

**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE**

**FAKULTA STAVEBNÍ**

**OBOR KONSTRUKCE POZEMNÍCH STAVEB**

**KATEDRA BETONOVÝCH A ZDĚNÝCH KONSTRUKCÍ**



**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

**Nelineární analýza štíhlých a velmi štíhlých  
železobetonových prutů**

**Nonlinear analysis of slender and very slender  
reinforced concrete members**

Vypracoval: Bc. Lukáš Koruňák

Vedoucí práce: doc. Ing. Lukáš Vráblík, Ph.D.

Ing. Jan Vesecký

Praha 2023

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

### I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: Koruňák

Jméno: Lukáš

Osobní číslo: 477131

Zadávající katedra: K133 - Katedra betonových a zděných konstrukcí

Studijní program: Stavební inženýrství

Studijní obor/specializace: Konstrukce pozemních staveb

### II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce: Nelineární analýza štíhlých a velmi štíhlých železobetonových prutů

Název diplomové práce anglicky: Nonlinear analysis of slender and very slender reinforced concrete members

Pokyny pro vypracování:

V rámci závěrečné práce se diplomant zaměří na problematiku štíhlých a velmi štíhlých železobetonových prutových prvků. Důraz bude kladen především na numerickou analýzu zohledňující geometrické i materiálové nelinearity, aplikovanou na typické případy konstrukčního uspořádání a okrajových podmínek.

Práce by měla obsahovat především následující části:

- příklady realizovaných staveb se štíhlými nebo velmi štíhlými železobetonovými prutovými prvky
- rešerše na téma: teorie štíhlých prutů, ztráta stability, imperfekce a nelinearity
- popis současných výpočetních postupů pro štíhlé a velmi štíhlé železobetonové prutové prvky
- aplikace rešerše k analýze štíhlých a velmi štíhlých železobetonových prutových prvků pomocí vhodných analytických a numerických výpočetních metod včetně validace na experimentálních výsledcích z literatury
- porovnání výsledků a shrnutí hlavních poznatků

Seznam doporučené literatury:

Timoshenko, S. P. & Gere, J. M. (1961), Theory of Elastic Stability  
 Bažant, Z. P. & Cedolin, L. (2010), Stability of Structures - Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories  
 Barrera, A. C., Bonet, J. L., Romero M. L. & Miguel P. F. (2011) Experimental tests of slender reinforced concrete columns under combined axial load and lateral force  
 Aboukifa, M. & Moustafa M. A. (2022) Structural and buckling behavior of full-scale slender UHPC columns  
 Hrinda, G. A. (2010), Snap-Through Instability Patterns in Truss Structures  
 Platná znění normových předpisů (Eurokód 2, Model Code, ACI 318 apod.)  
 Manuály a uživatelské příručky k použitým programům

Jméno vedoucího diplomové práce: doc. Ing. Lukáš Vráblík, PhD., FEng.

Datum zadání diplomové práce: 27. září 2022

Termín odevzdání DP v IS KOS: 9. ledna 2023

*Údaj uveďte v souladu s datem v časovém plánu příslušného ak. roku*

Podpis vedoucího práce

Podpis vedoucího katedry

### III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

*Beru na vědomí, že jsem povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je nutné uvést v diplomové práci a při citování postupovat v souladu s metodickou příručkou ČVUT „Jak psát vysokoškolské závěrečné práce“ a metodickým pokynem ČVUT „O dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací“.*

27. 9. 2022

Datum převzetí zadání

Podpis studenta(ky)

## **PROHLÁŠENÍ**

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze dne 9.1.2023

.....

Lukáš Koruňák

## PODĚKOVÁNÍ

Tato práce by nemohla vzniknout nebýt lidí v mém okolí, kteří se ať už přímo nebo nepřímo podíleli na jejím vzniku.

Nejvíce bych chtěl poděkovat svým vedoucím, a to především Janovi Veseckému, který mi věnoval velké množství času ať už během konzultací nebo i mimo ně. Na moje dotazy odpovídal neúnavně ve dne a někdy i v noci. Jeho pohledy na věc byly velkou inspirací a vážím si jeho trpělivosti a množství hodin v jeho volném čase, které věnoval mně a této práci.

Děkuji panu Lukáši Vráblíkovi, který mě dokázal nasměrovat jeho nebývale velkou odborností v oboru betonových staveb několikrát i velmi zajímavými směry, byť ne vždy se mi podařilo tyto cesty dokončit.

Dále bych chtěl poděkovat panu Vítovi Šmilauerovi z katedry mechaniky. Jeho pohledy na problémy byly pro tuto práci velmi trefné a také pozměnily směr, kterým tato práce směřovala.

Byť se na této práci přímo nepodíleli, chtěl bych velmi poděkovat své rodině. Bez jejich pomoci a podpory bych jí nedokázal dokončit. Vím, že ne vždy to bylo jednoduché, ale o to víc si jejich podpory cením.

## **ABSTRAKT**

Štíhlé a velmi štíhlé železobetonové sloupy jsou velmi používaným typem konstrukčního prvku. Používají se jak v pozemních stavbách, tak velkou měrou u mostů. Vzhledem ke snaze snižovat náklady a šetřit materiálem je možné, že se postupně budou štíhlé prvky stále více uplatňovat. V soustavě norem ČSN EN 1992 ale není uveden žádný analytický postup, který by dostatečně přesně popisoval chování především velmi štíhlých sloupů.

V první části této práce jsou popsány základní teoretické principy o fungování štíhlých prvků, tedy zejména o stabilitě tlačných prutů a nelinearitách. Dále jsou uvedené postupy pro analýzu štíhlých a velmi štíhlých prvků, které nabízí Eurokód 2 a odborná literatura.

Praktická část je věnována nelineárnímu numerickému modelování a parametrické studii, která zkoumá vliv stupně vyztužení a počáteční excentricity osového zatížení, působící na sloup. Nakonec jsou tyto výsledky porovnány s dalšími a zjednodušenými metodami analýzy.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

štíhlý sloup, velmi štíhlý sloup, železobeton, únosnost, materiálová nelinearita, geometrická nelinearita, vzpěr, stabilita, numerický model, Eurokód 2

## **ABSTRACT**

Slender and very slender reinforced concrete columns are a very commonly used type of structural member. They are used both in civil engineering and to a large extent in bridges. Due to the desire to reduce costs and save material, it is possible that they will gradually become increasingly used. However, there is no analytical procedure in the Eurocode 2 standard that describes the behavior of particularly very slender columns with sufficient precision.

The first part of this work describes the basic theoretical principles about the behavior of slender elements, i.e. mainly buckling stability and nonlinearities. The procedures for the analysis of slender and very slender elements offered by Eurocode 2 and scientific literature are presented.

The practical part is dedicated to nonlinear numerical modelling and a parametric study investigating the influence of the amount of reinforcement and the initial eccentricity of the acting axial. Finally, these results are compared with other and simplified methods of analysis.

## **KEY WORDS**

Slender column, very slender column, reinforced concrete, load-bearing capacity, material nonlinearity, geometrical nonlinearity, buckling, stability, numerical model, Eurocode 2



# OBSAH

1	Úvod.....	8
1.1	Motivace a příklady realizací .....	8
1.2	Cíle diplomové práce .....	10
1.3	Neobsažená související problematika .....	10
2	Štíhlé tlačené pruty.....	11
2.1	Lineární stabilita prutů .....	11
2.1.1	Eulerovo kritické břemeno .....	12
2.1.2	Imperfekce.....	13
2.1.3	Teorie I. řádu.....	14
2.1.4	Únosnost lineárně pružných tlačených prutů .....	14
2.2	Nelineární stabilita prutů.....	16
2.2.1	Geometrické nelinearity – teorie II. řádu .....	16
2.2.2	Geometrické nelinearity –velká posunutí.....	17
2.2.3	Materiálové (fyzikální) nelinearity.....	19
2.2.4	Nelineární únosnost tlačených prutů .....	24
3	Štíhlé železobetonové pruty – přehled výpočetních postupů .....	25
3.1	Normové postupy .....	25
3.1.1	Materiálové modely .....	25
3.1.2	Imperfekce.....	27
3.1.3	Výpočetní postupy pro analýzu štíhlých sloupů.....	28
3.1.4	Zohlednění deformací II. řádu.....	29
3.2	Numerické výpočty .....	29
3.3	Poloanalytické postupy .....	30
4	Praktická část .....	33
4.1	Validace .....	33
4.1.1	Popis testovaných sloupů .....	33
4.1.2	Zatěžování .....	35
4.1.3	Numerický model.....	37
4.1.4	Vyhodnocení validace .....	42
4.2	Studie citlivosti.....	42
4.2.1	Vliv velikosti konečných prvků .....	46
4.2.2	Vliv okrajových podmínek (podepření) .....	49
4.2.3	Přesné parametry konečného nastavení studie citlivosti .....	50
4.3	Parametrická studie .....	52
4.3.1	Referenční model .....	52
4.3.2	Proměnné parametry studie.....	52
4.3.3	Výsledky parametrické studie .....	53
4.3.4	Vliv dotvarování.....	61

4.4	Alternativní a zjednodušené metody analýzy.....	64
4.4.1	Zjednodušené metody dle ČSN EN 1992-1-1 .....	64
4.4.2	Výpočet v programu IDEA Statica, modul Member.....	66
4.5	Porovnání výsledků.....	67
4.5.1	ECOV – estimate of coefficient of variation.....	68
4.5.2	ČSN EN 1992-2 .....	68
4.5.3	Výpočet únosnosti z návrhových vlastností materiálů .....	69
4.5.4	Porovnání výsledků.....	69
5	Závěr .....	78
5.1	Souhrn nejdůležitějších poznatků.....	79
5.2	Zhodnocení splnění zadání.....	84
5.3	Náměty na další výzkum .....	84
6	Příloha 1 .....	85
7	Příloha 2 .....	87
8	Literatura .....	89



# 1 ÚVOD

Použití štíhlých a velmi štíhlých tlačných prutů, tedy nejčastěji sloupů a pilířů, v moderním stavitelství je stále běžnější. Často je vedeno snahou o vytvoření co nejotevřenější dispozice budov. Čím dál tím více se stávají populární velké prosklené fasády, kde je snaha o zmenšení nebo ideálně kompletní eliminaci nosných prvků po obvodu stavby. Pro reprezentativní vstupní foyer staveb je zase typická velká výška těchto prostor. K tomuto efektu dále přispívá snaha o minimalizaci nákladů. Ta se dá do návrhu konstrukce aplikovat právě snížením množství materiálu, které je použito. Kombinací všech výše zmíněných faktorů dochází k nutnosti použití často až velmi štíhlých sloupů.

Zvýšením štíhlosti železobetonových sloupů pak přímo vede k více výrazným vlivům nelinearit. Geometrická nelinearita je u těchto konstrukčních prvků již nezanedbatelná, jako tomu je u masivních sloupů. Nelineárně se zvyšující deformace vlivem ohýbání sloupu a k tomu uvážení nelineárního chování materiálu nedokážou běžně zažité lineární postupy zohlednit.

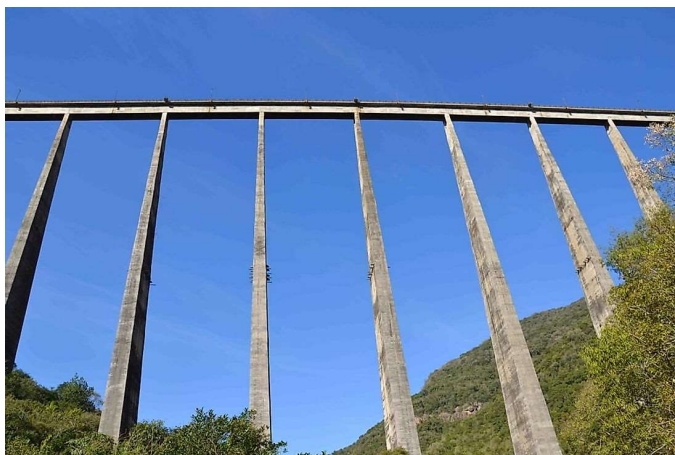
V následujících kapitolách jsou představeny faktory, které je nutné zohlednit při analýze nebo návrhu těchto prvků. Dále se práce zaměřuje na konkrétní metody a postupy, pomocí kterých lze tento typ nosných prvků navrhnout a posoudit. Těmi jsou zjednodušené metody uvedené v Eurokódu 2 a nelineární výpočet v modulu Member programu IDEA Statica.

V praktické části je tato práce zaměřena na analýzu tlačných železobetonových prutů. Srovnává náročnost a kvalitu výsledků jednotlivých typů výpočtů, zkoumá vlivy dílčích parametrů na celkovém chování a následně hodnotí vhodnost použití uvažovaných postupů pro statickou analýzu, návrh a posouzení.

## 1.1 MOTIVACE A PŘÍKLADY REALIZACÍ

Štíhlé železobetonové pruty, zejména sloupy, mají pak v moderním stavebnictví velký význam. Díky moderním možnostem analýzy nosných prvků se otevřely nové možnosti i pro architekty, kteří si tento konstrukční prvek oblíbili. Štíhlost prvku je definovaná jeho průřezem, délkou a způsobem podepření. Zjednodušeně řečeno je štíhlý sloup takový, který má malé rozměry jeho průřezu a je dlouhý.

Kromě pozemních staveb se štíhlé sloupy (pilíře) často využívají i u mostů. Na Obr. 1.1 až Obr. 1.3 jsou zobrazeny příklady použití štíhlých sloupů a pilířů u pozemních staveb i u mostů.



Obr. 1.1 - vlevo: Univerzitní knihovna Magdeburg, Německo, převzato [23]  
vpravo: Viaduto 13, Brazílie, převzato [24]



Obr. 1.2 - vlevo: ocelové štíhlé sloupy multifunkční aula Gong, Ostrava  
vpravo: štíhlý sloup v OC Palladium, Praha, ČR, převzato [25]



Obr. 1.3 – vlevo: San Marcos bridge, Xicotepec de Juárez, Puebla, Mexico, převzato z [18]  
vpravo: FORUM Liberec, Liberec, ČR [foto: Ing. Jan Vesecký]

## 1.2 CÍLE DIPLOMOVÉ PRÁCE

Tato práce má za cíl představit obecné fungování štíhlých a velmi štíhlých železobetonových tlačенých prutů a ukázat vliv několika klíčových parametrů na jejich chování. Dalším cílem je představení pokročilého numerického modelu pro výpočet těchto konstrukčních prvků a jeho následná validace pomocí existujícího experimentu z literatury. V poslední řadě jsou dosažené výsledky porovnány s další možnými přístupy k analýze štíhlých a velmi štíhlých prvků.

## 1.3 NEOBSAŽENÁ SOUVISEJÍCÍ PROBLEMATIKA

Tato práce má za cíl obecné přiblížení problematiky dostředně tlačенých štíhlých a velmi štíhlých železobetonových sloupů a určení vlivu některých vybraných parametrů na jejich únosnost. Ačkoliv by to bylo zajímavé, není cílem zohlednit všechny parametry, které na jejich chování mají vliv, jako například:

- Podrobné zkoumání vlivu dotvarování.
- Chování sloupu s jiným než obdélníkovým průřezem (např. kruhovým).
- Požární odolnost a chování těchto konstrukcí za zvýšené teploty.
- Dynamická analýza štíhlých a velmi štíhlých železobetonových sloupů.
- Vliv příčné síly, příp. koncových momentů

## 2 ŠTÍHLÉ TLAČENÉ PRUTY

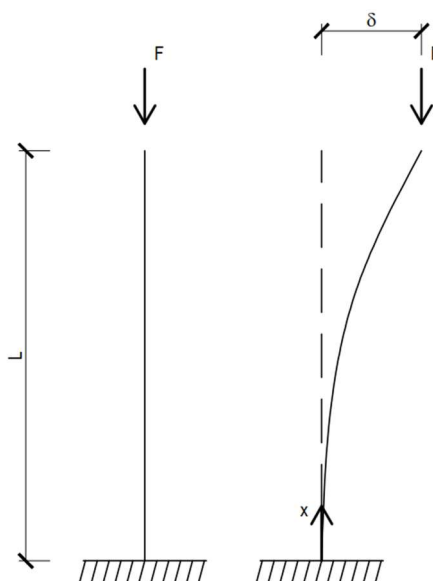
Ke kolapsu tlačných prutů může dojít dvěma způsoby – prvním je dosažení únosnosti průřezu (tj. vyčerpání pevnosti materiálu, resp. materiálů, které prut tvoří) a druhým je dosažení kritického břemene, při kterém konstrukční prvek ztratí stabilitu vlivem vzpěru (náhlým vybočením kolmo na podélnou osu prvku).

Základním parametrem, který popisuje vzpěrnou únosnost tlačného prutu, je Eulerovo kritické břemeno, které udává, jakou maximální normálovou sílu je lineárně elastický tlačný prut schopný přenést, než ztratí stabilitu a vybočí.

### 2.1 LINEÁRNÍ STABILITA PRUTŮ

Uvažujme ideálně pružný a ideálně přímý prut s neproměnným průřezem (tzv. prizmatický prut), který je centricky zatížen silou  $F$  v hlavě a je vetknutý v patě. Z tohoto statického systému lze odvodit závěry i pro ostatní způsoby uložení. Při zvyšující se síle  $F$ , která je ale menší než kritická hodnota, se prut stlačuje, ale protože je ideálně přímý, nedojde u něj k vybočení. Prut je ve stavu stabilní rovnováhy – to znamená, že i po vnějším příčném impulzu, který prut prohne, se prut vrací do svého původního ideálně přímého tvaru. [1]

Při zvyšující se síle  $F$  ale nastane stav, kdy se prut dostane do stavu tzv. labilní rovnováhy. Působení i malého vnějšího příčného impulzu vyvolá výchylku, která začne narůstat nade všechny meze (teoreticky do nekonečna). Nejmenší síla  $F$ , při které se konstrukce dostane do tohoto stavu labilní rovnováhy, se nazývá kritické břemeno  $F_{cr}$ . [1]



Obr. 2.1 - zatížení a tvar vybočení konzoly

### 2.1.1 Eulerovo kritické břemeno

Velikost kritické síly je závislá na materiálu, ze kterého je prut vyroben (na jeho modulu pružnosti  $E$ ), geometrii průřezu (momentu setrvačnosti  $I$ ) a vzpěrné délce prutu  $l_0$ . Vztah pro kritické břemeno je odvozen z diferenciální rovnice průhybové čáry.

$$EIw'' = -M = -Fw \quad (2.1)$$

$$EIw'' + Fw = 0 \quad (2.2)$$

$I$  je moment setrvačnosti průřezu ve směru menší štíhlosti prutu (viz dále),  $E$  je modul pružnosti materiálu a  $w''$  je druhá derivace průhybu (tedy křivost průřezu).  $M$  je pak ohybový moment,  $F$  osová síla a  $w$  průhyb.

Okrajové podmínky pro konzolu jsou

$$w(0) = 0 \quad w'(0) = 0 \quad (2.3)$$

Obecným řešením této rovnice je

$$w(x) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}}x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{F}{EI}}x\right) \quad (2.4)$$

Po dosazení okrajových podmínek jsou dopočítány konstanty  $C_1$  a  $C_2$ .

$$C_1 = 0 \quad \text{nebo} \quad \sin\sqrt{\frac{F}{EI}} = 0 \quad (2.5)$$

$$C_2 = 0 \quad (2.6)$$

Pro  $C_1 = 0$  vzniká pouze triviální řešení diferenciální rovnice, proto tato možnost dále není řešena. Pro případ druhého řešení:

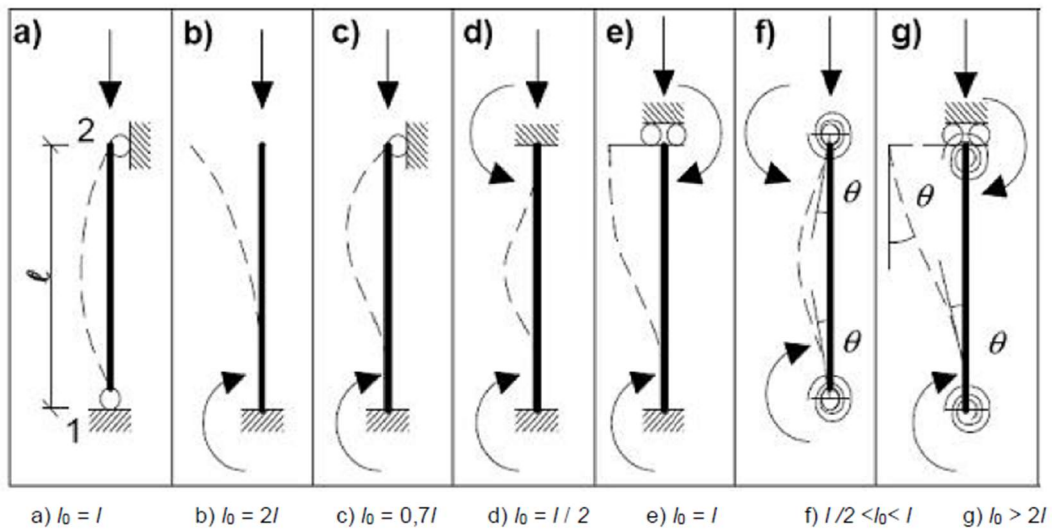
$$\sqrt{\frac{F}{EI}} 2L = n\pi \quad (2.7)$$

$$F_{cr,n} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{2L}$$

$n$  je libovolné přirozené číslo. Teoreticky existuje nekonečně mnoho kritických břemen  $F_{cr,n}$ , kterým odpovídá nekonečně mnoho tvarů vybočení. V praxi ale tlačené pruty vždy vybočí v 1. vlastním tvaru, kterému odpovídá nejmenší kritická síla pro  $n = 1$ , tedy:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} \quad (2.8)$$

Při uvažování jiných způsobů podepření (okrajových podmínek) je rozdíl oproti vztahu (2.8) pouze ve jmenovateli zlomku, tedy v násobku délky prutu. Zavádí se proto pojem vzpěrná délka  $l_0$ . Na Obr. 2.2 jsou zobrazeny nejčastější způsoby podepření tlačných prutů a jejich vzpěrné délky.



Obr. 2.2 – vzpěrné délky prutů, převzato z [8]

Obecný předpis pro všechny způsoby podepření je tedy

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} \quad (2.9)$$

Je ale potřeba dodat, že reálné konstrukce nejsou nikdy ideálně přímé, materiál, z něhož jsou vyrobeny, není ideálně elastický a ani nejsou zatíženy dokonale centricky. Eulerovo kritické břemeno je tedy spíše teoretickou horní hranicí zatížení, kterou v žádném případě není možné překročit.

Reálné konstrukce se s rostoucím osovým zatížením deformují už od počátku a tím se i zvětšuje rameno síly  $F$  a ohybový moment, který na sloup působí. Kolaps pak zpravidla nastává dříve, než je dosaženo kritického zatížení.

### 2.1.2 Imperfekce

Imperfekcí se rozumí jakákoliv odchylka od ideálního tvaru a vlastností konstrukčního prvku. Technologicky není možné, aby byly všechny konstrukce vyrobeny bez těchto odchylek a je tedy nutno s nimi uvažovat i ve výpočtu.

Jeden typ možných imperfekcí jsou odchylky rozměrů průřezu. V analýze je tento parametr zohledněn například při rekonstrukcích nebo při zpřesňování výpočtu velmi exponovaných konstrukcí, kde se výpočet zpřesňuje během výstavby. Dále se zohledňuje při materiálových a jiných zkouškách.

Další imperfekcí je počáteční průhyb konstrukce nebo jejím odchýlení od předpokládaného směru. Tento druh imperfekce má obecně poměrně velký dopad na únosnost zvláště u tlačných konstrukcí.

Dalším druhem imperfekce je například materiálová nehomogenita. Všechny materiály jsou větší či menší měrou nehomogenní. To znamená, že nemají stejné vlastnosti v každém svém bodu. Mohou za to znečištění materiálů při výrobě (například u oceli, kde jsou do oceli přidávány další prvky pro ovlivnění jejích vlastností) nebo pokud se materiál skládá z více složek. Takovým materiálem je například beton. Ten se skládá z kameniva, které má úplně jiné vlastnosti než cement, který jednotlivá zrna kameniva spojuje, a navíc je vysoce porézní a je vyztužený, nejčastěji ocelí.

Dále například reziduální pnutí, které se týká převážně ocelových konstrukcí, vzniká vlivem tvarování průřezu nebo svařování. Lze si představit, že vzniká i u železobetonových konstrukcí vlivem smršťování. Při smršťování betonu dochází ke zkrácení prvku a tato deformace vyvolává ve výztuži napětí.

Někdy se jako imperfekce započítává i excentricita působíště zatížení. Nelze si představit, že zatížení je do prutového prvku vnášeno přímo na osu. Během realizace dochází k nepřesnostem, které mohou mít za následek, že je síla ve skutečnosti vnášena excentricky. Někdy je tato excentricita nutná z technologických důvodů a při navrhování je toto potřeba zohlednit.

### 2.1.3 Teorie I. řádu

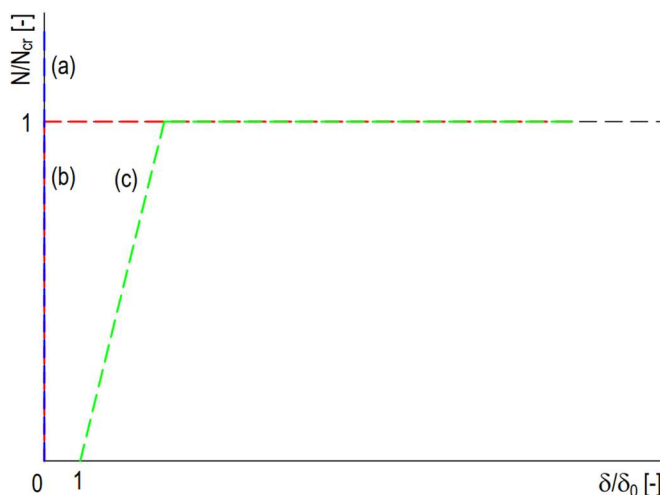
Tento způsob výpočtu je nejjednodušší a používá se k analýze běžných konstrukcí. Jedná se o způsob výpočtu, kdy se vnitřní síly počítají na nedeformované konstrukci. Toto zjednodušení je ale možné použít pouze za předpokladu malých deformací a v případě, kdy vzniklé průhyby jsou tak malé, že zásadním vlivem neovlivní vnitřní síly v konstrukci. V případě štíhlých a velmi štíhlých tlačných prutů není toto zjednodušení možné použít.

Vnitřní síly jsou za použití této teorie nezávislé na deformacích konstrukce a lze použít princip superpozice, kdy výsledné hodnoty vnitřních sil nebo průhybů kombinace několika vlivů se dají spočítat jako součet výsledků každého vlivu zvláště. Vzniká soustava lineárních rovnic, které lze řešit přímo v jednom kroku.

### 2.1.4 Únosnost lineárně pružných tlačných prutů

Lineárně pružný, centricky tlačný a perfektně přímý prut ( $\delta_0 = 0$ ) má teoreticky nekonečnou únosnost (Obr. 2.3 křivka (a)). Tyto podmínky nejsou ale nikdy splněny a jen sebemenší excentricita zatížení nebo imperfekce prutu má za následek to, že prut po dosažení kritického břemene vybočí, tzn. ztratí stabilitu vlivem vzpěru. Příčná deformace, průhyb, se začne rychle zvětšovat bez nárůstu normálové síly (Obr. 2.3 křivka (b)). V případě, že je prut imperfektní ( $\delta_0 \neq 0$ ), s nárůstem zatížení je prut zároveň ohýbán, zvětšuje se tedy jeho příčná deformace úměrně

ke zvyšování zatížení. Při dosažení kritického břemene prut ztrácí stabilitu vzpěrem a normálová síla zůstává konstantní. Oproti tomu příčná deformace roste, teoreticky do nekonečna (Obr. 2.3 křivka (c)).



Obr. 2.3 - chování (a) perfektních, (b) pružných prutů s nekonečně malou imperfkcí a (c) imperfektních pružných prutů dle teorie 1. řádu

Únosnost tlačeneho prutu lze vykreslit do grafu, který má na vodorovné ose relativní štíhlost  $\lambda_{rel}$  prvku a na svislé poměrnou normálovou sílu, která se spočítá jako poměr normálové síly ku maximální dostředně tlakové únosnosti průřezu  $N_R$ . Relativní štíhlost prvku je pak definovaná jako druhá odmocnina poměru kritického břemene spočítaného podle teorie pružnosti  $N_{cr}$  a tlakové únosnosti dostředně tlačeneho průřezu  $N_R$ , viz rovnice (2.10).

Výhodou tohoto uspořádání oproti použití (normální) štíhlosti  $\lambda$  je to, že je možné v tomto grafu porovnávat tlačené pruty s různými materiálovými vlastnostmi i geometrií průřezu. Pro ocelové konstrukce se v tom případě eliminuje vliv pevnosti oceli a geometrie průřezu, u betonových konstrukcí zase stupeň vyztužení, geometrie průřezu a pevnostní třída betonu (rozdílná pevnost i modul pružnosti). Tyto faktory jinak mají vliv na skutečnou hodnotu tlakové únosnosti, štíhlosti i kritického břemene a tím pádem by nebylo možné tyto únosnosti porovnat v jednom grafu. Únosnost pružného tlačeneho prutu kopíruje hraniční křivky zobrazené na Obr. 2.4.

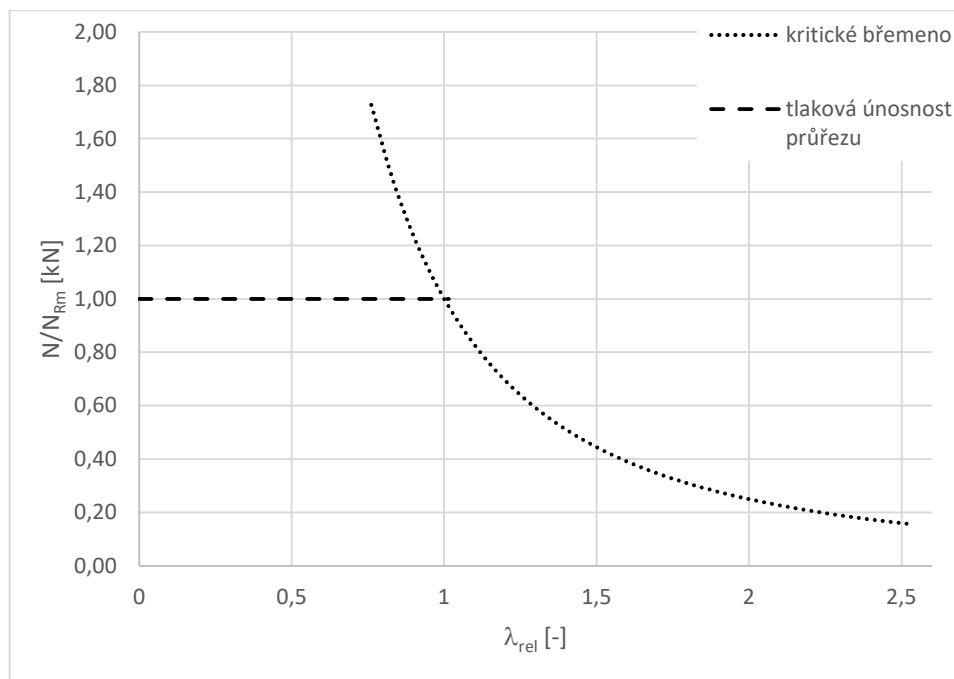
$$\lambda_{rel} = \sqrt{\frac{N_R}{N_{cr}}} \quad (2.10)$$

$$\lambda = \frac{i}{l_0^2} \quad (2.11)$$

$$N_R = fA \quad (2.12)$$

$i$  je poloměr setrvačnosti průřezu,  $f$  je pevnost uvažovaného materiálu a  $A$  plocha průřezu.





Obr. 2.4 - únosnost ideálně pružných tlačných prutů

## 2.2 Nelineární stabilita prutů

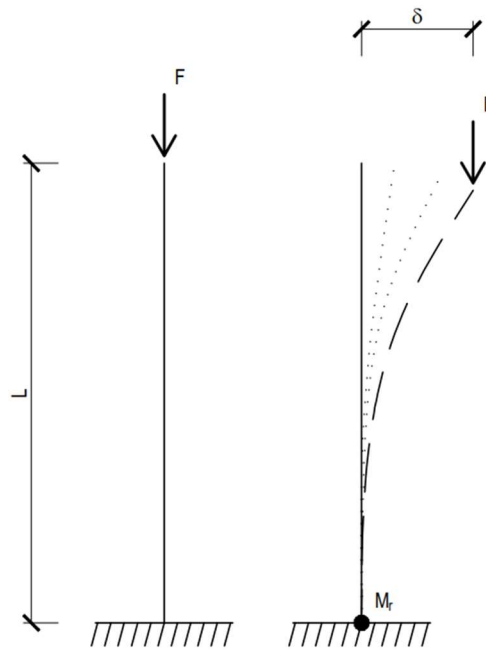
Předchozí kapitola pojednávala o stabilitě za předpokladu lineární elasticity a teorie I. řádu, ale takové předpoklady nejsou dostačující pro popis chování zejména štíhlých a velmi štíhlých sloupů. Pro analýzu těchto konstrukčních prvků se již musí zavést zpřesnění v podobě nelinearity, které výstižněji popisují jejich chování.

Nelinearity, jsou přítomné u každé reálné konstrukce. Většina stavebních materiálů, které se ve stavebnictví používají, se chová nelineárně – hovoříme o materiálových nelinearitách. Ty se obecně projevují tak, že materiály vystavené velkému napětí a/nebo přetvoření postupně ztrácejí tuhost. Druhým typem nelinearity jsou geometrické nelinearity a zahrnují teorii II. řádu a velké deformace/posunutí.

### 2.2.1 Geometrické nelinearity – teorie II. řádu

Předpokladem této teorie jsou, stejně jako u teorie I. řádu, malé deformace. Je ale obecnější. V této teorii se vnitřní síly a deformace počítají na deformované konstrukci. Vnitřní síly jsou totiž obecně závislé na deformacích.

Tato teorie se používá v případech, kdy vliv deformací a na průběhy vnitřních sil nelze zanedbat. Výsledkem je soustava nelineárních rovnic, která se řeší zpravidla iteračně.



Obr. 2.5 - zatížení a tvar vybočení konzoly – postupné iterační hledání rovnovážného stavu dle teorie II. řádu

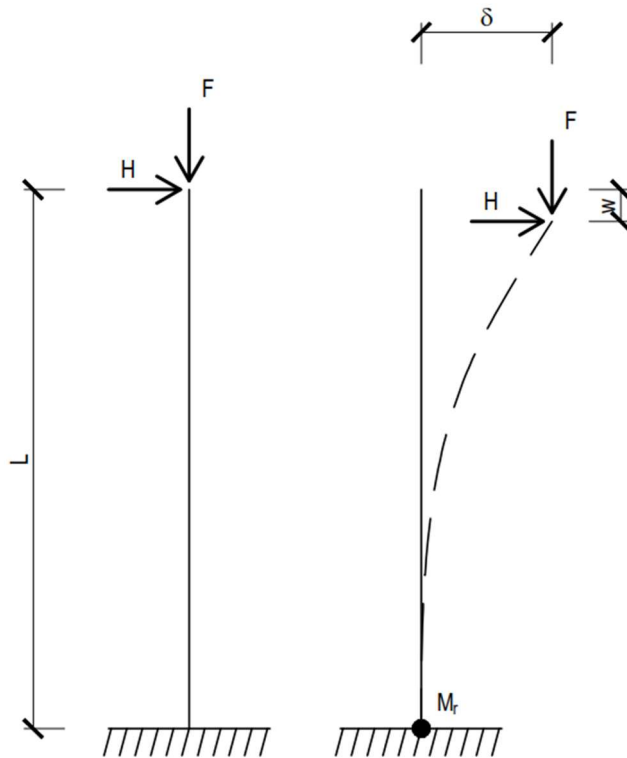
Na příkladu konzoly z Obr. 2.1 by se podle teorie I. řádu počítaly veškeré vnitřní síly na nezdeformovaném tvaru sloupu. Z toho vyplývá, že by byl sloup zatěžován pouze tlakovou silou a sloup by zůstal dále nedeformovaný. Původní imperfekce nebo excentricita zatížení by se nezměnila. V případě, že by síla  $F$  působila excentricky, vznikl by po celé délce sloupu konstantní moment, který by lineárně narůstal se zvětšující se silou  $F$ .

Oproti tomu při uvážení účinku teorie II. řádu by se v případě excentricky působící síly  $F$  sloup se zvětšující se silou  $F$  neustále více příčně deformoval a ohybový moment se tak zvětšoval. Nárůst momentu v patě konzoly ale narůstal nelineárně – kromě zvětšující se síly  $F$  by se navíc postupně v jednotlivých iteračních krocích zvětšovalo rameno, na kterém by tato síla působila. Proto jsou vnitřní síly v případě použití teorie II. řádu závislé na deformacích konstrukce.

### 2.2.2 Geometrické nelinearity – velká posunutí

Za velká posunutí je zpravidla považován stav, kdy průhyb nebo jiné přemístění bodů konstrukce je řádově srovnatelné s rozměry této konstrukce (např. průhyb nosníku dosahující hodnot srovnatelných s výškou průřezu). Vnitřní síly se rovněž stanovují na deformované konstrukci, ale navíc jsou uvažovány nelineární geometrické rovnice, tedy vztahy mezi posuny a přetvořením. Tato metoda je tedy nejpřesnější ze všech výše zmíněných (někdy bývá označována jako tzv. teorie III: řádu), ale je také nejnáročnější.

Základní principy výpočtu podle jednotlivých, výše zmíněných teorií shrnuje Obr. 2.6.



$$I. \text{řád: } M_r = H \cdot L$$

$$II. \text{řád: } M_r = H \cdot L + F \cdot \delta$$

$$III. \text{řád: } M_r = H \cdot (L - w) + F \cdot \delta$$

Obr. 2.6 - princip výpočtu ohybového momentu na konzole dle různých teorií geometrické nelinearity

### Aproximace deformací II. (analytické řešení)

Deformace vzniklé působením geometrické nelinearity lze přibližně odhadnout pomocí řešení diferenciální rovnice tláčeného prutu s počátečním průhybem  $w_0(x)$  sloupu je ve tvaru sinusoidy.

Značení veličin je následující:  $w_0(x)$  značí počáteční prohnutí,  $w(x)$  prohnutí sloupu,  $\delta$  je finální amplituda průhybu,  $\delta_0$  je počáteční amplituda průhybu a  $l_0$  je vzpěrná délka.

$$w_0(x) = \delta_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l_0}\right) \quad (2.13)$$

$$M = -EI(w'' - w_0'') = Fw \quad (2.14)$$

$$EIw'' + Fw = EIw_0'' \quad (2.15)$$

$$w'' + \frac{F}{EI}w = w_0'' \quad (2.16)$$

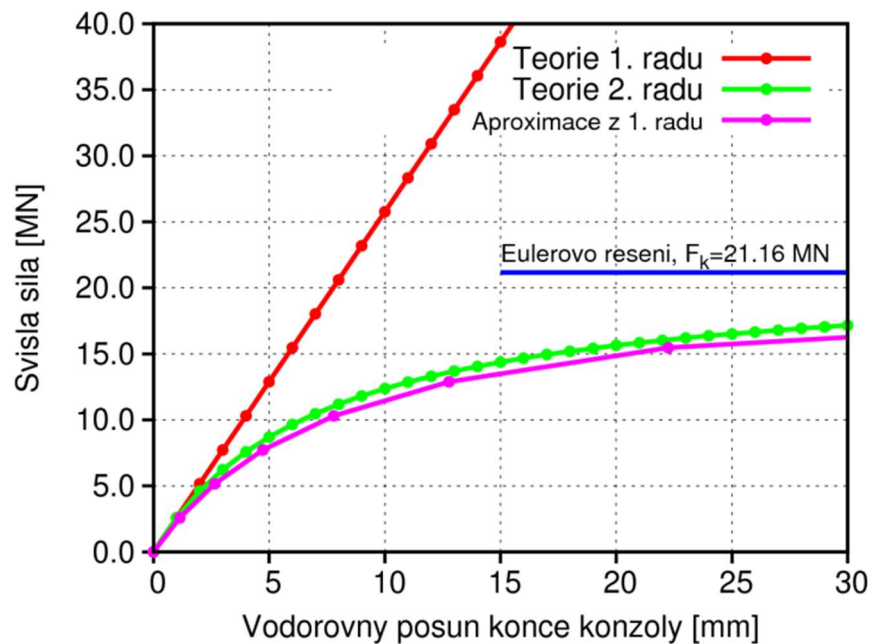
$$w_0'' = -\frac{\delta_0 \pi^2}{l_0^2} \sin \frac{\pi x}{l_0} \quad (2.17)$$

$$w = -\frac{\delta_0 \pi^2}{l_0^2 \left(\frac{F}{EI} - \frac{\pi^2}{l_0^2}\right)} \sin\left(\frac{\pi x}{l_0}\right) + C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right) \quad (2.18)$$

$$w(0) = 0; w'(0) = 0 \rightarrow C_1 = C_2 = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \frac{w}{w_0} = -\frac{\pi^2}{l_0^2 \left( \frac{F}{EI} - \frac{\pi^2}{l_0^2} \right)} = \frac{1}{1 - \frac{F l_0^2}{EI \pi^2}} = \frac{1}{1 - \frac{F}{F_{cr}}} \quad (2.20)$$

Porovnání skutečných průhybů vzniklých působením II. řádu a vypočítaných pomocí této aproximace je vidět na Obr. 2.7.



Obr. 2.7 - porovnání průhybů I. řádu, II. řádu a výsledku aproximace II. řádu, převzato z [17]

### 2.2.3 Materiálové (fyzikální) nelinearity

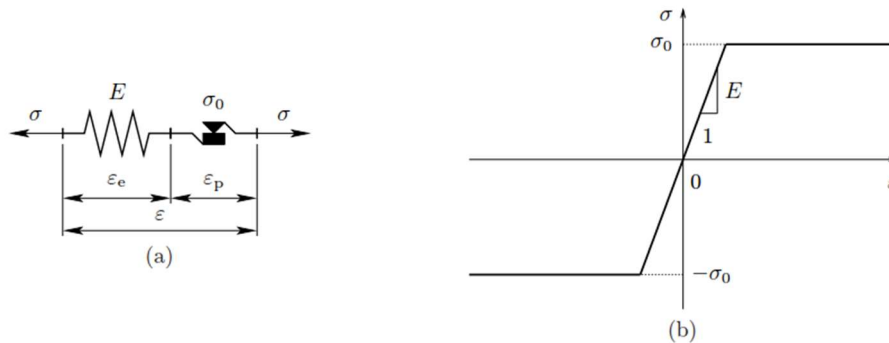
V některých případech je materiál zatěžován téměř až do dosažení pevnosti. Většina materiálů užívaných ve stavebnictví se ale nechová lineárně pružně. Pro tyto případy je tedy nutné zohlednit reálné chování těchto materiálů a lineární chování nahradit nelineárním. Materiály, jako je ocel nebo beton, mají ve skutečnosti charakter pružnoplastický (beton především v tlaku). U betonu se navíc velmi výrazně projevuje vliv poškození, především v tahu.

#### Plasticita

Plasticita je vlastnost materiálu, která má za následek to, že při určité velikosti napětí začne materiál ztrácet svoji tuhost a měkne. To znamená, že se začnou neúměrně ke zvyšování zatížení (napětí) zvyšovat i přetváření materiálu.

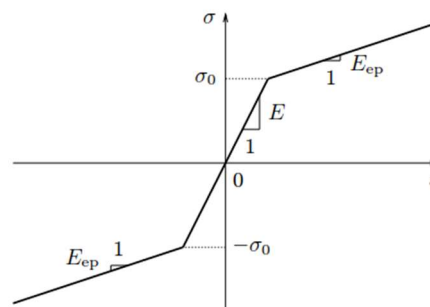
V případě jednoosé napjatosti lze toto chování předvést na pracovním diagramu materiálu. Nejjednodušším modelem, který popisuje toto chování materiálu, je ideální pružnoplastický materiál. Z počátku zatížení se tento materiál chová ideálně pružně. Jeho přetvoření jsou přímo úměrné napětí. Po dosažení tzv. meze kluzu  $\sigma_0$  materiál ztratí veškerou svou tuhost a přetvoření

rostou i bez navýšení napětí v materiálu, viz Obr. 2.8(b). Vyšší napětí, než je mez kluzu, není pro takový materiál definované. Takový stav se nazývá jako „plasticky nepřístupný“. Ideální pružnoplastický materiál pak lze demonstrovat na mechanickém schématu sériově zapojené pružiny a ideálně plastickém článku, viz Obr. 2.8(a).



Obr. 2.8 - (a) ideální pružnoplastický model, (b) odpovídající pracovní diagram, převzato z [2]

Skutečné materiály se ale často nechovají jako ideálně pružnoplastické. Svoji tuhost, v případě jednoosé napjatosti tečnový modul pružnosti  $E$ , který je vyznačen na Obr. 2.8(b), mohou materiály ztrácet pouze částečně. Tento efekt se nazývá plastické zpevnění.



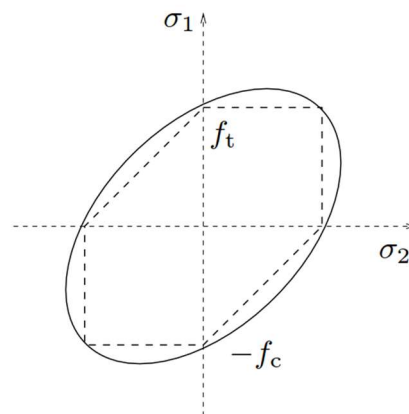
Obr. 2.9 - pracovní diagram pružnoplastického materiálu se zpevněním, převzato z [2]

Existuje několik modelů, které popisují plastické zpevnění. Dva z nich popisuje Jirásek a Zeman ve jejich publikaci [2].

Důležitou vlastností plastického chování materiálu je, že při jeho odtěžování – snižování napětí, zůstává plastické přetvoření v materiálu zachováno a do svého původního, nedeformovaného, stavu se vrací pouze pružná složka celkového přetvoření. V kontextu pracovního diagramu je tato klesající větev rovnoběžná s pružnou větví, viz Obr. 2.13(a).

V případě víceosé napjatosti je již nutné se oprostit od pracovního diagramu. Jeho ekvivalentem jsou tzv. plochy plasticity. V izotropních materiálech jsou pak v případě dvouosé napjatosti zkoumány hlavní napětí  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$ , které udávají největší tahové a tlakové napětí v daném bodě. Tyto dvě hodnoty jsou na sebe vzájemně kolmé a definují tak rovinu. Plochy plasticity si lze v prostoru představit jako plochy ohraničující nekonečně dlouhé jehlanovité nebo kuželovité těleso.

Zmíněná rovina, kterou definují směry hlavních napětí, řeže toto prostorové těleso a pro dvojosou napjatost tak vznikají křivky (stále ale nazývané plochy) plasticity, které definují, jestli se materiál při daných hlavních napětích chová ještě pružně, nebo již plasticky. Rovina tvořená hlavními napětími je obecně různě natočená v tomto prostoru. Na Obr. 2.10 jsou zobrazeny tyto řezy pro dvě různé plochy plasticity – Trescovu (čárkovaně) a Misesovu (plně). U neizotropního materiálu ve víceosé napjatosti je potřeba vyšetřovat všech šest složek napětí. Podrobněji je plasticita pro víceosou napjatost popsána v [2].



Obr. 2.10 - řez plochou plasticity pro dvojosou napjatost, (čárkovaně) řez Trescovou plochou plasticity, (plně) řez Misesovou plochou plasticity, převzato z [2]

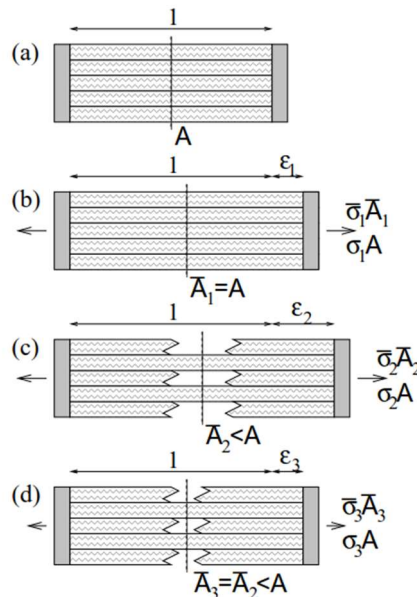
## **Poškození**

Poškození materiálu je jev, kdy dojde k porušení části materiálu, která se již dále nezapojuje do přenášení napětí. Tím, jak se materiál vlivem poškození oslabuje (často jen v jeho mikrostrukturu), zdá se, že se se vzrůstajícím napětím zmenšuje jeho tuhost. Přetvoření materiálu tedy roste neúměrně ke zvyšování napětí. Jak se materiál poškozuje je typické pro každý materiál samostatně. Některé se porušují pomalu ale stále. U těchto materiálů je pokles jeho tuhosti znatelný již od raných fází zatěžování, ale ke ztrátě tuhosti dochází pozvolna. Jiné materiály se zase poškodí více, ale v jednu chvíli. Může i nastat stav, kdy při zvyšování přetvoření materiálu dojde ke zmenšování síly, která toto přetvoření vyvolává – materiál dosáhl a překročil svoji pevnost.

Základním modelem je pružný materiál s poškozením. Ten lze vysvětlit na příkladu jednoosé napjatosti. Materiál si lze představit jako svazek ideálně křehkých vláken rovnoběžných se směrem zatěžování. Z počátku zatěžování se všechna vlákna chovají pružně a veškeré namáhání přenášejí všechna vlákna, a tak se namáhání roznáší do plochy průřezu všech vláken  $A$ .

V určitou chvíli je ale u některého z vláken dosaženo jeho maximální deformace. Protože je vlákno ideálně křehké, přetrhne se a veškeré napětí z něj okamžitě zmizí. Tato hodnota maximální deformace je pro každé vlákno jiná. S dalším přitěžováním se vlákna postupně trhají. Je potřeba si uvědomit, že v tuto chvíli je plocha všech dosud neporušených vláken  $A'$  menší, než byla

původní plocha  $A$ . Tato plocha se zmenšuje s tím, jak se postupně trhají jednotlivá vlákna a v konečném stavu, kdy praskne poslední vlákno, se tato plocha  $A' = 0$ . Rozlišujeme tedy nominální napětí  $\sigma$ , které je definováno jako síla vztažená k původní neporušené ploše všech vláken  $A$  a efektivní napětí  $\sigma'$ , které se definuje jako síla ku ploše stále neporušených vláken  $A'$ . Nominální napětí se projevuje makroskopicky a používá se běžně v mechanice, ale efektivní napětí je reálně působící napětí v mikrostruktuře materiálu. To je tedy vždy větší nebo rovno nominálnímu napětí. Na Obr. 2.11 je schematicky zobrazen tento mechanismus poškození. [2]



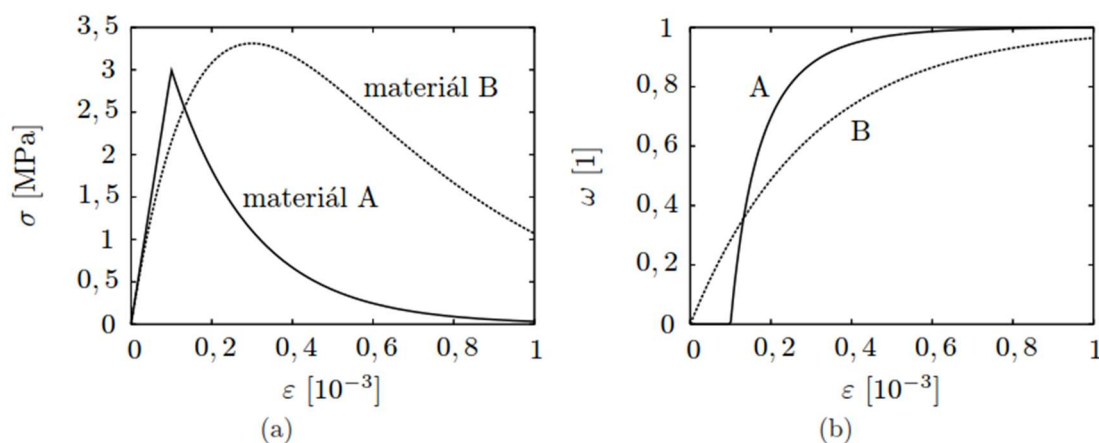
Obr. 2.11 - jednoduchý model porušení, převzato z [2]

V mechanice poškození je velmi důležitá veličina zvaná parametr poškození  $\omega$ , která může být za jednoosé napjatosti definována např. jako poměr poškozené části průřezu  $(A-A')$  k ploše celého nepoškozeného průřezu  $A$ . Vývoj parametru poškození v závislosti na přetvoření lze experimentálně stanovit například z tahové zkoušky s průběžným odtěžováním a opětovným zatěžováním zkušebního tělesa. Postupný pokles tuhosti, který je pozorován při takto uspořádané zkoušce odpovídá nárůstu poškození.

$$\omega = \frac{A - A'}{A} \quad (2.21)$$

Pracovní diagram pružného materiálu s poškozením je zobrazen na Obr. 2.12 (a). Materiál A se chová pružně až do dosažení kritického napětí, kde jeho tuhost prudce klesne a dále se snižuje. Materiál B se oproti tomu poškozuje postupně. To má za následek, že stoupající část diagramu je zaoblená. Na Obr. 2.12 (b) je pak zobrazen parametr poškození pro oba materiály. Materiál A se velmi rychle poškodí v jednu chvíli. Materiál B se naopak poškozuje pomaleji, ale již od začátku zatěžování.[2]

U nejjednoduššího modelu pro víceosou napjatost se dá uvažovat pouze jediný parametr poškození  $\omega$ . Pro obecný materiál si je ale nutné uvědomit, že se materiál nemusí ve všech směrech poškozovat stejně. Obecně závisí poškození opět na stavu napětí a na přetvořeních. Stav během poškození materiálu se dá pak určit podle matice sečné tuhosti  $D_s$ . Ta se z matice pružné tuhosti  $D_e$  spočítá podle vztahu (2.22). Matice pružné tuhosti vyjadřuje stav před jakýmkoliv poškozením materiálu, matice sečné tuhosti pak vyjadřuje stav materiálu po jeho poškození.



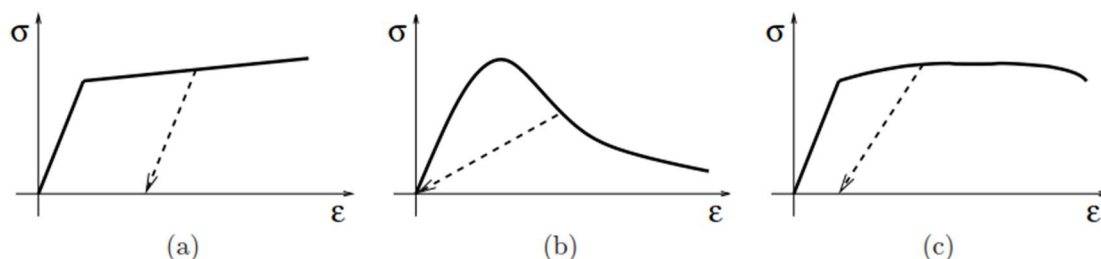
Obr. 2.12 - (a) pracovní diagramy, (b) závislost poškození na deformaci, převzato z [2]

$$D_s = (1 - \omega)D_e \quad (2.22)$$

Charakteristickým rysem materiálu s poškozením je to, že během odtěžování je tato větev diagramu vedena do počátku souřadnic, nikoliv po klesající větvi rovnoběžnou s pružnou částí diagramu, jako tomu bylo u pružnoplastického materiálu.

Je důležité upozornit, že velká část ve stavebnictví používaných materiálů se nechová pouze pružnoplasticky nebo pružně s poškozením, ale většinou se jedná o kombinaci všech těchto vlivů.

Shrnutí pracovních diagramů pro všechny výše zmíněné zjednodušení materiálů i s vyznačenou větví při odtěžování je na Obr. 2.13.



Obr. 2.13 – typické pracovní diagramy pro: (a) pružnoplastický materiál, (b) pružný materiál s poškozením, (c) pružnoplastický materiál s poškozením, převzato z [2]

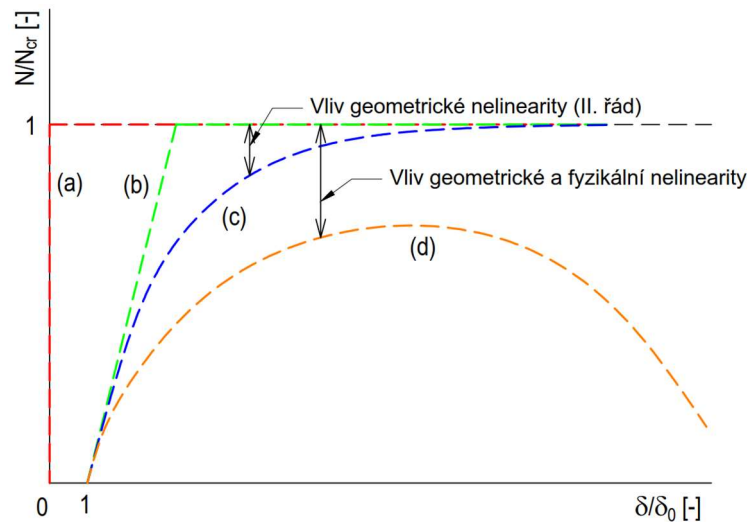


## 2.2.4 Nelineární únosnost tlačných prutů

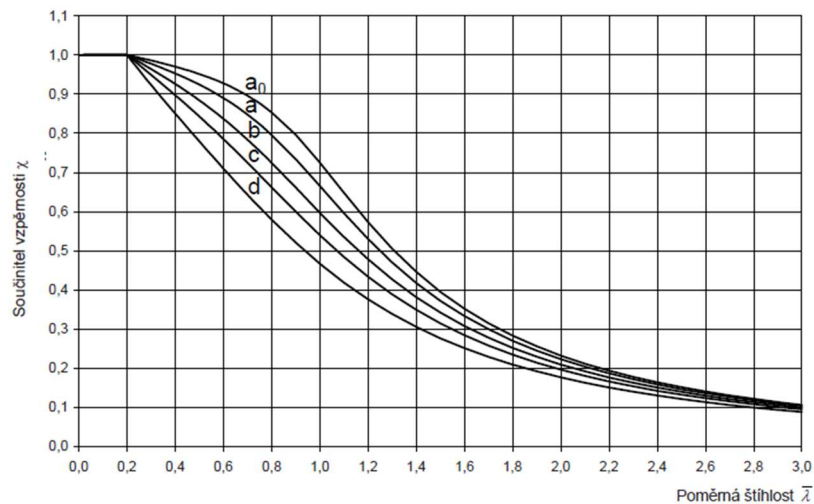
Vliv nelinearit na únosnost tlačných prutů se dá zobrazit v porovnání s lineárně pružným výpočtem, viz Obr. 2.14.

V případě, že se jedná o lineárně pružný materiál, únosnost – maximální síla, kterou je prvek schopný přenést, je kritické břemeno (Obr. 2.14, křivky (a), (b), (c)), rozdílný tvar křivek je způsoben uvažovanou imperfekcí prutu a v případě křivky (c) i s geometricky nelineárním výpočtem – uvažováním teorie II. řádu. V případě křivky (d) je již uvažováno i s materiálovými nelinearitami. Vlivem snížení tuhosti materiálu plasticitou nebo poškozením únosnost nedosáhne hodnoty pružného (Eulerova) kritického zatížení. [4]

Stejně jako tomu bylo v předchozí kapitole, lze na grafu poměrné únosnosti ku relativní štíhlosti zobrazit vliv nelinearit. Pro příklad je zde uveden graf na Obr. 2.15, který užívá norma pro návrh ocelových konstrukcí ČSN EN 1993-1-1 [10].



Obr. 2.14 - porovnání chování tlačných prutů: (a) pružný prut s nekonečně malou imperfekcí, (b) pružný prut s imperfekcemi (I. řád), (c) pružný prut s imperfekcemi (II. řád), (d) fyzikálně nelineární prut (II. řád)



Obr. 2.15 - křivky vzpěrné pevnosti, převzato z [10]

## 3 ŠTÍHLÉ ŽELEZOBETONOVÉ PRUTY – PŘEHLED VÝPOČETNÍCH POSTUPŮ

### 3.1 NORMOVÉ POSTUPY

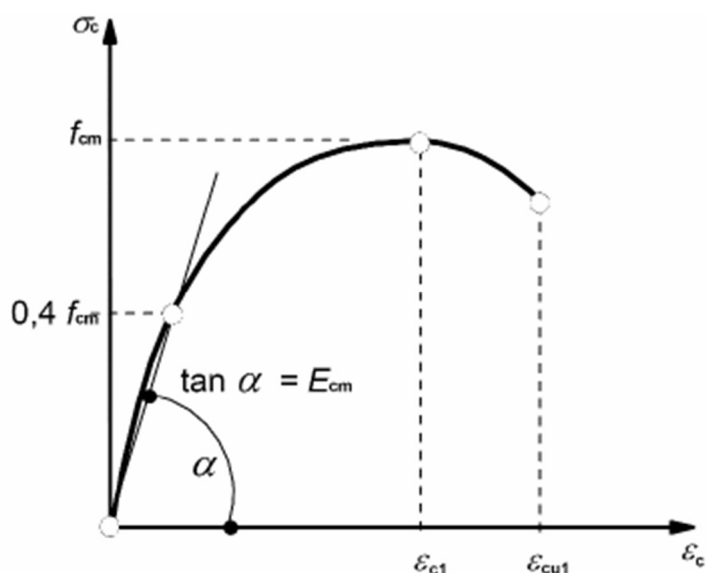
Normy, které se zabývají navrhováním a posuzováním železobetonových konstrukcí, je soustava norem Eurokód 2 (EC2). V této práci jsou použity normy ČSN EN 1992-1-1 [8] a ČSN EN 1992-2 [9]. V této kapitole budou primárně popsány postupy pro pozemní stavby, tedy postupy uvedené v [8].

Postupy uvedené v normách jsou zjednodušeny tak, aby postihly co nejvíce možných případů a aby byl výpočet podle nich bezpečný. Nelze tedy tvrdit, že výpočetní postupy v nich uvedené jsou fyzikálním popisem chování konstrukcí.

#### 3.1.1 Materiálové modely

Norma ČSN EN 1992-1-1 navrhuje využití několika zjednodušených i jeden čistě nelineární pracovní diagram betonu.

Základní charakteristikou betonu je sečnový model pružnosti  $E_c$ , který je charakteristický pro každou pevnostní třídu betonu. Na nelineárním pracovním diagramu prochází přibližně hodnotou pevnosti  $0,4 f_{cm}$ , což je průměrná pevnost betonu (Obr. 3.1).

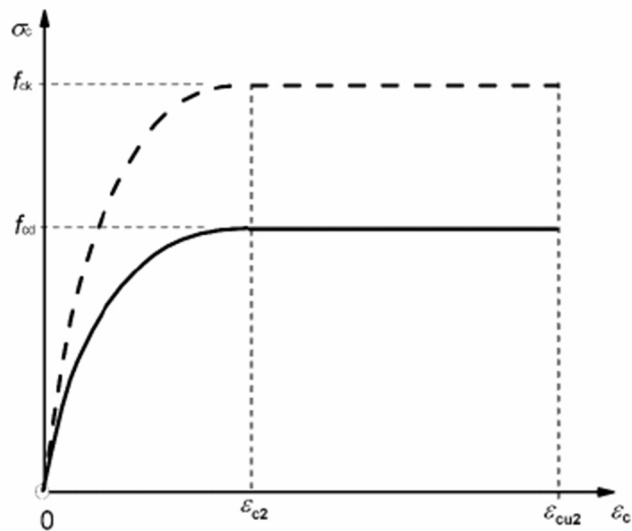


Obr. 3.1 - schéma nelineárního pracovního diagramu betonu a sečnového modulu pružnosti  $E_c$ , převzato z [8]

Základním pracovním diagramem, který je určený pro navrhování průřezu, je parabolicko-  
rektangulární pracovní diagram, který je zobrazen na Obr. 3.2. Křivka je pro návrhový pracovní  
diagram určena předpisem:

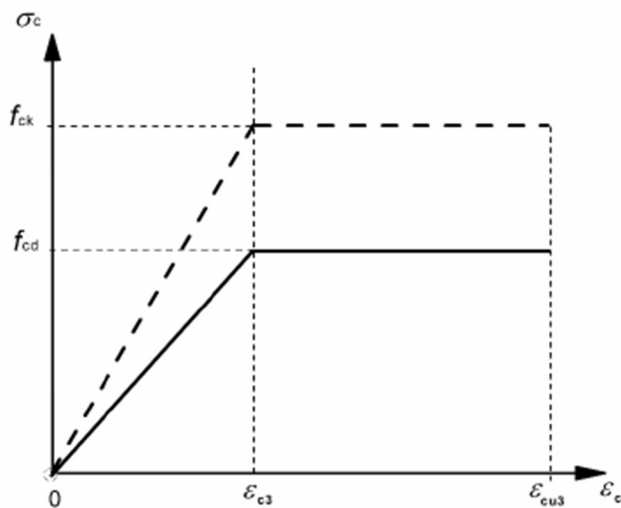
$$\sigma_c = f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^n \right] \quad \text{pro } 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{c2} \quad (3.1)$$

$$\sigma_c = f_{cd} \quad \text{pro } \epsilon_{c2} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{cu} \quad (3.2)$$



Obr. 3.2 - parabolicko-rektangulární pracovní diagram, převzato z [8]

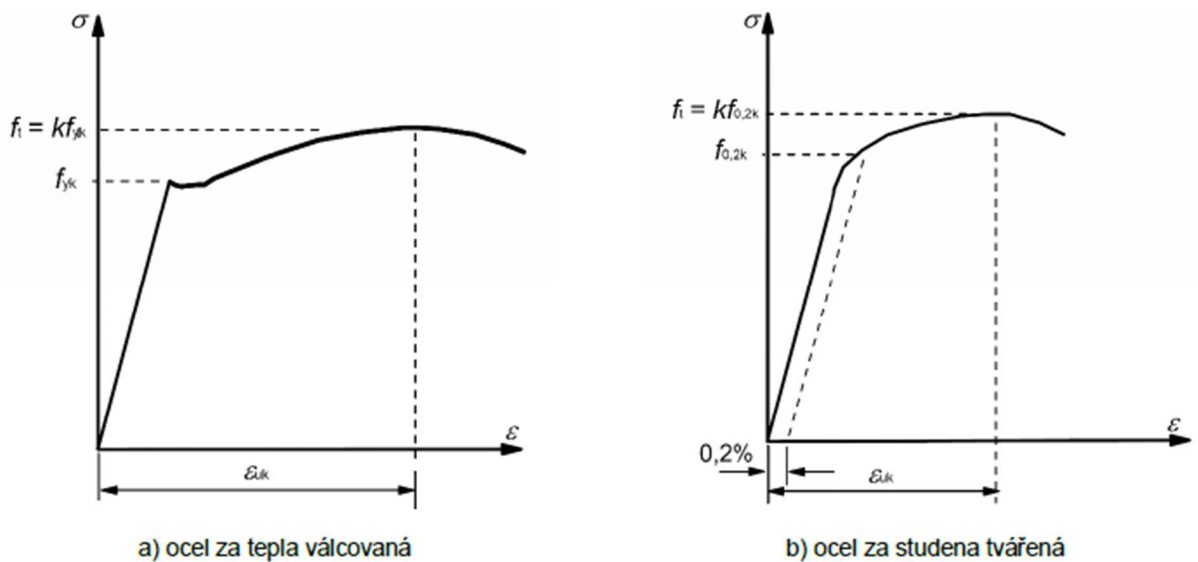
Pro návrh průřezu pak lze použít i jiné pracovní diagramy, „pokud jsou rovnocenné nebo více konzervativní než parabolicko-rektangulární.“ [8] Příkladem takového je bilineární pracovní diagram podle Obr. 3.3. Všechny hodnoty, které určují pracovní diagramy, jsou uvedené v tabulce 3.1 v normě [8].



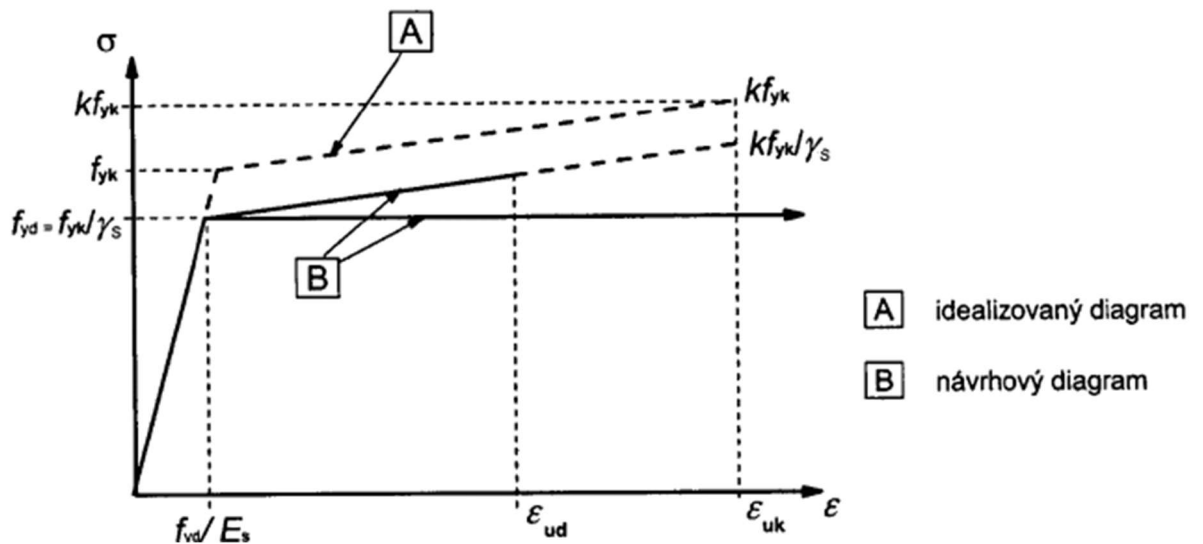
Obr. 3.3 – bilineární pracovní diagram, převzato z [8]

Pro nelineární analýzu konstrukce norma [8] nabízí i čistě nelineární pracovní diagram betonu zobrazený na Obr. 3.1. Umožňuje ale použití i jiných „pokud odpovídajícím způsobem vyjadřují chování uvažovaného betonu.“ [8]

Norma [8] také nabízí pracovní diagramy pro betonářskou výztuž. Vzhledem k reálnému chování betonářské oceli, jsou tato zjednodušení poměrně přesná, viz Obr. 3.4 a Obr. 3.5.



Obr. 3.4 - pracovní diagramy typických betonářských ocelí, převzato z [8]

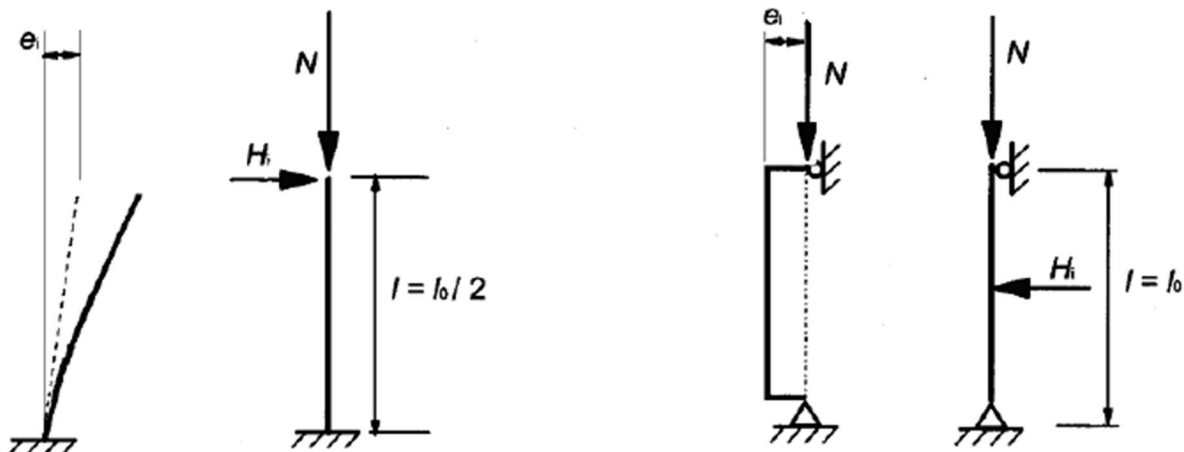


Obr. 3.5 - schéma pracovních diagramů betonářské oceli (pro tah i tlak), převzato z [8]

### 3.1.2 Imperfekce

Norma [8] zohledňuje geometrické imperfekce, tedy odchylky rozměrů, tvaru a uložení konstrukčních prvků. Odchylky velikosti průřezu jsou již zohledněny v součinitelích spolehlivosti materiálu a v analýze by se tedy již neměly zohledňovat. Tyto imperfekce jsou přímo převzaty z výrobních odchylek při provádění. Je zároveň uvedeno, že se imperfekce musí zohledňovat pouze v mezním stavu únosnosti při trvalých a mimořádných návrhových situacích.

Nedokonalosti ve svislosti a počátečním průhybu konstrukčních prvků se zavádějí buď počátečním nakloněním/průhybem konstrukčního prvku nebo příčnou silou, která naklonění nebo průhyb vyvodí. Lze je také zavést excentricitou zatížení.



Obr. 3.6 - příklady účinků geometrických imperfekcí, převzato z [8]

„Jako zjednodušenou alternativu pro stěny a osamělé sloupy ve ztužených systémech lze použít výstřednost  $e_i = l_0/400$  pokrývající imperfekce odpovídající normálním odchylkám při provádění.“ [8].

Je zde uvedeno, jak zavést imperfekce i pro celé ztužující systémy, kdy lze základní hodnota naklonění těchto systémů redukovat součiniteli zohledňující jejich výšku i počet.

### 3.1.3 Výpočetní postupy pro analýzu štíhlých sloupů

V normě [8] jsou uvedeny celkem 3 možné přístupy k analýze tlačených sloupů. Kromě obecné metody, o které říká, že „Při použití pracovních diagramů vycházejících z návrhových hodnot se z výpočtu získá přímo mezní zatížení.“ [8], nabízí i další 2 zjednodušené metody. U těchto metod jsou pomocí zjednodušených vztahů dopočítané ohybové momenty vzniklé působením druhého řádu, které se pak porovnávají s interakčním diagramem, který zohledňuje spolupůsobení jak normálové síly, tak ohybového momentu a určuje oblast kombinací těchto dvou způsobů namáhání, která je přípustná pro přenesení namáhání průřezem. Tyto postupy zohledňují vzpěr, ale tento vliv je zohledněn ve zvětšeném ohybové momentu.

#### Obecná metoda

První metodou je obecná nelineární analýza. V rámci této analýzy norma [8] předepisuje, že se musí uvážit účinky druhého řádu, imperfekcí, dotvarování a použít vhodné pracovní diagramy materiálů. Konkrétní způsob, jak nelineární analýzu provést, neuvádí.

#### Metoda založená na jmenovité tuhosti

Tato metoda vychází z redukce ohybové tuhosti sloupů vlivem trhlin, materiálových nelinearit a dotvarování na celkové chování konstrukce. [8] Zohledňuje i průběh momentu prvního řádu na konstrukčním prvku. Do výpočtu také vstupuje Eulerovo kritické břemeno, které se počítá z redukované (jmenovité) ohybové tuhosti. Pro výpočet výsledného momentu i s uvážením II. řádu je použit upravený vztah (2.20).

### Metoda založená na jmenovité křivosti

Jedná se o druhou zjednodušenou metodu, kterou norma [8] nabízí pro výpočet účinků druhého řádu na tlačené sloupy. „*Tato metoda stanoví jmenovitý moment druhého řádu na základě průhybu, který stanoví postupně na základě účinné délky a odhadnuté maximální křivosti.*“ [8]

V praktické části této práce jsou obě zjednodušené metody porovnány s numerickým nelineárním výpočtem pomocí prostorových (3D) konečných prvků.

#### **3.1.4 Zohlednění deformací II. řádu**

Norma [8] umožňuje zanedbat vliv II. řádu pro, jestliže je štíhlost prvku  $\lambda$  menší než hodnota  $\lambda_{lim}$ .

Štíhlost je definována jako poměr vzpěrné délky  $l_0$  a poloměru setrvačnosti průřezu  $i$ .

$$\lambda = \frac{l_0}{i} \quad (3.3)$$

Limitní hodnota štíhlosti je pak v normě [8] definována vztahem

$$\lambda_{lim} = 20 A B C / \sqrt{n} \quad (3.4)$$

Součinitel  $A$  je zohledňuje dotvarování, součinitel  $B$  zohledňuje stupeň vyztužení průřezu, součinitel  $C$  zohledňuje koncové momenty na sloupu, nezohledňuje ale jejich průběh. Poměrná normálová síla  $n$  je poměr normálové síly ku součinu ( $A_c f_{cd}$ ).

Železobetonové sloupy, které splňují tuto podmínku, se pak navrhují jako sloupy masivní – dojde u nich k překročení únosnosti průřezu dříve, než by došlo k jejich kolapsu vybočením. Nárůst ohybového momentu způsobený imperfekcemi nebo excentrickým zatížením u nich narůstá téměř lineárně. Výpočet pomocí teorie II. řádu tedy není nutný.

Sloupy, které tuto podmínku nespĺňují, jsou pak sloupy štíhlé a velmi štíhlé. Norma ale nemá prostředek, jak je ve výpočtu odlišit. Jejich způsob kolapsu je ale odlišný. U obou druhů těchto sloupů již není možné zanedbat deformace vzniklé působením II. řádu. Způsob kolapsu štíhlých sloupů je ale stále vlivem přetížení průřezu. Velmi štíhlé sloupy naopak kolabují stabilně – dojde u nich ke ztrátě stability dříve, než je přetížený průřez. Vzhledem k tomu, že zjednodušené metody pro posouzení štíhlých sloupů uvedené v normě [8] pouze dopočítávají moment vzniklý II. řádem, který se dále porovnává s únosností průřezu, nabízí se otázka, jestli jsou tyto metody vhodné i pro sloupy velmi štíhlé. Toto je také zjišťováno v praktické části této práce.

## **3.2 NUMERICKÉ VÝPOČTY**

Problematiku prutových i jiných konstrukcí lze obecně popsat diferenciálními rovnicemi. Ty jsou často analyticky velmi obtížně řešitelné, někdy i neřešitelné (především v případě

nelineárních a/nebo vícerozměrných úloh). Numerické výpočty si získaly oblibu kvůli své poměrně jednoduché algoritmicizaci. V praxi se používá primárně metoda konečných prvků (MKP) a dále bude stručně popsána

Principem MKP je diskretizace kontinua na dílčí konečné prvky za účelem přibližného nahrazení malého počtu složitých diferenciálních rovnic za velký počet jednoduchých algebraických rovnic, které jsou relativně snadno řešitelné pomocí elementárních maticových operací. Je důležité připomenout, že numerický výpočet je založený na aproximaci skutečného řešení. Výsledky spočtené touto metodou jsou přibližné, nikoliv přesné. Numerická chyba je ale při správném použití této metody poměrně malá a ve většině případů je možné se spokojit s tímto přibližným výsledkem.

Většina programů založených na MKP umožňuje uživatelské předepsání materiálových vlastností. Některé umožňují ke každému materiálu přiřadit libovolný, čistě nelineární, pracovní diagram, jiné zase umožňují zadat hodnoty dílčích bodů na pracovních diagramech, jejichž tvar je v programu již obecně předepsaný a jsou odvozené od normových (viz předchozí kapitola) nebo jiných pracovních diagramů (např. z odborné literatury).

Jedním z takových programů, který umožňuje provádět analýzu s využitím prostorových konečných prvků a umožňuje velkou uživatelskou variabilitu nastavení pro výpočet, je program ATENA Science vyvinutý společností Červenka Consulting. Tento program je využit v rámci parametrické studie v praktické části této práce.

### **3.3 POLOANALYTICKÉ POSTUPY**

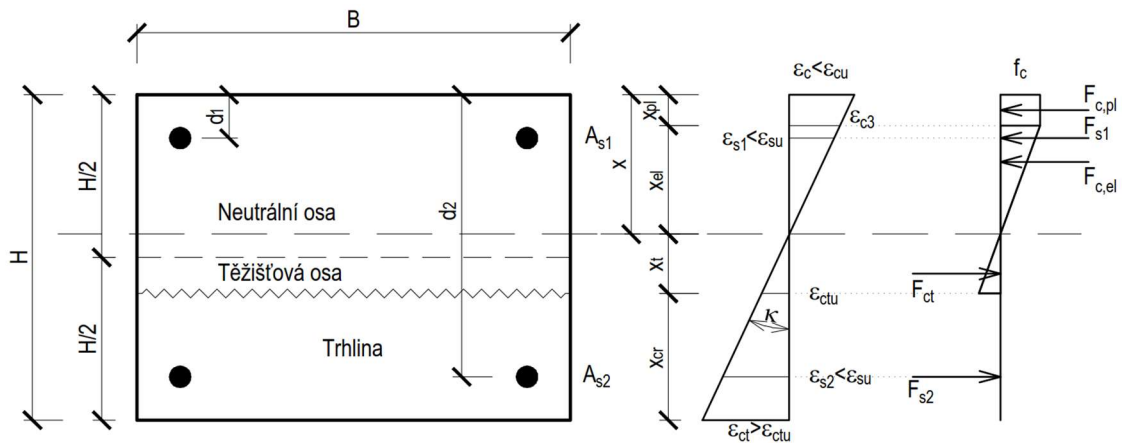
Existují metody pro výpočet štíhlých a velmi štíhlých železobetonových tlačných prutů, které se dají uplatnit i formou poloanalytického výpočtu. Některé z nich popsali např. Janda, Křístek, Kvasnička, aj. [1]. Tyto metody dokáží zohlednit jak materiálové, tak geometrické nelinearity. Vzhledem k poměrně velké výpočtové náročnosti těchto postupů se nabízí využití výpočetní techniky.

Tato kapitola je dále zaměřena na jeden z možných poloanalytických výpočtů založený na sestavení pracovního diagramu průřezu železobetonového prvku za ohybu.

Pracovní diagram průřezu vyjadřuje závislost křivosti konstrukce na ohybovém momentu. Tento postup uvažuje s Bernoulliho-Navierovou hypotézou, která předpokládá, že průřez zůstává rovinný před i po jeho deformaci. Po výšce průřezu tedy nastává lineární průběh poměrného přetvoření. Tento průběh přetvoření a napětí v betonu i výztuži je schematicky zobrazen na Obr. 3.7.

Pro vytvoření pracovního diagramu průřezu lze využít libovolných pracovních diagramů materiálů. Poměry hodnot na Obr. 3.7 jsou pouze ilustrativní. Pro přehlednost je uvažováno s bilineárním pracovním diagramem betonu, lze ale využít libovolný vhodný diagram.

Pro sestavení pracovního diagramu průřezu je nutné stanovit síly ve všech částech průřezu tak, jak je zobrazeno na Obr. 3.7. Je výhodné matematické vyjádření všech sil zapsat v závislosti na tlačené výšce betonu  $x$ .



Obr. 3.7 - průběh napětí a přetvoření na průřezu za ohybu

$$\varepsilon_{s1} = \kappa(x - d_1) \quad (3.5)$$

$$F_{s1} = \varepsilon_{s1} E_{s,el} A_{s1} = \kappa(x - H + d_1) E_{s,el} A_{s1} \quad \text{pro } |\varepsilon_{s1}| \leq |\varepsilon_y| \quad (3.6)$$

$$F_{s1} = f_y A_{s1} \quad \text{pro } |\varepsilon_y| \leq |\varepsilon_{s1}| \leq |\varepsilon_{su}| \quad (3.7)$$

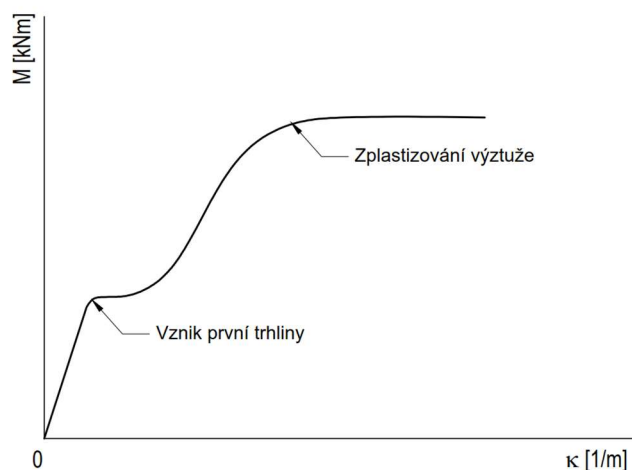
Pro příklad je ve vzorcích (3.5) až (3.7) odvozeno vyjádření síly v tlačené výztuži  $F_{s1}$  závislé na tlačené výšce betonu  $x$ . Uvažovaný pracovní diagram výztuže je bilineární bez zpevnění po dosažení meze kluzu.

Po sestavení všech vztahů pro výpočet jednotlivých sil v průřezu je nutné dopočítat neznámou výšku tlačného betonu  $x$  pro každou přípustnou křivost průřezu. Podmínkou, pro kterou je tento výpočet proveden, je rovnováha všech uvedených sil na průřezu. Jde pouze o ohýbaný průřez, a tedy součet všech sil v jednotlivých částech průřezu je 0. Tento výpočet lze provést např. iterativně, pomocí opakovaného odhadu hodnoty  $x$ .

Poté lze spočítat moment který vznikl od jednotlivých sil. Jedná se o prostý ohyb, a tudíž lze zvolit libovolný bod, ke kterému je moment spočítán. Protože platí podmínka rovnováhy, je tento moment vytvořený jednotlivými materiály stejný, jako je působící vnější ohybový moment.

Po vynesení všech spočítaných ohybových momentů v závislosti na křivosti, která vyvodila tyto momenty, vzniká pracovní diagram průřezu, viz Obr. 3.8.



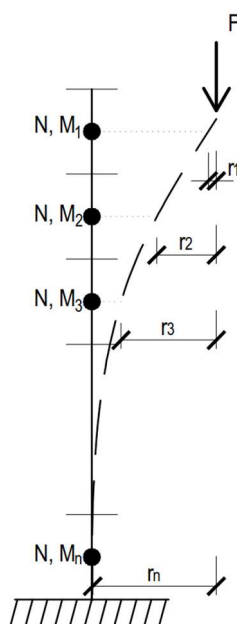


Obr. 3.8 – schematický pracovní diagram železobetonového průřezu v ohybu

Pokud byl pro výpočet výšky tlačeného betonu použit iterační výpočet, jednoduchým upravením silové podmínky rovnováhy na průřezu lze dosáhnout toho, že je vypočítán ohybový moment a křivost pro libovolně velkou hodnotu společně působící normálové síly  $N$ . Z výpočtu je také známá hloubka trhliny pro každou kombinaci  $N$  a  $M$ . Tímto jsou známy všechny vstupní hodnoty potřebné pro výpočet ohybové tuhosti  $EI$  z ohybového momentu  $M$  průřezu a známé křivosti  $\kappa$  pro daný stav.

$$\kappa = \frac{M}{EI} \rightarrow EI = \frac{M}{\kappa} \quad (3.8)$$

Zpracovaný pracovní diagram průřezu, který byl rozšířen o vliv normálové síly lze dále využít pro výpočet deformací prutu. Dalším iteračním výpočtem lze dopočítat deformaci v každé části sloupu, jak je naznačeno na Obr. 3.9.



Obr. 3.9 – princip iteračního výpočtu deformací sloupu pomocí poloanalytického postupu

## 4 PRAKTICKÁ ČÁST

Tato část práce se zaměřuje na nelineární analýzu centricky tlačných železobetonových prutů. Pro analýzu byl použit software ATENA Science od společnosti Červenka Consulting. Tento výpočetní software používá pro analýzu konstrukce metodu konečných prvků a umožňuje i použití prostorových (3D) konečných prvků. Výpočet lze provést jako zcela materiálově i geometricky nelineární.

Byly analyzovány konstrukční prvky různých štíhlostí v rozmezí štíhlosti  $\lambda = 20 \div 200$ . Dále byl zkoumán vliv dalších parametrů – stupeň vyztužení a různá počáteční excentricita osového zatížení.

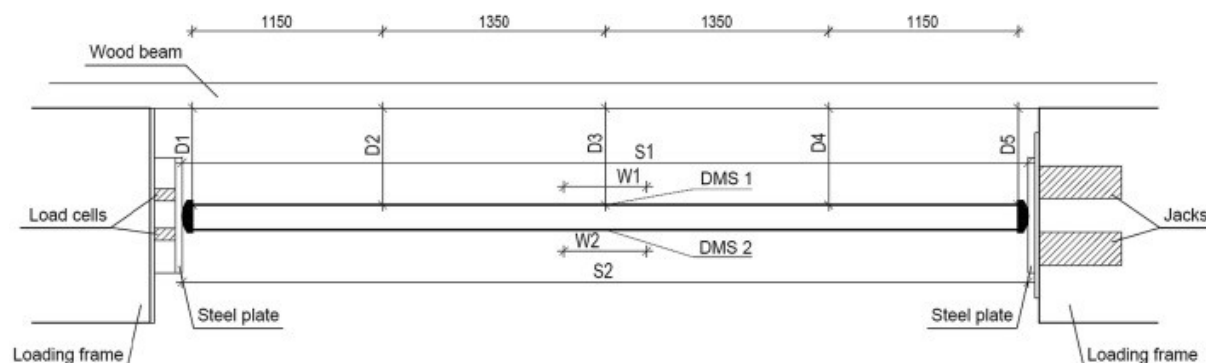
Pro ověření dostatečné přesnosti výpočtu byla provedena validace numerického modelu pomocí výsledků experimentu převzatého z literatury [14].

### 4.1 VALIDACE

Experimentální výzkum štíhlých sloupů, který byl zvolen pro validaci, byl proveden Benkem, Wolfgerem a Dobrým [14] v roce 2019. Tento experiment byl zvolen zejména pro podrobně zpracované výsledky v přehledných grafech a zároveň pečlivě změřené materiálové vlastnosti betonu, ze kterého byly experimentální sloupy vyrobeny. Sloupy byly podrobně zkoumány a měřeny i po provedení experimentu (zejména umístění výztuže a rozměry průřezu).

#### 4.1.1 Popis testovaných sloupů

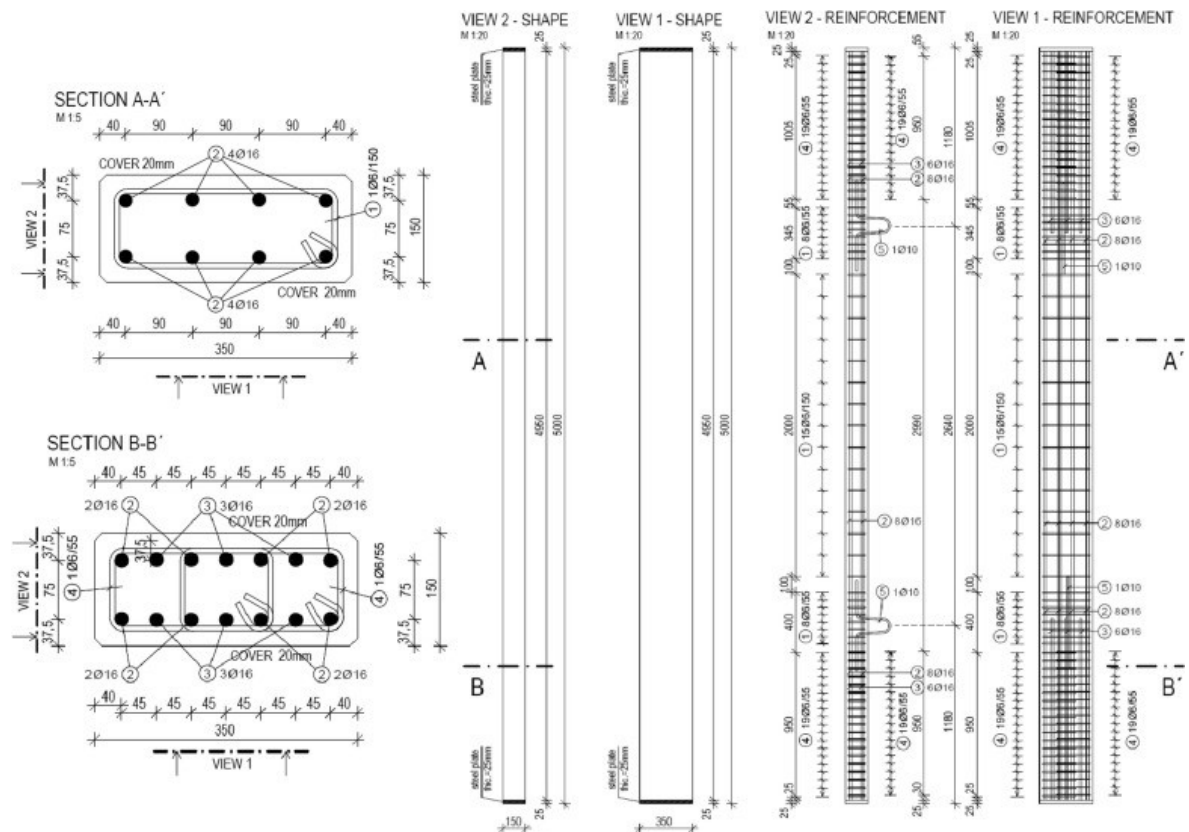
Předmětem experimentu bylo 6 prefabrikovaných železobetonových sloupů, které byly excentricky zatěžovány až do mezního stavu porušení. Rozměry sloupů byly  $150 \times 350$  mm a jejich délka byla 5000 mm. Štíhlost betonového sloupu s destičkami tedy byla  $\lambda = 109$ . Na obou koncích sloupu byly ocelové roznášecí destičky tloušťky 25 mm. Tyto destičky byly přímo přivařené k podélné výztuži sloupu, aby byla normálová síla rovnou přenesena do výztuže a zamezilo se koncentraci napětí v betonu v místě působení zatížení a podpory. [14]



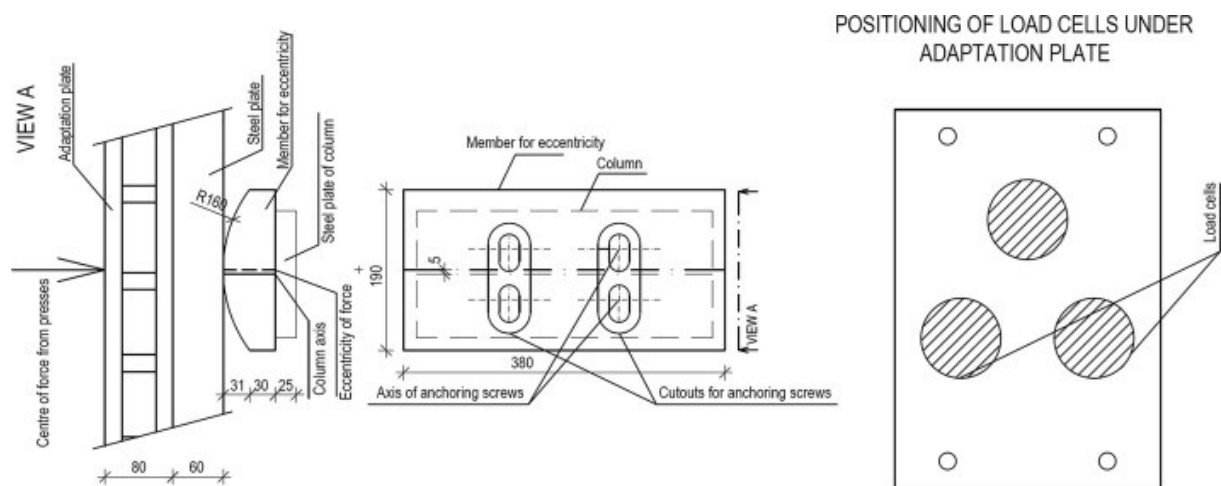
Obr. 4.1 - uspořádání experimentu, převzato z [14]

Všech 6 sloupů bylo vyrobeno podle stejného návrhu a měly být identické. Beton použitý na výrobu byl předepsán pevnostní třídy C50/60 a výztuže B500 B (v souladu s požadavky ČSN EN 1992-1-1 a souvisejících norem). Schéma tvaru a výztuže je vidět na Obr. 4.2. Na tomto obrázku je vidět, že sloup je zejména na jeho koncích silně vyztužený kvůli snaze o zabránění kolapsu vlivem koncentrovaných napětí na koncích sloupu.

Na roznášecí destičky byly dále umístěny 65 mm tlusté zaoblené zatěžovací prvky, které byly použity pro vnesení excentricity 5 mm při zatěžování. Jejich schéma je na Obr. 4.3.



Obr. 4.2 - schéma tvaru a výztuže, převzato z [14]



Obr. 4.3 - schéma zatěžovacího prvku, převzato z [14]

Společně s každým sloupem byly odlity zkušební válce, které byly skladovány i přepravovány stejně se sloupy. Několik dní před experimentem byly válce zkoušeny, aby byly určeny materiálové vlastnosti betonu v tlaku. Výsledky těchto zkoušek jsou na Obr. 4.4.

Date: 27.3.2019

Mark	Weight	Length	Diameter	Ec	F	fc
	(kg)	(mm)	(mm)	(GPa)	(kN)	(N/mm <sup>2</sup> )
1	12.332	294.8	149.6	36.420	1232.91	69.77
2	12.533	297.18	150.4	36.887	1157.83	65.52
3	12.659	298.42	150.3	34.212	1277.35	72.28
4	12.459	296.6	149.81	34.177	1252.37	70.87
5	12.597	297.4	149.9	35.569	1202.61	68.05
6	12.482	296.14	150.15	37.272	1233.23	69.79
Mean	12.510	296.757	150.027	35.756	1226.050	69.380

Obr. 4.4 - výsledky materiálových zkoušek, převzato z [14]

#### 4.1.2 Zatěžování

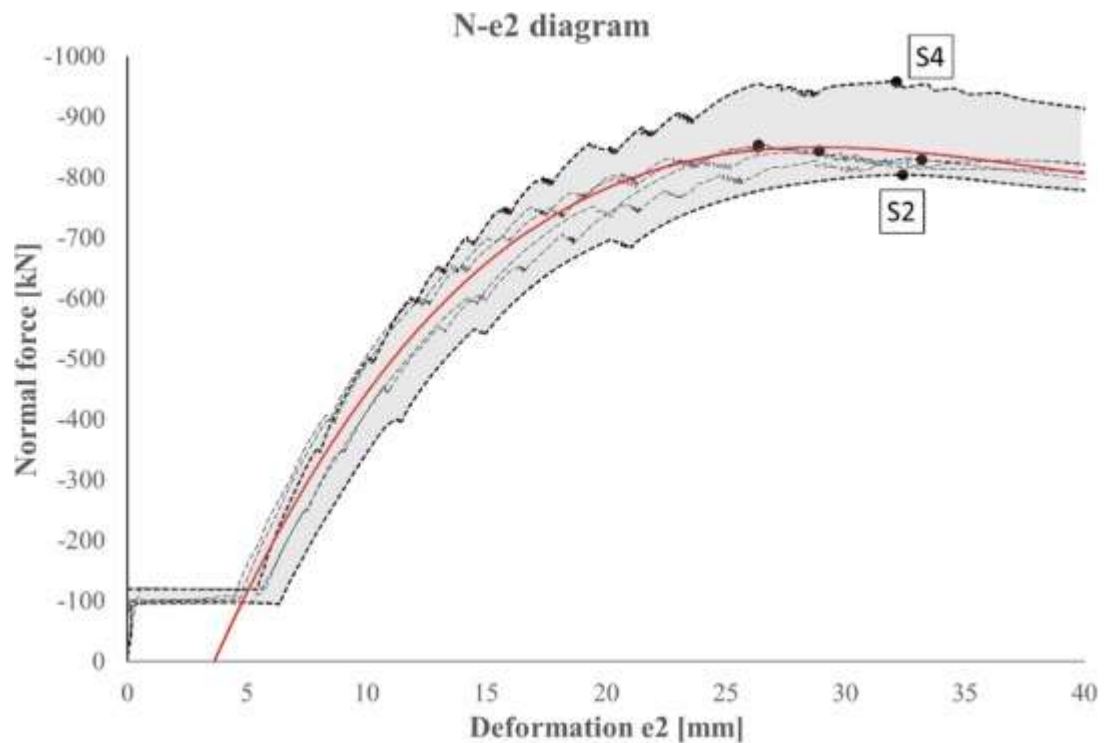
Vzhledem k omezením laboratoře, kde byly sloupy zkoušeny, byly sloupy zatěžovány ve vodorovné poloze. V první fázi byly sloupy zavěšeny ve třetinách rozpětí a zatíženy normálovou silou 100 kN (předepnuty). Poté byly uvolněny ze závěsů a dále se postupovalo v osovém přitěžování až do dosažení prvního mezního stavu, v tomto případě ke ztrátě stability. Přitěžování bylo řízeno posunem, a byla tedy zaznamenána i klesající část zatěžovací křivky.

Před započítím experimentu byly sloupy vizuálně zkontrolovány a bylo konstatováno, že nemají žádné trhliny. Zároveň bylo předpokládáno, že jsou vyrobeny bez imperfekcí. Excentricita zatížení v kritickém průřezu byla tedy pouze navržených 5 mm.



Obr. 4.5 - zatěžování sloupu, převzato z [14]

Na Obr. 4.6 jsou vidět výsledky všech šesti zatěžovaných sloupů. Na vodorovné ose je vyneseno svislý průhyb uprostřed sloupu pouze od vlivu 2. řádu, tedy pouze od vlivu zatížení (včetně vlastní tíhy). Excentricita zatížení v něm tedy není zohledněna. Na svislé ose je pak síla, která byla do sloupu vnášena.

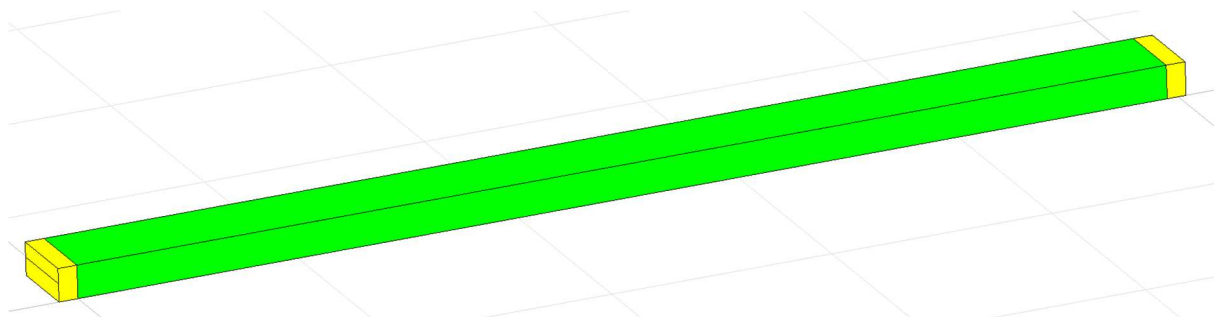


Obr. 4.6 - výsledky experimentu, převzato z [14]

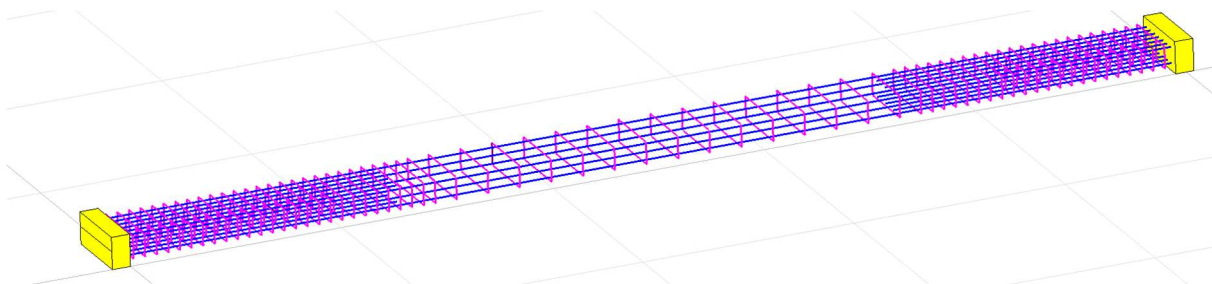
První část grafu, až do jeho vodorovné části, je prvotní předepnutí sloupu silou 100 kN. Vodorovná část je pak vliv uvolnění sloupů ze závěsu, kdy začínají sloupy naplno přenášet vlastní tíhu, a průhyb se zvětšuje vlivem ohybu. V poslední části grafu jsou sloupy zatěžovány až do vybočení. Červená křivka je aritmetický průměr všech šesti zkoušek.

### 4.1.3 Numerický model

Experiment byl v rámci této diplomové práce simulován pomocí numerického modelu a analyzován metodou konečných prvků (MKP), aby bylo možné ověřit, že numerický model je dostatečně výstižný při modelování chování sloupů v další části této práce. Pro první model byly použity průměrné hodnoty materiálových vlastností, které byly popsány v článku [14]. Vzhledem k tomu, že nebyly experimentálně stanoveny vlastnosti oceli, byly použity průměrné vlastnosti betonářské výztuže B500 B podle ČSN EN 1992-1-1 [8]. Jednotlivé sloupy pak byly modelovány stejně, jako je to vidět na Obr. 4.2.



Obr. 4.7 - numerický model sloupu (beton + roznášecí desky)



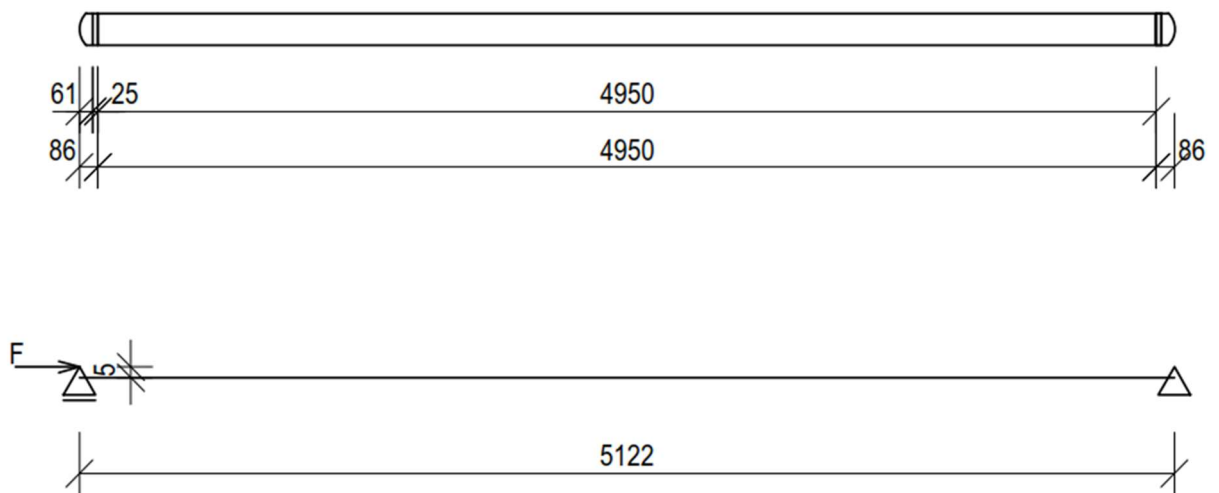
Obr. 4.8 - numerický model sloupu (výztuž)

Konečné prvky, které byly použity pro beton, byly krychelné o hraně velikosti 30 mm (tak, aby kratší strana průřezu byla rozdělena alespoň na 5 konečných prvků). Pro výztuž pak byly použity 1D konečné prvky. Pro oba typy konečných prvků byly uvažovány lineární bázové funkce.

Vzhledem k uspořádání experimentu a tvaru zatěžovacích prvků, jak je patrné z Obr. 4.1 a Obr. 4.3, byly zatěžovací destičky modelovány v tloušťce 86 mm. Teoretická vzpěrná délka byla tedy 5122 mm a štíhlost  $\lambda = 111$ . Uspořádání modelu je zobrazeno na Obr. 4.9.

Stejně jako uvádí Dobrý, Wolfger a Benko [14], byl sloup uvažován ideálně přímý a excentricita, se kterou bylo vnášeno zatížení, byla 5 mm. Sloup byl na jednom konci podepřen pevným liniovým kloubem s excentricitou a na konci, kde byla aplikována síla, byl sloup podepřen posuvným liniovým kloubem, který umožňoval posun ve směru střednice sloupu a vnášení osově síly, také s excentricitou.

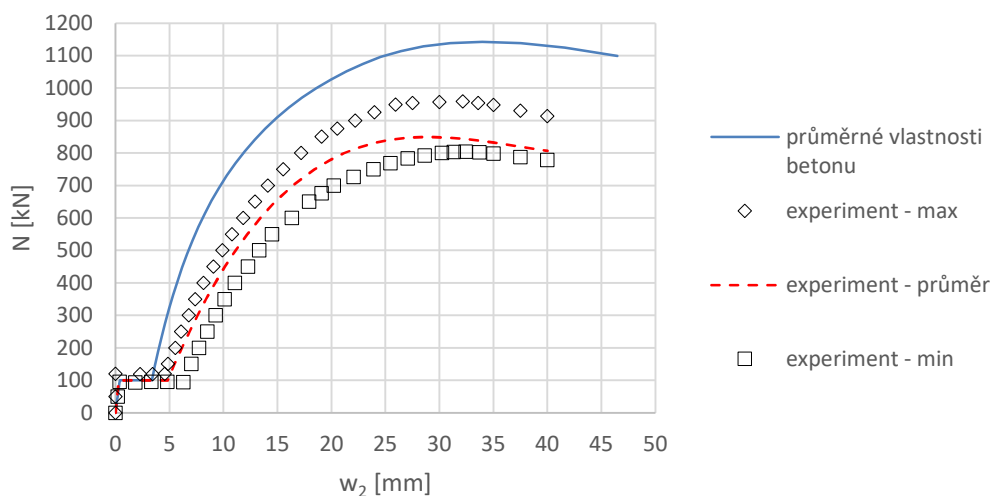
V první fázi zatěžování byla do konstrukce vnesena pouze normálová síla 100 kN. Vlastní tíha nebyla nijak uvažována. V další fázi byla na prvek aplikována vlastní tíha. Vzhledem k velkému množství výztuže, kterým byl sloup vyztužen, byla objemová tíha železobetonu přímo spočítána a odpovídala hodnotě 27,89 kN/m<sup>3</sup>. Rozdílnost rozložení objemové tíhy po délce sloupu byla zanedbána. V poslední fázi výpočtu byl sloup zatěžován posunem až do dosažení mezního stavu únosnosti.



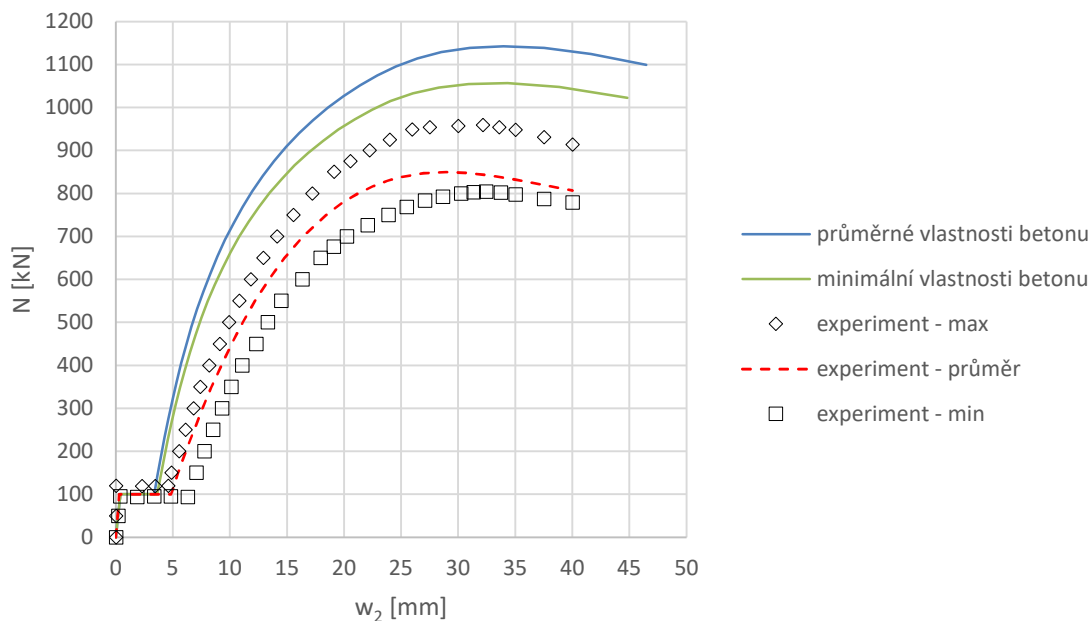
Obr. 4.9 - statické schéma validačního numerického modelu

Výsledky prvního výpočtu jsou vidět na Obr. 4.10 včetně porovnání s výsledky experimentu [14].

Z grafu je patrné, že výsledky výpočtu mají podobný trend jako výsledky experimentu, ale hodnoty jsou poměrně výrazně odlišné včetně maximální normálové síly. V dalším modelu tedy byly použity minimální hodnoty vlastností betonu ( $f_{c,min}$ ,  $E_{c,min}$ ), které vyšly ze zatěžovacích zkoušek [14]. Zbytek modelu zůstal stejný. Výsledky tohoto výpočtu znázorňuje Obr. 4.11.



Obr. 4.10 - výsledky prvního modelu



Obr. 4.11 - výsledky modelu s minimálními mechanickými vlastnostmi betonu

I výsledky tohoto modelu jsou vyšší než výsledky experimentu, ale je patrné, že došlo ke zlepšení a únosnost více odpovídá experimentu.

Ve druhé části grafu je zřejmé, že průhyb od vlastní tíhy není v modelu dostatečně velký, aby vystihl chování zkoušených sloupů. Konstrukce je v této fázi zatížena pod úroveň vzniku trhlin a lze tedy aplikovat pružný výpočet průhybu.

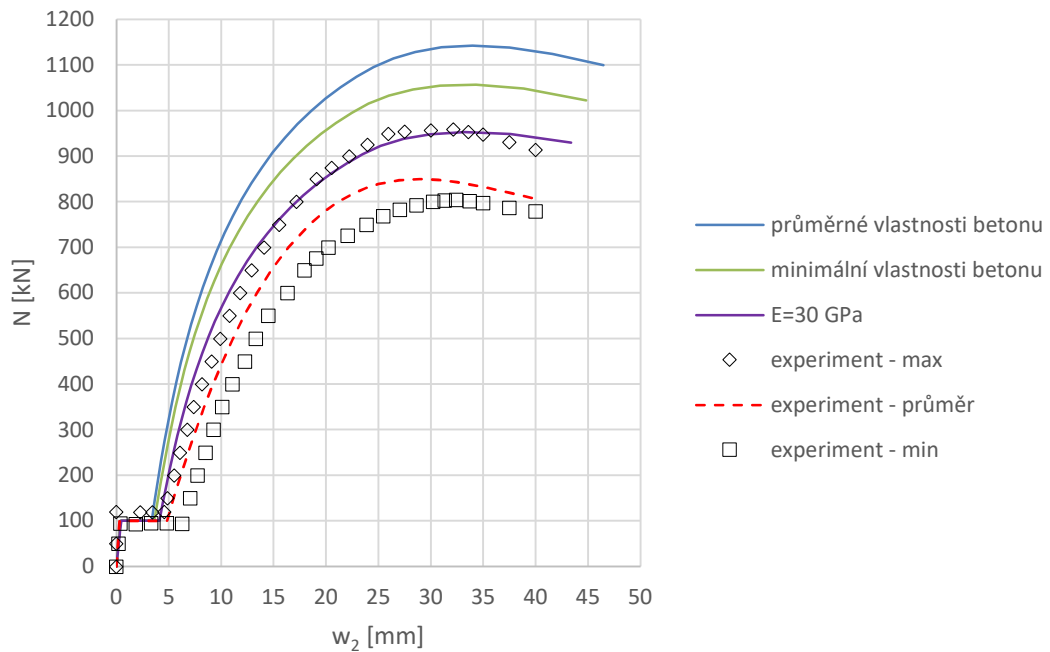
$$w = \frac{5 fl^4}{384 EI} \quad (4.1)$$

Z rovnice (4.1) je zřejmé, že jediné parametry, které mohou ovlivnit tuto neshodu v hodnotách průhybu, je délka sloupu  $l$ , zatížení  $f$ , modul pružnosti  $E$  a moment setrvačnosti průřezu  $I$ . Vzhledem k tomu, že zatížení (vlastní tíha) a délka jsou jasně definovány a moment setrvačnosti je odvozen ze známých rozměrů průřezu a výztuže, je vysoce pravděpodobné, že modul pružnosti betonu byl ve skutečnosti menší, než jak byl změřen na zkušebních válcích. Tento rozdíl mohl být způsoben buď tzv. size-effectem (menší tělesa vykazují vyšší mechanické vlastnosti) a/nebo mikrotrhlinami ve struktuře sloupu, které vznikly například vlivem smršťování, a během vizuálního zkoumání stavu sloupů před experimentem nebyly viditelné.

Dalším faktorem, který mohl ovlivnit výsledky, byly imperfekce. Není reálné, aby byl jakýkoliv skutečný konstrukční prvek vyroben dokonale přímý, ačkoliv tento předpoklad autoři experimentu do svých výpočtů zavádějí. Navíc přesnost vnesené excentricity zatížení během experimentu přesně 5 mm je také diskutabilní.

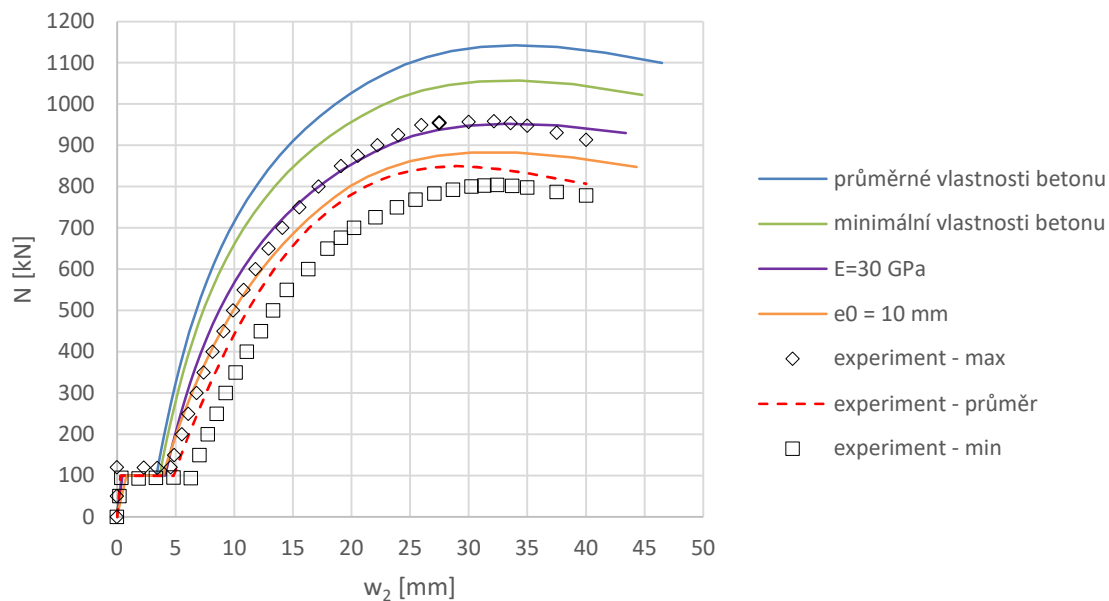


Další, v pořadí třetí, model přebíral opět průměrné hodnoty vlastností betonu ( $f_{c,mean}$ ), ale modul pružnosti byl, vzhledem k výše uvedeným argumentům, snížen z počátečních 35,8 GPa na 30 GPa. Výsledky tohoto modelu jsou na Obr. 4.12.



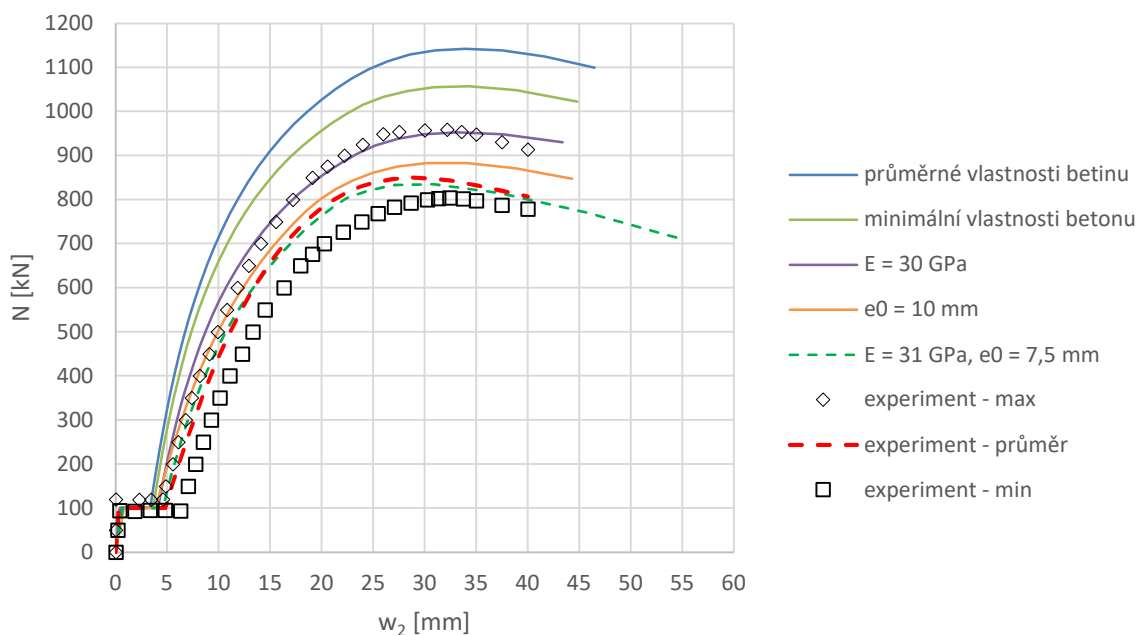
Obr. 4.12 - výsledky modelu se sníženým modulem pružnosti

Výsledky tohoto modelu se již mnohem více blíží skutečnosti. Z grafu je patrné, že modul pružnosti má na únosnost štíhlých sloupů značný vliv. Průhyb ve druhé části grafu se také posunul blíže k naměřeným hodnotám. Výsledek se ale stále poměrně liší od výsledků experimentu. Další, čtvrtý, model tedy opět předpokládal průměrné materiálové vlastnostmi betonu včetně jeho modulu pružnosti, ale excentricita byla zvýšena na  $e_0 = 10$  mm, což odpovídá přibližně 1/500 délky sloupu (původní excentricita odpovídá 1/1000 délky sloupu).



Obr. 4.13 - výsledky modelu s vyšší excentricitou zatížení

Tento model se již mnohem více blíží výsledkům experimentu. Únosnost je téměř shodná, počáteční průhyb je také podobný, ale tento model nemá dostatečný pokles pracovního diagramu po dosažení únosnosti. Je zřejmé, že ideální nastavení výpočetního modelu, bude kombinovat mírné snížení modulu pružnosti betonu a zvýšení excentricity zatížení. U posledního modelu byl zvolen modul pružnosti  $E = 31 \text{ GPa}$  (tj. -13 % oproti průměrnému výsledku materiálových zkoušek na válcích) a excentricita zatížení  $e_0 = 7,5 \text{ mm}$  (1/750 délky sloupu). Výsledky tohoto modelu jsou znázorněny na Obr. 4.14.



Obr. 4.14 - výsledky modelu se sníženým modulem pružnosti i zvýšenou excentricitou

#### 4.1.4 Vyhodnocení validace

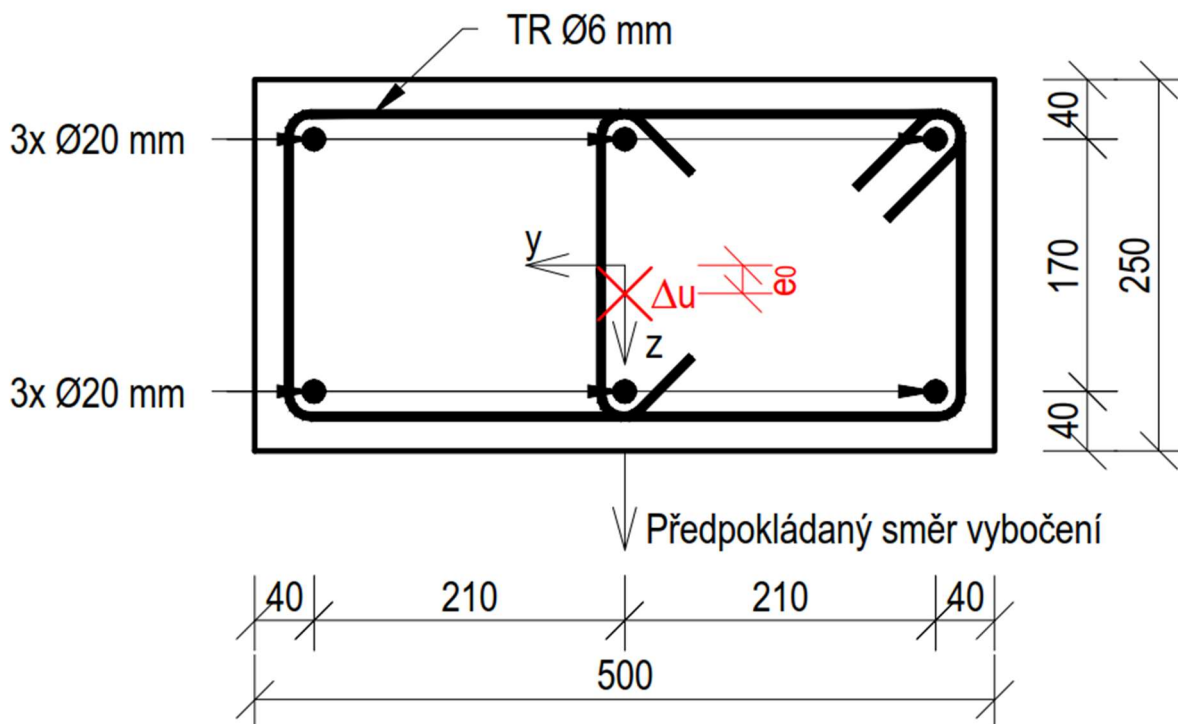
Finální model téměř dokonale vystihuje průměrné výsledky experimentů [14]. Veškeré nastavení výpočetního numerického modelu, až na výjimky, odpovídá nastavení experimentu. Materiálové vlastnosti byly převzaty ze zkoušek materiálu a pouze modul pružnosti byl snížen o 13 %. Toto opatření se dá vysvětlit tím, že lze předpokládat, že skutečný modul pružnosti byl nižší, než byl změřen na válcích, a navíc, že ve sloupech mohly vzniknout mikrotrhliny, například od smršťování, které nemusely být před provedením experimentu zpozorovány. Excentricita zatížení byla mírně zvýšena, o 2,5 mm, neboť je nereálné, aby byly sloupy vyrobeny dokonale přímé a umístění zatěžovacích desek bylo bezchybné.

Tyto úpravy se dají považovat za opodstatněné a v přijatelných mezích. Výpočet štíhlých sloupů pomocí metody konečných prvků za užití nelineárního chování materiálu a 3D konečných prvků v programu Atena Science je tedy dostatečně přesný, aby mohl vystihnout chování reálných sloupů a je uplatněn v následujících kapitolách.

## 4.2 STUDIE CITLIVOSTI

Cílem této studie bylo zkontrolovat, že numerický model sloupu je správně vymodelován a výpočet správně nastaven, aby byl připraven pro parametrickou studii. Bylo využito poznatků z validace – primárně nastavení materiálových vlastností a řešiče pro výpočet. Primárně byl zjišťován vliv velikosti konečných prvků na výpočet vnitřních sil a deformací. Dále bylo ověřováno, že vliv podepření sloupu nemá při zachování stejné štíhlosti vliv na výsledné průhyby ani vnitřní síly.

Jako model byl zvolen sloup obdélníkového průřezu o rozměrech 250 × 500 mm. Stupeň vyztužení je  $\rho = 1,5\%$ , což odpovídá vyztužení 2×3Ø20 mm. Příčná výztuž se skládá z trojstržných třmínků (třmínku a spony) Ø6 mm s osovou podélnou roztečí 250 mm. V hlavě a v patě sloupu je pak jejich rozteč snížena na 150 mm. Toto vyztužení splňuje veškeré konstrukční zásady uvedené v ČSN EN 1992-1-1 [8]. Schéma vyztužení průřezu je zobrazeno na Obr. 4.15. Krycí vrstva výztuže je stanovena na 20 mm.

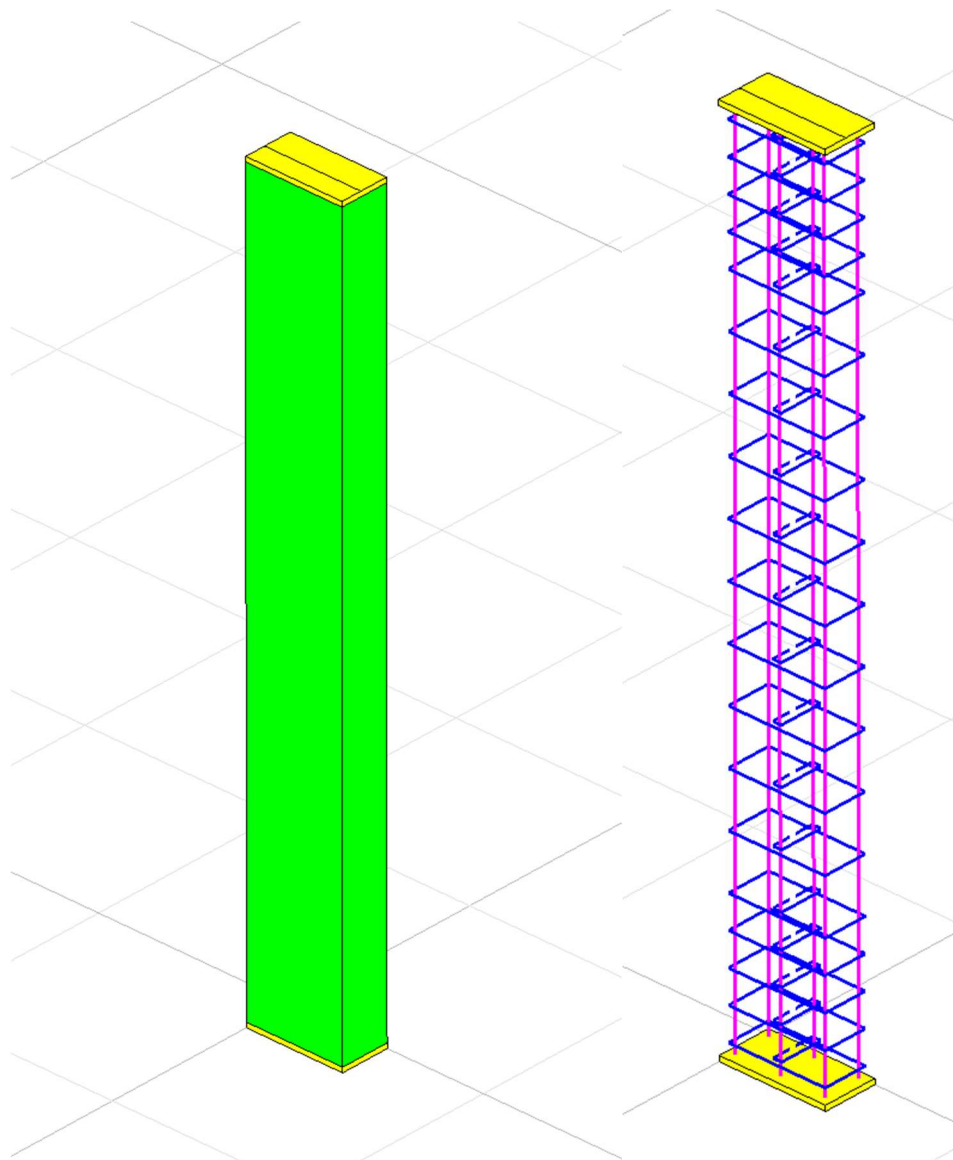


Obr. 4.15 - schéma vyztužení, zatížení a vybočení referenčního modelu

Sloupy jsou zatěžovány v hlavě sloupu s excentricitou  $e_0$  ve směru menší tuhosti průřezu. Tato excentricita byla stanovena dle ČSN EN 1992-1-1 pro případ osamoceneného tlačného prvku, který je součástí ztužené konstrukce:  $e_0 = L_0/400$ .  $L_0$  je vzpěrná délka sloupu.

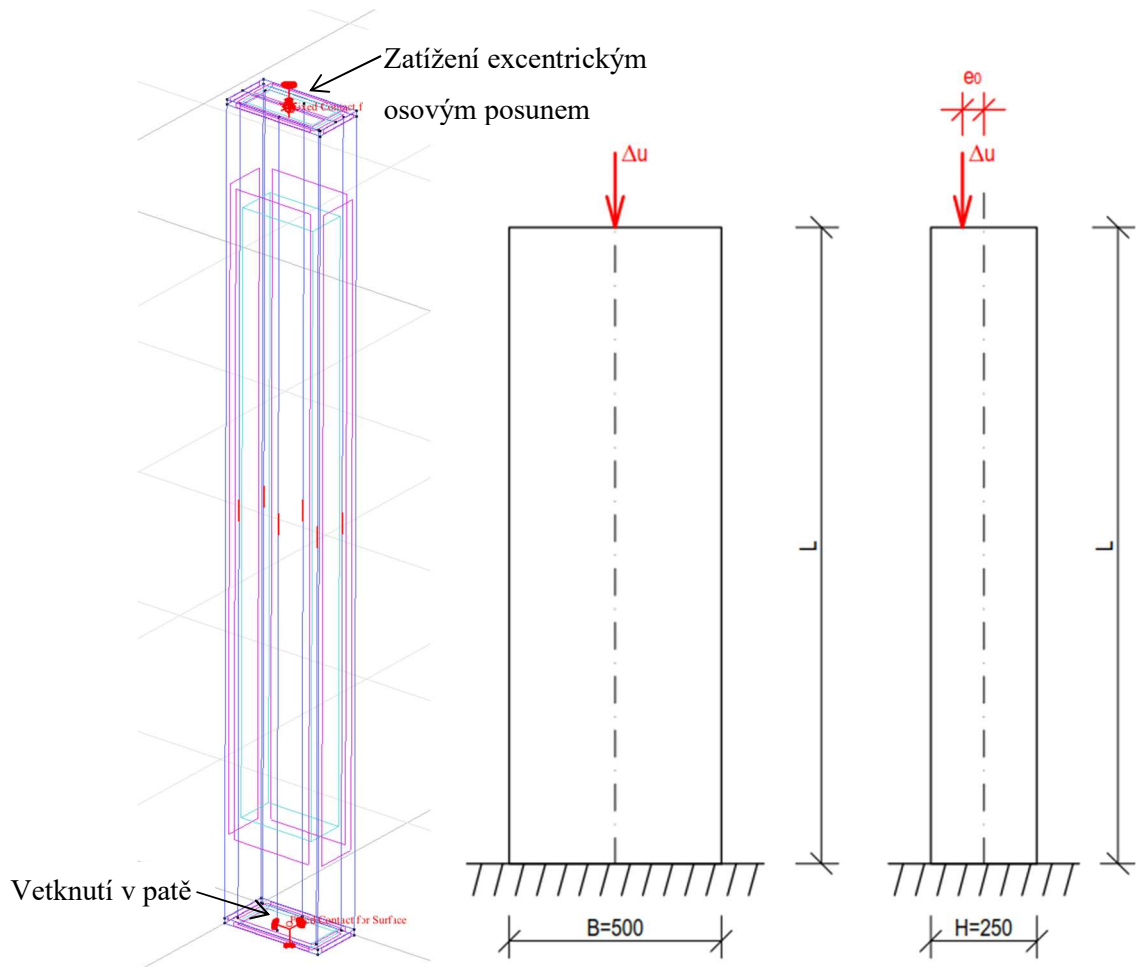
Pro studii byly zvoleny konečné prvky tvaru kvádrů s podstavou o rozměrech  $50 \times 50$  mm. Měnila se pouze podélná velikost konečných prvků. Tyto délky byly 50 mm, 75 mm, 100 mm, 125 mm, 150 mm a 200 mm. Dále byly zkoumány krychelné konečné prvky s hranou o velikosti 125 mm. Očekávalo se, že menší konečné prvky a prvky tvaru krychle budou mít lepší výsledky. Z toho důvodu byly v případě neshody ve spočítaných hodnotách považovány za správné ty, kde byly použity krychelné konečné prvky s hranou o velikosti 50 mm. Ve všech případech byla použita lineární bázová funkce. Pro zjištění vlivu velikosti konečných prvků byl zvolen sloup se štíhlostí  $\lambda = 100$ .

Sloup je ve své patě uložen na roznášecí desky tloušťky 25 mm s vysokou tuhostí, aby nedošlo ke zkreslení výsledků vlivem deformací desky ani k lokálním napětím v betonu vzniklých nedokonalostmi uložení. Stejně tak je deska s vysokou tuhostí umístěna v hlavě sloupu, a roznáší bodové zatížení do betonového sloupu bez vzniku lokálních napětí v betonu. Roznášecí desky jsou započítávány do vzpěrné délky podle druhu podepření daného konce. Deska na volném konci je do vzpěrné délky započítána. Stejně tak je tomu v případě podepření kloubem. V případě vetknutí tloušťka desky započítána není.



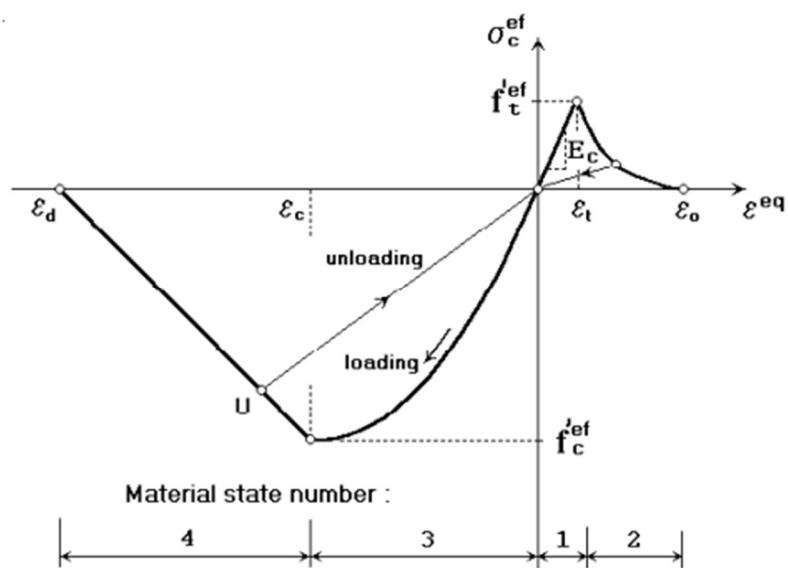
Obr. 4.16 - model pro studii citlivosti

Pro výpočet byl zvolen nelineární pracovní diagram betonu, který lze vidět na Obr. 4.18. Tento pracovní diagram předpokládá lineární a parabolický průběh v tlačené části křivky a po dosažení tlakové pevnosti dochází k lineárnímu tlakovému změkčení materiálu. V tažené části je diagram lineárně pružný až do okamžiku dosažení tahové pevnosti, kdy dochází k tahovému změkčení. Je uvažováno s průměrnými mechanickými vlastnostmi betonu. Uvažovaná pevnostní třída betonu je C40/50 dle ČSN EN 1992-1-1.



Obr. 4.17 - podepření a zatížení referenčního modelu

Pracovní diagram betonářské oceli byl použit bilineární s průměrnými hodnotami materiálových vlastností dle ČSN EN 1992-1-1. Je znázorněn na Obr. 3.5. Betonářská ocel odpovídá třídě B500 B.



Obr. 4.18 - pracovní digram betonu v programu ATENA [13] uvažovaný pro numerickou analýzu

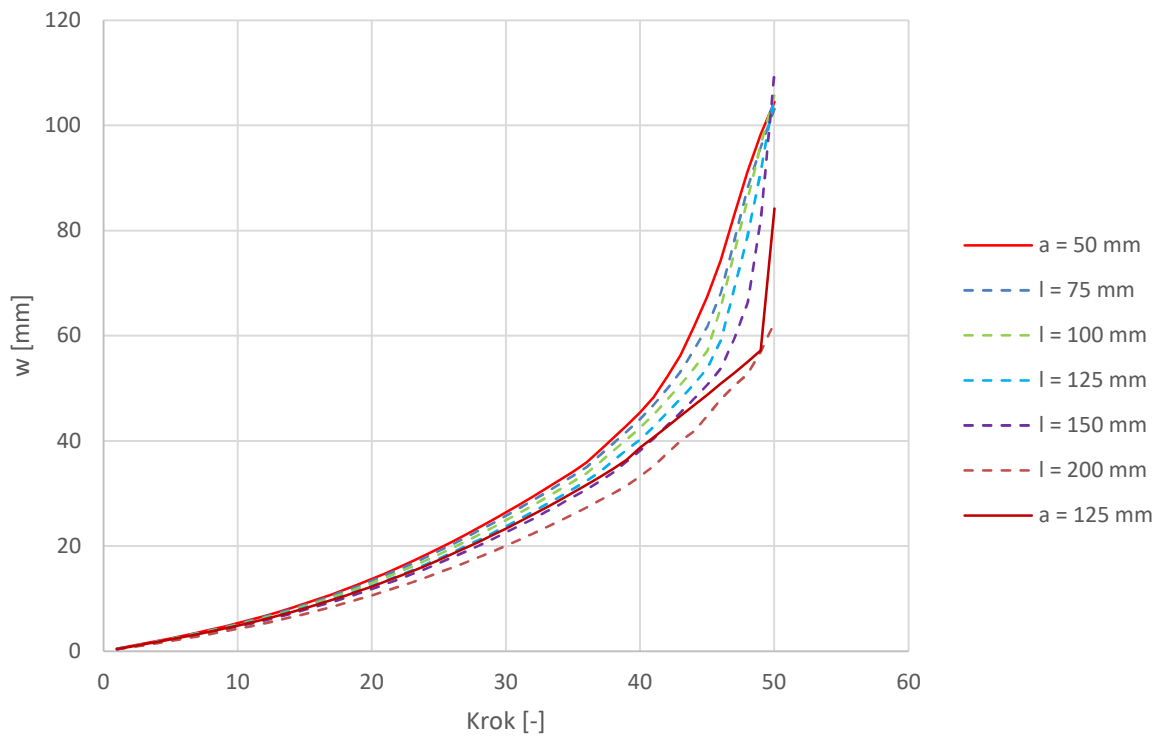
#### 4.2.1 Vliv velikosti konečných prvků

Sloup byl pro tuto analýzu uvažován jako vetknutý v patě s volným koncem v hlavě, kde působilo excentrické zatížení. Sloup byl zatěžován předepsaným osovým posunem, aby bylo možné sledovat jeho chování i po dosažení únosnosti. Měřenými hodnotami byly reakce sloupu v místě vnášení posunu  $R$  a vodorovný posun v hlavě sloupu způsobený zatížením (průhyb II. řádu)  $w_2$ . Z těchto hodnot pak byly dopočteny vnitřní síly. Vlastní tíha sloupu byla při analýze zanedbána.

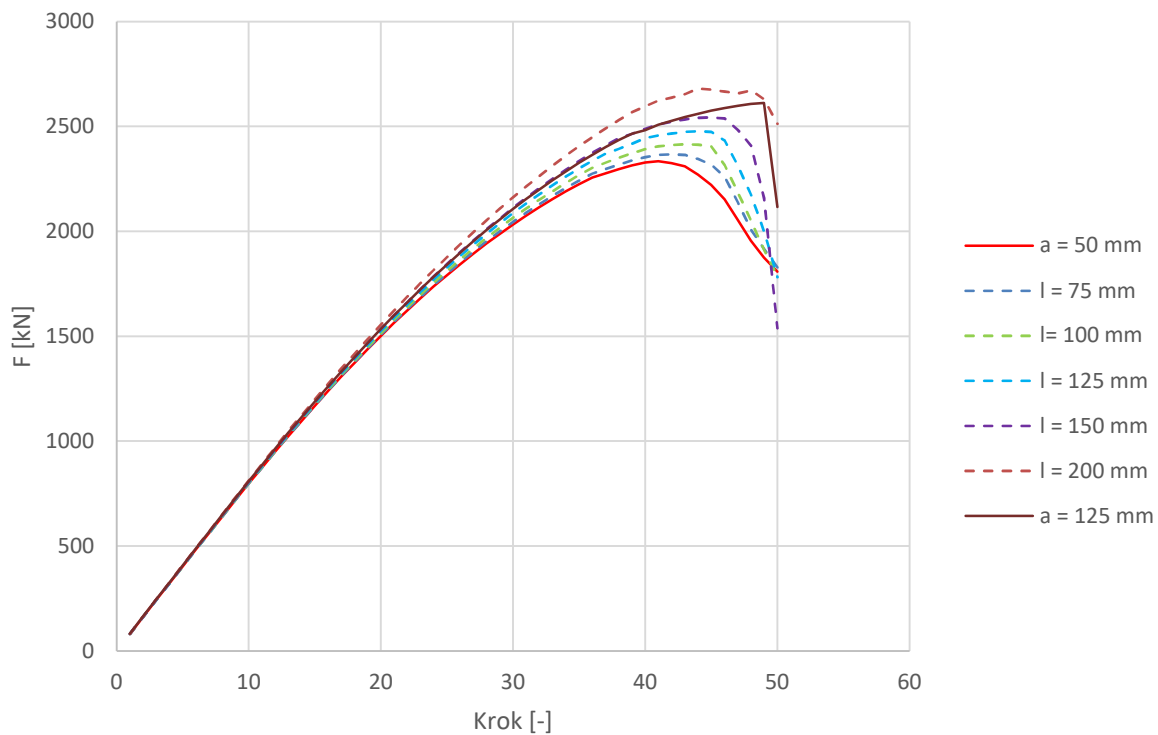
$$F = -R \quad (4.2)$$

$$M = F (e_0 + w_2) \quad (4.3)$$

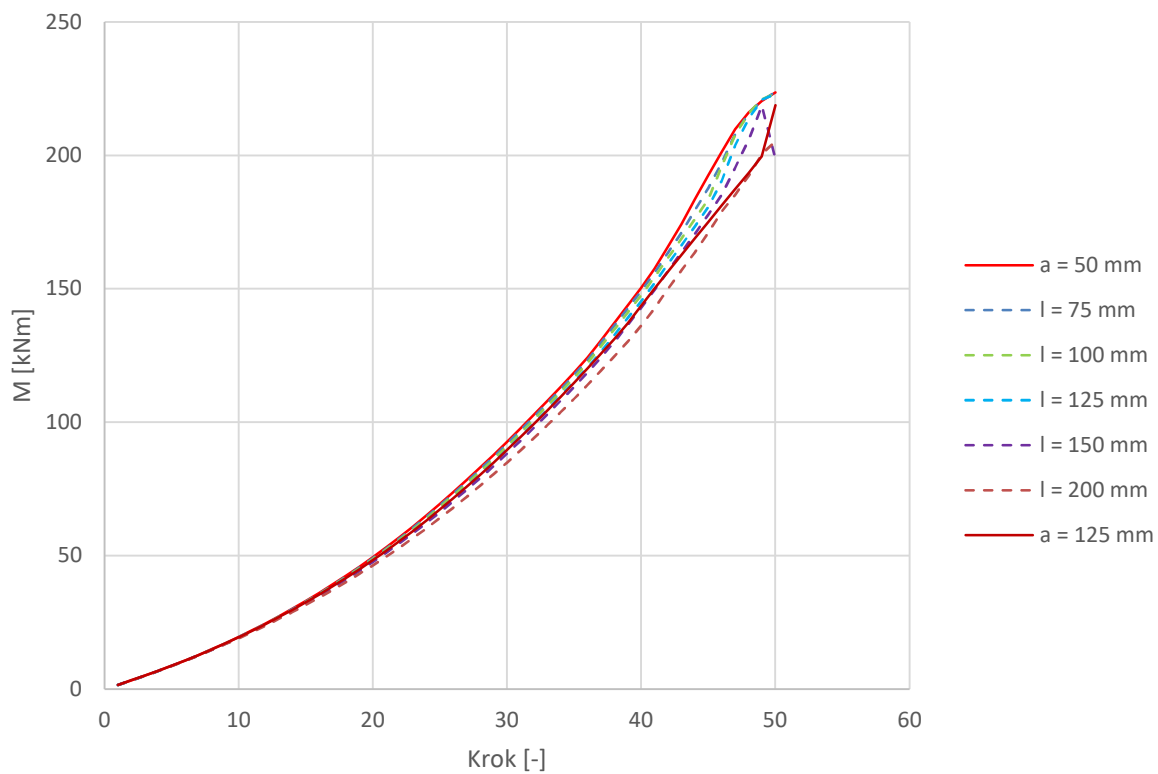
Grafy, na kterých byly zjišťovány rozdíly vlivem použití jiné velikosti konečných prvků, jsou zobrazeny na Obr. 4.19 až Obr. 4.22. Pro přehlednost jsou výsledky spočítané s krychelnými konečnými prvky zobrazeny plnou čarou, ostatní čárkovanou.  $a$  označuje velikost hrany krychle,  $l$  pak délku konečného prvku s podstavou o rozměrech  $50 \times 50$  mm.



Obr. 4.19 - citlivost vodorovného posunu  $w$  na velikost konečných prvků

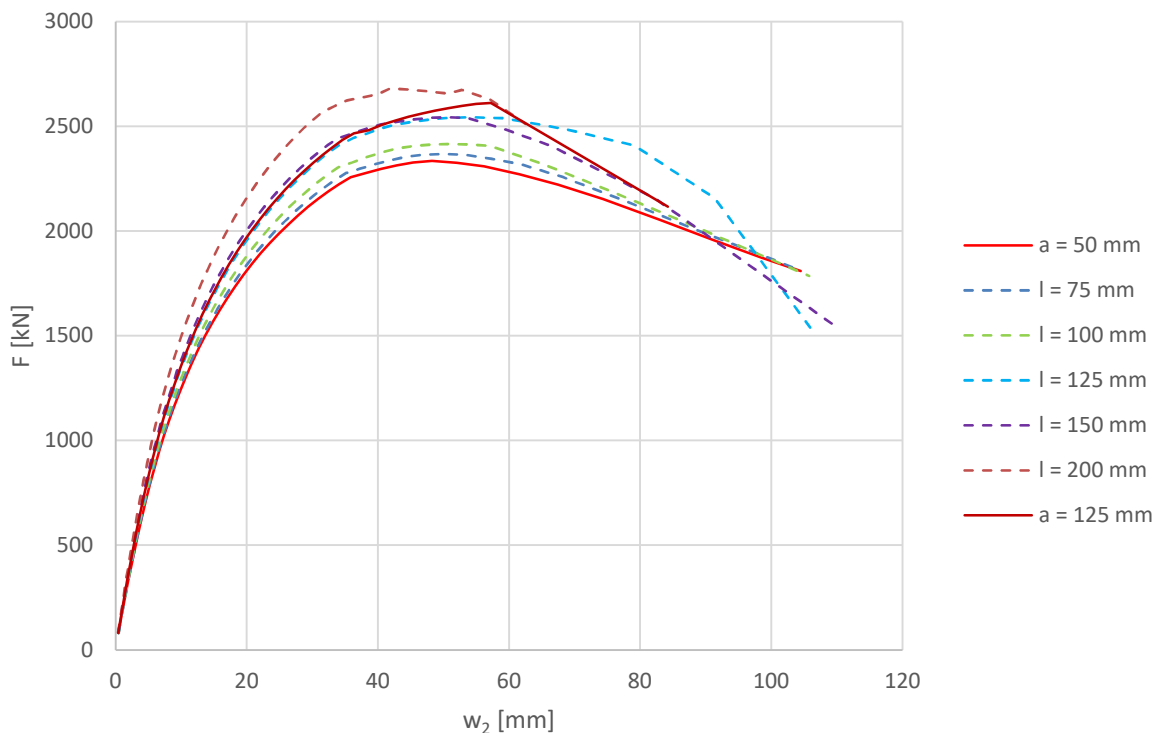


Obr. 4.20 – citlivost zatěžovací síly  $F$  na velikosti konečných prvků



Obr. 4.21 - citlivost ohybového momentu v patě sloupu  $M$  na velikosti konečných prvků





Obr. 4.22 - citlivost závislosti síly  $F$  ku příčné deformaci  $w_2$  od II. řádu na velikosti konečných prvků

Na Obr. 4.19, kde je zobrazen nárůst příčných deformací  $w$ , je patrné, že všechny modely se chovají podobně. Je ale zřetelné, že se zvětšující se velikostí použitých konečných prvků se zmenšuje deformace. U modelu s krychelnými konečnými prvky o velikosti 125 mm je zřetelná nespojitost vykreslené funkce.

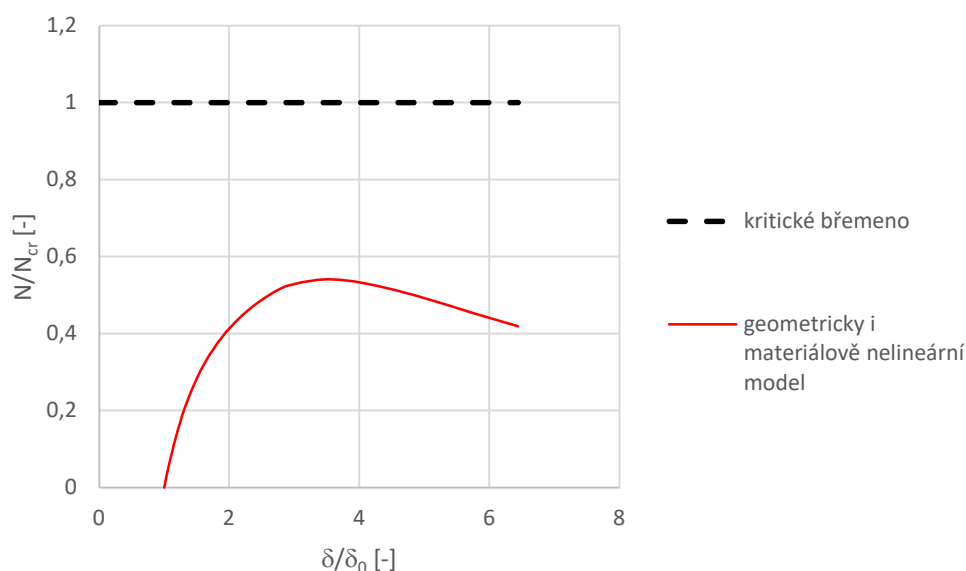
Z Obr. 4.20, kde je tentokrát zobrazena zatěžovací síla  $F$ , je patrný stejný závěr. Pro malé konečné prvky vychází i menší síly. U modelu s krychelnými konečnými prvky o velikosti 125 mm se objevuje opět nespojitost.

U momentu v patě, jehož průběh je zobrazen na Obr. 4.21, jsou si hodnoty pro všechny případy mnohem bližší.

V posledním grafu na Obr. 4.22, kde je zobrazena závislost síly  $F$  na momentu  $M$ , jsou jednotlivé výsledky nejvíce odlišné. Pro konečné prvky o velikosti 50 mm, 75 mm a 100 mm vychází výsledky, které jsou nejvíce podobné. U ostatních modelů vychází více odlišné výsledky. Tyto křivky již jsou zřetelně nehladké a poměrně zřetelně se odlišují.

Čas nutný pro výpočet se u všech modelů příliš nelišil. Pro další analýzu tedy bylo použito krychelných konečných prvků o hraně velikosti 50 mm. Pro toto nastavení vyšly nejnejpříznivější výsledky a zároveň byly grafy vždy hladké. Lze usuzovat, že s použitím větších konečných prvků také rostla nepřesnost výsledků.

Podobný graf jako je na Obr. 4.22 byl zobrazený na Obr. 2.14 v teoretické části této práce. Při malé úpravě hodnot na osách grafu je pak možné vykreslit stejné veličiny. Tento upravený graf je zobrazen na Obr. 4.23. Byly při tom použity krychelné konečné prvky o velikosti 50 mm. Štíhlost vykresleného sloupu je  $\lambda = 100$ . Při porovnání s Obr. 2.14 lze usoudit, že se sloup chová přesně podle předpokladů. Příčná deformace se zvyšuje nelineárně a není dosaženo hodnoty kritického břemene.



Obr. 4.23 - poměrná normálová síla ku poměrům příčným deformacím nelineárního modelu

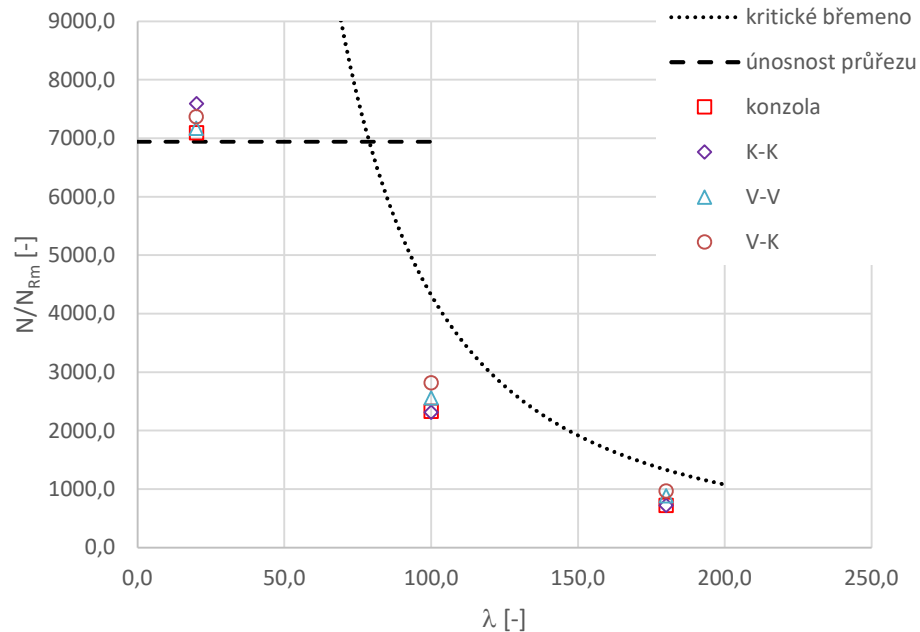
#### 4.2.2 Vliv okrajových podmínek (podepření)

Pro kontrolu správnosti zkonstruovaného modelu a ověření výpočtu byly zhotoveny i další modely s odlišným podepřením sloupu. Tyto numerické modely byly odvozeny od modelu použitého pro zjištění citlivosti modelu na velikost konečných prvků. Vliv způsobu podepření byl zjišťován celkem na třech různých štíhlostech  $\lambda = 20$ ,  $\lambda = 100$  a  $\lambda = 180$ . Jednotlivé modely se lišily pouze ve způsobu podepření a v délce sloupu. Pro výpočet nutné délky sloupu tak, aby byla zachována stejná štíhlost pro všechny uvažované způsoby podepření, byly použity koeficienty z Obr. 2.2.

Byly uvažovány tyto způsoby podepření: konzola, kloub-kloub (K-K), vetknutí-kloub (V-K) a vetknutí-vetknutí (V-V).

Na Obr. 4.24 je graf štíhlosti  $\lambda$  VS tlaková únosnost  $N$ , který byl představen v kapitole 2.1.4. Únosnost průřezu je spočítána jako maximální tlaková osová síla z parabolicko-rektangulárního pracovního diagramu podle ČSN EN 1992-1-1 [8]. Kritické břemeno je spočítáno podle vztahu (2.9). Výsledky pro všechny způsoby podepření sloupů by měly být teoreticky shodné. Jak je ale vidět z grafu, výsledky se lehce liší. U malých štíhlostí je zase patrné, že únosnost překračuje teoretickou hodnotu pro dostředný tlak. To může být způsobeno použitím rozdílného pracovního

diagramu betonu. Lze ale konstatovat, že si jsou jednotlivé hodnoty únosnosti blízké. V parametrické studii se lze tedy omezit na analýzu konzoly. Je to dostatečně vystihující a bezpečné zjednodušení.



Obr. 4.24 - porovnání výsledků různých způsobů podepření pro různé hodnoty štíhlosti

#### 4.2.3 Přesné parametry konečného nastavení studie citlivosti

- Zatížení**

Řízení zatěžování: Posunem

- Konečné prvky pro beton**

Tvar prvků: Krychle

Rozměr prvků: 50 mm

Bázové funkce: Lineární

- Konečné prvky pro výztuž**

Tvar prvků: 1D

Bázové funkce: Lineární

- Nastavení řešiče**

Metoda výpočtu: Newton-Raphson

Řešič: Parallel Direct Sparce Solver (PARDISO)

Geometrická nelinearita: Aktivována

- Mechanické vlastnosti betonu:**

Typ materiálu: Nelineární

Třída betonu dle EC2: C40/50

Bezpečností formát:	Průměrné vlastnosti
Modul pružnosti $E$ :	35000 GPa
Poissonův součinitel $\nu$ :	0,2
Tahová pevnost betonu $f_{ct}$ :	3,5 MPa
Tlaková pevnost betonu $f_c$ :	-48,0 MPa
Lomová energie:	$8,75 \cdot 10^{-5}$ MN/m
Vzdálenost trhlin:	150 mm
Min. vzdálenost trhlin:	80 mm
Tahové zpevnění betonu:	Neuvažováno
Maximální velikost kameniva:	16 mm
Počátek drcení betonu $f_{co}$ :	-7,35 MPa
Max. plastická deformace $w_d$ :	0,5 mm
Max. redukce pevnosti potřhaného betonu:	0,8
Min. drcená zóna (Crush band):	250 mm
<b>• Mechanické vlastnosti výztuže:</b>	
Typ materiálu:	Nelineární
Třída oceli dle EC2:	B500 B
Bezpečností formát:	Průměrné vlastnosti
Modul pružnosti $E$ :	200 GPa
Poissonův součinitel $\nu$ :	0,3
Mez kluzu $f_k$ :	550 MPa
Maximální podélné protažení $\epsilon_{uk}$ :	0,05
Mez pevnosti $f_u$ :	594 MPa
<b>• Mechanické vlastnosti roznášecích destiček:</b>	
Typ materiálu:	Lineárně pružný
Modul pružnosti $E$ :	210 000 GPa
Poissonův součinitel $\nu$ :	0,3

## 4.3 PARAMETRICKÁ STUDIE

### 4.3.1 Referenční model

Do této studie je převzat model ze studie citlivosti. Sloup je zatěžován v hlavě s excentricitou ve směru menší tuhosti průřezu. Pro referenční případ je tato excentricita stanovena dle ČSN EN 1992-1-1 [8] jako pro osamocený tlačný prvek, který je součástí ztužené konstrukce, na  $e_0 = L_0/400$ .  $L_0$  je vzpěrná délka sloupu, která se v případě konzoly rovná  $L_0 = 2L$ .

Sloup je ve své patě uložen na roznášecí desky s vysokou tuhostí. Stejně tak je deska umístěna v hlavě sloupu, a roznáší bodové zatížení do betonového sloupu. Deska v hlavě sloupu je započítána do délky sloupu při výpočtu štíhlosti, deska v patě nikoliv. Uvažovaná pevnostní třída betonu je C40/50 dle ČSN EN 1992-1-1. Tento parametr zůstal neměnný pro všechny modely vytvořené pro parametrickou studii.

Pracovní diagram betonářské oceli byl použit bilineární s průměrnými hodnotami materiálových vlastností dle ČSN EN 1992-1-1. Betonářská ocel odpovídá třídě B500 B.

Konečné prvky, které byly vygenerovány pro beton, byly prostorové krychelné o hraně délky 50 mm. Pro výztuž byly použity 1D konečné prvky. V obou případech byly použity lineární báze funkce.

### 4.3.2 Proměnné parametry studie

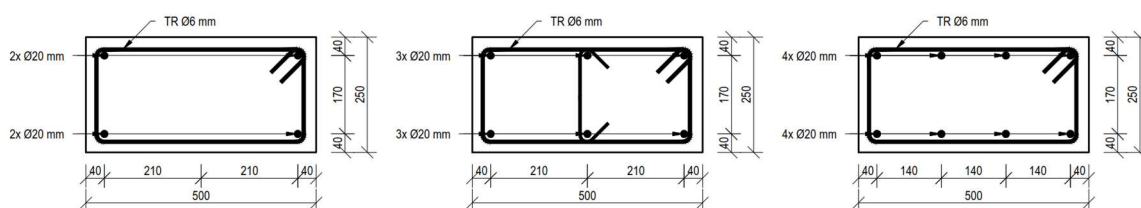
Každý model zkoumající vliv změny konkrétního parametru na chování sloupu byl přímo odvozen od referenčního modelu. Má tedy všechny parametry, kromě toho zkoumaného, stejné jako referenční model, aby byl jasně poznat vliv tohoto parametru.

#### Počáteční excentricita zatížení

Jedním ze zkoumaných parametrů byla excentricita zatížení. Celkem byl zkoumán vliv excentricity pro 3 varianty. Základní, referenční excentricita, byla  $e_0 = L_0/400$ . Od té byly odvozeny dvě další varianty:  $L_0/200$  a  $L_0/800$ .

#### Stupeň vyztužení

Referenční stupeň vyztužení byl  $\rho = 1,5 \%$ . Od něj byly dále odvozené další 2 varianty. Těmi byly  $\rho = 1,0 \%$  a  $\rho = 2,0 \%$ . Na Obr. 4.25 jsou schémata pro všechna uvažovaná vyztužení průřezu.

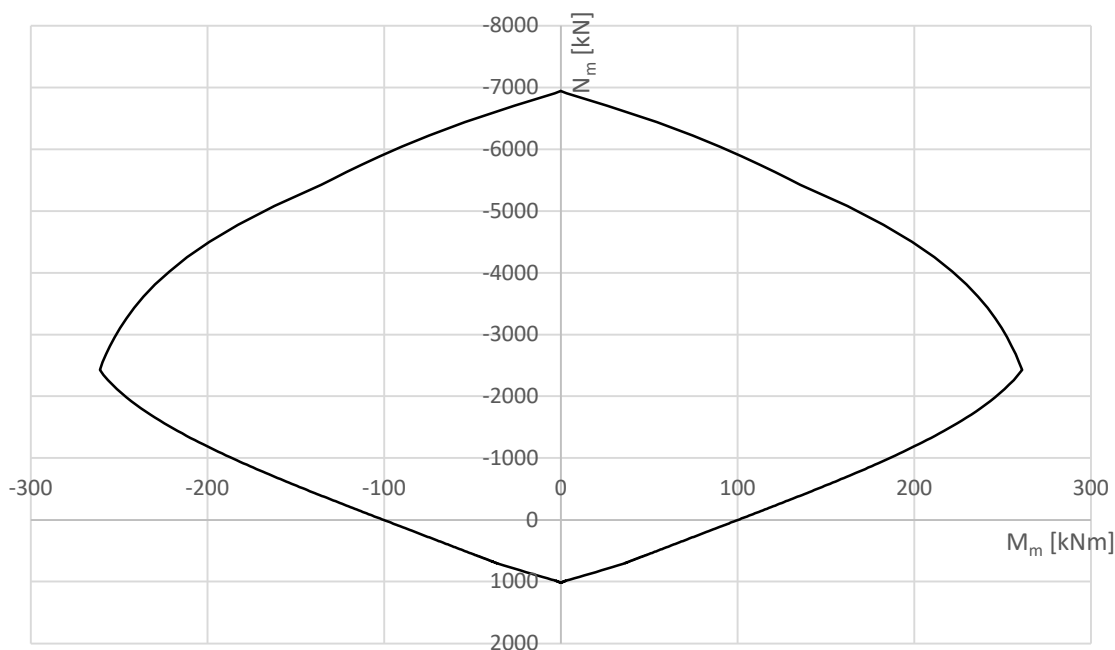


Obr. 4.25 - schémata vyztužení – vlevo:  $\rho = 1,0 \%$ , uprostřed:  $\rho = 1,5 \%$ , vpravo:  $\rho = 2,0 \%$

### 4.3.3 Výsledky parametrické studie

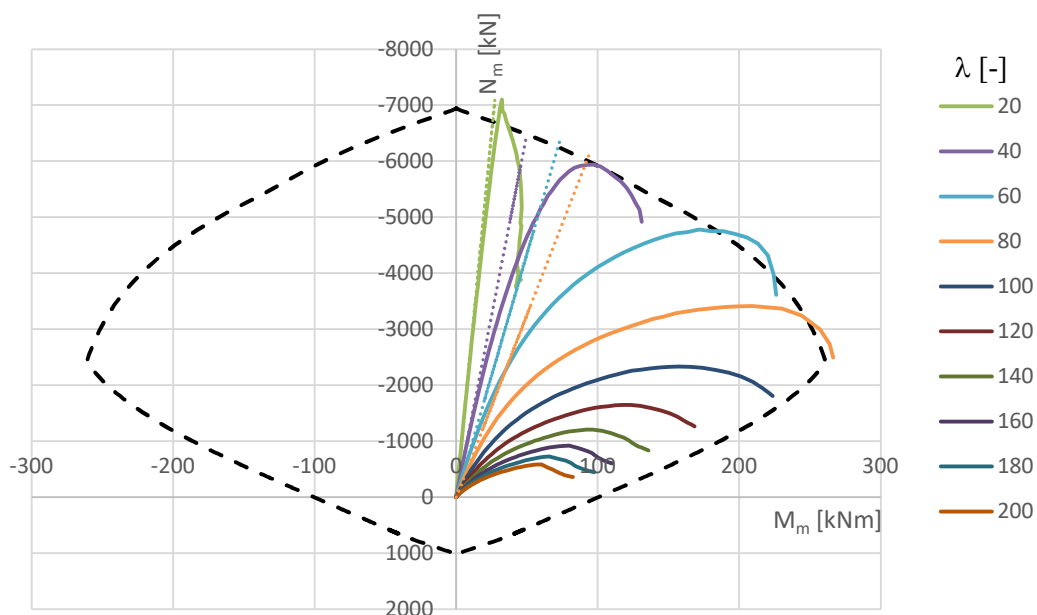
#### Referenční model

Prvním výsledkem jsou průběhy vnitřních sil nelineárního výpočtu v programu ATENA. Tyto výsledky je vhodné zobrazit v kontextu interakčního diagramu (ohybový moment  $M$  vs. normálová síla  $N$ ), který vymezuje oblast, jakou kombinaci těchto dvou vnitřních sil dokáže průřez sloupu přenést. Interakční diagram byl pro tento účel sestrojen analyticky (Obr. 4.26). V této části práce jsou zobrazeny hodnoty pro průměrné materiálové vlastnosti betonu a výztuže. Materiálový model betonu, který byl k tomuto účelu použit, je parabolicko-rektangulární pracovní diagram betonu, který popisuje ČSN EN 1992-1-1 [8]. Pracovní diagram výztuže byl uvažován bilineární s tahovým i tlakovým zpevněním podle normy [8]. Tedy stejný, jaký byl uvažován v numerickém výpočtu. Mezní hodnoty, které jsou v interakčním diagramu zobrazeny, odpovídají stavu, kdy dojde buď k drcení betonu, nebo přetržení výztuže. Předpokládá se nulová tahová pevnost betonu v mezním stavu únosnosti. Vzhledem k tomu, že program ATENA Science používá jiný pracovní diagram betonu, je toto srovnání spíše ilustrativní a přibližné.



Obr. 4.26 - analytický pracovní diagram pro referenční model – průměrné mechanické vlastnosti materiálů

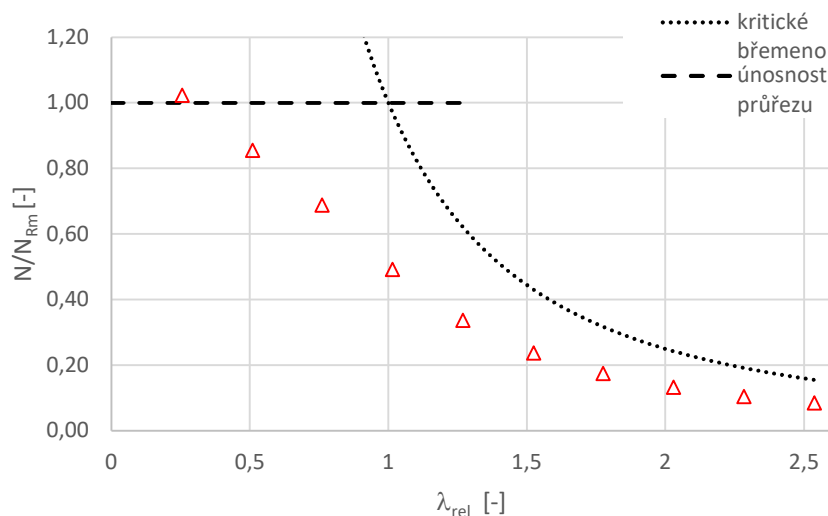
Z grafu na Obr. 4.27 je patrné, že se výsledky numerické analýzy v porovnání s analyticky sestaveným interakčním diagramem velmi dobře shodují. U nejnižší zkoumané štíhlosti ( $\lambda = 20$ ), která odpovídá masivnímu sloupu a u které vliv II. řádu není téměř znatelný (ohybový moment narůstá lineárně), je únosnost téměř identická s teoretickou hodnotou interakčního diagramu.



Obr. 4.27 - výsledky referenčního modelu s počáteční excentricitou zatížení  $L_0/400$ , tečkovaně je vyznačen moment podle teorie I. řádu pro některé průběhy

Zároveň je jasně patrný vliv narůstající štíhlosti. Již u sloupu se štíhlostí  $\lambda = 60$  je zřejmý nelineární nárůst ohybového momentu se zvětšující se normálovou silou (vliv 2. řádu). Při dalším nárůstu štíhlosti sloupů pak dochází ke ztrátě stability dříve, než dojde k dosažení únosnosti průřezu. Tyto sloupy jsou označeny jako velmi štíhlé.

Maximální únosnosti pro jednotlivé štíhlosti byly na Obr. 4.33 vyneseny do grafu relativní štíhlost VS poměrná síla (viz kapitola 2.1.4). Z grafu je patrné, že únosnost tlačného sloupu je menší než ohraničující podmínka kritického břemene. Tím se potvrzuje tvrzení z kapitoly 2.2.4, že vlivem materiálových nelinearit není možné dosáhnout kritického břemene. Reálná únosnost je tedy nižší než tato hodnota.

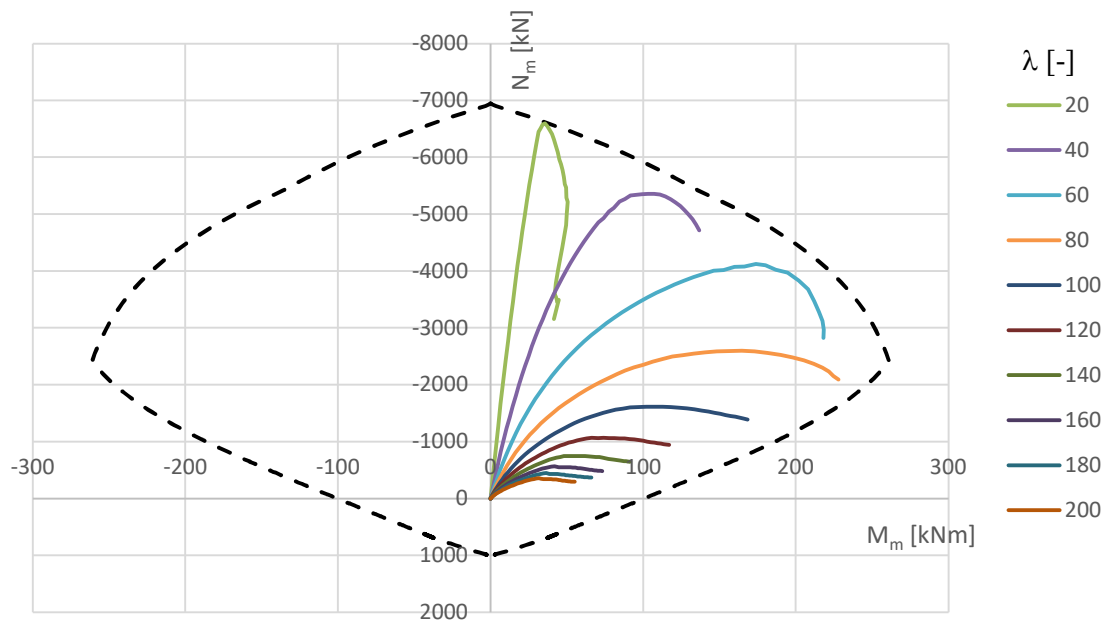


Obr. 4.28 - relativní únosnosti v závislosti na relativní štíhlosti pro referenční model

### Vliv excentricity

V grafu na Obr. 4.29 jsou zaznamenány výsledky modelu se zvýšenou excentricitou zatížení  $e_0 = L_0/200$ .

Z grafu je patrné, že vliv zvýšené počáteční excentricity je znatelný. Například sloup se štíhlostí  $\lambda = 40$  vybočí dříve, než dojde k dosažení únosnosti průřezu.

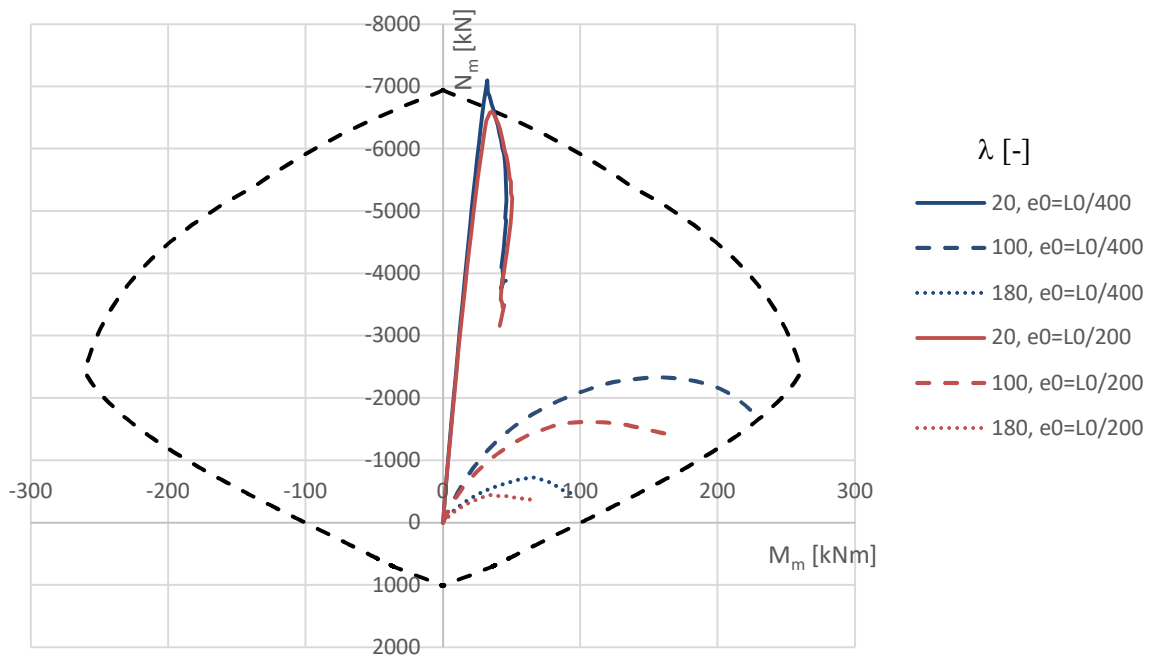


Obr. 4.29 - výsledky referenčního modelu s počáteční excentricitou zatížení  $L_0/200$

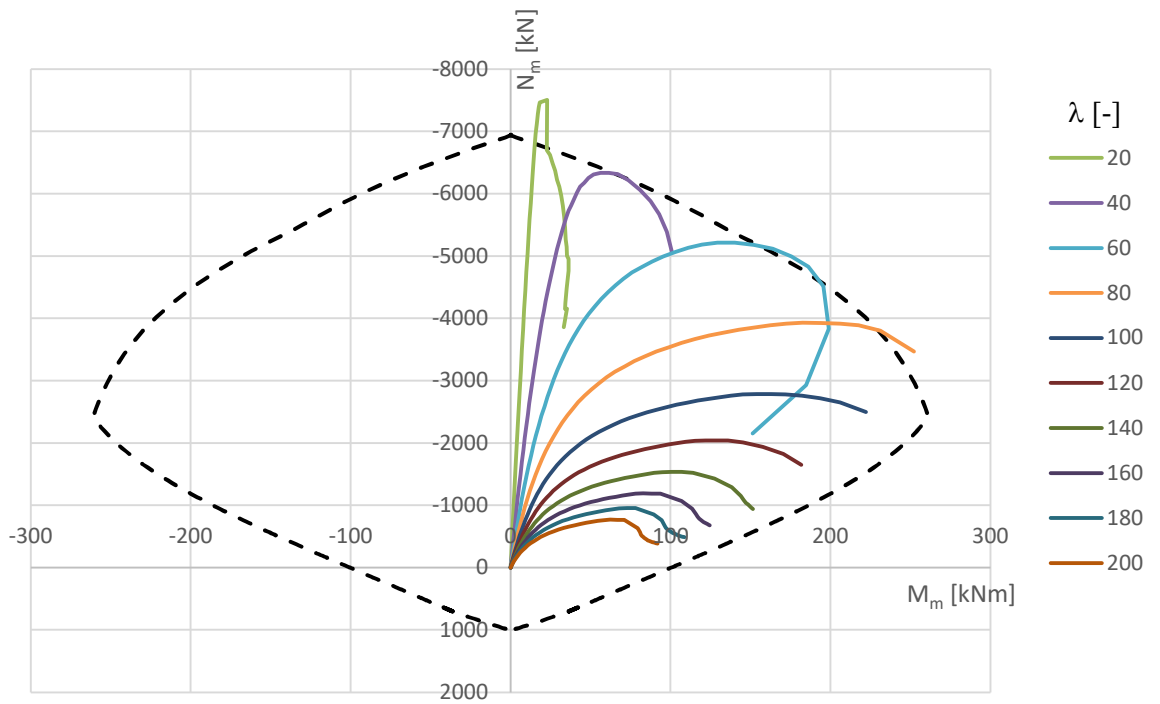
Pro srovnání vlivu větší excentricity zatížení pak jsou na Obr. 4.30 oba stavy pro štíhlosti  $\lambda = 20$ ,  $\lambda = 100$  a  $\lambda = 180$ . U sloupu se štíhlostí  $\lambda = 20$  není téměř vidět nelineární nárůst momentu ani v jednom případě. U ostatních je ale již velmi znatelný.

Dále jsou na Obr. 4.31 a Obr. 4.32 zobrazeny stejné grafy pro případy s počáteční excentricitou zatížení  $e_0 = L_0/800$  v porovnání s referenčním stavem  $e_0 = L_0/400$ .

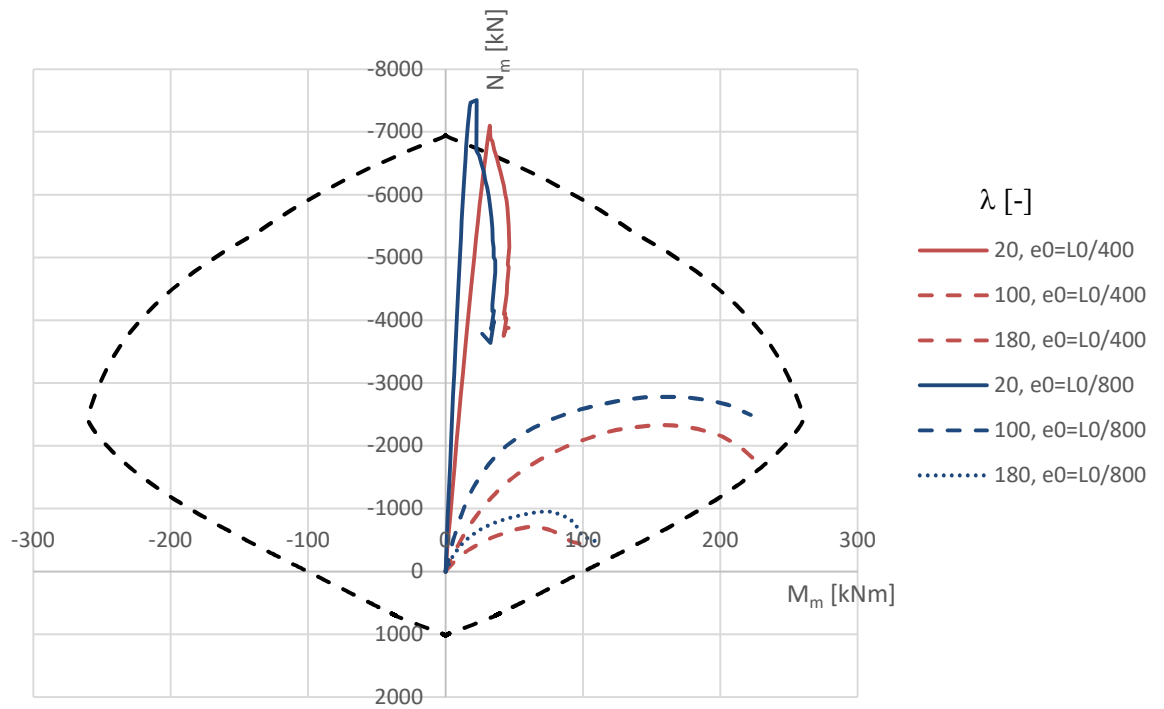




Obr. 4.30 - porovnání výsledků  $e_0 = L_0/200$  vs. referenční model

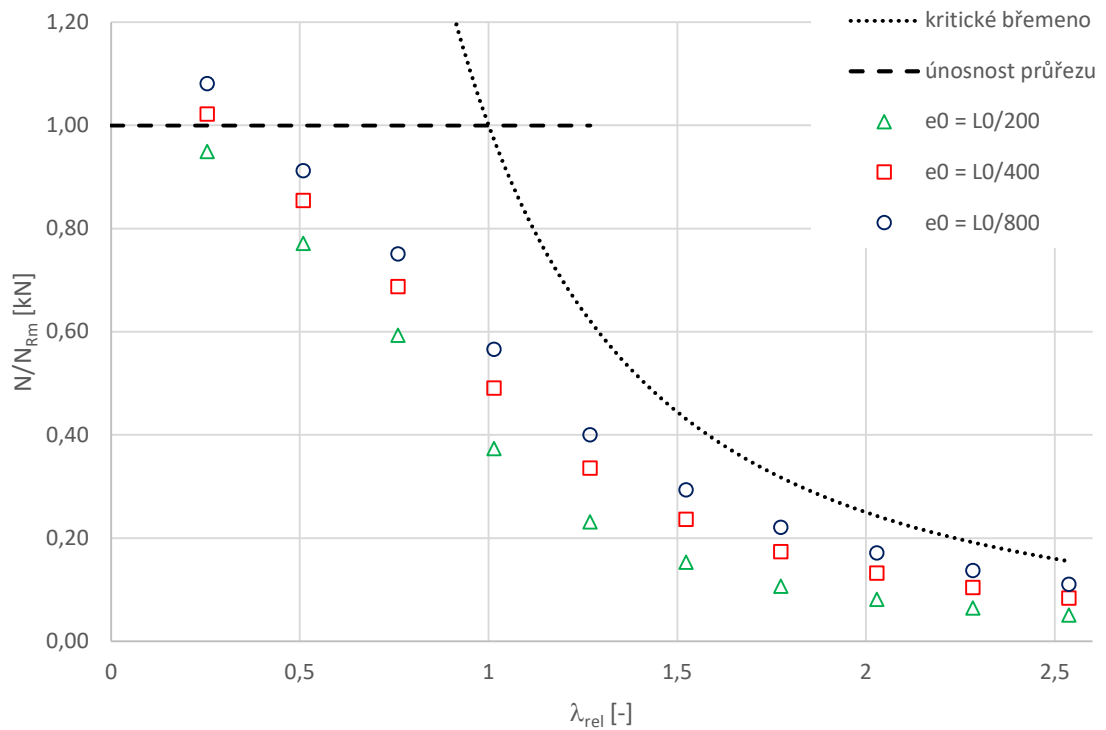


Obr. 4.31 - výsledky referenčního modelu s počáteční excentricitou zatížení  $L_0/800$



Obr. 4.32 - porovnání výsledků  $e_0 = L/800$  vs. referenční model

V grafu na Obr. 4.33 je porovnání tlakové únosnosti pro jednotlivé štíhlosti a excentricity zatížení. Je vidět, že excentricita zatížení má na výslednou únosnost poměrně zásadní vliv.



Obr. 4.33 - relativní únosnosti v závislosti na relativní štíhlosti pro různé excentricity zatížení

Pro aproximaci jednotlivých výsledků pomocí funkce se nabízí použít funkce, které představuje norma ČSN EN 1993-1-1. Tyto funkce jsou definovány následovně.

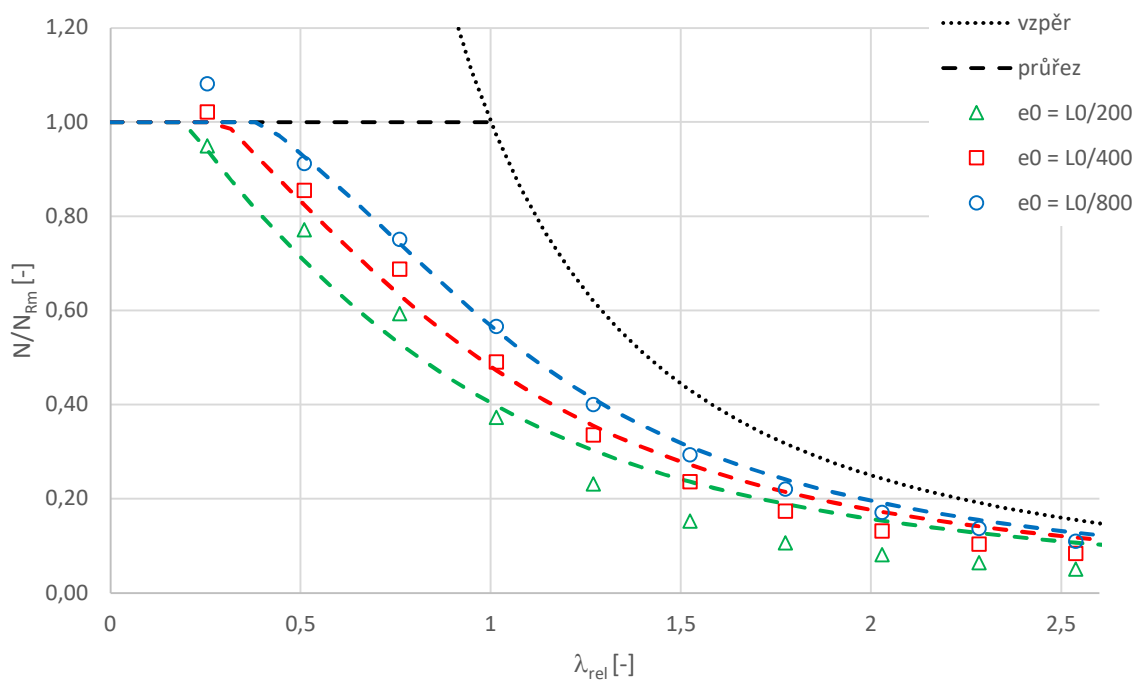
$$\phi = 0,5(1 + \alpha(\lambda_{rel} - \lambda_{rel,0}) + \lambda_{rel}^2) \quad (4.4)$$

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \lambda_{rel}^2}} \quad (4.5)$$

$\chi$  je součinitel vzpěrnosti, který udává poměr maximální únosnosti tlačенého prutu ku maximální únosnosti jeho průřezu v závislosti na jeho relativní štíhlosti. Tato funkce u ocelových konstrukcí matematicky popisuje křivky, které jsou naznačeny na Obr. 4.33.  $\alpha$  je součinitel imperfekce, který je v případě referenčního modelu typický pro každou excentricitu zatížení.  $\lambda_{rel,0}$  je hodnota relativní štíhlosti, kde křivka protíná tlakovou únosnost průřezu. Tyto součinitele byly určeny pomocí metody nejmenších čtverců následovně.

	$e_0 = L_0/200$	$e_0 = L_0/400$	$e_0 = L_0/800$
$\alpha$	1,08	0,76	0,55
$\lambda_{rel,0}$	0,17	0,3	0,38

Vykreslení těchto funkcí (vzpěrných křivek) pro každou excentricitu je zobrazeno na Obr. 4.34.



Obr. 4.34 - vzpěrné křivky pro vliv excentricity za použití funkcí z ČSN EN 1993-1-1

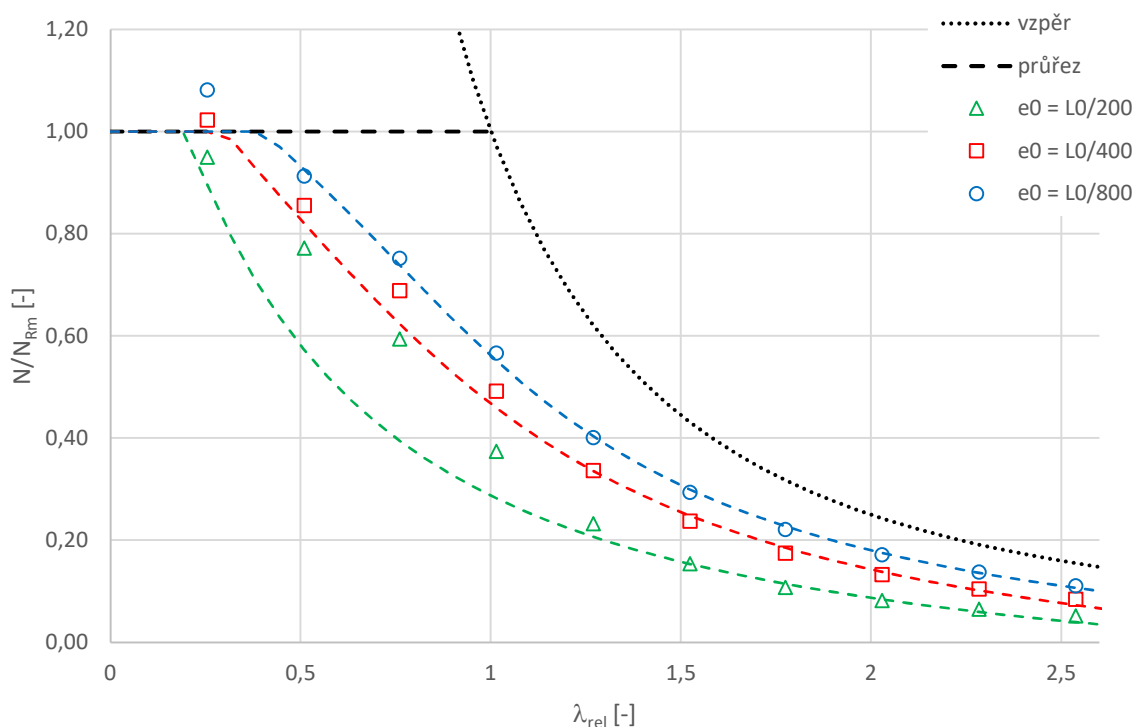
Z grafu lze vidět, že matematické funkce, které předepisují vzpěrnostní křivky pro ocelové konstrukce, nejsou pro betonové konstrukce vhodné. U velkých štíhlostí dochází k tomu, že se tyto křivky příliš přibližují kritickému břemenu, a tím velmi překračují únosnost, která byla určena v této studii. Tento efekt křivky mají i po úpravě součinitele  $\alpha$  na jinou libovolnou hodnotu. Matematický předpis vzpěrnostních křivek podle ČSN EN 1993-1-1 není vhodný pro použití u betonových konstrukcí.

Je možné od předpisu funkce definující průběh vzpěrnostní křivky odečíst lineární funkci. Úměrnost této funkce je řízena součinitelem  $\chi_0$ . Její předpis by mohl vypadat takto:

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \lambda_{rel}^2}} - \chi_0 (\lambda_{rel} - \lambda_{rel,0}) \quad (4.6)$$

Výsledné vzpěrné křivky vypočítané podle vztahu (4.9) jsou zobrazeny na Obr. 4.35. Parametry všech tří součinitelů byly nastaveny tak, aby co nejlépe odpovídaly únosnostem při větší štíhlosti ( $\lambda_{rel} > 1,3$ ). Součinitele použité pro vykreslení těchto křivek na Obr. 4.35 jsou:

	$e_0 = L_0/200$	$e_0 = L_0/400$	$e_0 = L_0/800$
$\alpha$	2	0,8	0,55
$\lambda_{rel,0}$	0,2	0,3	0,4
$\chi_0$	0,02	0,02	0,01



Obr. 4.35 - vzpěrné křivky pro vliv excentricity za použití upravených funkcí z ČSN EN 1993-1-1

Vzpěrné křivky s takto upraveným předpisem funkce již daleko více odpovídají výsledkům studie. Je ale zřejmé, že tento předpis nepopisuje dobře únosnosti pro všechny uvažované excentricity zatížení. Pro excentricitu  $e_0 = L_0/200$  nedokáže takto definovaná vzpěrná křivka dobře popsat únosnost při menší štíhlosti ( $\lambda_{rel} < 1,3$ ). Naopak ale poměrně dobře vystihuje únosnosti u větších relativních štíhlostí.

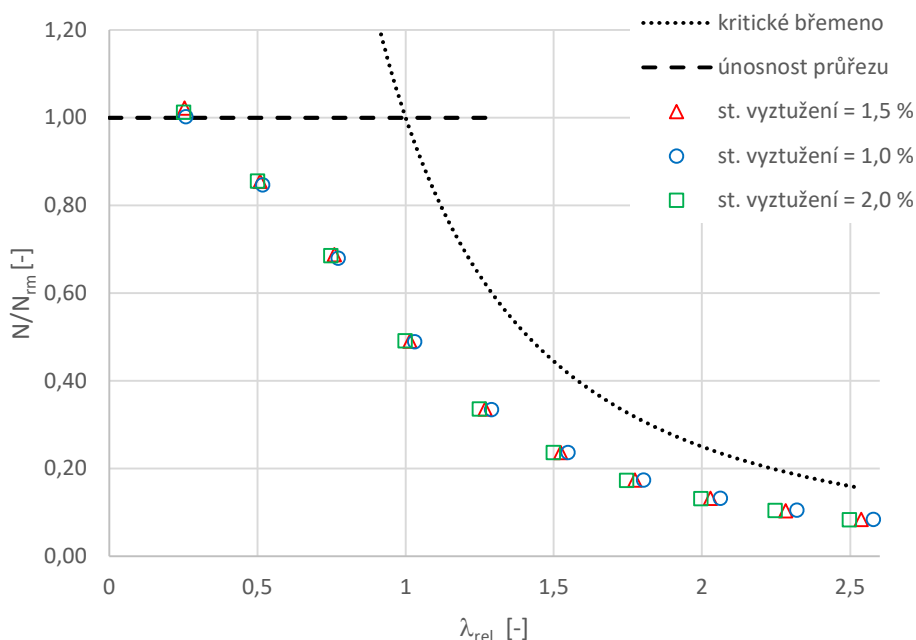
Tento předpis ale také není zcela vhodný pro běžné použití při navrhování.

### Vliv stupně vyztužení

Stupeň vyztužení má přímý vliv jak na únosnost průřezu – zvětší se oblast interakčního diagramu, tak na hodnotu kritického břemene daného sloupu – ovlivní ohybovou tuhost průřezu  $EI$ . Z tohoto důvodu by nebylo správné vynášet výsledky pro různý stupeň vyztužení do jednoho grafu závislosti  $M$  vs  $N$ , mají totiž rozdílné hraniční podmínky, respektive by bylo nutné do tohoto grafu vynést i tři interakční diagramy. K účelu porovnání výsledků je tedy vhodné použít relativní hodnoty, jak již bylo představeno v předchozích kapitolách.

Předpokladem bylo, že při použití relativních hodnot nebude mít tento parametr vliv na relativní únosnost, tedy podíl únosnosti sloupu k jejich maximální tlakové únosnosti průřezu.

Jak je vidět z grafu na Obr. 4.36, jednotlivé body leží téměř přesně na jedné křivce. Tímto byl předpoklad splněn. Z toho plyne, že stupeň vyztužení nemá v případě použití relativních hodnot žádný (nebo pouze zanedbatelný) vliv na únosnost.



Obr. 4.36 - relativní únosnosti v závislosti na relativní štíhlosti pro různé stupně vyztužení

#### 4.3.4 Vliv dotvarování

Zohlednit vliv dotvarování v takto nelineárním problému je poměrně složitý úkol. Vzhledem k tomu, že v běžné praxi posuzujeme zpravidla několik málo konkrétních zatěžovacích stavů, u kterých víme jasná napětí v prvku, není těmito klasickými postupy možné získat únosnost sloupů na konci životnosti. Norma ČSN EN 1992-1-1 [8] nabízí v kapitole 5.8.7.2 zjednodušenou metodu, jak zohlednit vliv dotvarování pomocí náhradního modulu pružnosti. Postup, založený na využití efektivního modulu pružnosti, je zároveň uveden v [3] a je popsán dále v této kapitole.

#### Numerický výpočet založený na efektivním modulu pružnosti

Myšlenka této metody spočívá v tom, že modul pružnosti  $E_c$  se upraví pomocí efektivního součinitele dotvarování  $\varphi_{ef}$ . Ten se určuje jako:

$$\varphi_{ef} = \varphi_{(\infty, t_0)} M_{0Eqp} / M_{0Ed} \quad (4.7)$$

$\varphi_{(\infty, t_0)}$  je součinitel dotvarování,  $M_{0Eqp}$  moment prvního řádu od kvazistálé kombinace zatížení a  $M_{0Ed}$  je moment prvního řádu od návrhové kombinace zatížení. Na konstrukci působí pouze osamocená síla, která vyvolává konstantní moment po celé délce sloupu. Tato síla je uvažována jako stálé zatížení, protože je to nejhorší možný stav, jak lze vyčíst z rovnic (4.10) a (4.11).  $\gamma_G$  je součinitel zatížení pro stálé zatížení,  $\gamma_Q$  je součinitel zatížení pro proměnné zatížení,  $G$  je stálé zatížení a  $Q$  je proměnné zatížení. Hodnoty součinitelů jsou  $\gamma_G = 1,35$  a  $\gamma_Q = 1,5$ . Hodnoty zatížení jsou pro oba případy stejné a pro další výpočet nejsou podstatné.

Rovnice (4.8) je předpis pro návrhovou kombinaci zatížení a rovnice (4.9) pro kvazistálou kombinaci zatížení. V rovnici (4.9) je uveden kombinační součinitel  $\psi_2$ , který je dle normy ČSN 1991-1-1 [7] maximální  $\psi_2 = 0,8$  pro užité zatížení kategorie E.

$$\gamma_G G_k + \gamma_Q Q_k = 1,35 G_k + 1,5 Q_k \quad (4.8)$$

$$G_k + \psi_2 Q_k = G_k + 0,8 Q_k \quad (4.9)$$

Dosazením hodnot do rovnice (4.7)

$$\varphi_{ef} = \varphi_{(\infty, t_0)} \frac{1}{1,35} = \varphi_{(\infty, t_0)} 0,741 \quad \text{Pro stálé zatížení} \quad (4.10)$$

$$\varphi_{ef} = \varphi_{(\infty, t_0)} \frac{0,8}{1,5} = \varphi_{(\infty, t_0)} 0,533 \quad \text{Pro proměnné zatížení} \quad (4.11)$$

$\varphi_{(\infty, t_0)}$  byl podle modelu B3 určen jako na hodnotu  $\varphi_{(\infty, t_0)} = 2,51$ .

$$\varphi_{ef} = \varphi_{(\infty, t_0)} \frac{1}{1,35} = 2,51 \frac{1}{1,35} \quad (4.12)$$

$$\varphi_{ef} = 1,86 \quad (4.13)$$

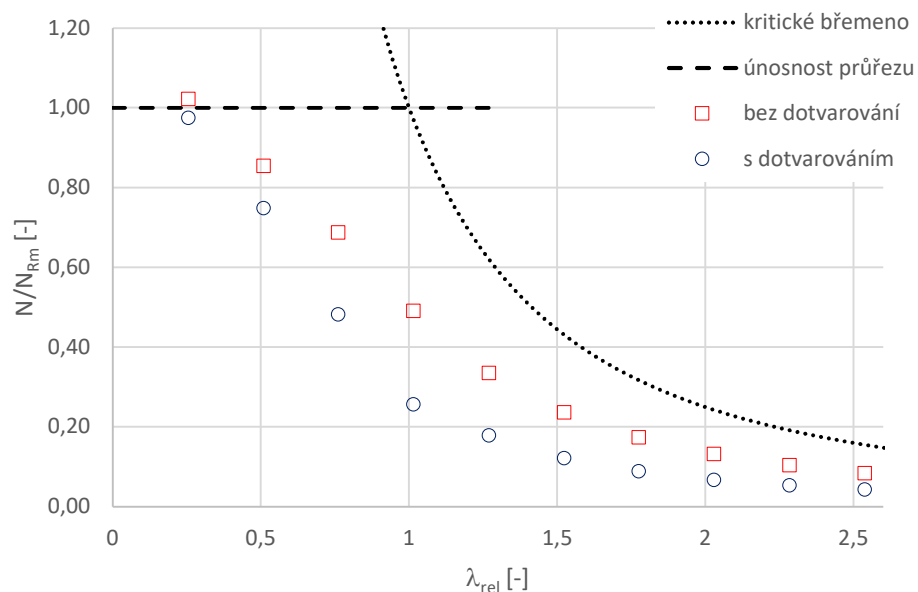
$$E_{c,ef} = E_c / (1 + \varphi_{ef}) \quad (4.14)$$

$$E_{c,ef} = 35000 / (1 + 1,86) = 12\,240,9 \text{ MPa} \quad (4.15)$$

Norma ČSN EN 1992-1-1[8] nabízí v kapitole 5.8.6 ještě jednu možnost zohlednění dotvarování a to, že se všechny hodnoty přetvoření vynásobí součinitelem  $(1+\varphi_{ef})$ . Tento postup ale není vhodný, protože veškeré vnitřní síly v každém stavu přímo závisí na deformacích a není tedy možné až po analýze vynásobit pouze deformace.

Model byl tedy nastaven stejně jako referenční s tou výjimkou, že byl změněn krátkodobý modul pružnosti betonu za efektivní hodnotu podle postupu výše. Výsledky analýzy jsou zobrazeny na Obr. 4.37.

Hodnoty štíhlosti a vzpěrného břemene jsou počítány z nezměněné průměrné hodnoty modulu pružnosti  $E_c$ . Pro beton je tato mechanická vlastnost neměnná (reálně naopak v čase roste). Efektivní hodnota modulu pružnosti  $E_{c,ef}$  pouze uměle upravuje tuhost sloupu, aby bylo možné běžnými způsoby vystihnout jeho viskózní vlastnosti, tedy dotvarování.



Obr. 4.37 – porovnání numerických výpočtů s dotvarováním a bez něj

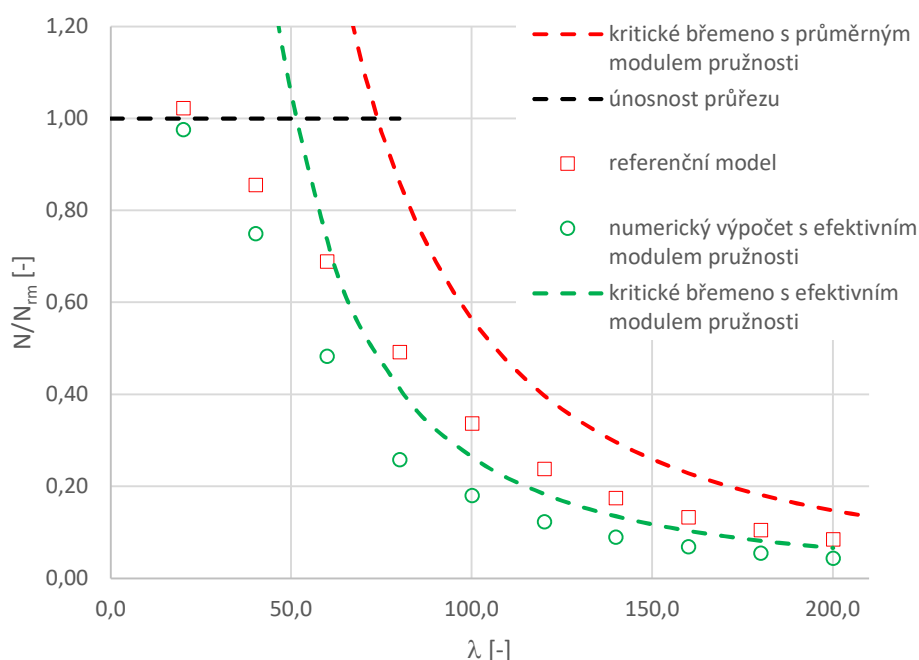
Z výsledků je patrné, že dotvarování má na únosnost sloupu zásadní vliv. To také bylo předpokládáno. Okamžitá deformace s uvažováním působení geometrické nelinearity zvětší rameno síly. Dotvarování tuto deformaci ještě zvýší, čímž dále opět zvětší rameno. To ještě zvýší napětí v betonu, které opět urychlí dotvarování atd.

### Přibližný výpočet založený na efektivní modulu pružnosti

V publikaci [3] jsou uvedeny další postupy, kterými jde dotvarování zohlednit. Jeden ze zjednodušených, které autor popisuje jako „dobrým a bezpečným odhadem“ [3], je využití efektivního modulu pružnosti  $E_{c,ef}$ , který je popsán výše, pro výpočet kritického zatížení podle vztahu (4.16).

$$N_{cr} = (E_{c,ef}I_c + E_sI_s) \frac{\pi^2}{l_0^2} \quad (4.16)$$

Výsledky podle tohoto postupu není vhodné zobrazovat na stejném grafu, který je na Obr. 4.37, protože vlivem relativní štíhlosti by hodnoty byly vůči sobě zkresleny. Na Obr. 4.38 jsou výsledky této metody zobrazeny včetně výsledku referenčního modelu bez vlivu dotvarování i numerického výpočtu s využitím efektivního modulu pružnosti.



Obr. 4.38 – porovnání metod pro uvážení dotvarování a referenčního modelu

Je vidět, že v obou případech numerických výpočtů únosnost nepřekročila hranici kritického břemene. To odpovídá teoretickým předpokladům. Za předpokladu, že je numerický výpočet s využitím efektivního modulu pružnosti přesnější než výpočet kritického břemene s použitím stejného efektivního modulu pružnosti, ale vyplývá, že tvrzení z publikace [3] není pravdivé. V opačném případě je takto provedený nelineární výpočet ještě více konzervativní než podle vztahu (4.16). Jednotné tvrzení bez podrobnější analýzy tohoto problému ale nelze vyvodit. To ale nebylo v této práci dále řešeno. Dále bude uvažováno, že je takto provedený výpočet velmi konzervativní. Autoři [3] prováděli v rámci tohoto problému rozsáhlejší studii a jejich závěry byly tedy v tomto ohledu převzaty.



## 4.4 ALTERNATIVNÍ A ZJEDNODUŠENÉ METODY ANALÝZY

Kromě nelineárního výpočtu pomocí numerického programu ATENA Science byly provedeny výpočty i za pomoci dalších metod. Prvními z nich byly dva zjednodušené postupy, které představuje norma ČSN EN 1992-1-1 [8] – metoda založená na jmenovité křivosti (MJK) a na jmenovité tuhosti (MJT). Další výpočet byl proveden v programu IDEA Statica (modul Member).

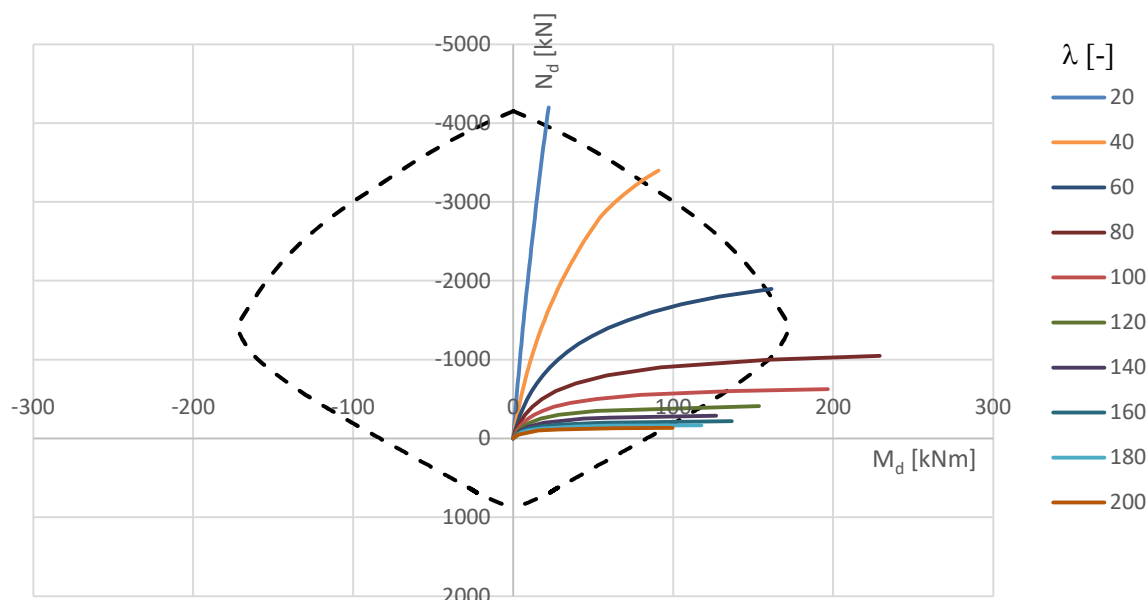
V obou těchto výpočtech byl proveden výpočet pro referenční stav. Další parametry nebyly ve výpočtech zohledněny. Je důležité dodat, že tyto metody pracují s návrhovými hodnotami materiálových vlastností. Nelze je tedy bez úpravy porovnávat s parametrickou studií, viz dále.

### 4.4.1 Zjednodušené metody dle ČSN EN 1992-1-1

Výpočet pomocí této metody zohledňuje vliv dotvarování. V předchozí kapitole vyšlo najevo, že zjednodušené metody pro zohlednění dotvarování při zjišťování maximálních únosností pomocí nelineárního výpočtu jsou pravděpodobně příliš bezpečné. Obě metody podle normy [8] uvažují s vlivem dotvarování. V této kapitole bylo tedy vzhledem k povaze výpočtu s vlivem dotvarování uvažováno ( $\varphi_{ef} = 1,86$ , viz kapitola 4.3.4).

#### Metoda založená na jmenovité tuhosti

Model, který byl ve výpočtu uvažován, je referenční. Výsledky výpočtu jsou zobrazeny na Obr. 4.39.



Obr. 4.39 - výsledky výpočtu metodou založenou na jmenovité tuhosti – vývoj vnitřních sil  $N$ ,  $M$

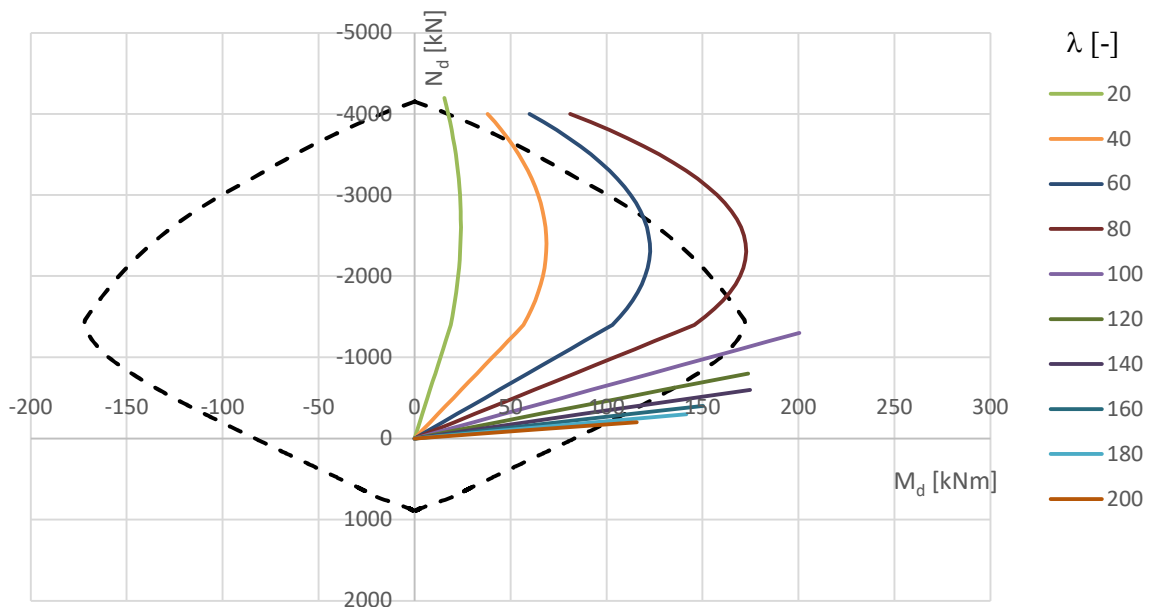
Interakční diagram průřezu zobrazený na Obr. 4.39 je vytvořený pomocí návrhových hodnot dle normy ČSN EN 1992-1-1 stejně jako výsledky vývoje vnitřních sil  $N$ ,  $M$  dle metody jmenovité

tuhosti. Výpočet podle použité metody pouze uměle zvyšuje ohybový moment tak, aby bylo možné pro posouzení použít právě návrhový interakční diagram průřezu. Jako maximální únosnost tedy lze uvažovat průnik každé křivky interakčním diagramem.

Tato metoda na první pohled poměrně dobře zohledňuje štíhlost a nárůst momentu. U masivních sloupů není téměř znatelný vliv geometrické nelinearity. Naopak u sloupů štíhlejších je tento jev jasně viditelný. Jestli jsou ale hodnoty na straně nebezpečné či konzervativní, nelze bez porovnání s předchozím nelineárním výpočtem jasně určit. Tomu se věnují následující kapitoly. Je důležité upozornit, že při nelineárním výpočtu v programu ATENA Science byly pro co nejpřesnější modelování chování reálných konstrukcí použity průměrné hodnoty materiálových vlastností. Naopak normové postupy jsou vytvořené pro navrhování, a tedy jsou v nich použity hodnoty návrhové. Nelze tedy přímo porovnávat výsledky uvedené v předchozích kapitolách s těmi, které jsou uvedené zde. Průměrné výsledky numerických výpočtů musí být pro tento účel převedeny na návrhové, viz dále.

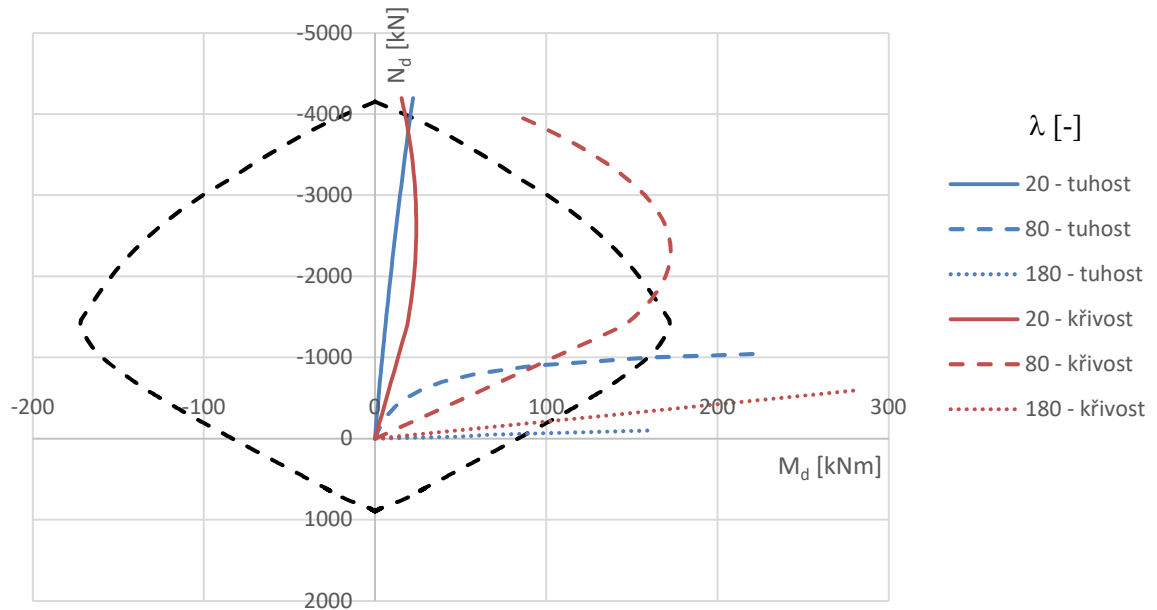
### Metoda založená na jmenovité křivosti

Tato metoda je dle národního dodatku normy [8] v ČR doporučena. V grafu na Obr. 4.40 jsou zobrazeny výsledky. Průběh vnitřních sil podle této metody realitě příliš neodpovídá. Nárůst normálové síly, která se s rostoucím momentem zpomaluje a u vyšších štíhlostí začne i klesat, zde není. Naopak, s rostoucí normálovou silou se moment zmenšuje. Největší nárůst momentu je znatelný naopak úplně v prvních fázích přítěžování.



Obr. 4.40 - výsledky výpočtu metodou založenou na jmenovité křivosti – vývoj vnitřních sil  $N$ ,  $M$

Porovnání obou normových metod je pak zaznamenán na Obr. 4.41. Pro přehlednost jsou vybrány pouze 3 štíhlosti:  $\lambda = 20$ ,  $\lambda = 80$  a  $\lambda = 180$ . Průběh vnitřních sil i únosnost vyšly pro obě metody velmi rozdílně. U štíhlosti  $\lambda = 20$  se obě křivky protnuly přibližně přesně na hranici interakčního diagramu. Při porovnání s ostatními štíhlostmi je ale vidět, že je to pouze náhoda. Nelze ani jednoznačně konstatovat, která z metod je konzervativnější. Křivky se zpravidla protínají uvnitř oblasti vymezené interakčním diagramem. Z tvaru křivek lze ale usoudit, že průběh sil vypočítaný podle MJK neodpovídá reálnému chování tlačných sloupů.



Obr. 4.41 - porovnání výsledků výpočtu podle MJT a MJK

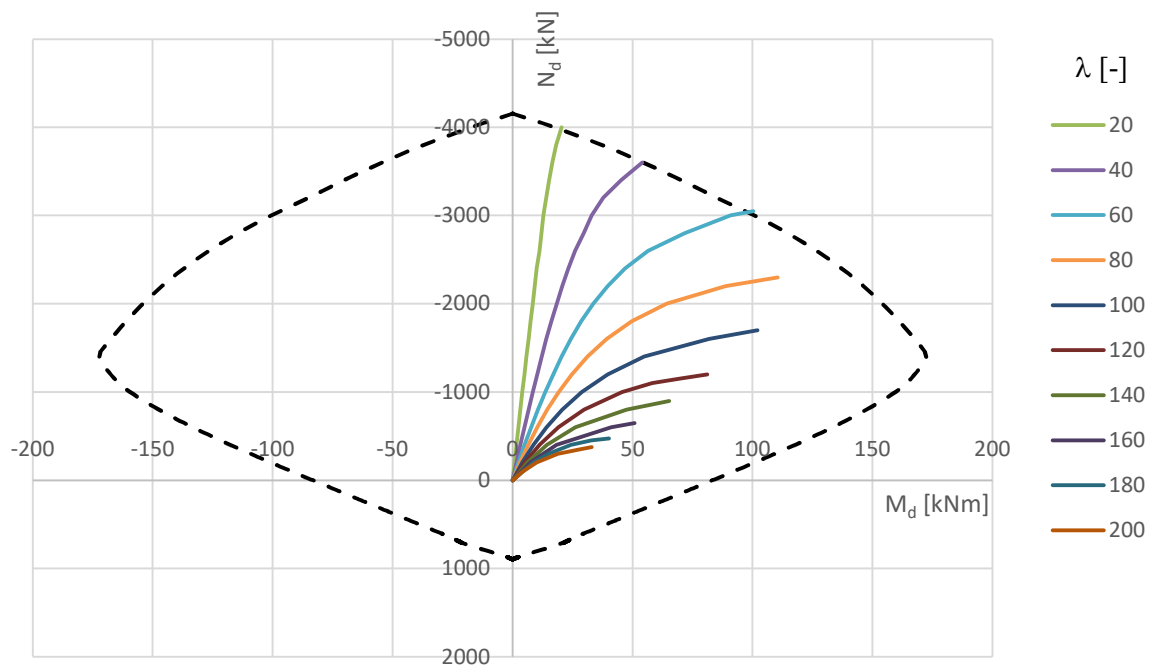
#### 4.4.2 Výpočet v programu IDEA Statica, modul Member

Způsob nelineárního výpočtu, který provádí program IDEA Statica je podobný tomu, který je popsán v kapitole 3.3. Program nejdříve počítá geometricky lineárním výpočtem pracovní diagramy průřezů s nelineárními materiály. Využívá při tom parabolicko-rektangulární pracovní diagram betonu a bilineární pracovní diagram oceli. V obou případech jsou použity návrhové hodnoty materiálových vlastností.

Program dále dopočítá vlastní tvary vybočení prutu. Uživatel si pak vybere, který z nich bude použit jako tvar imperfekce a zadává amplitudu zvoleného tvaru vybočení. V posledním kroku program provede geometricky nelineární výpočet, kdy zohlední jak materiálově nelineárně vypočítané pracovní diagramy průřezu, tak imperfekci zadanou v druhém kroku uživatelem.

Tento modul je k datu publikace této práce stále ve vývoji. Nelze tedy uživatelsky nastavit všechny parametry (např. uvažované pracovní diagramy materiálu, nebo možnost přítěžování). Tyto přednastavené hodnoty byly ale pro potřeby této práce vyhovující.

Výsledky výpočtu jsou zobrazeny na Obr. 4.42. Zatěžování je řízeno předepsanou silou v kombinaci s Newton-Raphsonovou metodou řešení nelineární soustavy rovnic. Z toho důvodu jsou některé křivky v grafu ukončeny ještě před tím, než dojdou k hranici interakčního diagramu – došlo u nich k dosažení vzpěrné únosnosti. Tento výpočet nedokáže vypočítat stavy, které jsou již za únosností sloupu (vlivem vzpěru i únosností průřezu). Z grafu je poznat, že u prvních tří štíhlostí ( $\lambda = 20, 40, 60$ ) byl výpočet ukončen přesně v místě, kde dochází k dosažení únosnosti průřezu. Pro ostatní štíhlosti výpočet skončil uvnitř interakčního diagramu, došlo k dosažení únosnosti vlivem vybočení.



Obr. 4.42 - výsledky nelineárního výpočtu v programu IDEA Statica – Member – vývoj vnitřních sil  $N, M$

## 4.5 POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ

Jak již bylo řečeno, normové postupy a nelineární výpočet v programu IDEA Statica vychází z návrhových hodnot materiálových vlastností, ale referenční nelineární výpočet pomocí 3D konečných prvků v programu Atena Science byl proveden s průměrnými hodnotami materiálových vlastností, aby odpovídal skutečnému chování reálných konstrukcí, včetně správného vystižení mechanismu kolapsu. Stejný výpočet za použití návrhových hodnot materiálových vlastností totiž může mít za následek, že konstrukce dosáhne mezního stavu únosnosti jiným způsobem.

Aby byly jednotlivé výsledky srovnatelné, je nezbytné převést výsledky z nelineárního numerického výpočtu v Atena Science na návrhové hodnoty.

Existuje několik vhodných metod, které slouží k převedení průměrné únosnosti na návrhovou. Obecně lze návrhovou únosnost  $R_d$  vyjádřit jako:

$$R_d = \frac{R_m}{\gamma_R} \quad (4.17)$$

$R_m$  je průměrná únosnost a  $\gamma_R$  je globální součinitel bezpečnosti, který pokrývá veškeré nejistoty v návrhu z hlediska materiálových vlastností a obecně je závislý na variačním koeficientu  $V_R$ .

$$\gamma_R = \exp(\alpha_R \beta V_R) \quad (4.18)$$

$\alpha_R$  je součinitel citlivosti metody FORM pro odolnost a  $\beta$  je index spolehlivosti. Variabilita zahrnutá v součiniteli  $V_R$  závisí na více faktorech: materiálových vlastnostech a geometrii.

Níže jsou popsány některé možné způsoby, jak určit globální součinitel bezpečnosti, vycházející z článku [15].

#### 4.5.1 ECOV – estimate of coefficient of variation

Jedná se o zjednodušenou pravděpodobnostní analýzu. V této metodě se náhodné variace únosnosti odhadují pomocí dvou výpočtů – první je vypočítán pomocí průměrných vlastností materiálů a druhý s pomocí charakteristických. Variační koeficient se určí takto:

$$V_R = \frac{1}{1,65} \ln\left(\frac{R_m}{R_k}\right) \quad (4.19)$$

Globální součinitel bezpečnosti se pak určí podle rovnice (4.18) za použití hodnot  $\beta$  (např. pro návrhovou životnost 50 let  $\beta = 3,8$ ) a  $\alpha_R$  (např. pro pravděpodobnost kolapsu 0,001  $\alpha_R = 0,8$ ). Tato metoda zahrnuje všechny druhy kolapsu. [15] U této metody se použijí přímo charakteristické a průměrné hodnoty materiálových vlastností. Není potřeba další úprava, jako tomu je u metody podle ČSN EN 1992-2 [9], viz dále.

#### 4.5.2 ČSN EN 1992-2

Norma ČSN EN 1992-2 [9] představuje podobný způsob zavedení globálního součinitele bezpečnosti jaký byl popsán v předchozí kapitole. Návrhová únosnost se spočítá ze vztahu:

$$R_d = \frac{R_f}{\gamma_R}, \quad R_f = R(f_{ym}, f_{cf}, \dots) \quad (4.20)$$

kde  $f_{ym}$  je průměrná hodnota meze kluzu oceli a  $f_{cf}$  je snížená pevnost betonu v tlaku s ohledem na diferenciaci náhodných vlastností betonu.

$$f_{ym} = 1,1 f_{yk} \quad (4.21)$$

$$f_{cf} = 0,85 f_{ck} \quad (4.22)$$

Kde  $f_{yk}$  je charakteristická mez kluzu oceli a  $f_{ck}$  je charakteristická pevnost betonu v tlaku. Globální součinitel bezpečnosti je stanoven z přepočtu mezi střední a návrhovou pevností betonářské oceli jako:  $\gamma_R = 1,1 \cdot 1,15 = 1,27$ . [9]

### 4.5.3 Výpočet únosnosti z návrhových vlastností materiálů

Tato metoda je používána u běžných konstrukcí. Návrhová únosnost se vypočítá přímo s návrhovými vlastnostmi materiálů. Tato metoda se běžně používá pro svoji jednoduchost. Návrhové hodnoty mechanických vlastností materiálů jsou velice konzervativní. Může ale dojít k tomu, že v případě jejich použití bude mít způsob překročení mezního stavu únosnosti jiný charakter, než by k tomu ve skutečnosti došlo (např. by konstrukce kolabovala překročením únosnosti průřezu, ale ve skutečnosti, s použitím průměrných hodnot materiálových vlastností, dojde dříve k vybočení a ztrátě stability nebo naopak). Pro analýzu chování konstrukčního prvku není tento způsob vhodný, ale v případě běžného návrhu je možné tento nedostatek zanedbat, protože jeho cílem je zejména získání únosnosti.

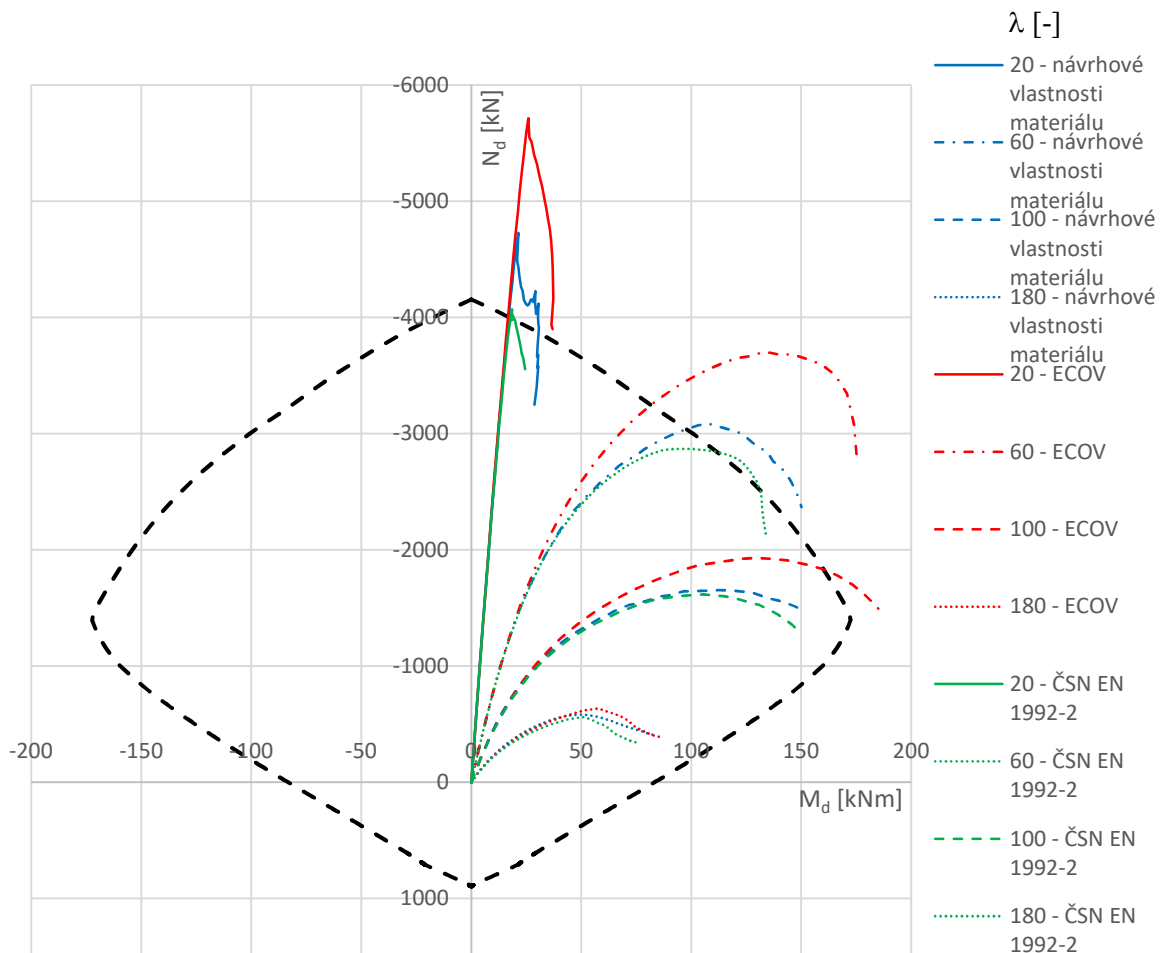
### 4.5.4 Porovnání výsledků

#### Referenční model

Pro referenční model byly použity všechny výše zmíněné přístupy pro výpočet návrhových únosností. Průběhy všech vnitřních sil jsou stejné, jako byly prezentovány v kapitole 4.3.3. Výsledky tedy byly omezeny na štíhlosti  $\lambda = 20$ ,  $\lambda = 60$ ,  $\lambda = 100$  a  $\lambda = 180$ . Excentricita všech uvažovaných modelů je  $e_0 = L_0/400$ . Není zde uvažováno s vlivem dotvarování.

Průběhy návrhových vnitřních sil určených podle všech metod jsou na Obr. 4.43. Výsledky spočítané podle všech metod se od sebe velice liší. Nejvyšší únosnosti dosahují výsledky podle metody ECOV. Následuje výpočet s použitím přímo návrhových mechanických vlastností materiálu. U nich je ale znatelný odlišný průběh vnitřních sil než u výsledků vypočítaných z průměrných materiálových vlastností.

Nejnižší únosnosti je dosahováno za použití metody uvedené v ČSN EN 1992-2. Podle ní ale vychází velice podobný průběh vnitřních sil jako s použitím všech průměrných vlastností materiálu, byť byla použita jiná, podstatně menší, pevnost betonu v tlaku.

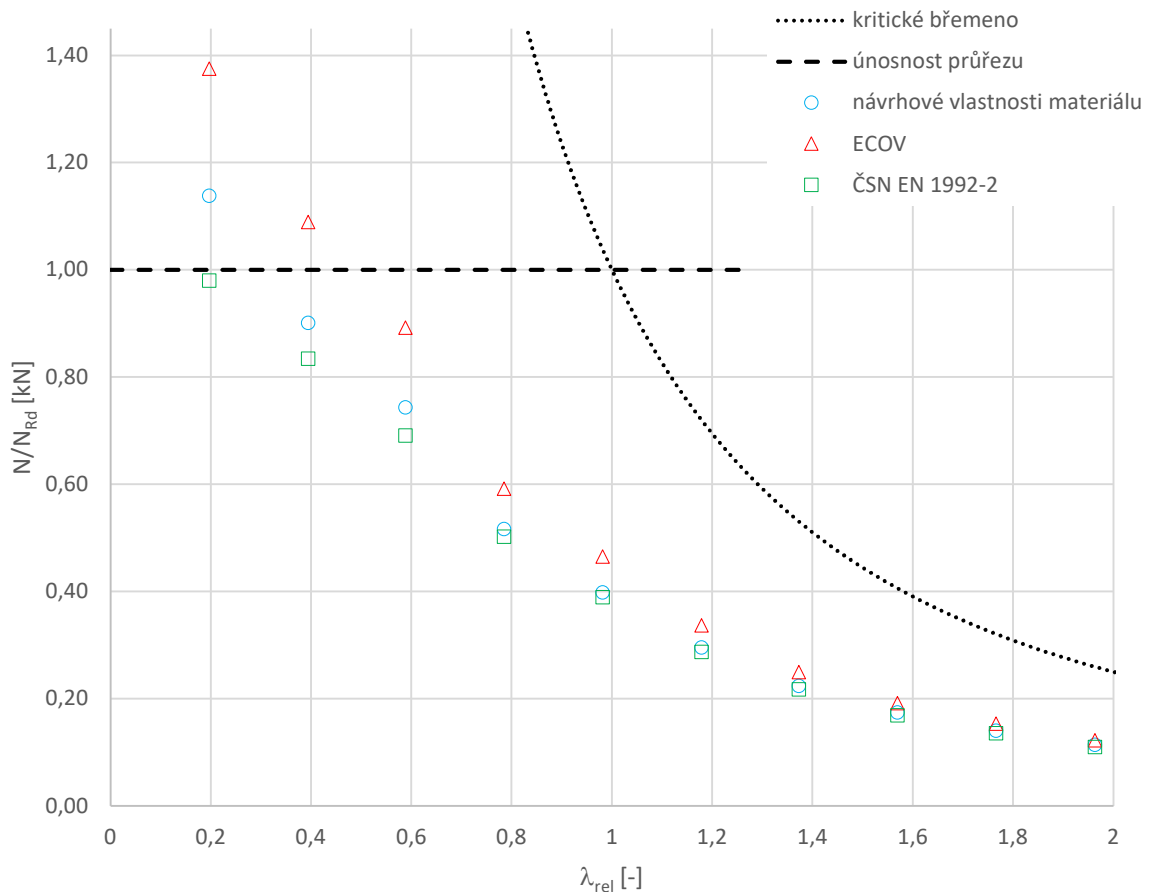


Obr. 4.43 - návrhové průběhy vnitřních sil (N, M) referenčního modelu určené podle různých metod

Lze si všimnout, že únosnosti vypočítané podle metody ECOV i s použitím návrhových vlastností materiálu jsou podstatně vyšší, než jsou meze určené návrhovým interakčním diagramem. To je zvláštní, protože výpočet s využitím neupravených průměrných materiálových vlastností dobře odpovídal hranicím interakčního diagramu, viz Obr. 4.27.

Naopak únosnosti vypočítané podle metody z ČSN EN 1992-2 odpovídají interakčnímu diagramu velice dobře. Pro štíhlosti  $\lambda = 20$  a  $\lambda = 60$  jsou únosnosti téměř identické s hodnotami na interakčním diagramu. Pro ostatní štíhlosti nastává dosažení únosnosti vlivem ztráty stability vzpěrem a toto porovnání tedy nelze udělat.

Výsledky všech metod jsou dále vyneseny do grafu závislosti poměrné síly ku relativní štíhlosti sloupu (Obr. 4.44). U nižších relativních štíhlostí jsou konečné únosnosti získané podle všech uvažovaných metod velice rozdílné. Naopak se snižující se relativní štíhlostí se od sebe jednotlivé únosnosti oddalují.



Obr. 4.44 - Porovnání návrhových únosností získaných různými metodami

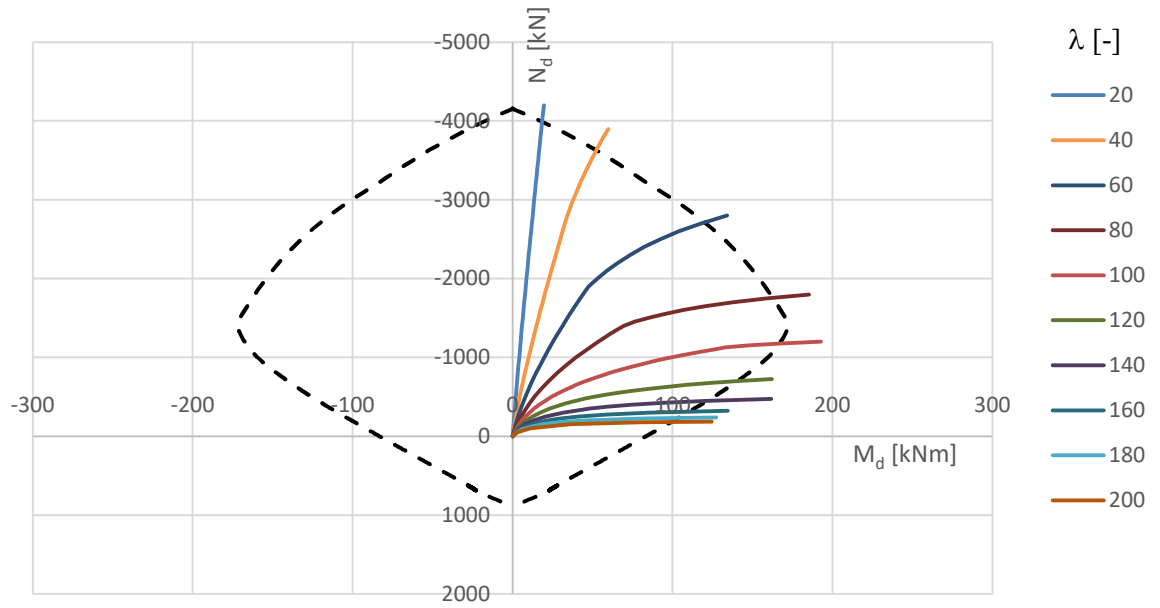
Je tedy velice podstatné, jaká metoda je pro získání návrhových únosností zvolena. Pro další postup byla v této práci zvolena metoda uvedená v ČSN EN 1992-2 [9], protože návrhové únosnosti získané podle této metody velice dobře odpovídají hranicím návrhového interakčního diagramu.

### **Zjednodušené metody podle ČSN EN 1992-1-1**

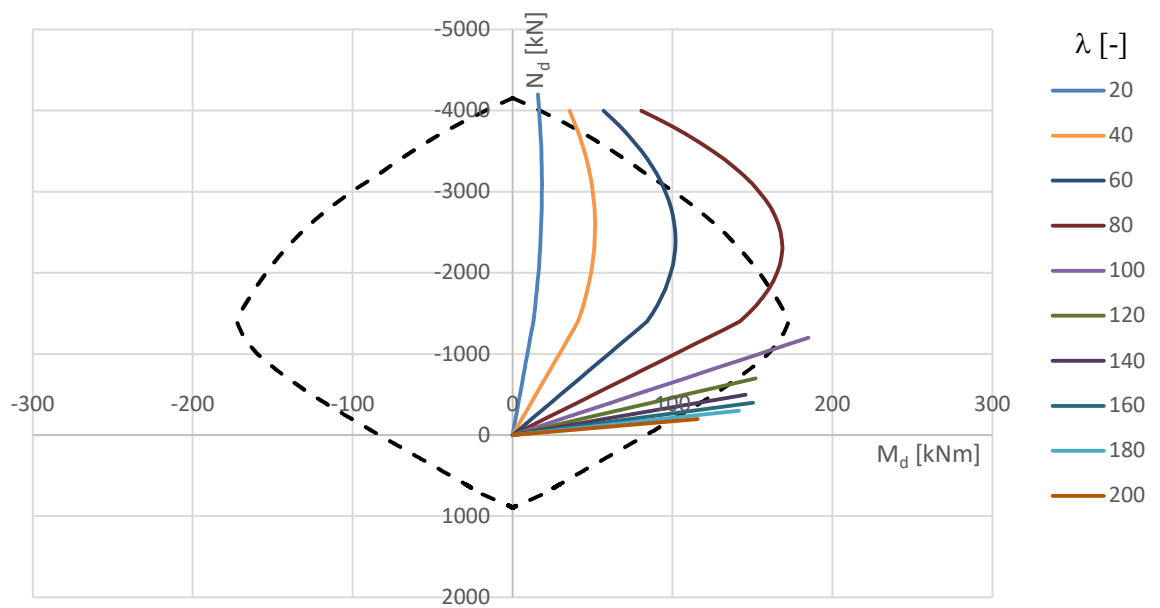
Jak již bylo řečeno v kapitole 4.3.4, zjednodušené postupy uvedené v normě [8] uvažují s vlivem dotvarování. Výsledky numerických modelů, které zohledňovaly vliv dotvarování, se ale ukázaly být pravděpodobně příliš konzervativní. Z důvodu, aby byly výsledky numerického výpočtu porovnatelné s výsledky zjednodušených postupů podle normy [8], jsou výsledky uvedené v této kapitole vypočítány bez vlivu dotvarování ( $\varphi_{ef} = 0$ ).

Z tohoto důvodu jsou na Obr. 4.45 a Obr. 4.46 jsou vykresleny grafy průběhů vnitřních sil pro tyto metody bez vlivu dotvarování. Na Obr. 4.47 jsou pak pro porovnání vykresleny tyto průběhy pro obě metody.

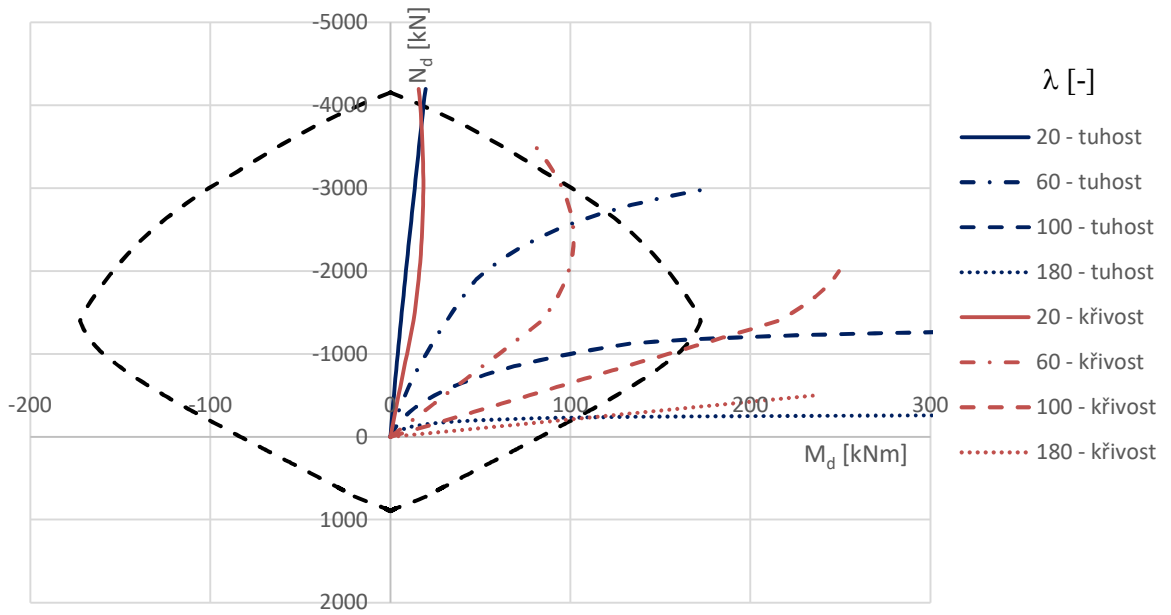




Obr. 4.45 - průběhy vnitřních sil (N, M) vypočítané podle metody jmenovité tuhosti bez vlivu dotvarování

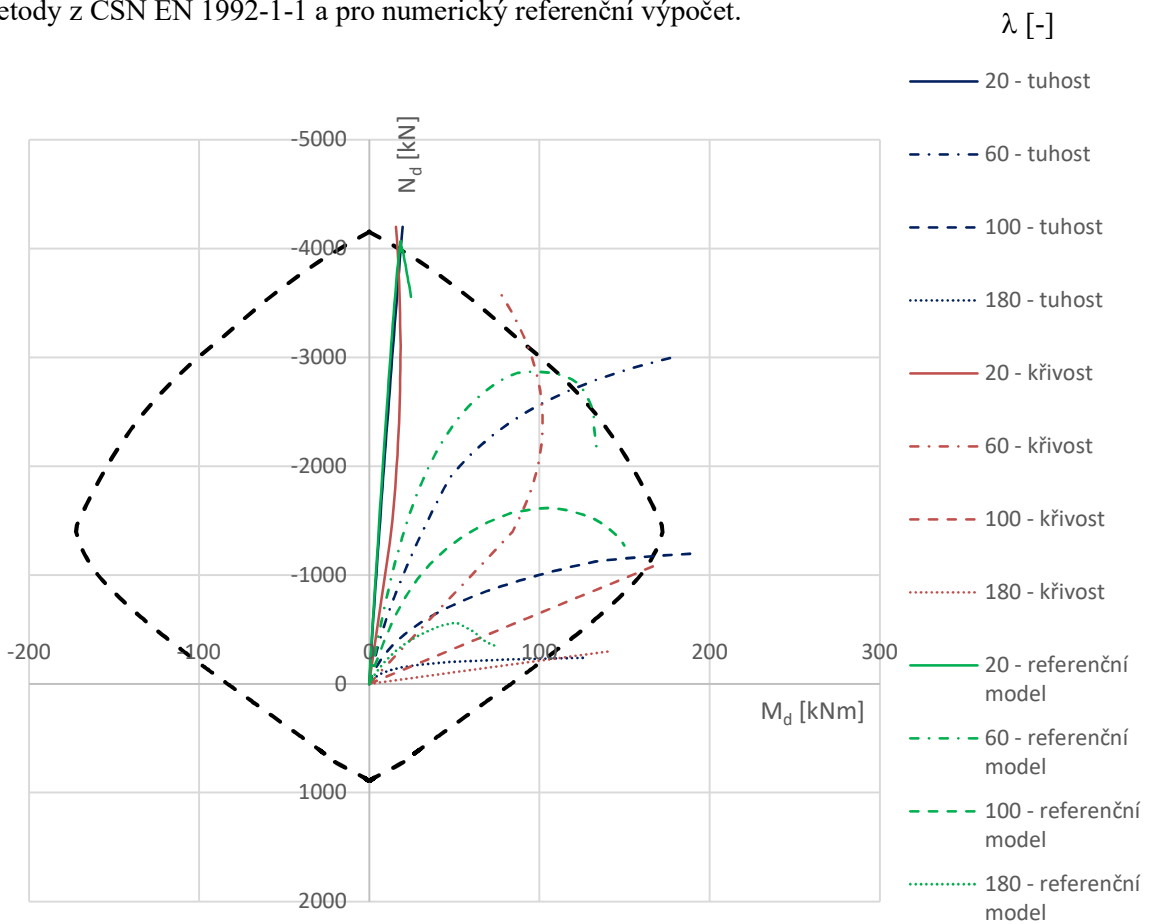


Obr. 4.46 - průběhy vnitřních sil (N, M) vypočítané podle metody jmenovité křivosti bez vlivu dotvarování



Obr. 4.47 - porovnání průběhů sil ( $N$ ,  $M$ ) podle metody založené na jmenovité tuhosti a jmenovité křivosti bez vlivu dotvarování pro některé štíhlosti

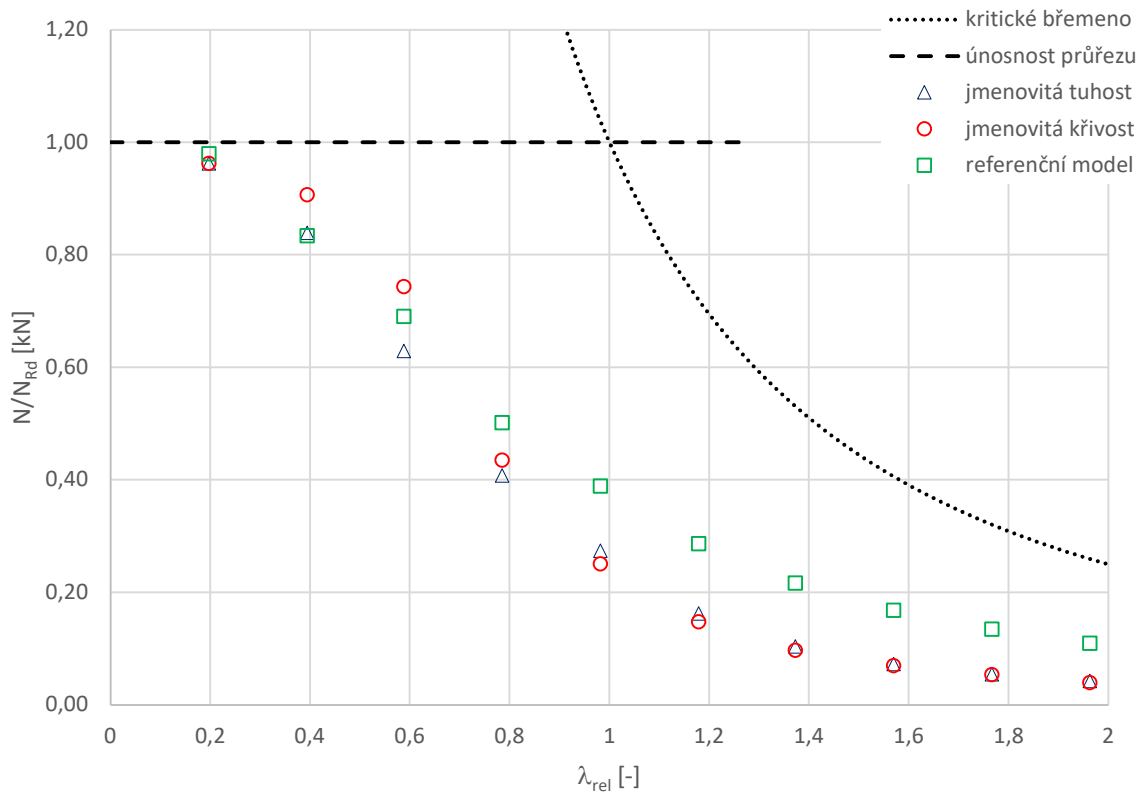
Na Obr. 4.48 jsou zobrazeny průběhy vnitřních sil ( $N$ ,  $M$ ) pro některé štíhlosti pro obě metody z ČSN EN 1992-1-1 a pro numerický referenční výpočet.



Obr. 4.48 - návrhové průběhy vnitřních sil ( $N$ ,  $M$ ) referenčního numerického modelu a výsledky výpočtu podle zjednodušených metod z ČSN EN 1992-1-1

Z grafu lze vyčíst, že průběh vnitřních sil pro masivní sloup se štíhlostí  $\lambda = 20$  podle metody jmenovité tuhosti a pro numerický výpočet jsou téměř stejné. Vzhledem k tomu, že pro tuto štíhlost není ani předpokládáno, že bude mít geometrická nelinearita a dotvarování vliv na průběh vnitřních sil, lze konstatovat, že neuvážení dotvarování ve zjednodušených metodách dle normy [8] nemělo nežádoucí účinky na výsledky.

U vyšších štíhlostí je ale zřejmé, že normové metody pro zohlednění vlivu II. řádu jsou velmi konzervativní. O nesprávném průběhu vnitřních sil u metody založené na jmenovité křivosti bylo hovořeno v kapitole 0. V této kapitole ale bylo také řečeno, že tyto postupy byly vyvinuty pro porovnání s interakčním diagramem. Ohybové momenty jsou uměle navýšeny tak, aby zohlednily vliv ztráty stability vzpěrem. Je tedy vhodné také porovnat konečné tlakové únosnosti. Ty jsou zobrazeny na Obr. 4.49.



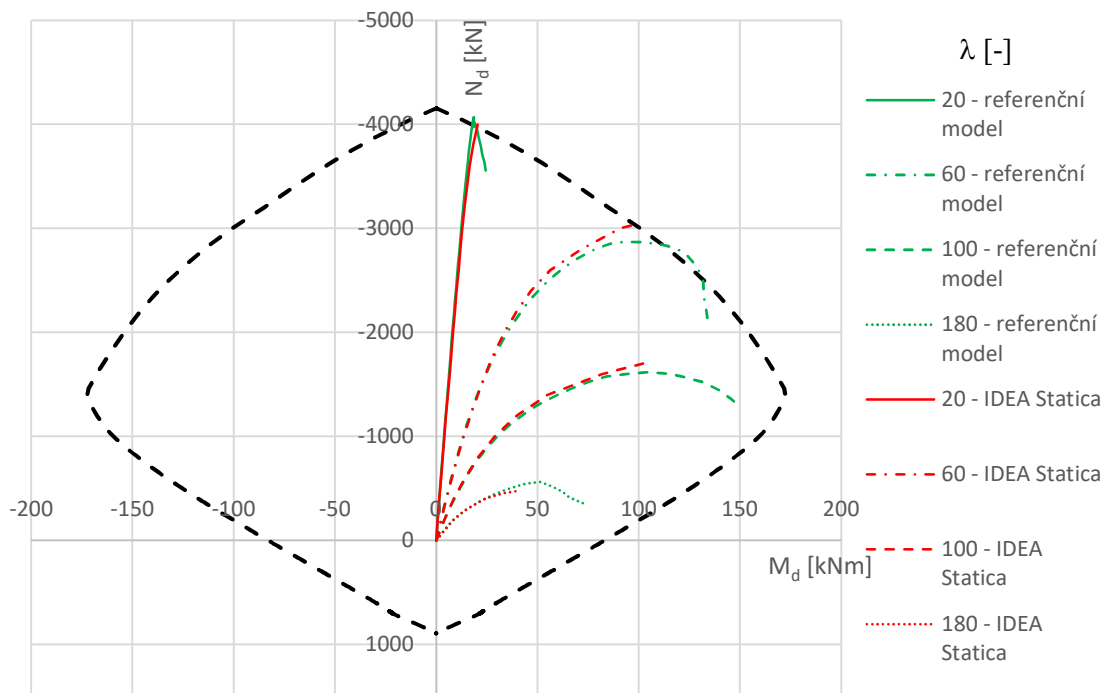
Obr. 4.49 - poměrné návrhové únosnosti referenčního modelu a určené podle metody jmenovité tuhosti a křivosti

Je vidět, že pro většinu relativních štíhlostí jsou návrhové únosnosti podle normových metod na straně bezpečnosti. Pro malé relativní štíhlosti (v grafu to jsou  $\lambda_{rel} < 0,8$ , což odpovídá štíhlosti  $\lambda < 80$ ) jsou ale únosnosti podle metody jmenovité křivosti na straně nebezpečné. Je také vidět, že konečné únosnosti nejsou zase o tolik menší, než by se dalo odhadovat z Obr. 4.48.

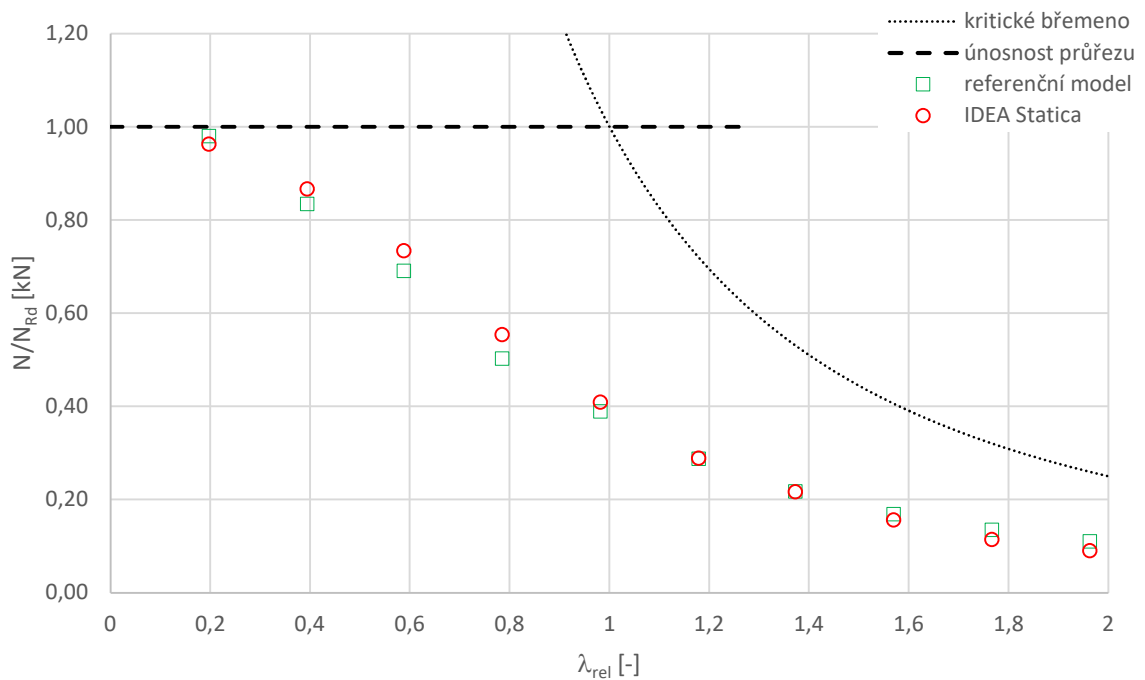
### Nelineární výpočet v programu IDEA Statica (modul Member)

V kapitole 4.4.2 byly prezentovány výsledky nelineárního výpočtu v programu IDEA Statica. Tento výpočet nezohledňoval vliv dotvarování a je tedy možné ho přímo srovnat s návrhovými hodnotami referenčního numerického výpočtu. Na Obr. 4.50 jsou průběhy návrhových vnitřních sil pro oba tyto výpočty. Vnitřní síly jsou v obou případech velice podobné. U masivního sloupu se štíhlostí  $\lambda = 20$  a velmi štíhlého  $\lambda = 180$  vychází trochu větší únosnost v referenčním modelu, ve střední části pak u výpočtu v programu IDEA Statica.

Poměrných návrhové tlakové únosnosti všech zkoumaných štíhlostí jsou pro obě metody porovnány v grafu na Obr. 4.51. Je zřejmé, že tlakové únosnosti si jsou velice podobné. Největší rozdíly v těchto hodnotách jsou přibližně uprostřed spektra relativních štíhlostí, tedy v hodnotách  $\lambda_{rel} \approx 0,4 \div 0,8$ , což odpovídá štíhlostem  $\lambda = 40 \div 80$ . V tomto části spektra se hodnoty liší průměrně o 6,7 %. V ostatních případech lze hodnoty považovat za totožné.



Obr. 4.50 - návrhové průběhy vnitřních sil (N, M) referenčního numerického modelu a výsledky nelineární výpočtu v programu IDEA Statica (modul Member)



Obr. 4.51 - poměrné návrhové únosnosti referenčního modelu a nelineárního modelu v programu IDEA Statica (Member)

### **Porovnání všech metod**

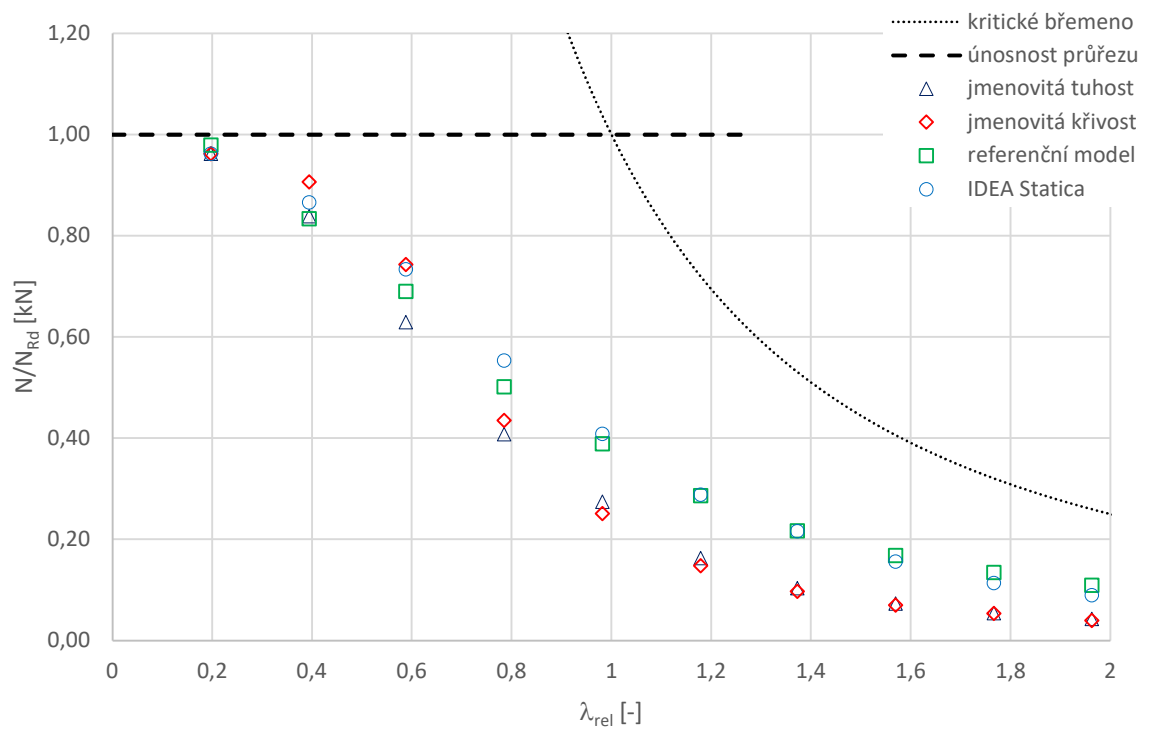
Z normových zjednodušených postupů se jako vhodnější pro použití jeví metoda založená na jmenovité tuhosti. Správně respektuje reálný průběh vnitřních sil ( $N$ ,  $M$ ) po výšce sloupu. Dále je na celém v této práci zkoumaném spektru štíhlostí ( $\lambda = 20 \div 200$ ) na straně bezpečnosti, což je pro postup uvedený v normě důležité. U větších štíhlostí je ale únosnost podle této metody značně nižší než spočtená přesnějšími metodami.

Pomocí metody založené na jmenovité křivosti vychází vnitřní síly ( $N$ ,  $M$ ), které nerespektují reálné chování tlačných sloupů. Pro malá zatížení vykazují výsledky extrémní navýšení ohybového momentu vlivem působení geometrické nelinearity. Naopak u vyššího zatížení se nárůst momentu snižuje a v určitých případech se ještě před dosažením únosnosti průřezu může ohybový moment začít zmenšovat. Konečné tlakové únosnosti jsou u sloupů menších štíhlostí  $\lambda < 80$  na straně nebezpečné. Z těchto důvodů je tato metoda méně vhodná než metoda založená na jmenovité tuhosti.

Nelineární výpočet v programu IDEA Statica (modul Member) je oproti zjednodušeným metodám mnohem bližší referenčnímu modelu. Jeho výsledky jsou s ním až překvapivě ve shodě.

Průběh vnitřních sil ( $N$ ,  $M$ ) je velice podobný skutečnému chování konstrukcí. Konečné únosnosti spočítané v programu IDEA Statica jsou také velice dobře ve shodě s referenčním výpočtem. Nevýhodou výpočtu v programu IDEA Statica je to, že nedokáže vypočítat stavy, které jsou již za dosažením únosnosti. Nelze pomocí něj tedy provádět komplexnější analýzu konstrukce. Pro běžné navrhování se dá ale označit za vhodný.

Na Obr. 4.52 jsou v grafu závislosti poměrné únosnosti na relativní štíhlosti zobrazeny výsledky všech metod uvedených v této kapitole. Pro referenční model, jsou zde zobrazeny návrhové únosnosti vypočítané podle metody uvedené v ČSN EN 1992-2.



Obr. 4.52 - poměrné návrhové únosnosti referenčního modelu a nelineárního modelu v programu IDEA Statica (Member)

## 5 ZÁVĚR

Tlačené železobetonové sloupy představují vysoce nelineární problém. Nelze je tedy řešit pomocí běžné lineární analýzy. Vliv geometrické nelinearity má za následek, že se deformace, které byly na sloupu přítomné ještě před vnesením zatížení, nezvětšují lineárně, ale rychleji. Je tedy nutné dbát na zohlednění zvětšujícího se ohybového momentu. Dále je tato úloha stabilitním problémem. Může dojít totiž k tomu, že štíhlé sloupy ztratí stabilitu vlivem vzpěru daleko dříve, než dosáhnou únosnosti samotného průřezu.

V této práci byly představeny základní teoretické poznatky, které mají vliv na komplexní popis chování těchto konstrukčních prvků, jako je pružná stabilita tlačených prutů, nelinearity a jejich vliv na vzpěrnou stabilitu prutů a přístup k nelineární analýze železobetonových sloupů. Dále zde byly představeny různé výpočtové přístupy, které se dají pro řešení tohoto problému použít.

Praktická část se věnovala zejména nelineárnímu numerickému modelování a parametrické studii, která se na různě štíhlých tlačených železobetonových sloupech pokusila popsat vliv zvolených parametrů na vývoj vnitřních sil a konečných únosností. Zkoumané parametry v této studii byly stupeň vyztužení a počáteční excentricita osového zatížení. Dále byl v této části dvěma zjednodušenými metodami zohledněn vliv dotvarování na dlouhodobou únosnost. Pro tuto studii byl použit numerický výpočet v programu Atena Science, který umožňuje za použití prostorových konečných prvků zohlednit vliv materiálové i geometrické nelinearity.

Parametrické studii předcházela validace numerického výpočtu v programu Atena Science pomocí experimentu, který provedli Dobrý, Wolfger a Benko v roce 2019 [14]. Tato validace výpočtu dokázala, že zvolený výpočetní model je vhodný pro popis chování reálných prvků. Dále byla provedena studie citlivosti, díky které bylo zvoleno přesné a neměnné nastavení výpočetního numerického modelu.

Výsledky parametrické studie byly poté porovnány s několika dalšími vybranými metodami výpočtů, aby byla ukázána vzájemná shoda, případně neshoda. Těmito metodami byly zjednodušené metody, které uvádí ČSN EN 1992-1-1 (metoda založená na jmenovité tuhosti a metoda založená na jmenovité křivosti), a nelineární výpočet v programu IDEA Statica v jeho modulu Member.

Z tohoto důvodu bylo nutné výsledky z parametrické studie převést do návrhových hodnot, aby byly všechny prezentované výsledky porovnatelné. Tato práce představila tři vybrané metody, pomocí kterých lze převést výsledky z nelineární analýzy (která používala pro co nejpřesnější popis chování železobetonových sloupů průměrné mechanické vlastnosti betonu a vyztuže) na návrhové hodnoty. K tomu byla použita metoda ECOV, metoda uvedená v normě pro betonové mosty

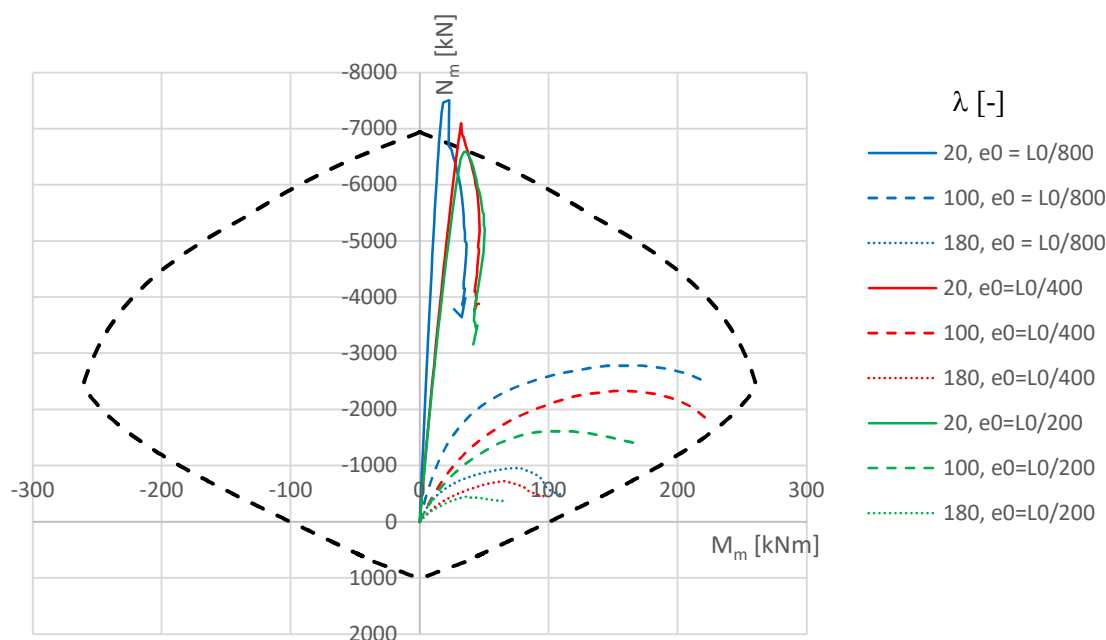
ČSN EN 1992-2 a nakonec i nelineární výpočet přímo za použití návrhových mechanický vlastností materiálů.

## 5.1 SOUHRN NEJDŮLEŽITĚJŠÍCH POZNATKŮ

V praktické části bylo zjištěno, že při správném nastavení a vymodelování je nelineární numerická analýza za použití prostorových konečných prvků dostatečně vystihující pro popis chování reálných konstrukcí. V parametrické studii byl použit model excentricky tlačené konzoly, která je vystihujícím modelem i pro všechny další druhy uložení (při zachování vzpěrné délky). Důležitým faktorem pro tuto analýzu byla štíhlost  $\lambda$ . Ta zohledňuje geometrii průřezu, délku prutu i jeho uložení. Interval štíhlostí, které byly analyzovány v celé praktické části této práce, byl  $\lambda = 20 \div 200$ .

Kromě vykreslení výsledků do grafu závislosti normálové síly  $N$  na ohybovém momentu  $M$  zde bylo přestaveno další uspořádání veličin na grafu, které dobře ukazuje vliv různých parametrů na konečné tlakové únosnosti (především vliv relativní únosnosti vzhledem k relativní štíhlosti).

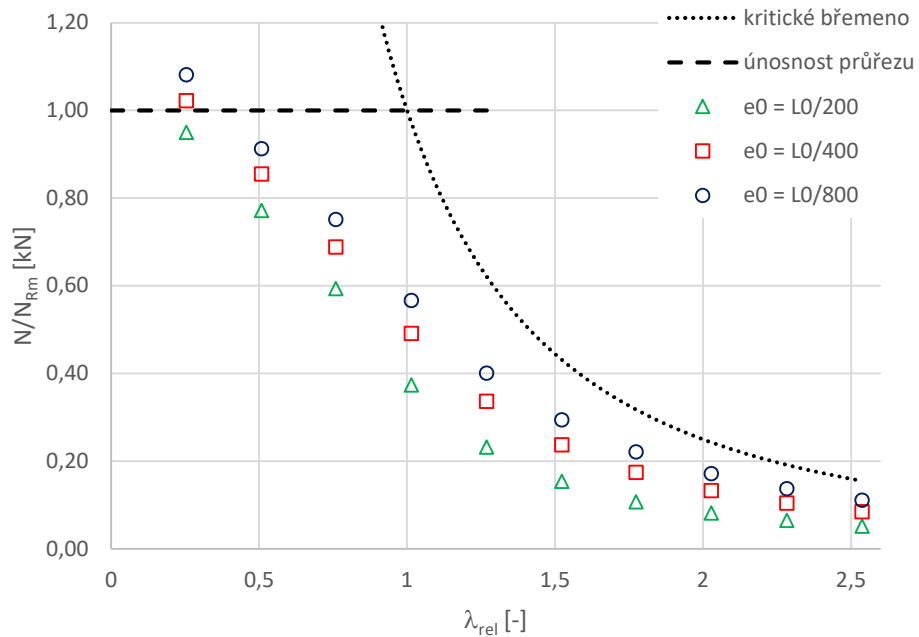
V parametrické studii byl zkoumán vliv velikosti excentricity osového zatížení a stupeň vyztužení průřezu. Referenčním případem, se kterým byly srovnávány všechny následující vlivy parametrů i metody výpočtu, byl konzolově uložený sloup se stupněm vyztužení  $\rho = 1,5 \%$  a excentricitou zatížení  $e_0 = L_0/400$ . Kromě referenčního stavu byly zkoumány celkem dvě další excentricity zatížení:  $e_0 = L_0/200$  a  $e_0 = L_0/800$ . Vliv různé počáteční excentricity zatížení na průběhu vnitřních sil je zopakován na Obr. 5.1.



Obr. 5.1 - průběhy vnitřních sil (N, M) pro různé excentricity osového zatížení



Průběhy vnitřních sil se velice mění pro každou počáteční excentricitu zatížení  $e_0$ . Na Obr. 4.33 jsou pak zobrazeny poměrné maximální únosnosti v závislosti na relativní štíhlosti  $\lambda_{rel}$ , jak bylo popsáno výše. Tento obrázek je převzat z kapitoly 4.3.3.



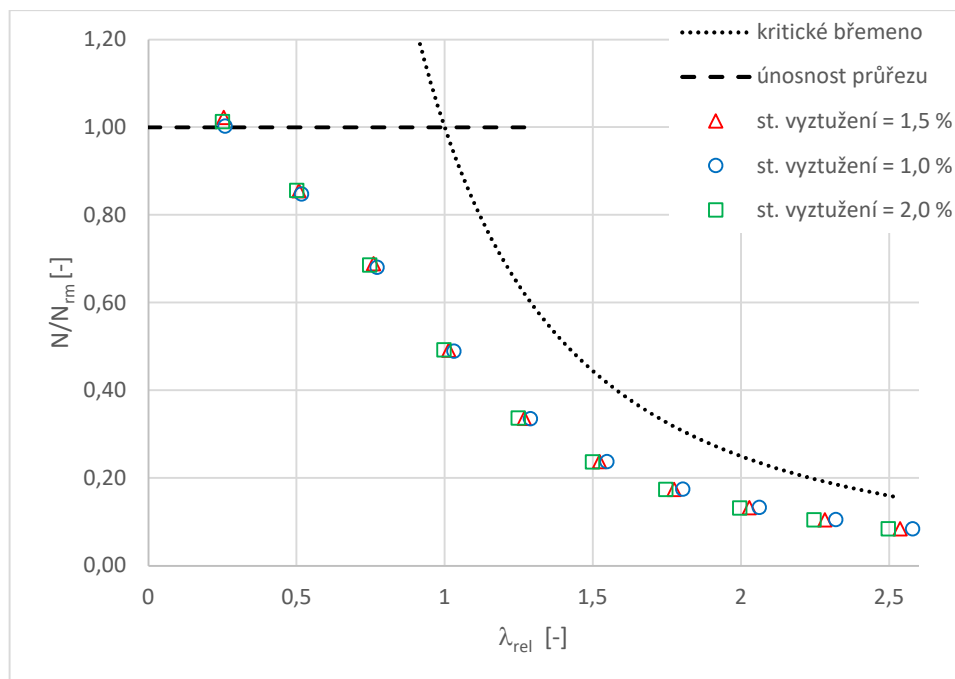
Obr. 4.33 - relativní únosnosti v závislosti na relativní štíhlosti pro různé excentricity zatížení

Z grafu na Obr. 4.33 je vidět, že počáteční excentricita osového zatížení má na konečnou tlakovou únosnost zásadní vliv.

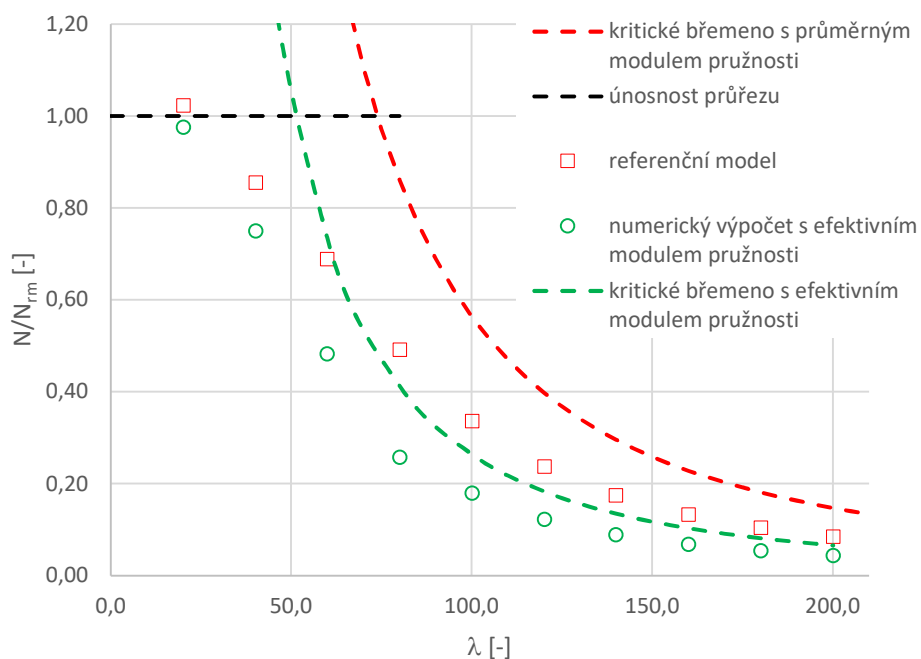
Vliv stupně vyztužení má sám o sobě vliv na únosnost průřezu. Vyztuž má vliv na geometrii průřezu (primárně na moment setrvačnosti  $I$ ) a tím pádem i na štíhlost a kritické břemeno. Pokud se ale pro zobrazení výsledků použije graf závislosti poměrné tlakové únosnosti na relativní štíhlosti, jako to lze vidět na Obr. 4.36, ukáže se, že stupeň vyztužení nemá na relativní tlakovou únosnost sloupů žádný vliv.

Vliv dotvarování byl v této práci zohledněn využitím efektivního modulu pružnosti betonu  $E_{c,ef}$ , který byl použit v nelineárním numerickém výpočtu, a dále zjednodušeným postupem, který ve své publikaci představil Bažant a Cedolin [3]. Principem jde o výpočet kritického břemene z efektivního modulu pružnosti  $E_{c,ef}$ . Jednotlivé výsledky jsou připomenuty na grafu na Obr. 4.38.

Bažant a Cedolin ve své publikaci [3] uvádějí, že tento postup je dobrým a bezpečným odhadem. Vzhledem k tomu, že únosnosti získané nelineárním výpočtem za použití  $E_{c,ef}$  vyšly menší, než pomocí zjednodušeného odhadu dle Bažanta a Cedolina, lze předpokládat, že takto provedený nelineární výpočet je špatným a velmi konzervativním popisem chování reálných konstrukcí.



Obr. 4.36 - relativní únosnosti v závislosti na relativní štíhlosti pro různé stupně vyztužení

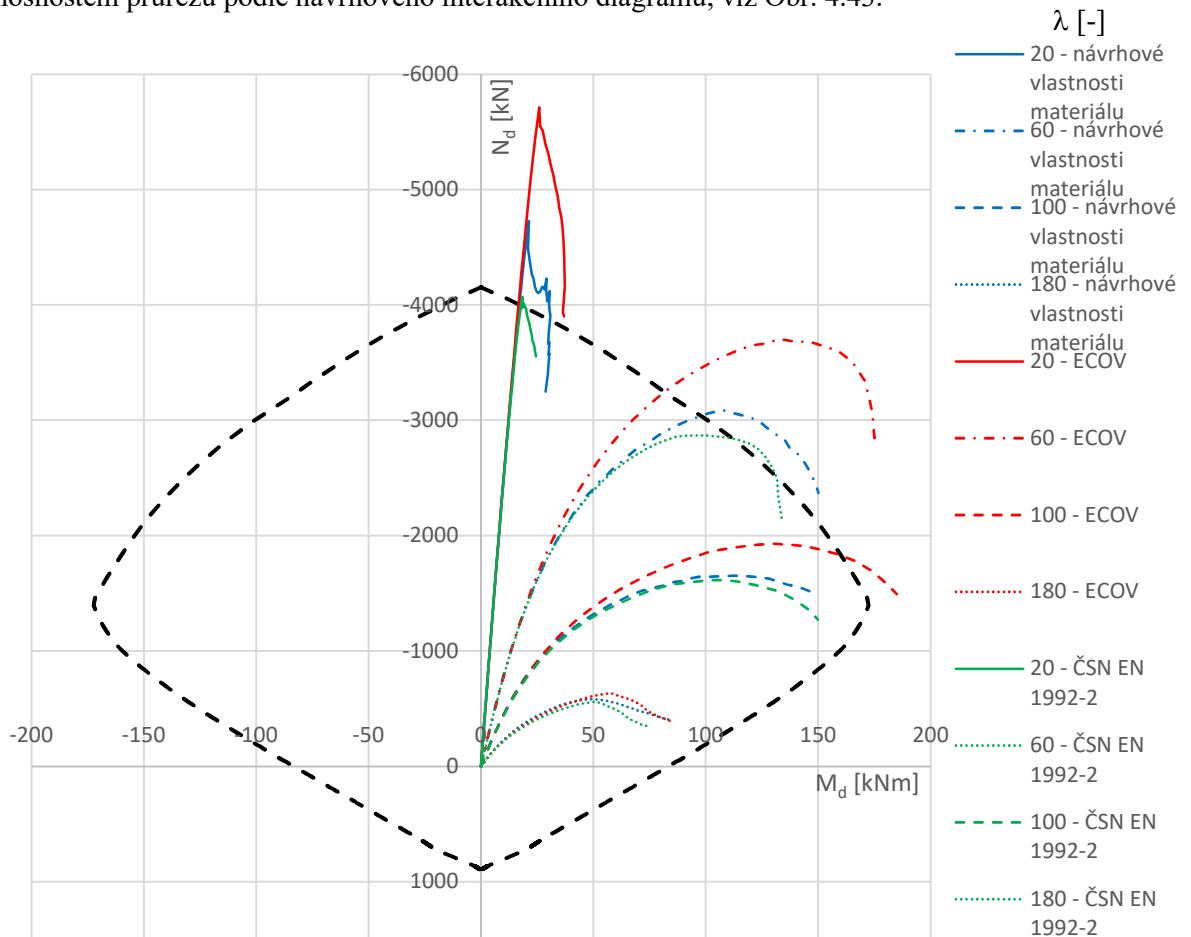


Obr. 4.38 – porovnání metod pro uvážení dotvarování a referenčního modelu

Dále byly kromě numerického nelineárního výpočtu zkoumány další metody pro výpočet tlačných železobetonových sloupů. Těmi byly metody uvedené v ČSN EN 1992-1-1 – metoda založená na jmenovité tuhosti a metoda založená na jmenovité křivosti a pak nelineární výpočet v programu IDEA Statica v jeho modulu Member.

Pro porovnání výsledků získaných těmito metodami bylo nutné převést výsledky z numerické nelineární analýzy, pro kterou bylo použito průměrných mechanických vlastností

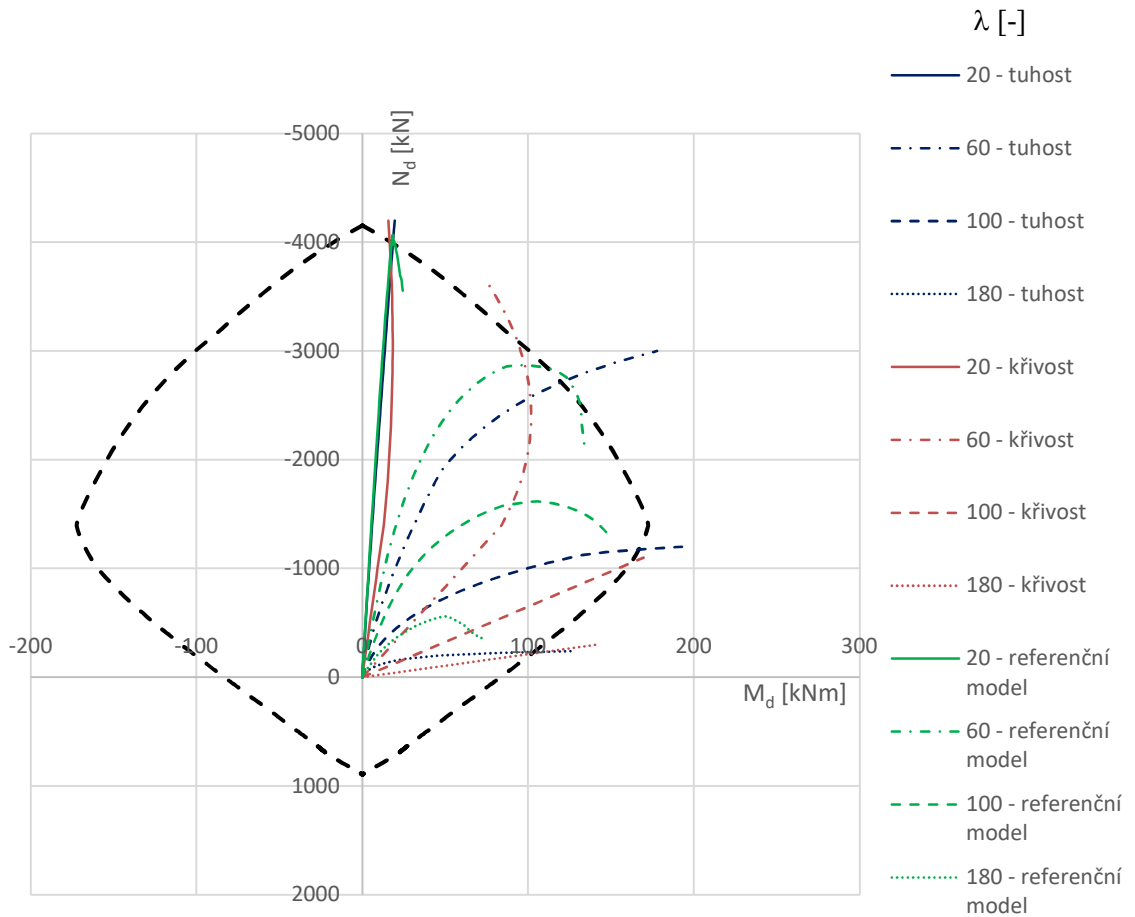
materiálu, na návrhové hodnoty vnitřních sil a únosností. K tomu sloužila metoda ECOV, metoda uvedená v ČSN EN 1992-2 a numerický nelineární výpočet, u kterého byly použity návrhové mechanické vlastnosti betonu a výztuže. Jako nejvhodnější se ukázala metoda podle ČSN EN 1992-2, protože únosnosti pro masivní sloupy s malou štíhlostí  $\lambda$  velice dobře odpovídaly únosnostem průřezu podle návrhového interakčního diagramu, viz Obr. 4.43.



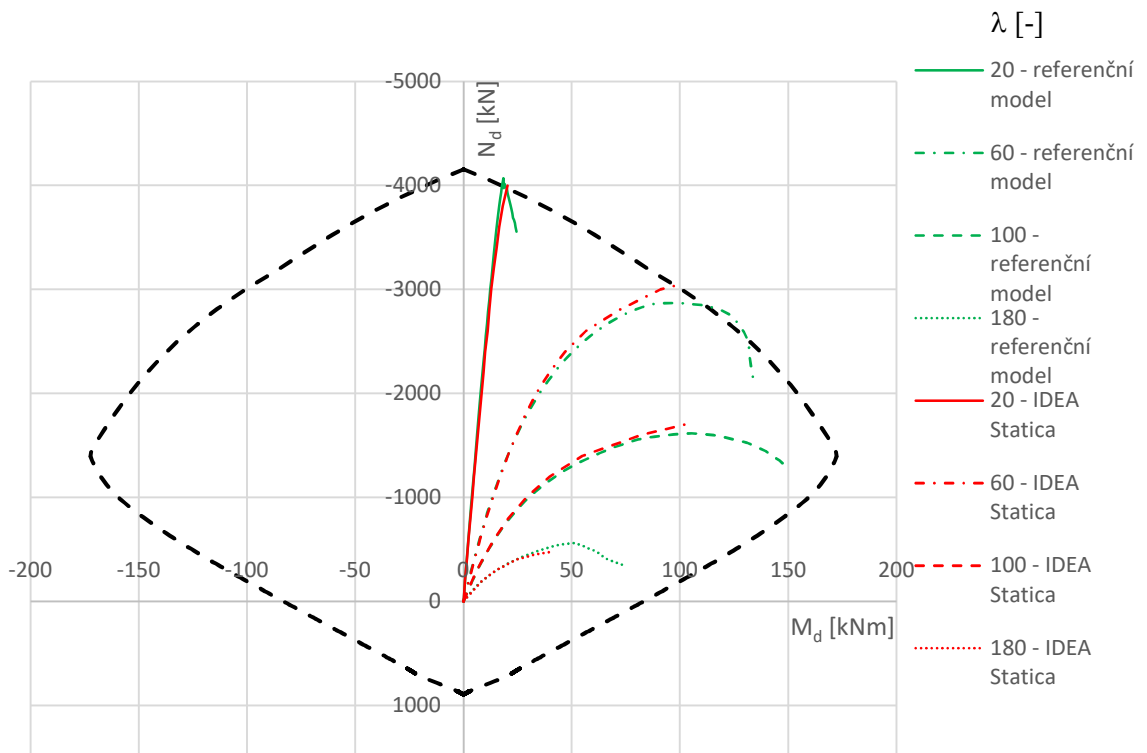
Obr. 4.43 - návrhové průběhy vnitřních sil ( $N$ ,  $M$ ) referenčního modelu určené podle různých metod

Dále byly tyto výsledky srovnány s těmi, které byly vypočítané podle normových metod a nelineárního výpočtu v programu IDEA Statica. Jak lze vyvodit z porovnání průběhů vnitřních sil ( $N$ ,  $M$ ) na Obr. 4.50 a Obr. 4.48, jako nejvhodnějším alternativním výpočtem je nelineární výpočet v programu IDEA Statica. Průběh vnitřních sil velice dobře odpovídá průběhům spočítaným v parametrické studii pomocí programu Atena Science.

Z normových zjednodušených postupů se jako vhodnější jeví metoda založená na jmenovité tuhosti. Průběh normálové síly a ohybového momentu odpovídá tomu skutečnému. Naopak z metody jmenovité křivosti vychází tyto průběhy nereálně. Metoda založená na jmenovité tuhosti ale využívá efektivní modul pružnosti betonu, který, jak se ukázalo, není zcela vystihující pro zohlednění vlivu dotvarování.



Obr. 4.48 - návrhové průběhy vnitřních sil (N, M) referenčního numerického modelu a výsledky výpočtu podle zjednodušených metod z ČSN EN 1992-1-1 bez vlivu dotvarování



Obr. 4.50 - návrhové průběhy vnitřních sil (N, M) referenčního numerického modelu a výsledky nelineární výpočtu v programu IDEA Statica (modul Member) bez vlivu dotvarování

## 5.2 ZHODNOCENÍ SPLNĚNÍ ZADÁNÍ

Příklady realizovaných staveb se štíhlými a velmi štíhlými železobetonovými sloupy jsou obsaženy v kapitole 1. Rešerše na téma teorie štíhlých prutů, ztráta stability, imperfekce a nelinearity je obsažena v kapitole 2. Popis současných výpočetních postupů pro štíhlé a velmi štíhlé železobetonové pruty je obsažen v kapitole 3. Aplikace rešerše k analýze štíhlých a velmi štíhlých železobetonových prutových prvků pomocí vhodných analytických a numerických výpočetních metod včetně validace na experimentálních výsledcích z literatury je předmětem kapitoly 3.2 a porovnání výsledků a shrnutí hlavních poznatků je pak obsaženo v kapitolách 4.5.4 a 5.1.

## 5.3 NÁMĚTY NA DALŠÍ VÝZKUM

V této práci byl prokázán zásadní vliv vzpěrné stability na únosnost štíhlých a především velmi štíhlých tlačných železobetonových prutů. V normách pro ocelové konstrukce je definován součinitel vzpěrné pevnosti, který je obsažen v každém posudku pro tlačné pruty. Bylo by zajímavé podobný součinitel zavést i u betonových konstrukcí. První příklady možného zavedení podobného součinitele jsou uvedeny již v této práci na grafech s poměrnou tlakovou únosností a relativní štíhlostí.

Zajímavé by bylo nalézt jednodušší empirický nebo analytický způsob, jak u tohoto typu konstrukčních prvků zohlednit vliv dotvarování. Využití efektivního součinitele dotvarování pro nelineární výpočet se neukázalo jako vhodné řešení.

Dále by bylo zajímavé rozšířit tuto práci o další parametry a větší rozsah parametrů, jako je vliv pevnosti betonu, tvar průřezu nebo způsob vnesení imperfekcí. V této práci bylo pro tento účel použito převedení imperfekcí na excentricitu tlakového zatížení, ale dále je možné uvažovat prut s počátečním průhybem nebo šikmou silou. Dále by se dal analyzovat vliv příčné síly a/nebo koncových momentů na tyto konstrukce.

Běžné komerční programy využívající metodu konečných prvků nemají zavedenou metodu, kterou by se daly přehledně zohlednit všechny vstupní parametry ovlivňující nelineární výpočet tlačných železobetonových prutů (zejména vyztužení, zohlednění materiálových nelinearit a imperfekcí). Dobrým příkladem programu, který tento nedostatek dobře vyřešil, je IDEA Statica. Výsledky získané výpočtem v tomto programu jsou také součástí této práce.

## 6 PŘÍLOHA 1

### Vzorový výpočet dle metody založené na jmenovité tuhosti

Vzorový výpočet je řešen pro štíhlost  $\lambda = 100$  a excentricitu zatížení  $e_0 = L_0/400 = 19,2$  mm. Uvažované tlakové zatížení je  $N = 500$  kN. Pro získání průběhu vnitřních sil pro vykreslení do grafu byl tento výpočet proveden pro několik různých normálových sil. Stupeň vyztužení je 1,5 %.

### Charakteristiky materiálu a geometrie

$$I_s = 14977857,1 \text{ mm}^4$$

$$E_s = 200000 \text{ MPa}$$

$$f_{cd} = 434,78 \text{ MPa}$$

$$A_s = 1884,96 \text{ mm}^2$$

$$I_c = 651041666,7 \text{ mm}^4$$

$$E_c = 35000 \text{ MPa}$$

$$f_{ck} = 40 \text{ MPa}$$

$$f_{cd} = 26,7 \text{ MPa}$$

$$A_c = 125000 \text{ mm}^2$$

$$i = 76,77 \text{ mm}$$

$$l_0 = 7,38 \text{ m}$$

### Součinitele

$$\varphi_{ef} = 1,86$$

$$c_0 = 8$$

### Zatížení

$$N_{Ed} = 500 \text{ kN}$$

$$e_0 = 19,2 \text{ mm} = 0,0192 \text{ m}$$

$$M_{0,Ed} = N_{Ed}e_0 = 9,6 \text{ kNm}$$

### Výpočet

$$E_{cd} = \frac{E_c}{\gamma_{ce}} = \frac{35000}{1,2} = 29166,67 \text{ MPa}$$

- Geometrický stupeň vyztužení  $\rho = 0,015 > 0,002$

$$K_s = 1$$

$$n = \frac{N_{Ed}}{A_c f_{cd}} = \frac{500000}{125000 \cdot 26,7} = 0,15 < 0,20$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{f_{ck}}{20}} = \sqrt{\frac{40}{20}} = 1,414$$

$$k_2 = n \frac{\lambda}{170} = 0,15 \frac{100}{170} = 0,088$$

$$K_c = \frac{k_1 k_2}{1 + \varphi_{ef}} = \frac{1,414 \cdot 0,088}{1 + 1,86} = 0,044$$

$$EI = K_c E_{cd} I_c + K_s E_s I_s =$$

$$= 0,044 \cdot 29,166,67 \cdot 651041666,7 + 1 \cdot 200000 \cdot 14977857,1 = 3,82 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$$

$$\beta = \frac{\pi^2}{c_0} = \frac{\pi^2}{8} = 1,234$$

$$N_B = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} = \frac{\pi^2 \cdot 3,82 \cdot 10^{12}}{7680^2} = 639,206 \text{ kN}$$

$$M_{Ed} = \frac{M_{0Ed}}{1 - \left(\frac{N_{Ed}}{N_B}\right)} = \frac{9,6}{1 - \left(\frac{500}{639,206}\right)} = 44,081 \text{ kNm}$$

$M_{Ed}$  je výsledný návrhový moment, který zohledňuje jak moment I. řádu, tak moment od II. řádu.

## 7 PŘÍLOHA 2

### Vzorový výpočet dle metody založené na jmenovité křivosti

Vzorový výpočet je řešen pro štíhlost  $\lambda = 100$  a excentricitu zatížení  $e_0 = L_0/400 = 19,2$  mm. Uvažované tlakové zatížení je  $N = 500$  kN. Pro získání průběhu vnitřních sil pro vykreslení do grafu byl tento výpočet proveden pro několik různých normálových sil. Stupeň vyztužení je 1,5 %.

### Charakteristiky materiálu a geometrie

$$I_s = 14977857,1 \text{ mm}^4$$

$$E_s = 200000 \text{ MPa}$$

$$f_{yd} = 434,78 \text{ MPa}$$

$$A_s = 1884,96 \text{ mm}^2$$

$$I_c = 651041666,7 \text{ mm}^4$$

$$E_c = 35000 \text{ MPa}$$

$$f_{ck} = 40 \text{ MPa}$$

$$f_{cd} = 26,7 \text{ MPa}$$

$$A_c = 125000 \text{ mm}^2$$

$$i = 76,77 \text{ mm}$$

$$l_0 = 7,38 \text{ m}$$

$$d = 214 \text{ mm}$$

### Součinitele

$$\varphi_{ef} = 1,86$$

$$c = \pi^2$$

### Zatížení

$$N_{Ed} = 500 \text{ kN}$$

$$e_0 = 19,2 \text{ mm} = 0,0192 \text{ m}$$

$$M_{0,Ed} = N_{Ed}e_0 = 9,6 \text{ kNm}$$

### Výpočet

$$n = \frac{N_{Ed}}{A_c f_{cd}} = \frac{500000}{125000 \cdot 26,7} = 0,15$$



-z návrhového analytického interakčního diagramu

$$N_{maxM} = 1396 \text{ kN}$$

$$n_{bal} = \frac{N_{maxM}}{A_c f_{cd}} = \frac{1396000}{125000 \cdot 26,7} = 0,418$$

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}} = \frac{1884,96 \cdot 434,78}{125000 \cdot 26,7} = 0,246$$

$$n_u = 1 + \omega = 1 + 0,246 = 1,246$$

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} = \frac{434,78}{200000} = 0,00217$$

$$\frac{1}{r_0} = \frac{\varepsilon_{yd}}{0,45 d} = \frac{0,00217}{0,45 \cdot 0,214} = 0,025 \text{ m}^{-1}$$

$$\beta = 0,35 + \frac{f_{ck}}{200} - \frac{\lambda}{150} = 0,35 + \frac{40}{200} - \frac{100}{150} = -0,117$$

$$K_\varphi = 1 + \beta \varphi_{ef} = 1 + (-0,117 \cdot 1,86) = 0,782 < 1$$

$$K_\varphi = 1$$

$$K_r = \frac{n_u - n}{n_u - n_{bal}} = \frac{1,246 - 0,15}{1,246 - 0,418} = 1,323 \Rightarrow 1$$

$$K_r = 1$$

$$\frac{1}{r} = K_r K_\varphi \frac{1}{r_0} = 1 \cdot 1 \cdot 0,025 = 0,025 \text{ m}^{-1}$$

$$e_2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{l_0^2}{c} = 0,025 \cdot \frac{7,38^2}{\pi^2} = 0,138 \text{ m} = 138 \text{ mm}$$

$$M_2 = N_{Ed} e_2 = 500 \cdot 0,138 = 69 \text{ kNm}$$

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + M_2 = 9,6 + 69 = 78,6 \text{ kNm}$$

$M_{Ed}$  je výsledný návrhový moment, který zohledňuje jak moment I. řádu, tak moment od II. řádu.

## 8 LITERATURA

### Publikace

- [1] JANDA L., KRÍSTEK, V., KVASNIČKA M., PROCHÁZKA J. *Štíhlé betonové tlačené pruty*. 1. vydání. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1983.
- [2] JIRÁSEK M., ZEMAN J. *Přetváření a porušování materiálů: dotvarování, plasticita, lom a poškození*. 2. vyd. Praha: ČVUT, 2012. ISBN 978-80-01-05064-4.
- [3] BAŽANT Z., CEDOLIN L. *Stability Of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture And Damage Theories*. Singapore: World Scientific Publishing, 2010. ISBN 981-4317-02-0; 978-981-4317-02-3.
- [4] ZIEMAN, Ronald D. (ed.). *Guide to stability design criteria for metal structures*. Sixth edition. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc, 2010. ISBN 978-0-470-08525-7.
- [5] TIMOSHENKO S. P., GOODIER J. N.; *Theory of elasticity*; 2nd ed.; New York: McGrawHill, 1987; ISBN 978-0-486-47207-2.

### Normy

- [6] ČSN EN 1990 ed. 2, *Zásady navrhování konstrukcí*. Praha: ÚNMZ, únor 2021
- [7] ČSN EN 1991-1-1, *Eurokód 1: Zatížení konstrukcí – Část 1-1: Obecná zatížení – Objemové tíhy, vlastní tíha a užitná zatížení pozemních staveb*. Praha: ČNI, březen 2004.
- [8] ČSN EN 1992-1-1 ed. 2. *Eurokód 2: Navrhování betonových konstrukcí – Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby*. Praha: ÚNMZ, listopad 2019.
- [9] ČSN EN 1992-2. *Eurokód 2: Navrhování betonových konstrukcí – Část 2: Betonové mosty – Navrhování a konstrukční zásady*. Praha: ČNI, květen 2007.
- [10] ČSN EN 1993-1-1 ed. 2. *Eurokód 3: Navrhování ocelových konstrukcí – Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby*. Praha: ČNI, prosinec 2006.
- [11] *fib model code for concrete structures 2010*. Berlin: Fédération internationale du béton, 2013.

### Ostatní

- [12] DLUBAL SOFTWARE s.r.o., *Přídavný modul RF-Stability, Součinitele kritického zatížení, vzpěrné délky a tvary vybočení. Popis programu*. 2014
- [13] ČERVENKA V., JENDELE L., ČERVENKA, J. *ATENA Program documentation, Part 1, Theory*. V Praze: Červenka consulting s.r.o., 2021.
- [14] DOBRÝ J., WOLFGER H., BENKO, V. *Reliability of slender concrete columns designed according to the Eurocodes* [online]. Engineering Structures, vydání 265, 2022. ISSN 0141-0296.  
Dostupné z: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029622003935>
- [15] ČERVENKA V. *Global safety formats in fib Model Code 2010 for design of concrete structures* [online]. Červenka Consulting s.r.o., 2013. Dostupné z:  
[https://www.cervenka.cz/assets/files/papers/11th\\_ipw\\_global-safety\\_2013.pdf](https://www.cervenka.cz/assets/files/papers/11th_ipw_global-safety_2013.pdf)
- [16] JIRÁSEK M. *Pružnost a pevnost, 5. přednáška [elektronická přednáška]*. Fakulta stavební ČVUT v Praze, říjen 2014

- [17] ŠMILAUER V. Pružnost, pevnost, 5. přednáška [elektronická přednáška]. Fakulta stavební ČVUT v Praze, 2011
- [18] VRÁBLÍK L. Betonové konstrukce 3, 10. přednáška [elektronická přednáška]. Fakulta stavební ČVUT v Praze, listopad 2021
- [19] BAŽANT Z. P. *Creep stability and buckling strength of concrete columns*. Prague: CTU in Prague, 1968
- [20] CYPINAS I. *Non-linear deformation and stability of reinforced concrete columns under the long time load* [online]. *Statyba*, 5:3, 176-182, July 2012. Dostupné z: <https://doi.org/10.1080/13921525.1999.10531459>
- [21] BARRERA A. C., BONET J. L., ROMERO P. F. *Experimental tests of slender reinforced concrete columns under combined axial load and lateral force*. *Engineering Structures* 33, 3676-3689, December 2011. Dostupné z: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029611003178?via%3Dihub>
- [22] HYNEK T. *Štíhlé železobetonové sloupy*. Praha, 2020. Diplomová práce, ČVUT v Praze, Fakulta stavební, Katedra betonových a zděných konstrukcí
- [23] SCHAEFER S., Univerzitní knihovna Magdeburg, Německo [foto]. Magdeburg 2006. In: *Wikipedia* [online]. [Cit. 7.1.2023]. Dostupné z: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Unibibliothek\\_magdeburg.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Unibibliothek_magdeburg.jpg)
- [24] CHEPKEMOI, J. *Tallest Railway Bridges in the World*. [online], In: WorldAtlas. [Cit. 7.1.2023]. Dostupné z: <https://www.worldatlas.com/articles/the-tallest-railway-bridges-in-the-world.html>
- [25] R-Projekt 07 Praha s.r.o. [online]. [Cit 9.1.2023]. Dostupné z: <https://rprojekt07.cz/palladium-praha-1/>