vztah (6.1) použitý v softwaru udává nesprávnou hodnotu polárního momentu setrvačnosti.

Tabulka 6.2 - Porovnání průřezových charakteristik vybraných průřezů

Průřezy		Rozdíl 1	Rozdíl 2	Rozdíl 3	ρ	λ_I^2	λ_I
		[%]	[%]	[%]	[-]	[m ⁻²]	[m ⁻¹]
MALÉ	Kruh	29%	27%	-3%	0,000	∞	∞
	Obdélník	18%	21%	5%	0,451	999,9	31,6
	T	29%	55%	36%	0,671	636,1	25,2
	I	8%	31%	24%	0,900	55,2	7,4
	L	17%	34%	20%	0,774	255,8	16,0
STŘEDNÍ	Kruh	29%	27%	-3%	0,000	∞	∞
	Obdélník	18%	21%	5%	0,451	250,0	15,8
	T	29%	55%	36%	0,671	158,9	12,6
	I	8%	31%	24%	0,900	13,8	3,7
	L	17%	34%	20%	0,774	63,9	8,0
VELKÉ	Kruh	29%	28%	-2%	0,000	∞	∞
	Obdélník	18%	21%	5%	0,451	62,5	7,9
	T	29%	55%	36%	0,671	39,7	6,3
	I	8%	31%	24%	0,900	3,4	1,9
	L	17%	34%	20%	0,774	16,0	4,0

Pro porovnání jednotlivých výpočtů a průřezových charakteristik jsou zavedeny vhodné veličiny, které jsou definovány následovně:

$$\text{Rozdíl 1} = \frac{I_{SV,scia,an} - I_{SV,an}}{I_{SV,scia,an}} \quad (6.2)$$

$$\text{Rozdíl 2} = \frac{I_{SV,scia,an} - I_{SV,mkp}}{I_{SV,scia,an}} \quad (6.3)$$

$$\text{Rozdíl 3} = \frac{I_{SV,an} - I_{SV,mkp}}{I_{SV,an}} \quad (6.4)$$

$$\rho = 1 - \frac{I_{SV,mkp}}{I_p} \quad (6.5)$$

Z rozdílu 1 je patrné, že odhad momentu setrvačnosti ve volném kroucení je pro případ, kdy je tato veličina spočtena pomocí polárního momentu setrvačnosti dle SCIA Engineer, ve všech případech výrazně nadhodnocen oproti správnému výpočtu polárního momentu setrvačnosti dle teorie pružnosti. V praxi by tedy tato hodnota neměla být využívána a vždy by měla být provedena 2D MKP analýza průřezu!

Rozdíl 2 a rozdíl 3 slouží pro porovnání momentů setrvačnosti ve volném kroucení spočtených pomocí přibližných vzorců (uvedených v kapitole 3.3.2) a momentu setrvačnosti stanoveného pomocí metody konečných prvků (tato hodnota je uvažována jako “přesná“ a bude dále použita pro výpočty).

Součinitel ρ slouží k relativnímu vyjádření poklesu tuhosti průřezu ve volném kroucení vlivem deplanace v porovnání s rovnoplochým kruhovým průřezem, Limitní hodnoty nastávají, pokud je $I_{SV,mkp} = I_p$, což znamená že průřez vůbec nedeplanuje a součinitel $\rho = 0$. Na druhém okraji spektra je případ, kdy je průřez namáhán pouze vázaným kroucením, moment setrvačnosti $I_{SV,mkp} = 0$ a součinitel $\rho = 1$.

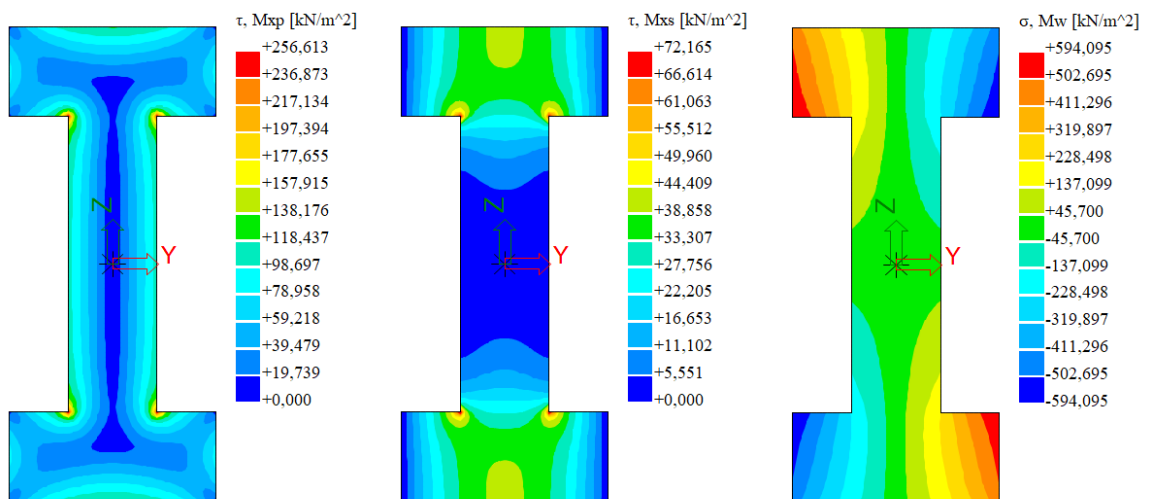
Podobný účel mají koeficienty λ_I , resp. λ_I^2 , které vycházejí z diferenciální rovnice vázaného kroucení (3.33), tato rovnice je řízena právě poměrem tuhosti průřezu ve volném a vázaném kroucení. Koeficient λ_I je definován rovnicí (3.37). Může sloužit jako předběžný odhad převažujícího typu kroucení [37]:

- Pro $\lambda \rightarrow 0$: vázané kroucení je dominantní a nelze ho zanedbat
- Pro $\lambda \rightarrow \infty$: volné kroucení dominuje a vázané má zanedbatelný vliv

Z výše uvedených parametrů je vidět, že se vázané kroucení bude nejvíce projevat u průřezů I a L s velkými rozměry. Dále je patrné že i u ostatních typů průřezu má velikost průřezu vliv na náchylnost k vázanému kroucení a hodnota koeficientu není konstantní při shodných tvarech průřezů lišících se pouze svými rozměry. Toto pozorování bude ověřeno pomocí řešení diferenciální rovnice vázaného kroucení v kapitole 6.4.

6.1.2 Normálová a smyková napětí na průřezu

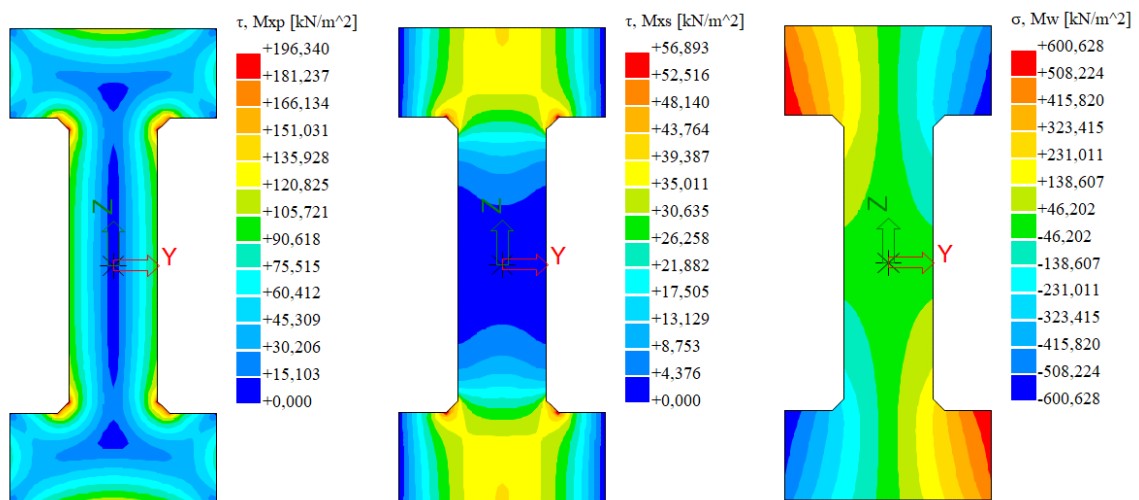
V kapitole 3.3.2 byly představeny průběhy jednotlivých složek napětí na jednoduchém obdélníkovém průřezu. V této kapitole budou upřesněny průběhy a maximální hodnoty napětí pro zvolené průřezy od namáhání jednotkovými vnitřními silami (bimomentem a kroučícími momenty), aby byl lépe popsán vliv tvaru a velikosti průřezu na celkovou napjatost.



Obrázek 6.4 - Průběhy složek napětí na průřezu od jednotkových vnitřních sil (I – střední).

Na obrázku výše je zobrazen typický průřez, na jehož celkovou napjatost má značný vliv vázané (sekundární) smykové napětí a normálové napětí od bimomentu, která jsou způsobena vázaným kroucením. Masivní průřez tvaru I je u betonových konstrukcí typický především pro prefabrikované vazníky a mostní předpjaté nosníky.

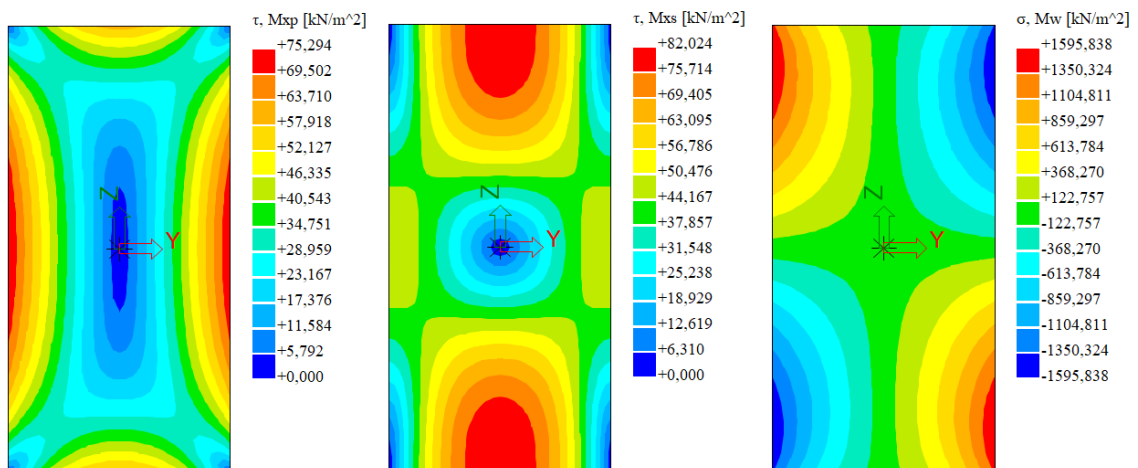
Lze pozorovat, že na průřezu s vnitřními rohy (konkávními) dochází v těchto místech k singularitám, ve kterých nabývá napětí vysokých hodnot (teoreticky je napětí nekonečné, což ale nelze postihnout při výpočtu konečnými prvky, kdy je napětí do jisté míry zprůměrováno). Aby k těmto singularitám nedocházelo, a průřezy zároveň odpovídaly skutečnosti, je nutné provést zkosení hran. Tato úprava sníží koncentraci napětí v rozích. Nejideálnější řešení tohoto problému by bylo provedením zaoblení konkávních rohů do čtvrtkružnice, avšak tato úprava by ztížila vytváření modelu a analýzu v nelineárním numerickém programu, a zároveň i zkomplikovala praktické provedení takové úpravy.



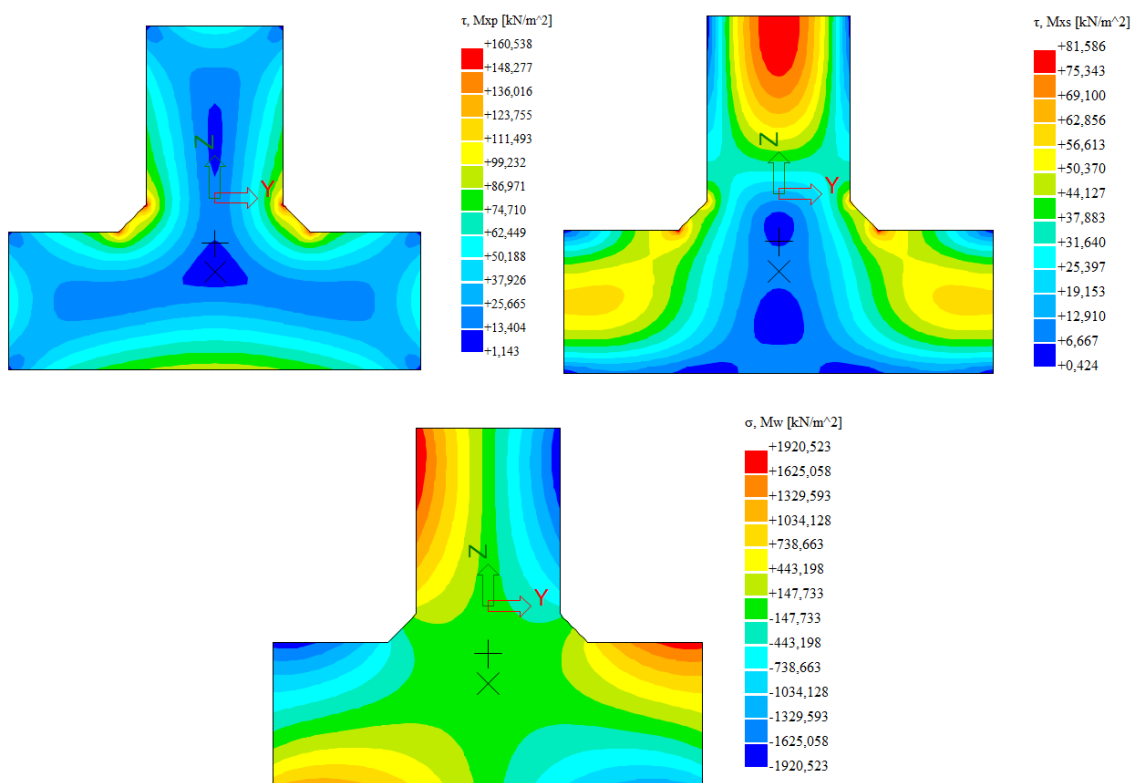
Obrázek 6.5 - Průběhy složek napětí na upraveném průřezu od jednotkových vnitřních sil (I – střední).

Z obrázků je patrné, že po provedení úprav (zkosení vnitřních rohů 20/20 mm) smykové napětí v místech singularit kleslo přibližně o 20 % (při zvolené velikosti konečných prvků), naopak normálové napětí nepatrně vzrostlo, protože došlo k přidání další plochy a tím zvětšení maximální výsečové souřadnice. Oba typy průřezů byly spočítány metodou konečných prvků s hustotou sítě 5 mm (pro střední průřez o výšce 800 mm a šířce 350 mm).

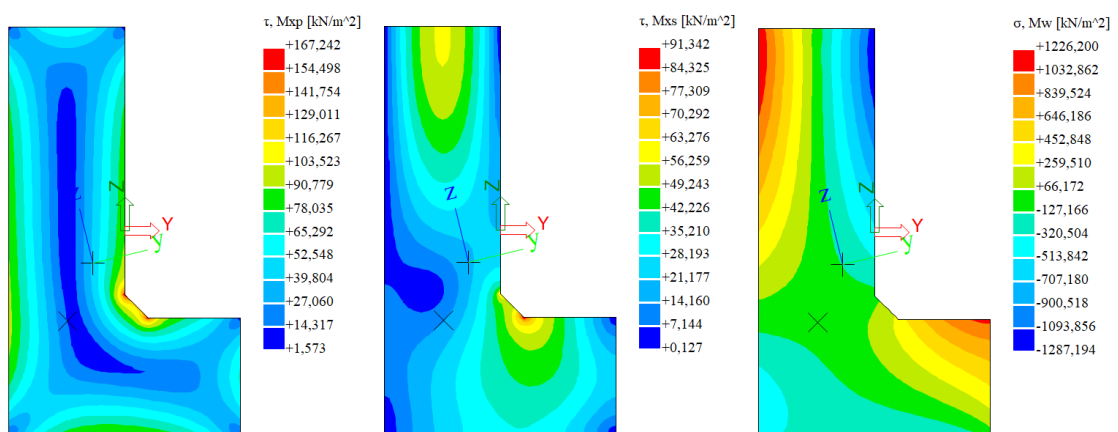
Pro porovnání velikostí napětí na různých typech průřezů jsou dále uvedeny výsledky pro ostatní střední velikosti průřezů.



Obrázek 6.6 - Průběhy složek napětí na průřezu od jednotkových vnitřních sil (obdélník – střední).



Obrázek 6.7 - Průběhy složek napětí na průřezu od jednotkových vnitřních sil (T – střední).



Obrázek 6.8 - Průběhy složek napětí na průřezu od jednotkových vnitřních sil (L – střední).

Při porovnání jednotlivých výsledků napětí na průřezích je patrné, že hodnoty příslušných smykových napětí se od sebe řádově neliší, pouze hodnoty normálových napětí jsou přibližně 10x až 20x vyšší, je tedy možné, že v místech, kde na nosníku dochází k výraznému bránění deplanace (a tedy i největším hodnotám bimomentu), budou dominovat normálová napětí. Tento předpoklad bude ověřen dále pomocí výpočtů.

Smyková napětí na průřezu nabývají maximálních hodnot, v místech konkávních rohů, respektive uprostřed stran. Avšak normálová napětí dosahují maximálních hodnot v částech průřezu nejvzdálenějších od středu smyku, kde je největší hodnota výšečová souřadnice. Jak již bylo zmíněno na začátku této kapitoly, tato skutečnost neumožňuje jednoduché stanovení místa s nejvyšší napjatostí na průřezu, a proto je využito výsledků z MKP výpočtů napětí a jejich převedení na hlavní napětí v celé ploše průřezu dle vztahu (3.47).

Tabulka 6.3 - Maximální složky napětí při jednotkovém namáhání průřezů

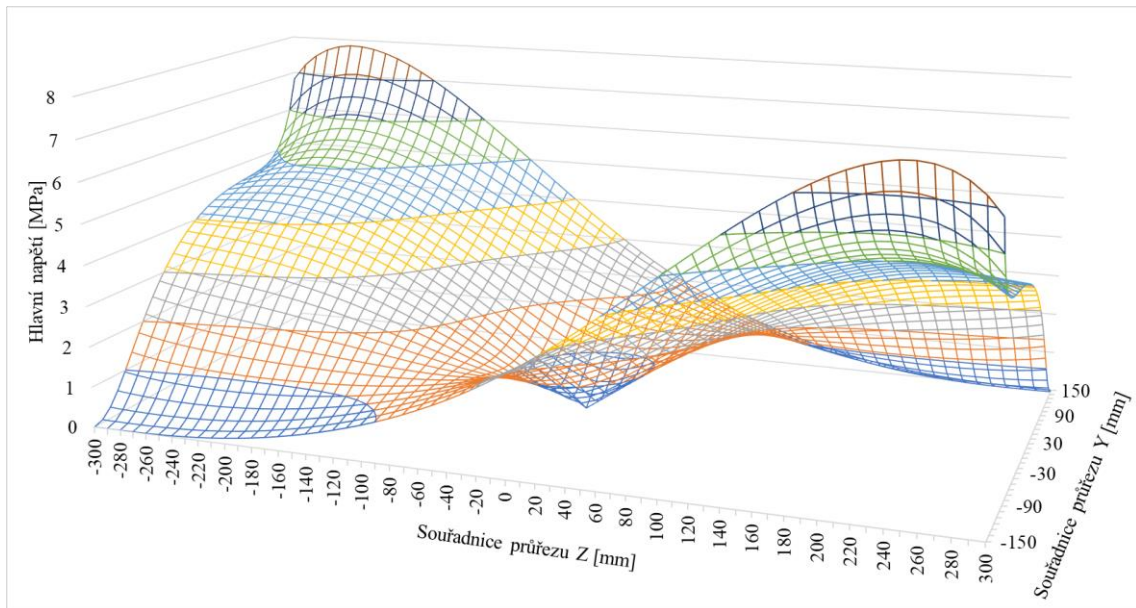
Průřezy		$\sigma_{x,max}$	$\tau_{SV,max}$	$\tau_{\omega,max}$
		[kPa/kNm ²]	[kPa/kNm]	[kPa/kNm]
MALÉ	Kruh (s)	0	368,4	0
	Obdélník (s)	25 530	602,2	655,9
	T (s)	30 721	1 243	651,3
	I (s)	9 611	1 534	442,4
	L (s)	19 611	1 296	705,8
STŘEDNÍ	Kruh (m)	0	46,1	0
	Obdélník (m)	1 595	75,3	82,0
	T (m)	1 920	160,5	81,6
	I (m)	600	196,3	56,9
	L (m)	1 226	167,2	91,3
VELKÉ	Kruh (l)	0	5,8	0
	Obdélník (l)	99,6	9,4	10,2
	T (l)	119,9	19,1	10,2
	I (l)	37,5	23,7	7,0
	L (l)	76,6	20,5	11,1

Ve výše uvedené tabulce jsou obsaženy maximální složky napětí od jednotkových vnitřních sil na průřezu spočtené metodou konečných prvků pomocí programu SCIA Engineer.

6.1.3 Hlavní napětí na průřezu

Aby bylo možné určit místo na průřezu s maximálním napětím, tj. místo kde vznikne první trhlinka, byl proveden výpočet hlavních napětí pomocí rovnice (3.47) na celém průřezu.

Na následujícím obrázku je pro ukázkou zobrazen průběh napětí pro obdélníkový průřez (střední velikost), kdy je na nosníku přítomný bimoment a pouze sekundární kroučící moment ($B = -5 \text{ kNm}^2$; $T_{\omega} = 50 \text{ kNm}$).



Obrázek 6.9 - Ukázka průběhu hlavních napětí pro obdélníkový průřez zatížený zvolenými hodnotami bimomentu a sekundárního ohybového momentu.

6.2 Značení okrajových podmínek (podpor) při kroucení

Pro přehlednost další práce je zavedeno následující značení okrajových podmínek (podpor) na nosníku (podrobný popis jednotlivých případů podepření je uveden v části 3.2.3), pod nimi jsou uvedeny přidružené okrajové podmínky diferenciální rovnice vázaného kroucení. Je důležité zmínit, že tyto okrajové podmínky jsou vhodné pro řešení diferenciální rovnice vázaného kroucení, pro řešení volného kroucení některé z okrajových podmínek postrádají význam (neexistují), např. koncová výtzuha.

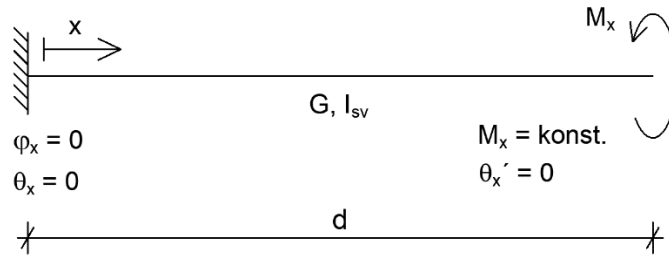
Tabulka 6.4 - Značení podpor nosníků a přidružené okrajové podmínky

Volný konec	Výtzuha na volném konci	Plné vetknutí	Rotační vetknutí
$\varphi_x'' = 0$	$\varphi_x' = 0$	$\varphi_x = 0$	$\varphi_x = 0$
$M_x = 0$ (resp. c)	$M_x = 0$ (resp. c)	$\varphi_x' = 0$	$\varphi_x'' = 0$

6.3 Analytické řešení rovnice volného kroucení

Kompletní analytické řešení diferenciální rovnice volného kroucení (3.23) je uvedeno pouze pro konzolu zatíženou osamělým koncovým kroučícím momentem a konzolu zatíženou vnějším spojitým kroučícím momentem.

Konzola zatížena koncovým kroučícím momentem: ($T = M_x = konst.$)



Obrázek 6.10 - Schéma konzoly – osamělý koncový kroučící moment.

$$\varphi'(x) = \theta(x) = \frac{T}{GI_{SV}} \quad (6.6)$$

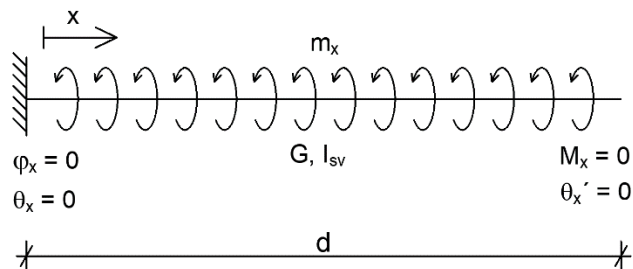
$$\varphi(x) = \frac{T}{GI_{SV}} \cdot x + c \quad (6.7)$$

Po dosazení okrajových podmínek pro vetknutí získáme řešení:

$$\varphi(0) = \frac{T}{GI_{SV}} \cdot 0 + c_1 = 0 \quad (6.8)$$

$$\varphi(x) = \frac{T}{GI_{SV}} \cdot x \quad (6.9)$$

Konzola zatížena spojitým zatížením: ($m_x = konst.$)



Obrázek 6.11 - Schéma konzoly – spojitě kroučící zatížení.

$$\varphi''(x) = \theta'(x) = \frac{m_x}{GI_{SV}} \quad (6.10)$$

$$\varphi'(x) = \theta(x) = \frac{m_x}{GI_{SV}} \cdot x + c_1 \quad (6.11)$$

$$\varphi(x) = \frac{m_x}{GI_{SV}} \cdot \frac{x^2}{2} + c_1 \cdot x + c_2 \quad (6.12)$$

Dosazení okrajových podmínek pro vetknutí:

$$\varphi'(0) = \theta_{(0)} = \frac{m_x}{GI_{SV}} \cdot 0 + c_1 = 0 \quad (6.13)$$

$$\varphi(0) = \frac{m_x}{GI_{SV}} \cdot \frac{0^2}{2} + c_1 \cdot 0 + c_2 = 0 \quad (6.14)$$

Řešení úlohy:

$$\varphi'(x) = \theta_{(x)} = \frac{m_x}{GI_{SV}} \cdot x \quad (6.15)$$

$$\varphi(x) = \frac{m_x}{GI_{SV}} \cdot \frac{x^2}{2} \quad (6.16)$$

6.4 Analytické řešení rovnice vázaného kroucení

Aby bylo možné se v dalších kapitolách této práce věnovat nelineárním výpočtům, je důležité pochopit, jak se vázané kroucení na prvku projevuje, tzn. jaké typy napětí vznikají a jakých velikostí tato napětí dosahují. To umožní analytické řešení diferenciálních rovnic vázaného kroucení pro typické případy podepření nosníku. Tato řešení jsou podkladem nejen pro nelineární výpočty, ale i pro lineární parametrickou studii, která porovnává vliv parametrů ovlivňující účinky vázaného kroucení na nosnících.

Výsledky získané analytickým výpočtem jsou dále porovnány s lineárními numerickými výpočty provedenými na vhodných modelech v konečně prvkovém programu ATENA Science.

6.4.1 Geometrie, uspořádání a zatížení řešených nosníků

V tabulce níže jsou uvedeny všechny kombinace okrajových podmínek a zatížení, pro které bylo provedeno analytické řešení, jedná se tedy o celkem dvacet různých nosníků a konzol, jejichž řešení bude uvedeno v následujících kapitolách.

Po provedení výpočtů byly vybrány dva typy masivních průřezů, pro které bude představeno řešení, obdélník představuje typický průřez pro monolitické železobetonové konstrukce, a průřez tvaru I představuje průřez, na kterém je nejvíce patrný vliv vázaného kroucení (viz výše uvedené výsledky v Tabulce 6.2), oba zvolené průřezy jsou střední velikosti (geometrie viz Obrázek 6.2). Při výběru délky pro jednotlivé typy prvků bylo vycházeno z empirických vztahů tak, aby úlohy představovaly běžně prováděné železobetonové konstrukce.

$$h_n = \left(\frac{1}{12} \div \frac{1}{10} \right) \cdot L_n = 500 \div 600 \Rightarrow 600 \text{ mm} \quad (6.17)$$

$$h_k = \left(\frac{1}{10} \div \frac{1}{5} \right) \cdot L_k = 300 \div 600 \Rightarrow 600 \text{ mm} \quad (6.18)$$

kde h_n je výška nosníku
 L_n je délka nosníku (6 m)
 h_k je výška konzoly
 L_k je délka konzoly (3 m)

Zatížení působící na prvky bylo zvoleno tak, aby v kritickém průřezu bylo dosaženo velikosti hlavního napětí rovnající se 2÷2,5násobku střední pevnosti betonu v tahu (tj. aby zaručeně došlo ke vzniku trhlin v případě navazující nelineární analýzy, viz kapitola 7). Překročení tahové pevnosti nebylo ale samozřejmě v této části zaměřené na lineární řešení zohledněno, a bude uvažováno až dále v rámci nelineární analýzy.

Tabulka 6.5 – Vybraná statická uspořádání pro výpočet

Statické uspořádání	Průřez	Typ prvku	Typ zatížení	Velikost zatížení	Okrajové podmínky		Délka [m]
					levý okraj	pravý okraj	
1	Obdélník	Konzola	Lokální (pr. kraj)	50 kNm	PLNÉ VETKNUTÍ	VOLNÝ KONEC	3
2					PLNÉ VETKNUTÍ	VÝZTUHA	
3			Spojitě	15 kNm/m	PLNÉ VETKNUTÍ	VOLNÝ KONEC	
4					PLNÉ VETKNUTÍ	VÝZTUHA	
5		Nosník	Lokální (střed)	100 kNm	PLNÉ VETKNUTÍ	PLNÉ VETKNUTÍ	6
6					PLNÉ VETKNUTÍ	ROTAČNÍ VETKNUTÍ	
7					ROTAČNÍ VETKNUTÍ	ROTAČNÍ VETKNUTÍ	
8			Spojitě	15 kNm/m	PLNÉ VETKNUTÍ	PLNÉ VETKNUTÍ	
9					ROTAČNÍ VETKNUTÍ	ROTAČNÍ VETKNUTÍ	
10					30 kNm/m	PLNÉ VETKNUTÍ	
11	I	Konzola	Lokální (pr. kraj)	30 kNm	PLNÉ VETKNUTÍ	VOLNÝ KONEC	3
12					PLNÉ VETKNUTÍ	VÝZTUHA	
13			Spojitě	10 kNm/m	PLNÉ VETKNUTÍ	VOLNÝ KONEC	
14					PLNÉ VETKNUTÍ	VÝZTUHA	
15		Nosník	Lokální (střed)	60 kNm	PLNÉ VETKNUTÍ	PLNÉ VETKNUTÍ	6
16					PLNÉ VETKNUTÍ	ROTAČNÍ VETKNUTÍ	
17					ROTAČNÍ VETKNUTÍ	ROTAČNÍ VETKNUTÍ	
18			Spojitě	10 kNm/m	PLNÉ VETKNUTÍ	PLNÉ VETKNUTÍ	
19					PLNÉ VETKNUTÍ	ROTAČNÍ VETKNUTÍ	
20					ROTAČNÍ VETKNUTÍ	ROTAČNÍ VETKNUTÍ	

Materiálové vlastnosti byly zvoleny tak, aby odpovídaly betonu C30/37 (dle ČSN EN 1992-1-1), který představuje dnes často používaný beton pro vodorovné železobetonové konstrukce, uvažované hodnoty pro výpočet jsou hodnoty střední a jsou uvedeny v následující tabulce. Pro lineární analýzu se nyní uplatní pouze hodnoty modulu pružnosti E a Poissonova čísla ν , resp. smykového modulu G .

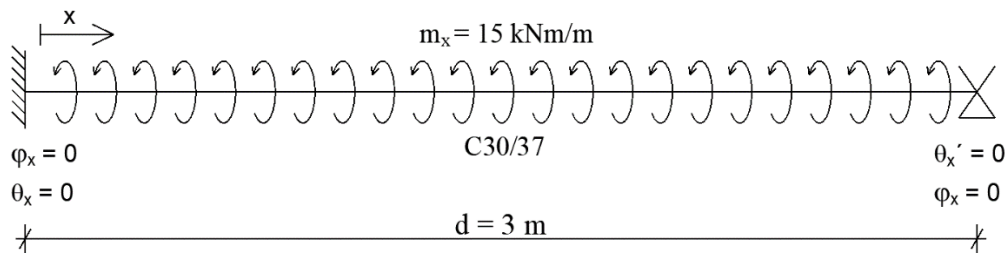
Číslo statického uspořádání slouží pro identifikaci jednotlivých příkladů, v následujícím textu bude na toto značení odkazováno.

Tabulka 6.6 - Mechanické vlastnosti betonu třídy C30/37 – střední hodnoty

	Pevnost v tlaku	Pevnost v tahu	Modul pružnosti	Poissonovo číslo	Modul pružnosti ve smyku
C30/37	f_{cm} [MPa]	f_{ctm} [MPa]	E_{cm} [GPa]	ν [-]	G_{cm} [GPa]
	38	2,9	32	0,2	13,33

6.4.2 Ukázka podrobného řešení vybrané úlohy

Pro ilustraci je uvedeno jedno kompletní analytické řešení v obecném tvaru pro nosník o jednom poli s obdélníkovým průřezem, podepřený na jedné straně plným vetknutím a na druhé straně rotačním vetknutím, zatížený konstantním spojitým momentem po celé délce (tedy statické uspořádání č. 10).



Obrázek 6.12 - Schéma nosníku pro výpočet č. 10.

Řešení diferenciální rovnice lze hledat dle (3.15) ve tvaru:

$$\varphi(x) = \frac{c_1 e^{\sqrt{A}x} + c_2 e^{-\sqrt{A}x} - \frac{Bx^2}{2}}{A} + c_4 x + c_3 \quad (6.19)$$

Pro zjednodušení je použita substituce:

$$A = \frac{GI_{SV}}{EI_{\omega}} \quad (6.20)$$

$$B = \frac{m_x}{EI_{\omega}} \quad (6.21)$$

kde m_x je hodnota konstantního spojitého momentu
 d je délka nosníku v metrech
 x je podélná souřadnice nosníku
 e je Eulerovo číslo

Z tohoto řešení získáme derivací ostatní rovnice potřebné pro určení konstant:

$$\varphi'(x) = \frac{-Bx}{A} + \frac{c_1 e^{\sqrt{A}x} - c_2 e^{-\sqrt{A}x}}{\sqrt{A}} + c_4 = \theta(x) \quad (6.22)$$

$$\varphi''(x) = \frac{-B}{A} + c_1 e^{\sqrt{A}x} + c_2 e^{-\sqrt{A}x} = \theta'(x) \quad (6.23)$$

$$\varphi'''(x) = \sqrt{A}(c_1 e^{\sqrt{A}x} + c_2 e^{-\sqrt{A}x}) \quad (6.24)$$

Po dosazení okrajových podmínek získáme čtyři rovnice o čtyřech neznámých:

$$\varphi(x=0) = \frac{c_1 + c_2}{A} + c_3 = 0 \quad (6.25)$$

$$\varphi(x=d) = \frac{c_1 e^{\sqrt{A}d} + c_2 e^{-\sqrt{A}d} - \frac{Bd^2}{2}}{A} + c_4 d + c_3 = 0 \quad (6.26)$$

$$\varphi'(x=0) = \frac{c_1 - c_2}{\sqrt{A}} + c_4 = 0 \quad (6.27)$$

$$\varphi''(x=d) = \frac{-B}{A} + c_1 e^{\sqrt{A}d} + c_2 e^{-\sqrt{A}d} = 0 \quad (6.28)$$

Jejichž řešením jsou konstanty:

$$c_1 = \frac{B(-Ad^2 + 2\sqrt{A}de^{\sqrt{A}d} - 2e^{\sqrt{A}d} + 2)}{2A(\sqrt{A}de^{2\sqrt{A}d} - e^{2\sqrt{A}d} + \sqrt{A}d + 1)} \quad (6.29)$$

Ostatní konstanty jsou pro přehlednost vyjádřeny v závislosti na konstantě c_1 :

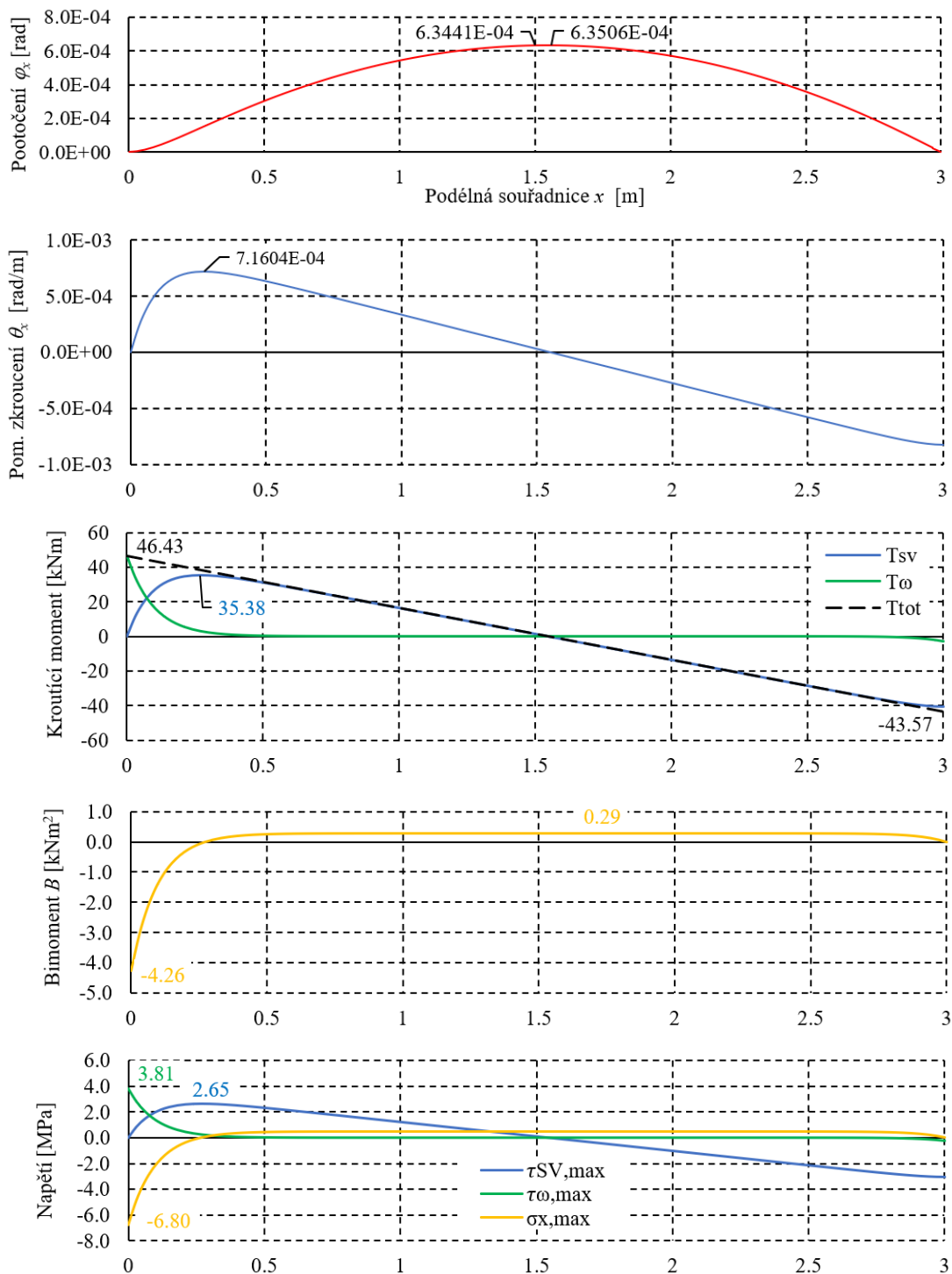
$$c_2 = -\frac{e^{\sqrt{A}d}(ac_1 e^{\sqrt{A}d} - b)}{A} \quad (6.30)$$

$$c_3 = \frac{-be^{\sqrt{A}d} + ac_1 e^{2\sqrt{A}d} - Ac_1}{A^2} \quad (6.31)$$

$$c_4 = -\frac{-be^{\sqrt{A}d} + Ac_1 e^{2\sqrt{A}d} + Ac_1}{A^{3/2}} \quad (6.32)$$

Z řešení je patrné, že jeho složitost je dána především okrajovými podmínkami, tento představený příklad obsahuje podmínku známého pootočení na obou koncích, což vede na řešení, kdy jsou všechny konstanty nenulové.

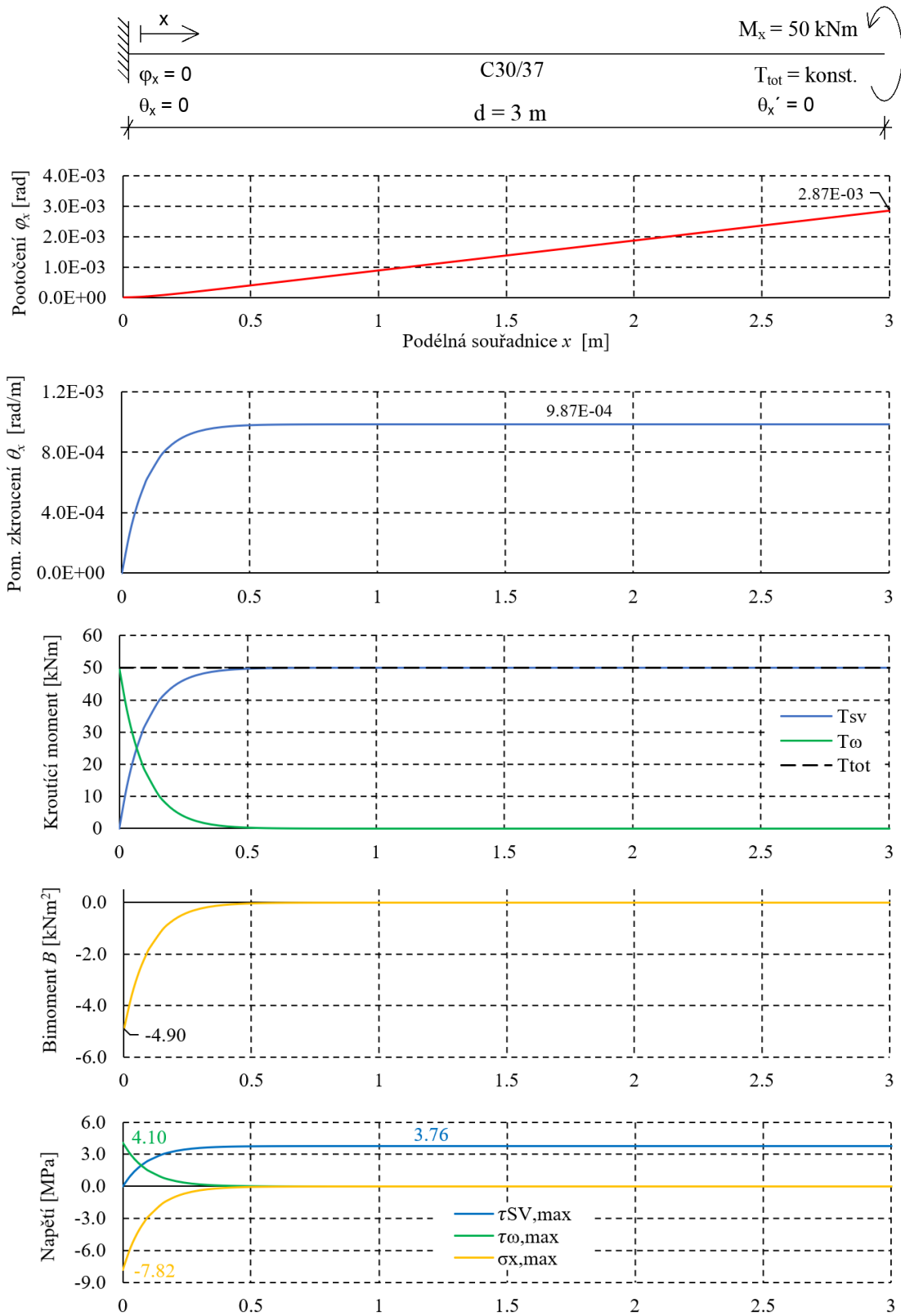
Výsledkem takového řešení úlohy je tedy pootočení a jeho jednotlivé derivace po délce krouceného prvku, které po dosazení do rovnic uvedených v kapitole 3.2.2 udávají průběhy jednotlivých vnitřních sil $-T_{SV}$, T_ω , B a s využitím známých napětí od jednotkových vnitřních sil umožňují vyjádřit i příslušné průběhy maximálních napětí. Všechny tyto výsledky jsou uvedeny na následujících grafech.

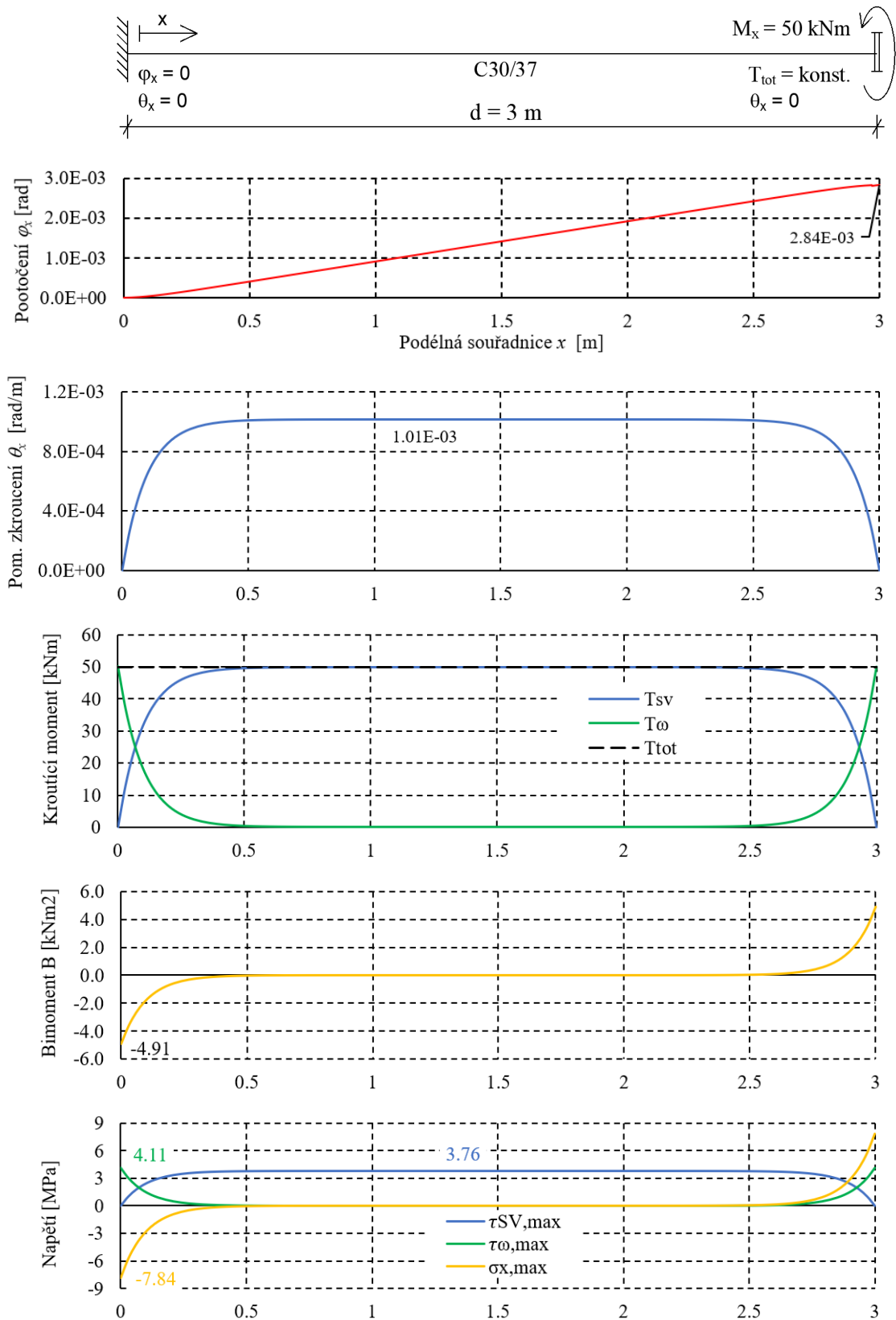


Obrázek 6.13 - Řešení představeného statického uspořádání č.10.

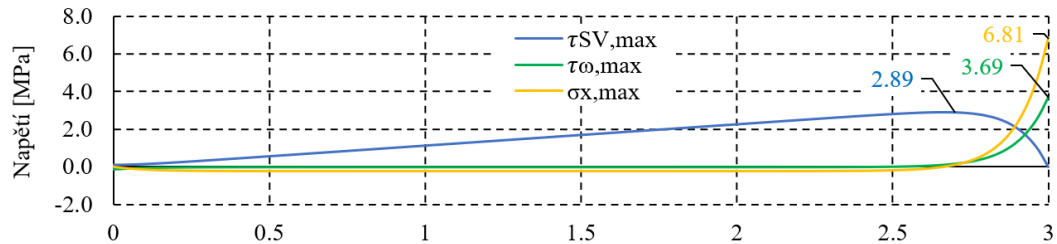
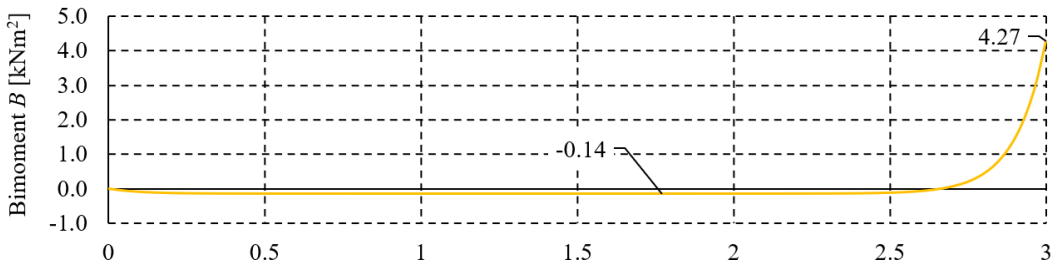
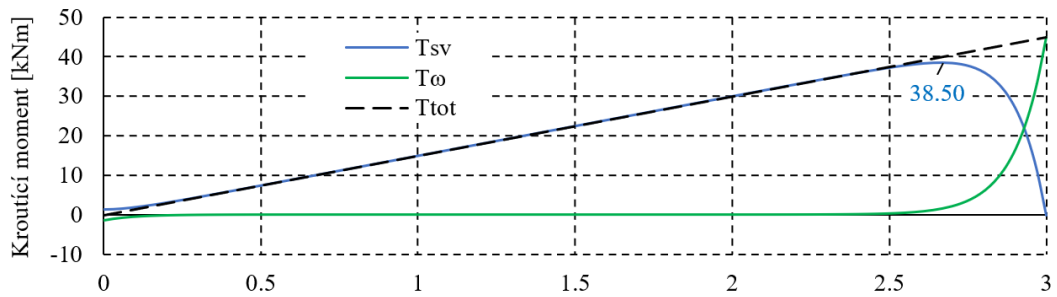
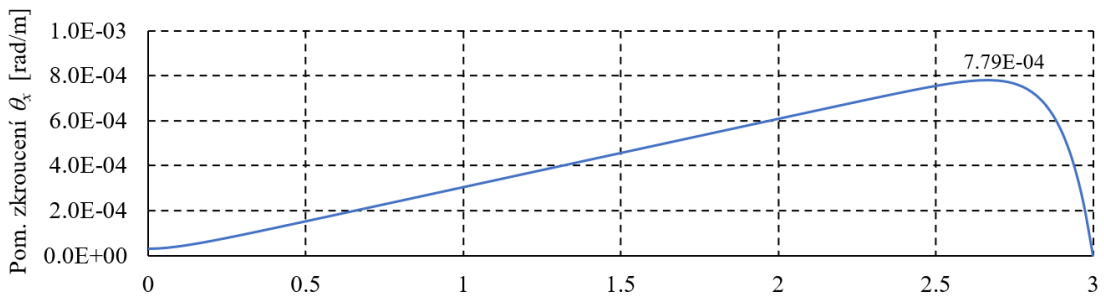
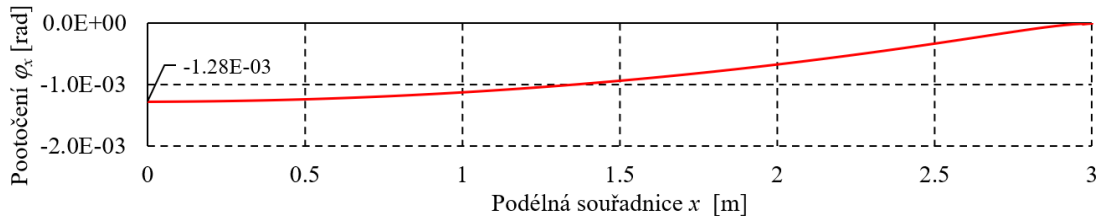
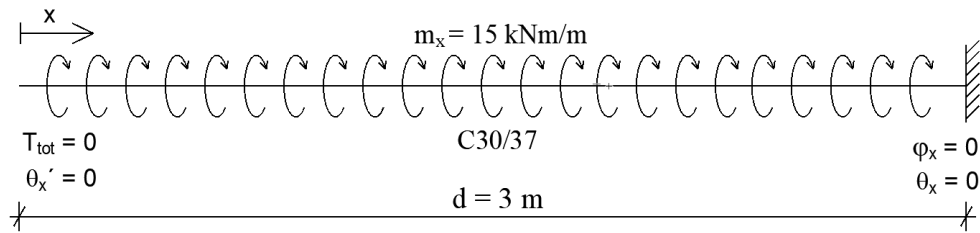
6.4.3 Výsledky analytického řešení pro ostatní typické případy

Pro ostatní případy uvedené v tabulce 6.5 budou na následujících stránkách představeny pouze výsledky v podobě grafů získaných obdobným výpočtem diferenciálních rovnic s dosazenými okrajovými podmínkami, na příklady bude odkazováno pomocí jejich čísla.

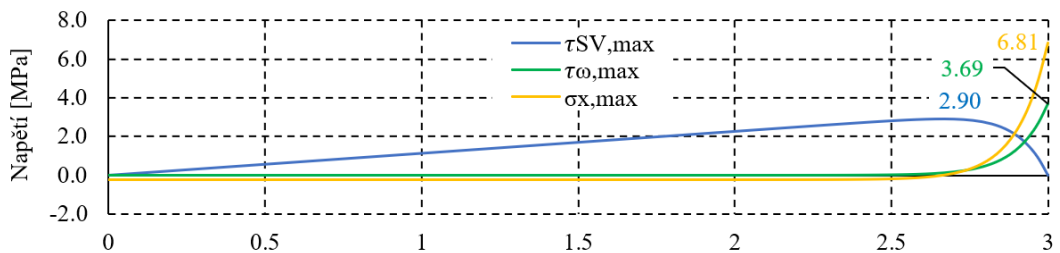
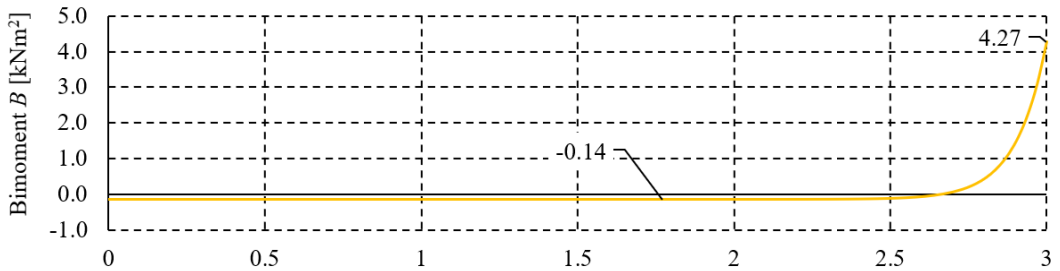
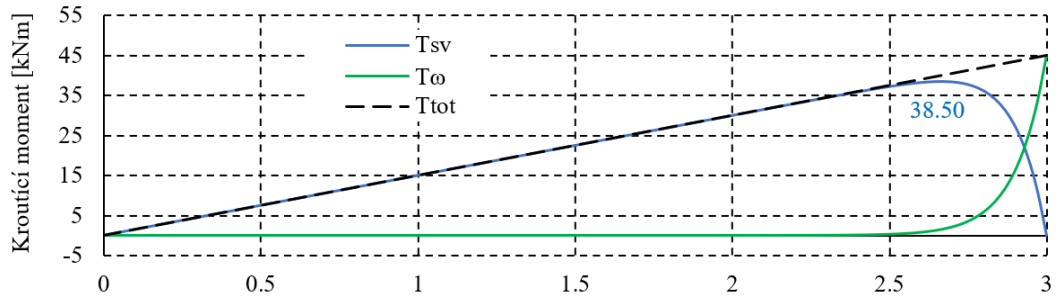
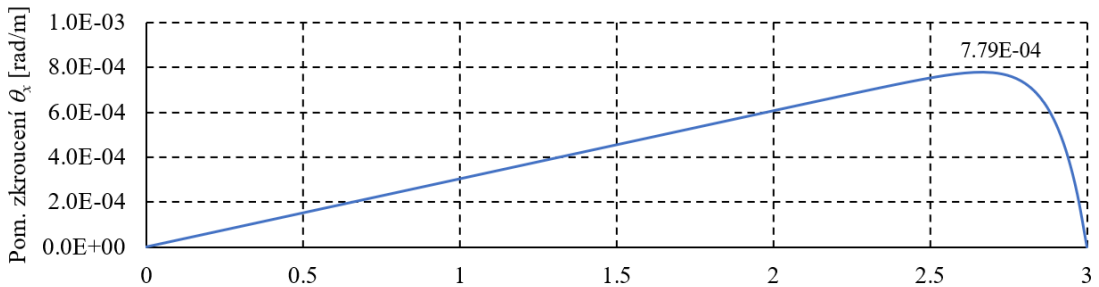
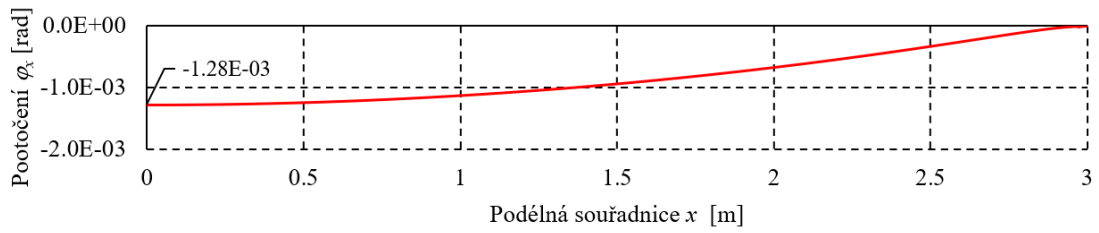
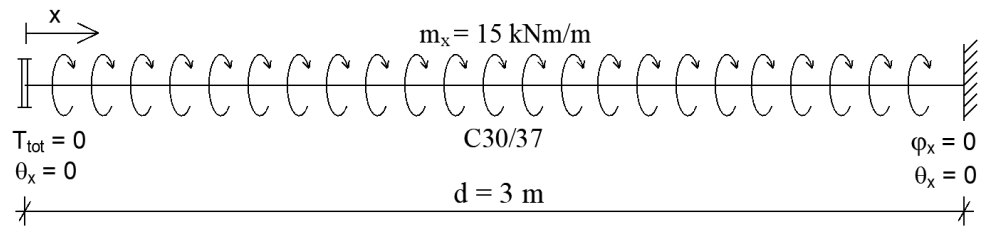
Statické uspořádání č.1:

Statické uspořádání č.2:

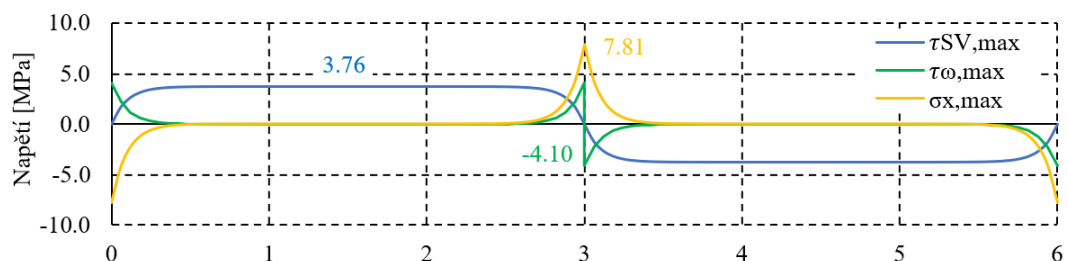
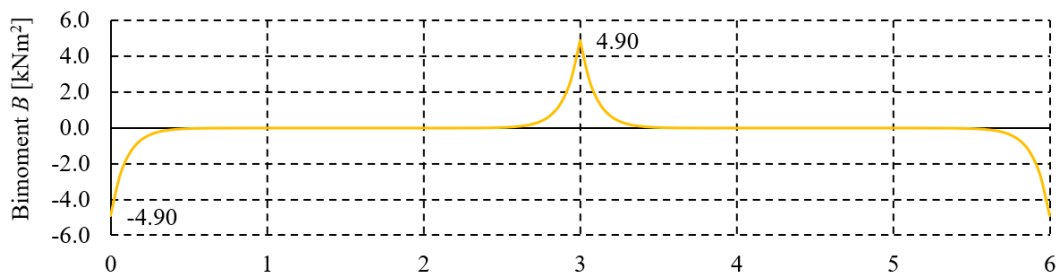
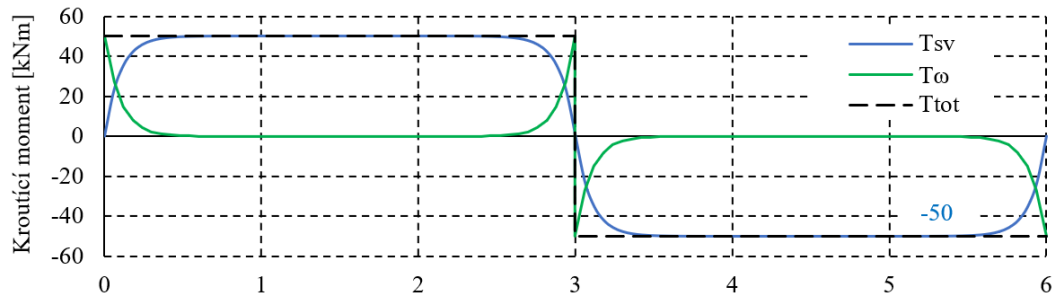
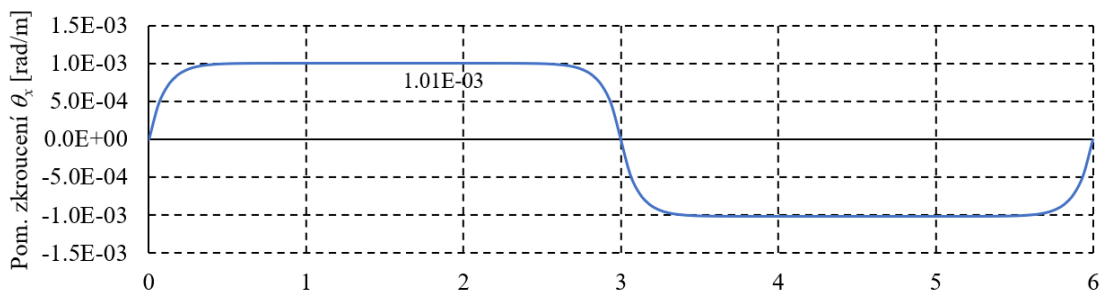
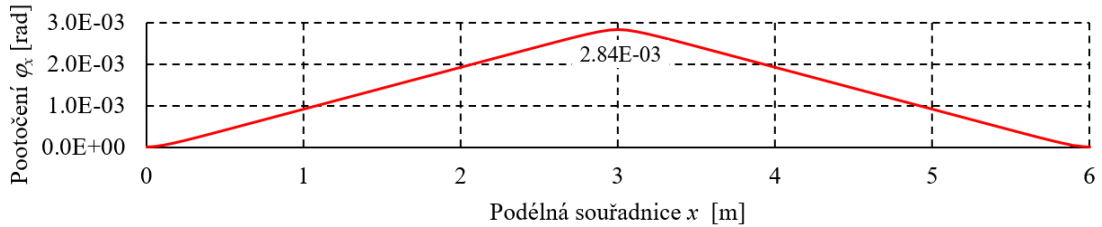
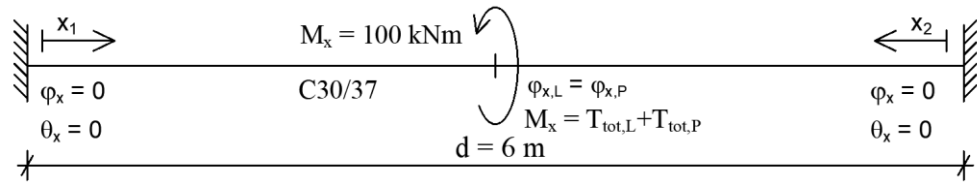
Statické uspořádání č.3:

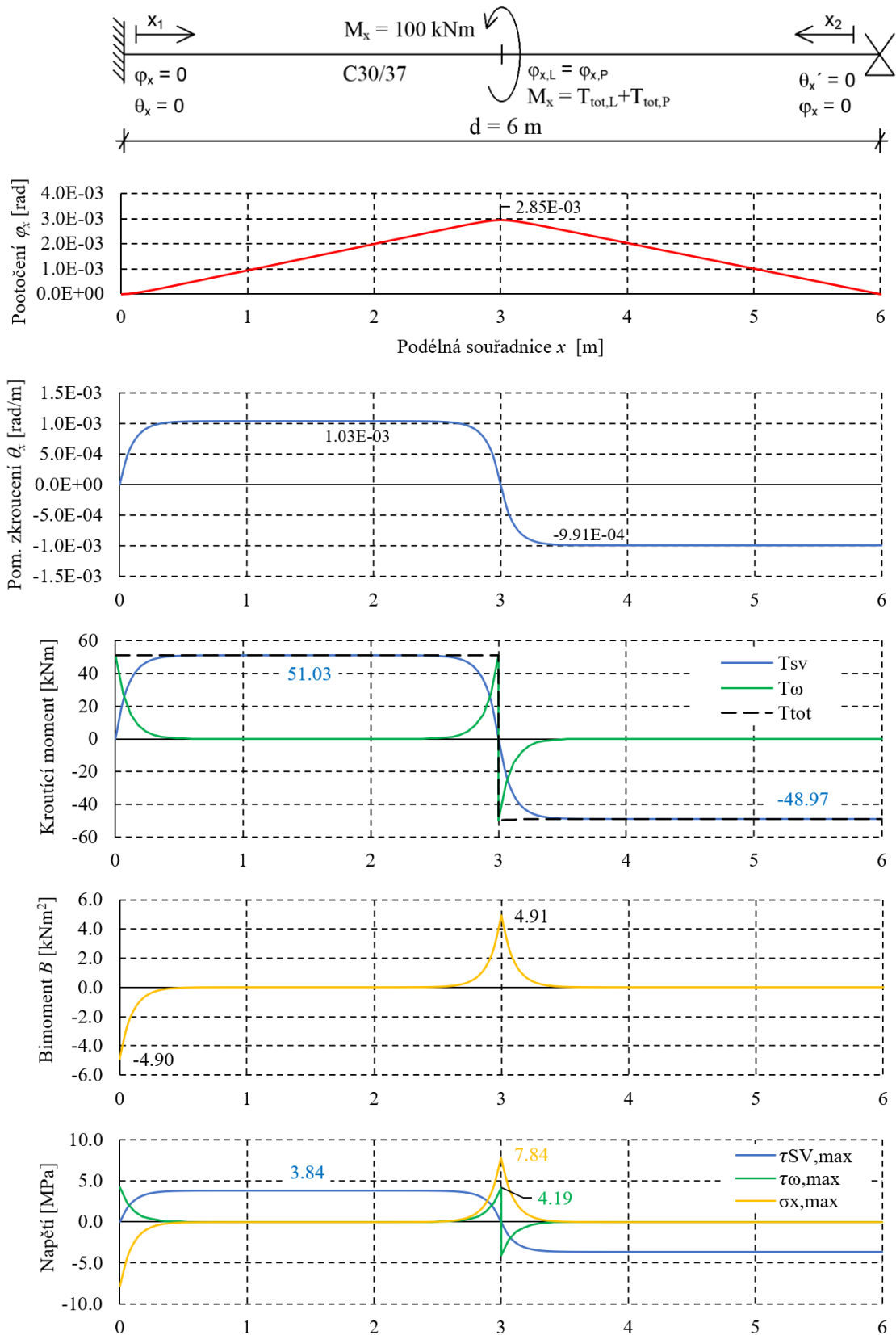


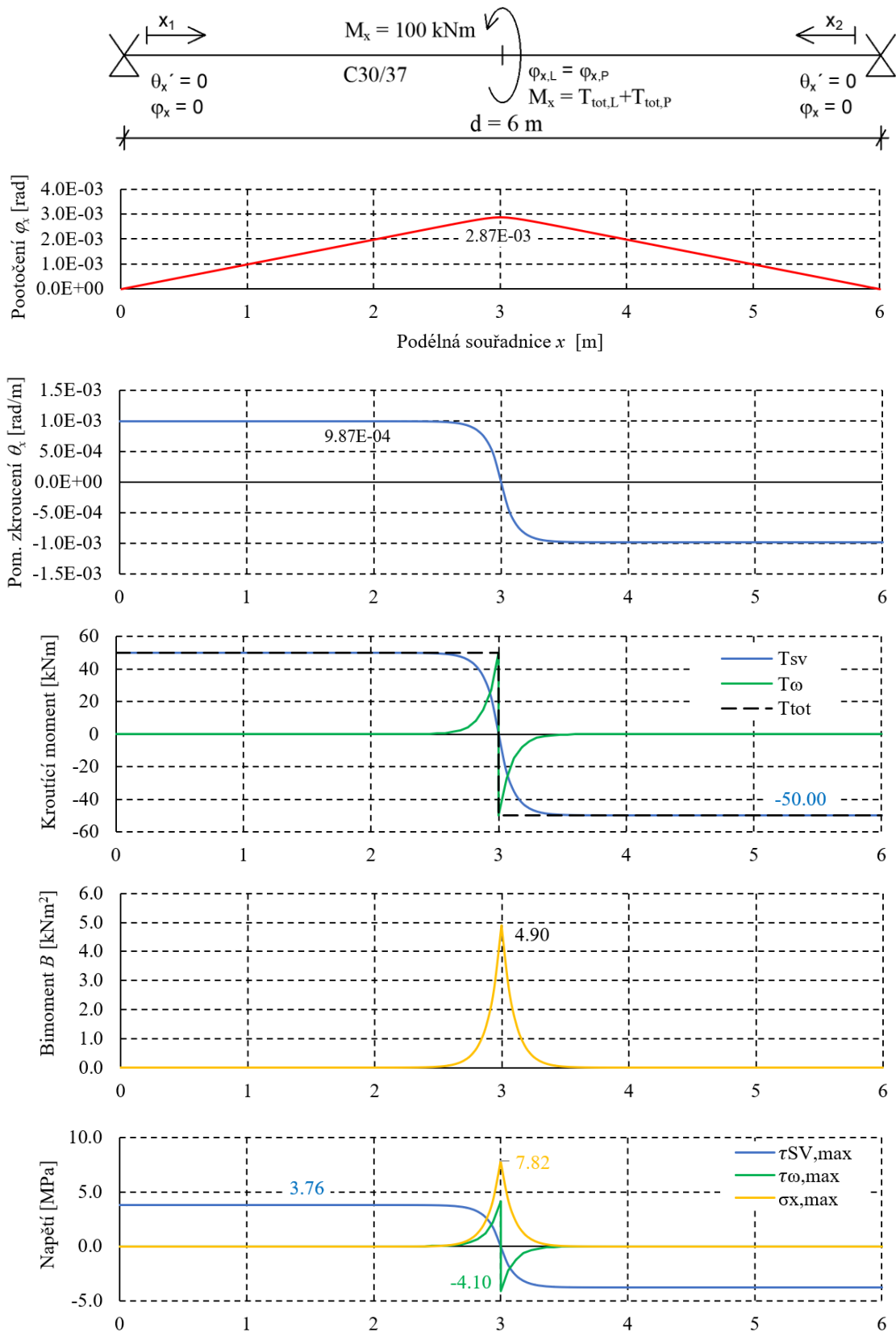
Statické uspořádání č.4:

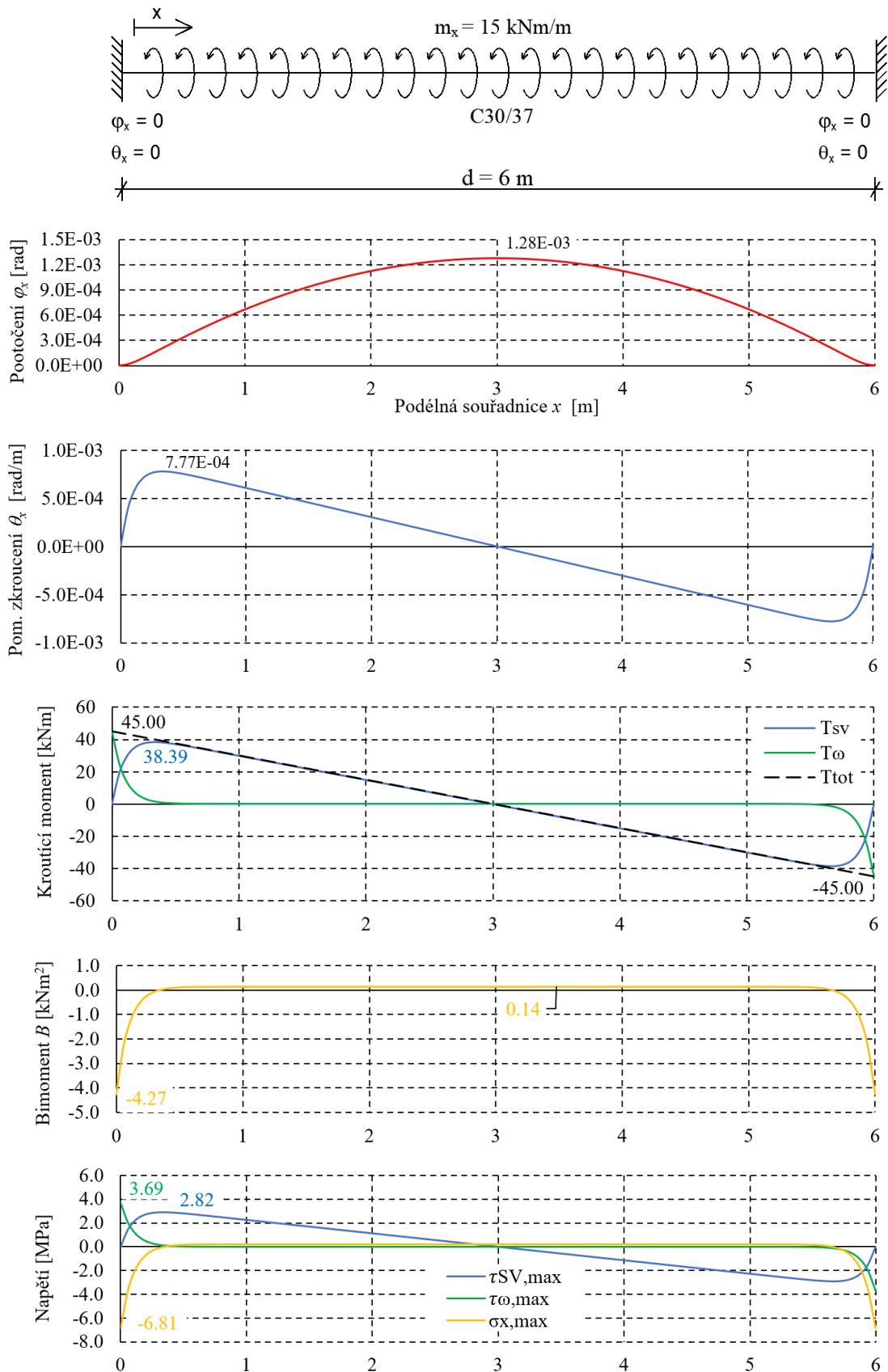


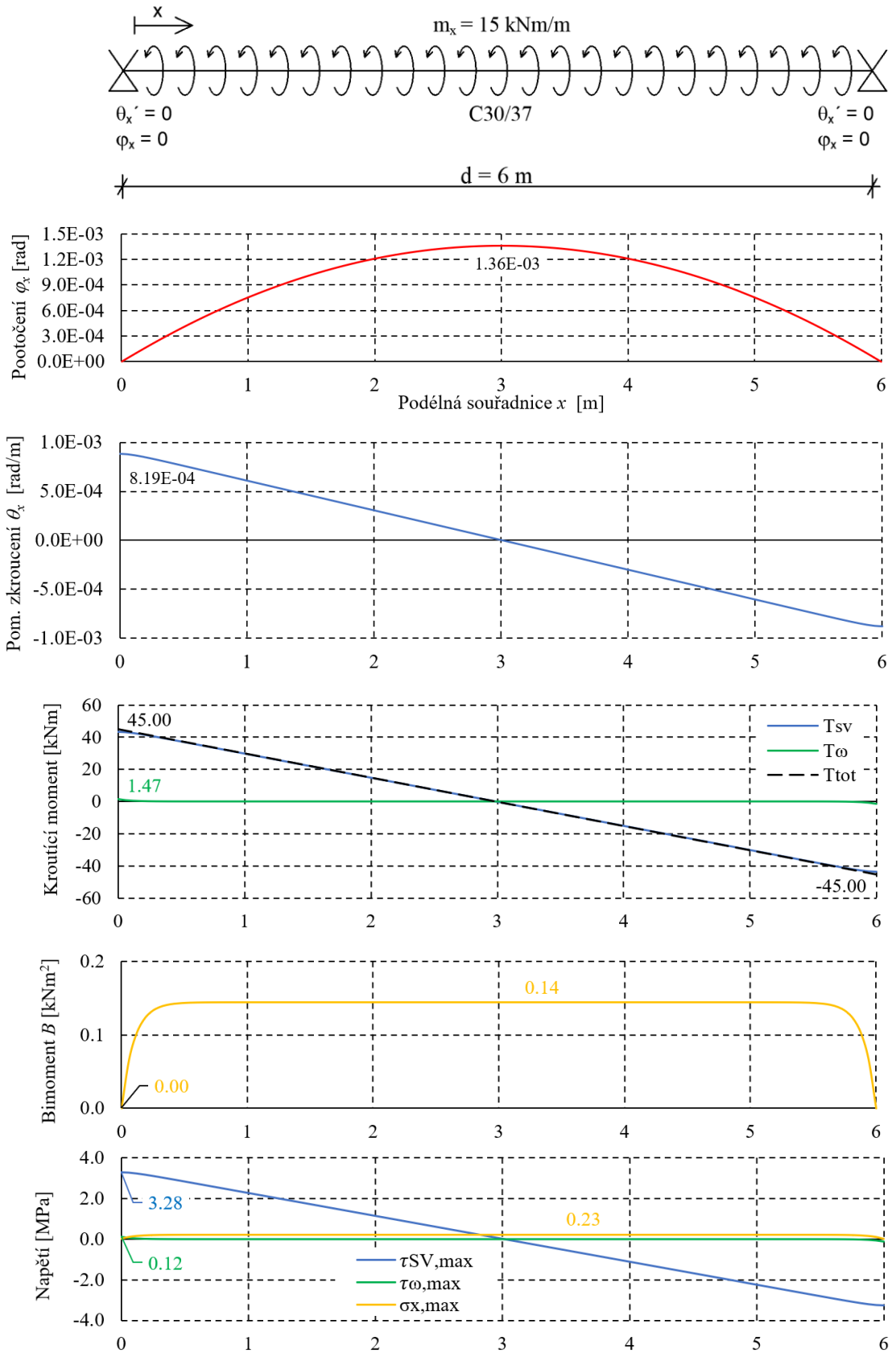
Statické uspořádání č.5:

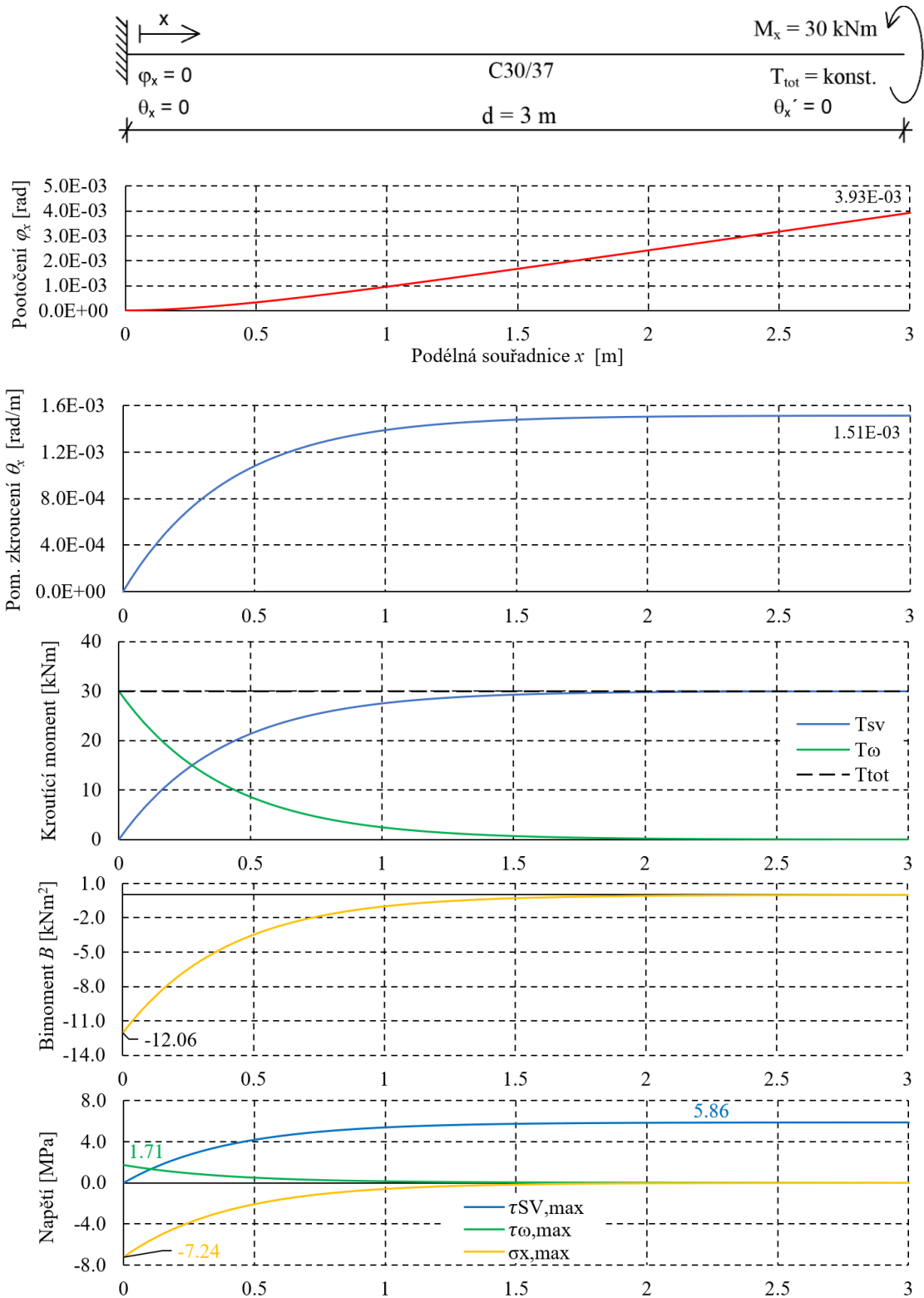


Statické uspořádání č.6:

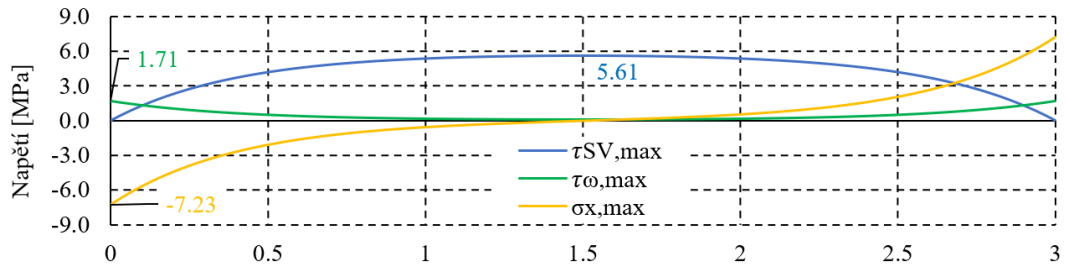
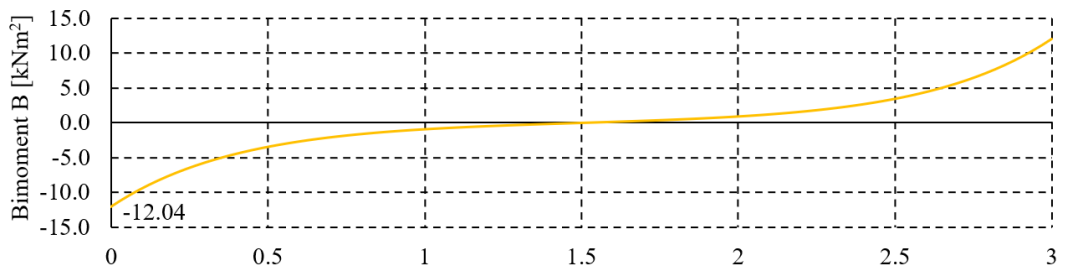
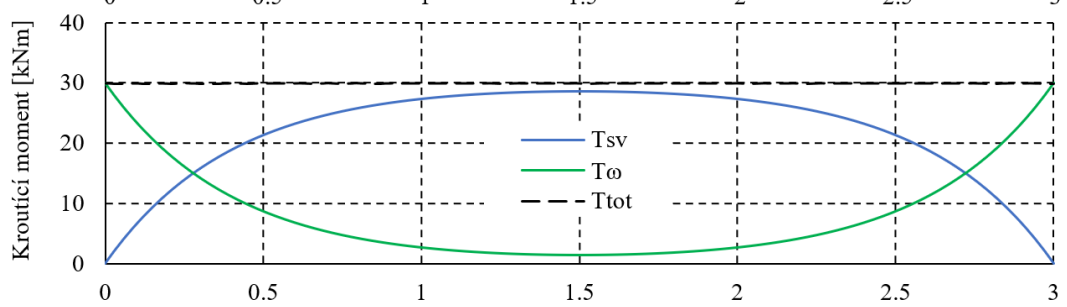
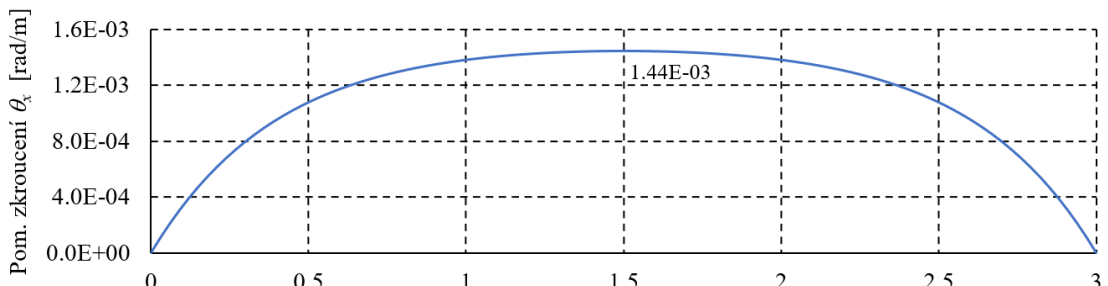
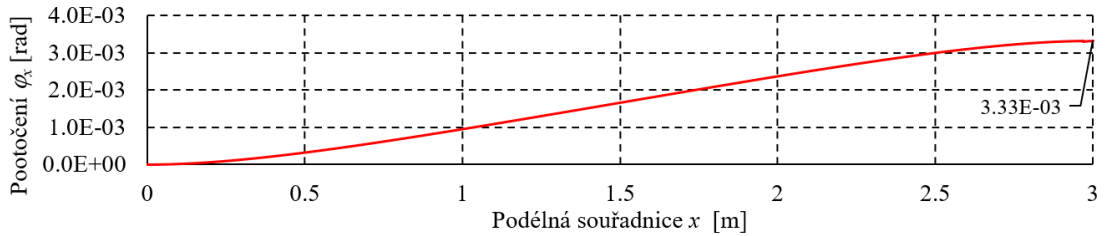
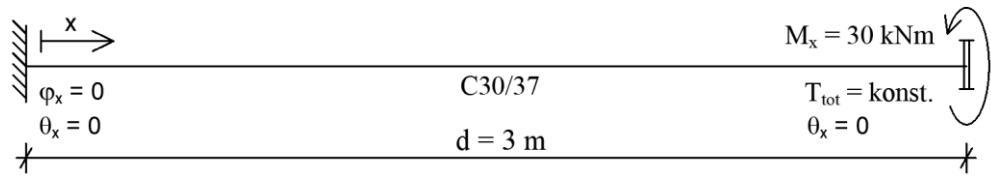
Statické uspořádání č.7:

Statické uspořádání č.8:

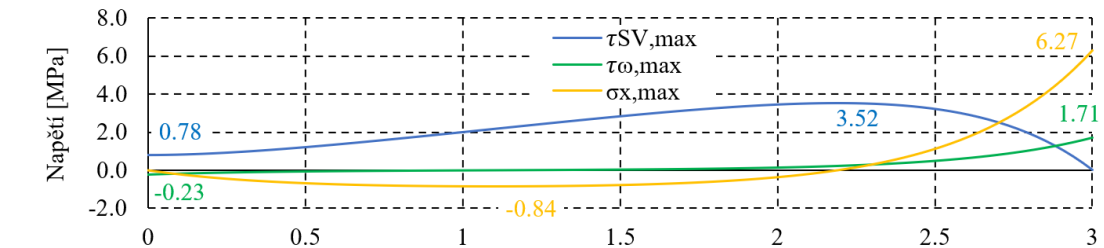
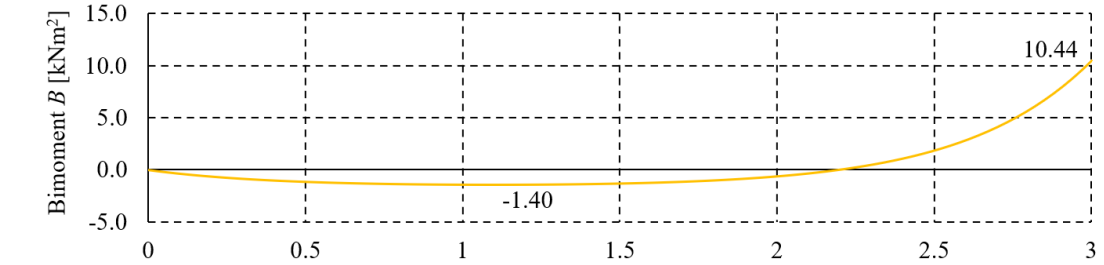
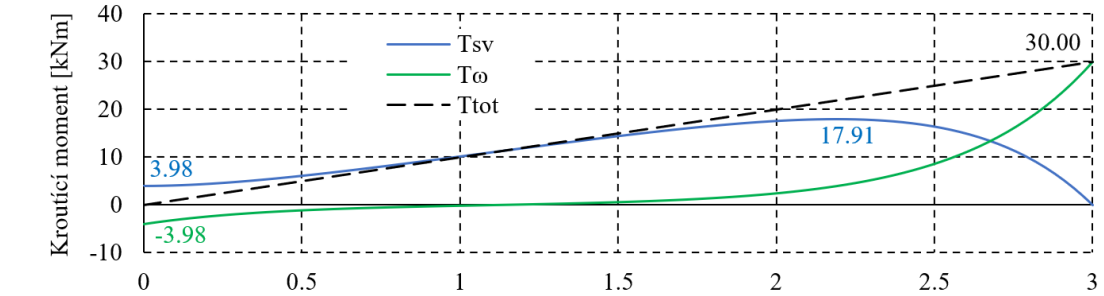
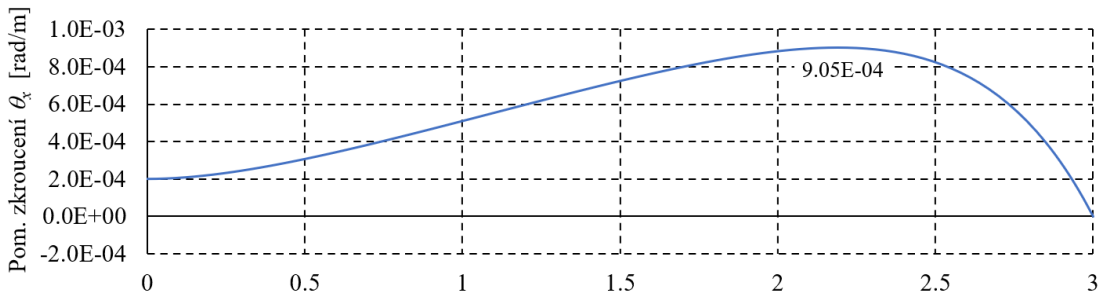
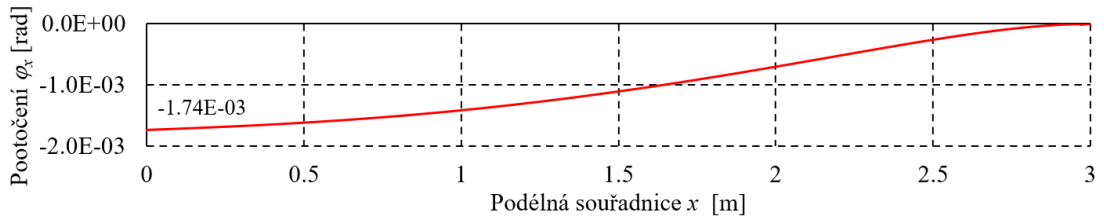
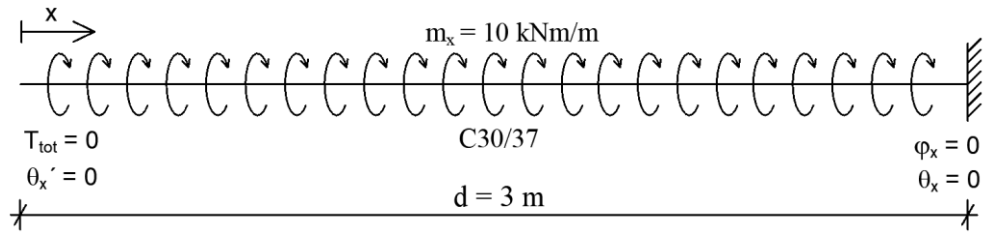
Statické uspořádání č.9:

Statické uspořádání č.11:

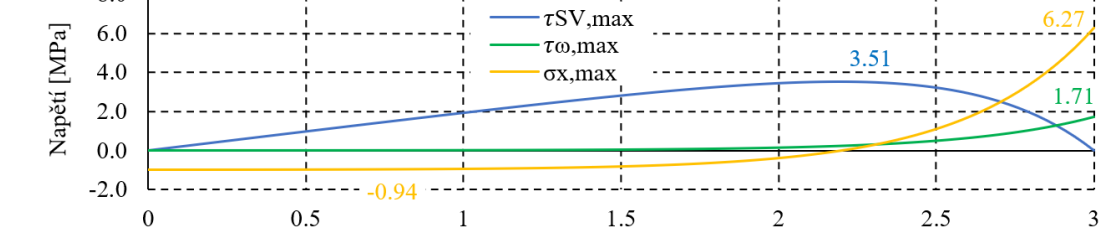
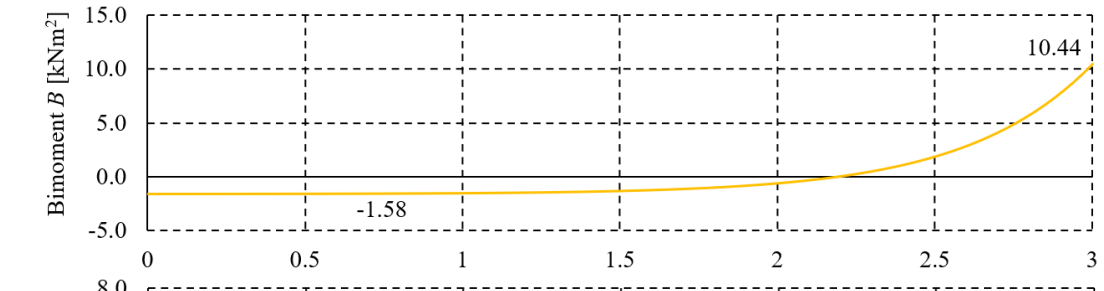
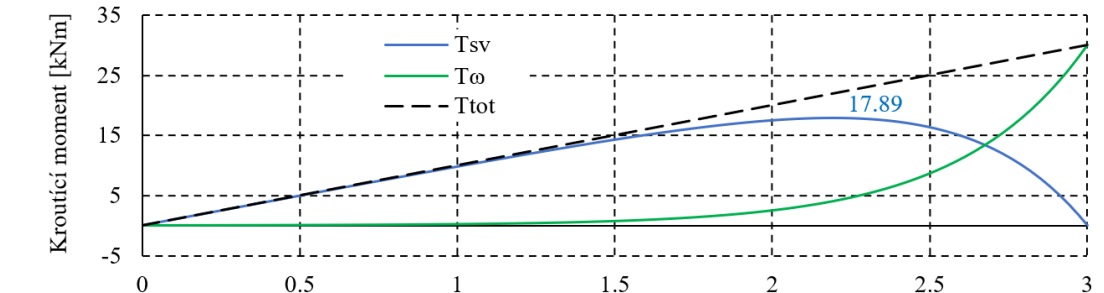
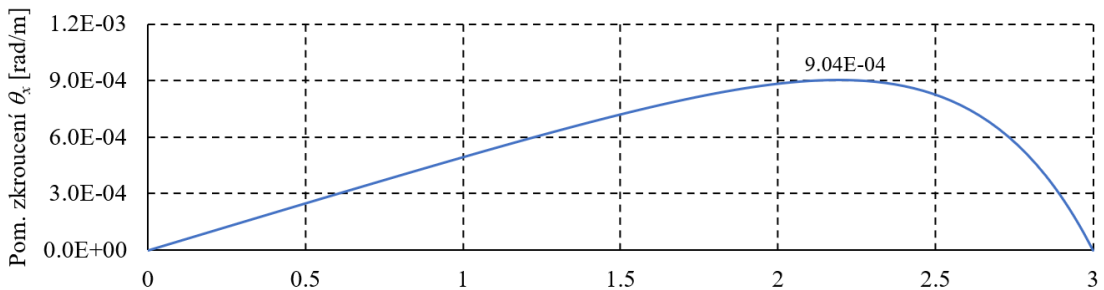
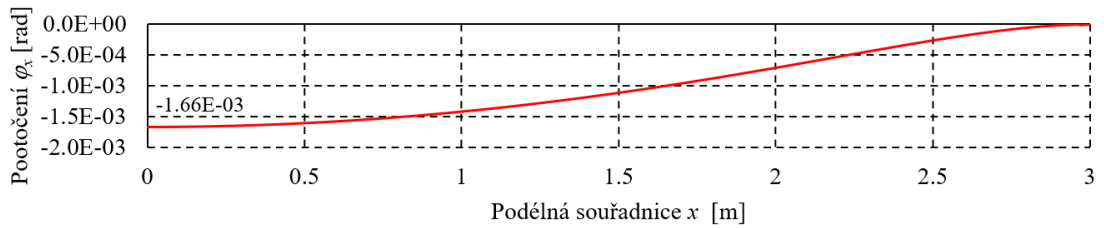
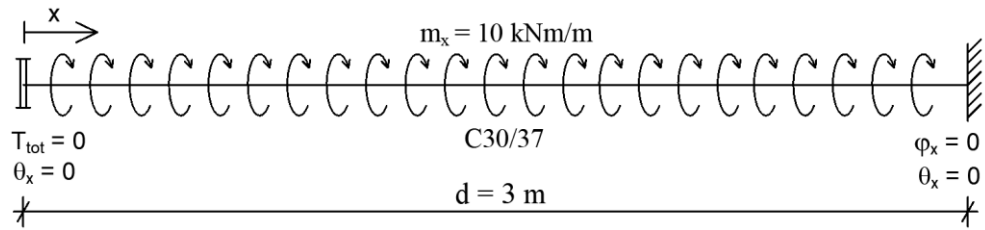
Statické uspořádání č.12:



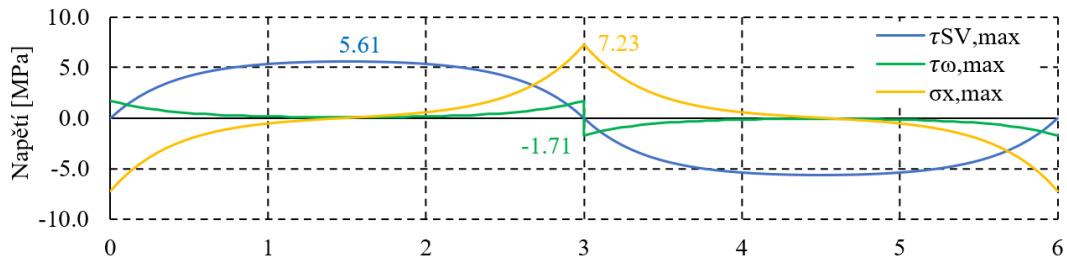
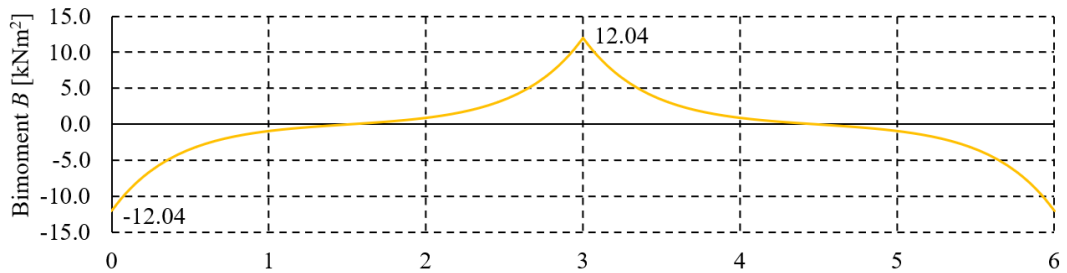
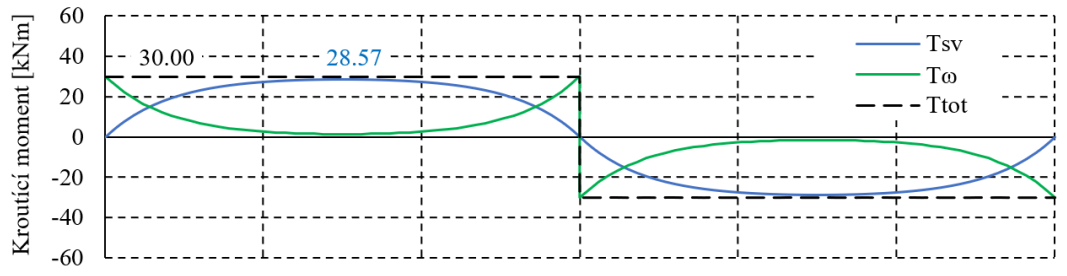
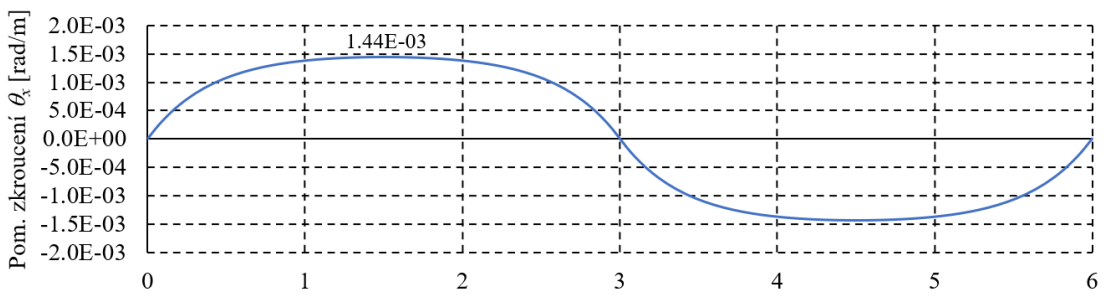
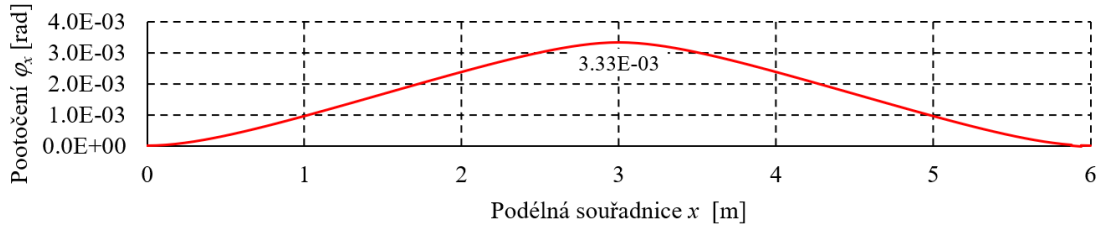
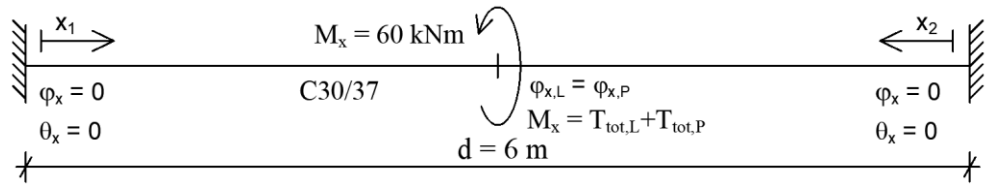
Statické uspořádání č.13:



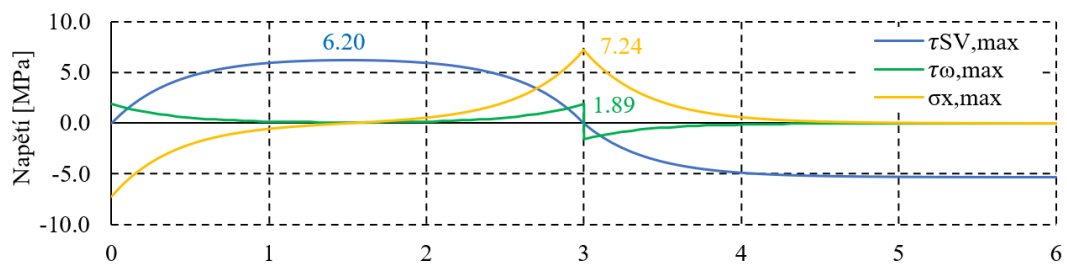
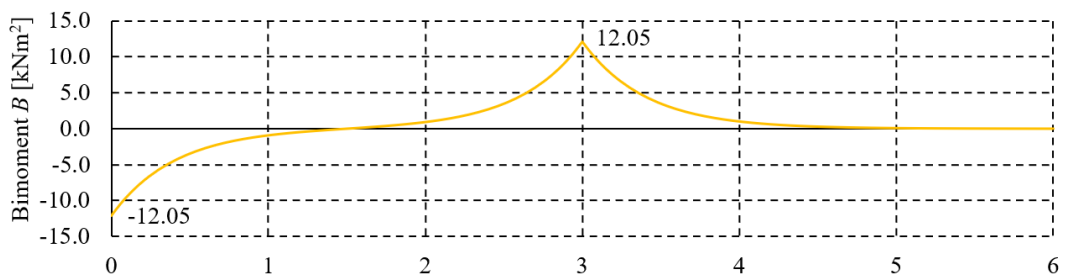
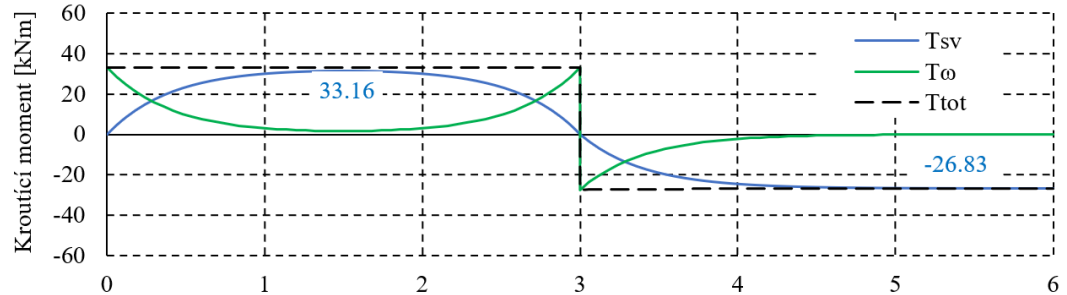
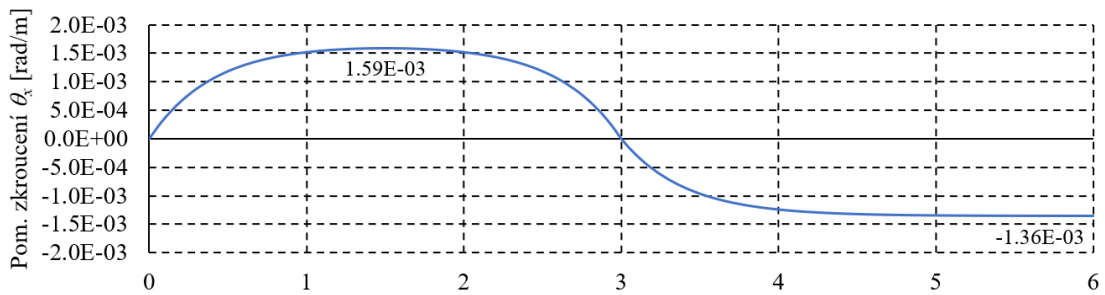
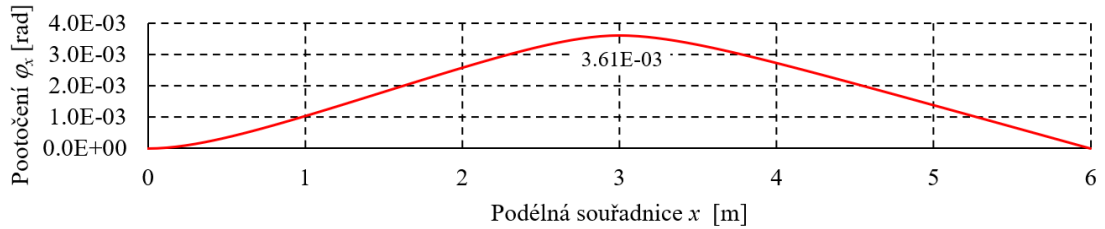
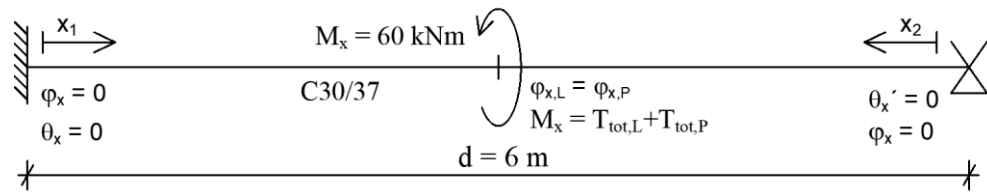
Statické uspořádání č.14:

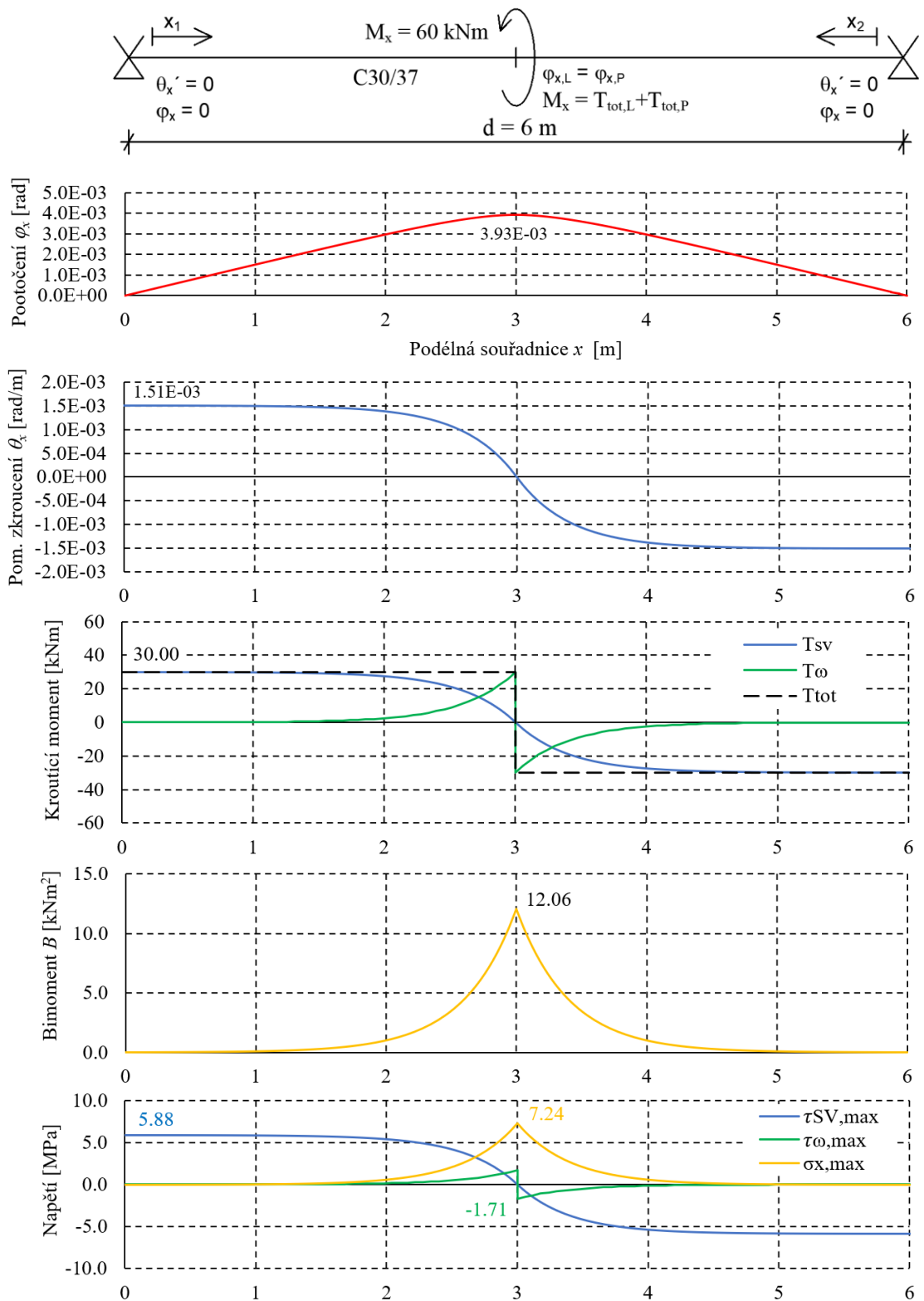


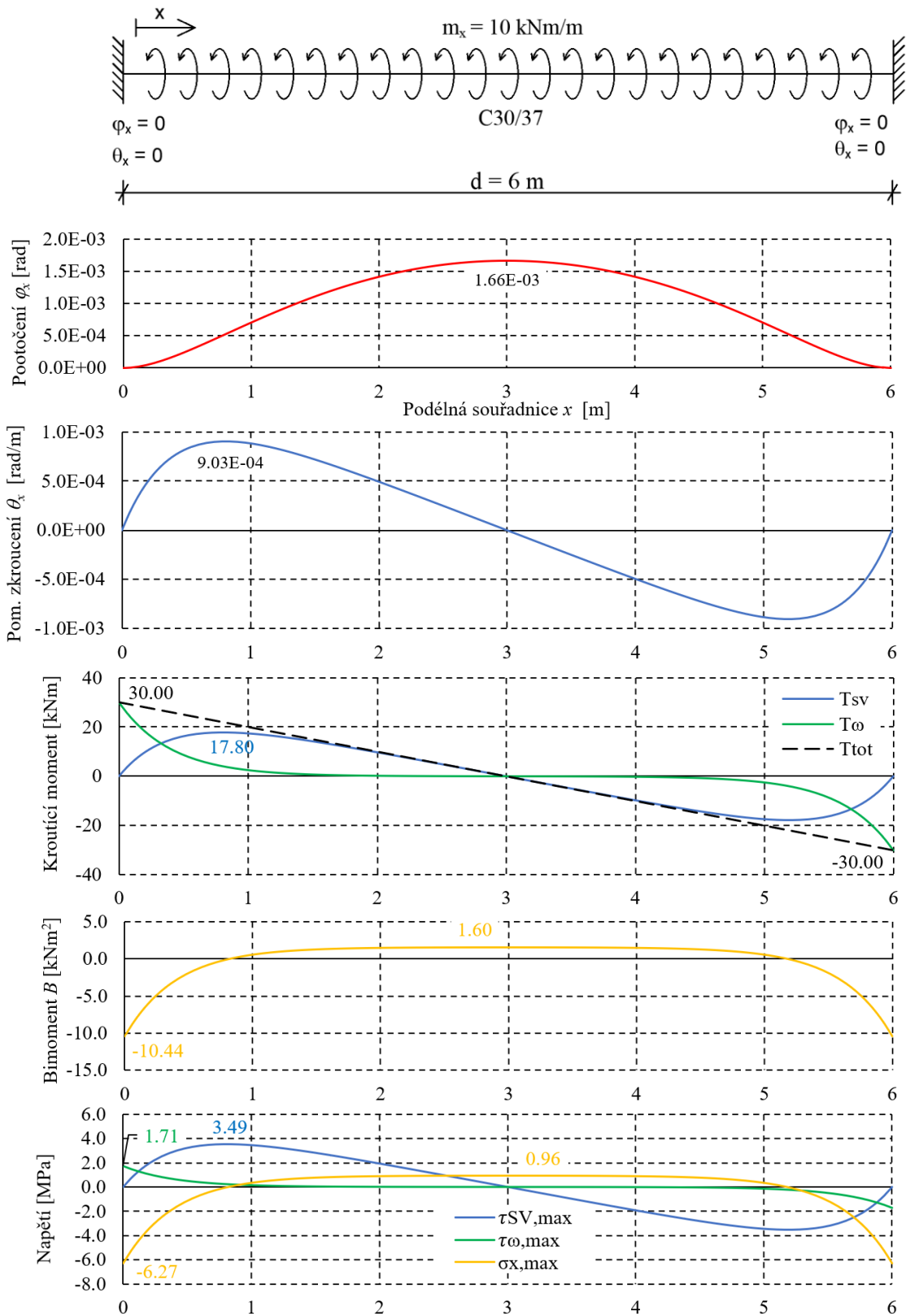
Statické uspořádání č.15:



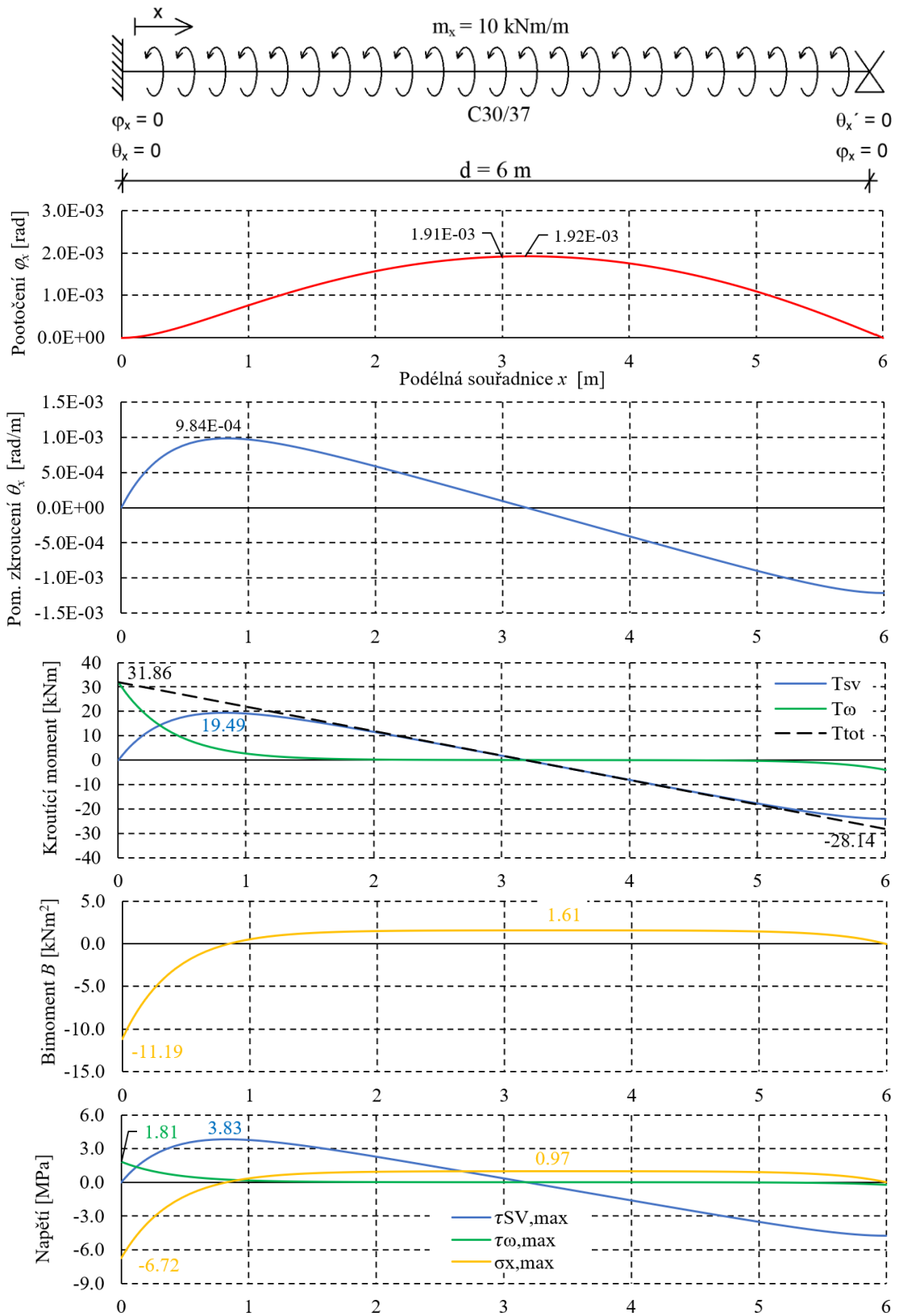
Statické uspořádání č.16:

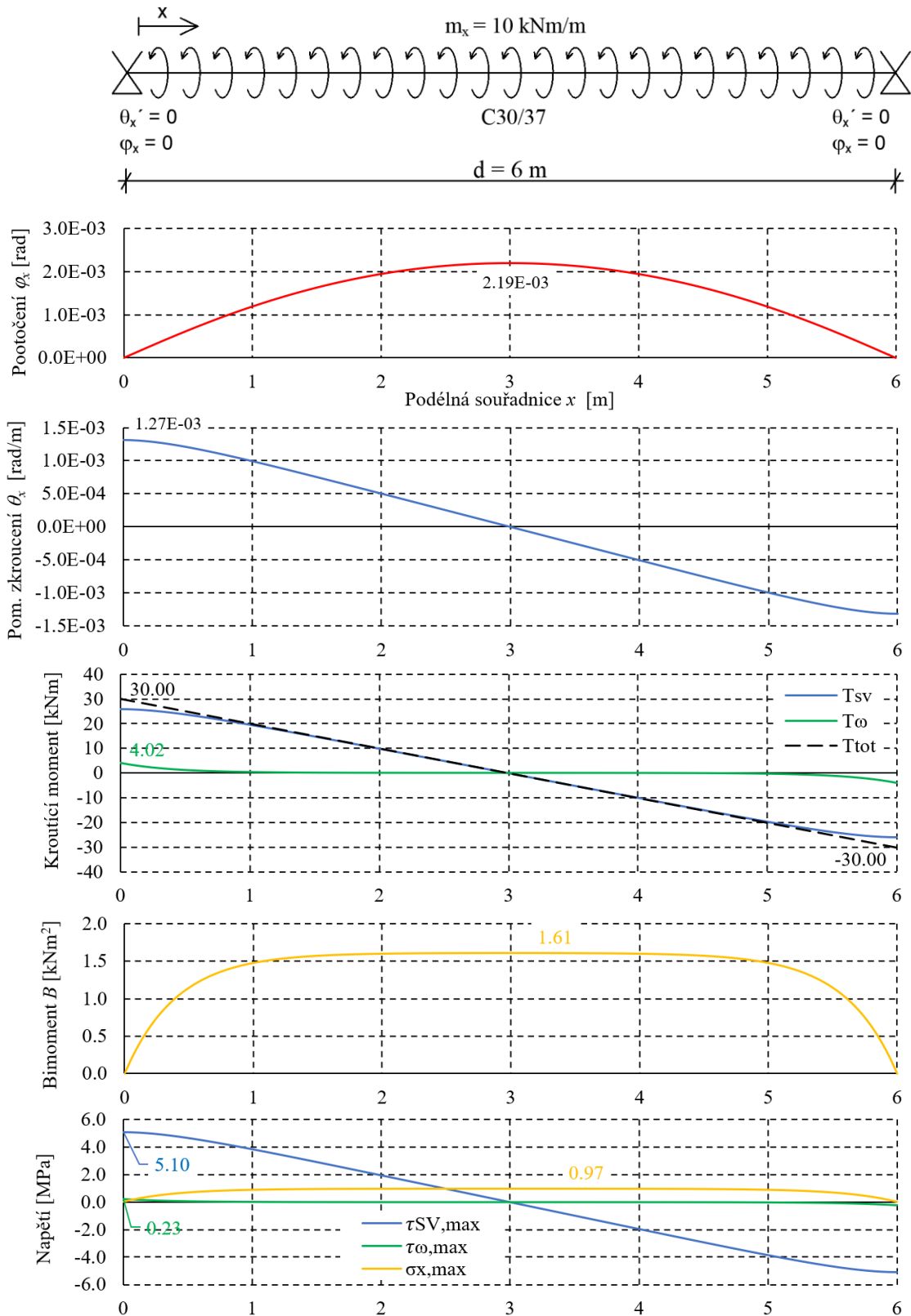


Statické uspořádání č.17:

Statické uspořádání č.18:

Statické uspořádání č.19:



Statické uspořádání č.20:

6.4.4 Zhodnocení analytických výsledků

Na první pohled je patrné, že na jednotlivé průběhy mají velký vliv okrajové podmínky a tvar průřezu krouceného prvku.

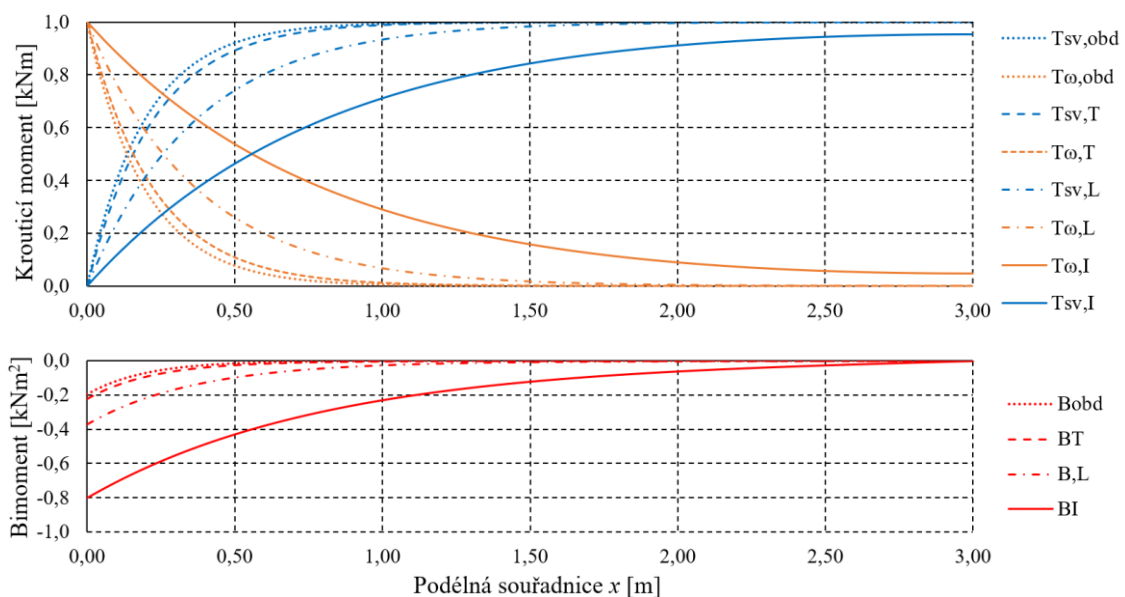
Například při porovnávání pootočení konzoly zatížené koncovým i spojitým momentem je patrný vliv koncové výztuhy, která snižuje velikost natočení na konci v porovnání s konzolou s volným koncem. Rozdílná natočení uprostřed vycházejí i pro různé kombinace podepření nosníku.

6.5 Parametrická studie

Z výpočtů byly stanoveny parametry, které mají zřetelný vliv na průběhy vnitřních sil krouceného prvku (s výjimkou okrajových podmínek, jejichž vliv je zřejmý). Tyto parametry jsou tvar a velikost průřezu. Jedním z dalších vybraných parametrů, který není z výpočtů na první pohled patrný je délka prvku.

6.5.1 Vliv tvaru průřezu

Na níže uvedeném grafu je porovnáván vliv tvaru průřezu (geometrie velká) na složení celkového kroucího momentu, který se dělí na kroucí moment volný a vázaný. Dále je porovnán průběh bimomentu po délce prvku. Pro porovnávání byl zvolen prvek o délce 3 metry, na levé straně s okrajovou podmínkou vetknutí a na pravé straně s volným koncem zatíženým jednotkovým momentem.

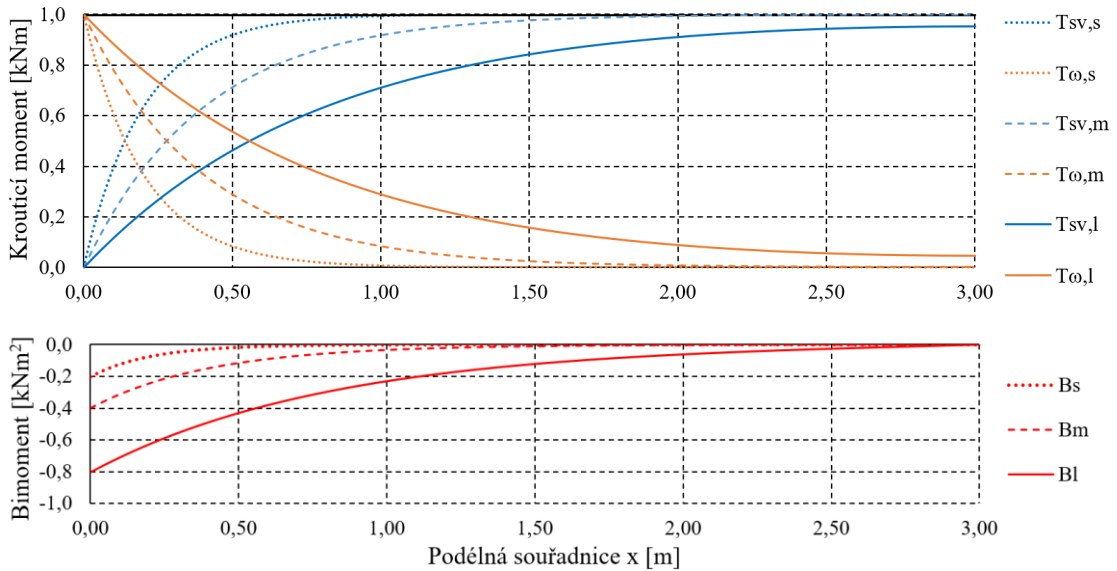


Obrázek 6.14 - Porovnání vlivu tvaru průřezu na průběh kroucení a bimomentu po délce prvku.

Z obrázku je patrné, že největší vliv vázaného kroucení nastává pro průřez tvaru I, protože bimoment i sekundární kroucí moment dosahuje nejdále. Tento výsledek i celkové pořadí průřezů není překvapující, odpovídá pořadí z tabulky 6.2 dle součinitele λ_I , uvedené na začátku této kapitoly. Průřez tvaru I je ze všech nejsubtilnější a svým tvarem nejvíce blíží tenkostěnným průřezům, což je jedním z důvodů, proč má na celkové kroucení značný vliv kroucení vázané, které je přítomné po celé délce prvku.

6.5.2 Vliv velikosti průřezu

Pro stejné statické uspořádání jako v předchozím případě bylo provedeno porovnání pro všechny tři velikosti průřezu tvaru I. Tento průřez je zvolen proto, že je na něm nejvíce patrný vliv vázaného kroucení.

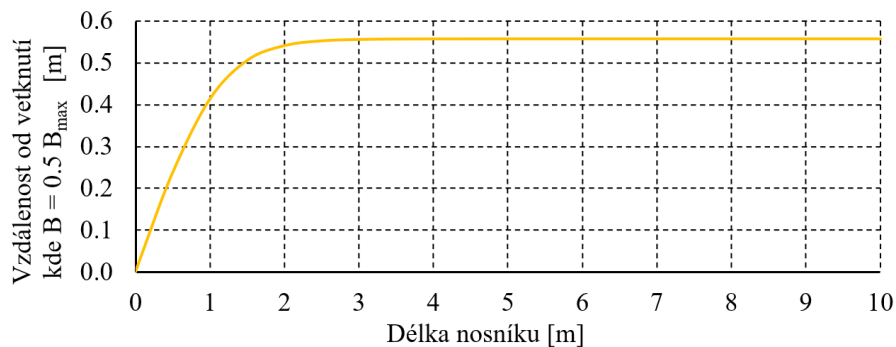


Obrázek 6.15 - Porovnání vlivu velikosti průřezu na průběh kroucení a bimomentu po délce prvku.

Je patrné, že se vzrůstající velikostí průřezu se zvyšuje vliv vázaného kroucení po délce prvku. Rovněž narůstají i hodnoty bimomentu v místě vetknutí a zvyšuje se jeho dosah po délce prvku. Tento trend je shodný u všech typů průřezu, ačkoliv zde nejsou výsledky explicitně uvedeny.

6.5.3 Vliv délky nosníku

Posledním parametrem, který byl sledován, je délka krouceného prvku a její vliv na dosah bimomentu. V tomto případě bylo sledováno, v jaké vzdálenosti od vetknutí klesne hodnota bimomentu pod 50% maximální hodnoty dosažené ve vetknutí. Uvedený obrázek platí pro průřez I velké geometrie, okrajové podmínky jsou stejné jako v předchozích případech.



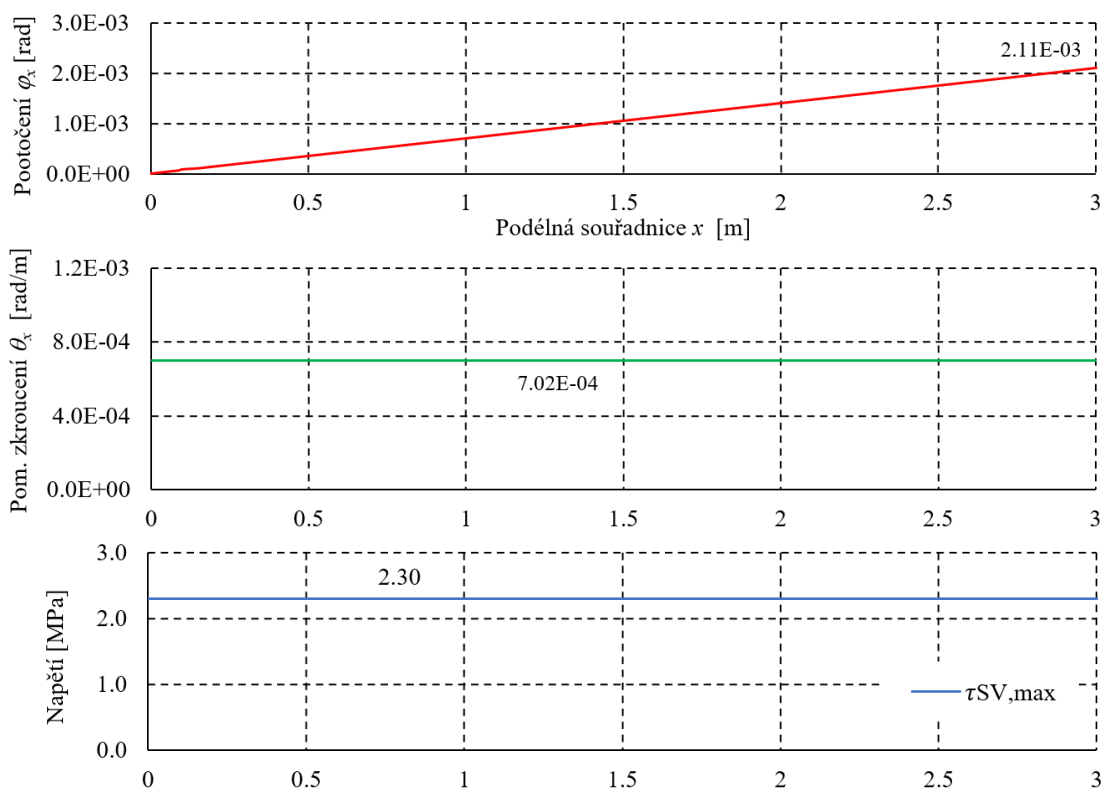
Obrázek 6.16 - Vliv délky nosníku na dosah bimomentu (průřez I – velké).

Z výše uvedeného obrázku je patrné, že pro daný průřez existuje maximální hodnota délky od vetknutí, ve které se i při dalším zvětšování celkové délky prvku nemění hodnota bimomentu. Dále lze ještě pozorovat, že při velmi malých délkách kroucených prvků, klesá bimoment pod 50 % přesně za polovinou jejich délky, jeho průběh je tedy de facto lineární

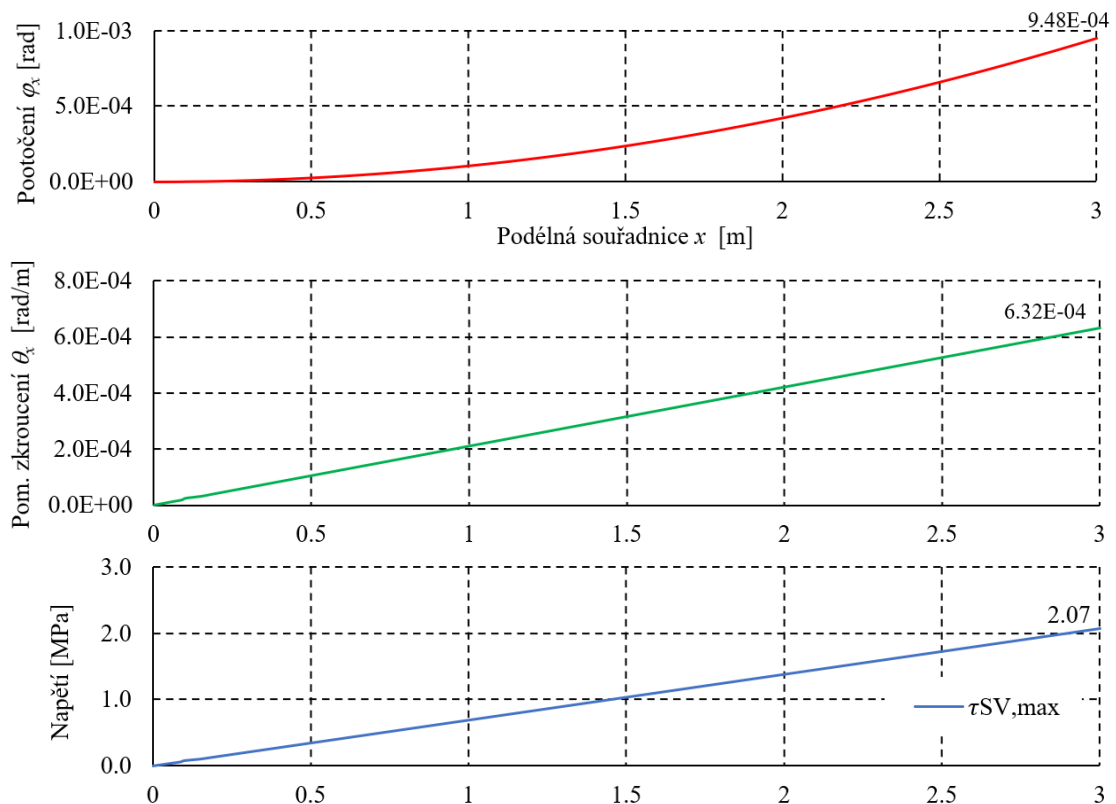
6.6 Porovnání s kruhovým průřezem

Jak již bylo zmíněno v předchozích kapitolách, kruhový průřez nedeplanuje a celkové kroucení na prvku je rovno pouze volnému kroucení. Teoreticky by měl nejlépe ze všech průřezů vzdorovat kroucení. To je ověřeno pomocí analytického výpočtu, jehož výsledky jsou uvedené v této kapitole.

Zatížení i okrajové podmínky odpovídají statickým uspořádáním č. 1 a 3 (dle Tabulky 6.5) pro obdélník, respektive 11 a 13 pro průřez tvaru I, se kterými je následně provedeno srovnání (výsledky pro průřez I jsou přepočítány pro hodnoty zatížení 50 kNm, respektive 15 kNm/m tak, aby bylo možné srovnání jednotlivých výsledků). Geometrie kruhového průřezu je zvolena jako střední velikost.



Obrázek 6.17 - Výsledky analytického výpočtu – konzola zatížená koncovým momentem.



Obrázek 6.18 - Výsledky analytického výpočtu – konzola zatížená spojitým momentem.

Z tabulky uvedené níže je patrné, že kruhový průřez opravdu nejlépe vzdoruje kroucení, hodnoty pootočení volného konce i průměrného poměrného zkroucení jsou nižší o přibližně 35 % v porovnání s obdélníkem, respektive o cca 300 % v porovnání s průřezem tvaru I (pro koncový krouticí moment). Hodnoty napětí se pro jednotlivé případy liší o 40-325 %.

Tabulka 6.7 - Porovnání výsledků vybraných průřezů s průřezem kruhovým.

Označení	Prvek	Průřez	Zatížení	φ_x	$\theta_{x,avg}$	$\tau_{SV,max}$
				[rad]	[rad/m]	[MPa]
1	Konzola	Kruh	Koncový moment	2,11E-03	7,02E-04	2,30
2			Spojitě zatížení	9,48E-04	3,16E-04	2,07
3		Obdélník	Koncový moment	2,87E-03	9,57E-04	3,76
4			Spojitě zatížení	1,28E-03	4,27E-04	2,89
5		I	Koncový moment	6,40E-03	2,13E-03	9,77
6			Spojitě zatížení	2,64E-03	8,80E-04	5,28

6.7 Lineární numerická analýza vybraných případů kroucení

Řešení je provedeno v programu ATENA s využitím prostorových konečných prvků (tzv. bricky s lineárními bázovými funkcemi) a za předpokladu plně lineární odezvy materiálu, tj. bez vniku trhlin. Implicitně jsou uvažovány velké posuny a deformace, které ovšem nemají v tomto případě téměř žádný vliv na získané výsledky. Ve výpočtech jsou uvažovány stejné okrajové podmínky, zatížení i materiálové parametry jako pro analytický výpočet. Na jednotlivé výpočty je odkazováno pomocí čísla statického uspořádání uvedeného v tabulce 6.5, kapitola 6.4.1.

Výsledky numerického a analytického výpočtu jsou následně porovnány v řezu prvku, kde je dle analytického výpočtu výrazný vliv vázaného kroucení, a v řezu působení převážně volného kroucení (orientace podélné souřadnice x je dle směru vyznačeného v jednotlivých schématech uvedených v kapitole 6.4.3). U některých případů je vlivem singularit, vznikající kontaktem mezi krouceným prvkem a zatěžovací deskou, napětí značně zkresleno, proto jsou kontrolovány výsledky v řezech dostatečně vzdálených od místa singularity, případně pouze hodnoty normálového napětí, to se týká především uspořádání se spojitým zatížením.

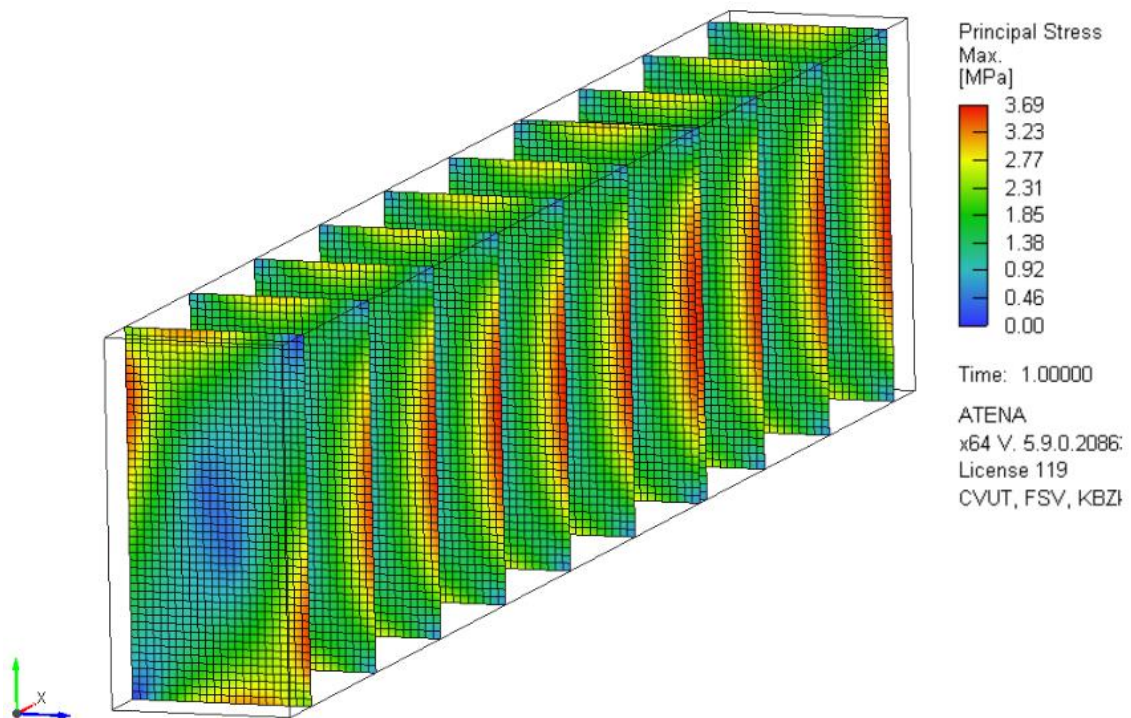
Pootočení jsou měřena na konci konzol, respektive uprostřed nosníků. Průměrné poměrné zkroucení je dopočítáno prostým vydělením celkového pootočení příslušnou délkou prvku.

$$\theta_{x,avg} = \frac{|\varphi_x(d) - \varphi_x(0)|}{d} \quad (6.33)$$

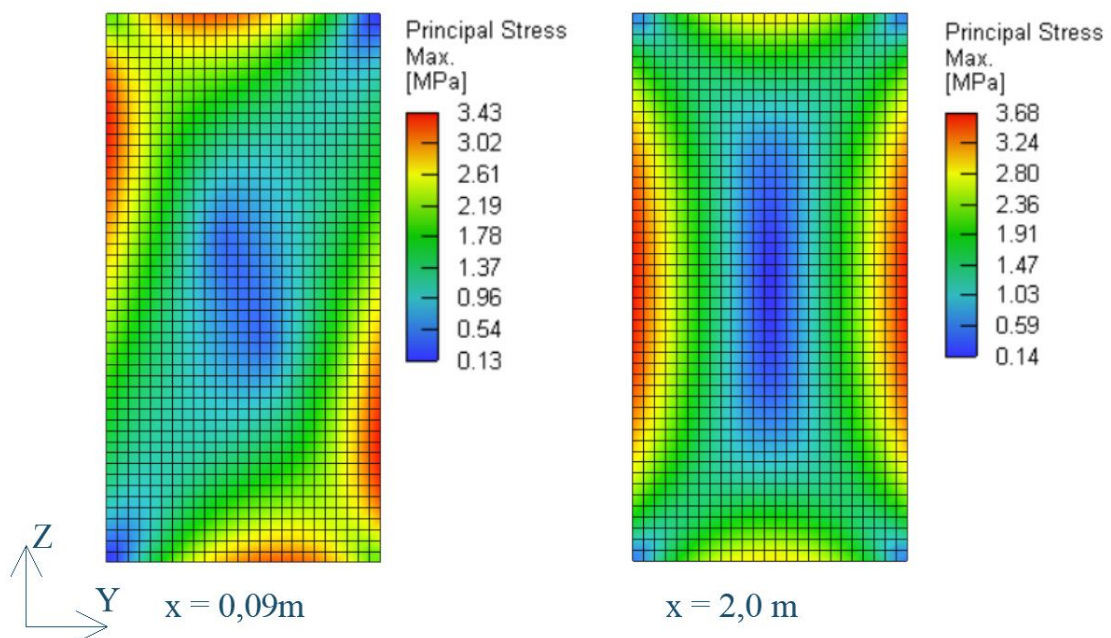
6.8 Výsledky numerického řešení a porovnání s analytickým řešením

6.8.1 Výsledky pro obdélníkový průřez

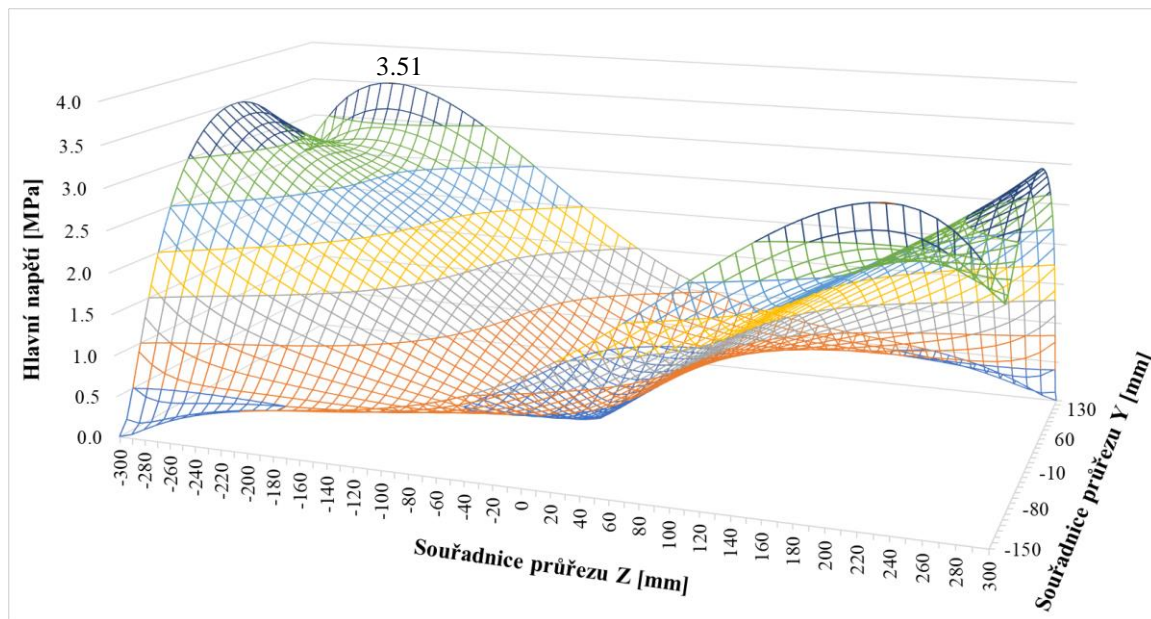
Pro názornost jsou v hlavním textu představeny výsledky lineární numerické analýzy statického uspořádání č. 1 a 2 pro obdélníkový průřez, ostatní příklady jsou uvedeny v příloze A na konci tohoto dokumentu.

Statické uspořádání č.1:

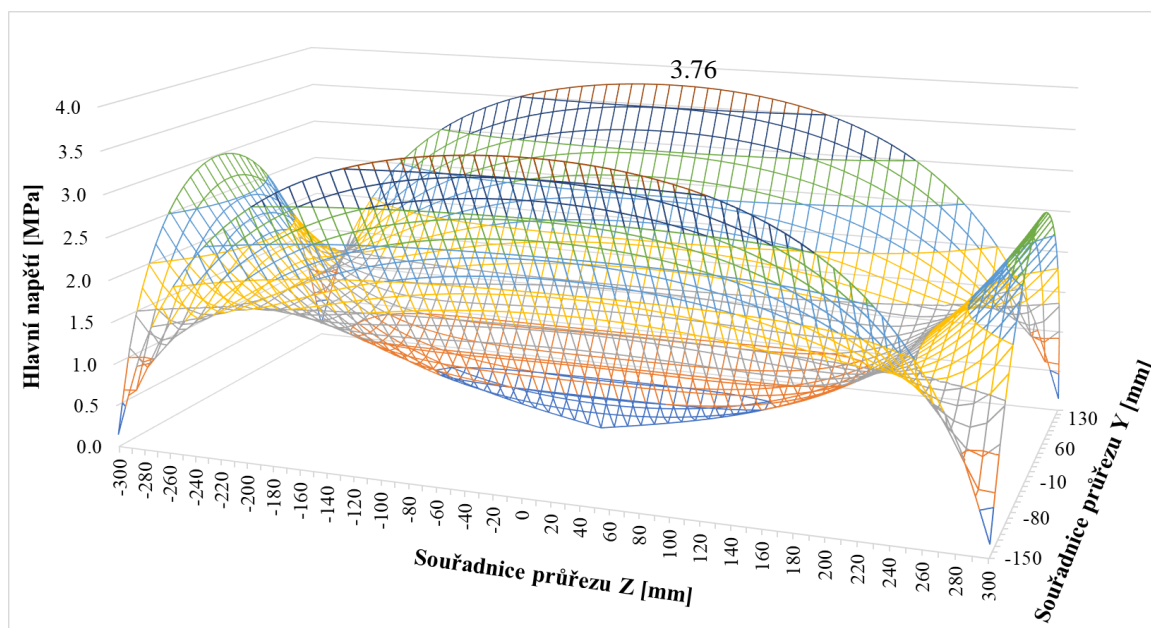
Obrázek 6.19 - Ukázka vývoje hlavního napětí v řezech po délce prvku.



Obrázek 6.20 - Hlavní napětí na průřezu stanovené numerickým výpočtem pro statické uspořádání č.1.



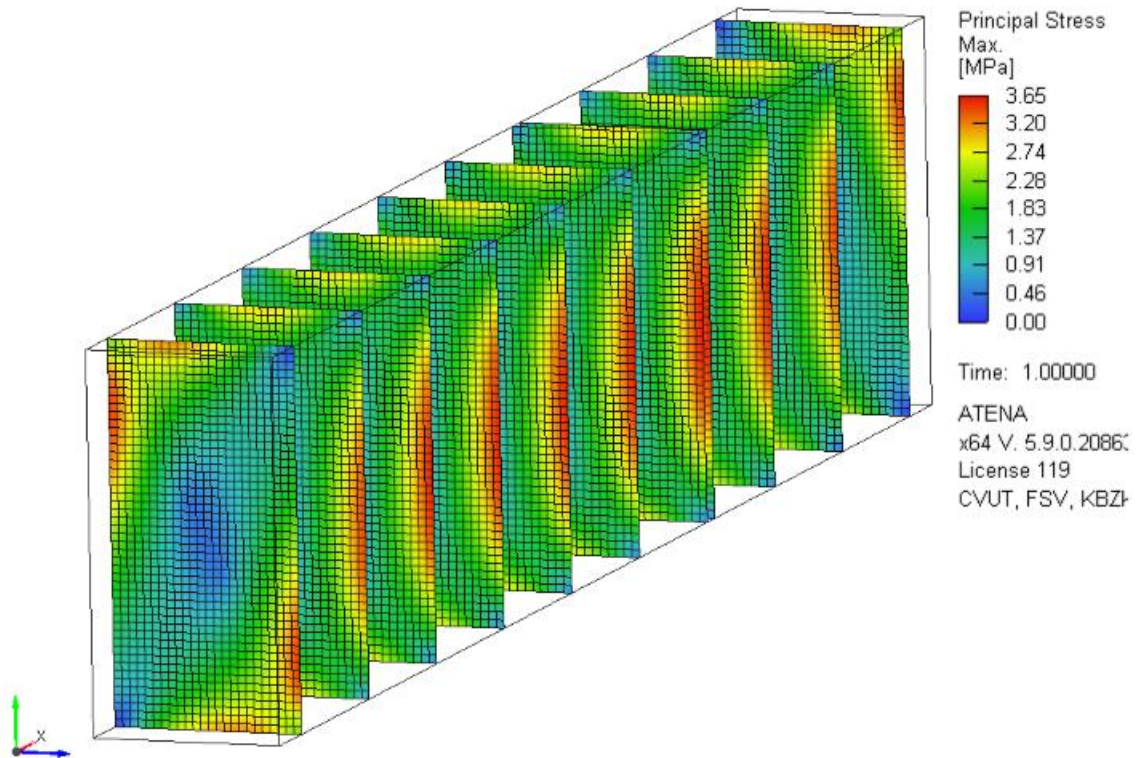
Obrázek 6.21 - Hlavní napětí ve vzdálenosti 90 mm od vetknutí dle analytického výpočtu.



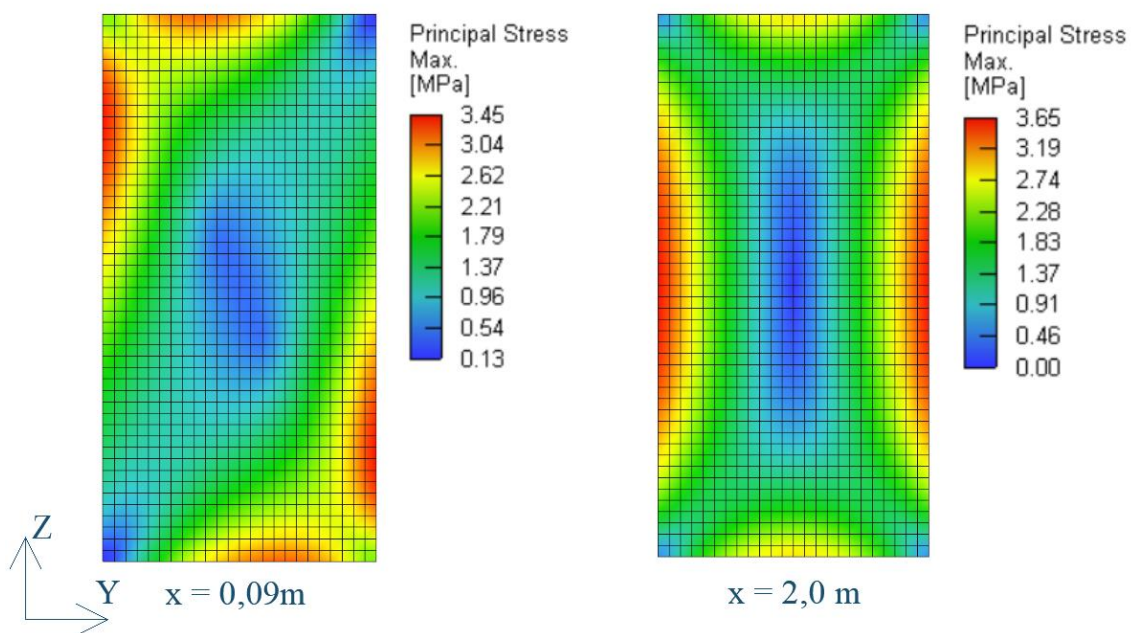
Obrázek 6.22 – Hlavní napětí ve vzdálenosti 2,0 m od vetknutí dle analytického výpočtu

Statické uspořádání č.2:

Hodnoty pro napětí z analytického výpočtu jsou stejné jako pro předchozí statické uspořádání.



Obrázek 6.23 - Ukázka vývoje hlavního napětí v řezech po délce prvku.



Obrázek 6.24 - Hlavní napětí na průřezu stanovené numerickým výpočtem pro statické uspořádání č.2.

6.8.2 Porovnání výsledků pro obdélníkový průřez

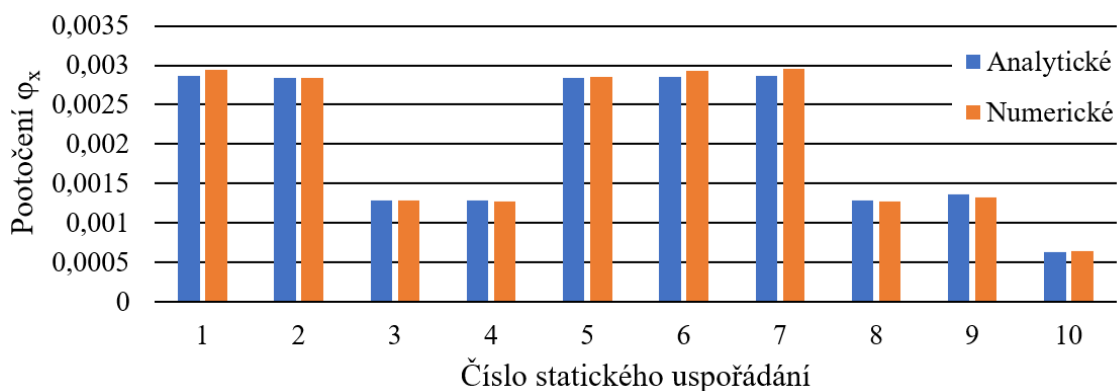
Jak již bylo psáno na začátku této kapitoly, singularity v kontaktech značně ovlivňují maximální hodnoty napětí na průřezu, v tabulkách jsou proto uvedeny skutečné maximální hodnoty očištěné o singularity, tyto hodnoty byly odečteny v programu ATENA (jedná se o statická uspořádání č. 3, 4, 8, 9, 10).

Kromě napětí jsou v tabulce také porovnávány hodnoty pootočení φ_x a průměrného poměrného zkroucení θ_{avg} .

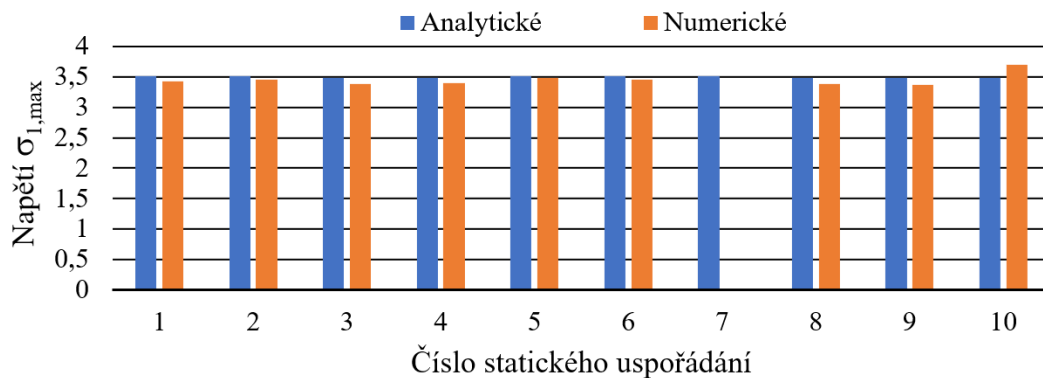
Tabulka 6.8 - Shrnutí výsledků z analytického a numerického řešení.
(*červené hodnoty v tabulce označují porovnání normálového napětí)

S.U.	Analytické výpočty				Numerické výpočty (ATENA)			
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	$j_{x,an}$	$q_{an,avg}$	$\sigma_{l,max,an}$	$\tau_{SV,max,an}$	$j_{x,num}$	$q_{num,avg}$	$\sigma_{l,max,num}$	$\tau_{SV,max,num}$
	[rad]	[rad/m]	[MPa]	[MPa]	[rad]	[rad/m]	[MPa]	[MPa]
1	0,00287	0,000957	3,51	3,76	0,0029433	0,000981	3,43	3,68
2	0,00284	0,000947	3,51	3,76	0,0028425	0,000948	3,45	3,65
3	0,00128	0,000427	3,49	2,26	0,00128	0,000427	3,39	2,23
4	0,00128	0,000427	3,49	2,26	0,0012767	0,000426	3,4	2,24
5	0,00284	0,000947	3,51	3,76	0,00285	0,000950	3,48	3,74
6	0,00285	0,00095	3,51	3,76	0,00293	0,000977	3,46	3,7
7	0,00287	0,000957	3,51	3,76	0,00296	0,000987	x	3,69
8	0,00128	0,000427	3,49	2,54	0,0012767	0,000426	3,39	2,49
9	0,00136	0,000453	3,49	x	0,0013267	0,000442	3,37	x
10	0,000634	0,000423	3,49	x	0,0006373	0,000425	3,7	x

Pro přehlednější orientaci ve výsledcích uvedených v tabulce jsou vybrané hodnoty prezentovány formou sloupcových grafů na následujících obrázcích.



Obrázek 6.25 – Sloupcové grafy – porovnání pootočení z analytického a numerického výpočtu.



Obrázek 6.26 - Sloupcové grafy – porovnání napětí z analytického a numerického výpočtu.

Tabulka 6.9 - Porovnání výsledků z analytického a numerického řešení.

Statické uspořádání	Porovnání		
	(1) / (5)	(3) / (7)	(4) / (8)
	[-]	[-]	[-]
1	0,975	1,023	1,022
2	0,999	1,017	1,030
3	1,000	1,029	1,013
4	1,003	1,026	1,009
5	0,996	1,009	1,005
6	0,973	1,014	1,016
7	0,970	x	1,019
8	1,003	1,029	1,020
9	1,025	1,036	x
10	0,995	0,943	x
Průměr	0,994	1,014	1,017
Směrodatná odchylka	0,0170	0,0279	0,0078
Variační koeficient	0,0171	0,0275	0,0076

Z výše uvedené tabulky je patrné, že hodnoty pootočení (resp. průměrného poměrného zkroucení) dle analytického i numerického řešení vychází prakticky shodně, ve většině případů vyšlo pootočení získané analytickým výpočtem nepatrně větší, hodnoty se liší maximálně o 3 % a variační koeficient CoV je roven 1,7 %.

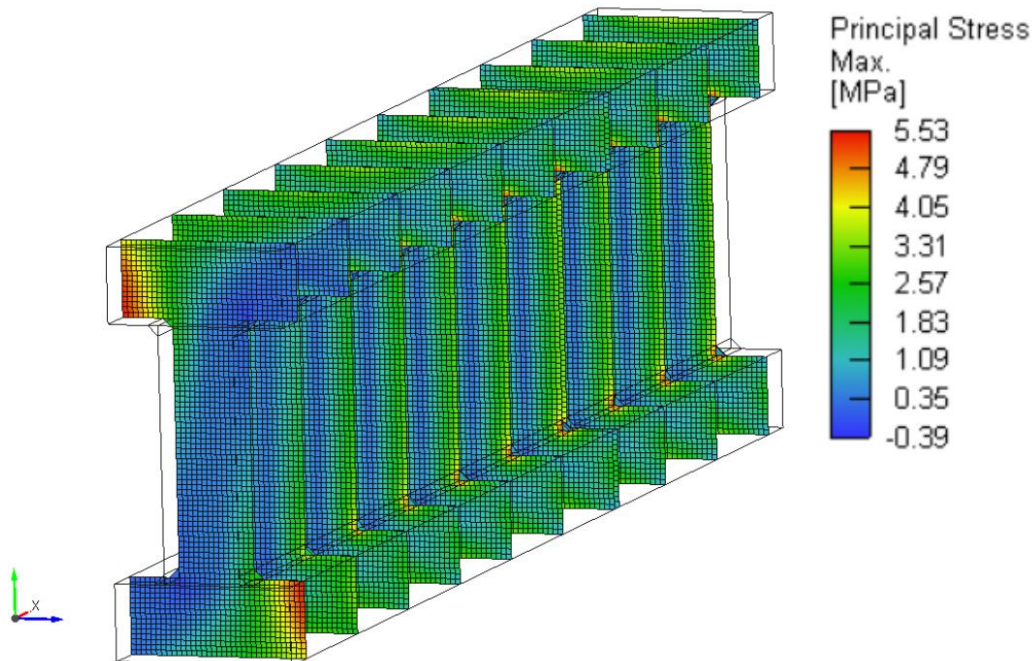
Na rozdíl od pootočení, vycházejí hodnoty napětí získané analytickým řešením nepatrně vyšší oproti hodnotám z numerického řešení, to je dáno především hustotou sítě konečných prvků použitou ve výpočtu. Přesto se hodnoty liší maximálně o 5,7 % v případě statického uspořádání č.10 (který byl ovlivněn singularitami), v ostatních případech maximálně o 3,6 %. Variační koeficient je roven 2,8 %, respektive 0,9 %.

Obecně je tedy možné konstatovat, že výsledky získané numerickým řešením velmi dobře korespondují s výsledky získanými analytickým řešením, a tedy že lineární numerické modely představené v této kapitole jsou správné.

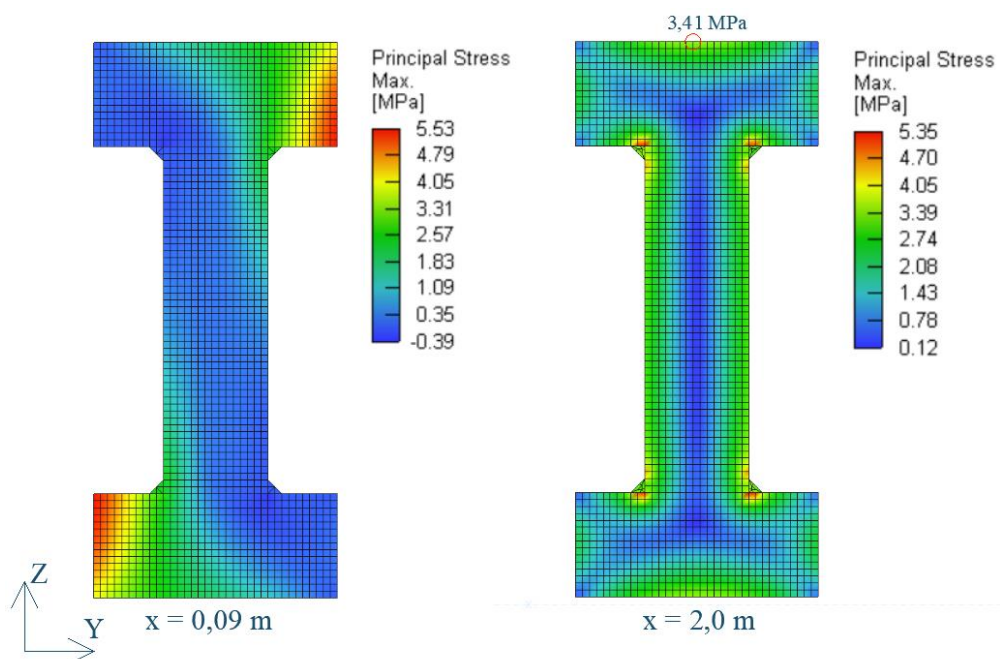
6.8.3 Výsledky pro průřez tvaru I

Podobně jako v předchozím případě jsou pro názornost v hlavním textu představeny výsledky lineární numerické analýzy statických uspořádání č. 11 a 12 pro průřez tvaru I, ostatní příklady jsou uvedeny v příloze B na konci tohoto dokumentu.

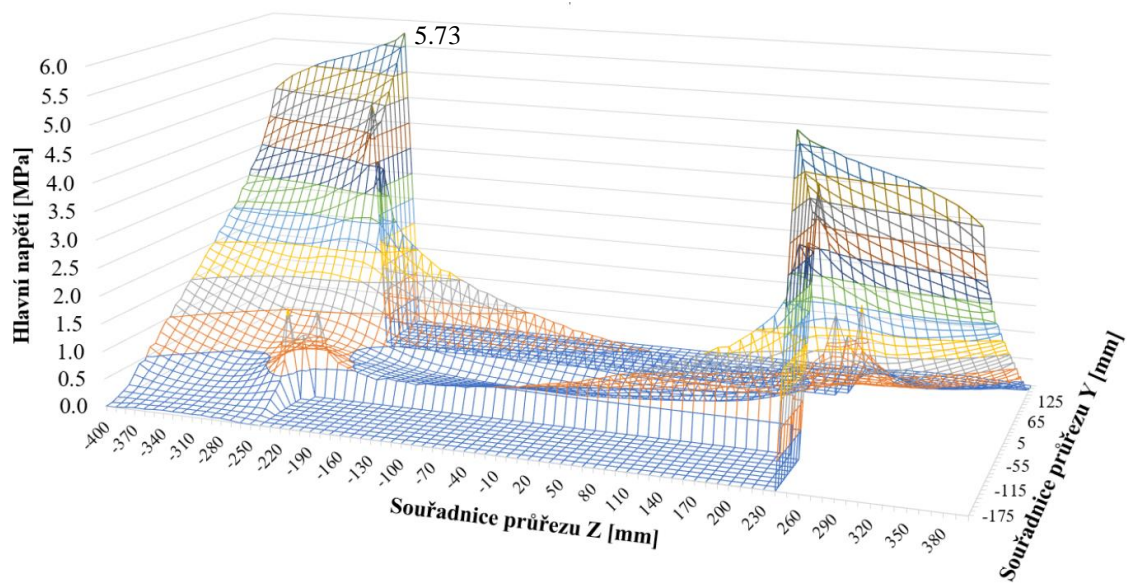
Statické uspořádání č.11:



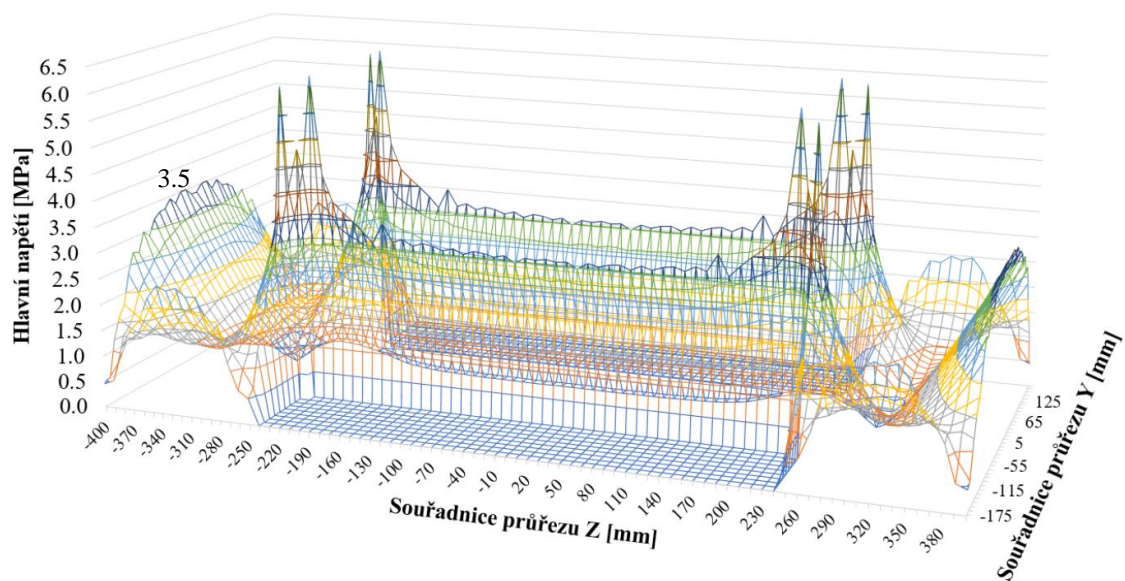
Obrázek 6.27 - Ukázka vývoje hlavního napětí po délce prvku – konzola s volným koncem.



Obrázek 6.28 - Hlavní napětí na průřezu stanovené numerickým výpočtem pro statické uspořádání č.11.



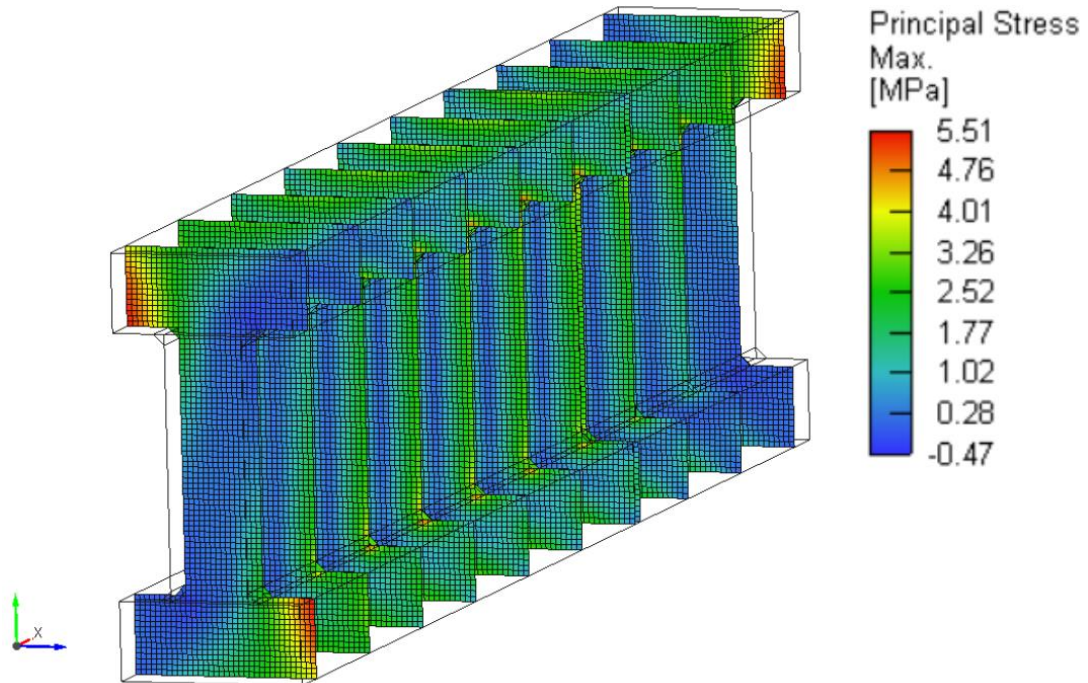
Obrázek 6.29 - Hlavní napětí ve vzdálenosti 90 mm od vetknutého konce dle analytického výpočtu.



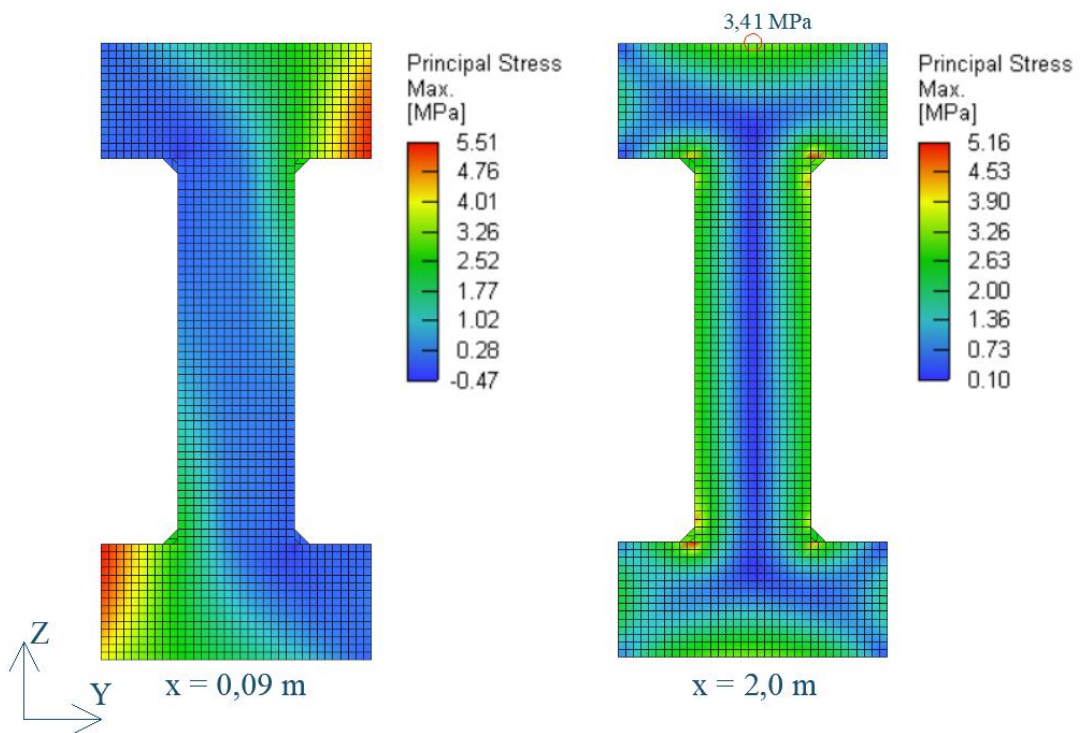
Obrázek 6.30 - Hlavní napětí ve vzdálenosti 2,0 m od vetknutého konce dle analytického výpočtu.

Statické uspořádání č.12:

Hodnoty pro napětí z analytického výpočtu jsou stejné jako pro předchozí statické uspořádání.



Obrázek 6.31 - Ukázka vývoje hlavního napětí po délce prvku – konzola s výztuhou.



Obrázek 6.32 - Hlavní napětí na průřezu stanovené numerickým výpočtem pro statické uspořádání č.12.

6.8.4 Porovnání výsledků pro průřez tvaru I

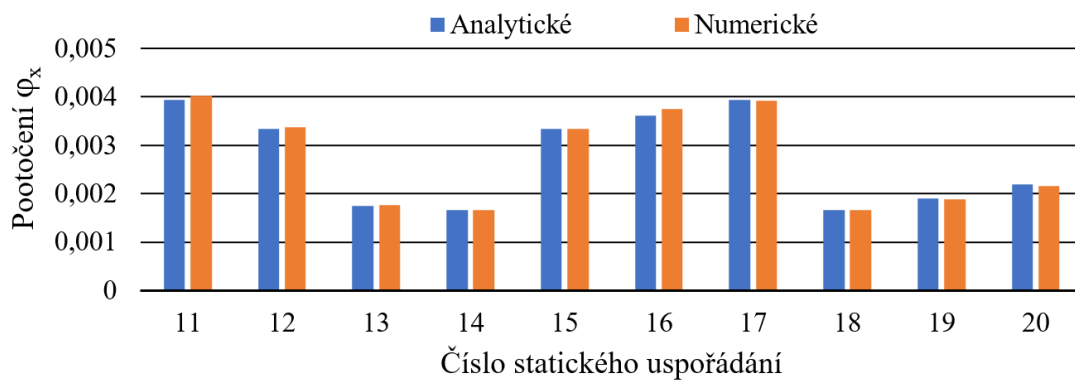
Podobně jako u obdélníkového průřezu, u kterého vznikaly singularity vlivem kontaktu při spojitém zatížení, byly i u průřezu tvaru I některé výsledky ovlivněny singularitami, které vznikaly především v místech konkávních rohů (na rozdíl od obdélníkového průřezu). Hodnoty těchto napětí nebyly brány při porovnávání v úvahu, protože velmi závisí na hustotě sítě konečných prvků, místo toho byly porovnávány napětí uprostřed horní hrany průřezu (platí pro hlavní napětí tvořena převážně napětím od volného kroucení).

Tabulka 6.10 - Shrnutí výsledků z analytického a numerického řešení.

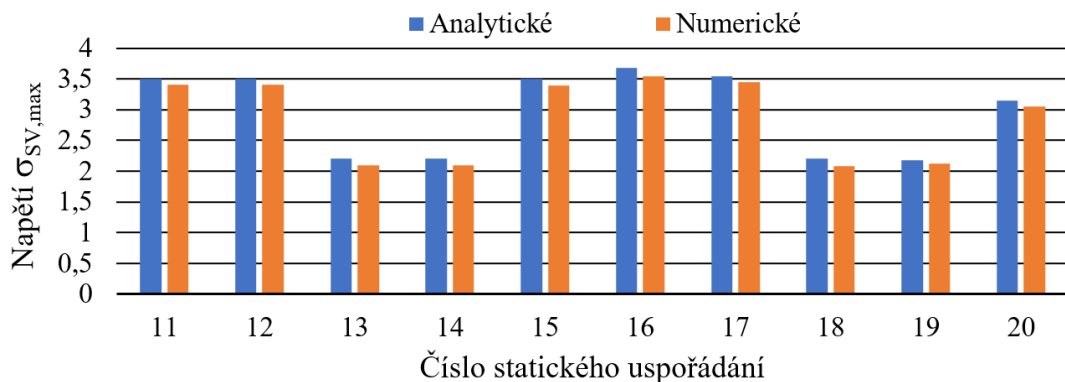
S.U.	Analytické výpočty				Numerické výpočty (ATENA)			
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	$\int_{x,an}$	$q_{an,avg}$	$\sigma_{1,max,an}$	$\tau_{SV,max,an}$	$\int_{x,num}$	$q_{num,avg}$	$\sigma_{1,max,num}$	$\tau_{SV,max,num}$
	[rad]	[rad/m]	[MPa]	[MPa]	[rad]	[rad/m]	[MPa]	[MPa]
11	0,00393	0,00131	5,73	3,5	0,004025	0,00134	5,53	3,41
12	0,00333	0,00111	5,73	3,5	0,003378	0,00113	5,51	3,41
13	0,00174	0,00058	4,67	2,21	0,00177	0,00059	4,47	2,1
14	0,00166	0,000553	4,67	2,21	0,001666	0,00056	4,46	2,1
15	0,00333	0,00111	5,73	3,5	0,00334	0,00111	5,55	3,39
16	0,00361	0,001203	5,73	3,68	0,003752	0,00125	5,5	3,54
17	0,00393	0,00131	x	3,54	0,003912	0,00130	x	3,45
18	0,00166	0,000553	4,67	2,21	0,001663	0,00055	4,42	2,08
19	0,00191	0,000637	4,79	2,17	0,00189	0,00063	4,66	2,12
20	0,00219	0,00073	x	3,15	0,002153	0,00072	x	3,05

Tabulka 6.11 - Porovnání výsledků z analytického a numerického řešení.

Statické uspořádání	Porovnání		
	(1)/(5)	(3)/(7)	(4)/(8)
	[-]	[-]	[-]
11	0,976	1,036	1,026
12	0,986	1,040	1,026
13	0,983	1,045	1,052
14	0,996	1,047	1,052
15	0,997	1,032	1,032
16	0,962	1,042	1,040
17	1,005	x	1,026
18	0,998	1,057	1,063
19	1,011	1,028	1,024
20	1,017	x	1,033
Průměr	0,993	1,041	1,037
Směrodatná odchylka	0,0165	0,0090	0,0137
Variační koeficient	0,0167	0,0086	0,0132



Obrázek 6.33 - Sloupcové grafy – porovnání pootočení z analytického a numerického výpočtu.



Obrázek 6.34 - Sloupcové grafy – porovnání napětí z analytického a numerického výpočtu.

Stejně jako v případě obdélníkového průřezu, tak ani u průřezu tvaru I se hodnoty pootočení, respektive průměrného poměrného zkroucení dle analytického a numerického výpočtu od sebe téměř neliší, ve většině případů vyšlo pootočení získané numerickým výpočtem nepatrně větší – hodnoty se liší maximálně o 3,6 %, variační koeficient CoV je roven 1,7 %.

Hodnoty hlavních napětí jsou u numerického výpočtu (podobně jako u obdélníkového průřezu) obecně nižší než výsledky získané analyticky. Průměrný rozdíl výsledků je kolem 4 %, což je nepatrně horší výsledek než pro obdélníkový průřez, avšak rozdíl je stále v přijatelných mezích. Tento rozdíl může být způsobený složitějším průřezem, případně i mírně odlišnou hustotou sítě.

Vzhledem k velmi dobré shodě analytického a numerického řešení je možné považovat lineární numerické řešení kroucených prvků s průřezem tvaru I za správné.

7. Nelineární analýza vázaného kroucení

Nelineární analýza představuje nejkompexnější výpočetní přístup k řešení statických úloh. Umožňuje sledovat reálné chování konstrukcí v celém průběhu zatěžování včetně vzniku a rozvoje trhlin v betonu, zplastizování výztuže atd. Výsledky uváděné v této části jsou získané nelineárním výpočtem v programu ATENA Science [A].

Pro vhodně vybrané vstupní parametry modelu byla před samotnými nelineárními výpočty provedena citlivostní analýza a validace numerického modelu na experimentálních výsledcích dostupných z literatury.

7.1 Předpoklady pro nelineární řešení

Vzhledem ke složitosti numerických modelů a jejich následné analýze jsou zavedeny některé zjednodušující předpoklady:

- Zatížení prvků je pouze kroucením, toto je pro případ spojitého krouticího momentu generováno liniovým zatížením na rameni.
- Ve výpočtech se uvažují pouze fixní trhliny (parametr rotace trhlin = 1,0), tedy že první trhlina vznikne ve směru kolmém na hlavní tahového napětí a při šíření trhliny je směr neměnný.

7.1.1 Vstupní parametry výpočtu

Beton:

Ve výpočtech je uvažován beton třídy C30/37 dle Eurokódu 2, jeho parametry jsou vygenerovány v požadovaném bezpečnostním formátu (střední, charakteristické a návrhové hodnoty). Pro výpočetní model je nastaven materiálový prototyp jako CC3DNonLinCementitious2, uvažující plasticitu i poškození betonu. Diskretizace je provedena pomocí prostorových konečných prvků ve tvaru kvádrů (bricků).

V následující tabulce jsou uvedeny střední hodnoty materiálových parametrů použitých pro výpočet a nastavení chování daného materiálu ve výpočetním programu. Všechny ostatní parametry, které v tabulce nejsou explicitně uvedeny byly uvažovány v nezměněné podobě, dle výchozího nastavení programu.

Tabulka 7.1 - Materiálové parametry a nastavení chování betonu v programu.

Materiálové parametry			
Beton třídy C30/37 - střední hodnoty			
E_{cm}	32,8 GPa	Velikost max. zrna kameniva	16 mm
η	0,2	Plastické přetvoření pro tlakovou pevnost	-0,001
f_{ctm}	2,9 MPa	Počátek drcení pro tlak	6,09 MPa
f_{cm}	38 MPa	Kritický posun při tlakovém namáhání	0,5 mm
Lomová energie	72,5 N/m	Redukce tlakové pevnosti vlivem trhlin	0,8

Výztuž:

Výpočetní modely byly vyztuženy betonářskou výztuží B500B. Stejně jako u betonu jsou i parametry výztuže vygenerovány v programu dle Eurokódu 2 v příslušném bezpečnostním formátu. Pracovní diagram výztuže je uvažován jako bilineární se zpevněním. Výztuž je v prvku modelována diskrétně, v přesné poloze, v jaké by se v konstrukci nacházela (tzn. že podélné pruty a třmínky se neprotínají). Výztuž plně spolupůsobí s betonem a všechny přímé části (linie) jsou reprezentovány jedním konečným prvkem (vnitřně jsou linie rozděleny na hranici s každým konečným prvkem betonu, který protínají).

Podobně jako u betonu jsou v následující tabulce uvedeny střední hodnoty materiálových parametrů použitých pro výpočet a nastavení chování daného materiálu ve výpočetním programu. Ostatní parametry byly ponechány ve výchozím nastavení.

Tabulka 7.2 - Materiálové parametry betonářské výztuže.

Materiálové parametry			
Betonářská výztuž B 500B			
Modul pružnosti E_s	200 GPa	Poměrné přetvoření na mezi kluzu ε_{ym}	0,00275
Mez kluzu f_{ym}	550 MPa	Maximální poměrné přetvoření ε_{um}	0,05
Pevnost výztuže f_{um}	594 MPa		

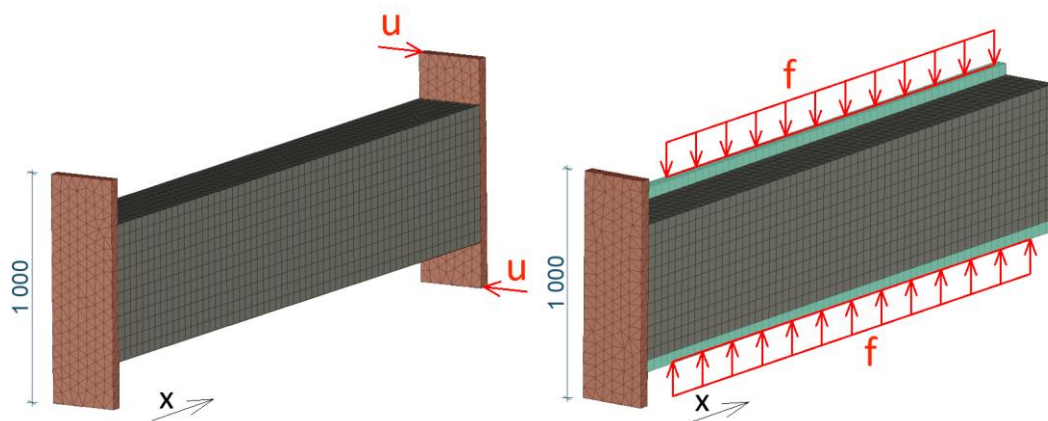
7.1.2 Zatěžování výpočetních modelů

V rámci výpočtů jsou prvky zatěžovány osamělým kroučícím momentem na konci, respektive uprostřed prvku a spojitým kroučícím zatížením po celé délce prvku. Osamělý kroučící moment je generován pomocí protisměrných posunů na rameni působící na zatěžovací desku, která je pevně spojena s krouceným prvkem. Pokud je uvažována okrajová podmínka bez bránění deplanace, není konstrukce s deskou spojena v podélném směru osy x .

Spojitě zatížení bylo na konstrukci vnášeno pomocí dalšího roznášecího tělesa, které bylo s konstrukcí spojeno ve směru působení zatížení a na jehož vnější plochu bylo vnášeno příslušné liniové zatížení. Toto řešení bylo zvoleno z důvodu zachování jednotné hmoty samotného krouceného prvku tak, aby bylo možné prvek rozdělit strukturovanou sítí elementárních krychlí, respektive kvádrů.

V případě zatížení posunem je výpočet proveden pomocí Newton-Raphsonovy metody. V případě zatížení silou bylo nutné provádět výpočet pomocí metody Arc-Length, která umožňuje zohlednit pokles zatížení na pracovním diagramu. Nastavení obou řešičů bylo ponecháno dle základního nastavení softwaru.

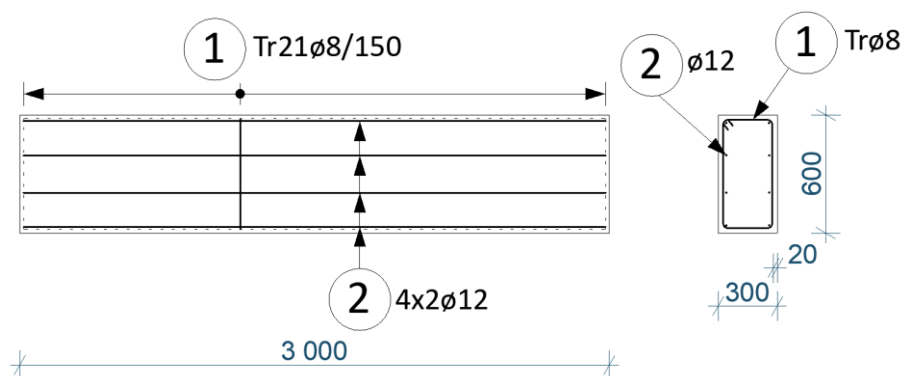
Zatížení bylo prováděno v jednom intervalu se stejným přírůstkem zatížení pro každý zatěžovací krok. Celkem bylo nastaveno pro každý výpočet 360 zatěžovacích kroků, přičemž byl každý zatěžovací krok rozdělen až na 30 iterací v závislosti na rychlosti konvergence jednotlivých numerických modelů.



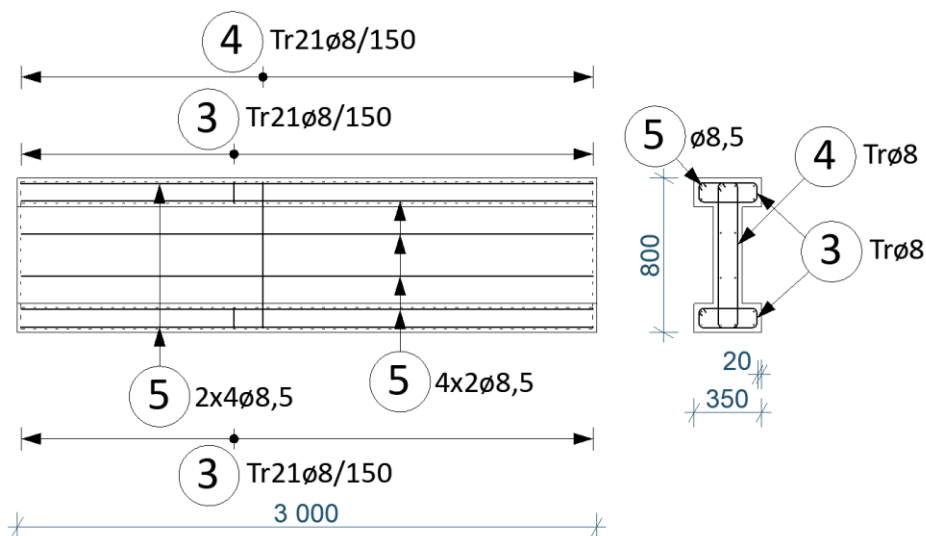
Obrázek 7.1 - Schéma zatěžování numerických modelů

7.1.3 Vyztužení vybraných modelů

Na následujících obrázcích je patrné schéma vyztužení konzol s průřezem ve tvaru obdélníku a I. Pro nosníky s celkovou délkou 6 m je vyztužení provedeno obdobně jako u konzol (tj. třmínky po 150 mm + stejná podélná výztuž).



Obrázek 7.2 - Schéma vyztužení krouceného prvku s obdélníkovým průřezem.



Obrázek 7.3 - Schéma vyztužení krouceného prvku s I průřezem.

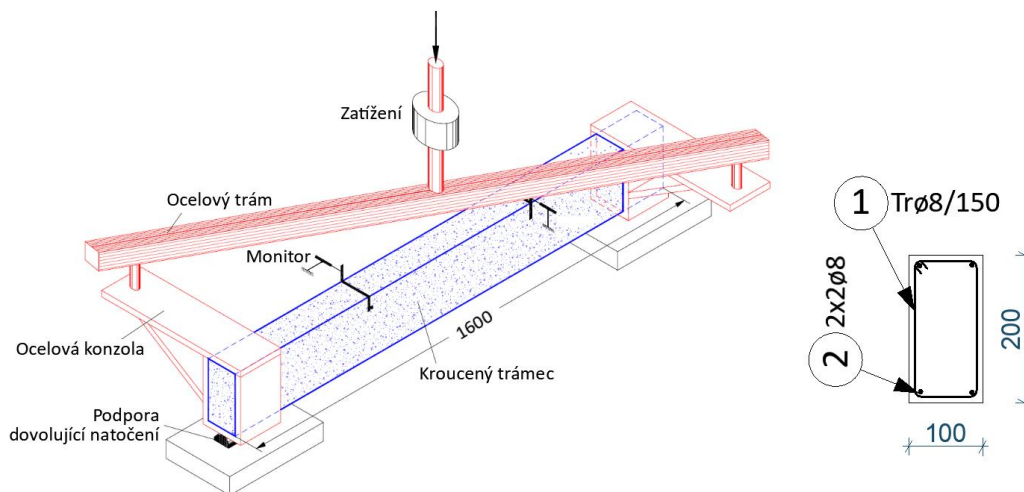
Protože oba průřezy vyžadují jiný styl vyztužení, bylo vyztužení prvku s I průřezem provedeno podélnou výztuží s teoretickým průměrem 8,5 mm tak, aby celková plocha podélné výztuže obou prvků byla shodná. Třmínky u obou prvků byly provedeny z výztuže o průměru 8 mm, a tedy poměr podélného a příčného vyztužení byl ve všech případech stejný.

7.2 Validace výpočtu pomocí dostupných experimentálních výsledků

Validace numerického modelu byla provedena pomocí výsledků dvou experimentálních studií dostupných v odborné literatuře. První experimentální výsledek byl vybrán s ohledem na uspořádání zatěžovací zkoušky tak, aby na koncích krouceného prvku nedocházelo k bránění deplanace (tj. čisté volné kroucení). Druhý experiment obsahoval na obou koncích krouceného prvku ocelové roznášecí desky, které bránily volné deplanaci (tzn. vznikalo vázané kroucení).

7.2.1 Experiment s čistým volným kroucením

Výsledky tohoto experimentu byly převzaty z výzkumu chování kroucených železobetonových prvků C. E. Chaliorise [54]. V tomto experimentu bylo sledováno chování 15 trámů obdélníkových průřezů s různým poměrem stran a různým vyztužením. Pro validaci byl vybrán trámec s označením R4-15. Ten byl vyztužen pomocí čtyř podélných prutů a uzavřených třmínků, použitá výztuž měla odlišné hodnoty meze kluzu, 518 MPa pro podélnou výztuž a 365 MPa pro příčnou výztuž. Schéma vyztužení a uspořádání zatěžovací zkoušky je patrné z následujícího obrázku.

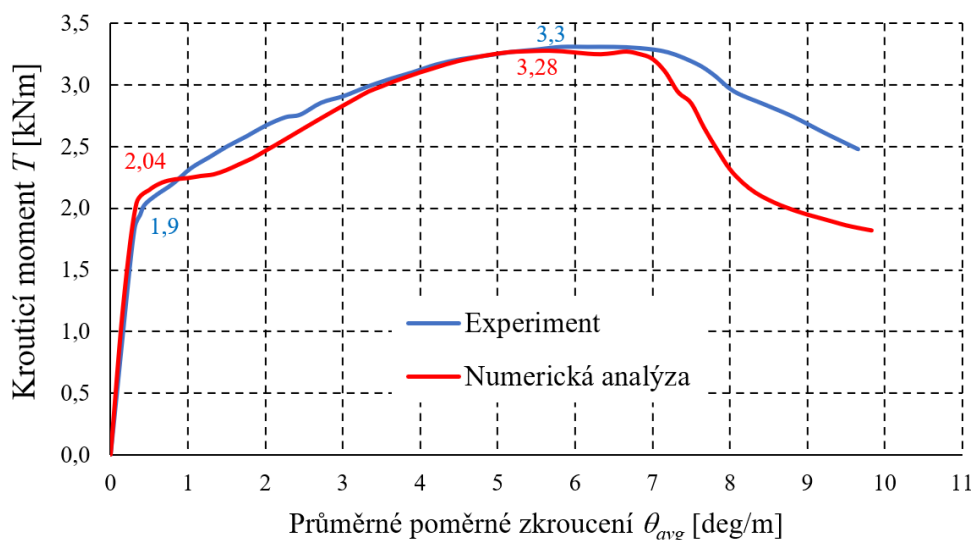


Obrázek 7.4 - Schéma uspořádání zatěžovací zkoušky a vyztužení trámce.

Materiálové charakteristiky pro numerický model byly převzaty z článku, kde jsou uvedeny výsledky získané na zkušebních tělesech. Tyto hodnoty jsou uvažovány jako střední a jsou shrnuty v následující tabulce.

Tabulka 7.3 - Materiálové charakteristiky pro experiment s významným volným kroucením.

Beton				Ocel	
Pevnost v tlaku	Pevnost v příčném tahu	85 % pevnost v příčném tahu	Modul pružnosti	Mez kluzu podélné výztuže	Mez kluzu příčné výztuže
f_{cm} [MPa]	f_{sp} [MPa]	f_{ctm} [MPa]	E_{cm} [GPa]	f_{ym} [MPa]	f_{ywm} [MPa]
20,96	2,89	2,65	30	518	365



Obrázek 7.5 - Srovnání numerického modelu s experimentálními výsledky – pracovní diagramy.

Při porovnání výsledků experimentu a numerické analýzy byla dosažena shoda únosnosti s odchylkou 1 % (3,30 kNm vs. 3,28 kNm), avšak při porovnání krouticích momentů na mezi vzniku první trhliny je výsledek získaný numerickou analýzou nadhodnocený o 7 % (1,90 kNm vs. 2,04 kNm), to může být způsobeno nesprávným stanovením tahové pevnosti betonu, případně i chybou měření při provádění experimentů. Obecně však lze konstatovat, že shoda numerického modelu s experimentem je velmi dobrá, viz Obrázek 7.5.

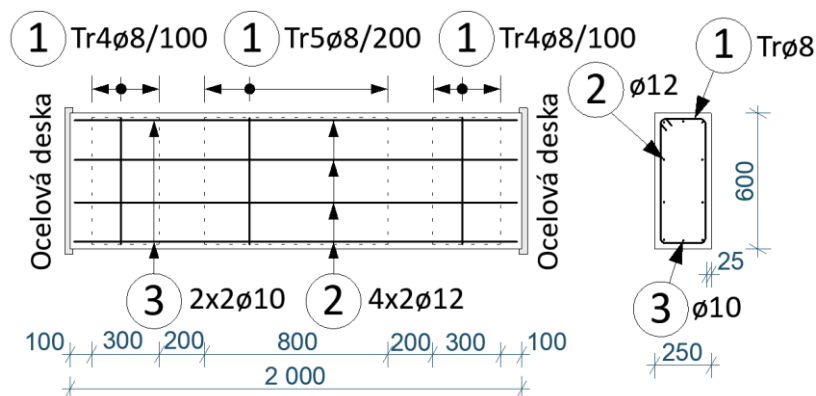
7.2.2 Experiment s významným vázaným kroucením

Validace numerického modelu byla provedena na experimentálních výsledcích získaných ze zatěžovacích zkoušek prováděných Kloknerovým ústavem v letech 2019 a 2020 [56]. Autoři experimentů poskytli autorovi této práce veškerá data nezbytná pro provedení validace numerického modelu.

V rámci těchto experimentů bylo zkoumáno chování 24 železobetonových těles zatížených kroucením. Tělesa představovala krátký nosník o celkové délce 2 metry s obdélníkovým průřezem 250/600 mm. Celkem byly provedeny čtyři sady těles (A-D),

ty se lišily vyztužením a typem zatížení. Polovina těles byla zatížena čistým kroucením, a druhá kroucením v kombinaci s osovou tlakovou silou (simulující předpětí). Výsledkům z těchto experimentů se věnuje článek [32] od profesora Vítka a kolektivu.

Pro potřeby validace byl vybrán jako výchozí vzorek D3, který byl zatížen čistým kroucením. Výztuž tohoto prvku byla tvořena tříminky $\varnothing 8$ se základní roztečí 200 mm, pro první 4 tříminky na obou koncích nosníku byla rozteč snížena na 100 mm. Podélná výztuž byla tvořena osmi pruty $\varnothing 12$ a dvěma pruty $\varnothing 10$. Vyztužení prvku je patrné z následujícího obrázku.



Obrázek 7.6 - Schéma vyztužení prvku D3

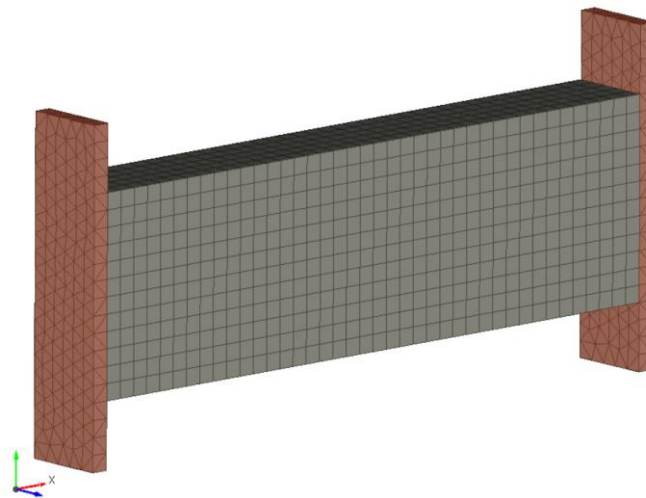
Geometrie numerického modelu a jeho vyztužení bylo provedeno v souladu s experimentem. Na obou koncích byla provedena roznášecí deska z velmi tuhého fiktivního dokonale pružného materiálu (s modulem pružnosti 300 GPa), která bránila deplanaci. Výška desky byla zvolena 1,0 m tak, aby změřené reakce přímo odpovídaly krouticímu momentu.

Materiálové charakteristiky oceli a betonu byly zvoleny v souladu s experimentem. Tyto hodnoty jsou uvedeny v následující tabulce. Ostatní materiálové parametry (které nebyly v literatuře explicitně uvedeny) byly ponechány jako výchozího nastavení programu pro pevnostní třídu betonu C40/50 a betonářskou výztuž B500B.

Tabulka 7.4 - Materiálové charakteristiky pro experiment s významným vázaným kroucením.

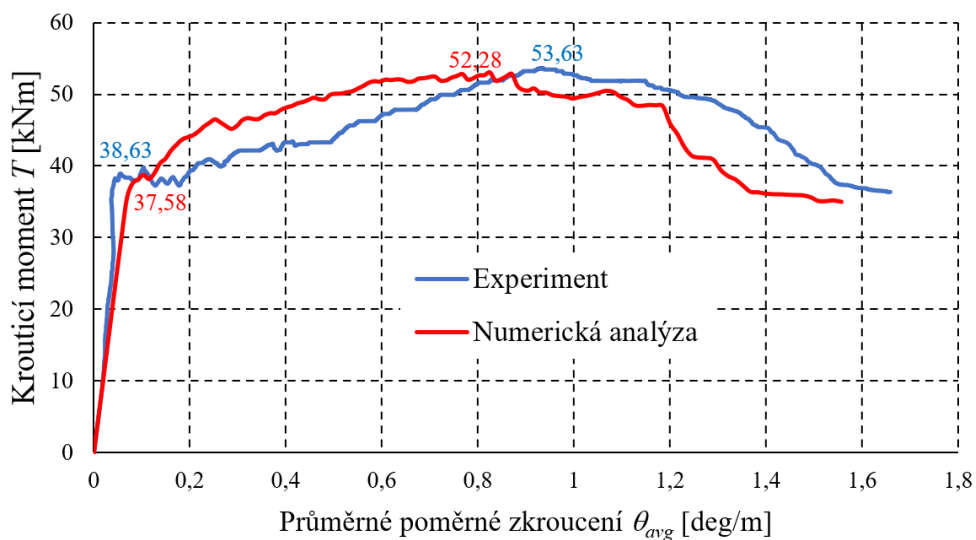
Beton			Ocel
Pevnost v tlaku	Pevnost v tahu	Modul pružnosti	Mez kluzu výztuže
f_{cm} [MPa]	f_{cm} [MPa]	E_{cm} [GPa]	f_{ym} [MPa]
48	3,7	30	630

Numerický model byl tvořen konečnými prvky ve tvaru krychlí, s délkou strany 50 mm. Na nejkratší stranu tedy připadalo 5 konečných prvků. Síť konečných prvků roznášecích desek byla tvořena pomocí čtyřstěňů. Na konečných prvcích byla uvažována lineární aproximace pole posunutí.



Obrázek 7.7 - Síť konečných prvků na numerickém modelu.

Z numerické analýzy byly získány hodnoty krouticího momentu při vzniku trhlin $T_{c,num} = 37,58 \text{ kNm}$ a při zplastizování výztuže $T_{s,num} = 52,28 \text{ kNm}$. Experimentálně byly tyto hodnoty krouticích momentů na tělese D3 stanoveny jako $T_{c,exp} = 38,63 \text{ kNm}$ a $T_{s,exp} = 53,63 \text{ kNm}$. Rozdíl krouticích momentů při vzniku trhlin byl 3 % a při zplastizování výztuže 2,5 %. Hodnoty získané numerickou analýzou jsou nepatrně nižší než hodnoty z experimentu. Tyto výsledky lze považovat za velmi dobrou shodu s ohledem na zřejmé odchylky měření (viz experimentálně stanovený průběh pracovního diagramu – Obrázek 7.8) a odchylky ve stanovení materiálových vlastností.

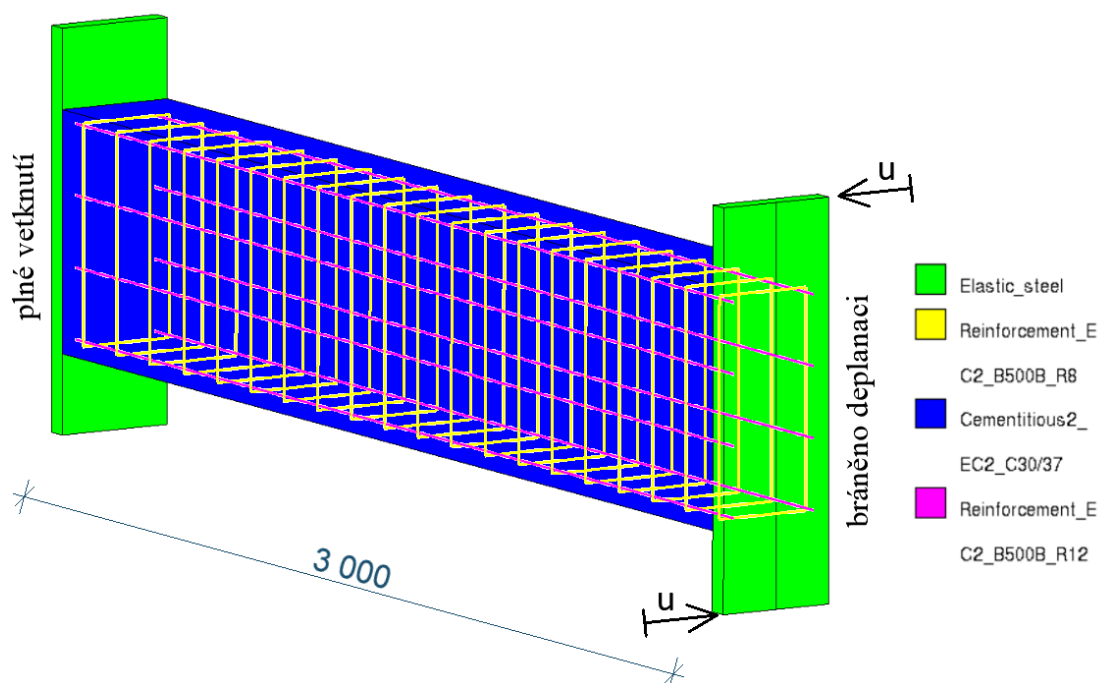


Obrázek 7.8 - Srovnání numerického modelu s experimentálními výsledky – pracovní diagramy.

7.3 Studie citlivosti

Pro zajištění správného nastavení modelu před samotnou nelineární analýzou byla provedena studie citlivosti, zaměřená především na základní nastavení a parametry ovlivňující výpočet jako například tvar konečných prvků, velikost konečných prvků, stupeň bázových funkcí a metodu použitou pro řešení nelineární úlohy. Materiálové parametry vycházejí z kapitoly 7.1.1 a byly zvoleny s ohledem na citlivostní analýzu zpracovanou v článku [53].

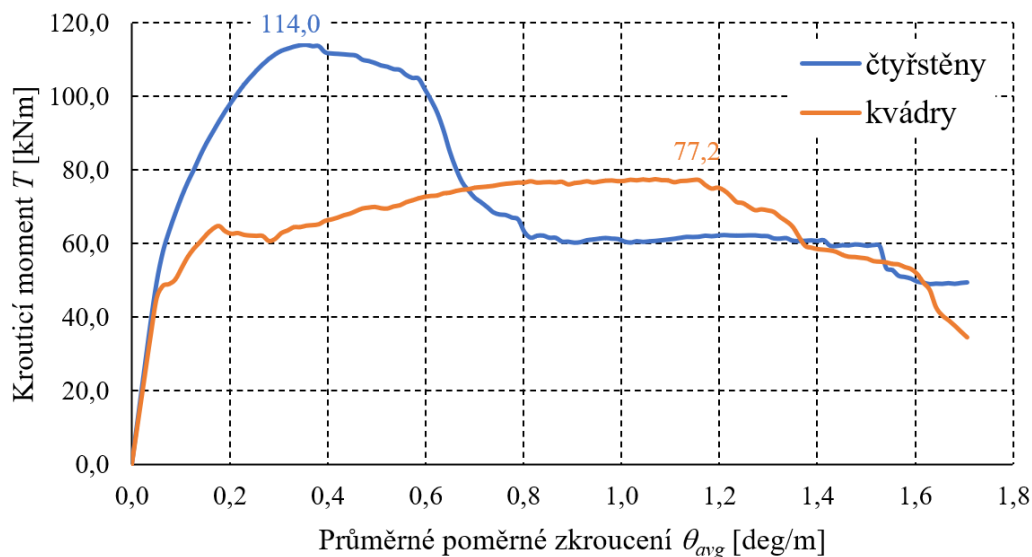
Studie citlivosti byla prováděna na konzole, která byla zatížena dvojicí protisměrných příčných koncových posunů působících na roznášecí desku z dokonale elastického materiálu, celkový posun byl 60 mm rozdělený na 300 zatěžovacích kroků, v každém kroku bylo provedeno až 30 iterací. Vyztužení vychází z předchozí podkapitoly 7.1.3. Na obou koncích byla omezena deplanace (zamezení posunu ve směru podélné osy x).



Obrázek 7.9 - Schéma modelu použitého pro studii citlivosti.

7.3.1 Geometrie konečných prvků

Pro trojrozměrná tělesa je možné uvažovat dva typy konečných prvků – čtyřstěny a kvádry. Na následujícím pracovním diagramu jsou porovnány výsledky analýzy s oběma typy konečných prvků, které byly vygenerovány tak, aby měly stejnou délku nejkratší hrany 50 mm. Na celkový objem tedy připadá přibližně čtyřikrát více čtyřstěnů.



Obrázek 7.10 - Vliv geometrie konečných prvků – pracovní diagramy.

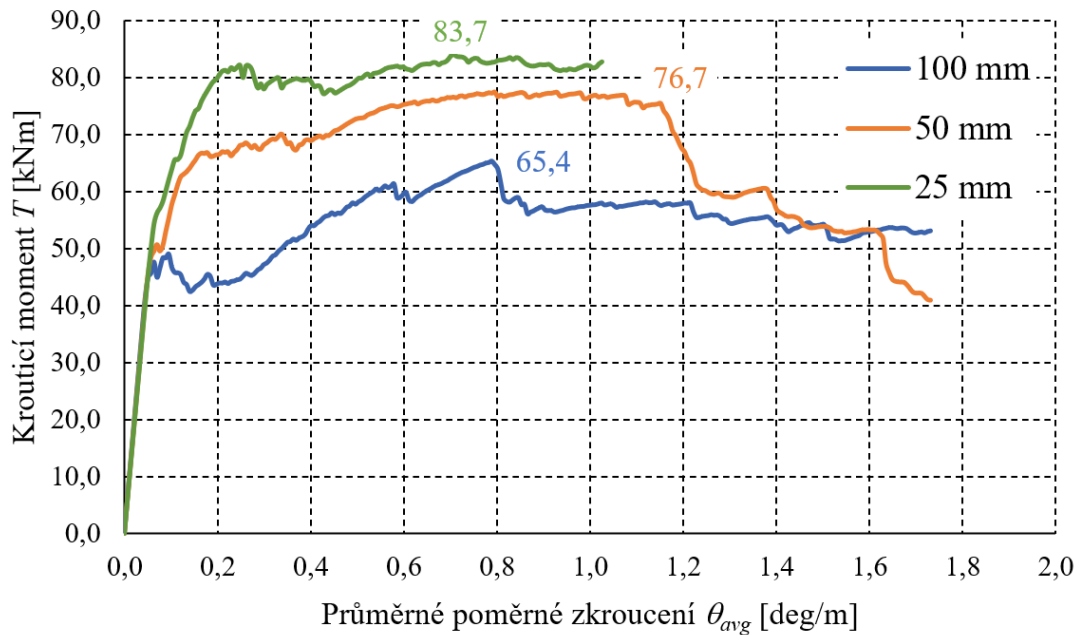
Při porovnání obou průběhů je patrné, že síť tvořená čtyřřetěny poskytuje výsledky, které neodpovídají předpokladům chování kroucených prvků (viz kapitola 7.2.2 věnovaná experimentálním výsledkům a validaci numerických modelů). Po vzniku první trhliny by mělo dojít ke značnému poklesu tuhosti, přičemž je zatížení přenášeno převážně výztuží až do dosažení meze kluzu. Z tohoto pohledu se síť tvořená čtyřřetěny jeví jako nevhodná. Rovněž je obecně doporučováno používat při statické analýze konstrukcí síť tvořenou kvádry (bricky) [52]. V dalších výpočtech je tedy uvažována síť konečných prvků tvořená kvádry (pro betonové prvky).

7.3.2 Velikost konečných prvků

Dalším důležitým faktorem, který ovlivňuje kvalitu výsledků, je velikost konečných prvků. Obecně lze předpokládat, že čím jemnější síť je zvolena, tím přesnější je i výsledek analýzy, avšak velikost konečných prvků by neměla být menší než velikost kameniva. Hustota sítě zároveň výrazně ovlivňuje i čas potřebný pro výpočet, proto je důležité zvolit vhodný kompromis mezi přesností a rychlostí vzhledem k prováděné nelineární analýze. Obecně se doporučuje použít takovou hustotu sítě, aby nejkratší hrana průřezu byla diskretizována alespoň na 4 až 6 konečných prvků [52]. Toto doporučení je vhodné pro ohýbané konstrukce, a v tomto případě je uvažováno i pro případ kroucení.

Tabulka 7.5 - Počet dělení numerického modelu na konečné prvky

Délka strany konečného prvku (kvádr) [mm]	Rozměry prvku 3000/600/300 mm			Konečných prvků celkem [-]
	Počet dělení strany			
	3000 mm	600 mm	300 mm	
25	120	24	12	34560
50	60	12	6	4320
100	30	6	3	540

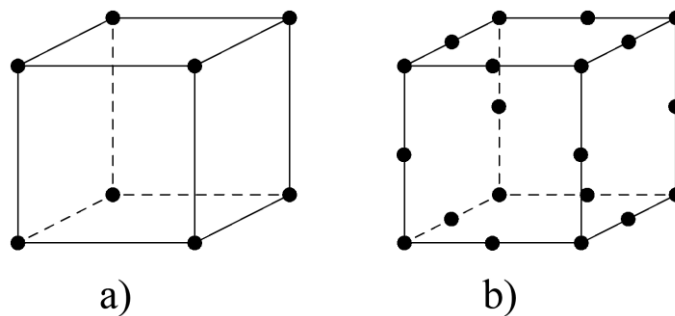


Obrázek 7.11 - Vliv velikosti konečných prvků – pracovní diagramy.

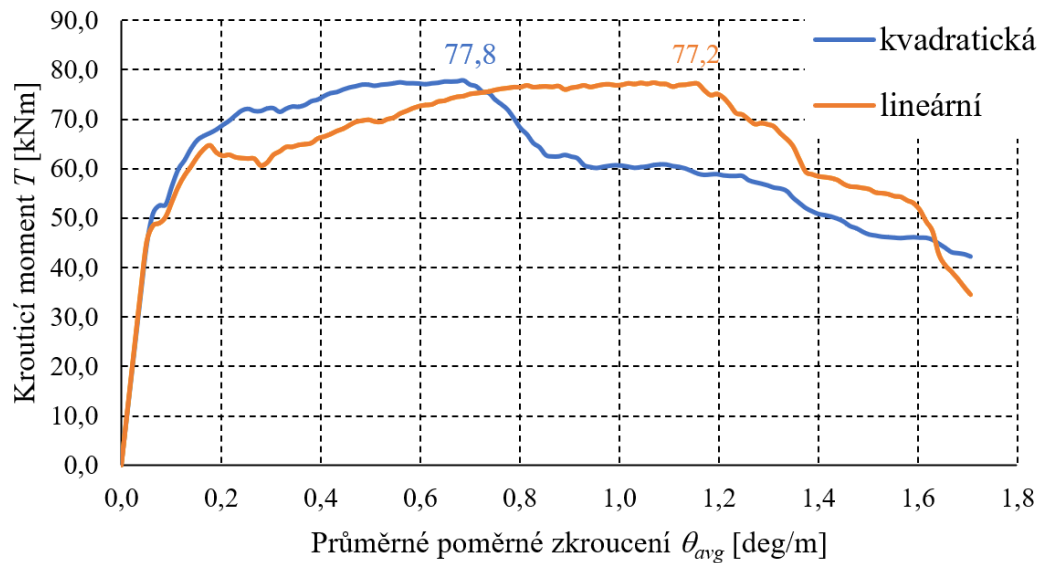
Z porovnání všech pracovních diagramů je patrné, že hrubé dělení sítě poskytuje velmi zkreslené výsledky, a proto nepřichází v úvahu pro další použití ve výpočtech. Na druhé straně řešení získané pomocí nejjemnějšího dělení sítě sice dává kvalitní (mírně nadhodnocený) výsledek, avšak řešení této úlohy je vysoce časově náročné. S ohledem na přesnost výsledků a čas řešení bylo zvoleno pro další výpočty dělení s hranou krychle 50 mm.

7.3.3 Typ bázové funkce

Program ATENA Science umožňuje používat pro řešení prostorových úloh aproximaci pole posunů konečných prvků pomocí lineárních či kvadratických bázových funkcí. Zvolená aproximace ovlivňuje kvalitu získaných výsledků, při použití kvadratických bázových funkcí je zpravidla možné dosáhnout kvalitního výsledku i za použití hrubší sítě konečných prvků. To je dáno skutečností, že na jeden konečný prvek připadá při lineární aproximaci 8 uzlových hodnot, na rozdíl od kvadratické aproximace, kdy je pro každý prvek stanoveno 20 uzlových hodnot.



Obrázek 7.12 – Uzly na tělese s a) lineární aproximací, b) kvadratickou aproximací.



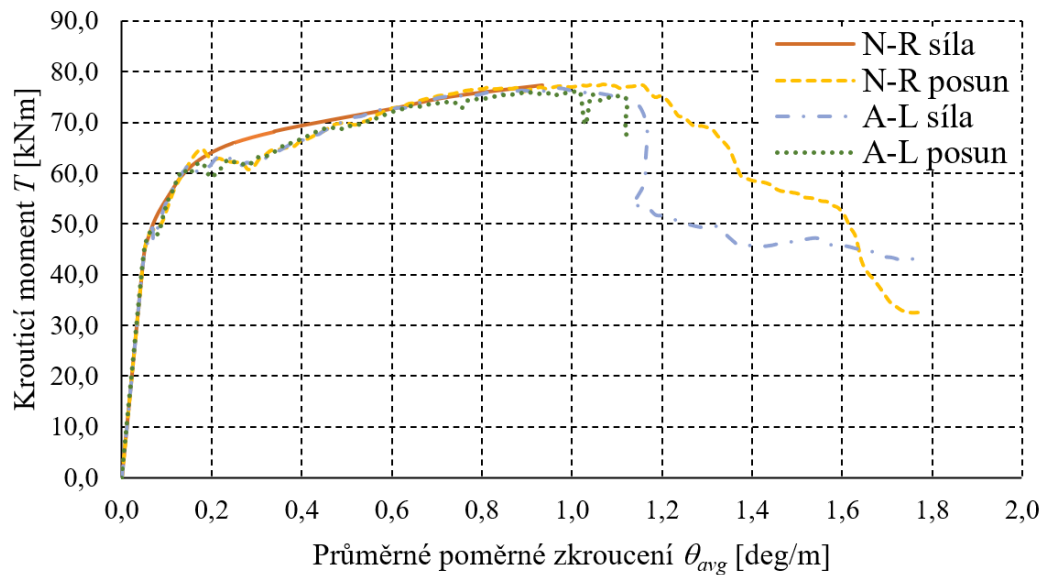
Obrázek 7.13 - Vliv typu báze funkce – pracovní diagramy.

Výše uvedené pracovní diagramy porovnávají výsledky získané lineární a kvadratickou aproximací na stejně velkých konečných prvcích (50 mm) pro oba případy. Oba výsledky dávají přibližně stejnou hodnotu maximální únosnosti, ale celkové chování krouceného prvku je trochu odlišné. S ohledem na čas potřebný pro výpočet a výsledky výzkumu prezentované v článku [2], kde je jedním z doporučení pro omezení chyb, v nelineárním numerickém modelu s uvážením poškození, použití elementů s lineární aproximací, bude v dalších nelineárních výpočtech s vlivem poškození využívána právě lineární aproximace na konečných prvcích.

7.3.4 Metoda výpočtu

Posledním porovnávaným parametrem byla metoda výpočtu. Metody výpočtu byly už krátce představeny a v obecné rovině porovnány v kapitole 4.3, avšak nyní jsou porovnány přímo průběhy získané výpočtem v programu ATENA Science.

Z níže uvedených pracovních diagramů je patrné, že všechny metody jsou schopny poměrně přesně vystihnout správný průběh a dosáhnout stejné maximální hodnoty únosnosti v kroucení. S ohledem na výsledky a stabilitu výpočtu byla při dalších výpočtech používána metoda N-R řízená předepsaným posunem pro prvky zatížené lokálním krouticím momentem a metoda Arc-Length řízená silou pro prvky zatížené spojitým krouticím zatížením, neboť tyto prvky nelze zatěžovat liniovým předepsaným posunem, který je v případě nelineární úlohy neznámý.



Obrázek 7.14 - Vliv metody výpočtu – pracovní diagramy.

7.4 Nelineární analýza kroucení pro vybraná statická uspořádání

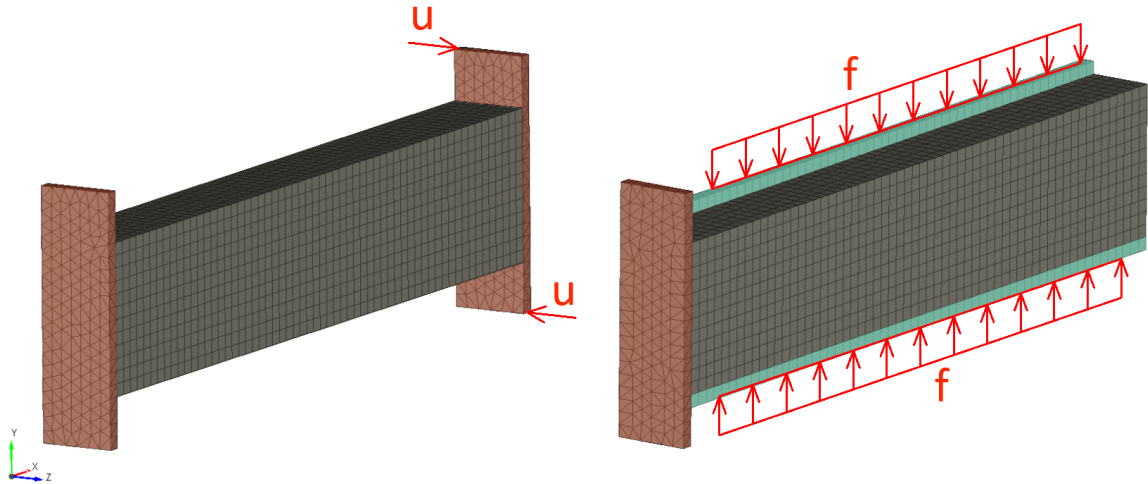
Hlavním cílem této části je nelineární analýza prvků z kapitoly 6.4, pro které již byla provedena lineární analýza. Nelineární analýza umožňuje srovnání chování jednotlivých statických uspořádání i po vzniku trhlin a stanovení únosnosti, která je nakonec porovnána s únosností dle normových postupů.

Původních 20 statických uspořádání okrajových podmínek (viz tabulka 6.5) bylo doplněno o další 4 (značené 21-24), ve kterých je u vetknutí na konzolách umožněná deplanace, a na prvek tedy působí pouze volné kroucení. Tato úprava je zvolena proto, aby bylo možné porovnávat prvky na kterých působí vázané kroucení s prvky vystavenými pouze volnému kroucení.

Celkem tedy pro potřeby této práce bylo provedeno 72 nelineárních výpočtů, 24 pro každý z bezpečnostních formátů (střední, charakteristické a návrhové hodnoty materiálových charakteristik). Charakteristické a návrhové hodnoty materiálových charakteristik se uplatní pouze při stanovování globálních součinitelů bezpečnosti, viz kapitola 7.6.

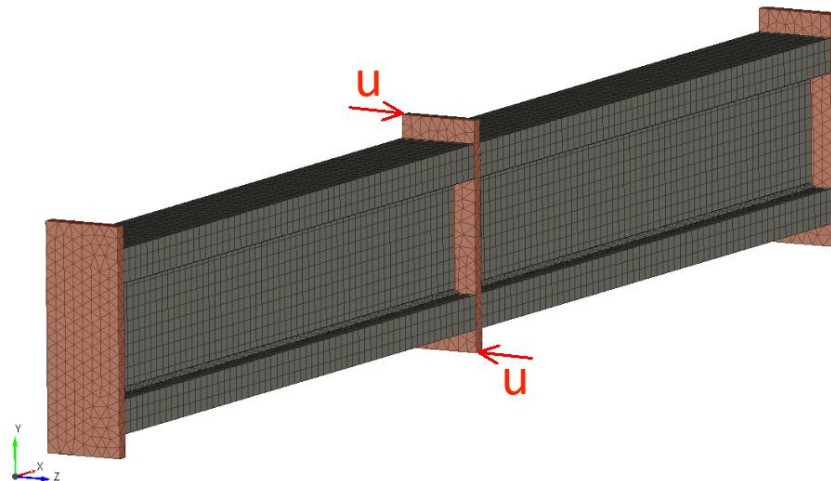
7.4.1 Numerické modely

Numerické modely vycházejí z poznatků získaných v rámci studie citlivosti a validace na experimentálních výsledcích (viz předchozí kapitoly). Na následujících obrázcích je patrná aplikace zatížení a síť konečných prvků tvořená pomocí krychlí s hranou délky 50 mm, tato hustota sítě byla jednotná pro všechny výpočty.



Obrázek 7.15 - Numerické modely konzol s obdélníkovým průřezem – síť konečných prvků a princip zatížení.

Protože vytvoření numerického modelu nosníků spočívalo pouze v zrcadlení celé konzoly v místě volného konce přes rovinu Y-Z, je uveden pouze jeden model pro případ nosníku s průřezem tvaru I.



Obrázek 7.16 – Numerický model nosníku s průřezem ve tvaru I – síť konečných prvků.

7.4.2 Výsledky nelineární analýzy pro obdélníkový průřez

Na následujících stránkách budou prezentovány výsledky vybraných případů získané nelineární analýzou za použití středních hodnot materiálových vlastností. Každý z pracovních diagramů obsahuje tři výsledky průběhů zatížení v závislosti na průměrném poměrném zkroucení na konci konzoly, respektive uprostřed nosníku.

U konzol první dva průběhy, značené plnou čarou, představují momentovou reakci v podporách pro okrajové podmínky uvažované již při lineární analýze v kapitole 6. Třetí průběh představuje momentovou reakci v podpoře pro konstrukci bez vlivu vázaného kroucení.

Pro přehlednost jsou zavedeny následující zkratky pro značení okrajových podmínek:

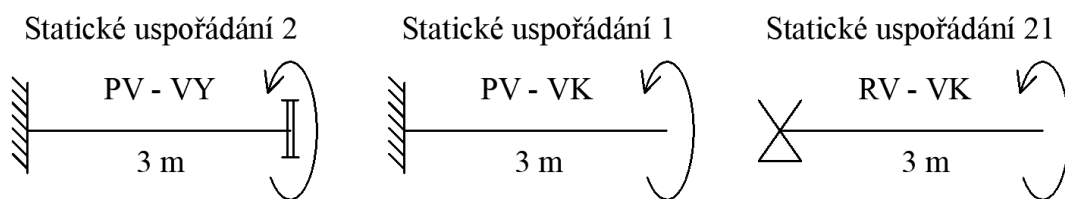
- **plné vetknutí = PV,**
- **rotační vetknutí = RV,**
- **výztuha = VY,**
- **volný konec = VK.**

U nosníků, jejichž okrajové podmínky jsou nesymetrické, byly měřeny reakce v obou podporách, proto je zavedeno značení:

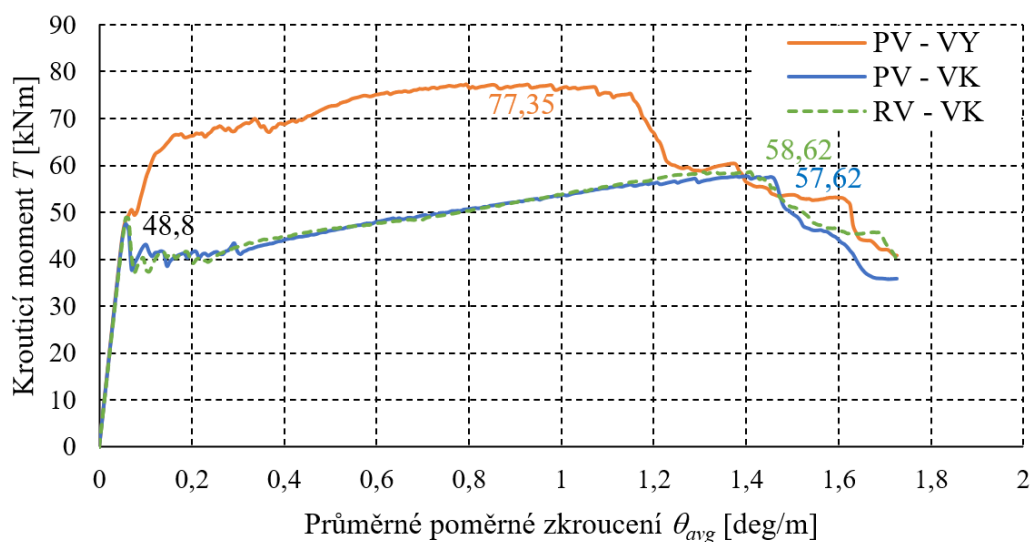
- **L – levá reakce,**
- **P – pravá reakce**

Např. PV-RV-L značí: rotační vetknutí – rotační vetknutí – reakce v levé podpoře.

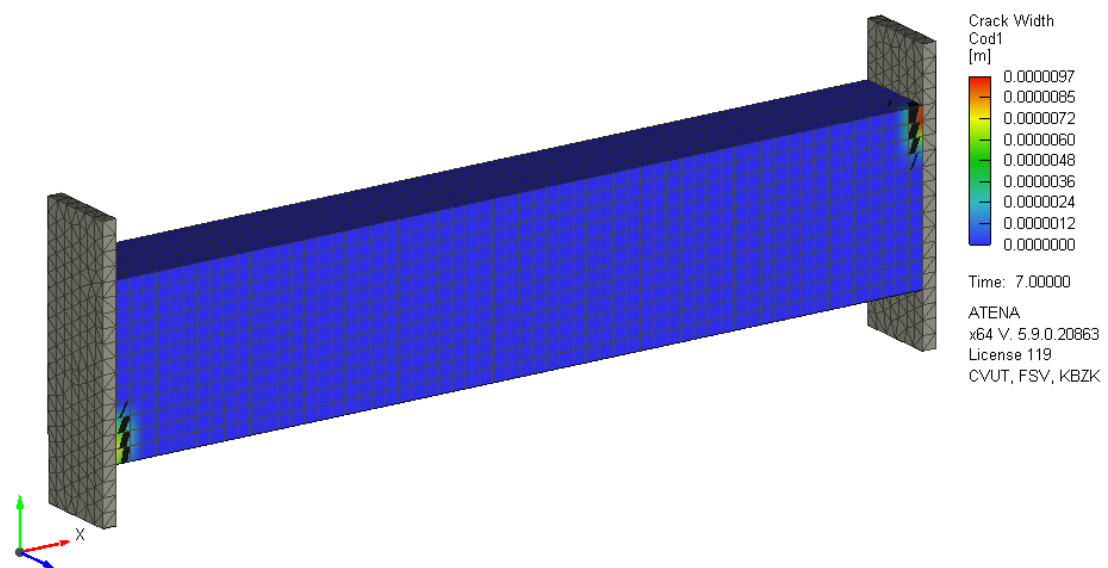
Konzola zatížená koncovým kroučícím momentem – obdélníkový průřez:



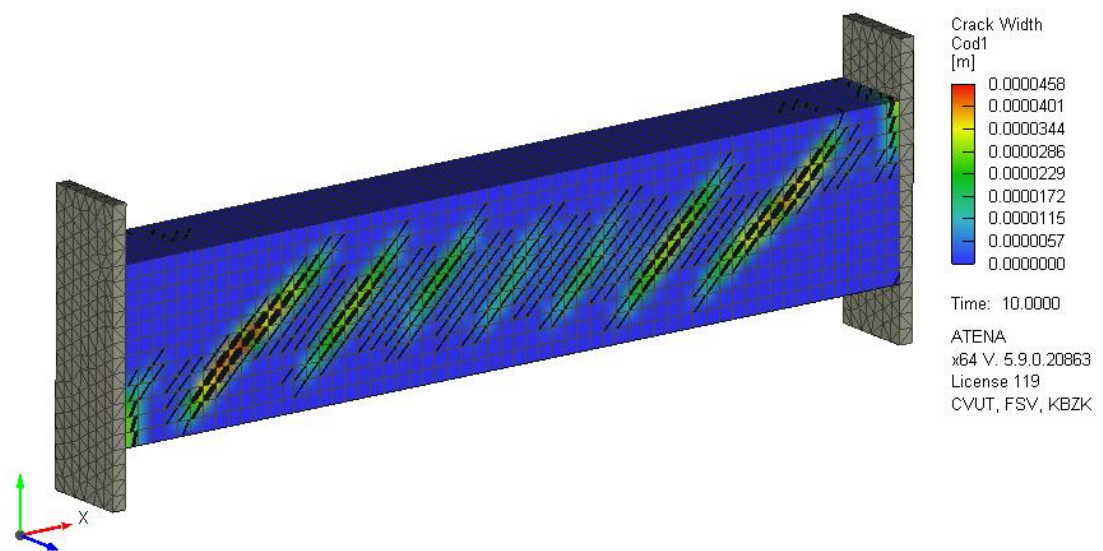
Obrázek 7.17 - Statická schémata konzol zatížených koncovým kroučícím momentem.



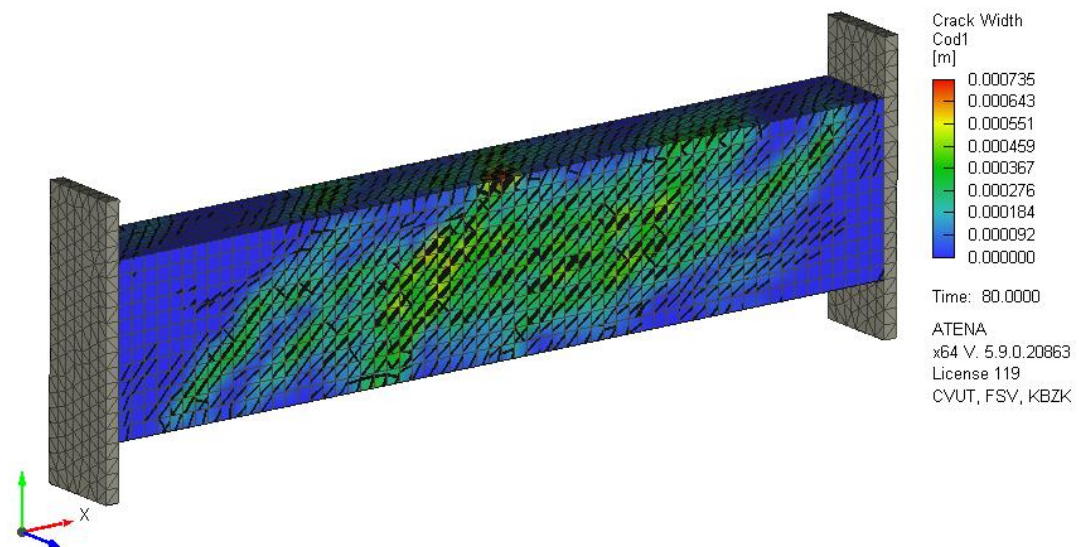
Obrázek 7.18 – Konzola zatížená koncovým kroučícím momentem – pracovní diagramy.



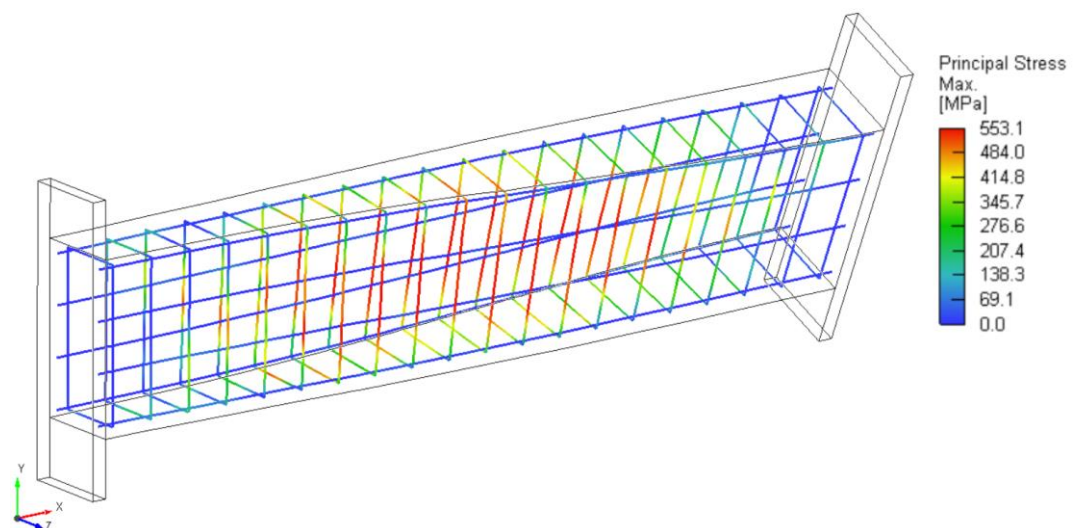
Obrázek 7.19 - Konzola zatížená koncovým kroučícím momentem – první trhлина od vázaného kroucení (okrajové podmínky PV-VY).



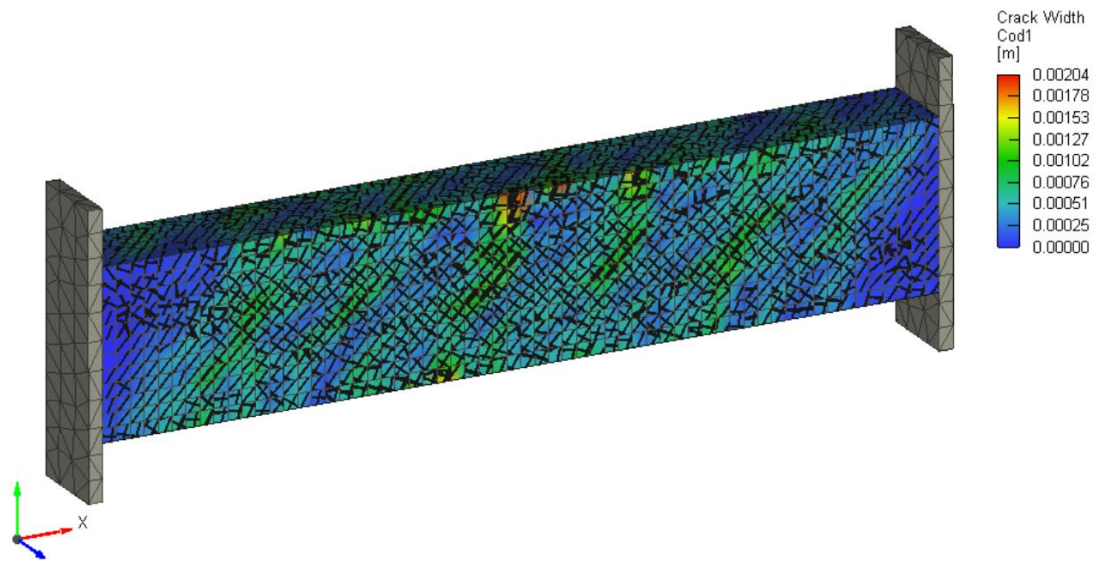
Obrázek 7.20 - Konzola zatížená koncovým kroučícím momentem – trhliny od volného kroucení (okrajové podmínky PV-VY).



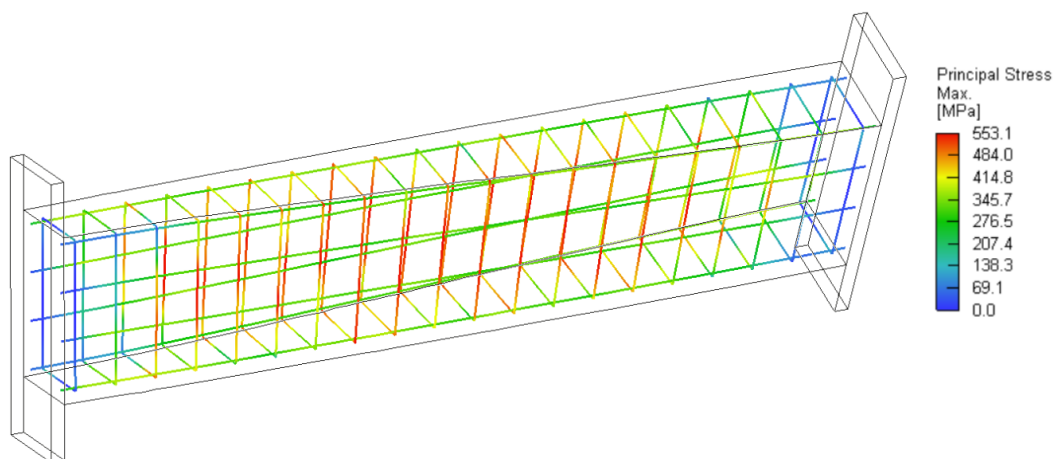
Obrázek 7.21 - Konzola zatížená koncovým kroučícím momentem – trhliny při dosažení únosnosti (okrajové podmínky PV-VY).



Obrázek 7.22 - Konzola zatížená koncovým kroučícím momentem – napětí ve výztuži při dosažení únosnosti (okrajové podmínky PV-VY).

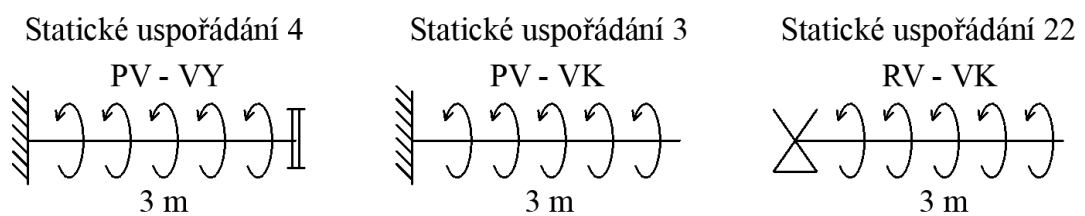


Obrázek 7.23 - Konzola zatížená koncovým kroučícím momentem – trhliny při dosažení únosnosti (okrajové podmínky PV-VK).

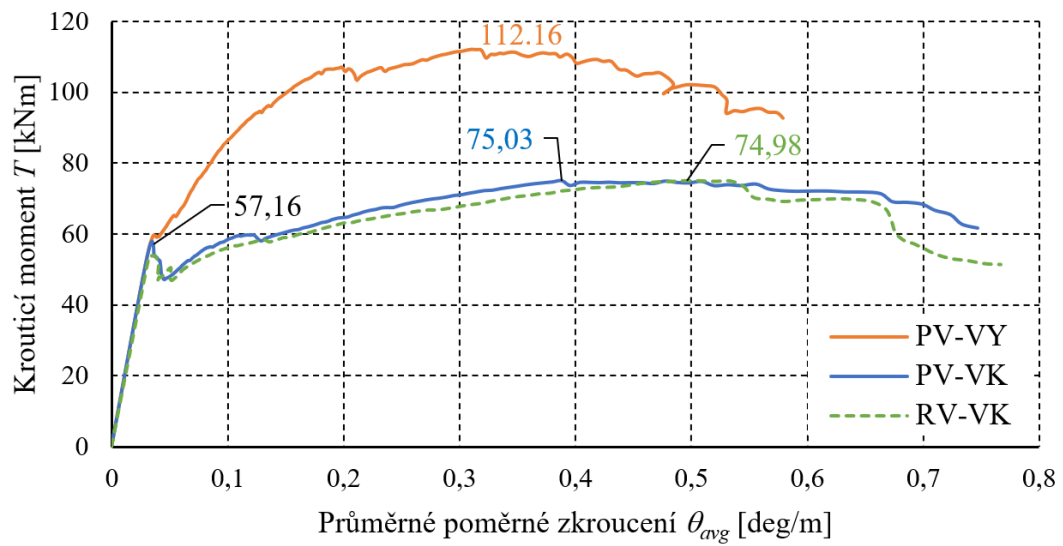


Obrázek 7.24 - Konzola zatížená koncovým kroučícím momentem – napětí ve výztuži při dosažení únosnosti (okrajové podmínky PV-VK).

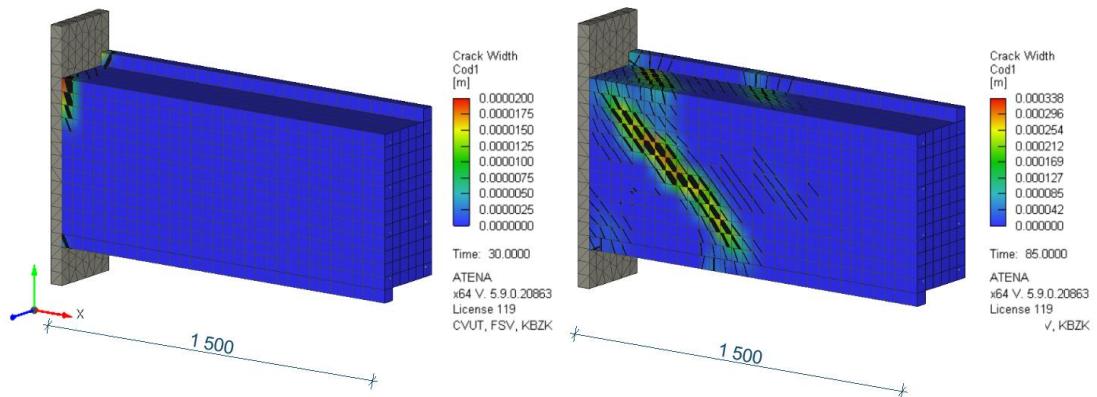
Konzola zatížená spojitým kroučícím momentem – obdélníkový průřez:



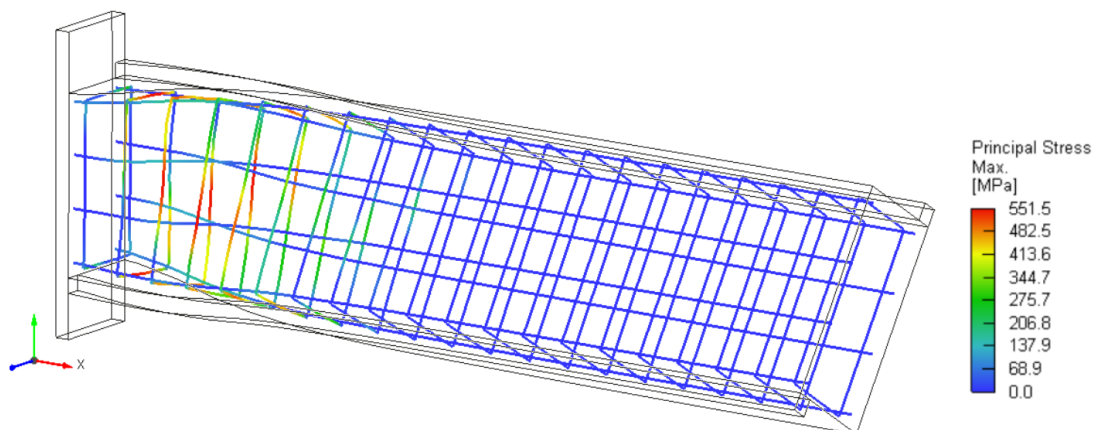
Obrázek 7.25 - Statická schémata konzol zatížených spojitým kroučícím momentem.



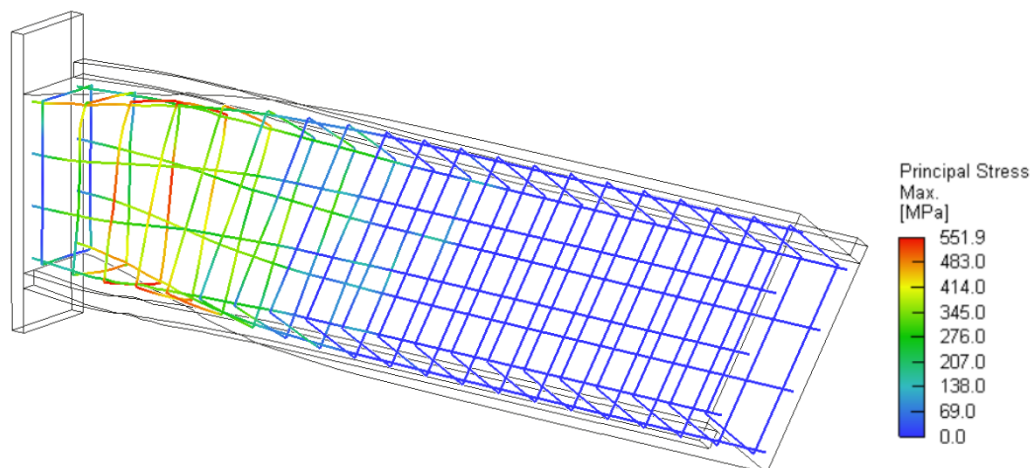
Obrázek 7.26 - Konzola zatížená spojitým krouticím momentem – pracovní diagramy.



Obrázek 7.27 - Konzola zatížená spojitým krouticím momentem – vznik a rozvoj trhliny (zobrazena pouze část konzoly).

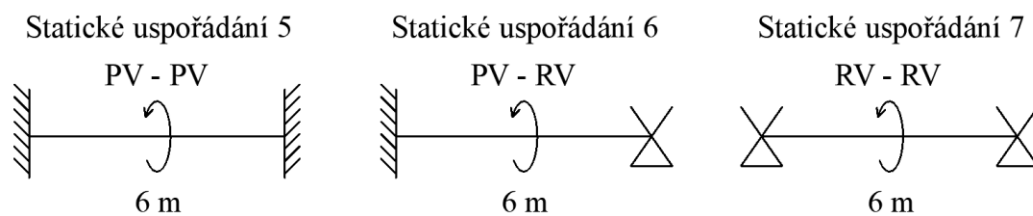


Obrázek 7.28 - Konzola zatížená spojitým krouticím momentem – napětí ve výztuži při dosažení únosnosti (okrajové podmínky PV-VY).

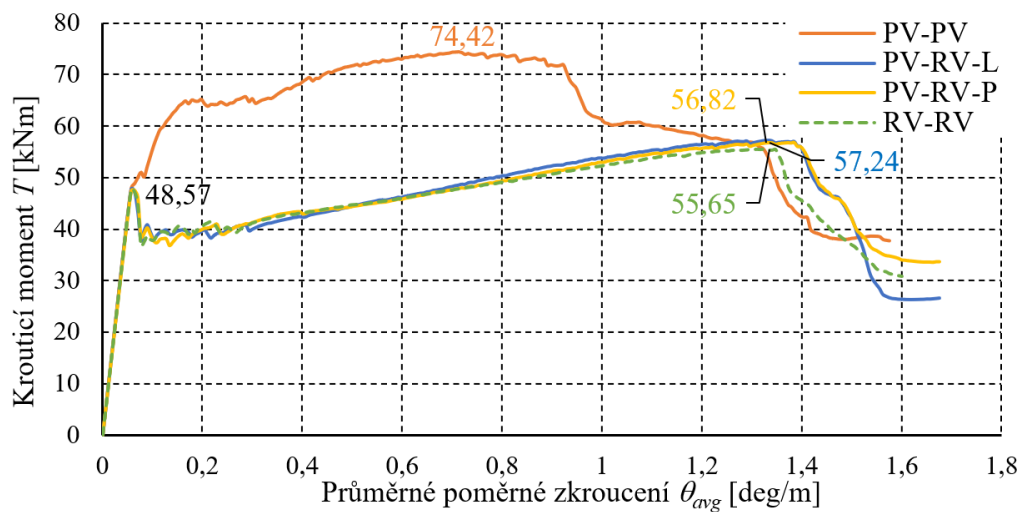


Obrázek 7.29 - Konzola zatížená spojitým kroučícím momentem – napětí ve výztuži při dosažení únosnosti (okrajové podmínky PV-VK).

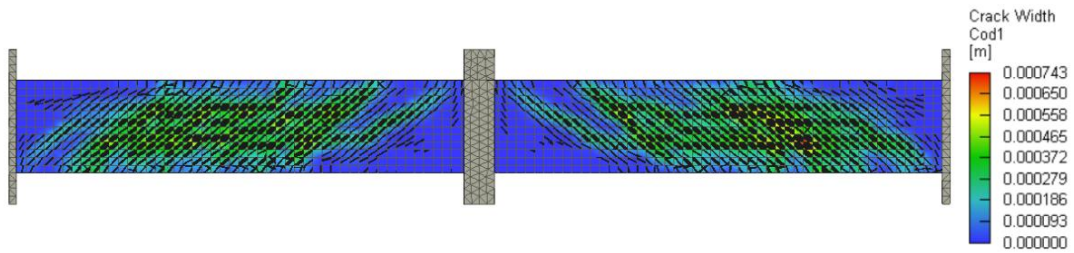
Nosník zatížený kroučícím momentem uprostřed rozpětí – obdélníkový průřez:



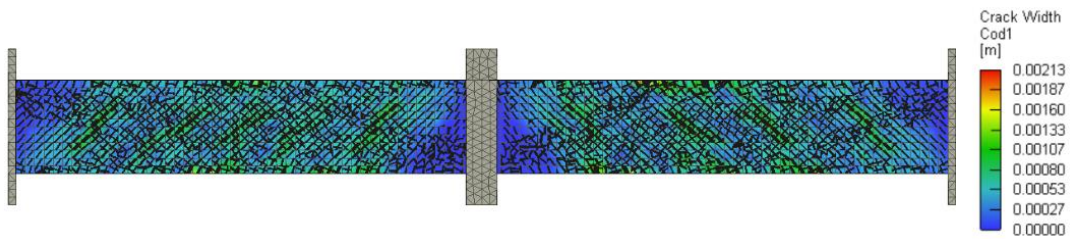
Obrázek 7.30 - Statická schémata nosníků zatížených kroučícím momentem uprostřed rozpětí.



Obrázek 7.31 - Nosník zatížený středovým kroučícím momentem – pracovní diagramy.

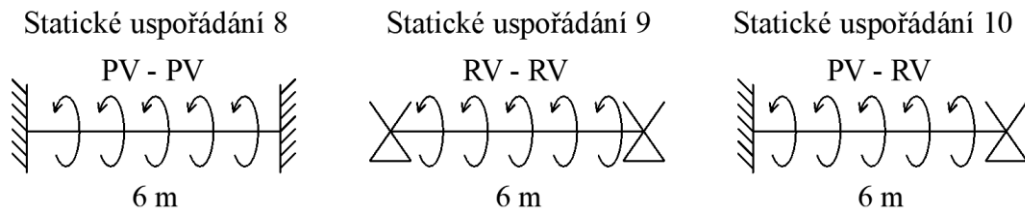


Obrázek 7.32 – Nosník zatížený středovým kroučícím momentem – trhliny při dosažení únosnosti (okrajové podmínky PV-PV).

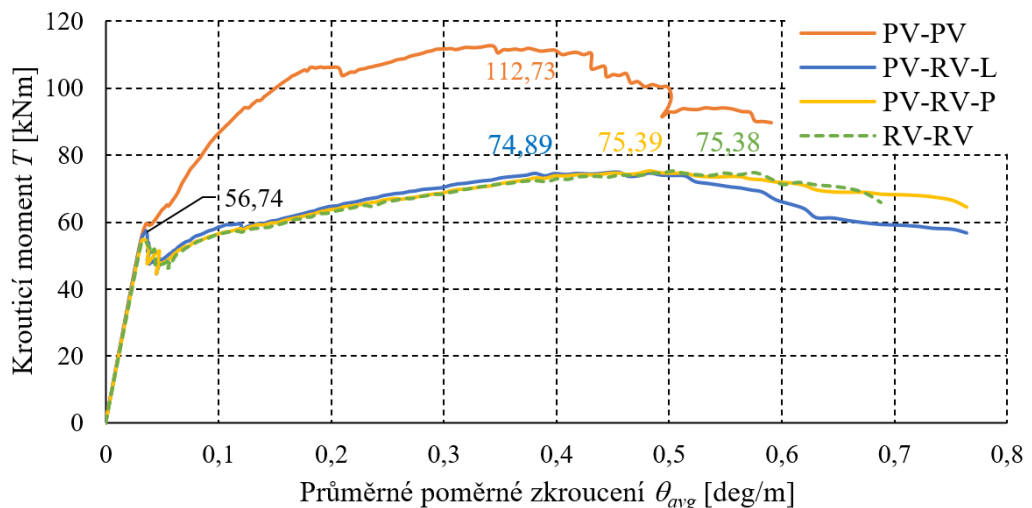


Obrázek 7.33 - Nosník zatížený středovým kroučícím momentem – trhliny při dosažení únosnosti (okrajové podmínky RV-RV).

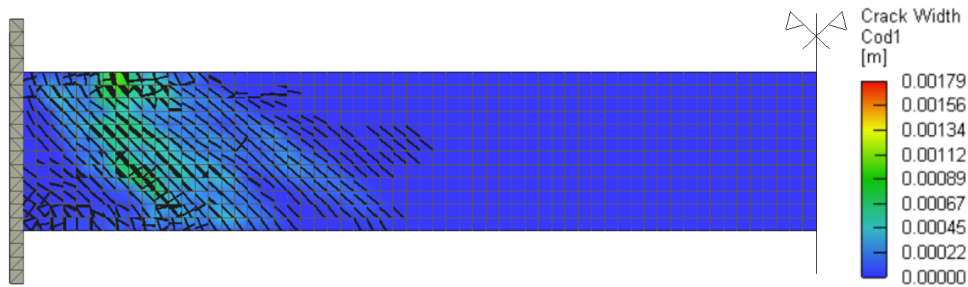
Nosník zatížený spojitým kroučícím momentem – obdélníkový průřez:



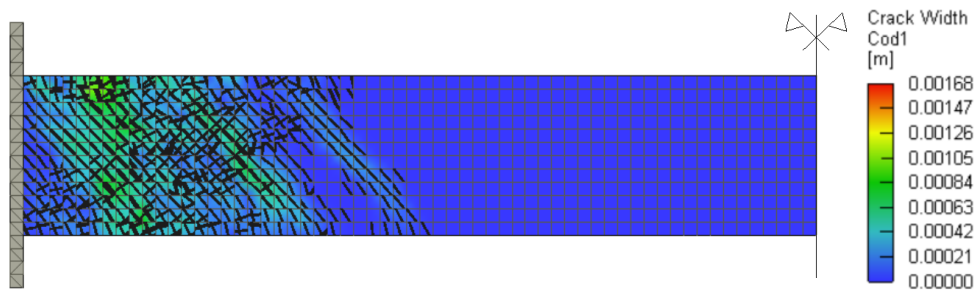
Obrázek 7.34 - Statická schémata nosníků zatížených spojitým kroučícím momentem.



Obrázek 7.35 - Nosník zatížený spojitým kroučícím momentem – pracovní diagramy.



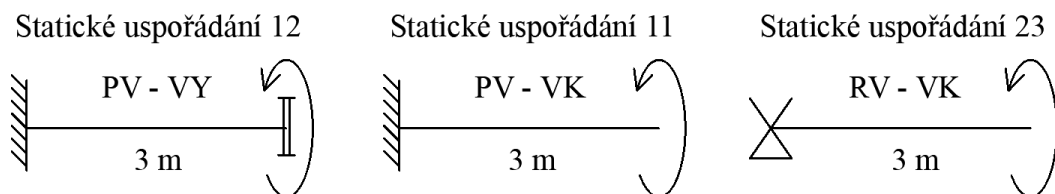
Obrázek 7.36 - Nosník zatížený spojitém kroučícím momentem – trhliny při dosažení únosnosti (okrajové podmínky PV-PV).



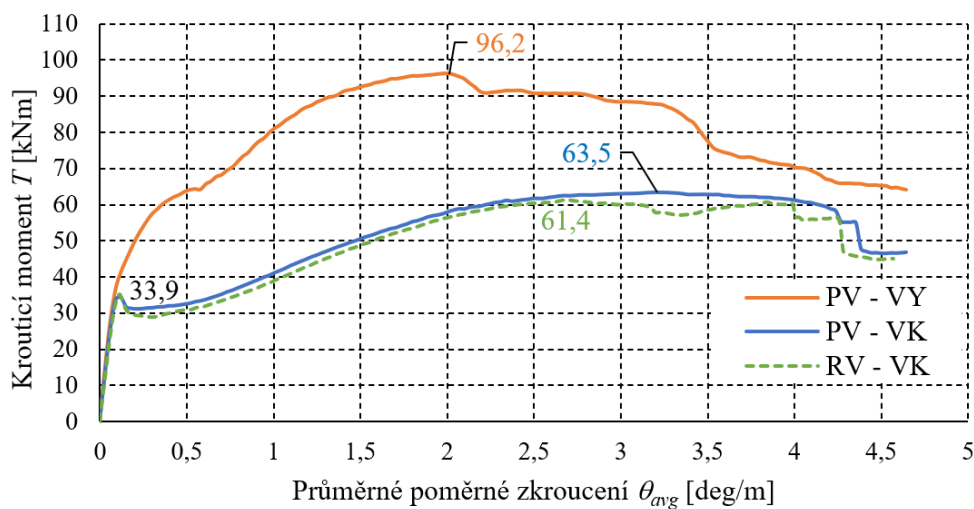
Obrázek 7.37 - Nosník zatížený spojitém kroučícím momentem – trhliny při dosažení únosnosti (okrajové podmínky RV-RV).

7.4.3 Výsledky nelineární analýzy pro průřez tvaru I

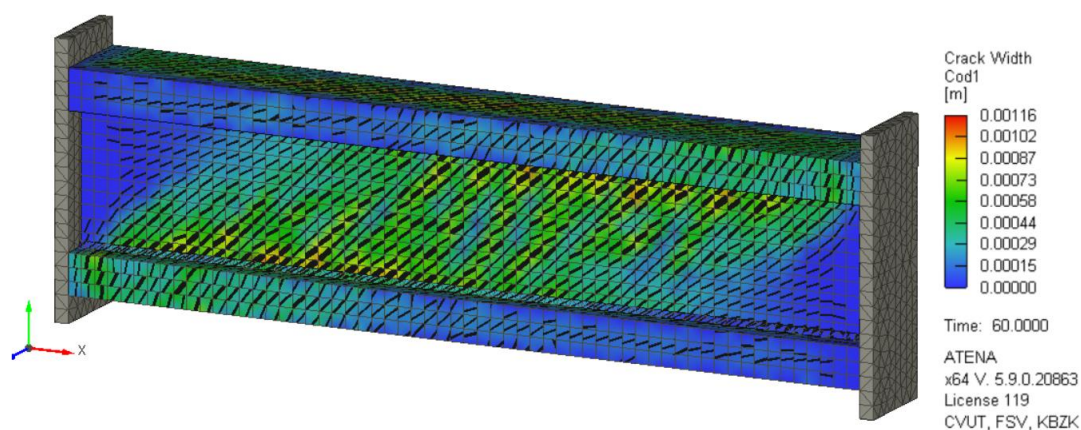
Konzola zatížená koncovým kroučícím momentem – průřez I:



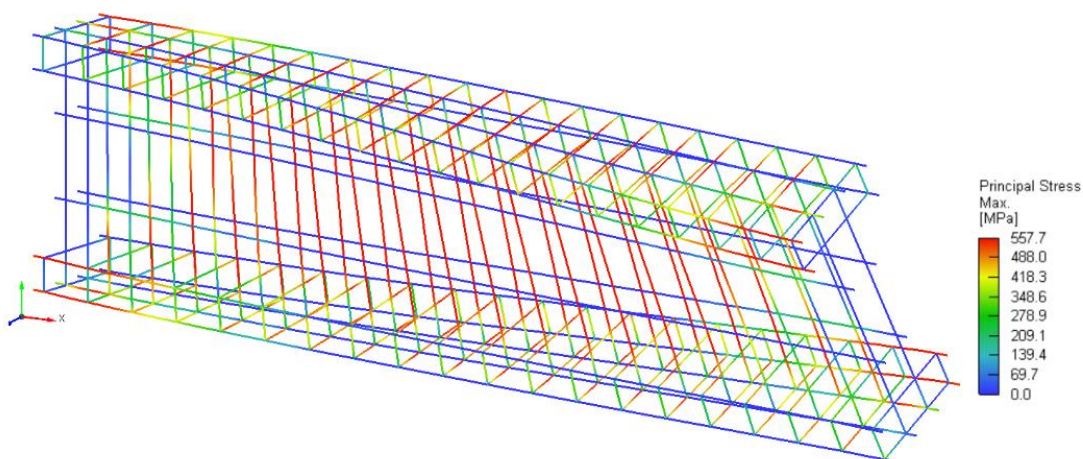
Obrázek 7.38 - Statická schémata konzol zatížených koncovým kroučícím momentem.



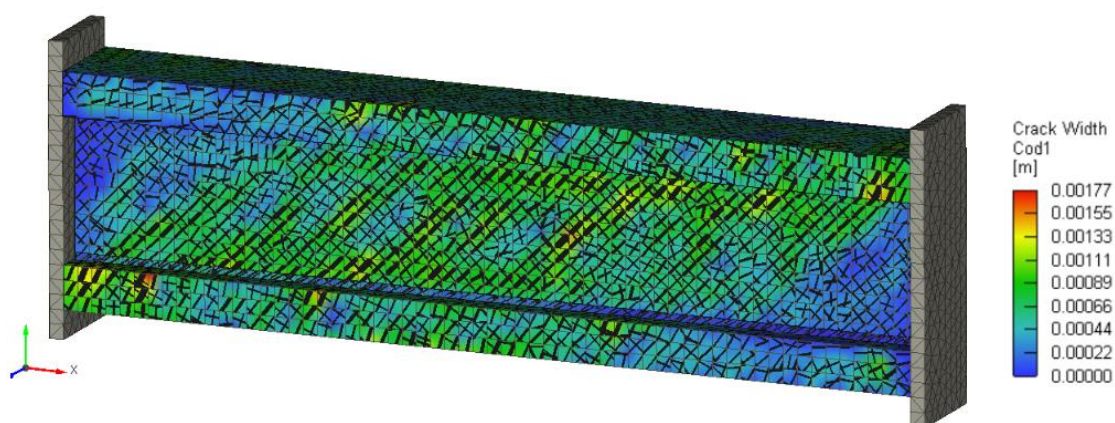
Obrázek 7.39 - Konzola zatížená koncovým kroučícím momentem – pracovní diagramy.



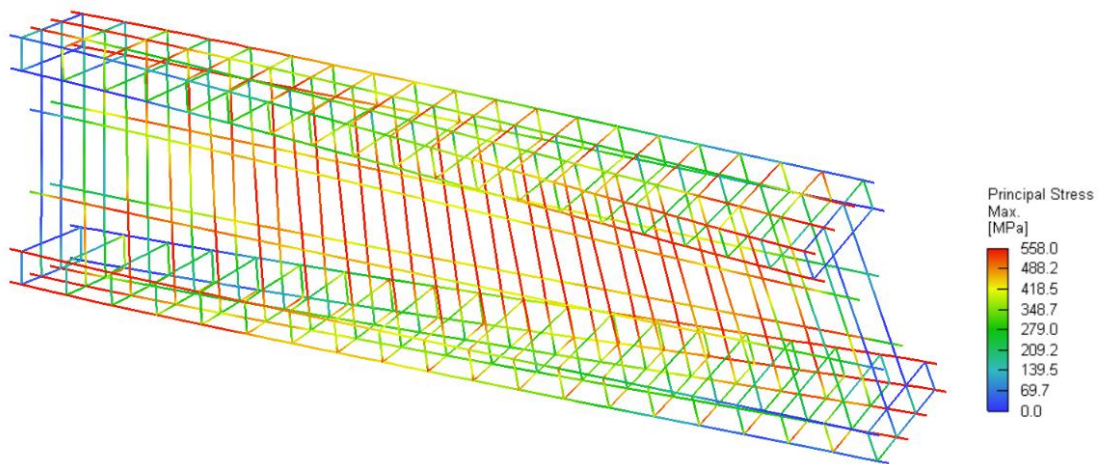
Obrázek 7.40 - Konzola zatížená koncovým krouticím momentem – trhliny při dosažení únosnosti (okrajové podmínky PV-VY).



Obrázek 7.41 - Konzola zatížená koncovým krouticím momentem – napětí ve výztuži při dosažení únosnosti (okrajové podmínky PV-VY).

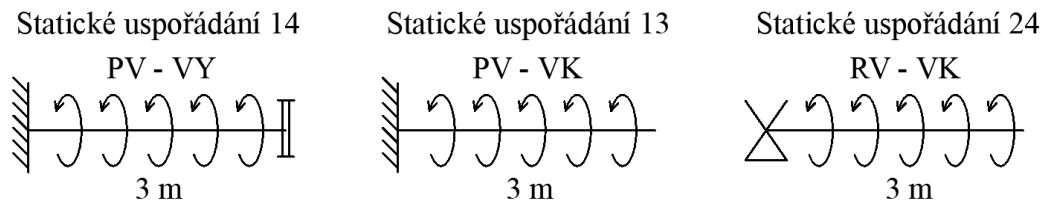


Obrázek 7.42 - Konzola zatížená koncovým krouticím momentem – trhliny při dosažení únosnosti (okrajové podmínky PV-VK).

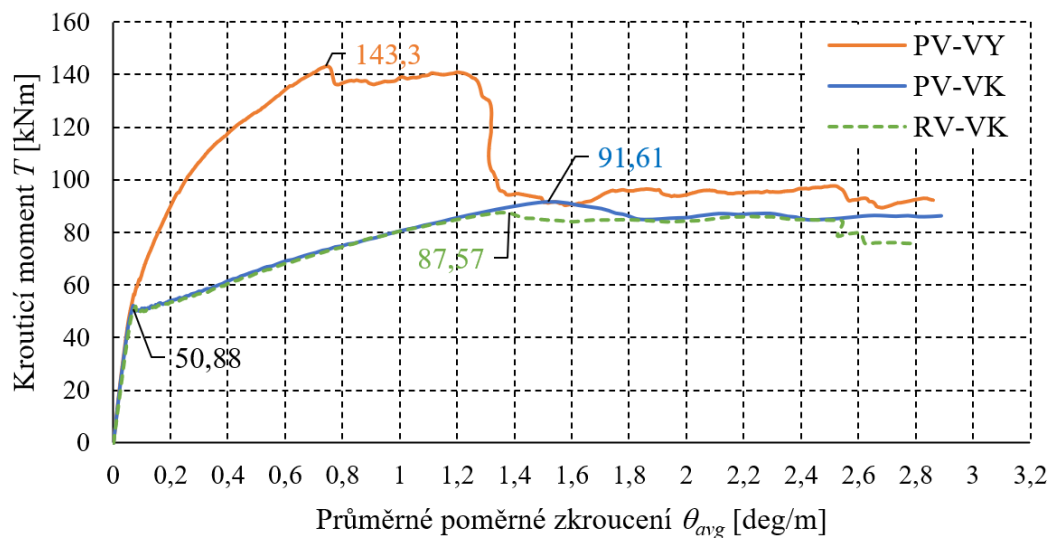


Obrázek 7.43 - Konzola zatížená koncovým kroučícím momentem – napětí ve výztuži při dosažení únosnosti (okrajové podmínky PV-VK).

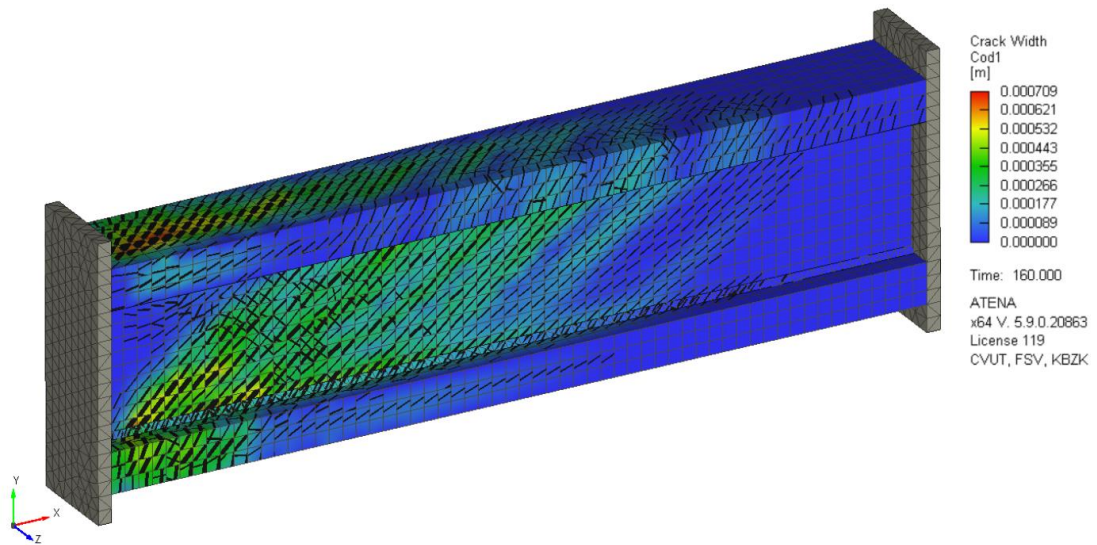
Konzola zatížená spojitým kroučícím momentem – průřez I:



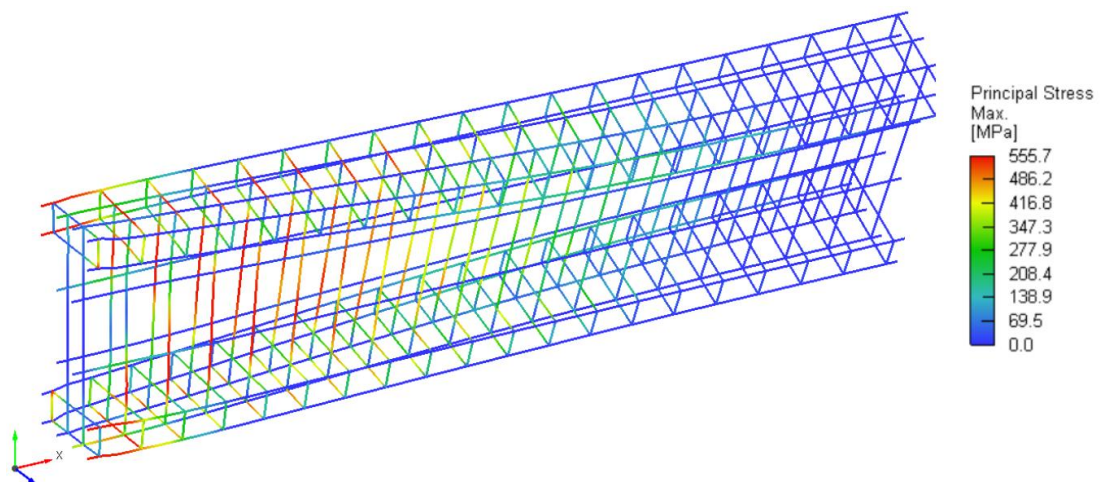
Obrázek 7.44 - Statická schémata konzol zatížených spojitým kroučícím momentem.



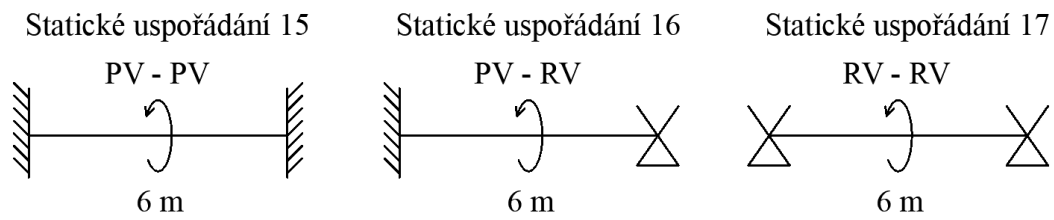
Obrázek 7.45 - Konzola zatížená spojitým kroučícím momentem – pracovní diagramy.



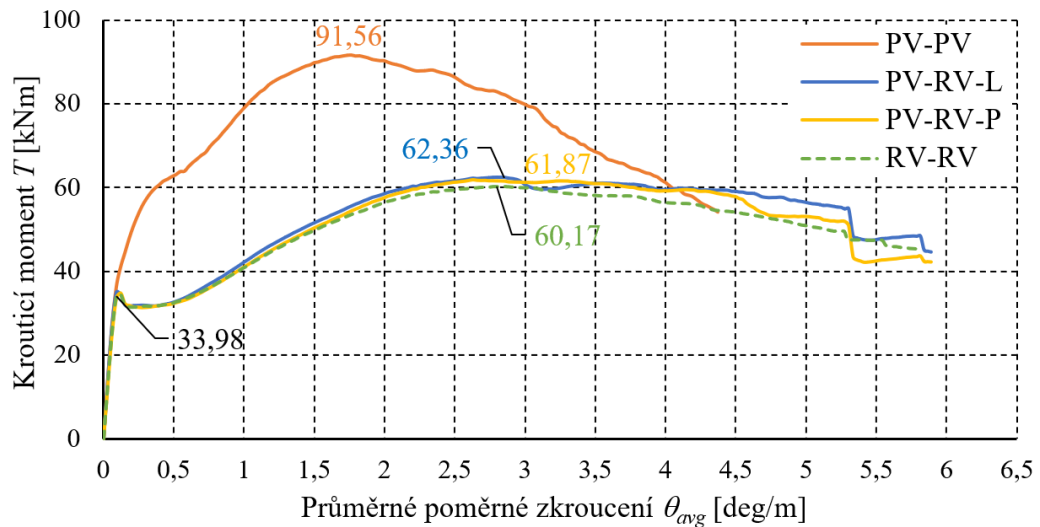
Obrázek 7.46 - Konzola zatížená spojitým kroučícím momentem – trhliny při dosažení únosnosti (okrajové podmínky PV-VY).



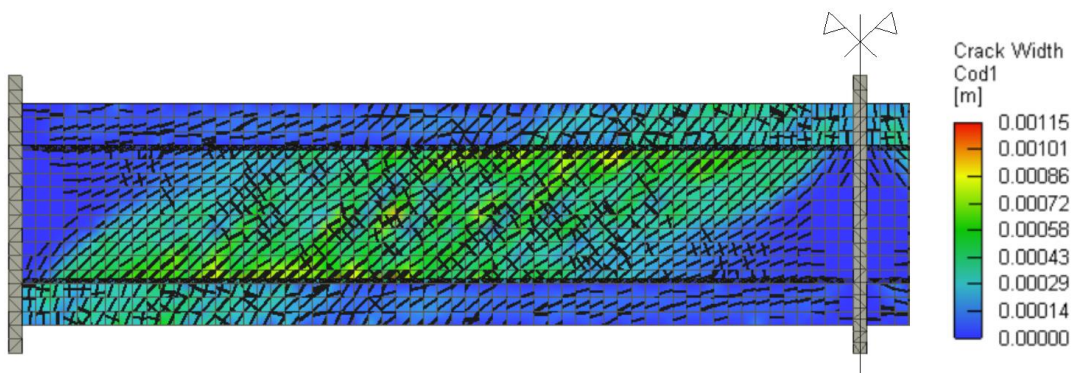
Obrázek 7.47 - Konzola zatížená spojitým kroučícím momentem – napětí ve výztuži při dosažení únosnosti (okrajové podmínky PV-VY).

Nosník zatížený středovým kroučícím momentem – průřez I:

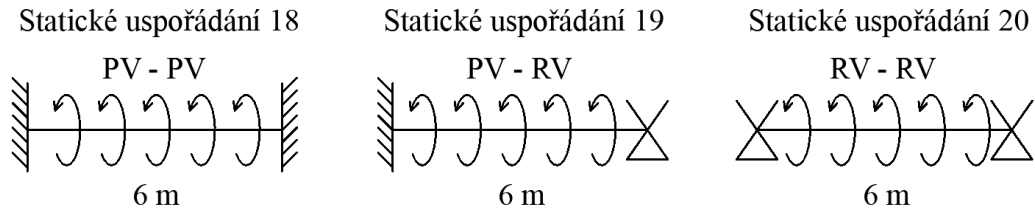
Obrázek 7.48 - Statická schémata nosníků zatížených kroučícím momentem uprostřed rozpětí.



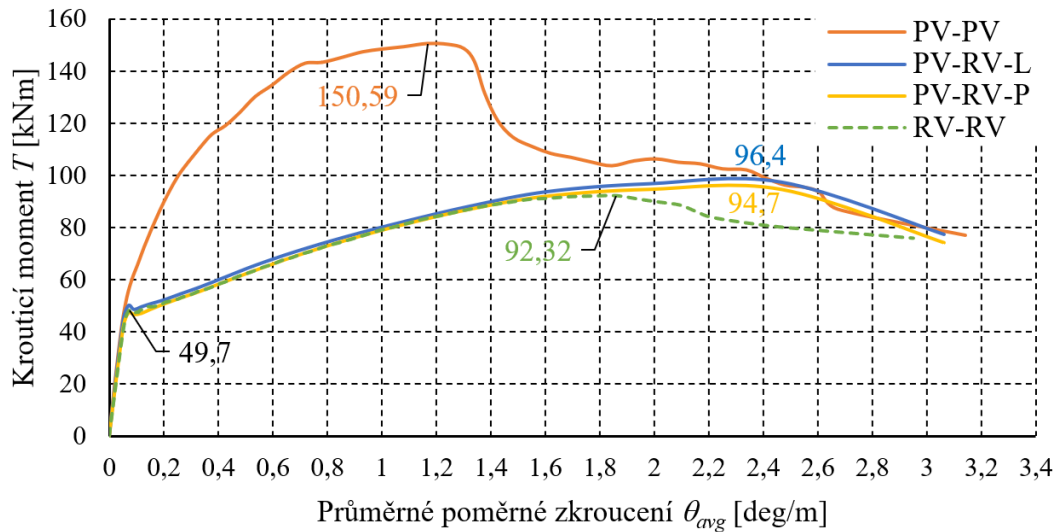
Obrázek 7.49 - Nosník zatížený středovým kroučícím momentem – pracovní diagramy.



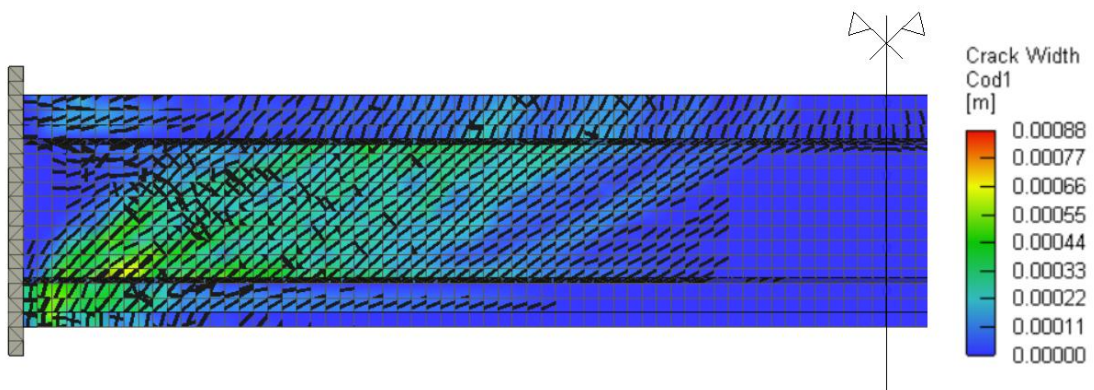
Obrázek 7.50 - Nosník zatížený středovým kroučícím momentem – trhliny při dosažení únosnosti (okrajové podmínky PV-PV).

Nosník zatížený spojitým kroučícím momentem – průřez I:

Obrázek 7.51 - Statická schémata nosníků zatížených spojitým kroučícím momentem.



Obrázek 7.52 - Nosník zatížený spojitým kroučícím momentem – pracovní diagramy.

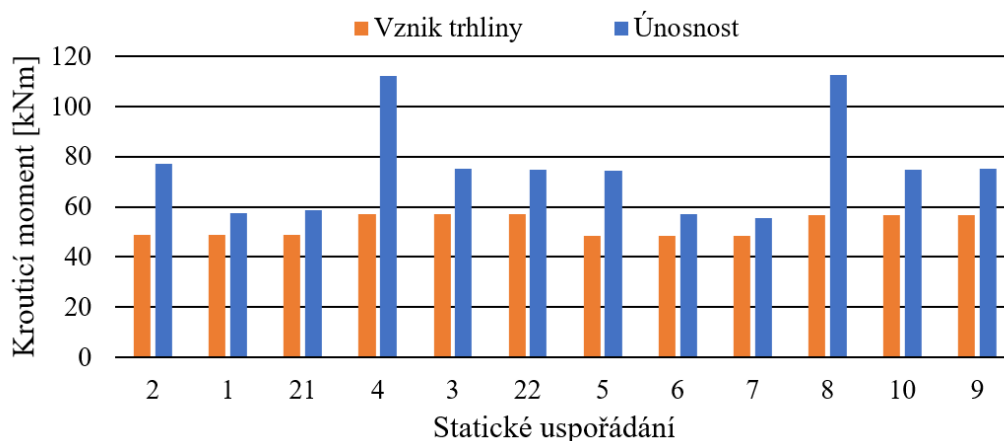


Obrázek 7.53 - Nosník zatížený spojitým kroučícím momentem – trhliny při dosažení únosnosti (okrajové podmínky PV-PV).

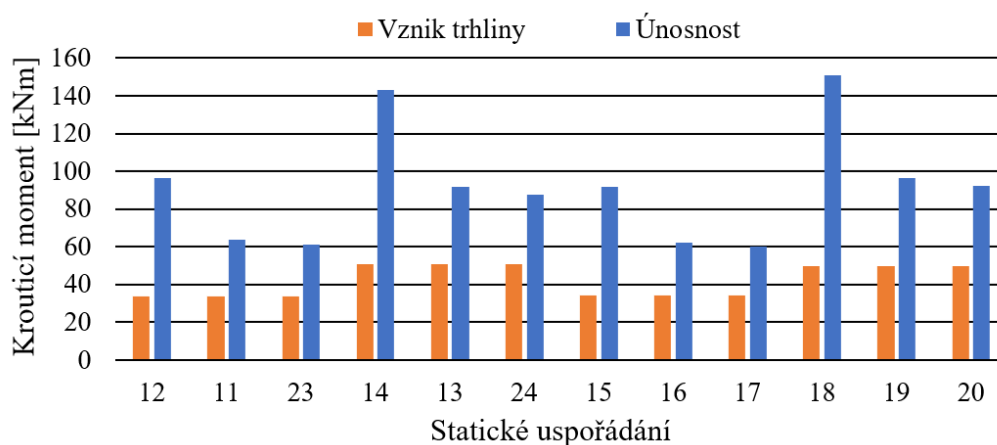
7.4.4 Shrnutí a vyhodnocení výsledků nelineární analýzy

Tabulka 7.6 - Shrnutí výsledků nelineární analýzy.

S.U.	Průřez	Prvek	Zatížení	Levý kraj	Pravý kraj	Krouticí moment [kNm]	
						Trhlina	Únosnost
2	Obdélník	Konzola	Koncový moment	Plné vetknutí	Výztuha	48,8	77,35
1				Plné vetknutí	Volný konec		57,62
21				Rotační vetknutí	Volný konec		58,62
4			Spojitě zatížení	Plné vetknutí	Výztuha	57,16	112,16
3				Plné vetknutí	Volný konec		75,03
22				Rotační vetknutí	Volný konec		74,98
5		Nosník	Koncový moment	Plné vetknutí	Plné vetknutí	48,57	74,42
6				Plné vetknutí	Rotační vetknutí		57,24
7				Rotační vetknutí	Rotační vetknutí		55,65
8			Spojitě zatížení	Plné vetknutí	Plné vetknutí	56,74	112,73
10				Plné vetknutí	Rotační vetknutí		74,89
9				Rotační vetknutí	Rotační vetknutí		75,38
12	I	Konzola	Středový moment	Plné vetknutí	Výztuha	33,9	96,20
11				Plné vetknutí	Volný konec		63,52
23				Rotační vetknutí	Volný konec		61,41
14			Spojitě zatížení	Plné vetknutí	Výztuha	50,88	143,3
13				Plné vetknutí	Volný konec		91,61
24				Rotační vetknutí	Volný konec		87,57
15		Nosník	Středový moment	Plné vetknutí	Plné vetknutí	33,98	91,56
16				Plné vetknutí	Rotační vetknutí		62,36
17				Rotační vetknutí	Rotační vetknutí		60,17
18			Spojitě zatížení	Plné vetknutí	Plné vetknutí	49,7	150,59
19				Plné vetknutí	Rotační vetknutí		96,4
20				Rotační vetknutí	Rotační vetknutí		92,32



Obrázek 7.54 - Sloupcové grafy – porovnání krouticího momentu při vzniku trhliny a dosažení únosnosti pro obdélníkový průřez.



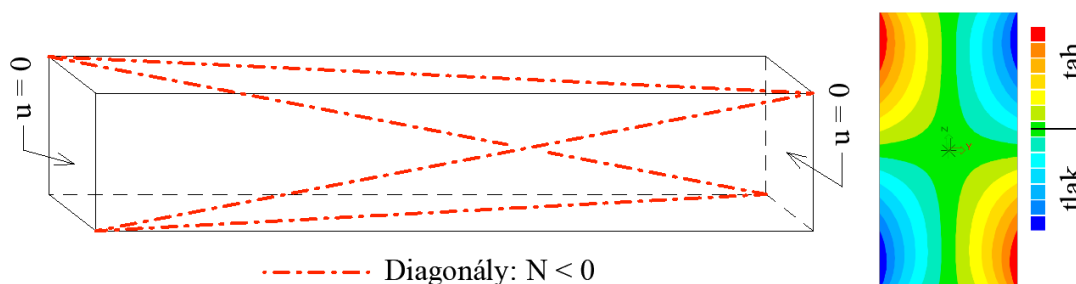
Obrázek 7.55 - Sloupcové grafy – porovnání krouticího momentu při vzniku trhliny a dosažení únosnosti pro průřez tvaru I.

Při pohledu na pracovní diagramy získané nelineární analýzou je patrné, že jednotlivé okrajové podmínky mají velký vliv na průběhy pracovních diagramů. Nejzásadnějším zjištěním je, že je zamezením deplanace na obou koncích krouceného prvku dochází k výraznému zvýšení únosnosti v kroucení pro oba typy zkoumaných průřezů.

To je pravděpodobně dáno tím, že neumožnění průřezu deplanovat vnáší do průřezu přídavné podélné normálové napětí, které zřejmě vytváří myšlené diagonály mezi rohovými částmi krajních průřezů v místech omezení deplanace, a tím je prvek de facto “diagonálně předepnut“. Vyšší únosnost v kroucení vlivem standardního předepnutí krouceného prvku byla zjištěna při provádění experimentů v Kloknerově ústavu v letech 2019 a 2020, závěry jsou patrné v článku [32].

Zdá se, že toto předepnutí omezí v prvku vznik a rozevírání trhlin a výrazně zvýší únosnost. Omezení rozevírání trhlin je patrné z obrázků uvedených v kapitolách 7.4.2 a 7.4.3, kdy u obdélníkového průřezu byly trhliny při působení koncového momentu a dovolené deplanaci větší přibližně trojnásobně oproti případu s omezenou deplanací (2,04 mm vs 0,7 mm). Tento jev byl patrný i pro průřez tvaru I (1,8 mm vs 1,2 mm).

Autorova představa tohoto působení na prvku s obdélníkovým průřezem je zobrazena na následujícím obrázku.



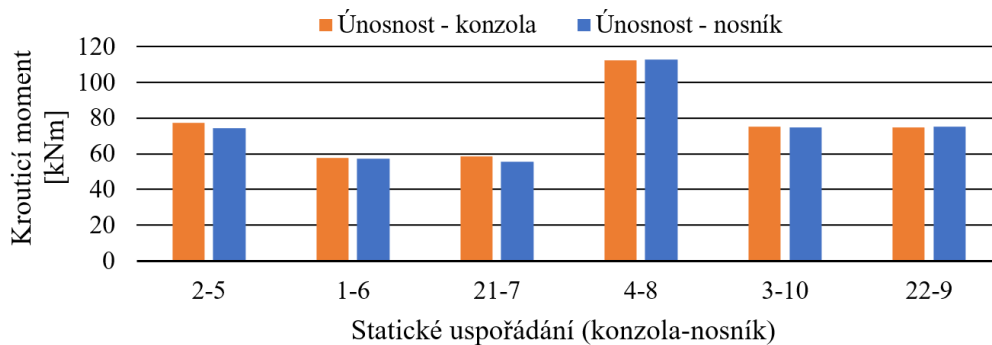
Obrázek 7.56 - Představa předepnutí prvku vlivem omezení deplanace – dva rohy na obou koncích jsou vystavené tlakovému napětí vlivem bránění deplanace průřezu.

Na druhou stranu je z jednotlivých pracovních diagramů patrné, že pokud dojde k umožnění posunu ve směru osy x (umožnění deplanace) na alespoň jedné z krajních podpor, je pracovní diagram defacto stejný jako pro prvek s čistě volným kroucením a pozitivní vliv vázaného kroucení zcela vymizí, ačkoliv u druhé krajní podpory bimoment a sekundární kroticí moment vznikají.

Tabulka 7.7 - Procentuální zvýšení únosnosti prvku při zamezení deplanace obou konců oproti volnému kroucení (výsledky jsou platné pro numerické modely s délkou konzoly 3 m, resp. délkou nosníku 6 m a průřezy střední velikosti dle kapitoly 6.1).

	Obdélníkový průřez		I-průřez	
	Konzola	Nosník	Konzola	Nosník
Koncový moment	32%	34%	57%	52%
Spojité kroucení	50%	50%	64%	63%

Z pracovních diagramů je rovněž zřetelné, že výsledky získané pro konzoly a nosníky, na které působí stejný typ zatížení, jsou spolu srovnatelné a výrazně se neliší. Nosník v podstatě představuje dvě konzoly spojené na volných koncích, čímž si vzájemně omezují deplanaci.



Obrázek 7.57 - Sloupcové grafy – porovnání únosnosti konzol a nosníků s odpovídajícími okrajovými podmínkami (obdélníkový průřez).

Dalším, z pohledu autora zajímavým, výsledkem, který byl získán nelineární analýzou je zjištění, že při působení spojitěho kroticího zatížení na prvek způsobující lineární průběh vnitřního kroticího momentu je výsledná únosnost vyšší oproti zatížení koncovým momentem, který způsobuje konstantní vnitřní kroticí moment po celé délce prvku. Rovněž je vyšší hodnota momentu, při které vznikne první trhlinka. To může být dáno právě průběhem vnitřního kroticího momentu, kdy u lineárního průběhu nemůže vzniknout trhlinka v místě maximální hodnoty, ale posouvá se do určité vzdálenosti od líce podpory, což se následně projevuje jako zdánlivě vyšší únosnost krouceného prvku, pokud je posuzována v místě maximálního kroticího momentu.

Je tedy potenciálně možné, že pro případ lineárního průběhu vnitřního kroticího momentu lze aplikovat podobnou analogii jako v případě redukce posouvající síly způsobené spojitým zatížením, kdy se pro návrh smykové výztuže umožňuje používat hodnota posouvající síly vzdálená o $\cotg(\theta) \cdot d$ od líce podpory (d je účinná výška

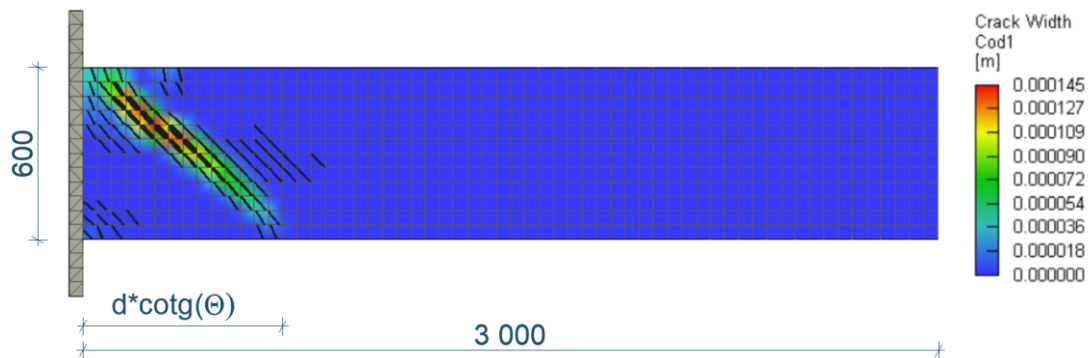
průřezu), viz EN 1991-1 kapitola 6.2.1 odstavec 8. Pro případ kroucení lze za opodstatněné uvažovat hodnotu $\cotg(\theta) = 1$, což odpovídá sklonu trhliny 45° a hodnotu d bude uvažovat pro zjednodušení jako 95% celkové výšky průřezu.

Podobně jako u posouvající síly lze předpokládat, že takto redukované zatížení není možné použít pro všechny posudky, například při posuzování tlakových diagonál je nutné použít původní neredukovaný krouticí moment získaný jako reakci v podpoře.

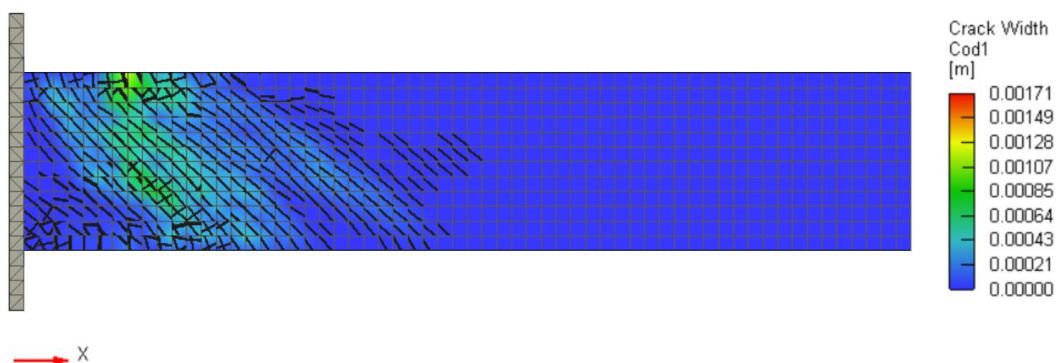
Navrhovaný vzorec redukce pro případ lineárního průběhu krouticího momentu:

$$T_{red} = \frac{T_{max}}{l_0} \cdot (l_0 - d \cdot \cot(\theta)) \quad (7.1)$$

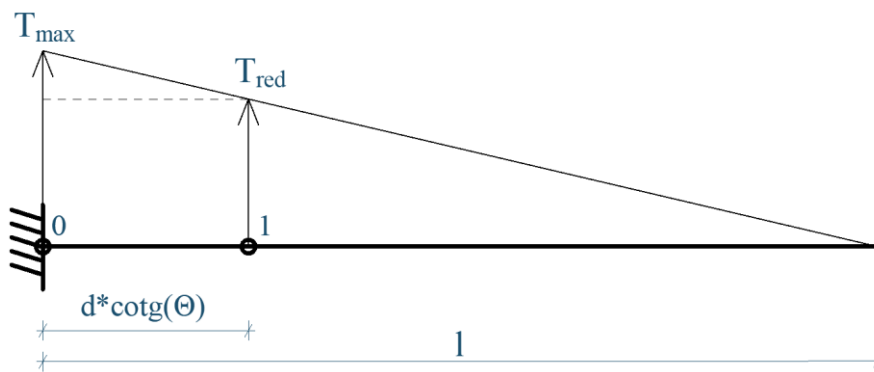
kde T_{red} je redukovaný krouticí moment
 T_{max} je maximální krouticí moment v líci podpory
 l_0 je vzdálenost nulového krouticího momentu od podpory
 d je účinná výška průřezu stanovená jako $0,95h$



Obrázek 7.58 - Poloha první trhliny při numerické analýze spojitě kroucené konzoly.



Obrázek 7.59 - Rozvoj trhliny při dosažení únosnosti spojitě kroucené konzoly.



Obrázek 7.60 - Schéma navrhované redukce krouticího momentu s lineárním průběhem pro návrh (obdoba s metodikou redukce hodnoty posouvající síly uvažované pro návrh dle Eurokódu 2).

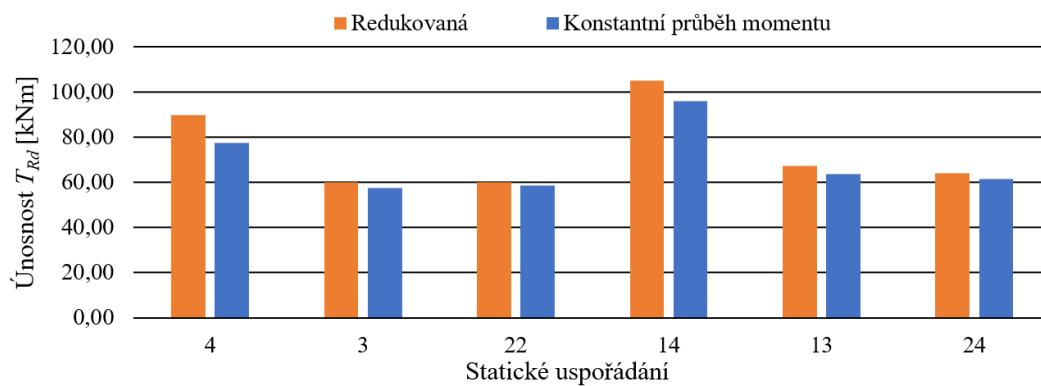
V následující tabulce jsou porovnány výsledky získané uvedenou redukcí při zatížení spojitým krouticím momentem (tedy přepočtení T_{max} na T_{red}) a původních výsledků z tabulky 7.6 pro stejná statická schémata, ale zatížení koncovým momentem.

Tabulka 7.8 - Redukované výsledky pro lineární průběh krouticího momentu a porovnání s výsledky pro konstantní průběh krouticího momentu – vznik trhliny.

S.U.	Průřez	Okrajové podmínky	Trhlina [kNm]			Porovnání (2)/(3)
			Původní	Redukovaná	Konstantní moment	
			(1)	(2)	(3)	
4	Obdélník	PV-VY	57,16	45,73	48,80	0,94
3		PV-VK	57,16	45,73	48,80	0,94
22		RV-VK	57,16	45,73	48,80	0,94
14	I	PV-VY	50,88	37,31	33,90	1,10
13		PV-VK	50,88	37,31	33,90	1,10
24		RV-VK	50,88	37,31	33,90	1,10

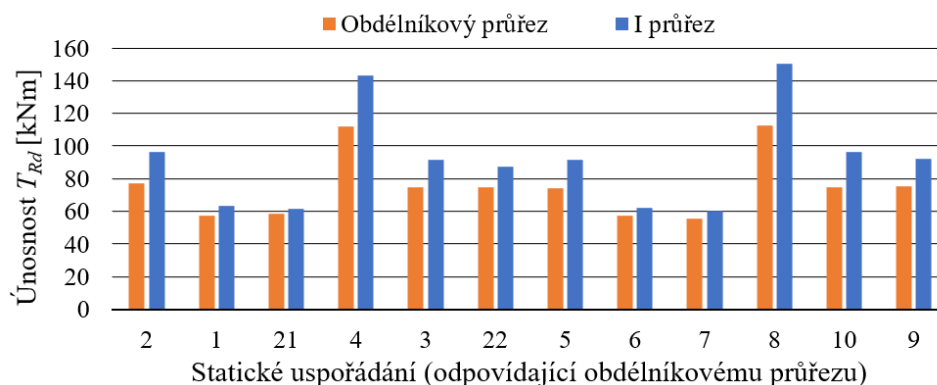
Tabulka 7.9 - Redukované výsledky pro lineární průběh krouticího momentu a porovnání s výsledky pro konstantní průběh krouticího momentu – únosnost.

S.U.	Průřez	Okrajové podmínky	Únosnost [kNm]			Porovnání (2)/(3)
			Původní	Redukovaná	Konstantní moment	
			(1)	(2)	(3)	
4	Obdélník	PV-VY	112,16	89,73	77,35	1,16
3		PV-VK	75,03	60,02	57,62	1,04
22		RV-VK	74,98	59,98	58,62	1,02
14	I	PV-VY	143,3	105,09	96,20	1,09
13		PV-VK	91,61	67,18	63,52	1,06
24		RV-VK	87,57	64,22	61,41	1,05



Obrázek 7.61 - Sloupcové grafy – Porovnání únosnosti získané redukcí pro lineární průběh kroučicího momentu s únosností pro konstantní průběh momentu.

Z těchto výsledků je patrné, že při redukcí lineárního kroučicího momentu na hodnoty vzdálené d od líce podpory, dojde k přiblížení výsledků pro spojitě kroučící zatížení k příslušným hodnotám pro koncový kroučicí moment. Tato metoda se jeví jako přípustná pro případ samostatných nosníků a konzol, u kterých zaručeně nemůže dojít k šíření trhliny za líc podpory, avšak metoda není podložena žádnými experimentálními výsledky a není možné brát tento přístup za validovaný. Výsledky jsou uvedeny spíše pro zajímavost a jako případný podklad pro další výzkum.



Obrázek 7.62 - Sloupcové grafy – porovnání únosnosti pro prvky s obdélníkovým a I průřezem.

Poslední porovnávanou hodnotou je únosnost jednotlivých průřezů (obdélníkového a I-průřezu). Z výsledků prezentovaných v tabulce 7.6 a následně na obrázku 7.62 je zřejmé, že ačkoliv u průřezu tvaru I vznikla trhlina ve všech případech jako první, je výsledná únosnost vyšší. Pro případy, u kterých byla omezená deplanace na obou koncích, je vypočtená únosnost v průměru o 27 % vyšší, pro případ jednoho omezeného konce vyšla únosnost v průměru o 17,5 % vyšší a pro případy volného kroucení byla vypočtená únosnost průměrně vyšší o 13 % oproti obdélníkovému průřezu. Tato vyšší únosnost může být dána délkou třmínek, které pro průřez tvaru I mají delší obvod a zároveň se z konstrukčních důvodů překrývají v místě styku pásnic a stojiny tohoto průřezu.

7.5 Globální návrhová únosnost v kroucení s využitím nelineární analýzy

Následující text vychází především z publikací [39] a [55].

Jedním z cílů nelineární analýzy je simulovat skutečné chování konstrukce a posléze vyhodnotit reprezentativní hodnotu únosnosti. Tento úkol lze také popsat jako hledání nejpravděpodobnější (průměrné) únosnosti, proto se nejčastěji pro účely nelineární analýzy používají střední hodnoty materiálových charakteristik, které umožňují získat střední hodnoty únosnosti konstrukce. Výsledky s využitím středních materiálových charakteristik byly pro vybraná statická uspořádání prezentovány v předchozí kapitole.

Pro návrh a hodnocení bezpečnosti konstrukcí je ovšem více než průměrná únosnost důležitá únosnost návrhová. Proto jsou ve *fib* Model Code 2010 představeny čtyři metody, které lze použít pro stanovení návrhových únosností. Tyto metody jsou v principu založené na pravděpodobnostním přístupu, a liší se především v úrovni jeho implementace do výpočtů. Jedná se o:

- plně pravděpodobnostní metodu;
- metodu ECOV;
- metodu založenou na doporučení EN1992-2;
- metodu dílčích součinitelů spolehlivosti.

Při návrhu konstrukce v praxi záleží především na úvaze inženýra, jakou z metod použije s ohledem na nejistoty v modelu a jeho zkušenosti. V následujících kapitolách jsou krátce představeny jednotlivé metody od té nejkompaktnější po nejjednodušší, a následně jsou porovnány získané návrhové hodnoty únosnosti v kroucení s návrhovými hodnotami stanovenými dle EN1992-1-1 a příhradové analogie.

Pro ověřování návrhu se používá nerovnost mezi extrémní hodnotou účinku zatížení a nejmenší pravděpodobnou únosností konstrukce.

$$F_D \leq R_D \quad (7.2)$$

kde F_D je největší pravděpodobný účinek zatížení

R_D je nejmenší pravděpodobná únosnost

U nelineární analýzy R_D představuje globální únosnost, která zahrnuje vnitřní odezvu celé konstrukce, ve které spolu všechny materiálové body, respektive průřezy spolupůsobí. Narozdíl od klasických metod posuzování konstrukcí, které využívají pro posuzování kritické průřezy na konstrukci, tedy tzv. lokální únosnost.

Návrhová globální únosnost se stanoví pomocí globálního součinitele bezpečnosti γ_R jako:

$$R_d = \frac{R_m}{\gamma_R} \quad (7.3)$$

kde R_m je střední hodnota únosnosti

7.5.1 Plně pravděpodobnostní metoda

Tato metoda je založena na relativně vysokém množství výpočtů na numerických modelech s využitím náhodných vstupních proměnných jako jsou například materiálové parametry, rozměry, okrajové podmínky a další. Jednotlivé modely jsou náhodně vygenerovány například pomocí numerických metod vzorkování typu Monte Carlo nebo např. metody latinských nadkrychlí LHS. Výsledkem opakované stochastické analýzy je pravděpodobnostní rozdělení únosnosti konstrukce, ze které může být přímo vyhodnocena návrhová hodnota únosnosti např. pomocí indexu spolehlivosti β .

$$R_d = R_m - \beta \cdot \sigma_R \quad (7.4)$$

kde σ_R je směrodatná odchylka pravděpodobnostního rozdělení únosnosti konstrukce

Vzhledem k výpočetní náročnosti je tento přístup použitelný v případech kdy následky porušení konstrukce odůvodňují tento složitý přístup a zároveň jsou známá statistická rozdělení hlavních vstupních proměnných. Pro potřeby této práce není tato metoda uplatněna.

7.5.2 Metoda ECOV

Tato zjednodušená pravděpodobnostní metoda vychází pouze ze dvou výpočtů. Je založena na předpokladu, že náhodné rozdělení únosnosti, které je popsáno koeficientem variace V_R , může být odhadnuto pomocí středních a charakteristických hodnot únosnosti. Pro stavební konstrukce, u kterých lze předpokládat, že jejich únosnost je lognormálně rozdělena, je možné odhadnout koeficient variace pomocí vztahu:

$$V_R = \frac{1}{1,65} \ln\left(\frac{R_m}{R_k}\right) \quad (7.5)$$

kde R_k je charakteristická hodnota únosnosti

Globální součinitel bezpečnosti konstrukce se poté stanoví pomocí koeficientu variace následovně:

$$\gamma_R = \exp(\alpha_R \cdot \beta \cdot V_R) \quad (7.6)$$

kde α_R je faktor senzitivity (0,8 pro pravděpodobnost porušení 0,001 dle [29])

β je index spolehlivosti (3,8 pro třídu spolehlivosti II. a dobu 50 let),
podrobnosti viz

Tabulka 7.10

Tabulka 7.10 - Doporučené minimální hodnoty indexu spolehlivosti β pro mezní stavy únosnosti dle ČSN EN 1990 [29].

Třída spolehlivosti	Minimální hodnoty β	
	referenční doba 1 rok	referenční doba 50 let
RC3	5,2	4,3
RC2	4,7	3,8
RC1	4,2	3,3

7.5.3 Metoda založená na EN 1992-2

Eurokód 2 pro navrhování betonových mostních konstrukcí představil koncept návrhu založený na nelineární analýze (ČSN EN 1992-2 [57], kapitola 5.7 doplněná o přílohu PP). Podmínkou je, že nelineární analýza musí pokrývat všechny způsoby porušení a pro návrh nesmí být rozhodující tahová pevnost betonu. Návrhová únosnost se má vypočítat jako:

$$R_d = \frac{R_f}{\gamma_R} \quad (7.7)$$

$$R_f = R(f_{ym}, f_{cf}) \quad (7.8)$$

kde f_{ym} je střední hodnota materiálových parametrů výztuže
 f_{cf} je korespondující hodnota pevnosti betonu (ne střední hodnota)

Protože f_{cf} nepředstavuje střední hodnoty materiálových charakteristik pro beton, výsledná únosnost R_f nepředstavuje střední hodnotu únosnosti, pokud rozhoduje selhání betonu (např. vznik trhlin nebo drcení tlakových diagonál), viz dále.

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (7.9)$$

kde f_{yk} je charakteristická hodnota meze kluzu výztuže
 γ_s je dílčí součinitel betonářské oceli (standardně 1,15)

$$f_{yk} = \frac{f_{ym}}{1,1} \quad (7.10)$$

$$\gamma_R = 1,1 \cdot 1,15 = 1,265 \quad (7.11)$$

Po roznásobení obou hodnot, které vedly k získání návrhové pevnosti výztuže získáme globální součinitel $\gamma_R=1,265$.

Pevnost betonu v tlaku pro výpočet je potom získána jako:

$$f_{cf} = \gamma_R \cdot f_{cd} = 1,265 \cdot f_{cd} \quad (7.12)$$

7.5.4 Metoda dílčích součinitelů spolehlivosti

Tato metoda je založena na principu zavedení dílčích součinitelů spolehlivosti přímo do analýzy konstrukce, výsledná únosnost je tedy získána jako výsledek nelineární analýzy s návrhovými parametry materiálů. Formálně zapsáno:

$$R_d = R(f_d) \quad (7.13)$$

kde f_d je návrhová hodnota materiálových charakteristik

Hlavní nevýhodou této metody je riziko dosažení jiného rozhodujícího způsobu porušení konstrukce, které neodpovídá způsobu porušení při analýze se středními nebo charakteristickými hodnotami materiálových vlastností.

7.6 Porovnání výsledků s normovými postupy

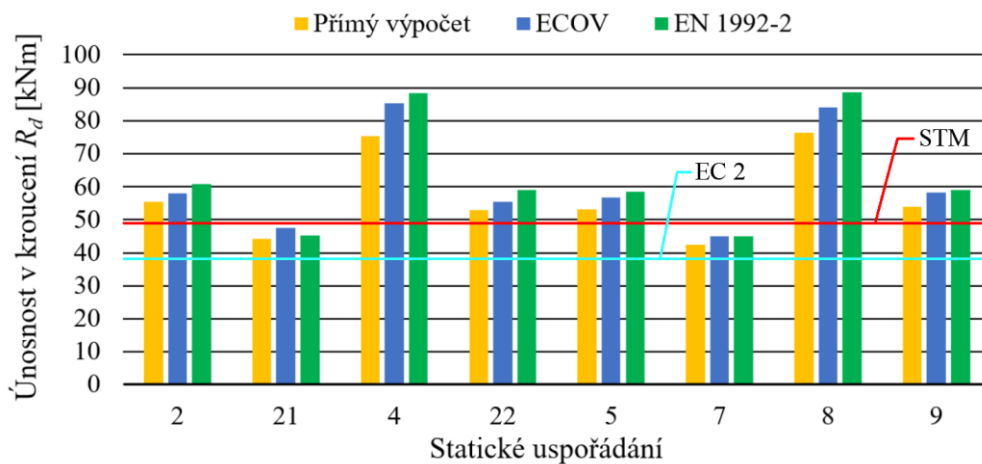
V následující tabulce jsou uvedené výsledky nelineárních výpočtů provedené se středními, charakteristickými a návrhovými materiálovými parametry dle EC2. Tyto výsledky jsou následně použity pro výpočet a porovnání jednotlivých návrhových únosností dle uvedených metod a návrhových postupů. Při nelineárních výpočtech došlo ve všech případech k porušení krouceného prvku dosažením meze kluzu betonářské výztuže, a lze tedy použít všechny metody bez omezení.

Tabulka 7.11 - Vypočtené únosnosti v kroucení – střední, charakteristické a návrhové.

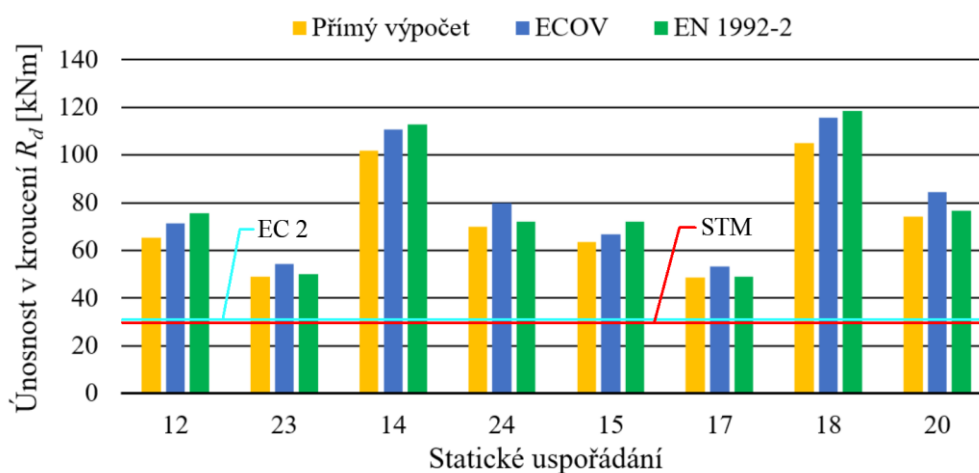
S.U.	Průřez	Prvek	Zatížení	Okrajové podm.	Vypočtená únosnost [kNm]		
					Střední	Charakteristická	Návrhová
2	Obdélník	Konzola	Koncový moment	PV-VY	77,35	66,14	55,51
21				RV-VK	58,62	52,27	44,15
4			Spojitě zatížení	PV-VY	112,16	96,64	75,36
22				RV-VK	74,98	63,61	52,99
5		Nosník	Středový moment	PV-PV	74,42	64,23	53,15
7				RV-RV	55,65	49,51	42,32
8			Spojitě zatížení	PV-PV	112,73	96,07	76,41
9				RV-RV	75,38	65,54	53,98
12	I	Konzola	Koncový moment	PV-VY	96,2	81,76	65,45
23				RV-VK	61,41	57,48	49,11
14			Spojitě zatížení	PV-VY	143,3	124,58	101,87
24				RV-VK	87,57	83,29	70,02
15		Nosník	Koncový moment	PV-PV	91,56	77,16	63,68
17				RV-RV	60,17	56,23	48,62
18			Spojitě zatížení	PV-PV	150,59	130,57	105,11
20				RV-RV	92,32	88,02	74,22

Tabulka 7.12 - Návrhové únosnosti stanovené dle vybraných metod pro nelineární výpočty.

S.U	ECOV			EN 1992-2		Díličí součinitele	
	V_R	$\gamma_{R,ECOV}$	$R_{d,ECOV}$	$\gamma_{R,MEC}$	$R_{d,MEC}$	$\gamma_{R,NELIN}$	$R_{d,NELIN}$
	[-]	[-]	[kNm]	[-]	[kNm]	[-]	[kNm]
2	0,095	1,33	57,97	1,27	60,91	1,39	55,51
21	0,069	1,24	47,46	1,27	45,35	1,33	44,15
4	0,090	1,32	85,24	1,27	88,31	1,49	75,36
22	0,100	1,35	55,38	1,27	59,08	1,41	52,99
5	0,089	1,31	56,74	1,27	58,60	1,40	53,15
7	0,071	1,24	44,87	1,27	45,07	1,31	42,32
8	0,097	1,34	83,96	1,27	88,76	1,48	76,41
9	0,085	1,29	58,25	1,27	58,97	1,40	53,98
12	0,099	1,35	71,29	1,27	75,75	1,47	65,45
23	0,040	1,13	54,37	1,27	50,00	1,25	49,11
14	0,085	1,29	110,72	1,27	112,83	1,41	101,87
24	0,030	1,10	79,85	1,27	72,13	1,25	70,02
15	0,104	1,37	66,80	1,27	72,09	1,44	63,68
17	0,041	1,13	53,11	1,27	49,10	1,24	48,62
18	0,086	1,30	115,79	1,27	118,57	1,43	105,11
20	0,029	1,09	84,55	1,27	76,70	1,24	74,22



Obrázek 7.63 - Sloupcové grafy – porovnání globální únosnosti v kroucení dle vybraných metod s lokálním výpočtem dle EC 2 a STM (obdélníkový průřez).



Obrázek 7.64 - Sloupcové grafy – porovnání globální únosnosti v kroucení dle vybraných metod s lokálním výpočtem dle EC 2 a STM (I průřez).

Na výše uvedených sloupcových grafech jsou mezi sebou porovnávány globální návrhové únosnosti stanovené pomocí přímého nelineárního výpočtu s návrhovými parametry materiálů (metoda dílčích součinitelů), metody ECOV, metody založené na principech EN 1992-2 a lokální návrhové únosnosti pomocí příhradové analogie (STM) a výpočet dle postupů uvedených v EC 2 (ČSN EN 1992-1-1).

Je patrné, že jednotlivé případy namáhání a kombinace okrajových podmínek poskytují různé globální únosnosti prvku v kroucení, oproti vypočteným lokálním únosnostem dle příhradové analogie a EC2, které analyzují pouze kritický průřez a udávají stejnou hodnotu únosnosti pro daný typ průřezu bez ohledu na zatížení a okrajové podmínky.

Metoda ECOV představuje nejkomplexnější přístup ze všech metod, pomocí kterých byly stanoveny únosnosti v kroucení, proto jsou tyto výsledky porovnány v následující tabulce s výpočtem pomocí STM a normovým postupem dle EC 2.

Vypočtené únosnosti v kroucení pomocí STM jsou pro případ obdélníkového průřezu poměrně srovnatelné s metodou ECOV, dokonce ve dvou případech byla vypočtená únosnost mírně vyšší (přibližně o 4% respektive 9%). Pro průřez tvaru I poskytuje metoda STM výrazně nižší únosnost oproti metodě ECOV (až o 289 % pro jisté případy).

Normový výpočet podle EC 2 je dle výsledků ještě výrazněji na straně bezpečné pro obdélníkový průřez, pro průřez tvaru I jsou výsledné únosnosti takřka srovnatelné s výpočtem pomocí STM.

Tabulka 7.13 - Porovnání metody ECOV s výpočtem dle STM a EC2.

S.U	Průřez	ECOV	Výpočet STM	Výpočet EC2	Porovnání	
		(1)	(2)	(3)	(1) / (2)	(1) / (3)
		$R_{d,ECOV}$	$R_{d,STM}$	$R_{d,EC2}$		
		[kNm]	[kNm]	[kNm]	[-]	[-]
2	Obdélník	57,97	49,2	38,5	1,18	1,51
21		47,46			0,96	1,23
4		85,24			1,73	2,21
22		55,38			1,13	1,44
5		56,74			1,15	1,47
7		44,87			0,91	1,17
8		83,96			1,71	2,18
9		58,25			1,18	1,51
12		I			71,29	29,8
23	54,37		1,82	1,79		
14	110,72		3,72	3,64		
24	79,85		2,68	2,63		
15	66,80		2,24	2,20		
17	53,11		1,78	1,75		
18	115,79		3,89	3,81		
20	84,55		2,84	2,78		

Z těchto výsledků je tedy možné závěrem konstatovat, že normový výpočet dle Eurokódu 2 založený na posouzení návrhové únosnosti kritického průřezu je ve všech zkoumaných případech na straně bezpečné minimálně o 17% pro obdélníkový průřez, a minimálně o 75% pro průřez tvaru I v porovnání s globální únosností dle metody ECOV. Rovněž se zdá, že výpočet dle EC 2 poskytuje poměrně přesné výsledky v případech, kdy na konstrukci působí pouze volné kroucení u klasických typů průřezů jako je obdélník. Pro složitější průřezy a případy, kdy na obou koncích konstrukce dochází k bránění deplanace je normový postup výrazně na straně bezpečnosti a konstrukce je z hlediska únosnosti výztuže při kroucení předimenzována. Částečně lze tento výsledek vysvětlit skutečností, že normový postup dle EC 2 neuvažuje s vlivem vázaného kroucení, které má pozitivní vliv na únosnost, jak bylo dokázáno v předchozích kapitolách.

Mimo srovnání výsledků metody ECOV s výpočtem dle STM a EC 2 bylo provedeno i porovnání jednotlivých metod pro globální analýzu konstrukce. Toto porovnání je provedeno pomocí globálních součinitelů bezpečnosti v následující tabulce.

Tabulka 7.14 - Porovnání jednotlivých metod pomocí globálního součinitele bezpečnosti γ_R .

S.U.	Porovnání globálních součinitelů bezpečnosti γ_R		
	ECOV	EN 1992-2	Dílčí součinitele
2	1,33	1,27	1,39
21	1,24	1,27	1,33
4	1,32	1,27	1,49
22	1,35	1,27	1,41
5	1,31	1,27	1,40
7	1,24	1,27	1,31
8	1,34	1,27	1,48
9	1,29	1,27	1,40
12	1,35	1,27	1,47
23	1,13	1,27	1,25
14	1,29	1,27	1,41
24	1,10	1,27	1,25
15	1,37	1,27	1,44
17	1,13	1,27	1,24
18	1,30	1,27	1,43
20	1,09	1,27	1,24
Průměr	1,26	1,27	1,37

Z tabulky 7.14 je patrné, že nelineární výpočet s návrhovými materiálovými parametry poskytuje nižší hodnoty únosnosti než zbylé dvě metody pro nelineární výpočty. Globální bezpečnostní součinitel $\gamma_{R,NELIN}$ dosahuje průměrné hodnoty 1,37 oproti průměrným hodnotám $\gamma_{R,ECOV}$ a $\gamma_{R,MEC}$, ty mají (průměrné) hodnoty podobné: 1,26, respektive 1,27.

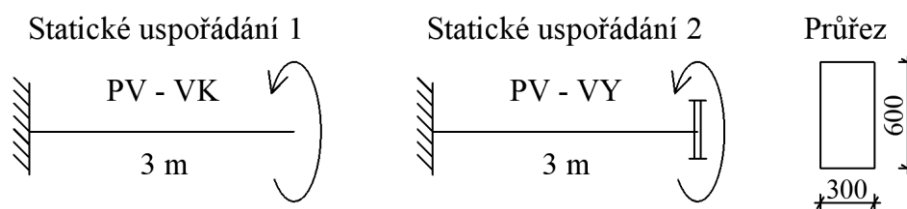
Výsledky a závěry uvedené v této kapitole platí pro zmíněná statická uspořádání, a nelze je bez předchozího ověření vztahovat na nosníky a konzoly s jinou délkou, než jaká je použita pro výpočet. Vliv délky nosníků a konzol na únosnost v kroucení je dále studován v následující kapitole, která se věnuje parametrické studii.

7.7 Parametrická studie

V této parametrické studii je vybráno celkem pět parametrů, u kterých je zkoumán jejich vliv na únosnost. Jedná se o:

- vliv koncové tuhosti v deplanaci;
- vliv délky krouceného prvku;
- vliv poměru podélné a příčné výztuže;
- vliv počtu prutů podélné výztuže;
- vliv polohy podélné výztuže uvnitř průřezu.

Veškeré výpočty v této parametrické studii vycházejí z referenčního numerického modelu použitého pro statické uspořádání č. 1 pro volné kroucení respektive č.2 pro kroucení s omezenou deplanací, statická schémata jsou patrna z následujícího obrázku.



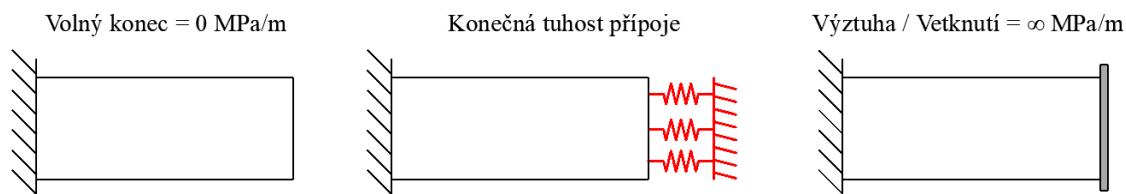
Obrázek 7.65 - Vybrané případy okrajových podmínek na konzolách pro parametrickou studii.

V rámci parametrické studie byl na referenčním modelu vždy měněn pouze jeden konkrétní parametr, nikdy nebylo kombinováno více proměnných parametrů najednou.

Materiálové vlastnosti jsou ve výpočtech uvažovány středními hodnotami.

7.7.1 Vliv koncové tuhosti v deplanaci

V rámci této práce bylo zkoumáno kroucení na prvcích, které mají na jednom ze svých konců zcela umožněnou či zcela zamezenou deplanaci, avšak v reálných podmínkách oba tyto limitní stavy jen velmi vzácně nastávají. Ve skutečnosti se na koncích kroucených prvků často nachází monoliticky připojené sloupy či různé příčníky, které deplanaci brání jen částečně. Proto se jako vhodný parametr ke zkoumání jeví koncová tuhost v místě deplanace.



Obrázek 7.66 - Schéma aplikace koncové tuhosti na kroucený prvek.

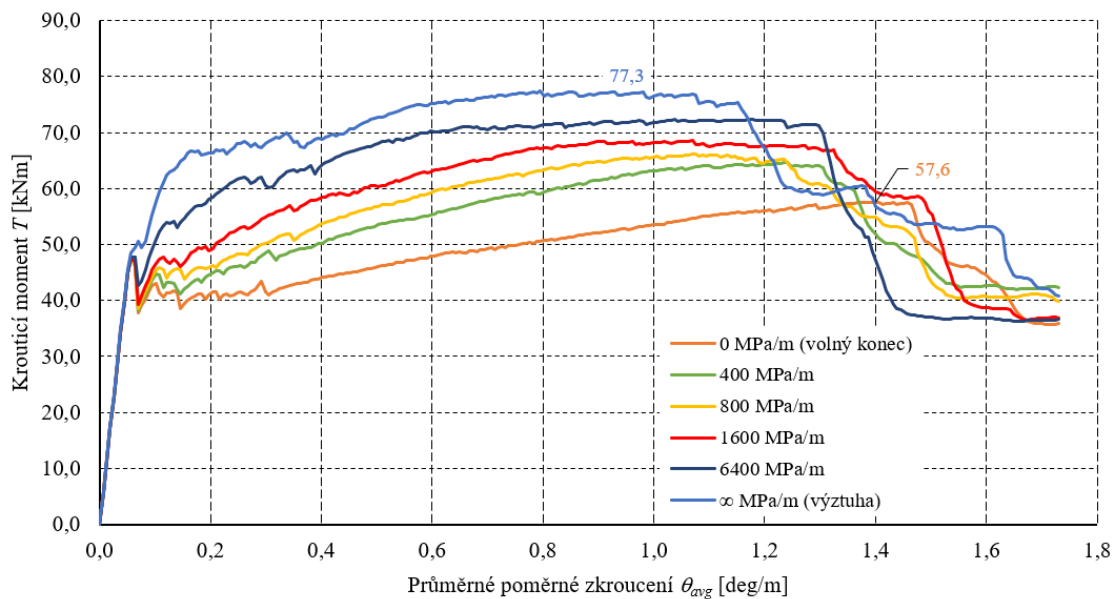
Vybrané tuhosti pro výpočet vychází z tuhostí stanovených pro sloupy, tyto síly potom byly přepočteny na napětí působící na plochu průřezu krouceného prvku. Například plošná tuhost 400 MPa/m představuje sloup o výšce 3 metry s průřezem

300/600 mm (tedy stejným jako průřez nosníku). Na druhou stranu tuhost 6400 MPa/m představuje už víceméně plošný stěnový prvek o výšce 3 metry a průřezu 300/1500 mm.

$$k_{sloup} = \frac{12EI}{h_{sloup}^3} = \frac{12 \cdot 30\,000 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,3 \cdot 0,6^3}{3^3} = 72 \text{ MN/m} \quad (7.14)$$

$$k_{depl} = \frac{k_{sloup}}{b \cdot h} = \frac{72}{0,3 \cdot 0,6} = 400 \text{ MPa/m} \quad (7.15)$$

Tato představa fungování kontaktu mezi sloupem a krouceným prvkem je však velmi zjednodušená a předpokládá vznik trhliny v místě na průřezu kde působí tahová napětí tak, aby přenášená deformace na sloup působila pouze v jednom směru a sloup vnášel do krouceného prvku tlakovou normálovou sílu.

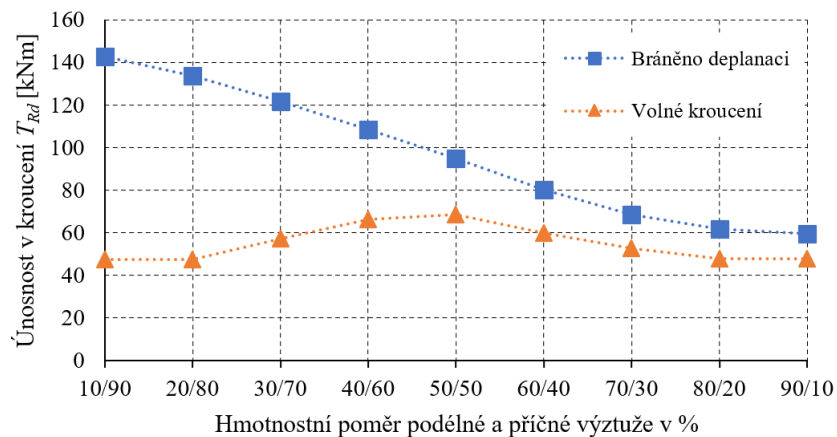


Obrázek 7.67 - Vliv koncové tuhosti v deplanaci na únosnost v kroucení – pracovní diagramy.

Z výsledků je patrné, že při zvyšování koncové tuhosti přechází pracovní diagram plynule z volného kroucení ke kroucení, kdy je na konci plně bráněno deplanaci. Je tedy možné uvažovat, že v případech, kdy jsou kroucené prvky napojeny na podélné stěny, dochází výraznému bránění deplanace, které se bude blížit plnému zamezení deplanace.

7.7.2 Poměr podélné a příčné výztuže

Dalším zkoumaným parametrem byl poměr podélné a příčné výztuže, kdy bylo zjišťováno nejvhodnější rozdělení stejného množství výztuže rozděleného v různém poměru mezi podélné pruty a tříminky. Výztužení vychází z kapitoly 7.1.3. Výpočet byl proveden pro dva typy okrajových podmínek, pro případ, kdy je na obou koncích bráněno deplanaci a pro případ čistě volného kroucení.



Obrázek 7.68 - Vliv různého hmotnostního poměru podélné a příčné výztuže na únosnost v kroucení.

Výsledky pro volné kroucení odpovídají předpokladům, ideální rozdělení výztuže potřebné k získání nejvyšší únosnosti pro tento případ vyšlo jako 50 % objemu podélné výztuže a 50 % objemu příčné výztuže, to odpovídá úhlu sklonu tlakových diagonál $\theta = 44,6^\circ$ dle vzorce (5.2). Přesné maximum by se pravděpodobně dalo najít dalšími výpočty provedenými v oblasti mezi 40 %/60 % a 50 %/50 %. Je zajímavé, že i pro extrémní případy rozdělení výztuže 10/90 %, resp. 90/10 %, tedy zcela v rozporu s doporučením norem, je únosnost v kroucení poměrně vysoká a nedochází k rychlému kolapsu prvku.

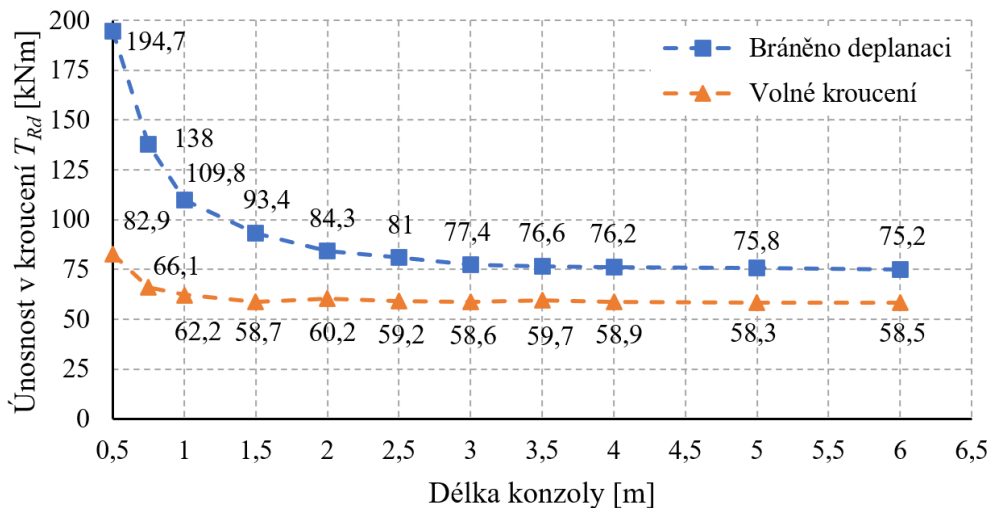
Ovšem pro případ, kdy je na konci prvku bráněno deplanaci, vychází zcela odlišná závislost únosnosti krouceného prvku na proměnném poměru podélné a příčné výztuže. Nejvhodnější rozdělení výztuže odpovídá případu, kdy je většina celkové výztuže koncentrována do třmínek. To může být způsobeno již zmíněnou hypotézou diagonálního "předepnutí" prvku vlivem omezené deplanace, kdy v podstatě podélná výztuž není protahována ve směru osy x vlivem deformací krouceného prvku, tím je omezený její vliv na působení při kroucení. Tento jev je patrný na namáhání výztuže viz Obrázek 7.22 a Obrázek 7.24 v kapitole s výsledky nelineární analýzy.

Tabulka 7.15 - Porovnání úhlu sklonu tlakových diagonál θ (rovnice (5.2)) s požadavky norem.

Hmotnostní poměr výztuže [% / %]	Úhel sklonu tlakových diagonál θ [°]	Vyhovuje EC 2	Vyhovuje ACI 318	Vyhovuje MC 2010
10/90	71,3	NE	NE	NE
20/80	63,4	NE	NE	NE
30/70	56,4	NE	ANO	NE
40/60	50,6	NE	ANO	NE
50/50	44,6	ANO	ANO	ANO
60/40	38,8	ANO	ANO	ANO
70/30	33	ANO	ANO	ANO
80/20	26,4	NE	NE	NE
90/10	18,4	NE	NE	NE

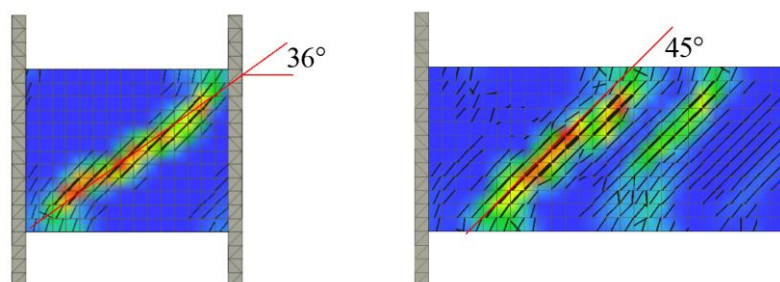
V tabulce výše jsou porovnány sklony tlakových diagonál pro jednotlivé případy s normovými požadavky, které jsou uvedeny v kapitole 5.1. Z porovnání je patrné, že ne všechny varianty uspokojují požadavky norem. Nejbenevolentněji k volbě úhlu sklonu tlakových diagonál přistupuje americká norma ACI 318-19.

7.7.3 Délka prvku



Obrázek 7.69 - Vliv délky prvku na únosnost v kroucení.

Z výše uvedeného obrázku vyplývá, že parametr délky krouceného prvku má vliv na únosnost pouze při malých hodnotách. V tomto případě u obdélníkového průřezu docházelo k značnému nárůstu únosnosti pro délky prvku do 1 metru. To je dáno pravděpodobně tím, že při dostatečném zkrácení prvku se vynutí tlakové diagonály přímo mezi podporou a zatěžovací deskou, které kroučící moment přenášejí přímo do podpory. Z obrázku je rovněž parné, že tento vliv je výraznější pro případ, kdy je na obou koncích omezená deplanace, a tedy na nosník působí vázané kroucení.

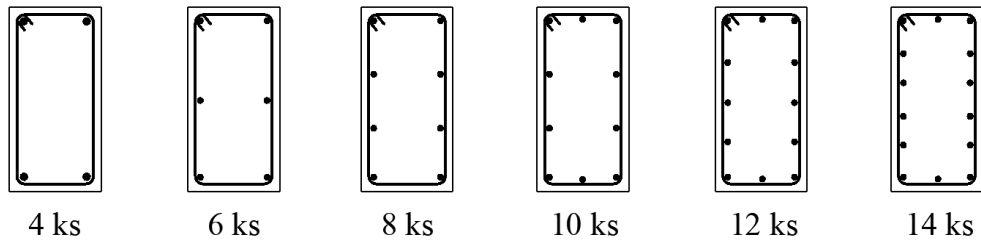


Obrázek 7.70 - Vliv délky krouceného prvku na sklon trhliny, respektive tlačené diagonály.

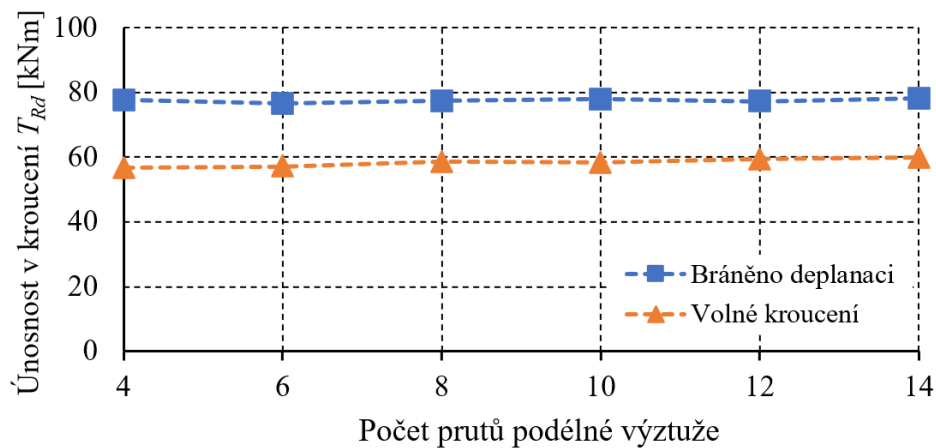
Zvýšená únosnost krátkých kroucených prvků může být také způsobena prostorovou napjatostí, kdy se o takto krátkých prvcích nedá mluvit jako o prutových prvcích. Krátký prvek je výhradně vystaven vázanému kroucení (pokud je bráněno deplanaci) a tudíž na větší části konstrukce působí normálové napětí od bimomentu a zároveň smykové napětí od sekundárního kroučícího momentu. Rovněž nižší počet konečných prvků snižuje kvalitu měřených výsledků.

7.7.4 Počet prutů podélné výztuže

Dalším zkoumaným parametrem byl počet prutů podélné výztuže při zachování stejné celkové průřezové plochy (průměry prutů se tedy pro jednotlivé varianty liší). Z obrázku níže je patrné, že v obou případech tento parametr nemá na výslednou únosnost žádný znatelný vliv, a podélnou výztuž je možné po obvodu prvku rozdělit libovolně. Je však nutné zdůraznit, že je potřeba dodržovat konstrukční zásady pro podélnou výztuž dle platných norem.



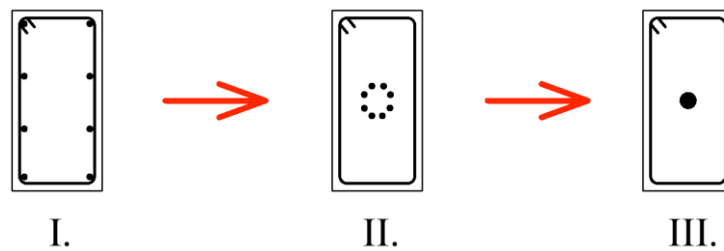
Obrázek 7.71 - Schéma počtu podélných prutů pro zkoumané varianty.



Obrázek 7.72 - Vliv počtu podélné výztuže na celkovou únosnost v kroucení.

7.7.5 Poloha podélné výztuže uvnitř průřezu

U podélné výztuže byl rovněž zkoumán vliv její polohy uvnitř průřezu na celkovou únosnost. Byly ověřeny dvě alternativní varianty, které vycházely z původního vyztužení označeném na obrázku níže jako I., varianta II. má původních osm prutů rozmístěných na kružnici s poloměrem 50 mm ve středu průřezu, ve variantě III. byly tyto pruty sloučeny do jednoho prutu s ekvivalentní plochou.



Obrázek 7.73 – Schéma umístění výztuže uvnitř průřezu.

Z následující tabulky je patrné, že rozmístění podélné výztuže uvnitř průřezu ani jejich počet (pokud je zachována celková plocha) nemá při kroucení téměř žádný vliv na celkovou únosnost. V publikaci [40] je tento závěr prezentován teoreticky, výsledky uvedené v této kapitole získané nelineární analýzou tedy potvrzují tuto skutečnost.

Tabulka 7.16 - Porovnání únosnosti v kroucení pro různé rozmístění výztuže uvnitř průřezu.

	Únosnost v kroucení T_{Rd} [kNm]		
	I.	II.	III.
Bráněno deplanaci	77,4	79,5	81,1
Volné kroucení	58,6	56,2	56,6

I přesto, že se tato úloha jeví jako teoretická, je možné pro toto zjištění najít využití v praxi, kdy lze například do únosnosti v kroucení započítat i podélnou konstrukční výztuž, která je umístěna často uvnitř průřezů a zajišťuje například polohu vnitřních třmínek pro přenos smyku od posouvající síly.

8. Závěr

8.1 Zhodnocení splnění cílů diplomové práce

Teorie kroucení:

V rámci teorie kroucení byly vymezeny termíny volného a vázaného kroucení, byla představena teorie popisující oba druhy kroucení včetně zavedení okrajových podmínek. Dále byly popsány druhy napětí vznikající na masivních průřezích od volného a vázaného kroucení a výpočet hlavních napětí.

Rovněž byla představena základní teorie rozhodujících nelinearit, které je třeba zohlednit při nelineárním výpočtu kroucených prvků. Popsány byly i metody řešení nelineárních úloh (především ty, které jsou použité v programu ATENA Science).

Současný stav norem a literatury:

Současný stav norem byl popsán především z hlediska volného kroucení, protože většina ze současně používaných norem termín vázaného kroucení (pro masivní průřezy) zmiňuje pouze okrajově nebo vůbec. Literatura týkající se vázaného kroucení masivních průřezů je rovněž velmi vzácná, a byla v této části popsána v několika odstavcích.

Lineární analytická a numerická analýza:

V části věnované lineární analýze jsou představeny typické masivní železobetonové průřezy použité při analýze a jejich průřezové charakteristiky. Jsou zde ukázány průběhy napětí vznikající na průřezu od volného a vázaného kroucení s konkrétními hodnotami.

Dále jsou představena typická statická uspořádání (kombinace okrajových podmínek a zatížení kroucením) a jejich analytické výsledky v podobě průběhů pootočení, poměrného zkroucení, krouticích momentů a napětí vznikajících po délce krouceného prvku. Tyto výsledky jsou dále porovnány s lineárním numerickým výpočtem. Je zde také představena parametrická studie s využitím analytického řešení rovnic vázaného kroucení.

Nelineární numerická analýza:

Nelineární analýza tvoří hlavní část této práce a využívá výsledky z lineární analýzy při sledování chování krouceného prvku do vzniku trhlin. Pomocí studie citlivosti a validace výsledků numerických modelů na výsledcích experimentů z literatury byly vybrány vhodné numerické modely, které byly použity pro následnou nelineární analýzu zvolených statických uspořádání.

Výsledky z této analýzy jsou následně porovnány s návrhovými postupy dle platné normy s využitím několika metod pro stanovení globální návrhové únosnosti při nelineární analýze. Nakonec je tato část doplněna o parametrickou studii zkoumající vliv vybraných parametrů na únosnost prvků v kroucení.

Na základě výše uvedených informací autor považuje cíle závěrečné práce definované v úvodu za splněné.

8.2 Hlavní poznatky a doporučení pro praxi

V rámci této diplomové práce bylo zjištěno několik, z pohledu autora velmi zajímavých poznatků, které souvisejí s (vázaným) kroucením železobetonových prvků. Nejdůležitější z těchto poznatků, které mohou najít i využití v praxi jsou:

- Bránění deplanace na obou koncích krouceného prvku značně zvyšuje celkovou únosnost v kroucení jak pro namáhání koncovým krouticím momentem, tak při působení spojitého krouticího momentu (u zkoumaných prvků o 32% až 64 %).
- Normové postupy dle EC 2 pro výpočet únosnosti v kroucení neuvažují vázané kroucení (vznikající bráněním deplanace) a i z toho důvodu jsou výrazně na straně bezpečné.
- Pro případy, u kterých bylo simulováno výhradně volné kroucení jsou výsledky výpočtu dle EC 2 na straně bezpečné, avšak nepředstavují tak výrazné předimenzování jako u předchozího bodu.
- Při lineárním průběhu vnitřního krouticího momentu je únosnost v kroucení zdánlivě vyšší oproti konstantnímu průběhu (proto autor doporučuje uvažovat redukovanou hodnotu návrhového krouticího momentu).
- Únosnost průřezu tvaru I byla při stejné ploše průřezu a stejném způsobu vyztužení vyšší oproti obdélníkovému průřezu pro všechny případy statického uspořádání.
- Zvyšováním tuhosti v deplanaci působící na konci krouceného prvku se rovněž zvyšuje únosnost v kroucení.
- Velikost a tvar průřezu má vliv na dosah výrazného působení účinků vázaného kroucení po délce prvku.
- V místě bráněním deplanace na průřezu vznikají výrazná normálová napětí vlivem bimomentu, to ovlivňuje vznik první trhliny na krouceném prvku.
- Při omezení deplanace na krouceném prvku je podélná výztuž výrazně méně namáhána oproti případům s volným koncem, a na únosnosti se podílí především příčná výztuž.
- Lineární numerická 2D analýza průřezu v konvenčních programech poskytuje stejné výsledky (hodnoty napětí) jako 3D lineární numerické řešení v MKP programu ATENA Science.
- Počet prutů podélné výztuže v průřezu nemá na únosnost prvků v kroucení vliv, pokud je zachována stejná celková plocha.
- Při výpočtu únosnosti v kroucení je možné uvažovat i podélnou výztuž uvnitř průřezu (tj. mimo plochu vymezenou náhradním tenkostěnným průřezem).

8.3 Náměty na rozšíření práce

Ze získaných poznatků při zpracování této práce se nabízejí některá témata, která by si z pohledu autora zasloužila podrobnější zkoumání. Mezi tato témata patří:

- Chování krouceného prvku při kombinaci s dalšími vnitřními silami.
- Zkoumání vlivu vázaného kroucení na dalších typech průřezů.
- Bližší výzkum chování krouceného prvku vlivem „předepnutí“ způsobeném omezenou deplanací na průřezech.
- Kroucení velmi krátkých prvků s masivními průřezy.
- Experimentální výzkum zaměřující se na potvrzení numerických výsledků uvedených v této práci.

9. Zdroje

9.1 Literatura

- [1] ČSN EN 1992-1-1 ed. 2; *Navrhování betonových konstrukcí – Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby*; Praha: ÚNMZ, červenec 2011
- [2] JIRÁSEK, Milan; BAUER, Marco. Numerical aspects of the crack band approach. *Computers & structures*, 2012, 110: 60-78.
- [3] A. J. C. B. Saint-Venant. *Memoire sur la Torsion des Prismes*. Paříž, 1855, s. 560
- [4] MICHALEC J. a kolektiv; *Pružnost a pevnost I.*; 1. dotisk 3. vydání; Praha: Česká technika, 2010; ISBN 978-80-01-04224-3
- [5] ZINDULKA, Ondřej. *Matematika 3*. Praha: Česká technika – nakladatelství ČVUT, 2007. ISBN 978-80-01-03678-5.
- [6] NĚMEC, I., *Nelineární mechanika*, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Ústav stavební mechnaiky, Brno, 2006
- [7] ČERVENKA V., JENDELE L., ČERVENKA J.; *ATENA Program Documentation Part 1: Theory*; Praha: Červenka Consulting s.r.o.; 2021 Dostupné z: cervenka.cz/products/atena/documentation/pdf-atena-theory
- [8] ČERVENKA, Jan a Papanikolaou VASSILIS. *Three dimensional combined fracture–plastic material model for concrete*. *International Journal of Plasticity* [online]. 2008, 24 (12), 2192-2220 [cit. 2022-11-15]. ISSN 0749-6419. DOI: 10.1016/j.ijplas.2008.01.004
- [9] WINDISCH, Andor. *Extended Rankine failure criteria for concrete*. *Concrete Structures*. 2022; DOI: 10.32970/CS.2022.1.2.
- [10] *Failure Theories* [online]. Colorado, 2000 [cit. 2022-11-15]. Dostupné z: egr.msu.edu/classes/me471/thompson/handout/class10_2005SFailureTheory.pdf
- [11] ABED, A. a kolektiv; *Stability analysis for road-cutting Review, recommendations and examples*, 2018; DOI: 10.13140/RG.2.2.10562.02244.
- [12] NETO, E. S., PERIC, D., OWENS, D., *Computational methods for plasticity: theory and applications*, John Wiley & Sons Ltd, 2008, ISBN 978-0-470-69452-7
- [13] JIRÁSEK, M., BAŽANT, Z. P., *Inelastic Analysis of Structures*, John Wiley & Sons Ltd, 2002, 1st, ed., p. 232
- [14] ONDRÁČEK, Emanuel, Jan VRBKA a Přemysl JANÍČEK, *Mechanika těles: pružnost a pevnost II*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2002. Učební texty vysokých škol (Vysoké učení technické v Brně). ISBN 80-214-2214-9.
- [15] JONES, R., Millard. *Deformation Theory of Plasticity*. 1. vyd. Blacksburg, Virginia: Bull Ridge Publishing, 2009. 640 s. Dostupné online. ISBN 978-0-9787223-1-9. Kapitola Yielding and yield criteria, s. 125–164.

- [16] Příspěvatelé Wikipedie, Haighův prostor [online], Wikipedie: Otevřená encyklopedie, 2022, Datum poslední revize 18. 05. 2022, 10:32 UTC, [citováno 16. 11. 2022] dost. z: cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Haigh%C5%AFv_prostor&oldid=21281122
- [17] *Von Mises Criterion (Maximum Distortion Energy Criterion)*. Engineer's edge. [citováno 16. 11. 2022].
Dostupné z: engineersedge.com/material_science/von_mises.htm
- [18] Příspěvatelé Wikipedie, Von Mises yield criterion [online], Wikipedie: Otevřená encyklopedie, 2022, [citováno 16. 11. 2022] dostupné z: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Von_Mises_yield_criterion&oldid=1122150735
- [19] Engineering at Alberta; *STRESS BASED FAILURE CRITERIA* [online]. University of Alberta, Alberta, [cit. 2022-11-16]. Dostupné z: <https://engcourses-uofa.ca/books/introduction-to-solid-mechanics/stress/stress-based-failure-criteria/>
- [20] YU, M., MA, G., LI, J., *Structural Plasticity – Limit, Shakedown and Dynamic Plastic Analyses of Structures*, Zhejiang University Press, Hangzhou and Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg, 2009, ISBN 978-3-540-88151-3
- [21] ABDULLAH, W. S., *Table 1: Common plasticity models Type of plastic model Plastic yield function*. 2011.
- [22] MENETREY, P., WILLAM, K.J., *Triaxial failure criterion for concrete and its generalization*. ACI, Structural Journal, 1995, 92(3), strany 311-318.
- [23] DMITRIEV, A. a kolektiv, *Calibration and Validation of the Menetrey-Willam Constitutive Model for Concrete*; 2020; Construction of Unique Buildings and Structures; Volume 88 Article No 8804. DOI: 10.18720/CUBS.88.4
- [24] Radosław, J., *Validation of Elastic-Brittle, and Elastic-Plastic FEM Model of the Wall Made of Calcium Silicate and AAC Masonry Units*. IOP Conference Series Materials Science and Engineering. DOI: 10.1088/1757-899X/603/3/032001.
- [25] AKRAM, Saba; ANN, Quarrat Ul. *Newton raphson method*. *International Journal of Scientific & Engineering Research*, 2015, 6.7: 1748-1752.
- [26] CRISFIELD, MA1913032. *An arc-length method including line searches and accelerations*. *International journal for numerical methods in engineering*, 1983, 19.9: 1269-1289.
- [27] HOOGENBOOM, P. C. J. *Vlasov torsion theory*. Lecture Notes. TUDelft, 2006.
- [28] SAPOUNTZAKIS, E. J.; MOKOS, V. G. *Warping shear stresses in nonuniform torsion by BEM*. *Computational Mechanics*, 2003, 30.2: 131-142.
- [29] ČSN EN 1990; *Zásady navrhování konstrukcí*; Praha: ÚNMZ, březen 2004
- [30] SCHULZ, Mauro; FILIPPOU, Filip C. *Generalized warping torsion formulation*. *Journal of engineering mechanics*, 1998, 124.3: 339-347.
- [31] VALENCIA, Camilo Granda; LANTSOGHT, Eva; *Overview of Torsion Design Methods*. *Special Publication*, 2020, 344: 1-29.

- [32] Vítek, J. L. & Boháček, L. & Průša, J. & Křístek, V. (2020). Torsion of Rectangular Concrete Section, *In Examples for The Design of Reinforced and Prestressed Concrete Members Under Torsion – An ACI Technical Publication – Symposium Volume*. 111-130.
- [33] DAWKINS, Paul. *Second Order Differential Equations* [online]. 2018, s. 83 [cit. 2022-10-19]. Dostupné z: <http://tutorial.math.lamar.edu>
- [34] VESECKÝ, Jan. *Kroucení železobetonových prvků*. 2017. Bachelor's Thesis. České vysoké učení technické v Praze. Vypočetní a informační centrum.
- [35] ZEMANOVÁ, Eva. *Obyčejné diferenciální rovnice vyššího řádu* [online]. Brno, 2007 [cit. 2022-06-19]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/u2x78/DP_orig.pdf. Diplomová práce. Masarykova Univerzita v Brně
- [36] Scia Engineer. Cross-sections in SCIA Engineer Defining, importing and modifying cross-sections [online]. In: s. 168 [cit. 2022-11-22]. Dostupné z: https://help.scia.net/download/16.0/en/Cross-sections_enu.pdf
- [37] VESECKÝ, Jan. *Torsion of thin-walled cementitious composite members*. Praha, 2021. Expert study. ČVUT v Praze.
- [38] SANTANA, Guillermo & Committee, ACI. *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-19) and Commentary*. (2019). DOI: 10.14359/51716937.
- [39] FIB. *Fib Model Code for Concrete Structures 2010* [online]. Weinheim, Germany: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co., 2013 [cit. 2022-11-19]. ISBN 9783433604090. Dostupné z: doi:10.1002/9783433604090
- [40] LAMPERT P., THÜRLIMANN B.; *Ultimate Strength and Design of Reinforced Concrete Beams in Torsion and Bending*; Basel: Birkhäuser, 1972; ISBN 3-7643-0631-9
- [41] CHALIORIS, Constantin E.; KARAYANNIS, Chris G. *Experimental investigation of RC beams with rectangular spiral reinforcement in torsion*. Engineering structures, 2013, 56: 286-297.
- [42] JIRÁSEK M.; Pružnost a pevnost – kroucení prutu, 9. přednáška [elektronická přednáška]; Fakulta stavební ČVUT v Praze, 1. prosince 2014 [cit. 2022-11-19]
- [43] KONVALINKA P.; Analýza konstrukcí, 4. přednáška [elektronická přednáška]; Fakulta stavební ČVUT v Praze, [cit. 2022-11-19]
- [44] MIKEŠ, Karel; JIRÁSEK, Milan. Free warping analysis and numerical implementation. In: Applied Mechanics and Materials. Trans Tech Publications Ltd, 2016. p. 141-148.
- [45] KOREC, Evžen. *Variační přístup k popisu obecně zatíženého pružného prutu*. 2018. Bachelor's Thesis. České vysoké učení technické v Praze. Vypočetní a informační centrum.
- [46] VESECKÝ, J. Kroucení dle EC2 – Problémy a chyby analytického modelu. In: *Proceedings of the 8th PhD Workshop of the Department of Concrete and Masonry Structures*. Praha: ČVUT v Praze, 2019
- [47] JIRÁSEK, Milan; ZEMAN, Jan. *Přetváření a porušování materiálů: dotvarování, plasticita, lom a poškození*. České vysoké učení technické, 2012.

- [48] HORÁK, Martin. *Lokalizační analýza modelů poškození a plasticity*. České vysoké učení technické, 2008.
- [49] DIKAROS, I. C.; SAPOUNTZAKIS, E. J. Generalized warping analysis of composite beams of an arbitrary cross section by BEM. I: Theoretical considerations and numerical implementation. *Journal of Engineering Mechanics*, 2014, 140.9: 04014062.
- [50] KABELÁČ J., Warping shear stress on arbitrary composite cross section, *14th International Conference Applied Mechanics 2012*, Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň, 2012
- [51] KIDMANN, R.; KRAUS, Matthias. *Steel Structures. Design Using FEM*, 2012.
- [52] ČERVENKA J. a kolektiv; *ATENA Program Documentation Part 4-6: ATENA Science – GiD Tutorial*; Praha: Červenka Consulting s.r.o.; 2019 Dostupné z: cervenka.cz/assets/files/atena-pdf/ATENA-Science-GiD_Tutorial.pdf
- [53] VESECKÝ, Jan. Kroucené železobetonové prvky: citlivostní analýza nelineárních numerických modelů. In: *Proceedings of the 10th PhD Workshop of the Department of Concrete and Masonry Structures*. Praha: ČVUT v Praze, 2021
- [54] CHALIORIS, C. E. Behaviour model and experimental study for the torsion of reinforced concrete members. *WIT Transactions on the Built Environment*, 2006, 85.
- [55] CERVENKA, Vladimir. Global safety formats in fib Model Code 2010 for design of concrete structures. In: *Proceeding of the 11th International Probabilistic Workshop, Brno*. 2013. p. 27-31.
- [56] ČÍTEK, D a kol. Zatěžovací zkoušky železobetonových sloupů v kroucení. *Expertní zpráva*. 2020. 230 s. ČVUT – Kloknerův ústav.
- [57] ČSN EN 1992-2; *Navrhování betonových konstrukcí – Část 2: Betonové mosty – Navrhování a konstrukční zásady*; Praha: ÚNMZ, květen 2007

9.2 Software

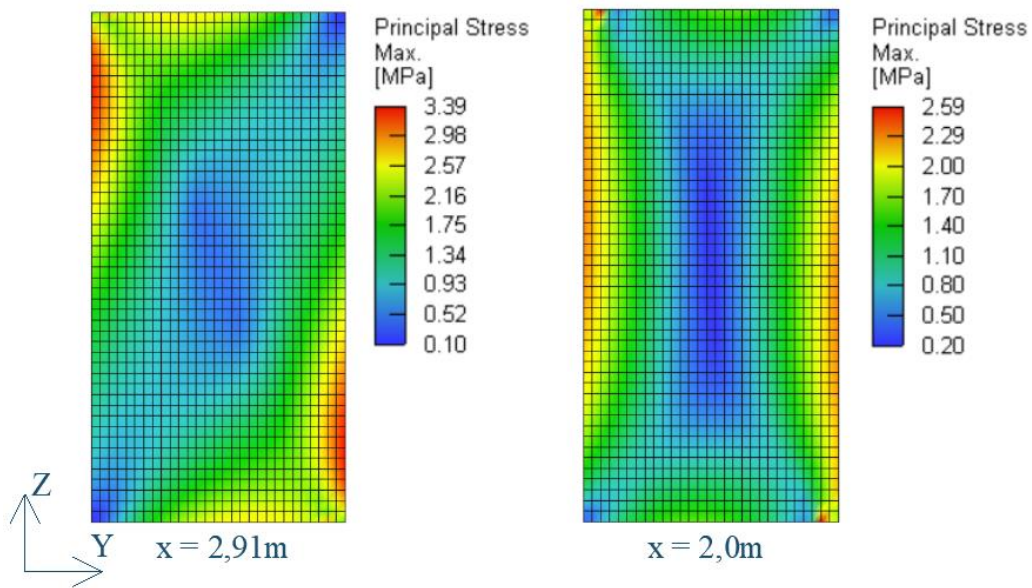
- [A] ATENA 5.9.0 (akademická verze) společnosti Cervenka consulting
- [B] Scia Engineer 21.1 (studentská verze) společnosti Nemetschek
- [C] Dlubal RSECTION 1.02 (studentská verze) společnosti Dlubal Software
- [D] MS Office společnosti Microsoft
- [E] ARCHICAD 24 (studentská verze) společnosti Graphisoft

10. Přílohy

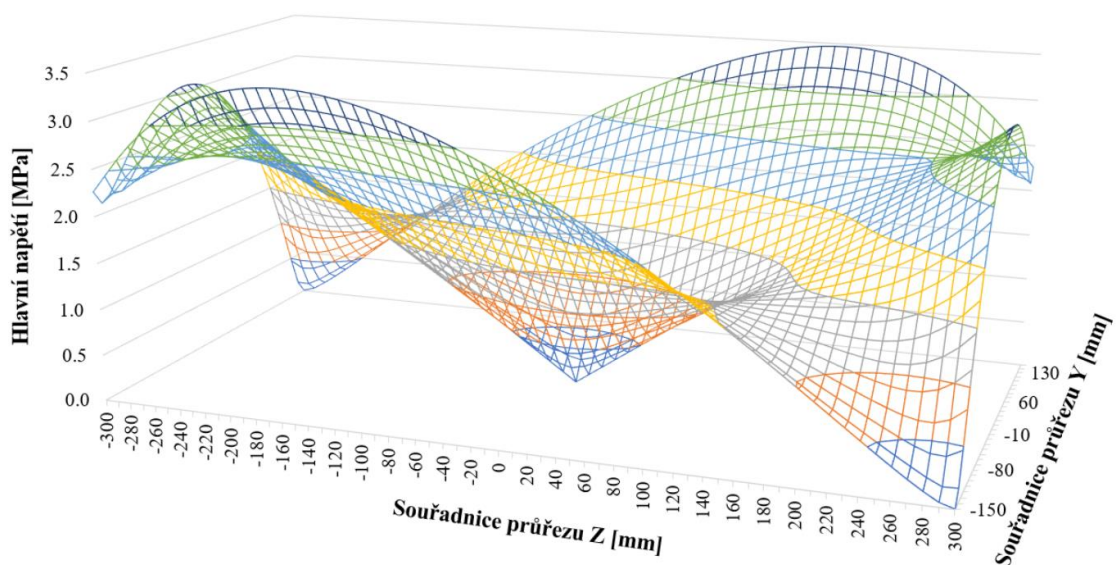
10.1 Příloha A – výsledky lineárního numerického a analytického řešení

Tato příloha doplňuje výsledky pro ostatní případy statických uspořádání lineárního analytického a numerického řešení napětí na obdélníkovém průřezu, které jsou v hlavním textu práce uvedené v kapitole 6.8.1.

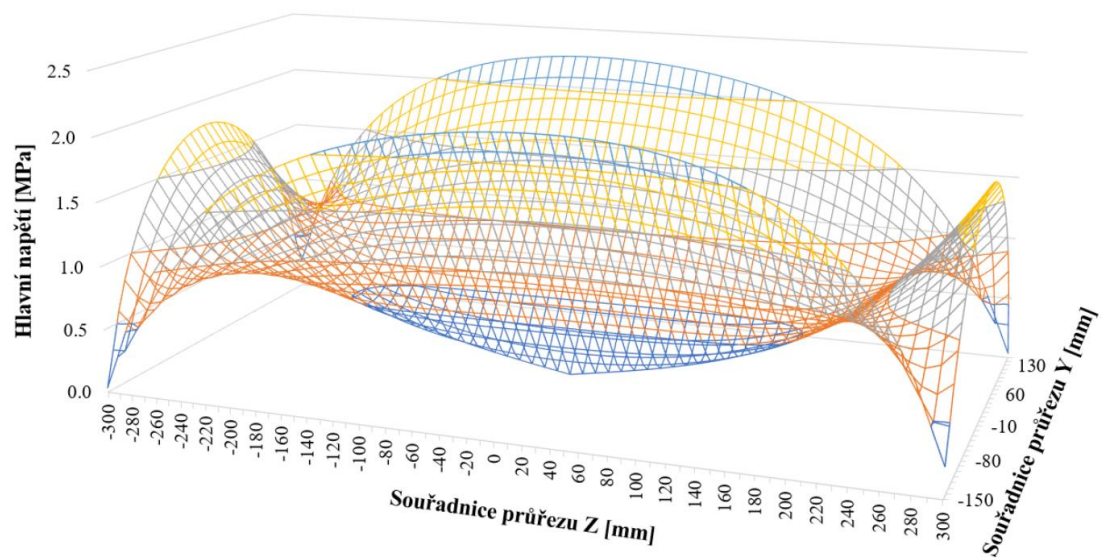
Statické uspořádání č.3:



Obrázek 10.1 - Hlavní napětí na průřezu stanovené numerickým výpočtem pro statické uspořádání č.3.

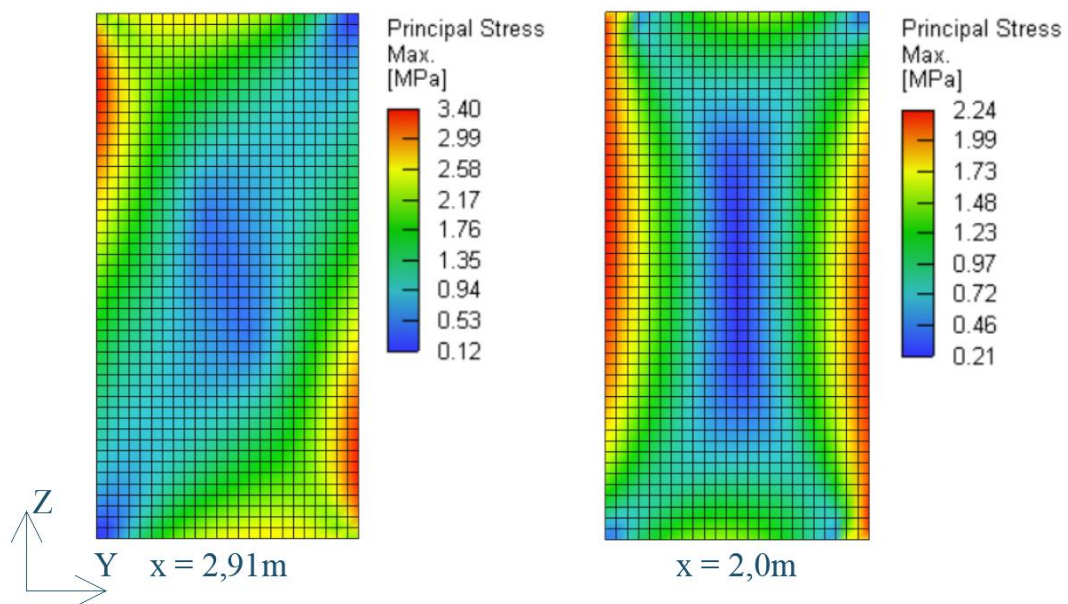


Obrázek 10.2 - Hlavní napětí ve vzdálenosti 2,91 m od kraje dle analytického výpočtu.

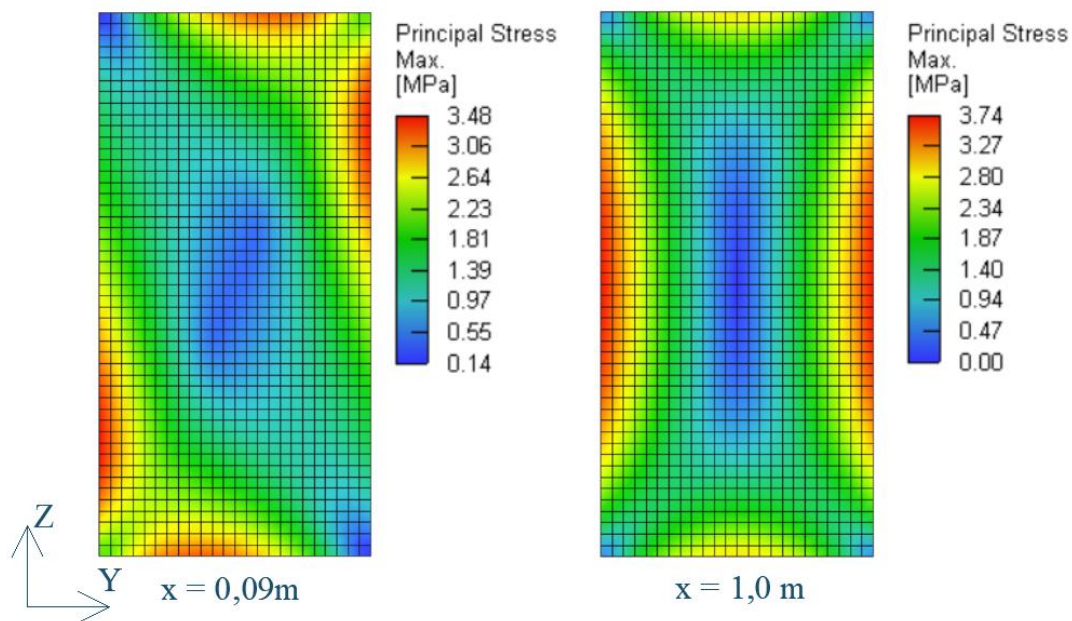


Obrázek 10.3 - Hlavní napětí ve vzdálenosti 2,0 m od vetknutí dle analytického výpočtu.

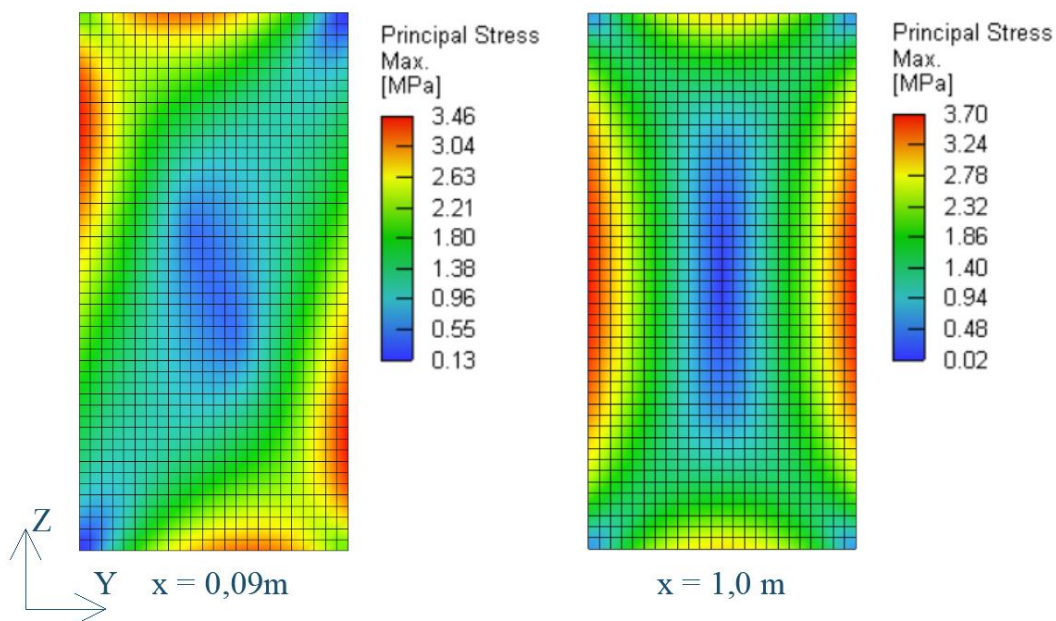
Statické uspořádání č.4:



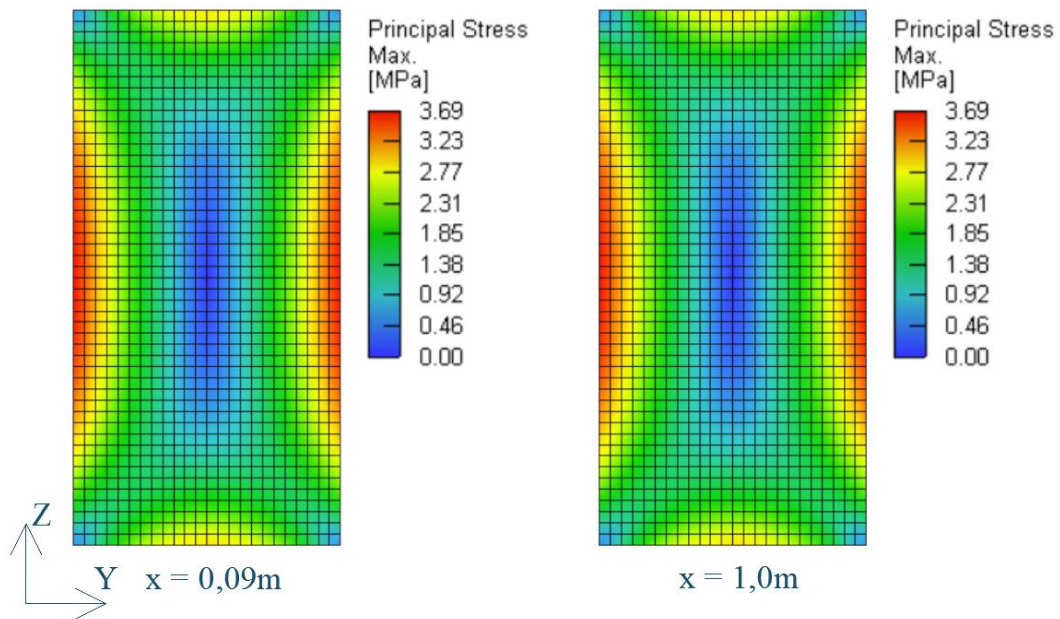
Obrázek 10.4 - Hlavní napětí na průřezu stanovené numerickým výpočtem pro statické uspořádání č.4.

Statické uspořádání č.5:

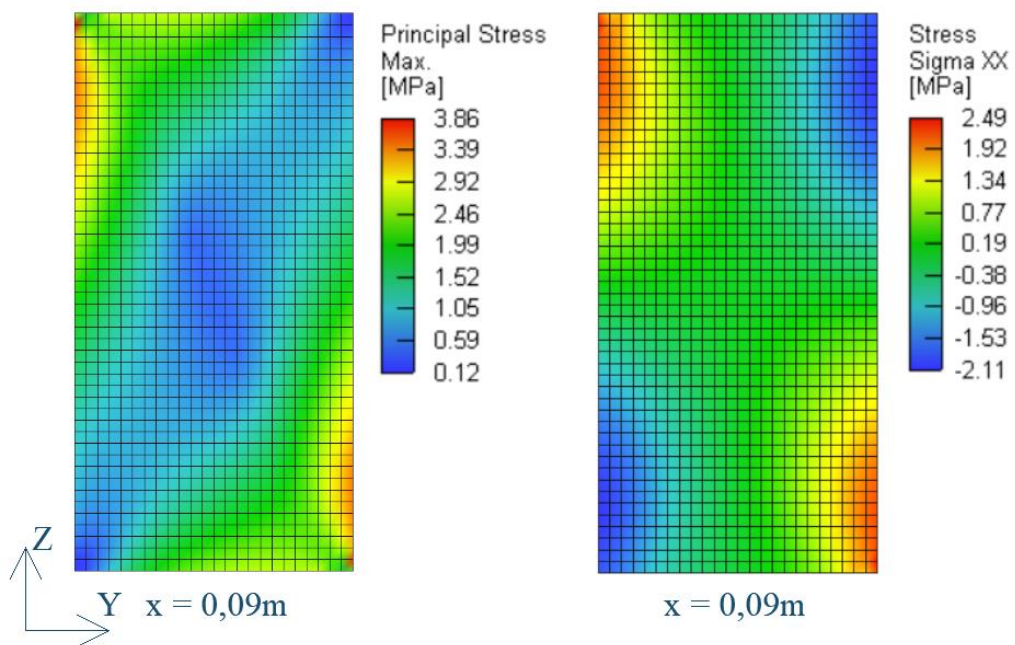
Obrázek 10.5 - Hlavní napětí na průřezu stanovené numerickým výpočtem pro statické uspořádání č.5.

Statické uspořádání č.6:

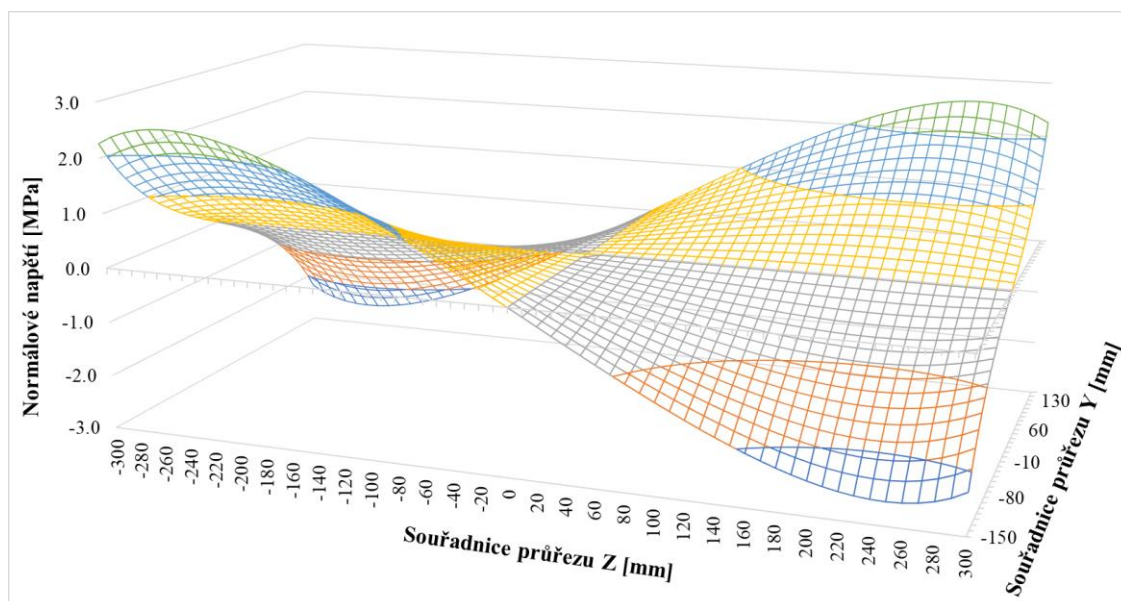
Obrázek 10.6 - Hlavní napětí na průřezu stanovené numerickým výpočtem pro statické uspořádání č.6.

Statické uspořádání č.7:

Obrázek 10.7 - Hlavní napětí na průřezu stanovené numerickým výpočtem pro statické uspořádání č.7.

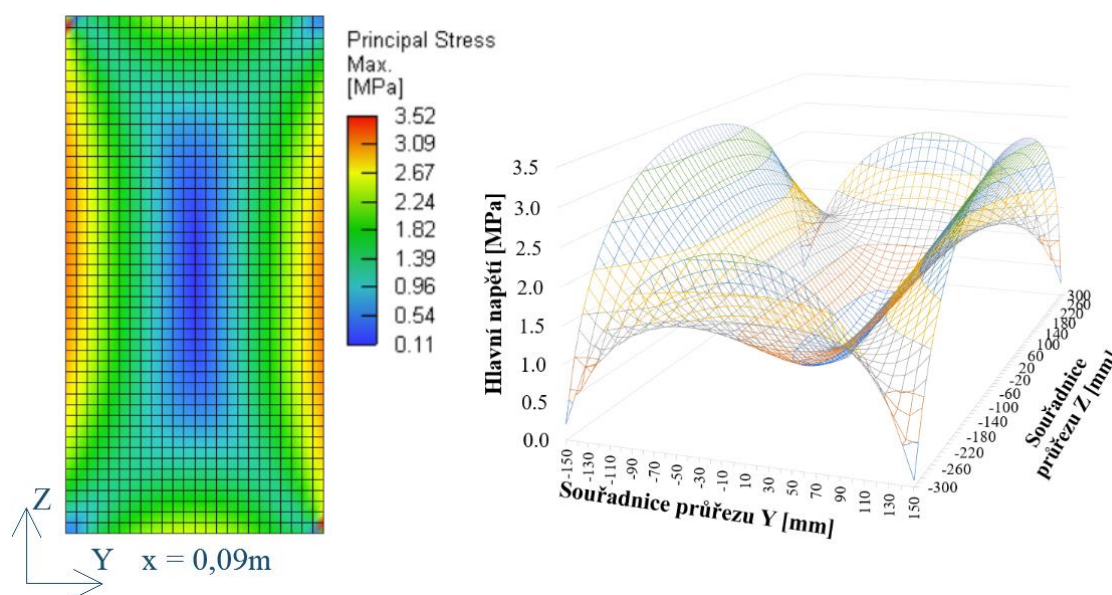
Statické uspořádání č.8:

Obrázek 10.8 - Hlavní a normálové napětí na průřezu stanovené numerickým výpočtem pro statické uspořádání č.8.

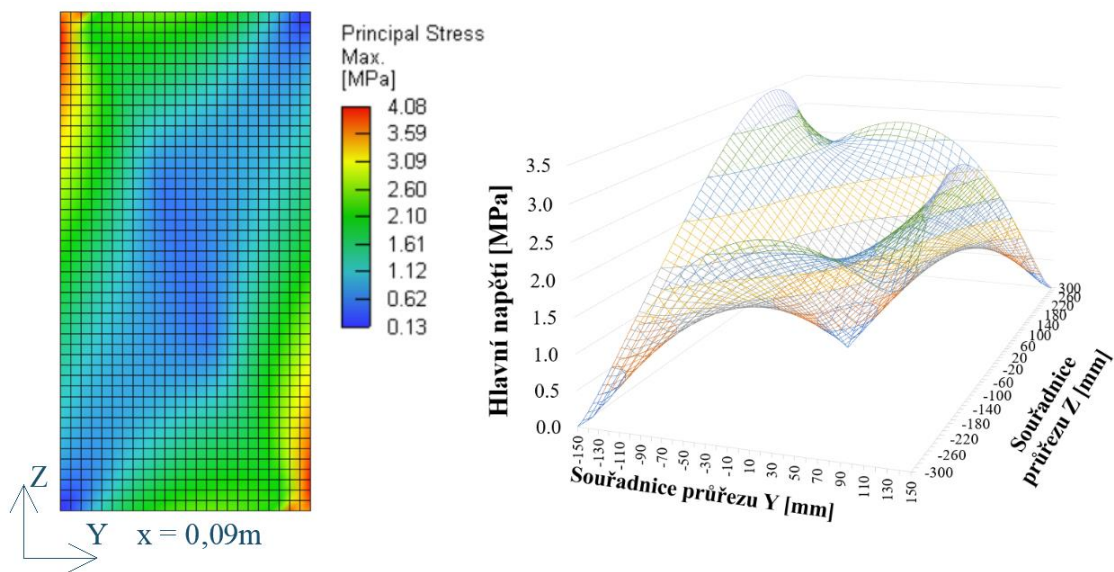


Obrázek 10.9 - Normálové napětí ve vzdálenosti 90 mm od vetknutí stanovené analyticky.

Statické uspořádání č.9:



Obrázek 10.10 - Hlavní napětí na průřezu stanovené numerickým a analytickým výpočtem pro statické uspořádání č.9.

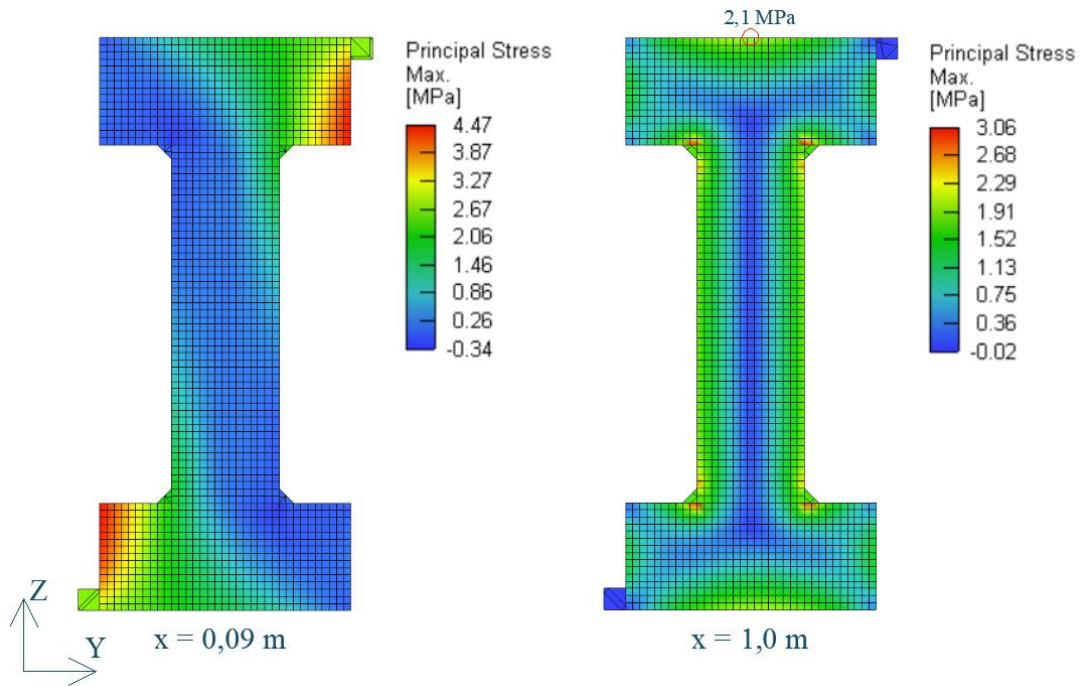
Statické uspořádání č.10:

Obrázek 10.11 - Hlavní napětí na průřezu stanovené numerickým a analytickým výpočtem pro statické uspořádání č.10.

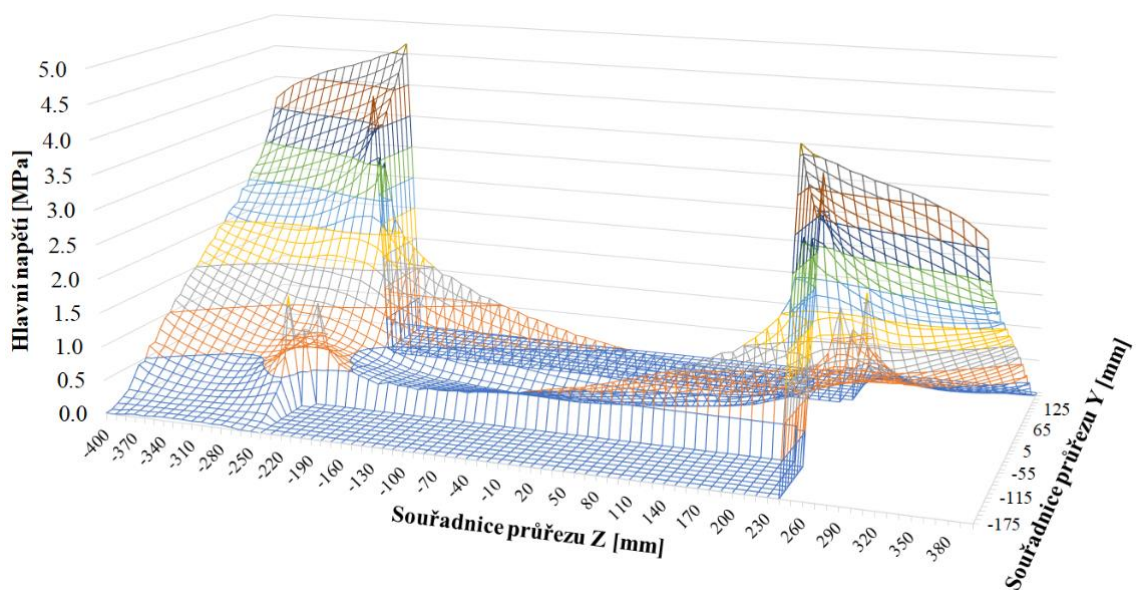
10.2 Příloha B – výsledky lineárního numerického a analytického řešení

Tato příloha doplňuje výsledky pro ostatní případy statických uspořádání lineárního analytického a numerického řešení napětí na průřezu tvaru I, které jsou v hlavním textu práce uvedené v kapitole 6.8.3.

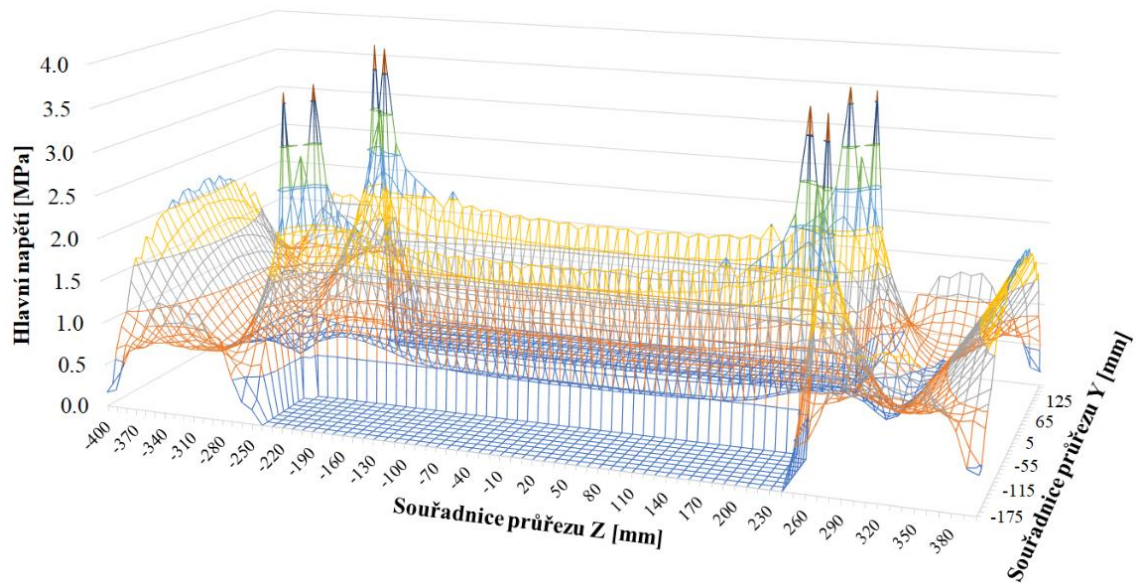
Statické uspořádání č.13:



Obrázek 10.12 - Hlavní napětí na průřezu stanovené numerickým výpočtem pro statické uspořádání č.13.

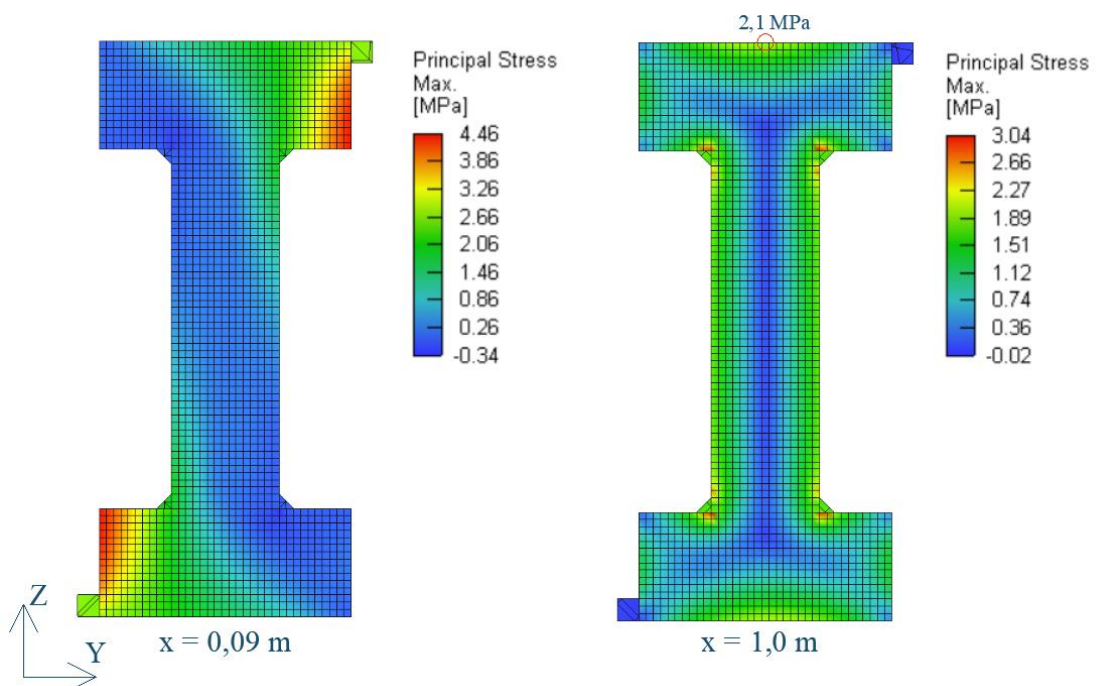


Obrázek 10.13 - Hlavní napětí ve vzdálenosti 90 mm od kraje dle analytického výpočtu.

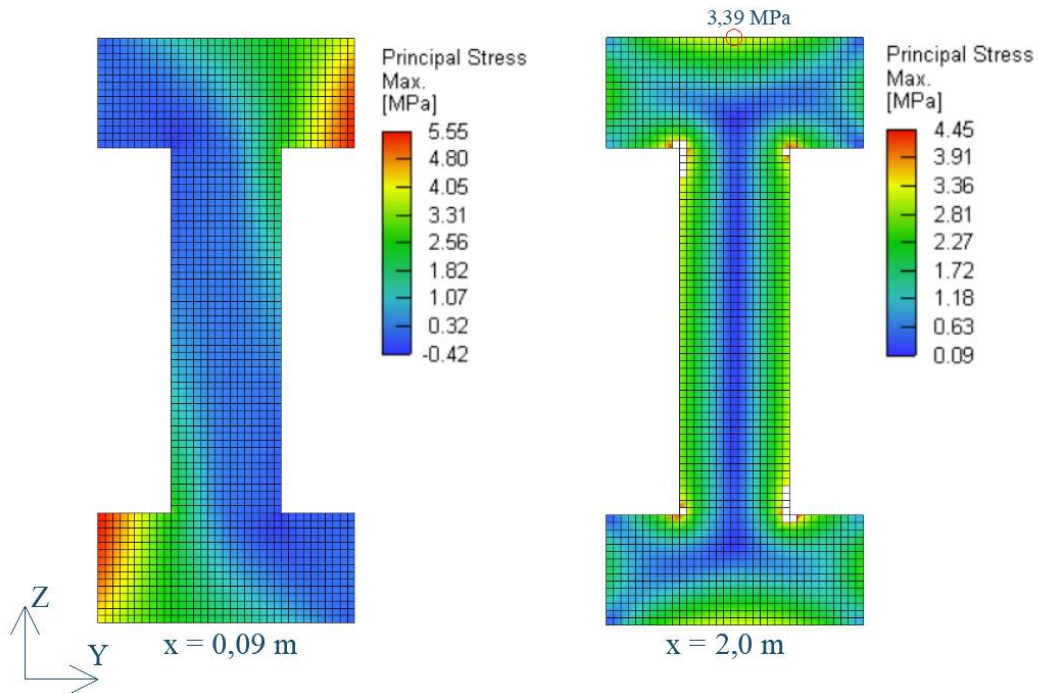


Obrázek 10.14 - Hlavní napětí ve vzdálenosti 1,0 m od kraje dle analytického výpočtu.

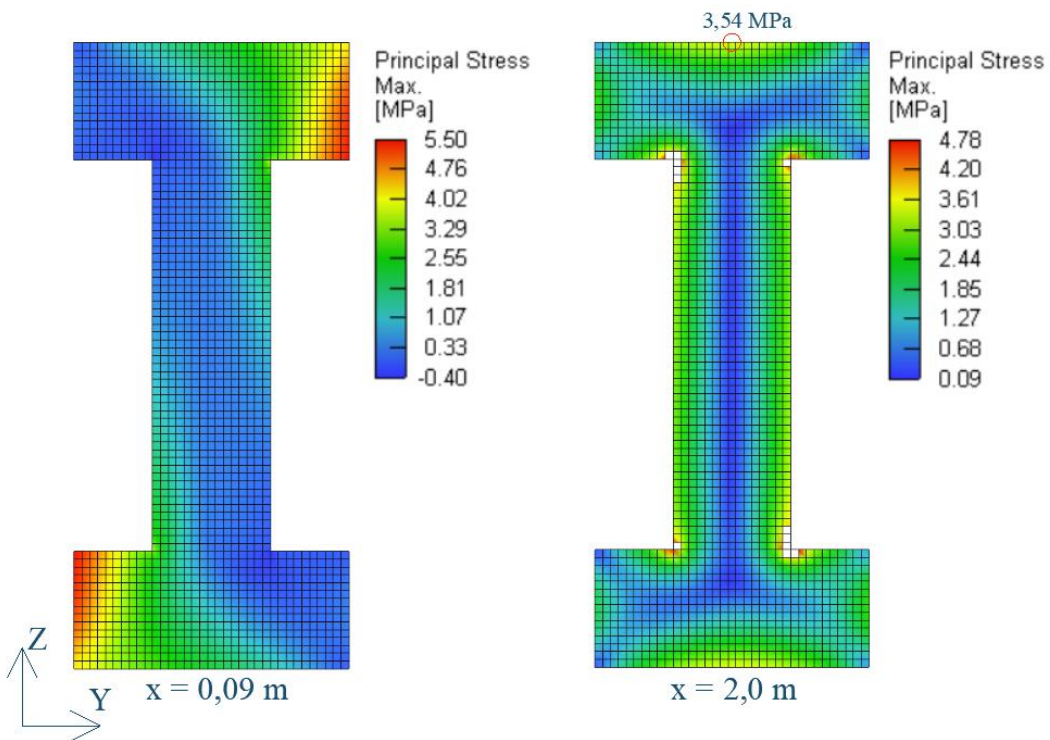
Statické uspořádání č.14:



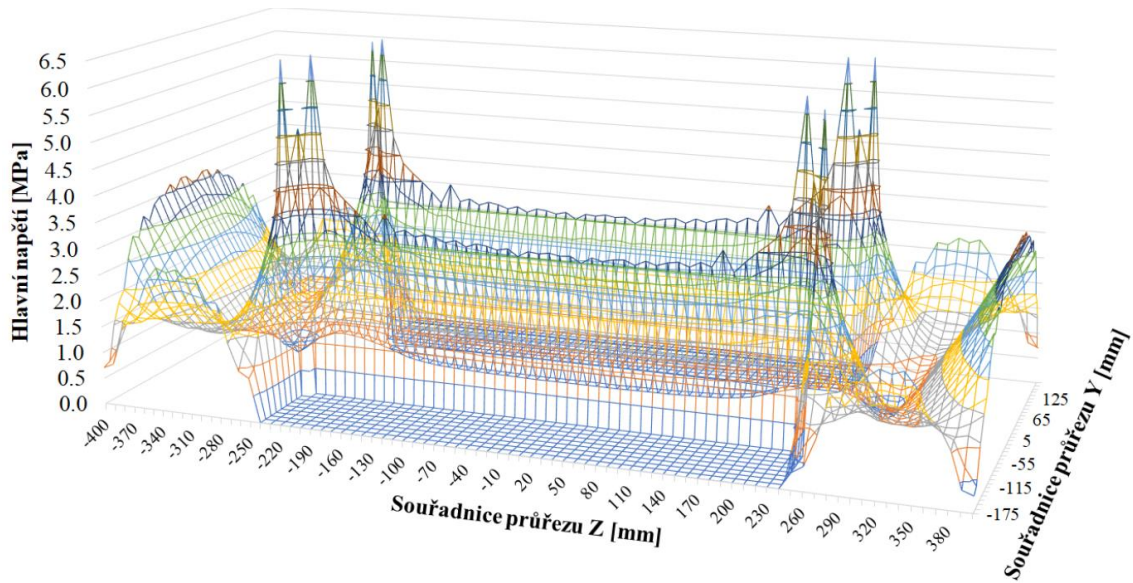
Obrázek 10.15 - Hlavní napětí na průřezu stanovené numerickým výpočtem pro statické uspořádání č.14.

Statické uspořádání č.15:

Obrázek 10.16 - Hlavní napětí na průřezu stanovené numerickým výpočtem pro statické uspořádání č.15.

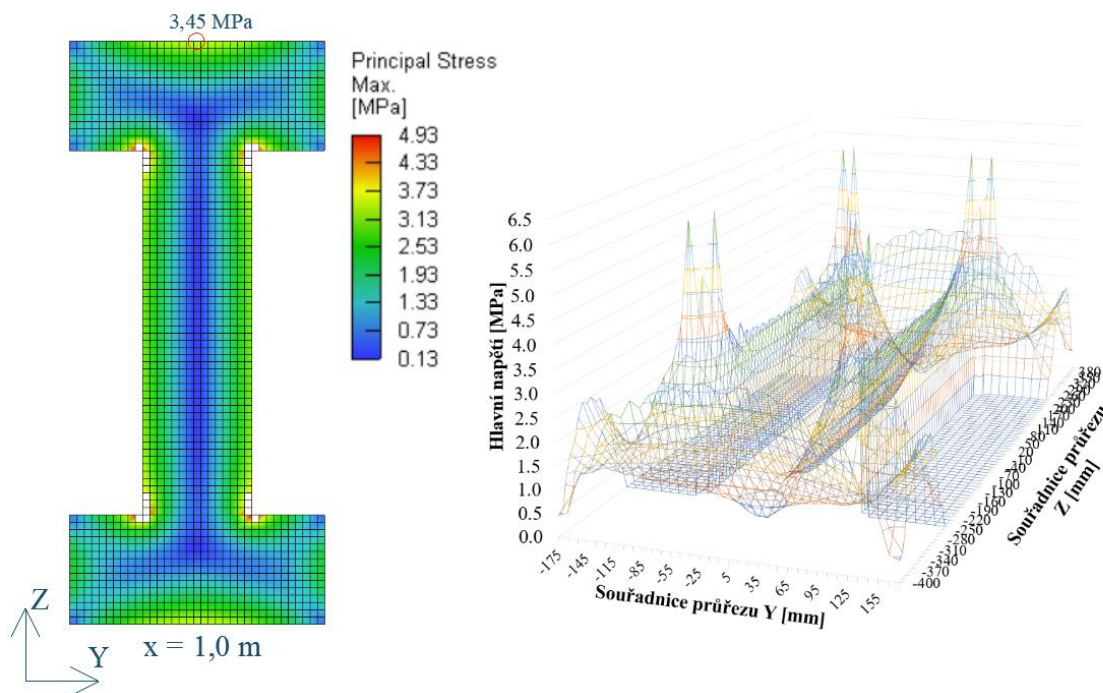
Statické uspořádání č.16:

Obrázek 10.17 - Hlavní napětí na průřezu stanovené numerickým výpočtem pro statické uspořádání č.16.

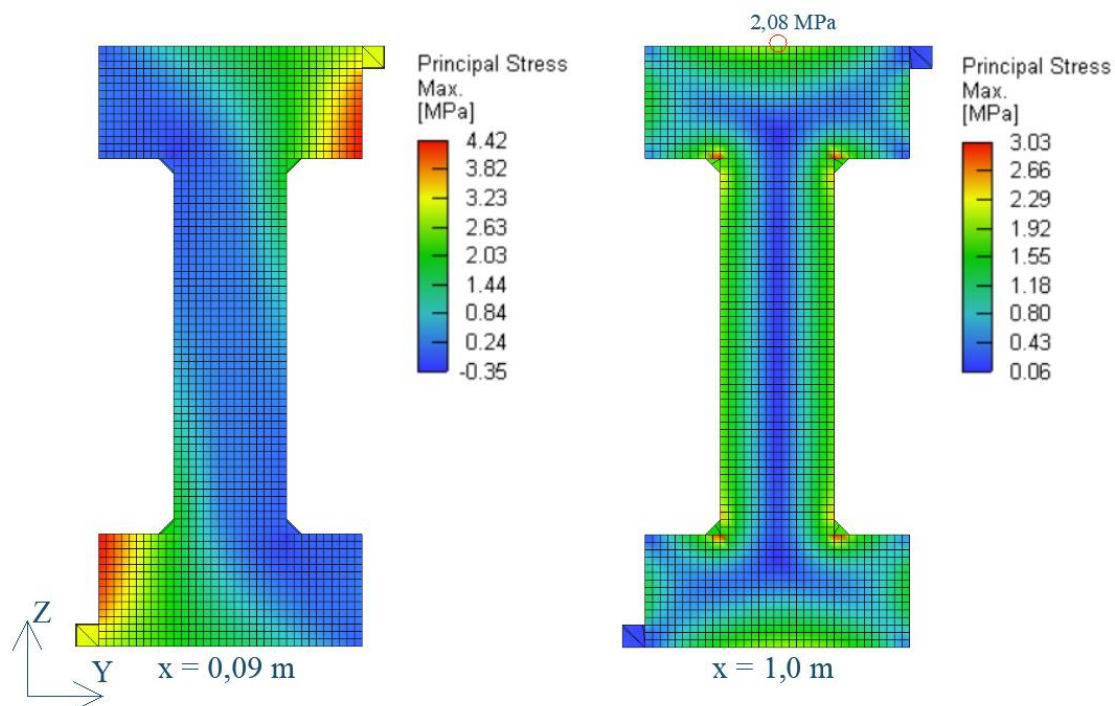


Obrázek 10.18 - Hlavní napětí ve vzdálenosti 2,0 m od kraje dle analytického výpočtu.

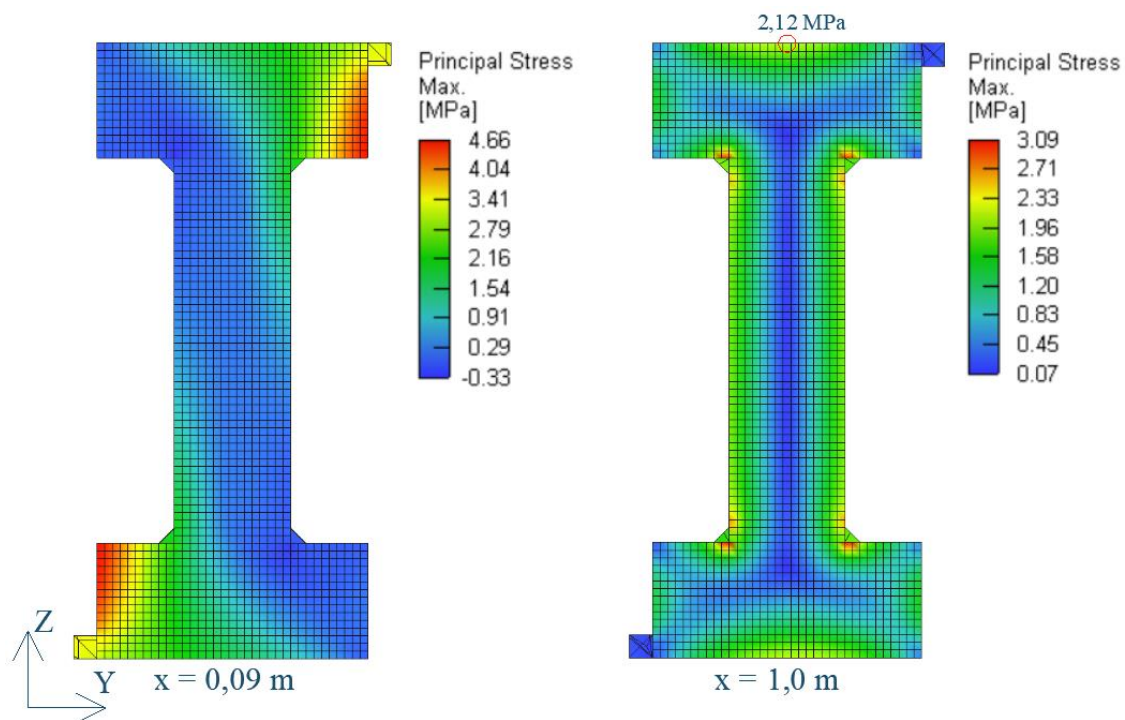
Statické uspořádání č.17:



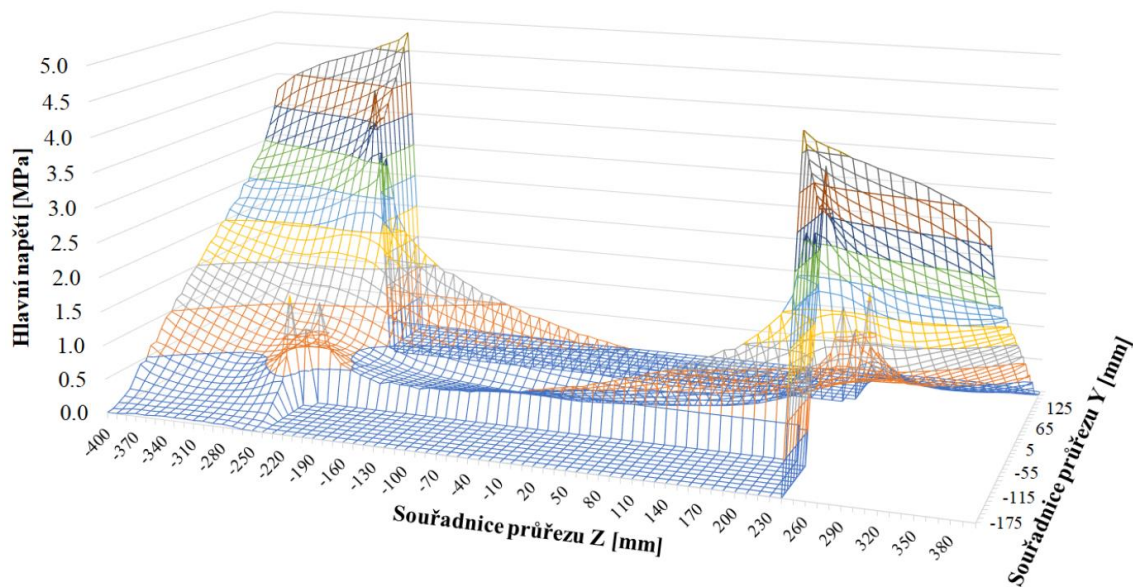
Obrázek 10.19 - Hlavní napětí na průřezu stanovené numerickým a analytickým výpočtem pro statické uspořádání č.17.

Statické uspořádání č.18:

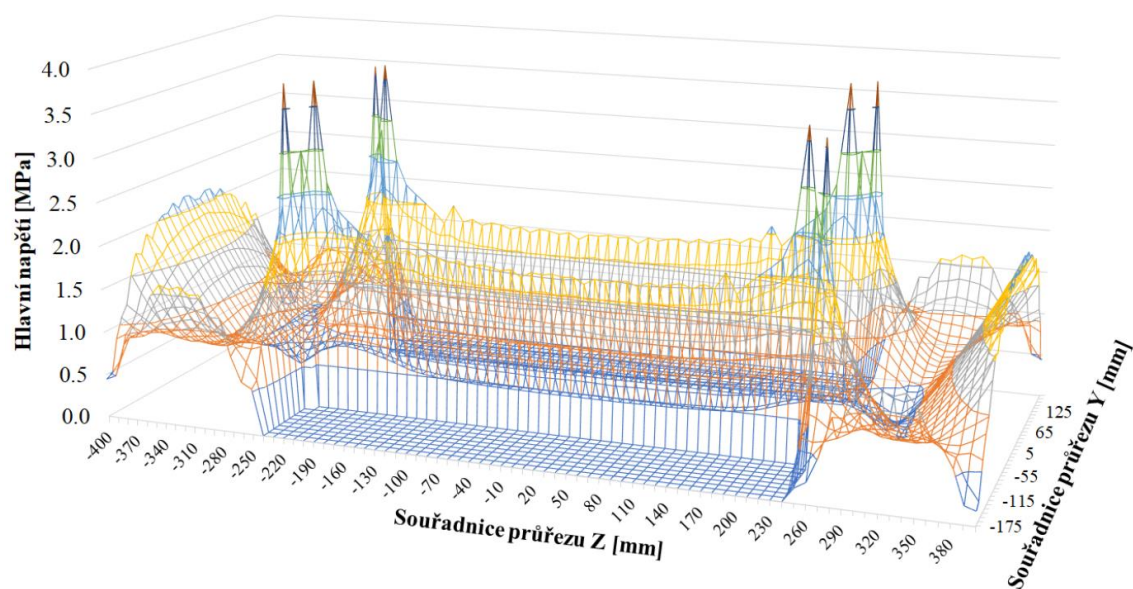
Obrázek 10.20 - Hlavní napětí na průřezu stanovené numerickým výpočtem pro statické uspořádání č.18.

Statické uspořádání č.19:

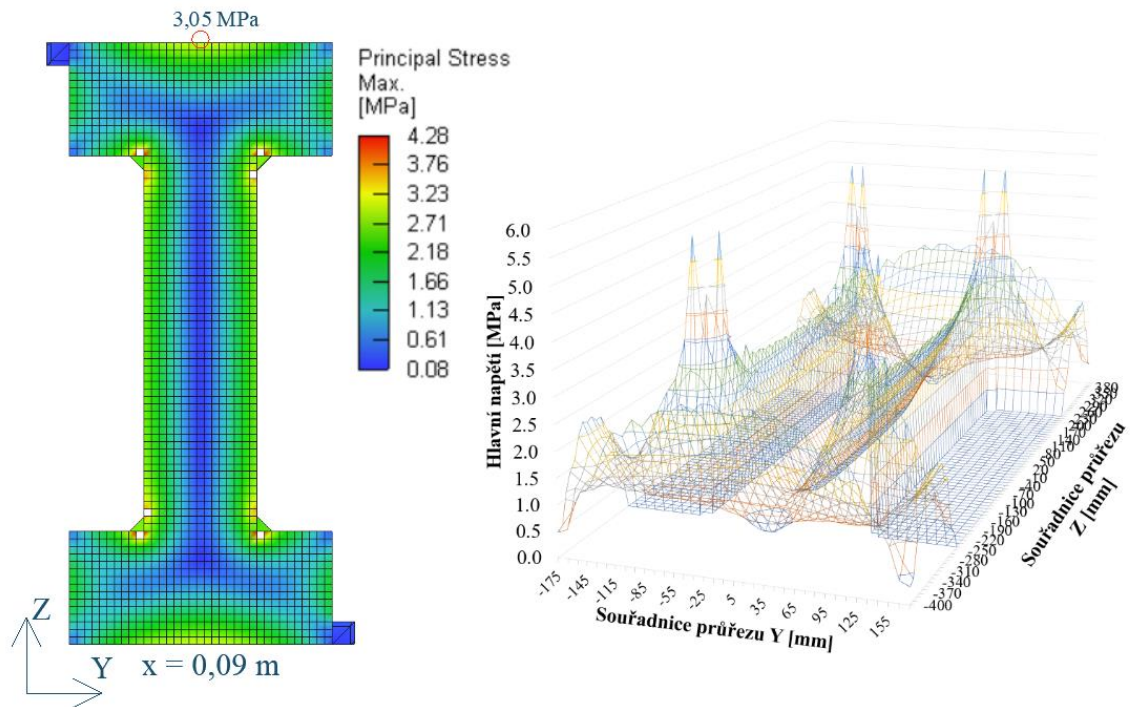
Obrázek 10.21 - Hlavní napětí na průřezu stanovené numerickým výpočtem pro statické uspořádání č.19.



Obrázek 10.22 - Hlavní napětí ve vzdálenosti 90 mm od kraje dle analytického výpočtu.



Obrázek 10.23 - Hlavní napětí ve vzdálenosti 1,0 m od kraje dle analytického výpočtu.

Statické uspořádání č.20:

Obrázek 10.24 - Hlavní napětí na průřezu stanovené numerickým a analytickým výpočtem pro statické uspořádání č.20.