

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta stavební  
Katedra betonových a zděných konstrukcí



**Modelování tečení čerstvé betonové směsi  
pomocí Lattice Boltzmann metody**

Autor:

*Bc. Václav Wudi*

Diplomová práce

Fakulta stavební, České vysoké učení technické v Praze

Studijní program: Stavební inženýrství

Praha Leden 2023

---

**Vedoucí práce:**

Mgr. Yuliia Khmurovska, Ph.D..

Katedra betonových a zděných konstrukcí

Fakulta stavební

České vysoké učení technické

Thákurova 277/7

160 00 Prague 6


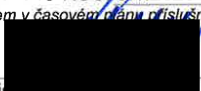
Copyright © Leden 2023 Bc. Václav Wudi

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

### I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: <u>Wudi</u>	Jméno: <u>Václav</u>	Osobní číslo: <u>468654</u>
Zadávající katedra: <u>K133</u>		
Studijní program: <u>Stavební inženýrství</u>		
Studijní obor/specializace: <u>Konstrukce pozemních staveb</u>		

### II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce: <u>Modelování tečení čerstvé betonové směsi pomocí Lattice Boltzmann metody</u>	
Název diplomové práce anglicky: <u>Simulation of Fresh Concrete Flow Using Lattice Boltzmann Method</u>	
Pokyny pro vypracování: Rešerše 2D formulace LBM modelu Image postprocessing Vytvoření numerického programu Příklad aplikace	
Seznam doporučené literatury: Internetové zdroje	
Jméno vedoucího diplomové práce: <u>Mgr. Yuliia Khmurovska, Ph.D</u>	
Datum zadání diplomové práce: <u>26.9.2022</u>	Termín odevzdání DP v IS KOS: <u>9.1.2023</u> <small>Údaj uveďte v souladu s datem v časovém plánu příslušného ak. roku</small>
 Podpis vedoucího práce	 Podpis vedoucího katedry

### III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

*Beru na vědomí, že jsem povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je nutné uvést v diplomové práci a při citování postupovat v souladu s metodickou příručkou ČVUT „Jak psát vysokoškolské závěrečné práce“ a metodickým pokynem ČVUT „O dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací“.*

<u>26.9.2022</u> Datum převzetí zadání	 Podpis studenta(ky)
---	---

---

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze 9.1.2023

.....  
*Bc. Václav Wudi*

---

## Poděkování

Napsání této Diplomové práce bych nebyl schopen bez pomoci mého okolí. V první řadě bych chtěl poděkovat vedoucí práce Mgr. Yulii Khmurovské, Ph.D. za připomínky během psaní práce. Dále bych chtěl poděkovat prof. Ing. Petru Štemberkovi Ph.D., D.Eng. V ne-  
poslední řadě bych chtěl poděkovat mojí rodině za podporu během studia.

---

# Abstrakt

Cílem této práce bylo vytvoření programu, který vypočítá chování čerstvé betonové směsi. Výpočet je vytvořen vícefázovým modelem s využitím Lattice Boltzmann metody. Směs je modelována jako kapalina s příslušnými parametry. Viskozita je popsána Bingham modelem. Implementace je provedena v programovacím jazyce Python. Přesnost modelu byla ověřena s daty rozlití kužele.

## Klíčová slova

Lattice Boltzmann metoda, Konzistence betonu, Zkouška rozlití kužele, Rozlití betonu

---

# Abstract

The aim of the thesis is focused on creating programs which compute of behavior fresh concrete mixture. The calculate is done by multiphase model including Lattice Boltzmann method. A mixture is modeled as a liquid with appropriate parameters. The viscosity is described by Bingham model. The implementation is done in Python programming language. The accuracy of the model was verified by the data of slump flow test.

## Key words

Lattice Boltzman method, Consistency of concrete, Slump flow test, Flow of concrete

## Použité matematické proměnné

### Proměnné

$\alpha$	koeficient naplnění dané buňky
$\beta$	koeficient pro změnu hmotnosti - rozdílný pro různé buňky
$c$	hodnota směru vektoru distribuční funkce
$C_r$	koeficient restituce
$D$	hodnota dirac delta funkce
$e$	směry vektoru distribuční funkce
$f$	hodnota distribuční funkce
$F$	externí zatížení
$f_{eq}$	equilibrium distribuční funkce
$f_{neq}$	nonequilibrium distribuční funkce
$f^{pc}$	hodnota distribuční funkce po kolizi
$\rho$	hustota distribuční funkce
$\kappa$	hodnota minimálního přírůstku při změně buněk.
$m$	hmotnost (buňky)
$m_a$	hmotnost prvního tělesa
$m_b$	hmotnost druhého tělesa
$\tau$	viskozita - součinitel tření
$\nu$	viskozita - obecně
$\nu_{app}$	viskozita - vstupující do výpočtu
$u$	rychlost kapaliny
$u_a$	rychlost tělesa a, případně zaměněno za b, absolutní rychlost v čísle
$u_{max}$	nejvyšší rychlost, která se vyskytuje v příslušné výpočetní oblasti
$u_{tresh}$	treshold hodnota rychlosti, nejvyšší přípustná rychlost kapaliny
$v$	hustota rychlosti distribuční funkce
$w_i$	váha distribuční funkce



---

# Obsah

<b>Prohlášení</b>	iv
<b>Poděkování</b>	v
<b>Abstrakt</b>	vi
Klíčová slova . . . . .	vi
<b>Abstract</b>	vii
Key words . . . . .	vii
Použité matematické proměnné . . . . .	viii
<b>1 Úvod</b>	<b>1</b>
1.1 Téma . . . . .	1
1.2 Cíle práce . . . . .	2
1.3 Návod na použití - členění práce . . . . .	2
<b>2 Lattice Boltzmann model</b>	<b>3</b>
2.1 Lattice Boltzmann metoda . . . . .	5
2.1.1 Postup výpočtu . . . . .	8
2.1.2 Viskozita . . . . .	9

---

2.1.3	Volná hladina . . . . .	11
2.1.4	Okrajové podmínky . . . . .	13
2.1.5	Změna hmotnosti . . . . .	17
2.1.6	Změna buněk . . . . .	18
2.1.7	Stabilita výpočtu . . . . .	20
2.1.8	Jednotky . . . . .	20
2.2	Úroveň objektů . . . . .	22
2.2.1	Postup výpočtu . . . . .	23
2.2.2	Typy kolizí . . . . .	24
2.2.3	Časy kolizí . . . . .	27
2.2.4	Kolize ve 2 dimenzích . . . . .	29
2.2.5	Případy kolizí . . . . .	30
2.3	Úroveň interakce objekt - kapalina . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Implementace</b>	<b>35</b>
3.1	Volba programovacího jazyka . . . . .	35
3.1.1	Objektově orientované programování . . . . .	36
3.1.2	Postprocessing . . . . .	36
3.2	Zvolené parametry modelu . . . . .	37
3.2.1	Velikost časového kroku a mřížky . . . . .	37
3.2.2	Koeficient restituce . . . . .	37
3.2.3	Viskozita čerstvé betonové směsi . . . . .	38
3.2.4	Součinitel tření. . . . .	38
3.2.5	Množství a velikost kameniva . . . . .	38
3.3	Použité metody a postupy . . . . .	39
3.3.1	Integrace zrychlení . . . . .	39
3.3.2	Počáteční poloha kameniva . . . . .	39
3.3.3	Generování průběhu volné hladiny. . . . .	40
3.4	Vylepšení modelu . . . . .	41

---

3.4.1	Podoblasti . . . . .	41
3.4.2	Vykreslení hladiny. . . . .	42
3.4.3	Rotační symetrie . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Modely, zkoušky a příklady</b>	<b>44</b>
4.1	Zkouška rozlití kameniva . . . . .	44
4.1.1	Příklady výpočtu . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Výsledky</b>	<b>48</b>
5.1	Porovnání modelu a dat . . . . .	48
5.1.1	Porovnání s daty . . . . .	48
5.2	Úpravy modelu . . . . .	51
5.2.1	Podoblasti . . . . .	51
5.3	Zhodnocení výsledků . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Závěr</b>	<b>53</b>
	<b>Literatura</b>	<b>54</b>

---

# Úvod

Zpracovatelnost je jedním z nejdůležitějších parametrů pro návrh betonové směsi. Tato vlastnost betonu zodpovídá za dostatečné tečení směsi nebo za vyplnění forem a bednění. To znamená, že snížená zpracovatelnost betonové směsi vede k vadám v důsledku horšího probetonování konstrukce. Přidáváním vody může zpracovatelnost zlepšit, ale na druhou stranu to může mít za následek segregaci (oddělení kameniva z cementové malty) čerstvého betonu. Pro zjednodušenou predikci dostatečného tečení navržené betonové směsi a případnou segregaci se dá použít numerické modelování.

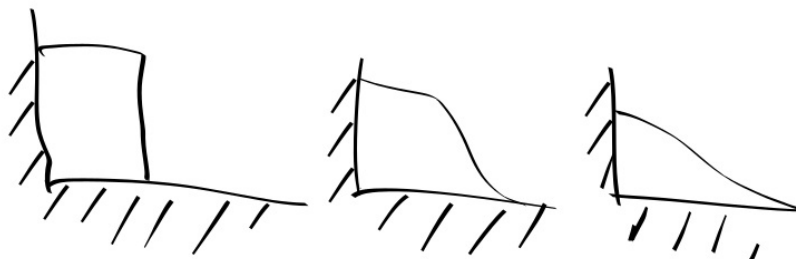
## 1.1 Téma

Popsání chování tečení kapalin je problém, který většinou nemá analytické řešení.<sup>1</sup> Řešení je tedy nutno nalézt některou numerickou metodou (viz Obr. 1.1).

V mém případě řeším modelování pomocí Lattice Boltzmann metody. Tato metoda je založena na tom, že neřeší rovnici proudění přímo, ale simuluje hustotu tekutiny ve mřížce pomocí proudění a kolize. Výhodou je také, že oproti jiným metodám (například Metoda konečných objemů) nemusí řešit problém volné hladiny. To ji činí jednoduchou na implementaci.

---

<sup>1</sup>Přímé řešení tečení kapalin je otevřený matematický problém.



Obrázek 1.1: Příklad rozlití kapaliny.

## 1.2 Cíle práce

Cílem práce je vytvořit program, který dokáže popsat chování čerstvého betonu. Součástí tohoto cíle je i otestování vytvořeného programu na datech uvedených v literatuře. Mým osobním cílem této práce je rozvinout své schopnosti v oblasti programování numerických metod.

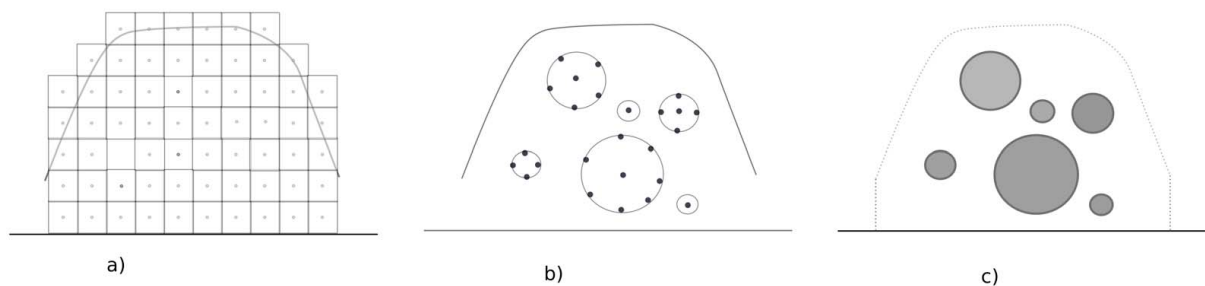
## 1.3 Návod na použití - členění práce

Zde bych chtěl popsat několik poznámek, které mohou čtenáři zlepšit čtení této publikace, případně objasnit některé nejasnosti.

1. U některých matematických vzorců nevysvětluji všechny proměnné. Ty jsou popsány ve vlastním seznamu na začátku diplomové práce.
2. V textu používám poznámky pod čarou. Tyto poznámky jsou doplněk textu a práce samotná bez nich dává význam. Při napsání do textu by mohly vytvářet rušivý dojem. Poznámky text doplňují informacemi, které jsem považoval za zajímavé, nebo vhodné zmínit.

## Lattice Boltzmann model

V této práci vycházím z modelu Lattice Boltzmann metody. Jedná se o vícefázový model. Vícefázové modely jsou vhodné tam, kde se nachází více materiálových složek, které se každá chovají jinak [1]. Vícefázový model založený na metodě Lattice Boltzmann se skládá ze tří úrovní [2] (viz Obr. 2.1).



Obrázek 2.1: a) Kapalina - LBM, b) Interakce c) Tělesa.

- o První je úroveň kapaliny. Pro výpočet byla použita Lattice Boltzmann metoda <sup>1</sup>[3]. Tato úroveň zjednodušuje podstatu chování betonové směsi jako chování nenewtonovské kapaliny s danou viskozitou.

<sup>1</sup>Termín Lattice Boltzmann metoda je převzatý z angličtiny, při doslovném překladu by název mohl znít: Mřížková (nebo mřížová) Boltzmannova metoda.

- 
- Druhou úrovní je část zahrnující pevné částice, především jde tedy o kamenivo. V této práci se uvažuje jako nedeformovatelná tělesa jednoduchých tvarů, která se mohou volně pohybovat.
  - Poslední úrovní je úroveň interakce mezi dvěma předchozími. Vychází z rovnováhy rychlostí. Výpočet je proveden metodou Immersed Boundary method [4].

Při výpočtu je potřeba nejprve vygenerovat proměnné u prvních dvou fází. Následně probíhá hlavní výpočetní cyklus všech fází, který se opakuje dokud nedojde k omezující podmínce. Tou může být dosažení konečného času, případně dosažení určitého stavu, při kterém už nedochází k pohybu kapaliny.

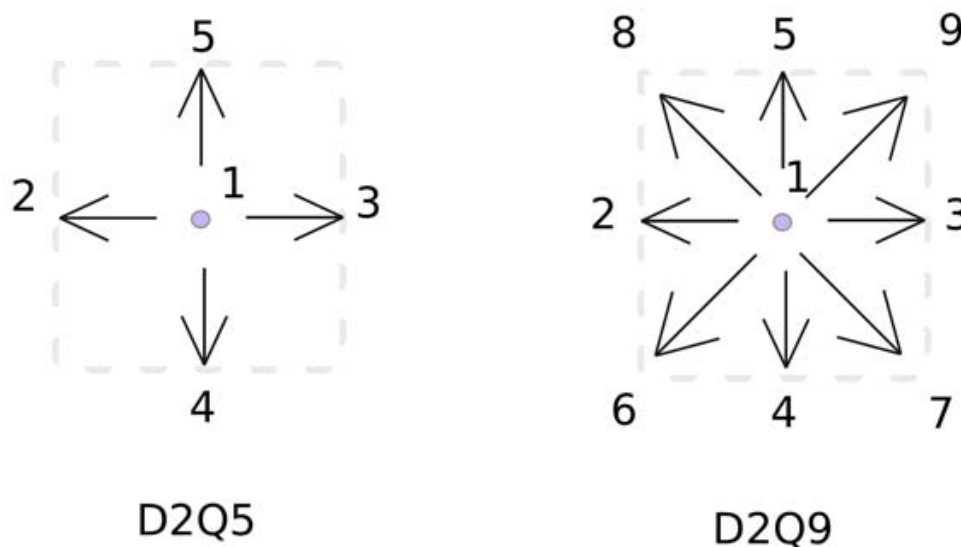
## 2.1 Lattice Boltzmann metoda

Lattice Boltzmann metoda (dále též uváděno jako LBM) je numerická metoda, která vychází z celulárních automatů. Metoda je založena na Boltzmannově rovnici proudění kapaliny [5].

$$\frac{\partial f}{\partial x} + v * \nabla f = Q \quad (2.1)$$

Základem metody je mřížka. Tato mřížka je čtvercová v případě dvoudimenzionálních úloh. V případě trojdimenzionálních úloh je krychlová. V případě úloh o jedné dimenzi je úsečkou.

Každá mřížka obsahuje několik předem daných vektorů distribuční funkce (viz Obr. 2.2). Značení je následující: hodnota D znázorňuje počet dimenzí,  $Q^2$  udává počet směrů rychlosti distribuční funkce [6].



Obrázek 2.2: Příklad dvou 2D mřížek.

<sup>2</sup>Hodnota  $Q$  udávající počet vektorů rychlosti, nemá nic společného s hodnotou  $Q$  v Boltzmannově rovnici.



Například D2Q9 (model použitý v této práci) používá prostor o dvou dimenzích při kterém je využito devět vektorů rychlosti distribuční funkce. Mezi další používané modely lze zařadit D2Q4. Pro 3D úlohy to jsou D3Q15, D3Q19 nebo D3Q27. Pro jednu dimenzi se nabízí D1Q3 nebo D1Q5.

Poměr velikostí vektorů distribuční funkce udává poměr proudění kapaliny v daných směrech.

Pro model D2Q9 jsou vektory rychlostí distribuční funkce následující:

$$\begin{aligned} e_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T \\ e_{2,3,4,5} &= \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \end{pmatrix}^T \\ e_{6,7,8,9} &= \begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 \end{pmatrix}^T \end{aligned} \quad (2.2)$$

Každému členu vektoru distribuční funkce je přiřazena váha. Součet všech vah se musí rovnat jedné.

$$\sum w_i = 1 \quad (2.3)$$

Pro model D2Q9 jsou hodnoty vah v daných směrech následující:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{4}{9} \\ w_{2,3,4,5} &= \frac{1}{9} \\ w_{6,7,8,9} &= \frac{1}{36} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Součet všech složek vektoru distribuční funkce je roven makroskopické hustotě buňky.

$$\rho = \sum f_i \quad (2.5)$$

Součet hodnot distribuční funkce se zohledněním směru je roven momentu v daném směru [7]:

$$\rho v = \sum f_i e_i + \frac{1}{2} a \delta t \quad (2.6)$$

kde  $a$  je volená hodnota na intervalu od 0 do 1. Pro hodnotu  $a = 0$  lze rychlost získat jako poměr součtu hodnot složek vektoru distribuční funkce v příslušných směrech vektoru

a makroskopické hustoty buňky.

$$v = \frac{\sum f_i e_i}{\rho} \quad (2.7)$$

Základem výpočtu jsou dva kroky. Prvním krokem je kolize. Druhým krokem je proudění. Při kolizi dochází k přeskupení velikostí vektorů distribuční funkce v rámci každé mřížky vlivem předchozího proudění a působících externích sil.

$$f_i(x; t + \delta t) = f_i(x, t) + \Delta_t \frac{f_i^{eq}(x, t) - f_i(x, t)}{\tau_f} + \Delta * F_i \quad (2.8)$$

K tomuto výpočtu je potřeba použít equilibrium. Equilibrium se stejně jako distribuční funkce skládá z několika vektorů rychlosti. V každém vektoru lze získat hodnotu Equilibria jako několik členů Taylorova rozvoje rovnice proudění převedenou do konečných hodnot.

$$f_i^{eq}(x, t) = w_i \left( \rho + 3 \frac{e_i u}{c_s^2} + \frac{9}{2} \frac{(e_i u)^2}{c_s^4} - \frac{3}{2} \frac{u^2}{c_s^2} \right) \quad (2.9)$$

Velikost síly v libovolné rychlosti lze získat ze dvou následujících podmínek. První udává, že součet všech složek sil je roven nule.

$$\sum F_i = 0 \quad (2.10)$$

Druhá podmínka značí, že součet všech složek vektoru sil se zohledněním směru je roven absolutnímu působení síly s přihlédnutím k viskozitě.

$$\sum F_i * e_i = \left(1 - \frac{1}{2\tau}\right) F \quad (2.11)$$

Při proudění dochází k posunu hodnoty distribuční funkce v příslušném směru složek daného vektoru.

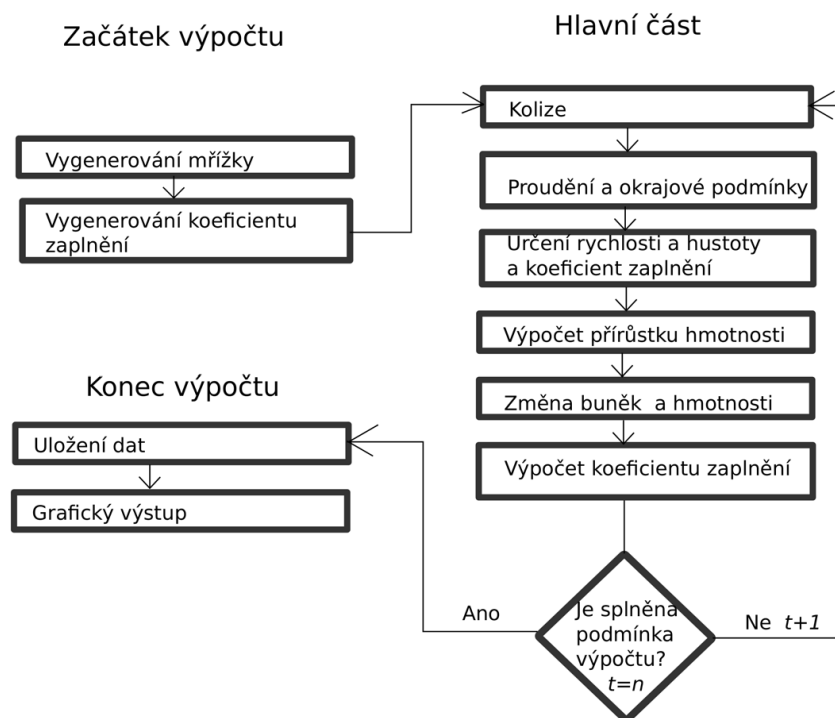
$$f_i(x + e_i; t + \delta t) = f_i(x, t) \quad (2.12)$$

Pokud jsou kroky kolize a proudění ve výpočtu prohozeny, kdy nastává nejdříve proudění a poté kolize, je výpočet proudění pozměněn. Změna spočívá v tom, že se složky vektoru distribuční funkce posunou v opačném směru.

$$f_i(x; t + \delta t) = f_i(x + e_i, t) \quad (2.13)$$

### 2.1.1 Postup výpočtu

Výpočet proudění pomocí Lattice Boltzmann metody je dán třemi částmi. V první části výpočtu se data o poloze kapaliny převedou na model, následně proběhne hlavní část výpočtu. Poslední částí výpočtu je převedení dat výsledků do grafických výstupů <sup>3</sup> (viz Obr. 2.3).



Obrázek 2.3: Vývojový diagram výpočtu

Výpočet začíná vygenerováním mřížky a převedením kapaliny do buněk. U buněk, kterými prochází ohraničení volnou hladinou, se dopočte koeficient zaplnění buňky. Před samotným výpočtem se také vypočte hodnota distribuční funkce. Rychlost v počátečním kroku se uvažuje jako nulová, pokud není stanoveno jinak.

<sup>3</sup>Tento krok se také nazývá postprocessing (případně data postprocessing). Jde o slovo převzaté z angličtiny ze slov post a processing. Znamená zpracování po hlavním výpočtu. Tedy jde vytvoření takové grafické podoby, která dá výsledky snadněji srozumitelné, než surová data.

Následuje hlavní smyčka výpočtu. Ta začíná kolizí a prouděním. Součástí proudění je i zohlednění okrajových podmínek. Z nově vzniklé hodnoty distribuční funkce se poté vypočítá hustota, rychlost a koeficient zaplnění buněk  $\alpha$ .

Změna vektorů distribuční funkce způsobí přírůstek hmotnosti. Z něho se provede změna buněk a přeskupení přebývajících hmoty. Po změně buněk je opět třeba přepočíst hodnotu zaplnění buněk  $\alpha$ .

Ukončení výpočtu může nastat na základě dvou podmínek. První podmínkou je dosažení zvoleného počtu výpočetních kroků. Druhou podmínkou je dosažení takového stavu kapaliny, při ní již nedochází ke změně pohybu kapaliny.

Po ukončení hlavní části výpočtu následuje postprocessing. Při něm je možné z výsledků výpočtu zrekonstruovat průběh hladiny a vytvořit grafickou podobu výsledků. Jeho součástí může být vytvoření animací zobrazující chování betonu v čase.

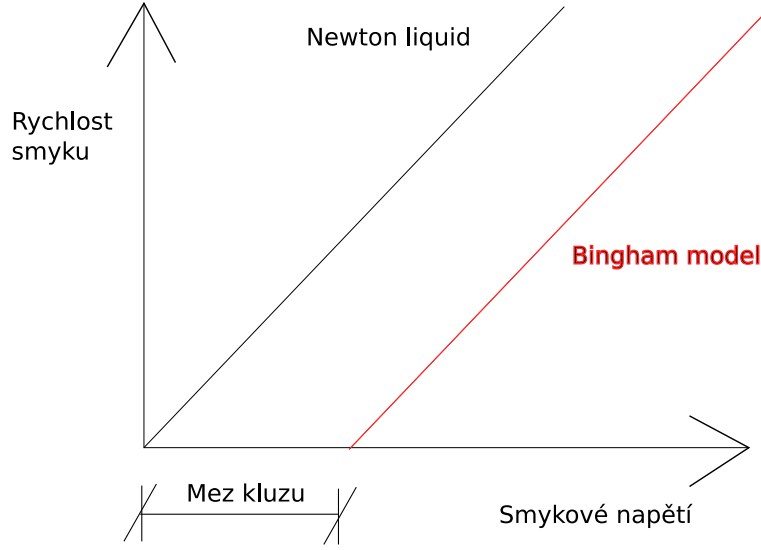
### 2.1.2 Viskozita

Viskozita je zásadní veličina při popisu chování tečení kapalin, která udává poměr mezi změnou rychlostí a tečným napětím. V Lattice Boltzmann metodě vstupuje do výpočtu equilibria a distribuční funkce prostřednictvím součinitele tření. Velikost součinitele tření je odvozena od hodnot viskozity následovně:

$$\tau(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{3\nu(x, t)}{\Delta t} \quad (2.14)$$

Chování kapaliny lze rozdělit na dva možné případy. Pro newtonovskou kapalinu je viskozita a součinitel tření konstantní hodnota. Pro neneutronovskou kapalinu je viskozita proměnnou měnící se v čase a prostoru. Její popis závisí na vlastnostech kapaliny, jako jsou vnitřní tření a povrchové napětí.

Chování kapaliny se snažíme popsat materiálovým modelem. Jedním z modelů používaných pro popis neneutronovské kapaliny je Bingham plastický model [8]. Tento model dosahuje dostatečné přesnosti pro běžné betony [9]. Předpokládá se v něm, že viskozita je lineárně závislá na deviatoru tření a velikosti tření [10] (viz Obr. 2.4).



Obrázek 2.4: Bingham a Newton model.

Deviátor tření a velikost tření v příslušném místě a čase se získají na základě součinitele tření z předchozího časového kroku a součtu hodnot vektoru nonequilibria se zohledněním násobků složek vektoru.

$$\gamma(x, t)_{i,j} \approx \frac{3}{2\tau(x, t-1)} \sum c_{i,\alpha} c_{j,\alpha} f_{\alpha}^{neq}(x, t) \quad (2.15)$$

$$S_y(x, t) \approx \left(1 - \frac{1}{2\tau(x, t-1)}\right) \sum \left(c_{i,\alpha} c_{j,\alpha} - \frac{\delta}{Dim} c_{\alpha} c_{\alpha}\right) f_{\alpha}^{neq}(x, t) \quad (2.16)$$

Kde druhý invariant tenzoru povrchového napětí je dán odmocninou sumy násobků složek tenzoru napětí.

$$\gamma = \sqrt{2 \sum \sum \gamma_{i,j} \gamma_{j,i}} \quad (2.17)$$

Do výpočtu vstupuje nonequilibrium. To je rovno odečtení vektoru equilibria od vektoru distribuční funkce.

$$f_{\alpha}^{neq}(x, t) = f_{\alpha}(x, t) - f_{\alpha}^{eq}(u_f, \rho_f) \quad (2.18)$$

U viskozity se stanoví maximální a minimální velikost viskozity. Pokud vypočtená visko-

zita překročí krajní hodnoty intervalu, určí se jako příslušná krajní hodnota.

$$\begin{aligned}
 \nu_{app} &= \frac{1}{3} \left( \tau_{max} - \frac{1}{2} \right) && \text{pro } \tau_{app} > \tau_{max} \\
 \nu_{app} &= \frac{1}{3} \left( \tau_{min} - \frac{1}{2} \right) && \text{pro } \tau_{app} < \tau_{min} \\
 \nu_{app} &= \nu_0 + \frac{S_y}{\gamma} && \text{pro } \tau_{min} \leq \tau_{app} \leq \tau_{max}
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Pro hodnoty velmi blízké  $\tau = 0.5$  a nižší se výpočet stává nestabilním. Důvodem je, že u hodnot  $\tau = 0$  platí že  $1 - \frac{1}{2\tau} = 0$ . Hodnoty  $\tau$  blízké hodnotě 0.5 dají hodnotu blízké nule. Je vhodné nastavit vyšší hodnotu minimální viskozity (naříklad  $\tau = 0.51$ ).

Viskozita může být jedním z parametrů určující, že již byl dosažen stav rovnováhy a tedy ukončen výpočet. Jde například o podmínku dosažení určitých procent buněk s maximální viskozitou.

### 2.1.3 Volná hladina

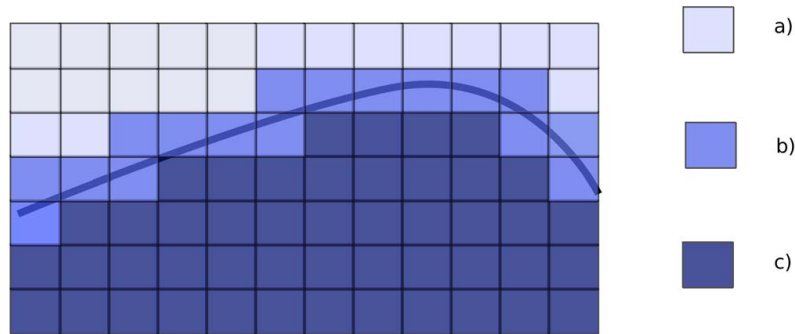
U Lattice Boltzmann metody rozdělujeme úlohy na dva druhy. Jsou to úlohy z vnějšku ohraničené, které zohledňují jeden typ plynu (kapaliny) a úlohy s volnou hladinou, které zahrnují více plynů.

Pro úlohy s volnou hladinou mohou buňky (mřížky) nabývat tří typů. Jsou to buňky plné, u kterých se předpokládá, že objem buňky je plně obsazen kapalinou. Dále to jsou buňky přechodové, u nich je část buňky vyplněna kapalinou a část vzduchem. Posledním typem jsou prázdné buňky reprezentující vzduch (viz Obr. 2.5).

Výpočtu kolize a proudění se účastní jen buňky přechodové a plné, stejně tak následných přírůstků hmotnosti.

Míru zaplnění každé buňky lze vyjádřit koeficientem zaplnění. Ten je dán poměrem hmotnosti ku objemu buňky,

$$\alpha = \frac{m}{\rho} \tag{2.20}$$

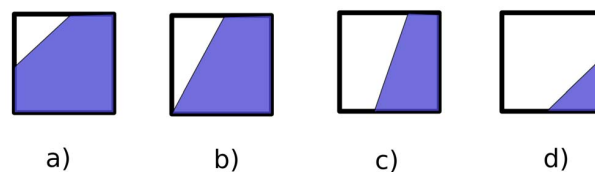


Obrázek 2.5: a) Prázdná buňka b) Přejídná buňka c) Plná buňka.

kde platí:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 0 && \text{Pro prázdné buňky} \\
 \alpha &\in (0, 1) && \text{Pro přejídné buňky} \\
 \alpha &= 1 && \text{Pro buňky kapaliny}
 \end{aligned}
 \tag{2.21}$$

Na začátku výpočtu je třeba převést tvar hladiny na mřížky. Tedy je třeba pro danou zvolenou mřížku určit, která buňka je plná a prázdná. U přejídných buněk je třeba určit hodnotu koeficientu zaplnění. Ten se určí podle míry zaplnění příslušné buňky kapalinou. (viz Obr. 2.6)<sup>4</sup>



Obrázek 2.6: Příklad určení koeficientem zaplnění  $\alpha$  a) 0.875 b) 0.75 c) 0.5 d) 0.125

Obdobný proces nastává u rekonstrukce průběhu hladiny, při ní je třeba z hodnot koeficientu zaplnění a typu buněk určit průběh hladiny. Výpočet rekonstrukce hladiny je

<sup>4</sup>Průběh hladiny je na všech čtyřech obrázcích znázorněn přímkou. V reálné situaci může být průběh hladiny rozložen libovolně.

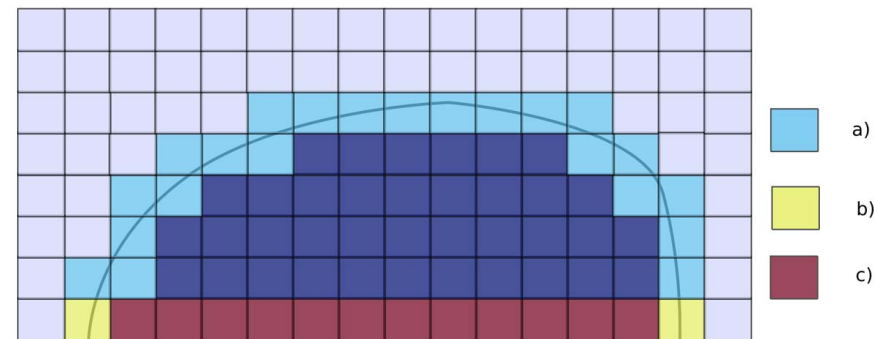
složitější. U převedení hladiny na buňky stačí určit poměr ploch [11].

$$\alpha = \frac{V_{water}}{V} \quad (2.22)$$

Zpětný výpočet dává téměř nekonečně možností jak plochu vyplnit do daného poměru. Při jejím výpočtu je třeba vyjít z předpokladu spojitosti hladiny.

### 2.1.4 Okrajové podmínky

Pro ohraničení výpočtu je třeba určit okrajové podmínky. Základním rozdělením je určení, kde se daná okrajová podmínka nachází. Jsou zde okrajové podmínky v buňkách náležící k pevným překážkám a okrajové podmínky na hladině nacházející se uvnitř mezilehlých buněk. Speciálním případem okrajových podmínek jsou ty případy, kdy nastávají oba typy okrajových podmínek naráz v jedné buňce <sup>5</sup>. S tím se lze setkat v buňce na rozhraní mezi překážkou a hladinou (viz Obr.2.7).

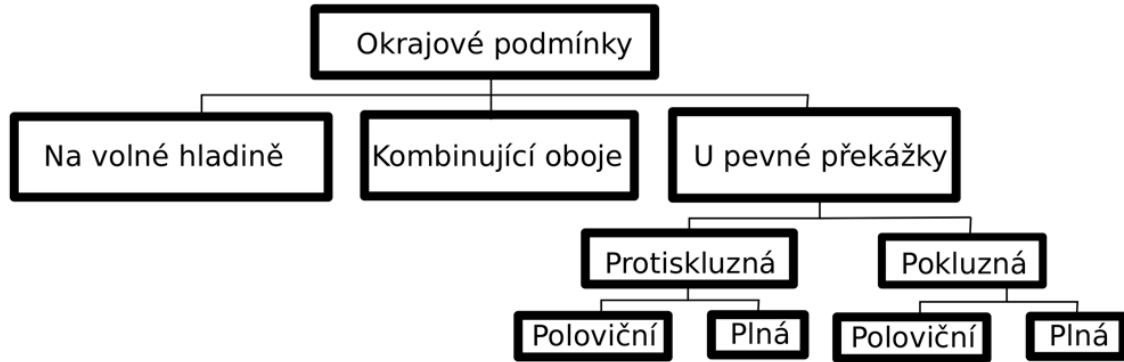


Obrázek 2.7: a) u volné hladiny b) kombinovaná okrajová podmínka c) u pevné překážky.

<sup>5</sup>Další problém, který zde nerozvádím, je tuhost překážky a stálost její polohy. Ve vzorcích uvedených v této kapitole se předpokládá, že jsou tělesa v klidu a tudíž je rychlost kolmo na překážku (případně rovnoběžně, podle typu podmínky) v místě překážky nulová. V případě, že by tomu tak nebylo, byla by potřeba zavést do vzorců složku vektorů rychlosti překážky. Pokud by překážka nebyla uvažována jako nekonečně tuhá, musela by se zavést poddajnost. Poté by byla poloha a rychlost překážky odvozena od zatížení.



Pro případy s pevným ohraničením jsou základní dva typy okrajových podmínek. Jsou jimi odrazová a zrcadlová okrajová podmínka. Rozlišuje se, pokud je překážka na hraně mřížky, a tedy prochází uzlem mřížky, nebo nachází v polovině mřížky<sup>6</sup> <sup>7</sup>[12] (viz Obr. 2.8).



Obrázek 2.8: Základní rozdělení typů okrajových podmínek.

Okrajové podmínky je třeba zohlednit do výpočtu v kroku následujícím po proudění. Příklady výpočtu vektorů rychlostí u jednotlivých typů okrajových podmínek jsou v této podkapitole uvedeny pro model D2Q9. Pro jiné modely jsou vzorce výpočtu nových vektorů rychlostí odlišné, byť jsou založeny na stejném principu.

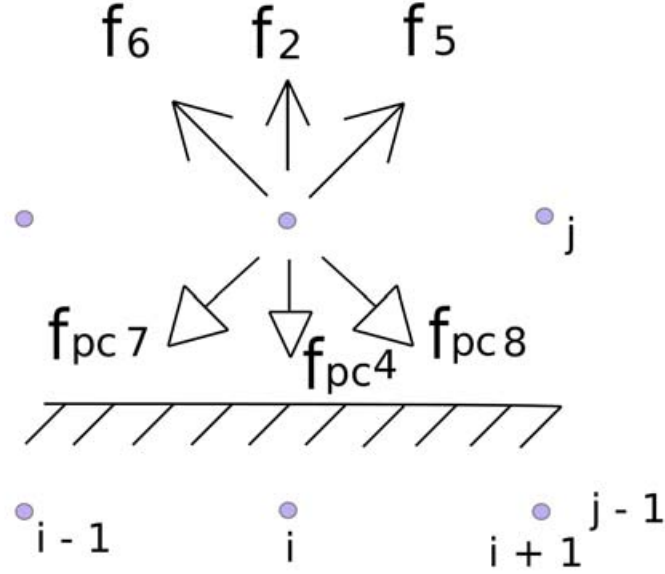
Poloviční odrazová okrajová podmínka předpokládá, že překážka, u které je použita tato podmínka, se nachází v polovině vzdálenosti mezi středy buněk (viz Obr. 2.9).

Odrazová okrajová podmínka předpokládá, že vektor rychlosti se odrazí v obou směrech zpět. Vychází z podmínky nulové rychlosti ve směru kolmém k překážce i nulové rychlosti ve směru rovnoběžném k překážce. Tedy předpokládá nekonečně velké tření a nemožnost stéct po překážce.

Výpočet posunu distribuční funkce se pro jednotlivé rychlosti, které se nacházejí směrem

<sup>6</sup>V literatuře lze nalézt i další typy okrajových podmínek. Jednou takovou podmínkou je například periodická okrajová podmínka. V této práci popisují jen podmínky, které jsou vhodné k popisu tečení kapaliny u volné hladiny.

<sup>7</sup>Okrajová podmínka může, pokud je to potřeba, popsat jakoukoliv polohu překážky vůči středu buňky.



Obrázek 2.9: Schéma poloviční odrazové okrajové podmínky.

od překážky, provede následovně:

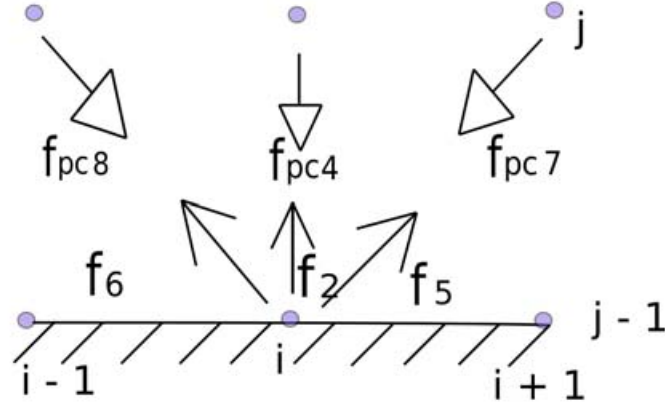
$$\begin{aligned}
 f_2((i, j), t + \Delta t) &= f_4^{pc}((i, j), t) \\
 f_5((i, j), t + \Delta t) &= f_7^{pc}((i, j), t) \\
 f_6((i, j), t + \Delta t) &= f_8^{pc}((i, j), t)
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

Modifikací této okrajové podmínky je odrazová okrajová podmínka s celým krokem. Při této okrajové podmínce se nachází překážka ve středu buňky (viz Obr. 2.10).

Při výpočtu distribuční funkce je oproti předchozímu případu jedna zásadní změna, a to které vektory rychlostí v daném uzlu vstupují do rovnováhy. Distribuční funkce se v okrajovém bodě vypočte:

$$\begin{aligned}
 f_2((i, j), t + \Delta t) &= f_4^{pc}((i, j + 1), t) \\
 f_5((i, j), t + \Delta t) &= f_7^{pc}((i + 1, j + 1), t) \\
 f_6((i, j), t + \Delta t) &= f_8^{pc}((i - 1, j + 1), t)
 \end{aligned}
 \tag{2.24}$$

Další okrajovou podmínkou je zrcadlová okrajová podmínka (viz Obr. 2.11). Zde stejně



Obrázek 2.10: Schéma plné odrazové okrajové podmínky.

jako v předchozím případě lze uvažovat s celou, anebo poloviční okrajovou podmínkou. U zrcadlové okrajové podmínky je uvažováno s třením blízkým nule.

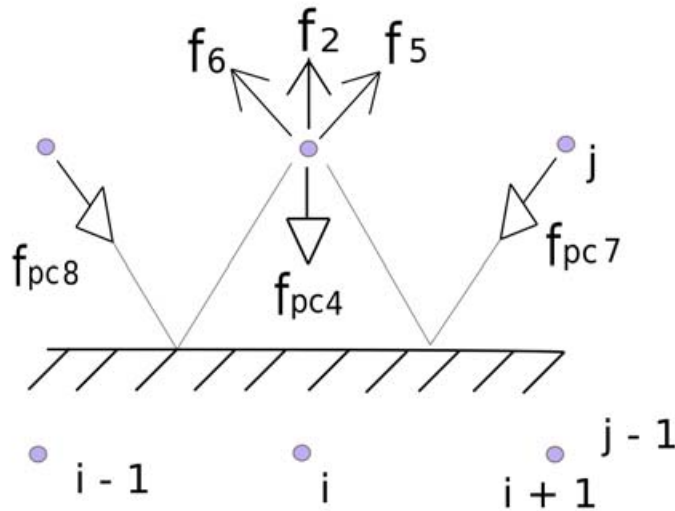
Rychlosti se odrazí jen ve směru, ve kterém se nachází překážka. V takovém případě se obrací složka vektoru rychlosti. V dalších směrech (v dalších rozměrech, kde není překážka), jsou hodnoty příslušných členů vektoru rychlosti nezměněny.

Velikost distribuční funkce pro zrcadlovou okrajovou podmínku s polovičním krokem je následující.

$$\begin{aligned}
 f_2((i, j), t + \Delta t) &= f_4^{pc}((i, j), t) \\
 f_5((i, j), t + \Delta t) &= f_8^{pc}((i + 1, j), t) \\
 f_6((i, j), t + \Delta t) &= f_7^{pc}((i - 1, j), t)
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

Reálnou překážku lze zachytit kombinací (lineární interpolací) dvou předchozích typů okrajových podmínek. Velikost poměru mezi podmínkami lze nastavit podle charakteristik tření [13].

$$f(x, t) = n(f(x, t)_{bounce} + (1 - n)(f(x, t)_{specular})
 \tag{2.26}$$



Obrázek 2.11: Schéma zrcadlové okrajové podmínky.

Okrajová podmínka pro volný okraj je stejná pro všechny výpočty:

$$f_i^{pc}(x - \epsilon_i \Delta t, t) = f_i^{eq} + f_{i^-}^{eq} + f_{i^-}^{pc}(x, t) \quad (2.27)$$

kde  $i$  značí směr ve kterém je směřována daná rychlost,  $i^-$  značí opačný směr. Hodnoty  $f_i^{eq}$  a  $f_{i^-}^{eq}$  reprezentují složku vzduchu.

Okrajová podmínka, která zahrnuje volnou hladinu a zároveň pevnou překážku, se může vypočítat jako okrajová podmínka s pevným okrajem s upravenou hodnotou  $n$  z předchozího vzorce. Zároveň pro vektory, které do okrajové podmínky s pevným okrajem nezasahují, se vypočte jako okrajová podmínka s volnou hladinou.

### 2.1.5 Změna hmotnosti

Přírůstek nebo úbytek hmotnosti je závislý na rychlostech, respektive na rozložení hodnot distribuční funkce. Přírůstek se připočítá pro každý vektor rychlosti v plných a přechodových buňkách. Přírůstek pro jednotlivou buňku se poté vypočte součtem všech přírůstků v dané buňce.

Změna hmotnosti v dané rychlosti se vypočte:

$$\Delta m_i(x, t + \Delta t) = \beta_i (f_{i-}(x + e_i, t) - f_i(x, t)) \quad (2.28)$$

kde hodnota  $\beta_i$  je rozdílná pro různé typy buněk, přechodová buňka je jediný typ, kde dochází k přírůstku nebo úbytku. Hodnota  $\beta_i$  je:

$$\begin{aligned} & 1 \text{ pokud } (x + e_i, t) \text{ je plná buňka} \\ & 0 \text{ pokud } (x + e_i, t) \text{ je prázdná buňka} \\ & \frac{1}{2} (m(x, t) + m(x + e_i, t)) \text{ pokud } (x + e_i, t) \text{ je mezilehlá buňka} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Změna hmotnosti v jednotlivé buňce v dalším časovém kroku je rovna součtu změn ve všech směrech dané buňky:

$$\Delta m(x, t + \Delta t) = \sum \Delta m_i(x, t + \Delta t) \quad (2.30)$$

Hmotnost kapaliny v buňce v nadcházejícím časovém kroku lze poté spočítat jako součet velikosti hmotnosti v předchozím časovém kroku a přírůstku hmotnosti pro daný časový krok.

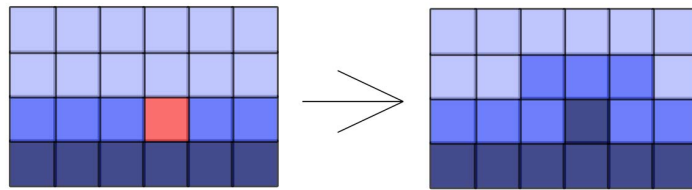
$$m(x, t + \Delta t) = m(x, t) + \Delta m(x, t + \Delta t) \quad (2.31)$$

### 2.1.6 Změna buněk

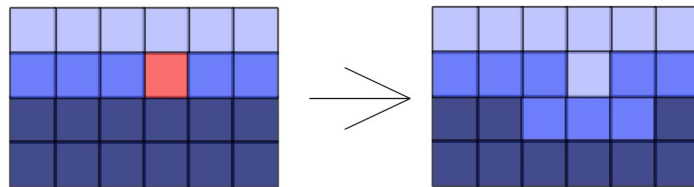
Po výpočtu změny hmotnosti je třeba přepočíst hodnotu  $\alpha$ . Pokud některá přechodová buňka nabude hodnotu přesahující 1, stává se z ní plná buňka (viz Obr. 2.12) a naopak pokud se hodnota sníží pod 0, stává se z ní prázdná buňka (viz Obr. 2.13). Platí, že nesmí sousedit plná buňka s prázdnou [14]. Hodnoty distribuční funkce u nově vzniklých buněk je třeba dopočítat.

Ke změně nedochází přesně u hodnoty 1 (respektive 0), ale je uvažována malá rezerva  $\kappa$ , kterou lze uvažovat řádově  $10^{-3}$ .

$$\begin{aligned} \alpha(x, t + \Delta t) > (1 + \kappa) & \text{ buňka se stává plnou buňkou} \\ \alpha(x, t + \Delta t) < (0 - \kappa) & \text{ buňka se stává prázdnou buňkou} \end{aligned} \quad (2.32)$$



Obrázek 2.12: Příklad, kdy se jedna přechodová buňka (červeně) stane plnou.



Obrázek 2.13: Příklad, kdy se jedna přechodová buňka (červeně) stane prázdnou.

Pro nově vzniklé mezilehlé buňky je nutné vypočítat jejich hustotu a rychlost.

Při výpočtu vzniká nadbytečná (chybějící) hmota. Jde o hmotu, která reprezentuje tu část hmoty, která přesáhla 1. Tuto hmotu je třeba připočíst do okolních buněk. K opačnému procesu dochází u buněk, které se z plných staly přechodné.

Naplnění a vyprázdnění buněk se rozdělí pomocí normálového vektoru proudění. Normálový vektor znázorňuje velikost a směr zaplňování (vyprazdňování) buněk.

$$n(i, j) = \frac{\nabla \alpha}{\|\nabla \alpha\|} \quad (2.33)$$

Kde hodnota alfa je přibližně:

$$\nabla \alpha \approx \left( \frac{\alpha(i+1, j) - \alpha(i-1, j)}{2\Delta x}, \frac{\alpha(i, j+1) - \alpha(i, j-1)}{2\Delta x} \right) \quad (2.34)$$

Rozdíl hodnoty hmotnosti připočítané a odečítané jsou:

$$\Delta M_{reci}(x, \epsilon \Delta t) = \frac{w_i}{\sum w_i} \Delta M \quad (2.35)$$

Pro buňky předávající přebytečnou hmotu je výpočet  $w$  následující:

$$\begin{aligned} w_i &= ne_i \text{ pokud } ne_i > 0 \\ w_i &= 0 \text{ pokud } ne_i \leq 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Pro vyprazdňující se buňky je výpočet obdobný:

$$\begin{aligned} w_i &= -ne_i \text{ pokud } ne_i < 0 \\ w_i &= 0 \text{ pokud } ne_i > 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

### 2.1.7 Stabilita výpočtu

Jedním z důležitých faktorů, který ovlivňuje výpočet, je stabilita. Při určitých podmínkách může dojít ke ztrátě stability výpočtu. Pokud dojde ke ztrátě stability, výpočet ztratí konvergenci a udává nereálné hodnoty. Ztráty stability závisí především na distribuci hmoty, která je odvozena od viskozity a rychlosti [15].

### 2.1.8 Jednotky

Veličiny vstupující do výpočtu jsou převedeny na bezrozměrné, které jsou určeny pro daný výpočet. Velikost časového kroku a mřížky se zvolí rovno jedné. Uvažuje se, že  $\Delta t = 1$  a  $\Delta x = 1$ .

Při změně velikosti časového kroku například z důvodu zabránění možné ztrátě stability je třeba přepočítat hodnoty proměnných ve výpočtu. Změna stability u proměnného časového kroku nastává, pokud je rychlost vyšší než nejvyšší stanovená hodnota rychlosti.

$$u_{max} > u_{tresh} \quad (2.38)$$

Hodnota  $u_{tresh}$  je stanovena 1/6 pro model D2Q9. Z poměrů přípustné a maximální hodnoty lze dopočítat nový přírůstek času.

$$\Delta t_n = \frac{u_{tresh}}{u_{max}} \quad (2.39)$$

K tomu lze použít koeficient  $S$ . Ten je určen jako poměr času nového a starého časového kroku [16].

$$S = \frac{\Delta t_n}{\Delta t_0} \quad (2.40)$$

Hodnoty u proměnných jako je rychlosti, síly a gravitační zrychlení, se poté přeškálují koeficientem  $S$ :

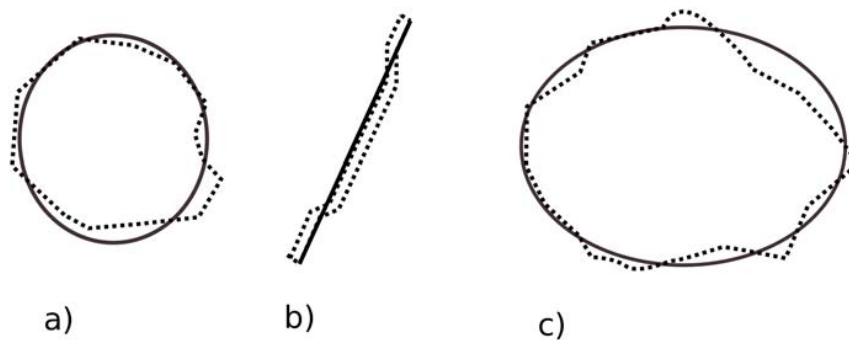
$$\begin{aligned}u_n &= u_0 S \\g_n &= g_0 S^2\end{aligned}\tag{2.41}$$



## 2.2 Úroveň objektů

Při modelování betonu vstupují do výpočtu pevné a pohybující se objekty. Jsou jimi například kamenivo nebo rozptýlená výztuž. Při správně zvolené viskozitě by teoreticky chování těchto částic mohlo být zahrnuto jednoduchým LBM výpočtem. Zohlednění těchto částic přímo v Lattice Boltzmannově metodě by vyžadovalo velmi malou velikost buňky pro přesné výsledky. Proto jsou tělesa uvažována jako jiná úroveň, která je poté zahrnuta do modelu.

Tělesa jsou zjednodušena (viz Obr. 2.14). Mírou zjednodušení narůstá nepřesnost výpočtu. Je nutné zvolit takové zjednodušení, které je jednak možné vypočítat, případně je vypočítatelné v požadovaném čase. Zároveň je třeba dbát na to aby nepřesnost (chybovost) daná zjednodušením nepřesáhla určitou mez, která činí výpočet nepoužitelným. V této práci popisují nejjednodušší případ zjednodušení kameniva a to na kruh<sup>8</sup>.



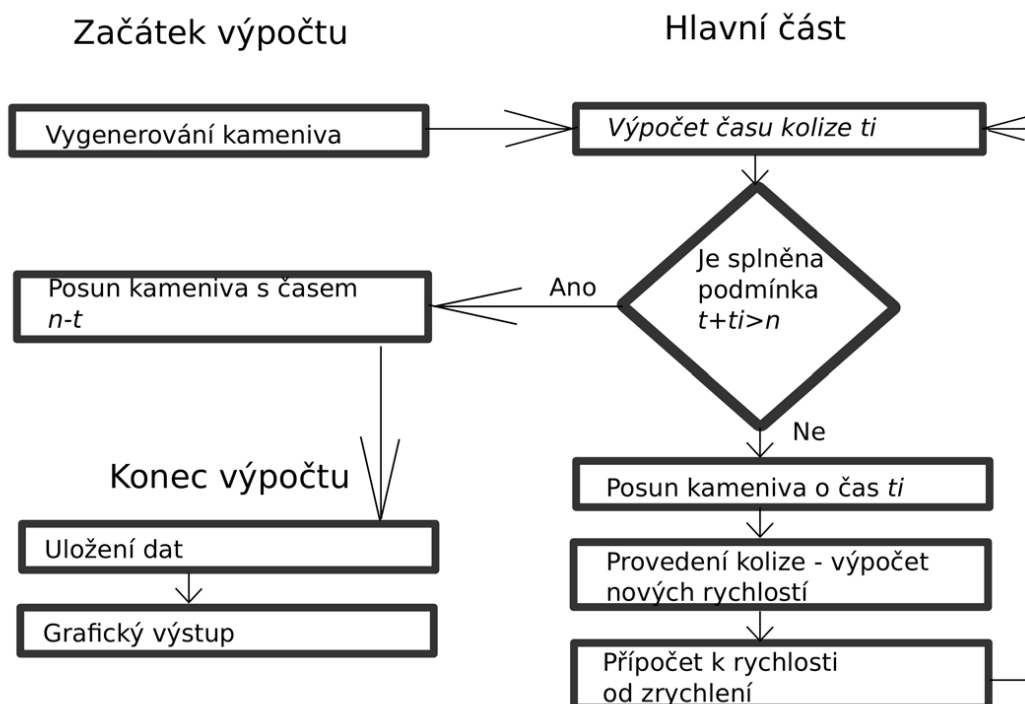
Obrázek 2.14: Zjednodušení a) kamenivo na kruh b) drátek na úsečku c) kamenivo na elipsu

Chování pevných částic lze získat vyřešením Newtonovy pohybové rovnice. Pohyb je vypočítán metodou postupné integrace. Jedná se o zpětný dopočet. Při této metodě vzniká numerická chyba, která se časem zvětšuje. Velikost této chyby je úměrná časovému kroku.

<sup>8</sup>To předpokládá určitou podobnost rozměrů kameniva ke kruhu. Pro ploché kamenivo je toto zjednodušení nepoužitelné.

### 2.2.1 Postup výpočtu

Na začátku každého časového kroku se určí časy vzájemných kolizí těles a z nich se vybere ten nejmenší. Následně se učiní posun těles v daném nejmenším čase. Následuje provedení kolize, tedy přepočítání rychlostí těles u kterých došlo ke vzájemném kontaktu. K rychlostem se připočte přírůstek rychlosti od zrychlení. Postup výpočtu se poté opakuje, dokud není dosažena podmínka, že čas k příští kolizi je větší, než zbytkový čas ke konci výpočtu. Poté následuje dopočet pohybu do předem určeného konečného času. Když je hlavní výpočet u konce, tak následuje konečná fáze, ve které se zpracují data a vytvoří výstupy (viz Obr. 2.15).



Obrázek 2.15: Schéma postupu výpočtu.

Při tomto postupu narůstá výrazně <sup>9</sup> výpočtový čas. Je proto lepší zvolenou oblast rozdělit na překrývající se podoblasti nebo zvolit konstantní časový krok s dopočtem posunu zpět.

Časový krok je proměnný a jeho velikost je dána nejmenší z hodnot času příští kolize a času celkového výpočtu úrovně.

Zrychlení se připočítává k rychlosti pomocí numerické integrace. Nejjednodušším případem je po každém časovém kroku připočíst odpovídající zrychlení. Při tomto postupu vzniká numerická chyba, která se s časem zvětšuje.

Poloha tělesa se v čase po přírůstku vypočte:

$$\begin{aligned} X_i &= X_0 + t * V_{ix} \\ Y_i &= Y_0 + t * V_{iy} \end{aligned} \tag{2.42}$$

kde při výpočtu nové polohy se dopočte nová rychlost. Ta je dána pomocí numerické integrace jako součet stávající rychlosti a zrychlení násobené délkou času.

$$\begin{aligned} V_{ix} &= V_{ix} + \Delta * a \\ V_{iy} &= V_{iy} + \Delta * a \end{aligned} \tag{2.43}$$

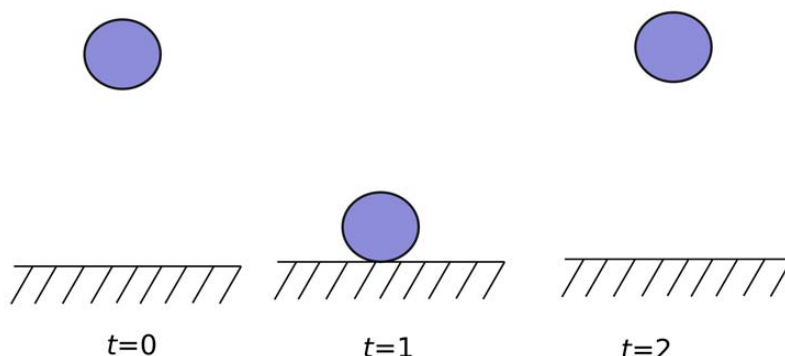
## 2.2.2 Typy kolizí

Kolize těles lze obecně vypočítat v závislosti na koeficientu restituce. Rozděluje se zde výpočet na tři druhy, dokonale elastickou kolizi, neelastickou kolizi a dokonale neelastickou kolizi [17].

$$\begin{aligned} Cr &= 1 \text{ Dokonale elastická kolize} \\ 0 < Cr &< 1 \text{ Neelastická kolize} \\ Cr &= 0 \text{ Dokonale neelastická kolize} \end{aligned} \tag{2.44}$$

Při dokonale elastické kolizi (viz Obr. 2.16) je rychlost kolmo k překážce v okamžiku dopadu tělesa stejná jako rychlost odrazu.

<sup>9</sup>Přesněji jde o funkci  $k = n^2$ , kde  $n$  je počet těles a  $k$  je počet kolizí. Pokud budeme předpokládat, že výpočtový čas pro určení času kolize je stejný, případně přibližně stejný. Výpočtový čas narůstá kvadratickou velikostí těles:  $T = k_0 * n^2$



Obrázek 2.16: Dokonale elastická kolize ( $C_r = 1$ ), znázorněna ve třech po sobě jdoucích časových krocích.

Při tomto typu kolize můžeme získat rychlost ze zákona zachování energie, kdy energie vstupující do výpočtu je energií vystupující.

$$E_{int} = E_{ext} \quad (2.45)$$

$$\frac{1}{2}m_a v_a^2 + \frac{1}{2}m_b v_b^2 = \frac{1}{2}m_a u_a^2 + \frac{1}{2}m_b u_b^2$$

Vzhledem k tomu, že máme dvě proměnné, musíme využít ještě zákon zachování hybnosti:

$$P_{int} = P_{ext} \quad (2.46)$$

$$m_a v_a + m_b v_b = m_a u_a + m_b u_b$$

Po úpravě lze získat rychlosti. Výsledné rychlosti po srážce jsou následující:

$$v_a = \frac{m_a - m_b}{m_a + m_b} u_a + \frac{2m_b}{m_a + m_b} u_b \quad (2.47)$$

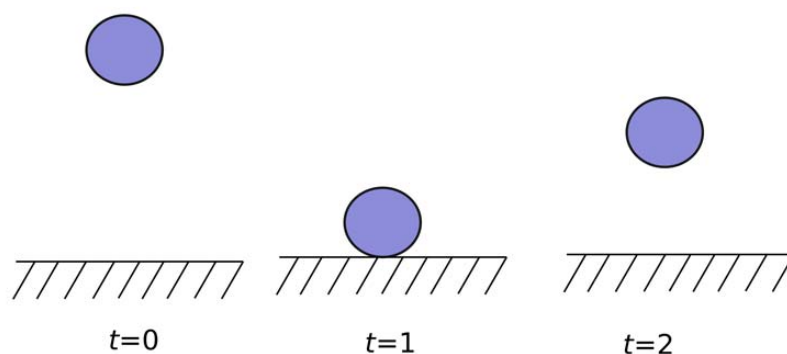
$$v_b = \frac{2m_a}{m_a + m_b} u_a + \frac{m_b - m_a}{m_a + m_b} u_b$$

kde hodnoty  $a$ ,  $b$  značí jednotlivá tělesa,  $v$  rychlost po kolizi  $u$  rychlost před kolizí. Tento typ je spíše teoretický, protože součinitel restituce při reálných aplikacích nebude mít hodnotu rovnou jedné.

Druhým typem jsou neelastické kolize <sup>10</sup>. Neelastická kolize může být částečně nebo dokonale neelastická. Částečně neelastická kolize má součinitel restituce v rozmezí mezi

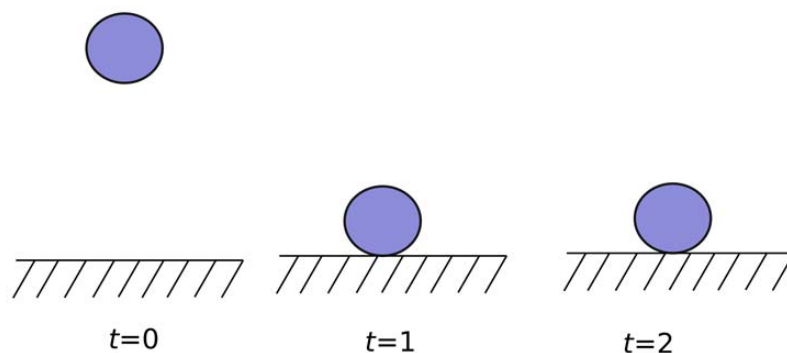
<sup>10</sup>Též je možno značit jako nepružná srážka.

nulou a jednou (viz Obr. 2.17). Pro případ narážení kameniva vzájemně o sebe, případně o překážky, lze hovořit o částečně neelastické kolizi, tedy případ řešený v této práci.



Obrázek 2.17: Částečně neelastická kolize ( $C_r = 0.5$ ), znázorněna ve třech po sobě jdoucích časových krocích.

Posledním typem je dokonale neelastická kolize (viz Obr. 2.18). Všechna energie se zde pohltí při nárazu.

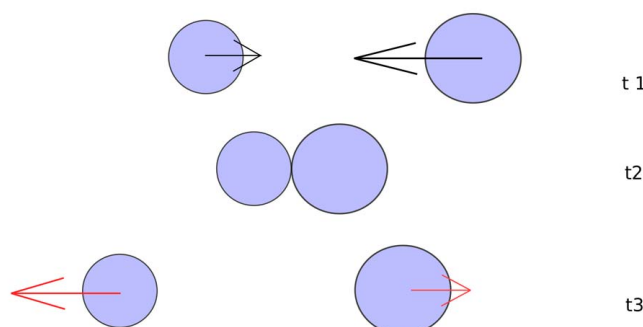


Obrázek 2.18: Dokonale neelastická kolize ( $C_r = 0$ ), znázorněna ve třech po sobě jdoucích časových krocích.

Hodnota součinitele restituice  $C_r$  udává jaká část energie při nárazu z rychlostí, se opět přemění na rychlost. Přebytečná energie (velikosti  $1 - C_r$ ) se přemění na jiné druhy energie, jako je například změna teploty.

Pokud jsou dány dva objekty s danou hmotností, rychlostí a vzájemným součinitelem restituce, výpočet rychlostí po kolizi 1D úlohy se provede následovně (viz Obr. 2.19):

$$\begin{aligned} v_a &= \frac{C_r m_b (u_b - u_a) + m_a u_a + m_b u_b}{m_a + m_b} \\ v_b &= \frac{C_r m_a (u_a - u_b) + m_a u_a + m_b u_b}{m_a + m_b} \end{aligned} \quad (2.48)$$



Obrázek 2.19: Kolize 1D úlohy, poloha objektů ve 3 časech.

Při vzájemné kolizi tělesa s pevnou překážkou lze uvažovat, že pevná překážka má nulovou hmotnost. Při dosazení a vyjádření dostaneme:

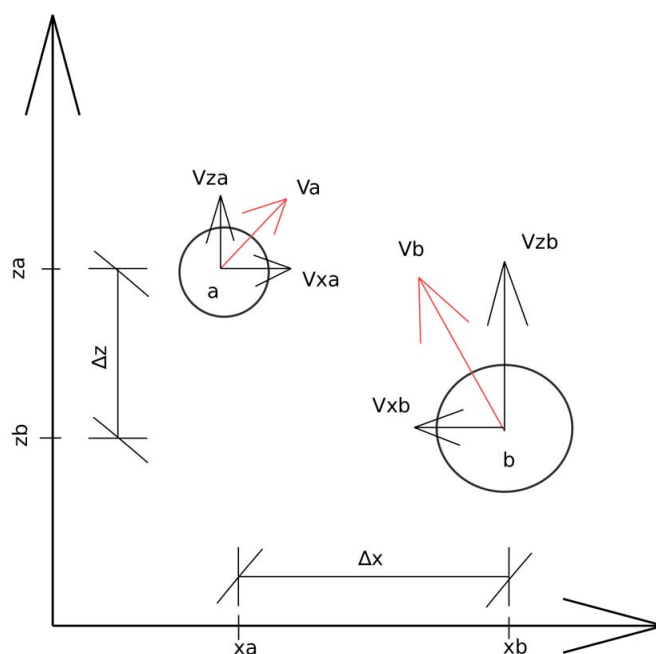
$$v_a = -u_a C_r \quad (2.49)$$

### 2.2.3 Časy kolizí

Pro řádný výpočet je potřeba zjistit, kdy dojde k srážce (kolizi) dvou pohybujících se těles, nebo pohybujícího se tělesa a pevné překážky. Pro případ dvou pohybujících se kruhových těles <sup>11</sup> lze vyjít z předpokladu, že vzdálenost středu těles je v době kolize stejný jako součet poloměrů těles (viz Obr. 2.20).

$$(x_a - x_b)^2 + (z_a - z_b)^2 = (r_a + r_b)^2 \quad (2.50)$$

<sup>11</sup>Vycházím z dříve zavedeného předpokladu, že tělesa mají přibližně kruhový tvar. Jde o nejjednodušší případ. Pro dva kruhy existuje analytické řešení času kolize, zatímco pro reálné tvary přesně popisující tvar kameniva nikoliv.



Obrázek 2.20: Schéma řešení výpočtu času kolize.

Kde platí že souřadnice jsou dány počáteční polohou a přírůstkem od rychlosti.

$$\begin{aligned}x_n &= x_{n0} + t * V_{xn} \\z_n &= z_{n0} + t * V_{zn}\end{aligned}\tag{2.51}$$

Kde při dosazení lze získat:

$$(\Delta_x + \Delta_{V_x} * t)^2 + (\Delta_z + \Delta_{V_z} * t)^2 = (r_a + r_b)^2\tag{2.52}$$

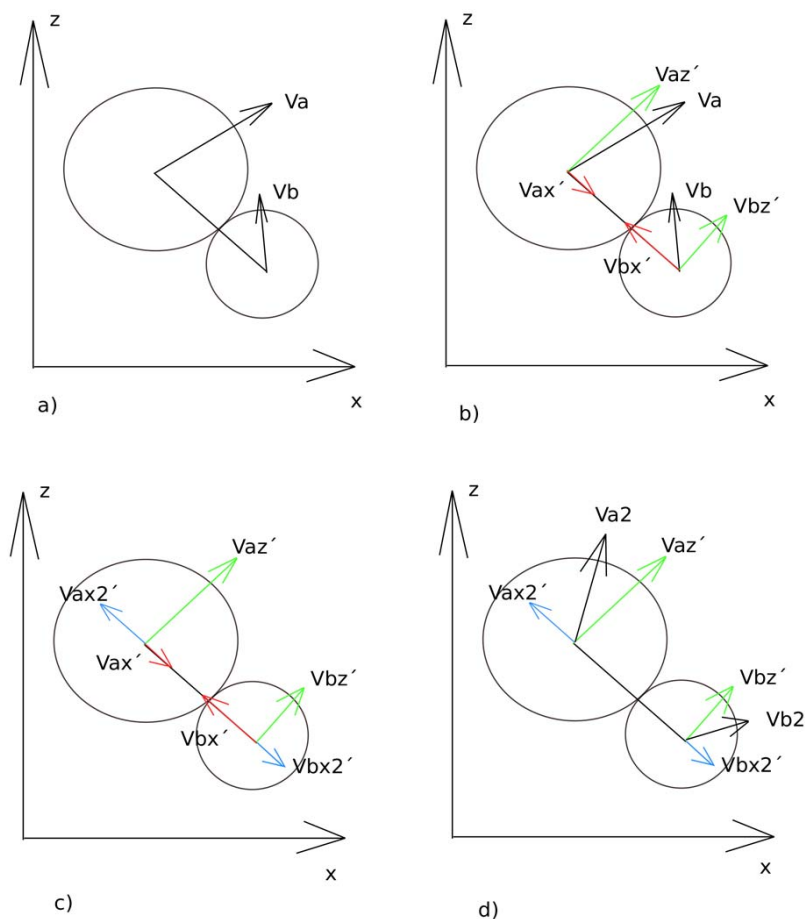
Výsledkem vyjádření času  $t$  je kvadratická rovnice.

$$t^2 + t * (2 * \Delta_x * \Delta_{V_x} + 2 * \Delta_z * \Delta_{V_z}) + \Delta_x^2 + \Delta_z^2 - (r_a + r_b)^2 = 0\tag{2.53}$$

Tato rovnice může mít pro určité parametry řešení v komplexních číslech a zároveň mít výsledky záporné i kladné. Řešení rovnice jsou vždy dvě a hledaným výsledkem je nejmenší kladné reálné číslo. Pokud je výsledek v komplexních číslech, případně má rovnice oba kořeny záporné, tak to znamená, že ke kolizi nedojde [18].

### 2.2.4 Kolize ve 2 dimenzích

Pro 2D úlohu lze úlohu převést spojnici bodů na 1D řešení. Převedení lze vypočítat tak, že nejdříve spojíme těžiště obou objektů. Poté převedeme vektory rychlostí u obou objektů do pomocného souřadného systému, který je dán souřadnicí na spojnici těžišť a souřadnicí kolmou. V pomocném souřadném systému provedeme 1D kolizi v ose spojující těžiště. Vektor kolmý ponecháváme ve stávající velikosti. Nakonec převedeme nově vzniklý vektor do původních souřadnic (viz Obr. 2.21). Při tomto výpočtu je zanedbána rotace daných objektů a vzájemné tření.



Obrázek 2.21: Kolize ve 2D prostoru a) vytvoření pomocných souřadnic b) převedení vektoru rychlostí c) určení kolize v 1D d) převedení rychlostí zpět.



V případě kolize a pevné překážky je výpočet obdobný, jen se neprovádí spojnice těžišť, ale spojnice těžiště kruhového tělesa a bodu kontaktu s překážkou.

U reálných úloh může dojít k vícenásobné kolizi. Vícenásobnou kolizi si můžeme představit jako kolizi 3 a více těles najednou. V tom případě je třeba výše uvedené vzorce rozšířit. Výpočet se provádí maticově, se zohledněním všech možných kolizí najednou.

Prvním krokem je sestavení vektorů rychlostí  $\mathbf{V}$  o velikosti  $DN$ , dále čtvercové diagonální matici hmotnosti  $\mathbf{M}$ , kde každá strana má velikosti  $2N$  a matice kolizí  $\mathbf{K}$  o velikosti  $DN \times k$ . Přičemž platí  $N$  je počet těles,  $k$  je počet kolizí a  $D$  je velikost dimenzí. Ve výše uvedených případech se jedná o 2 dimenze. Ve vektorech a maticích o velikosti  $2N$  se řadí postupně po každém bodě, kdy jsou uvedeny nejdříve ve směru  $x$  a poté ve směru  $z$ . Před samotným výpočtem se sestaví příslušné vektory a matice [19].

Matice a vektory se sestavují pro všechna tělesa ve výpočtu včetně pevných překážek a těles, u kterých neprobíhá žádná kolize. U pevných překážek je prvek matice hmotnosti nekonečný, a tudíž prvek inverzní matice hmotnosti nulový.

Prvním krokem výpočtu je výpočet relativních rychlostí ve směru kontaktu.

$$\mathbf{u}_{imp} = \mathbf{K}^T \mathbf{V} \quad (2.54)$$

Dalším krokem je vytvoření vektoru impulzů. Jeho velikost je rovna počtu kolizí.

$$\mathbf{J} = -(\mathbf{K}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K})^{-1} (1 + C_r) \mathbf{u}_{imp} \quad (2.55)$$

Z vektorů impulzů lze vypočítat přírůstky rychlostí.

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{J} \quad (2.56)$$

Z přírůstků už lze snadno dopočítat jednotlivé rychlosti prostým součtem.

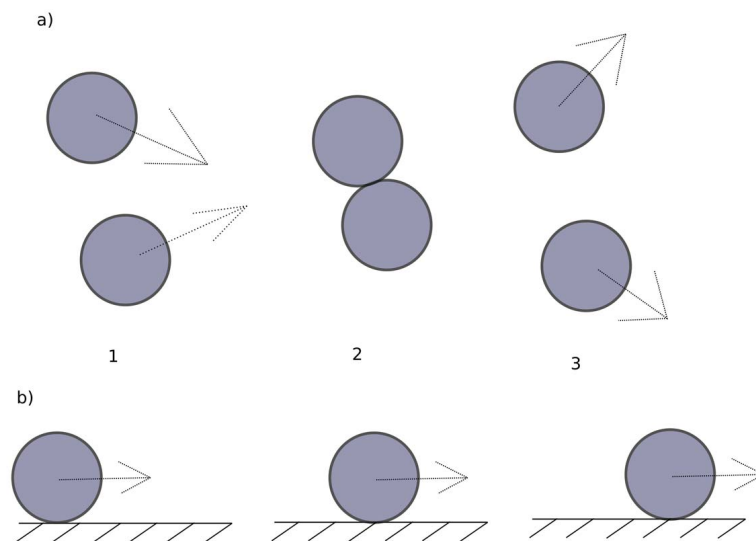
$$\mathbf{V}_{out} = \mathbf{V}_{in} + \Delta \mathbf{v} \quad (2.57)$$

### 2.2.5 Případy kolizí

Zde bych rád uvedl jeden fakt, který nemusí být na první pohled zřejmý. V základním výpočtu, který jsem nastínil, se postupuje od kolize ke kolizi těles. Existují případy, kdy

je kolize permanentní a výše popsany výpočet by znemožňovala.<sup>12</sup> Proto je třeba rozlišit kolizi dočasnou, při které se po kontaktu tělesa odrazí, a kolizi trvalou u které vzájemná vzdálenost těles zůstává stejná (viz Obr. 2.22).

Trvalou kolizi si můžeme představit například jako dva objekty se stejnou rychlostí těsně vedle sebe nebo těleso pohybující se po překážce.



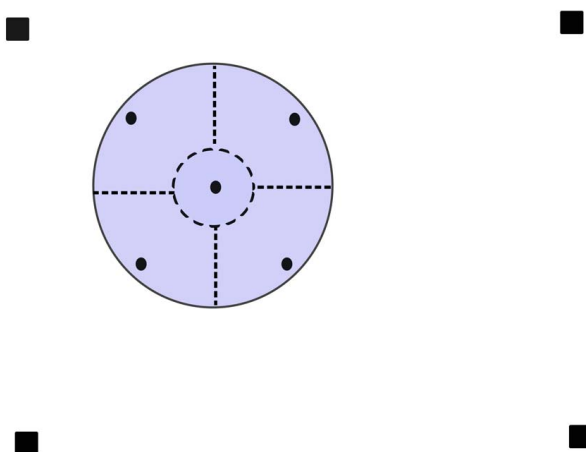
Obrázek 2.22: a) dočasná kolize b) trvalá kolize.

<sup>12</sup>Výpočetní čas příští kolize by vyšel nulový. Základní algoritmus by se zacyklil prováděním nulových pohybů a nikdy by nedošel do cíle.

## 2.3 Úroveň interakce objekt - kapalina

Tato úroveň vychází z předpokladu stejné rychlosti objektů i kapaliny ve stejném bodě (není zohledněn prokluz). K určení působících sil v bodě kontaktu je využita Immersed boundary method.

Každý pohyblivý objekt je rozdělen několika Lagrangeovými body (viz Obr. 2.23). V každém z těchto bodů je potřeba získat vektor rychlostí od kapaliny a od pohybujícího se tělesa [4].



Obrázek 2.23: Těleso s Lagrangeovými body v LBM mřížce

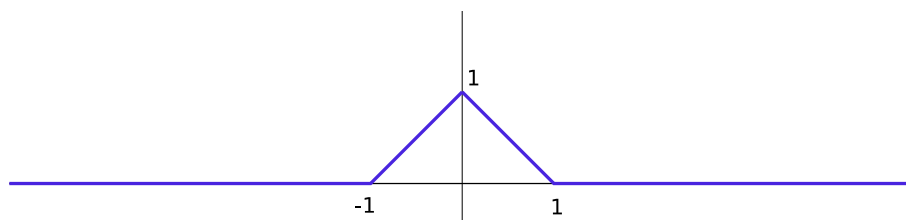
Vektor rychlosti v libovolné bodě tělesa lze získat jako součet vektoru rychlosti v těžišti tělesa a úhlovou rychlost násobenou celkovou hodnotou vzdálenosti bodu od středu <sup>13</sup>:

$$u_{p,n}(t) = u_n + w_n(x_{p,n} - x_p) \quad (2.58)$$

Rychlost získáváme v Lagrangeových bodech. Tyto body volíme tak, aby část, která k bodům náleží, byla obdobná.

<sup>13</sup>Pokud otáčení objektů zanedbáme, pak získáme pro každý bod stejnou rychlost. V takovém případě ztrácí smysl vytvářet více Lagrangeových bodů a stačí jeden v těžišti.

Velikost rychlosti v libovolném bodě kapaliny lze určit pomocí discrete delta funkce. Discrete delta funkce má nenulové hodnoty v malém úseku blízko nule. Existuje více druhů discrete delta funkcí [20], jako například lineární dirac delta (viz Obr. 2.24), případně kosinová dirac delta funkce.



Obrázek 2.24: Lineární discrete delta funkce.

Velikost rychlosti v úrovni LBM je:

$$u_f \approx \frac{\sum u_f(x, t) D(x - x_p)}{D(x - x_p)} \quad (2.59)$$

kde  $D$  je discrete delta funkce daných bodů. Discrete delta funkce se vypočte jako součin discrete delta funkcí ve všech směrech.

$$D = D_x * D_y \quad (2.60)$$

Přičemž hodnoty lineární discrete delta funkce v daném směru se vypočtou:

$$\begin{aligned} D_i &= 1 - d \text{ pokud } d \leq 1 \\ D_i &= 0 \text{ pokud } d > 1 \end{aligned} \quad (2.61)$$

kde  $d$  značí vzdálenost Lagrangeova bodu a bodu mřížky v příslušné dimenzi. Počítá se ve všech dimenzích.

Rozdíl rychlostí se poté převede zpět na síly do daných fází. Tedy vypočte se taková síla, která by poskytla rovnost mezi oběma úrovněmi a připočte se do výpočtu.

Vzhledem k tomu, že LBM je bezrozměrná a jednotky jsou na bezrozměrné přepočítávány, je třeba takový přepočítání provést při převodu na úroveň interakce a i zpět.

$$F_i^{fluid}(t) = \frac{\rho_{f,0}}{\Delta t} \left( u_f(x, t) - u_{pm}(t) \right) \Delta V_{pm} \quad (2.62)$$

Celková síla působící v jednom bodě mřížky se spočte jako součet ze všech Lagrangeových bodů:

$$F^{fluid}(t) = \sum F_i^{fluid}(t) \quad (2.63)$$

---

## Implementace

Cílem předložené práce bylo vytvořit program, který je schopen při zadání počátečních podmínek simulovat roztékání betonové směsi a popsat chování všech částí (jak celkové části zahrnující kapalinu, tak kameniva).

K výpočtu je potřeba zvolit typ modelu a zvolit velikosti jeho základních parametrů, určit hodnotu proměnných na vstupu výpočtu a zároveň vytvořit některé metody, které výpočet umožní.

### 3.1 Volba programovacího jazyka

Výpočet proudění jsem se rozhodl provést v programovacím jazyce Python (viz Obr. 3.1).

Rozhodl jsem se pro to z několika důvodů. První z nich je ten, že jde o programovací jazyk, který jsem používal při vypracování své bakalářské práce a mám s ním zkušenosti. Dalším důvodem, je jednoduchost postprocessingu a vykreslování dat, kterými jsou obrázky a gif soubory. Posledním důvodem je to, že jde o programovací jazyk s řadou volně dostupných knihoven, které usnadňují výpočet [21].

Nevýhodou zvoleného programovacího jazyka je výpočtová rychlost v porovnání s jinými jako je například C++. Pro reálné úlohy velkého rozsahu by bylo vhodnější zvolit rychlejší programovací jazyk.

```

for i in range(nz):
    for j in range(nx):
        Force_zx[0][i][j] = -g * rho[i][j] + Force_zx_01[0][i][j]
        Force_zx[1][i][j] = Force_zx_01[1][i][j]
del u
u = Calc_U(D, nz, nx, calcarea, Force_zx, rho, c, dtime, f)

u2 = u[0] * u[0] + u[1] * u[1]

for i in np.arange(qa):
    cu = c[i][1] * u[0] + c[i][0] * u[1]
    f_eq[i] = rho * calcarea * w[i] * (c1 + c2*cu + c3*cu*cu + c4*u2)
    Force[i] = w[i]*(1-0.5*(2*tau_f)) * (c[i][1]*Force_zx[0] + c[i][0]*Force_zx[1])
    f_eq1[i] = 1.0 * calcarea * w[i] * (c1 + c2*cu + c3*cu*cu + c4*u2)

DeltaF = (f_eq-f)/(tau_f * dtime)
f += (DeltaF + Force*dtime)
f_coliz = np.zeros((qa, nz, nx), dtype=float)

```

Obrázek 3.1: Příklad kódu v Pythonu.

### 3.1.1 Objektově orientované programování

Python je programovací jazyk, který umožňuje objektově orientované programování. Některé prvky se převedou na objekty - třídy, protože se s nimi pak lépe pracuje. Je to vhodný způsob, zvláště pokud se některá entita ve výpočtu vyskytuje vícekrát v rozdílné podobě. V mém případě mám za třídu například kamenivo nebo pevnou překážku.

### 3.1.2 Postprocessing

Jedním z částí výpočtu je zpracování vypočtených dat a vytvoření grafické podoby výstupů. Těmi jsou obrázkové výstupy nebo animace uloženy jako gif soubor.

Obrázky pro jednotlivé časy jsem vytvořil pomocí příslušné knihovny (Matplotlib). Pro tvorbu animací je náročné na výpočet skládat animace z obrázků ze všech kroků. Zvolil jsem proto zobrazení v každém  $N$  kroku. Kdy  $N$  je celé číslo, například 10, 20. Do tvorby animace vstupuje jen snímek z násobků čísla  $N$ .

Při správně zvolené velikosti  $N$ , snižuje toto zjednodušení časovou náročnost a zároveň nemá vliv na výsledné vnímání animace.

## 3.2 Zvolené parametry modelu

Mřížku modelu jsem zvolil D2Q9. Při vytvoření modelu betonu, je potřeba určit některé proměnné a konstanty. Prvním je převedení kapaliny na mřížku a zvolení velikosti časového kroku a mřížky. Dalšími určenými proměnnými jsou koeficient restituce, viskozita a součinitel tření na pevné překážce.

### 3.2.1 Velikost časového kroku a mřížky

Velikost časového kroku a velikost mřížky má zásadní vliv. Při příliš velkém časovém kroku (mřížce) může dojít ke ztrátě stability, a tedy špatným výsledkům. Naopak velmi malý časový krok má vliv na časovou náročnost výpočtu.

Velikost prostorové mřížky jsem zvolil 1 cm. Velikost časového kroku se odvíjí od podmínky stability. Velikost poměrné gravitační síly jsem pro moje případy volil v rozmezí 0,005 až 0,00005. Daná hodnota je závislá na rychlostech. V případě adaptivního časového kroku se spolu se změnou přírůstku času změní i tato hodnota.

### 3.2.2 Koeficient restituce

Koeficient restituce je různý pro rozdílné materiály. Kontakt mezi kamenivem navzájem a kontakt mezi kamenivem a překážkou může dát rozdílné koeficienty. Uvažuji jeden koeficient restituce pro všechny případy.

Koeficient restituce mezi dvěma kamenivy může obecně nabývat hodnoty na intervalu (0,7 - 0,9) [22]<sup>1</sup>. Hodnoty koeficientu restituce záleží na materiálovém složení kameniva a z něj odvozených vlastností. Koeficient mezi kamenivem a podkladem se liší podle sklonu podkladu, kdy pro zvětšující se sklon koeficient stoupá [23]. Koeficient nabývá hodnot od 0,52 do 0,78 a nezávisí na tvaru kameniva [24].

<sup>1</sup>Jedná se o laboratorní měření, při kterém jsou vzorky dokonale srovnány. V tomto měření vychází hodnoty na intervalu (0,8 – 0,9). Případné nerovnosti a trhliny u kameniva při reálné aplikaci může mít koeficient restituce nižší.



### 3.2.3 Viskozita čerstvé betonové směsi

Pro určení viskozity jsou potřeba dvě hodnoty, a těmi jsou plastická a kinematická viskozita. Pomocí těchto hodnot vytvořím křivku viskozity (Bingham model, případně jiný model) a následně určím viskozitu v každém bodě a čase v závislosti na velikosti tření a rychlosti proudění.

Viskozita se určí podle hodnot skutečného betonu. Jde o hledané proměnné, které se liší případ od případu. Hodnoty viskozity nemusí být předem známy, a proto může docházet k jejich určení skrze zkoušky a následný výpočet.

### 3.2.4 Součinitel tření.

V úrovni kapaliny u interpolace mezi typy okrajových podmínek je třeba určit vzájemný poměr podmínek. Určuje se tak, aby co nejlépe vystihoval vzájemné tření překážky a betonové směsi.

Výsledná hodnota je odvozena od součinitele tření povrchu, na kterém působí čerstvá betonová směs.

### 3.2.5 Množství a velikost kameniva

Poměr velikostí kameniva v normou daných [25] frakcích je určeno z křivky kameniva. Množství kameniva lze získat z dávkování kameniva. To je dáno obvykle hmotností v kilogramu výsledného betonu.

Vlivem zaokrouhlování na celé kusy kameniva se nepodaří dát hodnoty přesně.

## 3.3 Použité metody a postupy

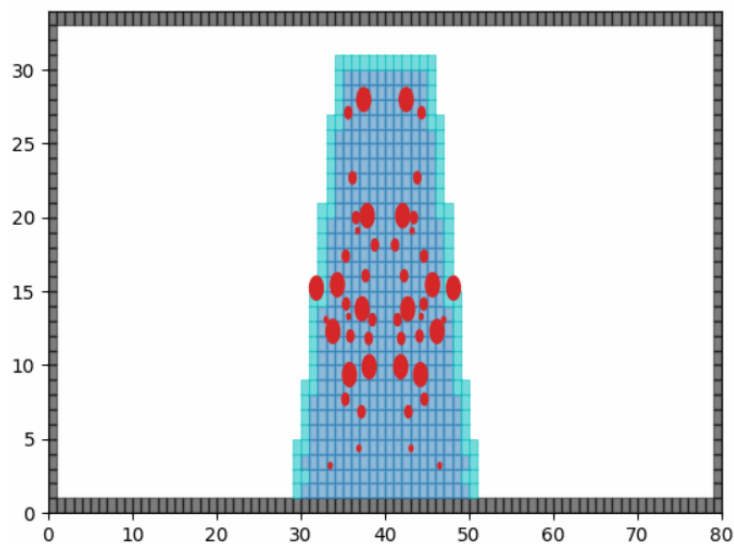
Při výpočtu je nutné použít některé metody, které umožňují výpočet. Jsou jimi určení počáteční polohy kameniva a integrace zrychlení.

### 3.3.1 Integrace zrychlení

Při numerické integraci je použit zpětný dopočet. Chybovost této metody s časem narůstá. Vzhledem k tomu, že časový krok je malý, tak je i výsledná chyba malá. Jde o nejjednodušší metodu.

### 3.3.2 Počáteční poloha kameniva

Prvky kameniva je třeba zjednodušit na geometricky jednoduchý tvar, jako je třeba kruh. Při dalším kroku je třeba daný počet rozdělit do dané plochy. Zde předpokládám rovnoměrné rozložení kameniva. Toho je docíleno náhodným generováním kameniva s omezujícími podmínkami (viz Obr. 3.2).

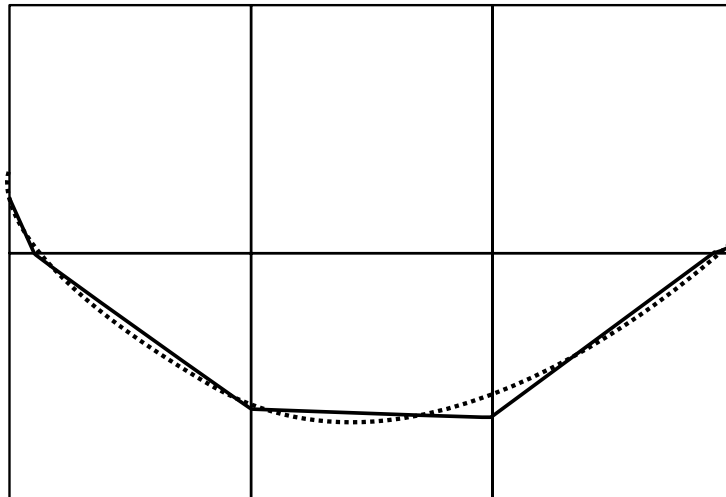


Obrázek 3.2: Příklad vygenerovaného kameniva u sednutí kužele.

Ke generování kameniva je použit generátor náhodných čísel, který se nachází uvnitř knihoven Pythonu. Generátor negeneruje čísla čistě náhodně. Jedná se o pseudonáhodná čísla s určitým "seedem". To umožňuje provést výpočet opakovaně a dostat stejné výsledky.

### 3.3.3 Generování průběhu volné hladiny.

Na konci výpočtu se z daného zaplnění mezilehlých buněk generuje průběh hladiny. Je třeba zajistit spojitost hladiny. Popsání tvaru lze vyjádřit aproximační funkcí, například lineární (viz Obr. 3.3).



Obrázek 3.3: Příklad lineární aproximační funkce.

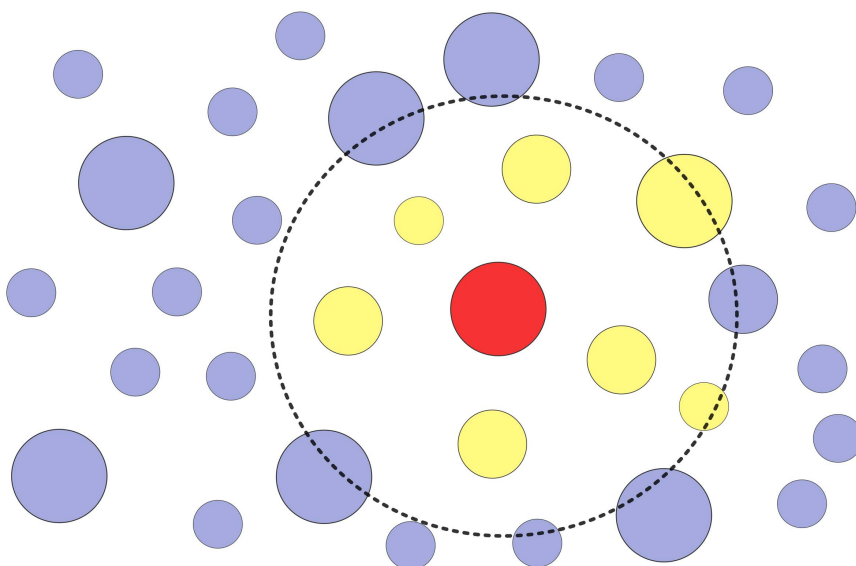
Z podmínky spojitosti hladiny a tím i aproximačních funkcí lze stanovit rovnice. Výsledkem je soustava  $n$  lineárních rovnic o  $n+1$  neznámých, kde  $n$  je počet mezilehlých buněk.

## 3.4 Vylepšení modelu

V modelu jsou některá vylepšení, která zlepšují výpočet. Jsou jimi například výpočet časů kolize kameniva pomocí podoblasti nebo vykreslení hladiny.

### 3.4.1 Podoblasti

Jak jsem napsal v předchozí kapitole, výpočet kolize kameniva je časově náročný. Cílem je tedy najít vhodnou metodu jak urychlit výpočet. Jednou metodou je určení podoblasti, v které probíhá výpočet možných kontaktů kameniva. Podoblast je oblast ohraničená kruhem v určité vzdálenosti od kameniva. (viz Obr 3.4).



Obrázek 3.4: Příklad použití podoblasti. Červeně posuzovaný objekt, žluté vstupují do výpočtu.

Určení moc velkého okruhu může přinést jen malé zlepšení. Příliš malý okruh může způsobit nepřesnost výpočtu.

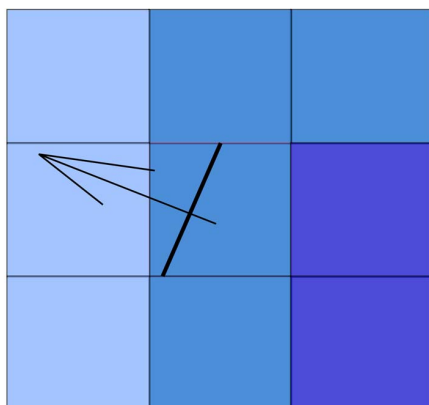
Při výpočtu se nejdříve provede porovnání, zda příslušné kamenivo patří do podoblasti. Pokud do podoblasti patří, provede se vzájemný výpočet času příští kolize. Pokud nepatří do podoblasti, postupuje se stejně, jako kdyby ke kolizi vůbec nedošlo.

### 3.4.2 Vykreslení hladiny.

Pro úlohy vykreslení hladiny se může stát, že je řešení složité. Složitost vychází z faktu, že je zde o jednu neznámou více než rovnic. To lze někdy obejít, například u symetrické úlohy, ale obecně máme nekonečně mnoho řešení.

Pro každou mezilehlou buňku se určí z hodnot koeficientů zaplnění vektor toku. Následná hladina se určí jako kolmice na vektor toku (viz Obr. 3.5).

Přesná poloha se určí z vektoru a obsahu, který musí zaplnit. Při výpočtu mohou vzniknout malé nespojitosti průběhu hladiny. Posledním krokem je vyrovnaní těchto nespojitostí zprůměrováním polohy na hraně buněk.



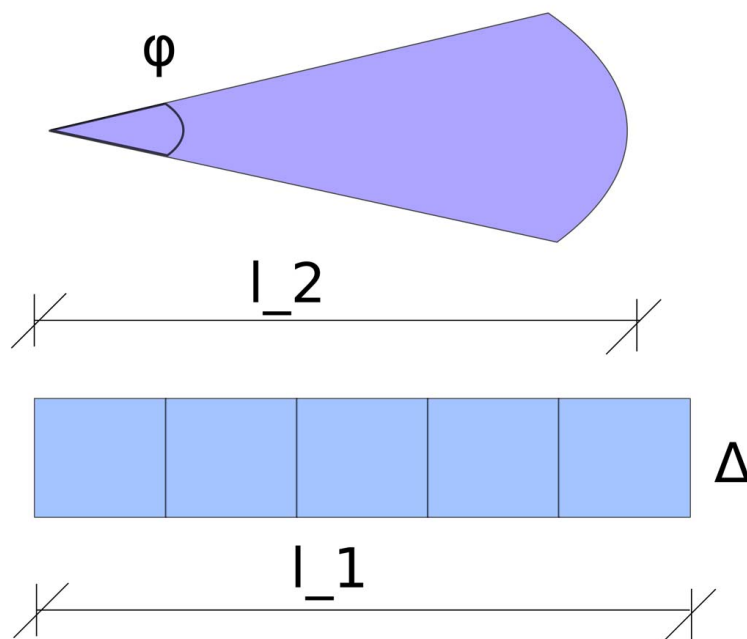
Obrázek 3.5: Příklad výpočtu průběhu hladiny v buňce

Výhoda tohoto řešení je, že lze řešit i izolovaně pro jednu buňku. Nevýhodou je, že vzniká určitá nepřesnost.

### 3.4.3 Rotační symetrie

Pro několik málo případů lze uplatnit rotační symetrii. V mém případě jde o zkoušku rozlití kameniva, která je uvedena v následující kapitole. Rotační symetrii se snažím zachytit 3D problémem pomocí 2D výpočtu.

Na začátku výpočtu se převede problém do dvoudimenzionálního a pak se provede výpočet. Při postprocessingu se převedou výsledky zpět. Při převodu vycházím ze rovnosti objemu, respektive plochy v jedné vrstvě. Obsah výseku i obsah plochy ve 2D výpočtu mají být stejné (viz Obr. 3.6).



Obrázek 3.6: Příklad plochy výseku a výpočtu.

Plocha od výpočtů je dána obsahem obdélníku, plocha od rotační symetrie je dána kruhovou výsečí <sup>2</sup>.

$$S = l_1 \Delta \leq 1 \tag{3.1}$$

$$S = \pi l_2^2 \frac{\phi}{2\pi}$$

Při rovnosti ploch roste velikost šířky tekutiny kvadraticky.

$$l_2 = \sqrt{\frac{2l_1}{\phi}} \tag{3.2}$$

Kde zvolený výsečový úhel musí být stejný ve všech vrstvách a ve všech krocích.

<sup>2</sup>Úhel ve zde zadaném vzorci je třeba zadávat v radiánech.

---

## Modely, zkoušky a příklady

Při výpočtu se zabývám zkouškou rozlití kužele a z ní odvozeným modelem.

### 4.1 Zkouška rozlití kameniva

Jedná se o jednoduchou zkoušku reologických vlastností betonové směsi. Zkouška sestává z komolého kužele <sup>1</sup>, kdy větší podstava je ta dolní (viz Obr. 4.1).

Rozměry kužele a průběh testu by měl probíhat podle příslušné normy, případně podle požadavků [26]. Dle ČSN pro navrhování konstrukcí [27] se výsledky průměrů rozlití rozdělují do tří tříd. Jimi jsou SF1, SF2 a SF3. Rozměry dle této normové zkoušky jsou 200 a 130 mm pro průměry podstav a 200 mm pro výšku. Tolerance rozměrů je 2 mm směrem nahoru i dolů.

Výsledná vzdálenost rozlití se zjišťuje jako průměr na sebe kolmých rozměrů rozlité betonové směsi <sup>2</sup>.

$$d = \frac{d_x + d_y}{2} \quad (4.1)$$

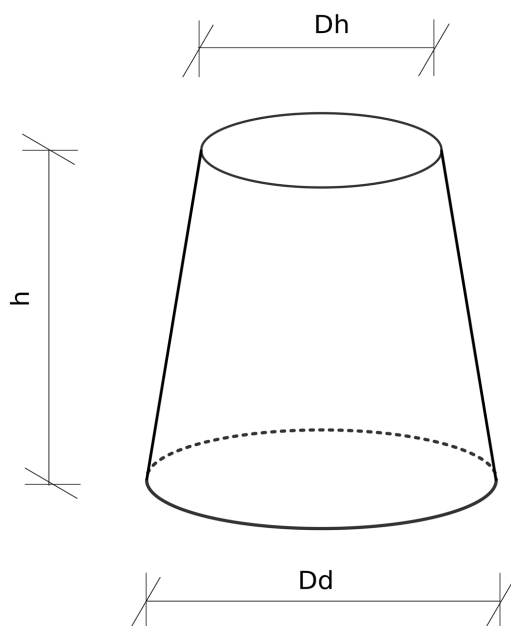
Uvažuji i s jinými kuželami než normovými vzhledem k tomu, že v této práci porovnávám

---

<sup>1</sup>Též značen jako Abramsův kužel dle jeho autora.

<sup>2</sup>Rozdíl těchto hodnot je dán nerovnoměrností rozložení vlastností čerstvé betonové směsi v prostoru. V případě modelování lze uvažovat jak případy dokonale rovnoměrné, případně nerovnoměrné. Přesné hodnoty a jemné odchylky nelze předem znát. Lze jen stanovit pravděpodobnost výskytu. Vzhledem k tomu je nejjednodušší případ uvažovat hodnoty rovnoměrné.

výpočetní model a reálné (testovací) chování čerstvé betonové směsi. Hutnění, vibrování a odbednění jsou ve mnou provedených výpočetních modelech zanedbány. Uvažuji čas nula pro stav, kdy je betonová směs volně stojící v prostoru s rovnoměrně rozmístěným kamenivem.



Obrázek 4.1: Kužel pro zkoušku rozlití kužele.

Obdobnou zkouškou je zkouška sednutí kužele. Tato zkouška pracuje s betonovou směsí s větší viskozitou. Hodnocení při této zkoušce se provádí podle rozdílu mezi nejvyšším bodem původní a konečné hladinou kužele. Zde jsou výsledky rozděleny do šesti kategorií S1 až S6.

Jedním z parametrů posuzování je i případná nerovnoměrnost sednutí. Pokud k ní dojde je výsledek neprůkazný.

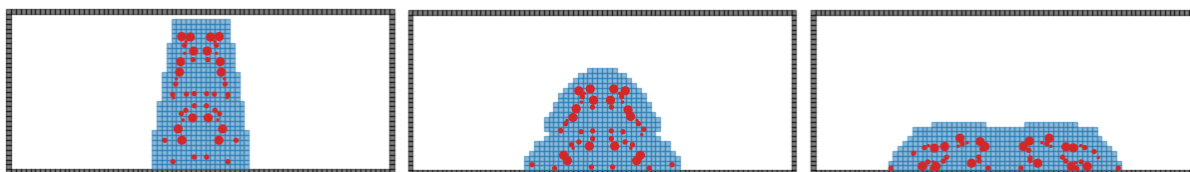
V případě, který zde modeluji, uvažuji zkoušku rozlití s některými parametry, které se měří u zkoušky sednutí.



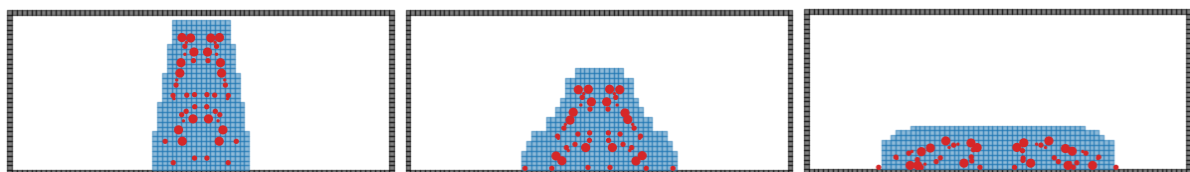
### 4.1.1 Příklady výpočtu

Výpočet jsem provedl na testu rozlití kužele. Výpočet je zjednodušen na dvou dimenzionální úlohu (D2Q9).

První příklad jsou modely, které uvažují newtonovskou kapalinu s jedním parametrem viskozity. Výpočet byl proveden pro dvě viskozity. První je viskozita  $5,5 * 10^{-5} Pa s$  (viz Obr. 4.2), druhým je příklad s viskozitou  $5,6 * 10^{-5} Pa s$  (viz Obr. 4.3).

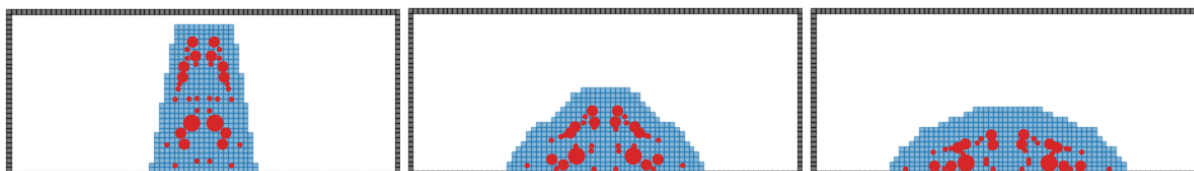


Obrázek 4.2: Výsledek výpočtu pro viskozitu  $5,5 * 10^{-5} Pa s$ . Znázorněno v časech 0, 0.38 a 0.677 s



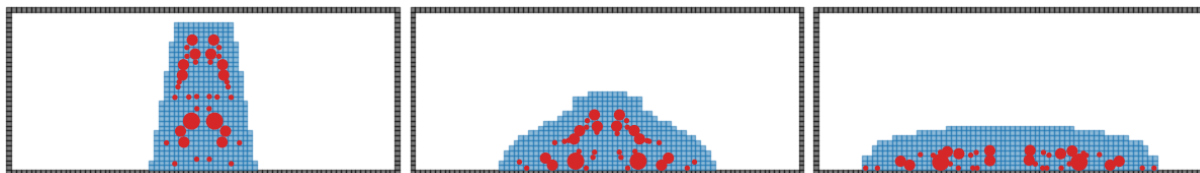
Obrázek 4.3: Výsledek výpočtu pro viskozitu  $5,6 * 10^{-5} Pa s$ . Znázorněno v časech 0, 0.38 a 0.677 s

Druhým příkladem je sednutí kužele s modelováním viskozity Bingham modelem. Viskozita modelu je  $1,3 Pa s$  a mez kluzu je  $120 Pa$ . Poměr mezi odrazovou a zrcadlovou okrajovou je nastaven na  $0,5$  (viz Obr. 4.4).

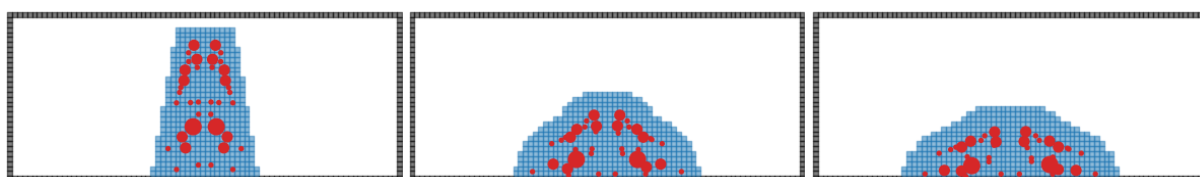


Obrázek 4.4: Výsledek výpočtu pro viskozitu  $5,5 * 10^{-5} Pa s$ . Znázorněno v časech 0, 0,43 a 0,876 s

Modifikací předchozího příkladu je znázornění okrajových podmínek podložky, jak dokonale prokluznou (viz Obr. 4.5) a protikluznou okrajovou podmínkou (viz Obr. 4.6).

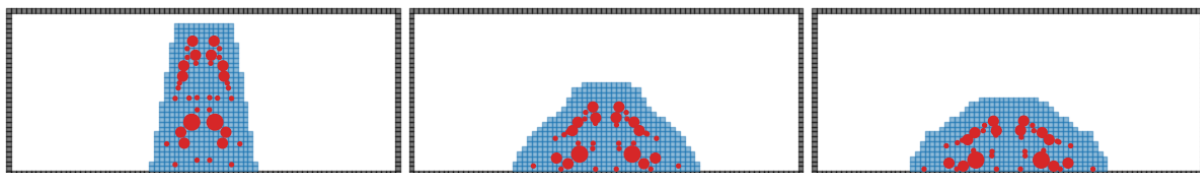


Obrázek 4.5: Dokonale prokluzná okrajová podmínka. Znázorněno v časech 0, 0,43 a 0,876 s



Obrázek 4.6: Dokonale protikluzná okrajová podmínka. Znázorněno v časech 0, 0,43 a 0,876 s

Dalším příkladem je sednutí kužele s jinými vlastnostmi meze kluzu a viskozity. Mez kluzu je 150 Pa a viskozita je 0,7 Pa s (viz Obr. 4.7).



Obrázek 4.7: Příklady v časech 0, 0,43 a 0,876 s.

---

## Výsledky

V této kapitole popisují výsledky vylepšení a úprav modelu a porovnání modelu s daty.

### 5.1 Porovnání modelu a dat

Porovnal jsem 2D model s výsledky sednutí kužele, které jsou již naměřené. Základem tohoto porovnání je přibližné určení přesnosti 2D modelu. Tento model je modifikací 3D prostoru na 2D pomocí rotační symetrie.

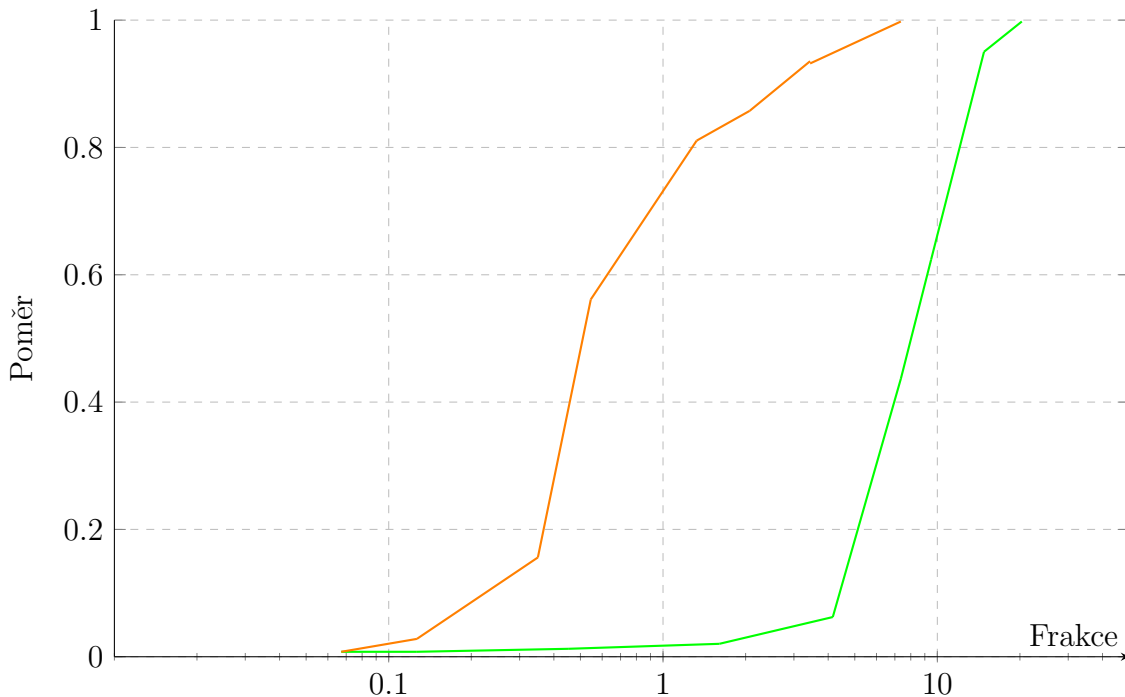
#### 5.1.1 Porovnání s daty

Ve dvou dimenzích (model D2Q9) jsem porovnal model s daty. Data jsou převzata z článku věnujícímu se kvalitě čerstvé betonové směsi [28]. V článku nejsou všechny údaje potřebné pro provedení výpočtu. Chybějícími údaji jsou například údaje o součiniteli tření podkladu atd. Tyto údaje jsem vhodně zvolil.

Data odpovídají zkoušce rozlití kužele na betonové směsi s kuželem o výšce 300 mm, a průměrech 200 a 100 mm.

Kamenivo je složeno ze dvou směsí kameniva. Těmi jsou písek a vápenec. Poměr objemu písku ku celkovému objemu kamenivu ( $S/A$ ) je 0,52 (viz Obr. 5.1).

V modelu jsou nejmenší částice menší než 1 mm zahrnuty v části kapaliny nikoliv v



Obrázek 5.1: Křivka hrubého (zelená) a jemného (oranžová) kameniva.

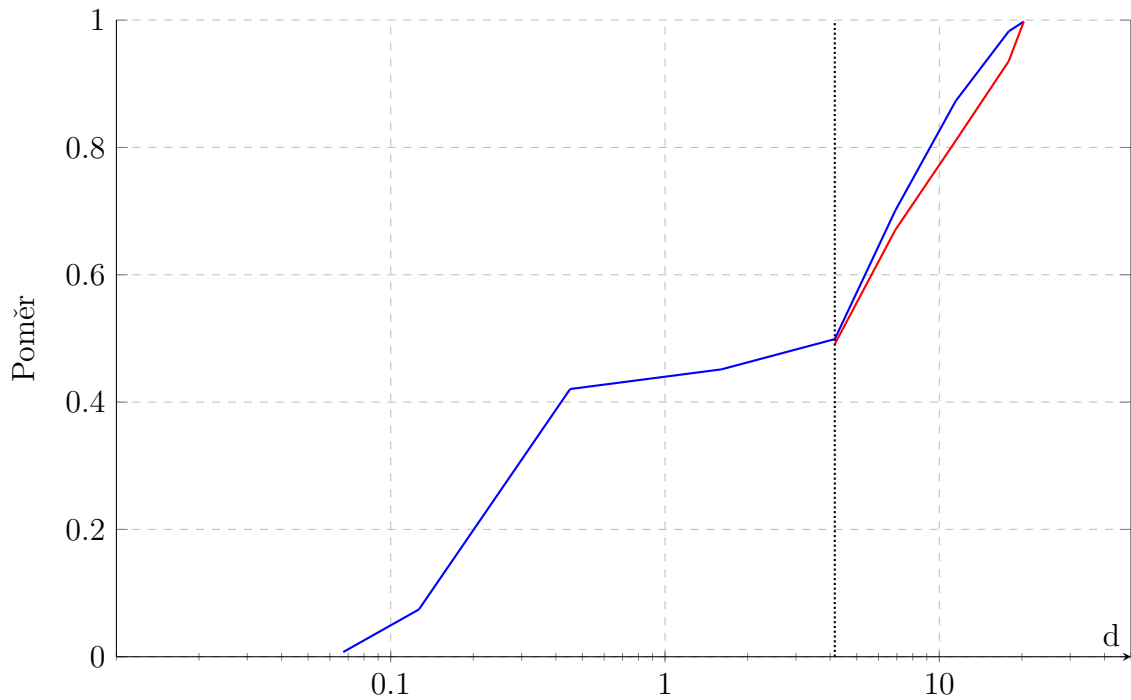
části kameniva. To jsem zvolil vzhledem k tomu, že výpočet kolize hodně částic by výrazně zpomalil výpočet, ale už by výrazně nepomohl k větší přesnosti výpočtu.

Z křivek zrnitosti písku a vápence a poměrů dávkování jednotlivých druhů kameniva jsem sestavil novou křivku zrnitosti.

Při následné snaze zachytit poměr dochází k nepřesnostem vlivem zaokrouhlování na celé kusy kameniva. Tato nepřesnost je největší u největších kusů kameniva. Vytváření křivky zrnitosti kameniva proto začínám od největších kusů k nejmenším. Snažím se co nejvíce přiblížit tvaru křivky zrnitosti kameniva a zároveň co nejvíce přiblížit množství kameniva v jednotlivých frakcích. Nejmenší částice, zachycené ve fázi kapaliny, činí dopočet do celkového objemu kameniva (viz Obr. 5.2).

Celkové množství kameniva jsem vypočítal z poměru kameniva a objemové hmotnosti kameniva.

Ve zdrojovém článku jsou hodnoty viskozity a meze kluzu získaných několika výpočtovými metodami. Mým cílem je vhodně zvolit hodnoty meze kluzu a hodnoty viskozity. Velikosti



Obrázek 5.2: Výsledná křivka kameniva (modrá) a křivka kameniva ve výpočtu (červená).

výsledné viskozity použité ve výpočtu je  $1.3 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  a mez kluzu je  $180 \text{ Pa}$ .

Šířka rozlití kužele ze vzorku činí  $488 \text{ mm}$ . Šířka z výpočtu činí  $466,8 \text{ mm}$ . Rozdíl vzorku a výpočtu je  $4,5 \%$ . Při hledání parametrů, které dají nejvíce shodné výsledky rozlití nebyl brán v ohledu čas při kterém se rozlití zastaví.

## 5.2 Úpravy modelu

V modelu jsem provedl několik úprav. V této podkapitole přikládám výsledky účinnosti změn.

### 5.2.1 Podoblasti

Porovnal jsem různé velikosti podoblasti a výpočetního času. Cílem bylo zjistit jaký vliv má zavedení podoblasti. Porovnání je provedeno u dvou velikostí kameniva.

Porovnání je uskutečněno na zkoušce rozlití kužele. Výška činí 300 mm, šířka na vrchu je 100 mm a šířka ve spodní části je 200 mm.

Kamenivo je složeno ze tří frakcí. Šlo o frakce 8, 4 a 2 mm. V testovacím případě byl poměr jednotlivých frakcí k celku je 0,16; 0,24 a 0,60. V testovacím případě jsem porovnal čtyři velikosti podoblastí (5, 6, 10 a 15 cm) a případ bez podoblasti.

Výpočet jsem provedl pro tři různé vzdálenosti podoblastí. Časy jsou uvedeny ve vteřinách (viz Tab. 5.1).

Výpočet	Bez oblasti	d = 15	d = 10	d = 5
1.	672	618	638	607
2.	744	758	620	637
3.	687	718	692	619
Průměr	701	698	650	621
%	100	99	92,7	88,5

Tabulka 5.1: Porovnání času podoblastí.

## 5.3 Zhodnocení výsledků

V mém modelovém případě počítaném v této kapitole jsem došel k výsledkům. Rozdíl mezi daty a výpočtem je v řádu jednotek procent. Výsledná přesnost je závislá především na přesnosti zvolené viskozity.

Určení podoblastí se ukázalo jako přínosné. Při vhodně zvolené velikosti podoblasti může dojít k úspoře času kolem 10 % v té části, která se zabývá kamenivem. Neuměřeně malá oblast by mohla způsobit selhání výpočtu a nedetekování kolizí, ke kterým by mělo dojít.

---

## Závěr

Během této práce jsem vytvořil software. Ten byl vytvořen v programovacím jazyce Python a ověřen pomocí dat uvedených v literatuře. Do existující numerické metody jsem přidal vylepšení jak pro uvážení axisymetrické chování čerstvé betonové směsi, tak pro zrychlení výpočtu. Po vylepšení se výsledky numerického modelu schodují s publikovanými daty, což znamená, že mnou vytvořený software může být použit pro predikci tečení betonové směsi.

V průběhu budoucí práce může být model rozšířen do 3D prostoru, zároveň může být zohledněna různá velikost tuhosti překážek, protože současný model uvažuje nekonečně velkou tuhost překážek.

Během této práce jsem si prohloubil své znalosti v programování numerickém modelování a také v chápání chování čerstvé betonové směsi.



---

## Literatura

- [1] Ariyaratne, W. H.; Manjula, E.; Ratnayake, C.; et al. CFD approaches for modeling gas-solids multiphase flows—A review. In *Proceedings of The 9th EUROSIM Congress on Modelling and Simulation, EUROSIM 2016, The 57th SIMS Conference on Simulation and Modelling SIMS 2016*, 142, Linköping University Electronic Press, 2018, pp. 680–686.
- [2] Švec, O.; Skoček, J.; Stang, H.; et al. Free surface flow of a suspension of rigid particles in a non-Newtonian fluid: A lattice Boltzmann approach. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, volume 179, 2012: pp. 32–42.
- [3] Chen, S.; Doolen, G. D. Lattice Boltzmann method for fluid flows. *Annual review of fluid mechanics*, volume 30, no. 1, 1998: pp. 329–364.
- [4] Peskin, C. S. The immersed boundary method. *Acta numerica*, volume 11, 2002: pp. 479–517.
- [5] Wolf-Gladrow, D. A. *Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models: an introduction*. Springer, 2004.
- [6] Mohamad, A. *Lattice Boltzmann Method*, volume 70. Springer, 2011.

- 
- [7] Körner, C.; Thies, M.; Hofmann, T.; et al. Lattice Boltzmann model for free surface flow for modeling foaming. *Journal of Statistical Physics*, volume 121, no. 1, 2005: pp. 179–196.
- [8] Lucky, A. P. A.; Johnson, F. A. Modification of Bingham plastic rheological model for better rheological characterization of synthetic based drilling mud. *Journal of Engineering and Applied Sciences*, volume 13, no. 10, 2018: pp. 3573–3581.
- [9] Chidiac, S.; Mahmoodzadeh, F. Plastic viscosity of fresh concrete—A critical review of predictions methods. *Cement and Concrete Composites*, volume 31, no. 8, 2009: pp. 535–544.
- [10] Jeong, S. W. Determining the viscosity and yield surface of marine sediments using modified Bingham models. *Geosciences Journal*, volume 17, no. 3, 2013: pp. 241–247.
- [11] Janssen, C.; Krafczyk, M. A lattice Boltzmann approach for free-surface-flow simulations on non-uniform block-structured grids. *Computers & Mathematics with Applications*, volume 59, no. 7, 2010: pp. 2215–2235.
- [12] Zou, Q.; He, X. On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model. *Physics of fluids*, volume 9, no. 6, 1997: pp. 1591–1598.
- [13] Švec, O.; Skoček, J. Simple Navier’s slip boundary condition for the non-Newtonian Lattice Boltzmann fluid dynamics solver. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, volume 199, 2013: pp. 61–69.
- [14] Cao, W. *Investigation of the applicability of the lattice Boltzmann method to free-surface hydrodynamic problems in marine engineering*. Dissertation thesis, École centrale de Nantes, 2019.
- [15] Sterling, J. D.; Chen, S. Stability analysis of lattice Boltzmann methods. *Journal of Computational Physics*, volume 123, no. 1, 1996: pp. 196–206.

- 
- [16] Thürey, N.; Pohl, T.; Rüde, U.; et al. Optimization and stabilization of LBM free surface flow simulations using adaptive parameterization. *Computers & fluids*, volume 35, no. 8-9, 2006: pp. 934–939.
- [17] Ahmad, M.; Ismail, K. A.; Mat, F. Impact models and coefficient of restitution: A review. *ARPN J. Eng. Appl. Sci*, volume 11, no. 10, 2016: pp. 6549–6555.
- [18] Lubachevsky, B. D. How to simulate billiards and similar systems. *Journal of Computational Physics*, volume 94, no. 2, 1991: pp. 255–283.
- [19] ([https://physics.stackexchange.com/users/392/john\\_alexioiu](https://physics.stackexchange.com/users/392/john_alexioiu)), J. A. Multiple colliding balls. Physics Stack Exchange, uRL:<https://physics.stackexchange.com/q/296892> (version: 2018-02-20), <https://physics.stackexchange.com/q/296892>. Available from: <https://physics.stackexchange.com/q/296892>
- [20] Yang, X.; Zhang, X.; Li, Z.; et al. A smoothing technique for discrete delta functions with application to immersed boundary method in moving boundary simulations. *Journal of Computational Physics*, volume 228, no. 20, 2009: pp. 7821–7836.
- [21] Kuhlman, D. *A python book: Beginning python, advanced python, and python exercises*. Dave Kuhlman Lutz, 2009.
- [22] Imre, B.; Rábsamen, S.; Springman, S. M. A coefficient of restitution of rock materials. *Computers & Geosciences*, volume 34, no. 4, 2008: pp. 339–350.
- [23] Chau, K. T.; Wong, R.; Wu, J. Coefficient of restitution and rotational motions of rockfall impacts. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, volume 39, no. 1, 2002: pp. 69–77.
- [24] Ji, Z.-M.; Chen, Z.-J.; Niu, Q.-H.; et al. Laboratory study on the influencing factors and their control for the coefficient of restitution during rockfall impacts. *Landslides*, volume 16, no. 10, 2019: pp. 1939–1963.

- [25] ČSN, E. 12620. *Aggregates for concrete.*” *European Committee for Standardization*, 2006.
- [26] Domone, P. The slump flow test for high-workability concrete. *Cement and Concrete Research*, volume 28, no. 2, 1998: pp. 177–182.
- [27] ČSN, E. 1-1 (73 1201) Eurokód 2: Navrhování betonových konstrukcí—Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby. In *Eurocode*, volume 2, 1992, pp. 1–1.
- [28] Chidiac, S.; Maadani, O.; Razaqpur, A.; et al. Controlling the quality of fresh concrete—a new approach. *Magazine of Concrete Research*, volume 52, no. 5, 2000: pp. 353–363.