

České vysoké učení technické v Praze

Fakulta strojní
Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky
Odbor pružnosti a pevnosti



Bakalářská práce
Analýza nalisovaného spoje

2022

Jan Výborný

Jméno autora: Jan Výborný

Název BP: Analýza nalisovaného spoje

Anglický název: Analysis of pressed cylinders

Rok: 2022

Obor studia: Teoretický základ strojního inženýrství

Ústav/odbor: Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky / Odbor pružnosti a pevnosti

Vedoucí práce: Ing. Karel Vítek, CSc.

Konzultant:

Bibliografické údaje: počet stran: 69

 počet obrázků: 86

 počet tabulek: 0

počet příloh: 0

Klíčová slova: Nalisování, Silnostěnné nádoby, Smyková napětí,

Keywords: Pressed cylinders, Tangential stress

Anotace: Analýza stavu napjatosti nalisovaného spoje při uvažování smykových napětí

Abstract: Analysis of pressed cylinders while taking tangential stresses into consideration

Poděkování:

Tímto bych chtěl poděkovat vedoucímu mojí práce, Ing. Karlovi Vítkovi, CSc. za neuvěřitelnou trpělivost, kterou se mnou měl a za jeho chuť studenty na FS CVUT opravdu dobře naučit Pružnost a Pevnost.

Také bych rád poděkoval všem, kteří při mně stáli v této komplikované době. Jsem rád, že jste mi pomohli mi splnit můj sen.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně, pod vedením pana Ing. Karla Vítka, CSc. Dále prohlašuji, že jsem všechny použité zdroje správně a úplně citoval a uvádím je v příloženém seznamu literatury.

V Praze dne:

Podpis:

0 Obsah

0	Obsah	4
0.1.	Seznam užitě literatury	6
0.2.	Seznam obrázků.....	7
1	Úvod.....	12
2	Používané teorie pevnosti.....	13
2.1.	Materiály houževnaté	13
2.1.1.	Trescova hypotéza - τ_{max}	13
2.1.2.	Energetická – HMM (Huber, von Mises, Hencky).....	13
3	Teorie silnostěnných nádob	14
4	Rozbor stavu napjatosti základních silnostěnných nádob	18
4.1.	Plný Hřídél.....	18
4.1.1.	Pevnostní podmínky	19
4.1.2.	Výsledky simulace v programu Abaqus	20
4.2.	Silnostěnná nádoba s vnitřním přetlakem.....	21
4.2.1.	Pevnostní podmínky	22
4.2.2.	Výsledky simulace v programu Abaqus	22
4.3.	Silnostěnná nádoba s vnějším přetlakem	23
4.3.1.	Pevnostní podmínky	24
4.3.2.	Výsledky simulace v programu Abaqus	24
5	Odvození přesahu.....	26
5.1.	Kontrola pomocí metody konečných prvků – Abaqus.....	28
6	Rozbor průběhu napětí nalisovaných silnostěnných nádob	30
6.1.	Soustava HN - Náboj nalisovaný na hřídeli	30
6.1.1.	Výsledky simulace v programu Abaqus	31
6.2.	Soustava s vnitřní dutinou, bez vnějšího zatížení a s přesahem	32
6.2.1.	Výsledky simulace v programu Abaqus	34
6.3.	Soustava s vnitřní dutinou, s vnitřním přetlakem a přesahem	35
6.3.1.	Výsledky simulace v programu Abaqus	36
6.4.	Soustava s vnitřní dutinou, s vnějším přetlakem a přesahem.....	37

6.4.1.	Výsledky simulace v programu Abaqus	38
7	Lisovací síla a únosnost spojení	39
7.1.	Únosnost spojení.....	39
7.2.	Lisovací síla.....	39
8	Vliv smykového napětí na stav napjatosti soustav HN	40
8.1.	Montážní stav – lisování	41
8.1.1.	Stav napjatosti hřídele	42
8.1.2.	Stav napjatosti náboje.....	44
8.2.	Nezatížený stav	46
8.2.1.	Hřídel	46
8.2.2.	Náboj	46
8.3.	Pracovní stav – zatížení momentem síly	46
8.3.1.	Stav napjatosti hřídele	48
8.3.2.	Stav napjatosti náboje.....	50
8.4.	Pracovní stav – zatížení momentem síly a osovou silou	52
8.4.1.	Stav napjatosti hřídele	52
8.4.2.	Stav napjatosti náboje.....	54
9	Výsledky simulace v programu Abaqus	56
9.1.	Soustava HN v nezatíženém stavu.....	57
9.2.	Montážní stav stavy soustavy HN – lisování	60
9.3.	Soustava HN zatížená kroutícím momentem	63
9.4.	Soustava HN zatížená kroutícím momentem a osovou silou	66
10	Závěr	69

0.1. Seznam užitých literatury

- [1] Michalec a kol.: Pružnost a pevnost I, Vydavatelství ČVUT v Praze 2006
 - [2] Michalec a kol.: Pružnost a pevnost II, Vydavatelství ČVUT v Praze 2006
 - [3] Švec, V.: Části a mechanismy strojů – Spoje a spojovací součásti. ČVUT, Praha, 2002
 - [4] Perníček, J.: Analýza mechanických vlastností nalisovaného spoje s ohledem na přenos kroutícího momentu, bakalářská práce, FS ČVUT v Praze, 2012.
 - [5] Černý, J.: Analýza stavu napjatosti a prokluzů násobně nalisovaného spoje při kombinovaném namáhání, diplomová práce, FS ČVUT v Praze, 2015.
 - [6] Smělík, J.: Analýza vlivu nalisovaných kroužků s proměnným přesahem na napjatost pláště silnostěnné nádoby., bakalářská práce, FS ČVUT v Praze, 2013.
 - [7] Mochar, D.: Metody analýzy násobně nalisovaného spoje, bakalářská práce, FS ČVUT v Praze, 2014.
 - [8] Shchankin, Y.: Analýza mechanických vlastností nalisovaného spoj při zatížení osovými silami, bakalářská práce, FS ČVUT v Praze, 2017.
- Přednášky Pružnost a pevnost FS CVUT

0.2. Seznam obrázků

Obr. 1: Napjatost osově symetrického elementu silnostěnné nádoby	14
Obr. 2: Radiální posuvy osově symetrického elementu silnostěnné nádoby	15
Obr. 3: Teoretické průběhy napětí v plném hřídeli zatíženým vnějším tlakem p_2	18
Obr. 4: Mapa Von Misesova napětí [MPa] v plném volném hřídeli, zatíženým vnějším tlakem, zjištěná simulací MKP	20
Obr. 5: Mapa osového napětí [MPa] v plném volném hřídeli, zatíženým vnějším tlakem, zjištěná simulací MKP	20
Obr. 6: Grafy průběhů napětí v závislosti na poloměru v plném volném hřídeli, zatíženým vnějším tlakem, zjištěných simulací MKP	20
Obr. 7: Teoretické průběhy napětí v tlakové nádobě s vnitřním přetlakem, s nulovým osovým napětím ..	21
Obr. 8: Mapa radiálního napětí [MPa] v silnostěnné nádobě, zatížené vnitřním přetlakem, zjištěná simulací MKP	22
Obr. 9: Mapa tečného napětí [MPa] v silnostěnné nádobě, zatížené vnitřním přetlakem, zjištěná simulací MKP	22
Obr. 10: Grafy průběhů tečného a radiálního napětí v závislosti na poloměru v silnostěnné nádobě, zatížené vnitřním přetlakem, zjištěných simulací MKP	23
Obr. 11: Teoretické průběhy napětí v silnostěnné nádobě s vnějším přetlakem $\Delta p_{12} = 5 \text{ Mpa}$	23
Obr. 12: Teoretické průběhy v silnostěnné nádobě s vnějším přetlakem, nulovým vnitřním tlakem	24
Obr. 13: Mapa radiálního napětí [MPa] v silnostěnné nádobě, zatížené vnějším přetlakem, zjištěná simulací MKP	25
Obr. 14: Mapa tečného napětí [MPa] v silnostěnné nádobě, zatížené vnějším přetlakem, zjištěná simulací MKP	25
Obr. 15: Grafy průběhů tečného a radiálního napětí v závislosti na poloměru v silnostěnné nádobě, zatížené vnějším přetlakem, zjištěné simulací MKP	25
Obr. 16: Schéma soustavy silnostěnných nádob před nalisováním	26
Obr. 17: Teoretické průběhy napětí v soustavě uložené s přesahem	27
Obr. 18: Mapa Von Misesova napětí [MPa] v soustavě silnostěnných nádob zjištěná simulací MKP	28
Obr. 19: Mapa Von Misesova napětí [MPa] v soustavě silnostěnných nádob zjištěná simulací MKP	29
Obr. 20: Mapa Von Misesova napětí [MPa] v soustavě silnostěnných nádob zjištěná simulací MKP	29
Obr. 21: Grafy průběhu napětí v soustavě nalisovaných silnostěnných nádob zjištěných simulací MKP .	29
Obr. 22: Délka silnostěnných nádob v kapitole 6	30
Obr. 23: Teoretické průběhy napětí v soustavě HN – náboj nalisovaný na hřídeli	30
Obr. 24: Mapa radiálního napětí [MPa] v soustavě HN zjištěná simulací MKP	31
Obr. 25: Mapa tečného napětí [MPa] v soustavě HN zjištěná simulací MKP	31
Obr. 26: Grafy průběhu napětí v soustavě HN zjištěných simulací MKP	32
Obr. 27: Sud s čely a vnějším opásáním	32
Obr. 28: Teoretické průběhy napětí v soustavě s vnitřní dutinou a přesahem, bez vnějšího zatížení	33

Obr. 29: Mapa radiálního napětí [MPa] v soustavě s vnitřní dutinou, s přesahem, bez vnějšího zatížení, zjištěná simulací MKP	34
Obr. 30: Mapa tečného napětí [MPa] v soustavě s vnitřní dutinou, s přesahem, bez vnějšího zatížení, zjištěná simulací MKP	34
Obr. 31: Grafy průběhu napětí v soustavě s vnitřní dutinou a přesahem, bez vnějšího zatížení, zjištěných simulací MKP	34
Obr. 32: Teoretické průběhy napětí v soustavě s vnitřní dutinou, s vnitřním přetlakem a s přesahem	35
Obr. 33: Mapa radiálního napětí [MPa] v soustavě s vnitřní dutinou, s přesahem, s vnitřním přetlakem, zjištěná simulací MKP	36
Obr. 34: Mapa tečného napětí [MPa] v soustavě s vnitřní dutinou, s přesahem, s vnitřním přetlakem, zjištěná simulací MKP	36
Obr. 35: Grafy průběhu napětí v soustavě s vnitřní dutinou, s přesahem, s vnitřním přetlakem, zjištěná simulací MKP	36
Obr. 36: Teoretické průběhy napětí v soustavě s vnitřní dutinou, s vnějším přetlakem a s přesahem.....	37
Obr. 37: Mapa radiálního napětí [MPa] v soustavě s vnitřní dutinou, s přesahem, s vnějším přetlakem, zjištěná simulací MKP	38
Obr. 38: Mapa tečného napětí [MPa] v soustavě s vnitřní dutinou, s přesahem, s vnějším přetlakem, zjištěná simulací MKP	38
Obr. 39: Grafy průběhu napětí v soustavě s vnitřní dutinou, s přesahem, s vnějším přetlakem, zjištěná simulací MKP	38
Obr. 40: Schéma zatížení osovou silou při lisování v soustavě Hřídlel – Náboj.....	41
Obr. 41: Schéma osového napětí při lisování v soustavě HN	42
Obr. 44: Znárodnění zatížení elementu objemu hřídlele během lisování	42
Obr. 43: Mohrova kružnice – napjatost elementu hřídlele při lisování	43
Obr. 44: Znárodnění zatížení elementu objemu náboje během lisování	44
Obrázek 45: Mohrova kružnice – napjatost elementu náboje při lisování za studena – detail	44
Obr. 46: Mohrova kružnice – napjatost elementu náboje při lisování za studena.....	44
Obr. 47: Znárodnění toku kroutícího momentu z náboje do hřídlele	47
Obr. 48: Znárodnění zatížení elementu objemu hřídlele během zatěžování kroutícím momentem	48
Obr. 49: Znárodnění zatížení elementu objemu náboje při zatížení kroutícím momentem	50
Obr. 50: Mohrova kružnice – napjatost elementu náboje při zatížení kroutícím momentem	50
Obr. 51: Znárodnění elementu objemu hřídlele při zatížení momentem síly a osovou silou	53
Obr. 52: Schéma zatížení kroutícím momentem a osovou silou v soustavě HN s šikmým čelním ozubením	53
Obr. 53: znárodnění elementu objemu náboje při zatížení momentem síly a osovou silou	54
Obr. 54: Napěťová mapa SVM pro soustavu HN v nezatíženém stavu – MKP	57
Obr. 55: Napěťová mapa S11 pro soustavu HN v nezatíženém stavu – MKP	57
Obr. 56: Napěťová mapa S22 pro soustavu HN v nezatíženém stavu – MKP	57
Obr. 57: Napěťová mapa S33 pro soustavu HN v nezatíženém stavu – MKP	57
Obr. 58: Napěťová mapa S12 pro soustavu HN v nezatíženém stavu – MKP	57

Obr. 59: Graf průběhu radiálního napět v hřídeli podél Y pro soustavu HN v nezatíženém stavu – MKP	58
Obr. 60: Graf průběhu Misesova napět v hřídeli podél Y pro soustavu HN v nezatíženém stavu – MKP	58
Obr. 61: Grafy průběhů napětí pro soustavu HN v nezatíženém stavu – MKP	59
Obr. 62: Graf průběhu osového napětí v hřídeli podél Y pro soustavu HN v nezatíženém stavu – MKP	60
Obr. 63: Napěťová mapa SVM pro soustavu HN zatíženou lisovací silou – MKP	60
Obr. 64: Napěťová mapa S11 pro soustavu HN zatíženou lisovací silou – MKP	60
Obr. 65: Napěťová mapa S22 pro soustavu HN zatíženou lisovací silou – MKP	60
Obr. 66: Napěťová mapa S33 pro soustavu HN zatíženou lisovací silou – MKP	61
Obr. 67: Napěťová mapa S12 pro soustavu HN zatíženou lisovací silou – MKP	61
Obr. 68: Graf průběhů napětí S12 podél osy Y pro soustavu HN zatíženou lisovací silou – MKP	61
Obr. 69: Grafy průběhů napětí pro soustavu HN zatíženou lisovací silou – MKP	62
Obr. 70: Napěťová mapa SVM pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem – MKP	63
Obr. 71: Napěťová mapa S11 pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem – MKP	63
Obr. 72: Napěťová mapa S22 pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem – MKP	63
Obr. 73: Napěťová mapa S33 pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem – MKP	64
Obr. 74: Napěťová mapa S12 pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem – MKP	64
Obr. 75: Napěťová mapa S23 pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem – MKP	64
Obr. 76: Napěťová mapa S13 pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem – MKP	64
Obr. 77: Grafy průběhů napětí S13, S23 podél osy Y pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem – MKP	64
Obr. 78: Grafy průběhů napětí pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem – MKP	65
Obr. 79: Napěťová mapa SVM pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem a osovou silou – MKP	66
Obr. 80: Napěťová mapa S11 pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem a osovou silou – MKP	66
Obr. 81: Napěťová mapa S22 pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem a osovou silou – MKP	66
Obr. 82: Napěťová mapa S33 pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem a osovou silou – MKP	67
Obr. 83: Napěťová mapa S12 pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem a osovou silou – MKP	67
Obr. 84: Napěťová mapa S23 pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem a osovou silou – MKP	67
Obr. 85: Napěťová mapa S13 pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem a osovou silou – MKP	67
Obr. 86: Grafy průběhů napětí pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem a osovou silou – MKP	67

Seznam použitých označení

Značka	název	jednotka
σ	normálové napětí.....	N/mm^2
τ	smykové napětí.....	N/mm^2
σ_{red}	redukované napětí.....	N/mm^2
σ_1	první hlavní napětí.....	N/mm^2
σ_2	druhé hlavní napětí.....	N/mm^2
σ_3	třetí hlavní napětí.....	N/mm^2
σ_d	dovolené normálové napětí v tahu i tlaku.....	N/mm^2
σ_k	mez kluzu.....	N/mm^2
σ_{Dt}	dovolené napětí v tahu pro křehký materiál.....	N/mm^2
σ_{Pt}	mez pevnosti v tahu.....	N/mm^2
σ_{Dd}	dovolené napětí v tlaku pro křehký materiál.....	N/mm^2
σ_{Pd}	mez pevnosti v tlaku.....	N/mm^2
k	bezpečnost.....	[-]
σ_r	radiální napětí.....	N/mm^2
σ_t	normálové napětí v tečném směru.....	N/mm^2
σ_o	osové napětí.....	N/mm^2
x	poloměr.....	mm
φ	úhel.....	rad
b	šířka elementu, nebo náboje.....	mm
ϵ	poměrné prodloužení.....	[-]
ϵ_r	poměrné prodloužení v radiálním směru.....	[-]
ϵ_t	poměrné prodloužení v tečném směru.....	[-]
E	Youngův modul pružnosti.....	MPa
E^*	Zpevněný modul pružnosti.....	MPa
u	posuv.....	mm
σ^I, σ^{II}	napětí na vnitřní, resp. vnější silnostěnné nádobě.....	N/mm^2

r_1, r_2 vnitřní, resp. vnější poloměr vnitřní silnostěnné nádoby.....	mm
r_2, r_3 vnitřní, resp. vnější poloměr vnější silnostěnné nádoby.....	mm
ν Poissonovo číslo.....	$[-]$
δ přesah.....	mm
p_1, p_2 tlak na vnitřní, resp. vnější plochu vnitřní silnostěnné nádoby.....	MPa
p_2, p_3 tlak na vnitřní, resp. vnější plochu vnější silnostěnné nádoby.....	MPa
M moment síly.....	Nm
F síla.....	N
f koeficient tření.....	$[-]$
S_{11} Radiální napětí.....	N/mm^2
S_{22} Osově napětí.....	N/mm^2
S_{33} Normálové napětí v tečném směru.....	N/mm^2
S_{12} Smykové napětí τ_{xy} – v rovině osového a radiálního napětí.....	N/mm^2
S_{23} Smykové napětí τ_{yz}	N/mm^2
S_{13} Smykové napětí τ_{xz} – vyvolané zejména kroutícím momentem.....	N/mm^2

1 Úvod

V dnešní rozmanité době existuje spousta strojních součástí, které lze mnohými způsoby zjednodušit a popsat obecnými matematickými modely. Jednu takovou skupinu tvoří silnostěnné nádoby, které mají velmi široké uplatnění a lze je nalézt téměř v jakémkoli odvětví průmyslu. Jedná se o symetrická tělesa válcového tvaru jako je například potrubí, hřídel, válcová cisterna a jiné. Teorie popisující fyzikální vlastnosti těchto těles slouží jako základ této práce.

Právě teorie silnostěnných nádob nám umožňuje analyticky zkoumat vlastnosti nalisovaného spoje, který je jedním z nejjednodušších způsobů spojení silnostěnných nádob. Z těchto důvodů je také velmi často užíván v běžné praxi, ať už jde o takzvané nasazení za tepla, které spočívá v zahřátí jedné součásti a nasazení na druhou např. u plastového potrubí, nebo v nalisování za studena, které spočívá ve vtlačení jedné silnostěnné nádoby do druhé. Obě tyto metody vytváří funkční spojení, které může sloužit k různým účelům jako například přenesení momentu síly, vyztužení konstrukce válcové nádoby, těsného spojení potrubí a dalším.

Účelem této práce je zkoumat vlastnosti nalisovaného spojení pomocí nám známé teorie silnostěnných nádob, zákonů mechaniky a fyziky kontinua a využití programu Abaqus, který funguje na bázi metody konečných prvků. Výstupem této analýzy je srovnání výsledků analytického postupu a výsledků simulací z programu Abaqus.

Zejména bude prověřen vliv smykového napětí na stav napjatosti silnostěnných nádob spojených pomocí nalisovaného spojení. Tyto smyková napětí budou uvažována pro běžné stavy zatížení, a to především pro soustavu Hřídel – náboj.

2 Používané teorie pevnosti

Tyto teorie běžně slouží k určení mezní hodnoty napětí, kterou ve zkoumaném místě součást vykazuje. Požadavkem je, aby tato hodnota napětí byla nižší nežli hodnota stanovená pro daný materiál. Redukované hodnoty napětí, zejména Von Misesovo napětí v této práci budou sloužit jako kvantifikátor pro srovnání jednotlivých stavů.

2.1. Materiály houževnaté

V této práci aplikujeme základní teorie pevnosti s ohledem na požadované vlastnosti materiálů užívaných pro běžné aplikace nalisování.

2.1.1. Trescova hypotéza - τ_{max}

Mezní napětí materiálu je dáno maximálním smykovým napětím určujícím mez plasticity, proto tedy τ_{max} . Toto maximální smykové napětí je též poloměrem největší Mohrovy kružnice.

$$\tau_k = \frac{\sigma_k}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Přiřazené redukované napětí je pak rovno rozdílu hlavních napětí neboli maximálního a minimálního napětí.

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{max} - \sigma_{min} \leq \sigma_d = \frac{\sigma_k}{k} \quad (2.1)$$

S výhodou lze tuto teorii užít, známe-li hlavní napětí díky nenáročnosti výpočtu. Ve vztahu (2.1) má k význam bezpečnosti

Viz [1] – 6.6.1 Podmínka pevnosti maximálních smykových napětí - " τ_{max} " (Trescova, Guestova)

2.1.2. Energetická – HMH (Huber, von Mises, Hencky)

Mezní hodnoty napětí jsou definovány hodnotou deformační energie na změnu tvaru obecné napjatosti odpovídající též hodnotě při napjatosti jednoosé.

Pro obecnou napjatost pak platí rovnice (2.2), respektive (2.3) známe-li hodnoty hlavních napětí.

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)} \leq \sigma_d \quad (2.2)$$

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq \sigma_d = \frac{\sigma_k}{k} \quad (2.3)$$

Viz [1] – 6.6.2 Podmínka pevnosti HMH, energetická.

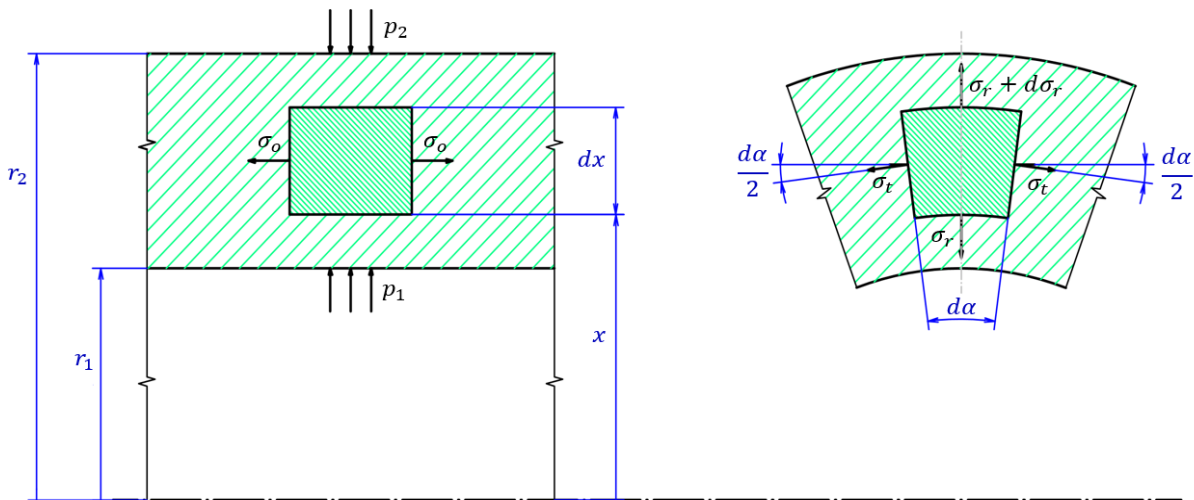
3 Teorie silnostěnných nádob

Na rozdíl od tenkostěnných nádob popsanych pomocí Laplaceovy rovnice udávající vztah mezi membránovými napětími, musíme u tlustostěnných nádob zkoumat průběh radiálního napětí a tečného napětí po tloušťce nádoby, jejichž změny velikosti nelze zanedbat.

Z praxe uvažujeme v běžných případech vnitřní přetlak způsobený natlakovaným médiem p_1 , vzájemný tlak nádob na sebe p_2 a tlak okolí, který je vnějším tlakem p_3 . Tudiž zavádíme $\sigma_r(r_1) = -p_1$ a $\sigma_r(r_2) = -p_2$. Samozřejmě mohou nastat i případy jiné. Tento předpoklad definuje okrajové podmínky pro radiální napětí.

Uvažujeme rotačně symetrické válcové tlustostěnné nádoby, u kterých popisujeme fyzikální veličiny jako funkce závislé na poloměru x a proto i hodnoty fyzikálních veličin lze považovat taktéž za rotačně symetrické.

Výchozí rovnicí (3.1) je pro nás silová rovnováha elementární části objemu rotačně symetrického tělesa v radiálním směru dle obr. 1 a postupujeme podle klasické teorie uvedené v [2] – 3.1 Tlustostěnné nádoby. Příklady konstrukcí jsou hřídele nebo trubky modelované jako tlustostěnné nádoby.



Obr. 1: Napjatost osově symetrického elementu silnostěnné nádoby

$$\sigma_r \cdot b \cdot x \cdot d\varphi + 2 \cdot \sigma_t \cdot b \cdot \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) \cdot dx - (\sigma_r + d\sigma_r) \cdot (x + dx) \cdot b \cdot d\varphi = 0 \quad (3.1)$$

$$\sigma_r \cdot x \cdot d\varphi + \sigma_t \cdot d\varphi \cdot dx - (\sigma_r + d\sigma_r) \cdot (x + dx) \cdot d\varphi = 0$$

$$\sigma_r \cdot x \cdot d\varphi + \sigma_t \cdot d\varphi \cdot dx - \sigma_r \cdot x \cdot d\varphi - \sigma_r \cdot dx \cdot d\varphi - d\sigma_r \cdot x \cdot d\varphi - d\sigma_r \cdot dx \cdot d\varphi = 0$$

$$\sigma_t \cdot dx - \sigma_r \cdot dx - d\sigma_r \cdot x = 0$$

$$\frac{1}{x}(\sigma_t(x) - \sigma_r(x)) = \frac{d\sigma_r(x)}{dx} \quad (3.2)$$

Jak je vidno řešení rovnice (3.1) vede na diferenciální rovnici (3.2), která je závislá na parametru x neboli poloměru. Konkrétní řešení pak bude záviset na již dříve zmíněných okrajových podmínkách pro radiální napětí.

Jelikož osově napětí je kolmé na směr radiální, daný rovnicí rovnováhy elementu, nemá na tuto rovnici vliv, proto je jej v odvození pro zjednodušení vztahů možno zanedbat. Z Hookeova rozšířeného zákona (3.3), (3.4) pak získáme výraz pro tečné a radiální napětí jako funkci poměrných prodloužení v tečném (3.5) a radiálním směru (3.6). Tento obrat je vhodný zejména pro závislost poměrného prodloužení na poloměru x a posuvu $u(x)$. E^* v těchto rovnicích je zpevněným modulem pružnosti popsáným rovnicí (3.7).

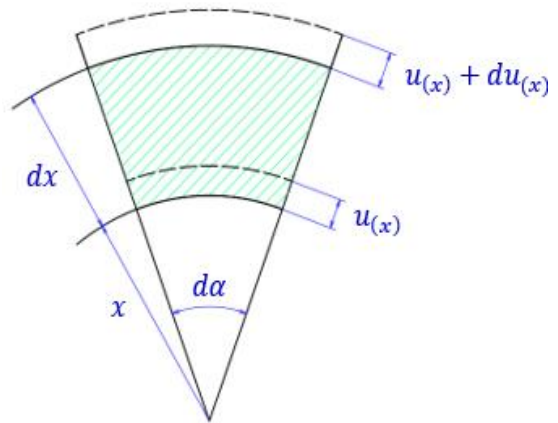
$$\epsilon_t = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_t - \nu \cdot \sigma_r) \quad (3.3)$$

$$\epsilon_r = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_r - \nu \cdot \sigma_t) \quad (3.4)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_t + \nu \cdot \epsilon_r) = E^* \cdot (\epsilon_t + \nu \cdot \epsilon_r) \quad (3.5)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_r + \nu \cdot \epsilon_t) = E^* \cdot (\epsilon_r + \nu \cdot \epsilon_t) \quad (3.6)$$

$$E^* = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (3.7)$$



Radiální prodloužení lze definovat jako změnu posuvu u dle poloměru x (3.8). Poměrné tečné prodloužení je pak poměrnou změnou délky obvodu elementu v závislosti na poloměru x , viz obr. 2.

Obr. 2: Radiální posuvy osově symetrického elementu silnostěnné nádoby

$$\epsilon_r = \frac{dx + \Delta dx - dx}{dx} = \frac{dx + du + u - u - dx}{dx} = \frac{du}{dx} = u' \quad (3.8)$$

$$\epsilon_t = \frac{\Delta o}{o} = \frac{2 \cdot \pi \cdot (u + x) - 2 \cdot \pi \cdot x}{2 \cdot \pi \cdot x} = \frac{u}{x} \quad (3.9)$$

Dosazením výrazů (3.8), (3.9) do vztahů (3.5), (3.6) odvozených z Hookeova zákona, pak dostáváme následující výrazy pro tečné a radiální napětí.

$$\sigma_t = E^* \cdot \left(\frac{u}{x} + v \cdot u' \right) \quad (3.10)$$

$$\sigma_r = E^* \cdot \left(u' + v \cdot \frac{u}{x} \right) \quad (3.11)$$

Derivací (3.10) dle x získáme poslední potřebný výraz pro dosazení do původní rovnice (3.2).

$$\frac{d\sigma_r}{dx} = E^* \cdot \left(u'' + v \cdot \frac{u'}{x} - v \cdot \frac{u}{x^2} \right) \quad (3.12)$$

Dosazením výrazů (3.10), (3.11), (3.12) do rovnice (3.2) získáváme diferenciální rovnici pro posuv, kterou již můžeme algebraicky řešit a dále její výsledky dosadit do ostatních výrazů a tím získat jejich algebraické řešení.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \left(E^* \cdot \left(\frac{u}{x} + v \cdot u' \right) - E^* \cdot \left(u' + v \cdot \frac{u}{x} \right) \right) &= E^* \cdot \left(u'' + v \cdot \frac{u'}{x} - v \cdot \frac{u}{x^2} \right) \\ \frac{1}{x} \left(\frac{u}{x} + v \cdot u' - u' - v \cdot \frac{u}{x} \right) &= u'' + v \cdot \frac{u'}{x} - v \cdot \frac{u}{x^2} \\ u'' + \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} &= 0 \end{aligned}$$

Řešení této rovnice vede na polynom n -tého stupně. Odhad řešení tedy je $u = x^n$.

$$u = x^n \rightarrow u' = x^{n-1} \cdot n \rightarrow u'' = x^{n-2} \cdot n \cdot (n-1)$$

$$x^{n-2} \cdot n \cdot (n-1) + \frac{x^{n-1} \cdot n}{x} - \frac{x^n}{x^2} = 0$$

$$x^{n-2} \cdot (n \cdot (n-1) + n - 1) = 0 \rightarrow n \cdot (n-1) + n - 1 = 0 \rightarrow n^2 - 1 = 0 \rightarrow n = \pm 1$$

Obecným řešením diferenciální rovnice pro posuv u je tedy následující rovnice s konstantami C_1 a C_2 .

$$u(x) = C_1 \cdot x + \frac{C_2}{x}$$

$$u'(x) = C_1 - \frac{C_2}{x^2}$$

Dosazením do rovnic pro napětí (3.10), (3.11) získáváme výrazy závislé pouze na x a na konstantách C_1 a C_2 .

$$\sigma_t = E^* \cdot \left(\frac{u}{x} + v \cdot u' \right) = E^* \cdot \left(C_1 + \frac{C_2}{x^2} + v \cdot \left(C_1 - \frac{C_2}{x^2} \right) \right) = E^* \cdot \left(C_1 \cdot (1+v) + C_2 \cdot \frac{(1-v)}{x^2} \right)$$

$$\sigma_r = E^* \cdot \left(u' + v \cdot \frac{u}{x} \right) = E^* \cdot \left(C_1 - \frac{C_2}{x^2} + v \cdot \left(C_1 + \frac{C_2}{x^2} \right) \right) = E^* \cdot \left(C_1 \cdot (1+v) - C_2 \cdot \frac{(1-v)}{x^2} \right)$$

Vyjádřením konstant C_1 a C_2 lze vztah zjednodušit a upravit do tvaru obsahující následující výrazy, které nahradíme konstantami K a C a tím získáme výsledné vzorce popisující průběh radiálního a tečného napětí v závislosti na konstantách K , C a poloměru x .

$$K = E^* \cdot C_1(1 + \nu)$$

$$C = E^* \cdot C_2 \cdot (1 - \nu)$$

$$\sigma_r = K - \frac{C}{x^2} \quad (3.13)$$

$$\sigma_t = K + \frac{C}{x^2} \quad (3.14)$$

Konstanty lze vypočítat z okrajových podmínek. Na okrajích oblasti se musí radiální napětí rovnat záporné hodnotě vnějšího tlaku, jak bylo zmíněno na začátku kapitoly, což odpovídá dvěma rovnicím pro dvě konstanty.

$$\sigma_r(r_2) = K - \frac{C}{r_2^2} = -p_2$$

$$\sigma_r(r_1) = K - \frac{C}{r_1^2} = -p_1$$

$$\frac{C}{r_1^2} - \frac{C}{r_2^2} = -p_2 + p_1$$

$$K - (p_1 - p_2) \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r_2^2} = -p_2$$

Řešení těchto rovnic vede na následující výrazy, ze kterých je již možné konstanty vypočítat, známe-li rozměry, vnější a vnitřní tlak.

$$C = (p_1 - p_2) \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (3.15)$$

$$K = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (3.16)$$

4 Rozbor stavu napjatosti základních silnostěnných nádob

V této části bude uvedeno několik příkladů průběhů napětí daných silnostěnných nádob a jim příslušné pevnostní podmínky. Redukovaná napětí silnostěnných nádob vyjadřujeme podle konkrétního průběhu hlavních napětí $\sigma_t, \sigma_r, \sigma_o$, která závisí na vstupních parametrech jako jsou rozměry a tlak. Proto i příslušné pevnostní podmínky stanovujeme jako funkce tlaku, které pro nás v teorii nalisovaného spojení mají největší význam.

4.1. Plný Hřídel

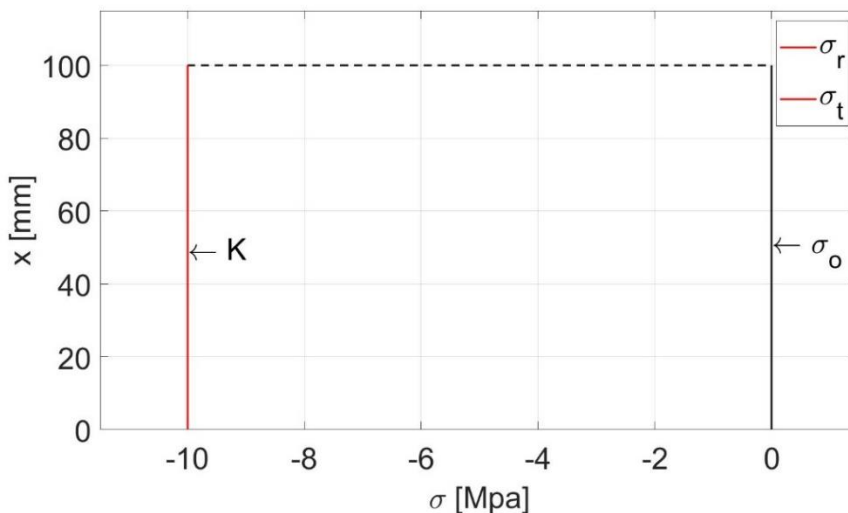
Pro hřídel jsou použity následující hodnoty konstant:

$$r_1 = 0 \quad K = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = -p_2$$
$$\sigma_r = \sigma_t = K = -p_2 \quad C = (p_1 - p_2) \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = 0$$

Plný hřídel má jediný povrch zatížený tlakem p_2 . Jelikož není přítomný další povrch zatížený odlišným tlakem, musí se pravá strana diferenciální rovnice (3.2) rovnat nule, jak je naznačeno v rovnici (4.1).

$$\frac{1}{x} (\sigma_t(x) - \sigma_r(x)) = \frac{d\sigma_r(x)}{dx}; \quad \frac{d\sigma_r(x)}{dx} = 0 \quad (4.1)$$

Jednoduchou úpravou zjistíme, že hodnoty tečného a radiální napětí se tedy rovnají. Na vnějším povrchu hřídele se radiální napětí rovná záporné hodnotě tlaku p_2 . Změna radiálního a tečného napětí je rovna nule v celém průřezu hřídele, viz obr. 3.



Obr. 3: Teoretické průběhy napětí v plném hřídeli zatíženým vnějším tlakem p_2

4.1.1. Pevnostní podmínky

V případě, že předpokládáme hřídel z obr. 3, který má vnější plochou zatíženou tlakem p_2 a který není zatížený osovým napětím, pak platí:

$$\sigma_1 = \sigma_o = 0, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_r = \sigma_t = K = -p_2$$

Teorie pevnosti pro houževnaté materiály:

4.1.1. a) Trescova hypotéza - τ_{max}

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_o - K = p_2 \leq \sigma_d$$

4.1.1. b) Teorie pevnosti energetická – HMH

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

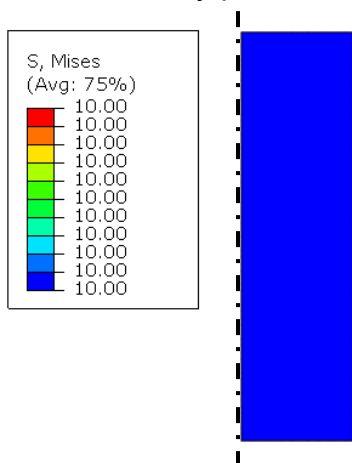
$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_o - \sigma_r(r_2))^2 + (\sigma_r(r_2) - \sigma_t(r_2))^2 + (\sigma_t(r_2) - \sigma_o)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2 \cdot p_2^2}$$

$$\sigma_{red} = p_2 \leq \sigma_d$$

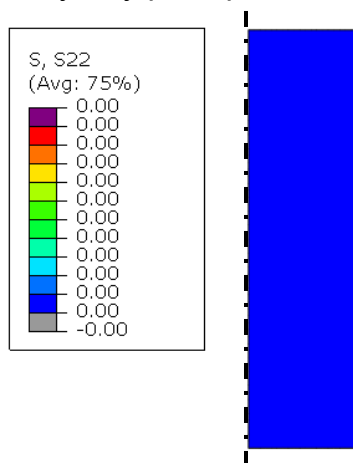
Vidíme, že pro obě teorie má výsledná pevnostní podmínka stejný tvar. Stanovený tlak p_2 v nalisování tedy nesmí přesáhnout hodnotu dovoleného napětí houževnatého hřídele.

4.1.2. Výsledky simulace v programu Abaqus

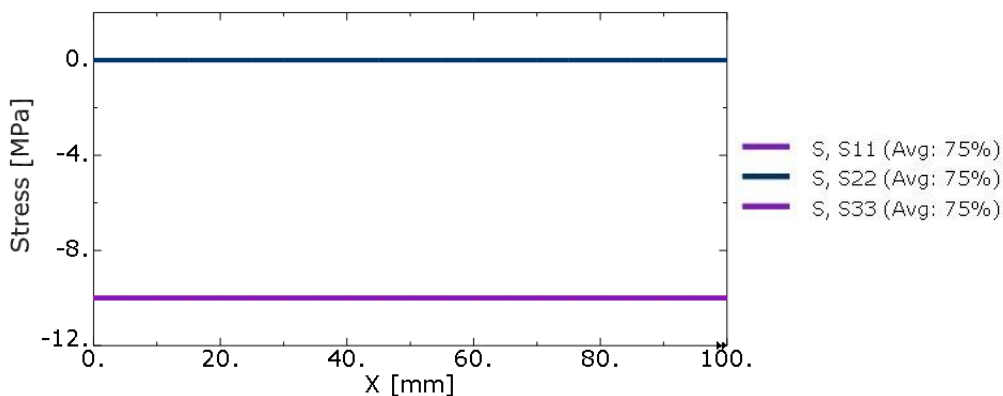
Simulace uvedené v kapitole 4 jsou modelovány tak, aby tělesa byla zatěžována po délce rovnoměrně a nevznikala v nich nežádoucí napětí. Jde tedy o ideální případ. Hodnoty napětí jsou odečteny ve střední části hřídele či náboje, tak aby nebyly ovlivněny okrajovými podmínkami a změnou napětí v koncových částech. Pro tvorbu simulace byly zvoleny shodné hodnoty parametrů jako pro analytický postup.



Obr. 4: Mapa Von Misesova napětí [MPa] v plném volném hřídeli, zatíženým vnějším tlakem, zjištěná simulací MKP



Obr. 5: Mapa osového napětí [MPa] v plném volném hřídeli, zatíženým vnějším tlakem, zjištěná simulací MKP



Obr. 6: Grafy průběhů napětí v závislosti na poloměru v plném volném hřídeli, zatíženým vnějším tlakem, zjištěných simulací MKP

Na napěťové mapě z obr. 4 vidíme, že průběh Misesova napětí je konstantní skrze celý hřídel. Hodnoty radiálního a tečného napětí, které lze vyčíst z grafu na obr. 6 pod názvy S11, resp. S33, jsou též nezávislé na poloměru, rovny hodnotě $\sigma = 10 \text{ MPa}$ a tedy ve shodě s analyticky zjištěnými hodnotami.

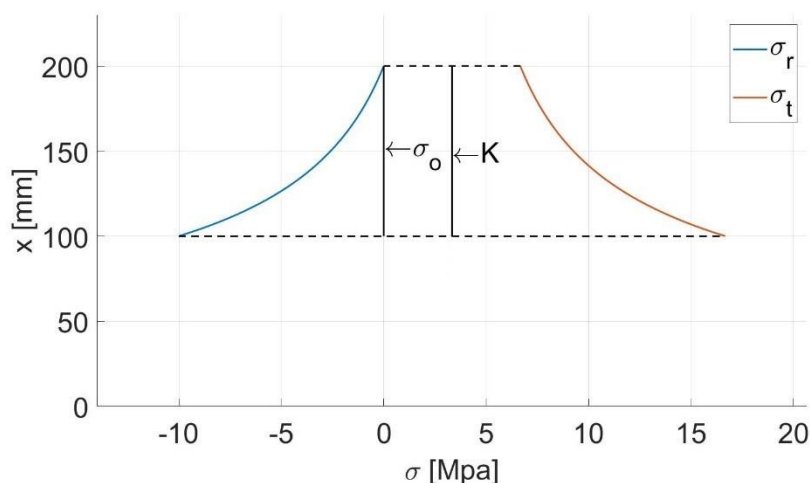
Zjištěné hodnoty osového napětí jsou menší řádu 10^{-13} , což odpovídá numerické chybě. Jinými slovy, pro tento případ je osově napětí rovno nule v celém hřídeli.

4.2. Silnostěnná nádoba s vnitřním přetlakem

Příkladem může být nádoba uchovávající stlačený plyn, nebo náboj na hřídeli rozpínaný v důsledku nalisování.

V tomto případě se již tlak na vnějším a vnitřním povrchu liší, proto i napětí radiální na těchto plochách je odlišné. Napětí se tedy postupně mění dle vzorců odvozených teorií silnostěnných nádob, viz obr. 7.

$$p_1 > p_2 \rightarrow C > 0 \rightarrow \sigma_t(x) > \sigma_r(x)$$



Obr. 7: Teoretické průběhy napětí v tlakové nádobě s vnitřním přetlakem, s nulovým osovým napětím

Běžným případem je uzavřená nádoba, kde osové napětí je rovno konstantě K . Toto nastane, je-li nádoba vnitřním přetlakem roztahována ve směru osy symetrie. Stanovení osového napětí je popsáno rovnicí (4.2). Osové napětí může být též nulové u otevřené nádoby, kdy osovou sílu nepřenáší plášť válcové nádoby.

$$\sigma_o = \frac{p_1 \cdot \pi \cdot r_1^2}{\pi \cdot (r_2^2 - r_1^2)} = \frac{p_1 \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = K \quad (4.2)$$

Na obr. 7 je vidět, že napětí nabývají svých maxim absolutních hodnot na vnitřním poloměru r_1 . Naopak na poloměru r_2 je radiální napětí nulové, tedy i tlak p_2 je pro náš příklad nulový. Pomocí těchto hodnot stanovíme hlavní napětí a následně pevnostní podmínky.

$$\begin{aligned} \sigma_t(r_1) &= 2 \cdot K + p_1, & \sigma_r(r_1) &= -p_1 \\ \sigma_1 &= \sigma_t(r_1), & \sigma_2 &= \sigma_o, & \sigma_3 &= \sigma_r(r_1) \end{aligned}$$

4.2.1. Pevnostní podmínky

4.2.1. a) Trescova hypotéza - τ_{max}

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t(r_1) - \sigma_r(r_1) = 2 \cdot K + p_1 - (-p_1) = 2 \cdot (p_1 + K)$$

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t(r_1) - \sigma_r(r_1) = K + \frac{C}{r_1^2} - \left(K - \frac{C}{r_1^2} \right) = 2 \cdot \frac{C}{r_1^2} = 2 \cdot (p_1 - p_2) \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r_1^2}$$

$$\sigma_{red} = 2 \cdot (p_1 + K) = 2 \cdot p_1 \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \leq \sigma_d$$

4.2.1. b) Teorie pevnosti energetická – HHM

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_t(r_1) - \sigma_o)^2 + (\sigma_o - \sigma_r(r_1))^2 + (\sigma_r(r_1) - \sigma_t(r_1))^2} \leq \sigma_d$$

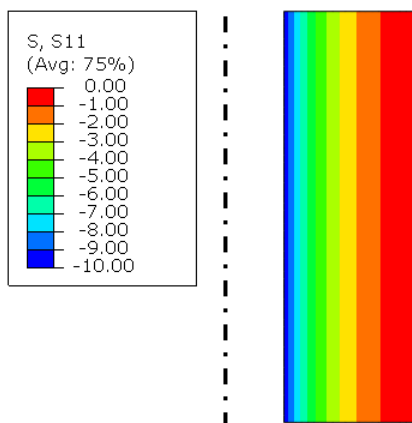
Pro silnostěnnou nádobu bez osového napětí platí vztah (4.3). Jeli osové napětí rovno konstantě K , pak platí rovnice (4.4).

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(2 \cdot K + p_1)^2 + (p_1)^2 + (-2 \cdot (p_2 + K))^2} \leq \sigma_d \quad (4.3)$$

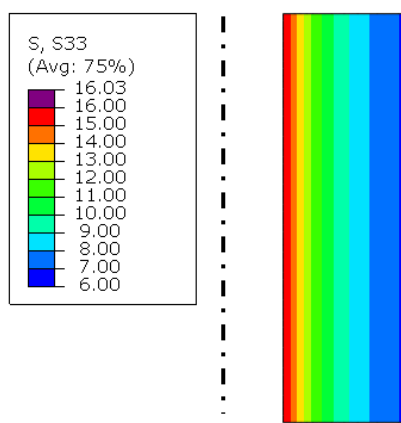
$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{6 \cdot (K + p_1)^2} \leq \sigma_d \quad (4.4)$$

4.2.2. Výsledky simulace v programu Abaqus

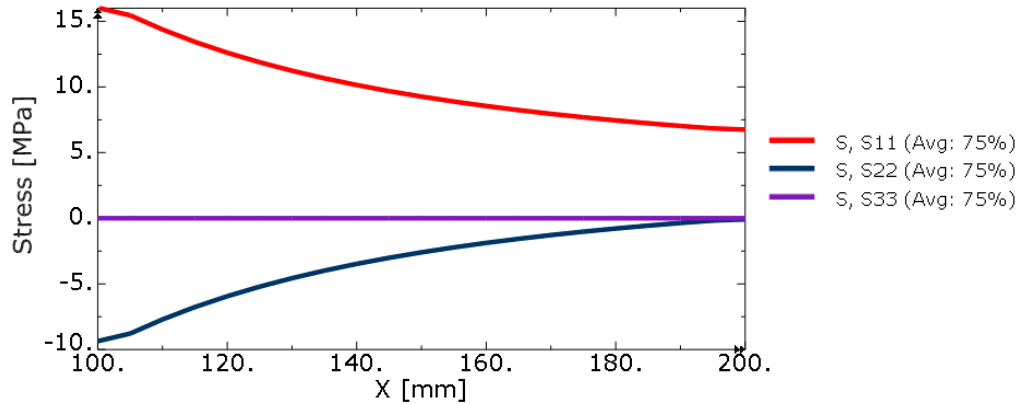
Obr. 8 a 9. popisují hodnoty radiálního, resp. tečného napětí v námi řešené silnostěnné nádobě zatížené tlakem 10 Mpa na vnitřní ploše.



Obr. 8: Mapa radiálního napětí [MPa] v silnostěnné nádobě, zatížené vnitřním přetlakem, zjištěná simulací MKP



Obr. 9: Mapa tečného napětí [MPa] v silnostěnné nádobě, zatížené vnitřním přetlakem, zjištěná simulací MKP



Obr. 10: Grafy průběhů tečného a radiálního napětí v závislosti na poloměru v silnostěnné nádobě, zatížené vnitřním přetlakem, zjištěných simulací MKP

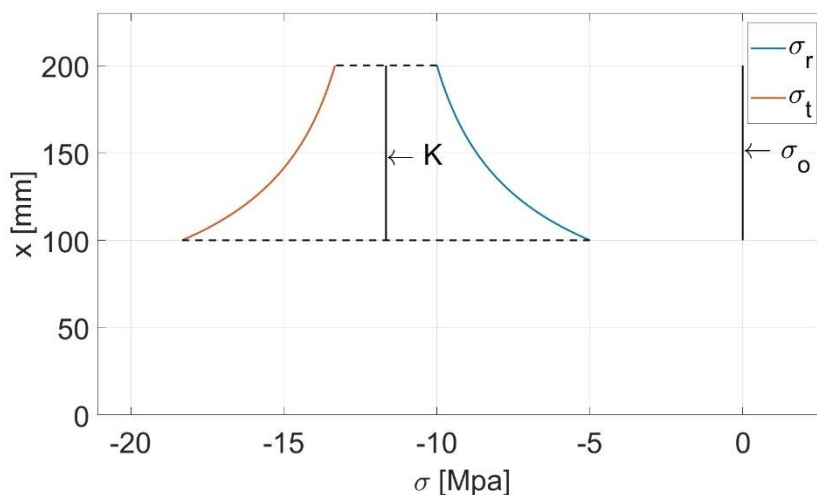
Provedeme-li inverzi grafů z obr. 10, získáme grafy průběhů napětí shodných s těmi, které byl zjištěny analytickou cestou z obr. 7. Drobná neshoda grafů na vnitřní okraji je způsobena vlastností zobrazení v MKP. Bližšími hodnotami se budeme zabývat až v následujících kapitolách, ve kterých budeme srovnávat hodnoty napětí i s ohledem na smyková napětí.

4.3. Silnostěnná nádoba s vnějším přetlakem

Tento případ může nastat pro rotačně symetrickou nádobu, na které je na shodné délce nalisována další silnostěnná nádoba, nebo v níž bude vytvářen podtlak, či pro trubku ponořenou do nalakovaného média.

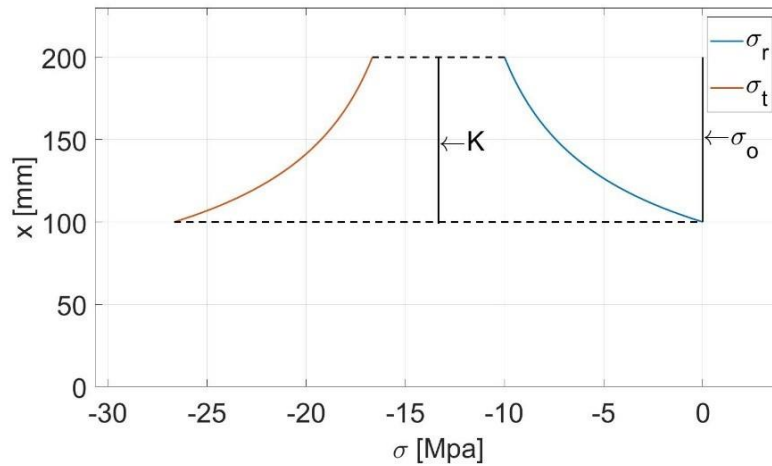
$$p_1 < p_2 \rightarrow C < 0 \rightarrow \sigma_t(x) < \sigma_r(x)$$

Průběh napětí pro nádobu obsahující vnější přetlak $p_1 < p_2$ by mohl vypadat dle obr. 11.



Obr. 11: Teoretické průběhy napětí v silnostěnné nádobě s vnějším přetlakem $\Delta p_{12} = 5 \text{ Mpa}$

Pro vnější přetlak a nulový vnitřní tlak představující vakuum se hodnota radiálního napětí bude blížit nule, viz obr. 12. Taková kompozice představuje mezní případ.



Obr. 12: Teoretické průběhy v silnostěnné nádobě s vnějším přetlakem, nulovým vnitřním tlakem

Osové napětí záleží na uspořádání konstrukce, pro ilustraci a simulace byla zatím volena nulová hodnota osového napětí.

4.3.1. Pevnostní podmínky

Pevnostní podmínky rozebereme pouze pro druhý případ zatížení z obr. 12.

$$p_1 = 0 < p_2$$

$$\sigma_r(r_1) = p_1, \quad \sigma_t(r_1) = 2 \cdot K$$

$$\sigma_1 = \sigma_r(r_1) = \sigma_2 = \sigma_o = 0, \quad \sigma_3 = \sigma_t(r_1)$$

Teorie pro houževnaté materiály:

4.3.1. a) Trescova hypotéza – τ_{max}

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 = -2 \cdot K \leq \sigma_d$$

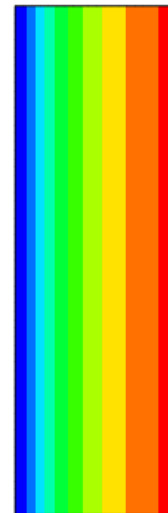
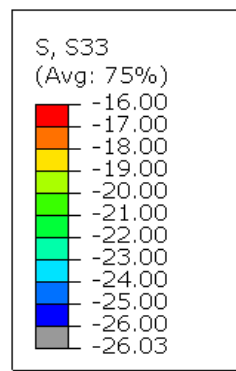
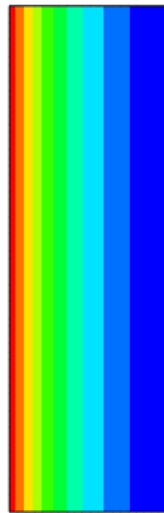
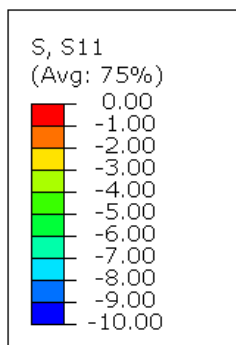
4.3.1. b) Teorie pevnosti energetická – HMH

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{4 \cdot K^2} \leq \sigma_d$$

4.3.2. Výsledky simulace v programu Abaqus

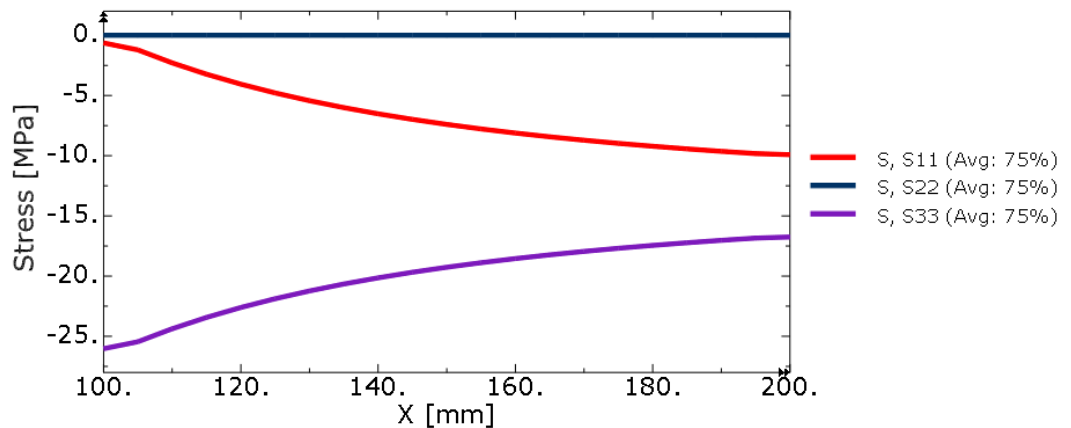
Obr. 13 a 14. popisují hodnoty radiálního, resp. tečného napětí v námi řešené silnostěnné nádobě zatížené tlakem 10 Mpa na vnější ploše.



Obr. 13: Mapa radiálního napětí [MPa] v silnostěnné nádobě, zatížené vnějším přetlakem, zjištěná simulací MKP

Obr. 14: Mapa tečného napětí [MPa] v silnostěnné nádobě, zatížené vnějším přetlakem, zjištěná simulací MKP

Grafy průběhů napětí na obr. 13 a 14 jsou opět ve shodě provedeme-li inverzi. Analytické řešení se tedy přibližně shoduje s řešením pomocí metody konečných prvků pro tento případ.

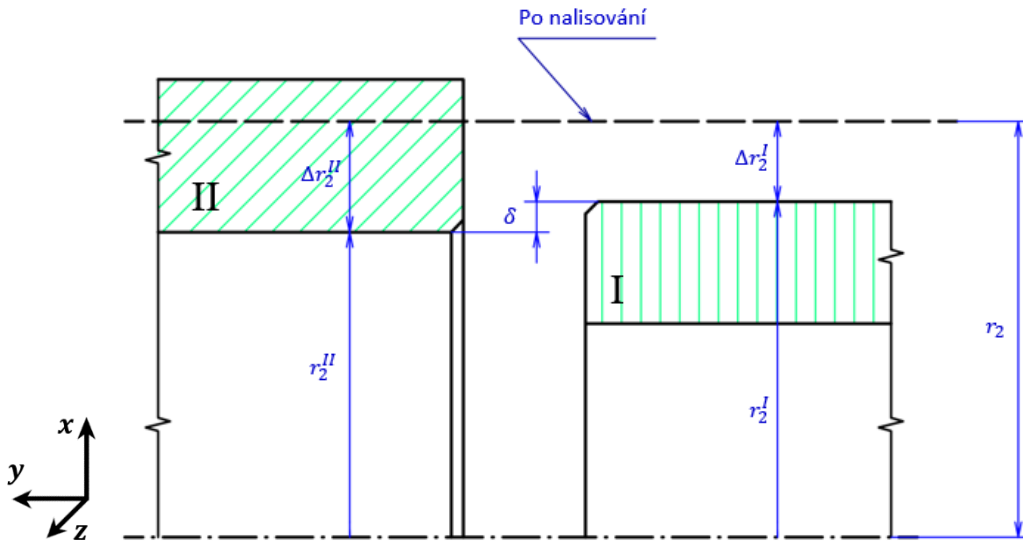


Obr. 15: Grafy průběhů tečného a radiálního napětí v závislosti na poloměru v silnostěnné nádobě, zatížené vnějším přetlakem, zjištěné simulací MKP

5 Odvození přesahu

Přesah δ je důležitá hodnota, kterou je třeba stanovit pro získání určité únosnosti nalisovaného spojení. V důsledku uložení s přesahem (například náboje na hřídeli) vzniká ve spoji tlak, díky kterému vzniká i tření, které realizuje přenos kroutícího momentu, nebo jiného silového účinku z náboje na hřídel.

Pro následující odvození vycházíme z [2] – 3.1.2 Tlustostěnné nádoby nalisované.



Obr. 16: Schéma soustavy silnostěnných nádob před nalisováním

Předpokládáme dle obr. 16, že v ploše spoje je radiální napětí na součásti I. rovno radiálnímu napětí na součásti II., neboli záporně vzaté hodnotě tlaku p_2 . Po nalisování se poloměr r_1 změní o hodnotu Δr_2^I , poloměr r_2 o hodnotu Δr_2^{II} .

$$\sigma_r^I = \sigma_r^{II} = -p_2 \quad \sigma_o^I = \sigma_o^{II} = 0$$

$$\delta = \Delta r_2^{II} - \Delta r_2^I$$

$$\frac{\delta}{r_2} = \frac{\Delta r_2^{II}}{r_2} - \frac{\Delta r_2^I}{r_2}$$

U kovových materiálů se poloměry v nalisování r_2 , r_2^I , r_1^{II} liší až na třetím nebo čtvrtém významovém místě, tudíž se téměř rovnají. Díky tomu lze poměry na pravé straně rovnice převést s velmi malou chybou na poměrná tečná prodloužení.

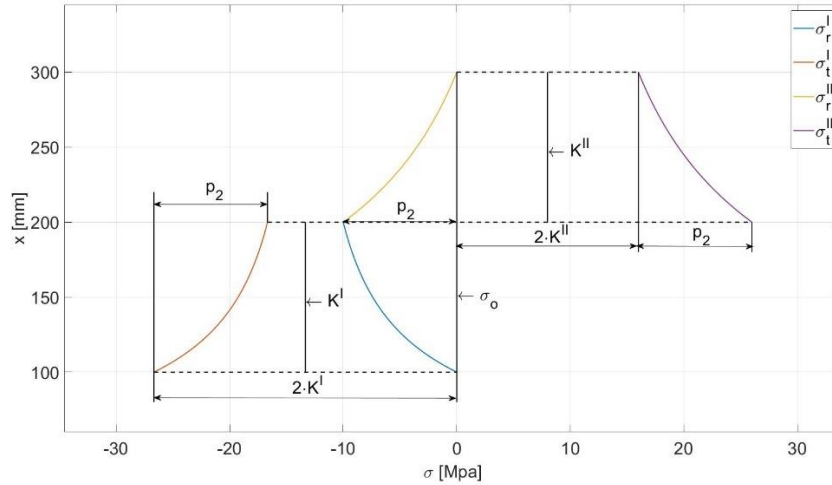
$$\frac{\delta}{r_2} = \epsilon_t^{II}(r_2) - \epsilon_t^I(r_2)$$

Opět pomocí Hookeova rozšířeného zákona můžeme vyjádřit poměrná prodloužení jako funkce napětí. Při shodných materiálových elastických konstantách obou nádob a shodném osovém napětí lze vztahy dále upravit. Tímto se ve vzorci zbavíme poměrných

prodloužení a získáme vztah, který je funkcí pouze radiálního a tečného napětí, které dle postupu v kapitole 3 jsou funkcí rozměrů a vnějšího zatížení ve formě konstant K a C .

$$\epsilon_t^I = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_t^I - \nu \cdot (\sigma_r^I + \sigma_o^I)) \quad \epsilon_t^{II} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_t^{II} - \nu \cdot (\sigma_r^{II} + \sigma_o^{II}))$$

$$\frac{\delta}{r_2} = \frac{1}{E} \cdot ((\sigma_t^{II}(r_2) + \nu \cdot (p_2)) - (\sigma_t^I(r_2) + \nu \cdot (p_2))) = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_t^{II}(r_2) - \sigma_t^I(r_2))$$



Obr. 17: Teoretické průběhu napětí v soustavě uložené s přesahem

Celý výraz tedy lze zjednodušit pomocí konstant K^I a K^{II} , jak je naznačeno na obr č. 17.

$$\delta = \frac{r_2}{E} (\sigma_t^{II}(r_2) - \sigma_t^I(r_2)) = \frac{2 \cdot r_2}{E} (K^{II} - K^I)$$

$$\delta = \frac{2 \cdot r_2}{E} (K^{II} - K^I) \quad (5.1)$$

Rovnice (5.1) platí nezávisle, ať se jedná o vnitřní nebo vnější přetlak. Pro nenulovou hodnotu osových napětí a shodné materiálové konstanty obou nádob pak platí rovnice (5.2).

$$\delta = \frac{r_2}{E} (\sigma_t^{II}(r_2) - \sigma_t^I(r_2) - \nu \cdot (\sigma_o^{II} - \sigma_o^I)) = \frac{2 \cdot r_2}{E} (K^{II} - K^I - \nu \cdot (\sigma_o^{II} - \sigma_o^I))$$

$$\delta = \frac{2 \cdot r_2}{E} (K^{II} - K^I - \nu \cdot (\sigma_o^{II} - \sigma_o^I)) \quad (5.2)$$

5.1. Kontrola pomocí metody konečných prvků – Abaqus

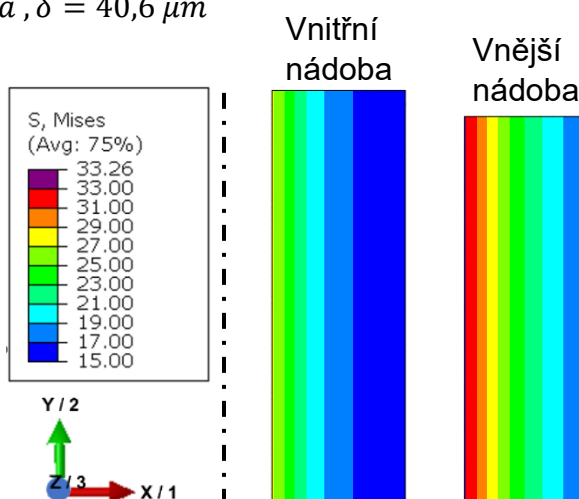
Nyní si ukážeme, jaký má vliv nalisování na napjatost silnostěnných nádob, řešíme-li úlohu pomocí metody konečných prvků.

Simulace uvedené v této kapitole jsou modelovány tak, aby nedocházelo k ovlivnění napjatosti koncem a začátkem nalisovaného spoje, případně různou délkou ovlivněných ploch. Tedy délka plochy nalisovaného spoje, délka plochy zatížené tlakem a délky silnostěnných nádob jsou shodné. Tento postup, nebude-li uvedeno jinak, budeme uplatňovat i pro další výpočty v následujících kapitolách.

$$\begin{aligned} r_2 = 100 \text{ mm}, r_3 = 200 \text{ mm}, r_4 = 300 \text{ mm} \\ p_1 = 0 \text{ MPa}, p_2 = 0 \text{ MPa}, \delta = 40,6 \text{ } \mu\text{m} \end{aligned} \quad (5.3)$$

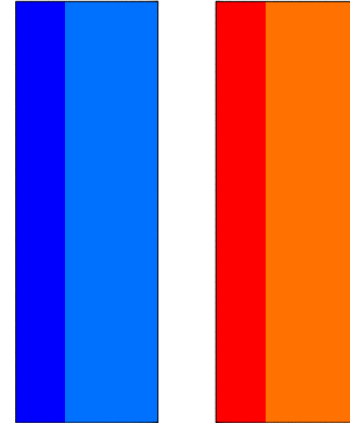
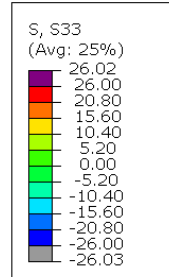
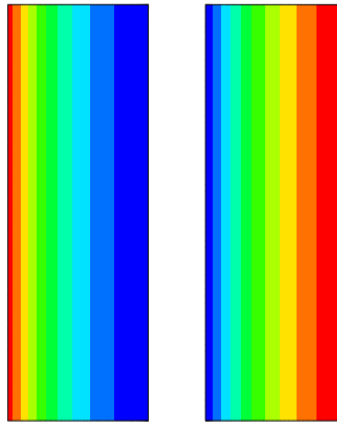
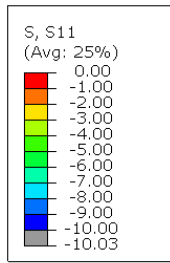
Pro tvorbu simulace byly zvoleny shodné hodnoty parametrů jako pro analytický postup v první části této kapitoly. Viz vztahy (5.3).

Úloha je osově symetrická, a tedy modelovaná jako 2D axisymetrická pro jednodušší výpočet. Okrajovou podmínkou byla zvolena symetrie dle spodní plochy – ysymmetry, která zabezpečuje nulový posuv této plochy ve směru osy **Y** a nulové rotace bodů této plochy kolem os **X** a **Z**. Jinými slovy byly odebrány spodní ploše stupně volnosti odpovídající posuvům v ose **Y** a rotacím kolem osy **X** a **Z**. Tato orientace je taktéž vyobrazena na obr. 16 a 18.



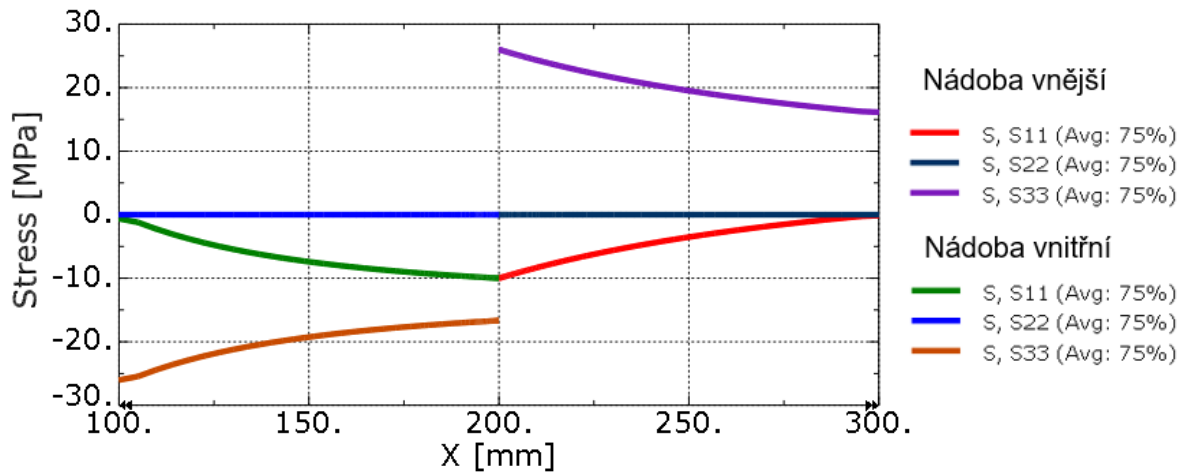
Obr. 18: Mapa Von Misesova napětí [MPa] v soustavě silnostěnných nádob zjištěná simulací MKP

Je vidno, že největší hodnoty napětí lze nalézt na vnitřních poloměrech příslušných nádob, tak jako tomu je na obr. 18. Souhlasně s grafy na obr. 17 je maximální hodnota redukovaného napětí vnější nádoby větší nežli hodnota redukovaného napětí nádoby vnitřní.



Obr. 19: Mapa Von Misesova napětí [MPa] v soustavě silnostěnných nádob zjištěná simulací MKP

Obr. 20: Mapa Von Misesova napětí [MPa] v soustavě silnostěnných nádob zjištěná simulací MKP



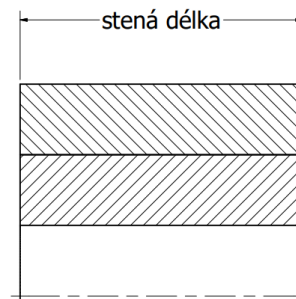
Obr. 21: Grafy průběhu napětí v soustavě nalisovaných silnostěnných nádob zjištěných simulací MKP

Hodnoty napětí vypočtené pomocí teorie tlustostěnných nádob a pomocí metody konečných prvků skrze program Abaqus se s malou odchylkou shodují, a tedy pravděpodobně odpovídají skutečnému průběhu napětí.

6 Rozbor průběhu napětí nalisovaných silnostěnných nádob

Nejprve uvedeme jeden z předpokladů platnosti dříve odvozených vztahů. Délky nádob jsou stejné, napětí jsou měřena uprostřed. Vliv okrajů uložení neuvažujeme. Viz obr. 22.

Osové napětí v konstrukci může být nulové, nebo různé od nuly. Například pro náboj tvořící ozubené kolo se šikmými zuby je tato hodnota běžně nenulová z důvodu přenášení axiální síly hřídelem do ložisek. Nyní se však budeme věnovat případům s nulovým osovým napětím, pro která platí rovnice pro přesah (5.1).

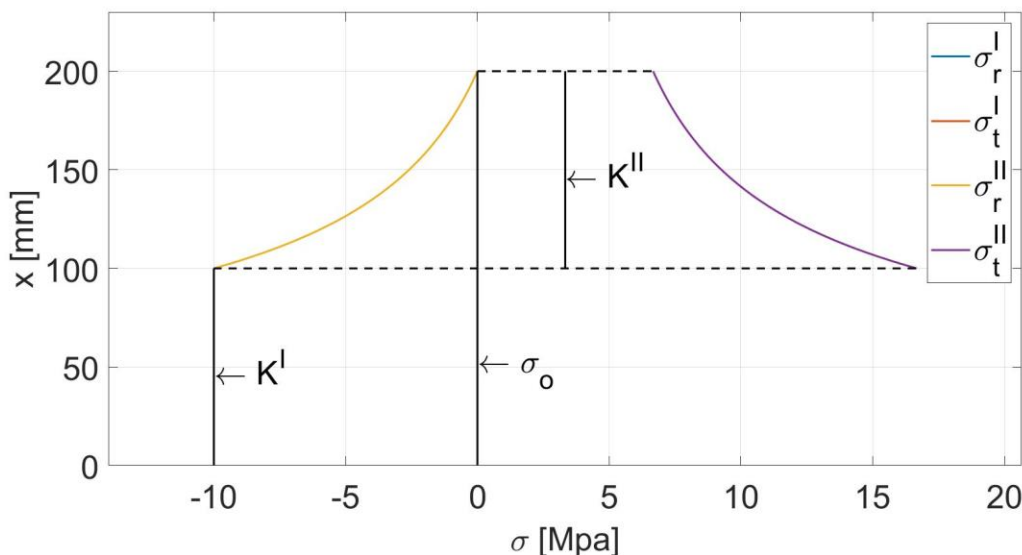


Obr. 22: Délka silnostěnných nádob v kapitole 6

6.1. Soustava HN - Náboj nalisovaný na hřídeli

Toto je velmi běžný příklad ve strojařské praxi. V důsledku nalisování s přesahem vznikne spojení umožňující přenesení silových účinků z náboje na hřídel a opačně.

U klasických nalisovaných spojů je hřídel v kontaktu nalisování dominantně stlačována. Má-li vnitřní dutinu, pak konkrétní stav napjatostí hřídele závisí na vnitřním tlaku. Jako ukázka byla zvolena soustava hřídel-náboj bez zatížení a s kontaktním tlakem v nalisování 10 MPa , kterému odpovídá přesah $12,7 \mu\text{m}$. Grafy na obr. 23 popisují průběhy napětí. Radiální a tečné napětí v plném hřídeli jsou shodné s konstantou K^I . Platí tedy vztahy (6.1).



Obr. 23: Teoretické průběhy napětí v soustavě HN – náboj nalisovaný na hřídeli

$$\sigma_r^I(x) = \sigma_t^I(x) = K^I = -p_2 \quad (6.1)$$

První hlavním napětím pro hřídel je napětí osově, přičemž hodnoty zbylých hlavních napětí jsou rovny záporné hodnotě tlaku p_2 v nalisované ploše. Tento případ je shodný s hřídelem, zatíženým vnějším tlakem, probraným v kapitole 4.1, kde byly stanoveny i pevnostní podmínky.

Největší hodnoty napětí v náboji nalezneme přímo v kontaktní ploše nalisovaného spoje. Hlavní hodnoty napětí tedy stanovujeme pro poloměr r_2 . Hodnota radiálního napětí pro poloměr r_2 je rovna záporné hodnotě tlaku p_2 a je tedy třetím hlavním napětím. Zbylá hlavní napětí jsou popsána vztahy (6.2). Dále se tento případ shoduje se silnostěnnou nádobou s vnitřním přetlakem, které byla již probrána v kapitole 4.2, kde byly taktéž stanoveny pevnostní podmínky.

$$\sigma_1 = \sigma_t^{II} \quad \sigma_2 = \sigma_o = 0 \quad \sigma_3 = \sigma_r^{II} \quad (6.2)$$

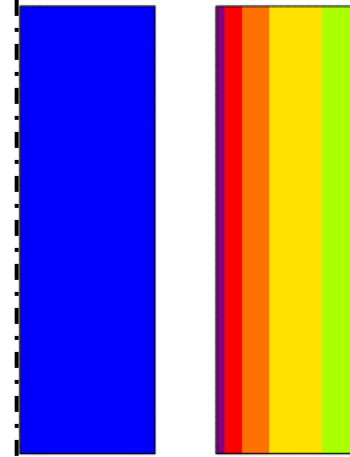
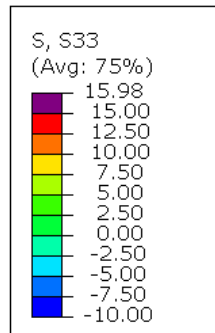
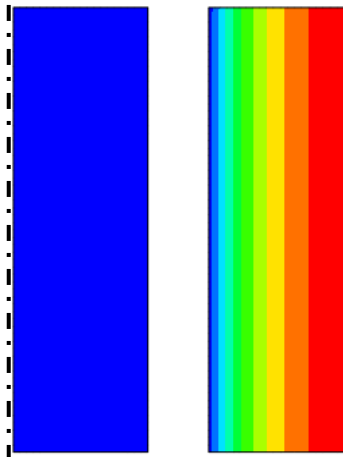
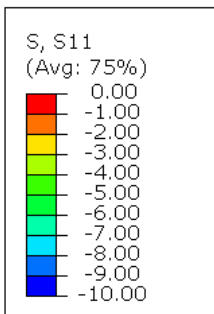
$$r_2 = 100 \text{ mm}, r_3 = 200 \text{ mm}, p_1 = 0 \text{ MPa}, p_3 = 0 \text{ MPa}, \delta = 12,7 \mu\text{m} \quad (6.3)$$

Pro námi zvolené parametry použité v grafu na obr. 23, popsanych rovnicí (6.3) jsou hodnoty hlavních napětí v ploše nalisování pro náboj následující:

$$\sigma_1 = \sigma_t^{II} = 16.67 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = \sigma_o = 0 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = \sigma_r^{II} = -10 \text{ MPa}$$

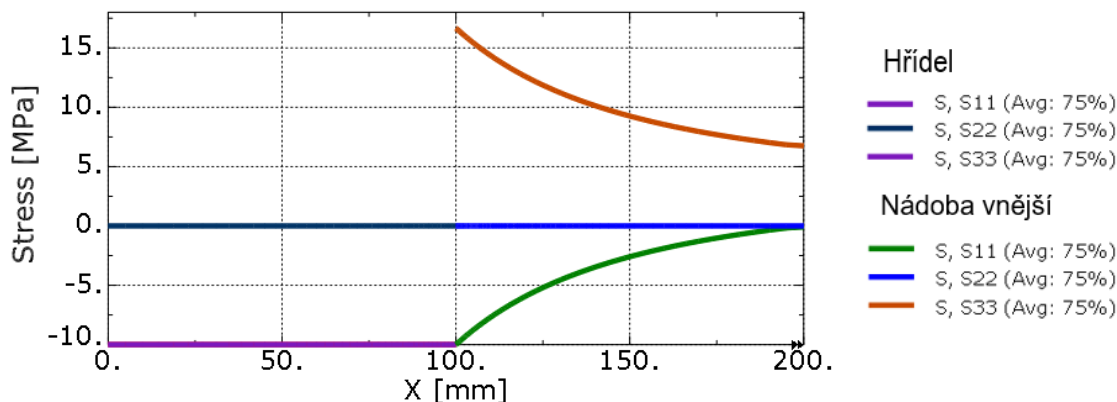
6.1.1. Výsledky simulace v programu Abaqus

Na Obr. 24 a 25 je vyobrazeno radiální, resp. tečné napětí. Hřídel je zatížen kontaktním tlakem $p_2 = 10 \text{ MPa}$ jenž je důsledkem přesahu $\delta = 12,7 \mu\text{m}$. Náboj svým zatížením pak odpovídá silnostěnné nádobě rozebrané v kapitole 4.2.



Obr. 24: Mapa radiálního napětí [MPa] v soustavě HN zjištěná simulací MKP

Obr. 25: Mapa tečného napětí [MPa] v soustavě HN zjištěná simulací MKP



Obr. 26: Grafy průběhu napětí v soustavě HN zjištěných simulací MKP

Polytropy popisující průběh napětí na náboji odpovídají teoreticky získaným. Hodnoty maximálního a minimálního napětí jsou

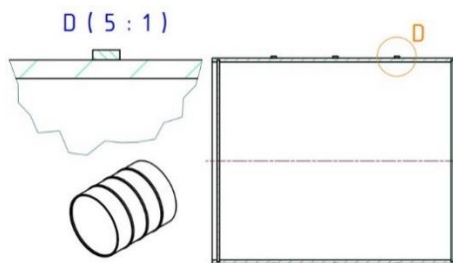
$$\sigma_1 = \sigma_{max} = 16.65 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = \sigma_{min} = -9.99 \text{ MPa}$$

Porovnáním s hodnotami teoretickými byla zjištěna chyba 0,1 %. Vyšší přesnosti lze dosáhnout úpravou modelu MKP, není však zaručeno, že dojde k větší shodě hodnot.

6.2. Soustava s vnitřní dutinou, bez vnějšího zatížení a s přesahem

Takovouto soustavou může být tlaková nádoba s dvojitým pláštěm před naplněním plynem. Jako příklad si můžeme představit sud s čely. Vnější nádobu představuje výztuha nalisovaná na plášti sudu, viz obr. 27.

V této kompozici bude vnitřní součást stlačována. Naproti tomu vnější součást bude rozpínána. Tlak p_2 vypočteme z rovnice pro přesah (5.1).



Obr. 27: Sud s čely a vnějším opásáním

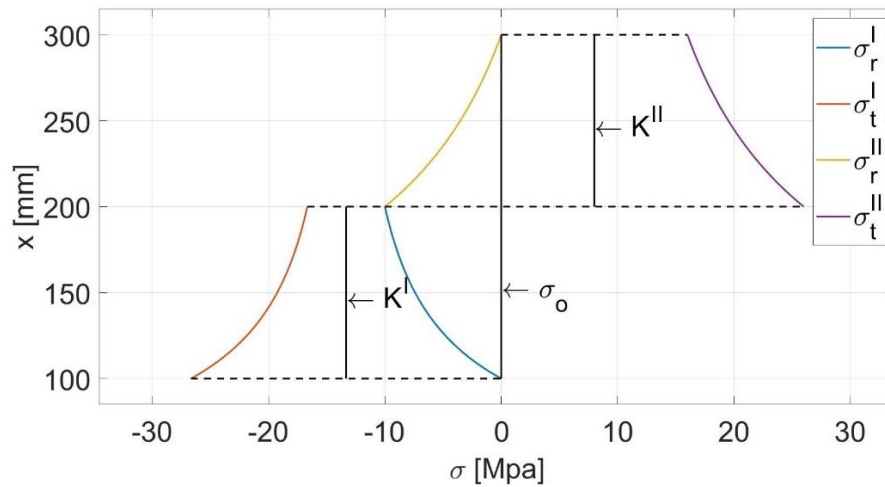
$$p_1 = p_3 = 0 \quad \delta = \frac{2 \cdot r_2}{E} (K^{II} - K^I) = \frac{2 \cdot r_2}{E} \left(\frac{p_2 \cdot r_2^2 - p_3 \cdot r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} - \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right)$$

$$\frac{\delta \cdot E}{2 \cdot r_2} = p_2 \cdot r_2^2 \left(\frac{1}{r_3^2 - r_2^2} + \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \right) \rightarrow p_2 = \frac{\delta \cdot E}{2 \cdot r_2^3} \cdot \frac{(r_3^2 - r_2^2) \cdot (r_2^2 - r_1^2)}{r_3^2 - r_1^2}$$

Jeli však přítomné osově napětí, pak tlak p_2 lze vypočítat ze vztahu (5.2). Dosazením konstant získáme následující vztah pro výpočet tlaku p_2 .

$$p_2 = \left(\frac{\delta \cdot E}{2 \cdot r_2^3} + \nu \cdot (\sigma_o^{II} - \sigma_o^I) \right) \cdot \frac{(r_3^2 - r_2^2) \cdot (r_2^2 - r_1^2)}{r_3^2 - r_1^2}$$

Pro tento příklad byl zvolen přesah $\delta = 40,6 \mu\text{m}$ a jemu odpovídající tlak $p_2 = 10 \text{ MPa}$.



Obr. 28: Teoretické průběhy napětí v soustavě s vnitřní dutinou a přesahem, bez vnějšího zatížení

Průběh napětí pro silnostěnnou nádobu s parametry popsány v rovnici (6.4) je zobrazen grafy na obr. 28.

$$\begin{aligned} r_1 &= 100 \text{ mm}, r_2 = 100 \text{ mm}, r_3 = 200 \text{ mm} \\ p_1 &= 0 \text{ MPa}, p_3 = 0 \text{ MPa}, \delta = 40,6 \mu\text{m} \end{aligned} \quad (6.4)$$

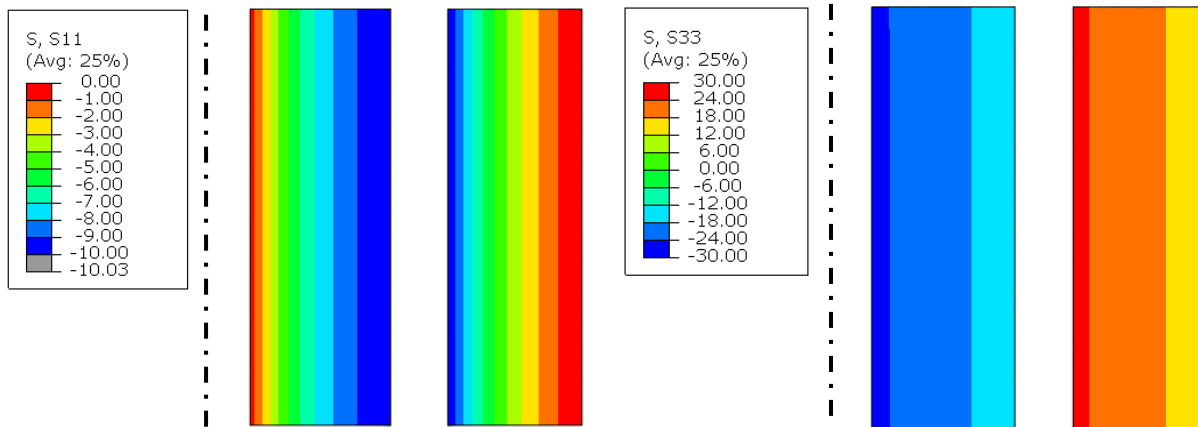
Hodnoty příslušných hlavních napětí pro vnitřní nádobu, resp. vnější nádobu jsou popsány v rovnici (6.5), resp. v rovnici (6.6).

$$\sigma_1 = \sigma_r^{II} = 0 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = \sigma_o = 0 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = \sigma_t^{II} = -26,67 \text{ MPa} \quad (6.5)$$

$$\sigma_1 = \sigma_t^I = 26 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = \sigma_o = 0 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = \sigma_r^I = -10 \text{ MPa} \quad (6.6)$$

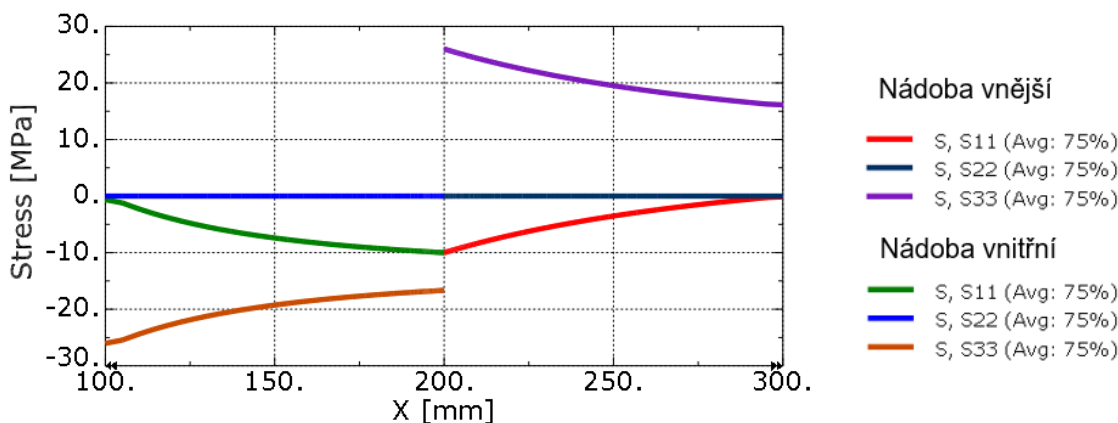
6.2.1. Výsledky simulace v programu Abaqus

Simulace je opět vypočtena pro parametry dané rovnicí (6.4). Průběhy radiálního napětí, resp. tečného jsou vyobrazeny na obr. 29, resp. obr. 30.



Obr. 29: Mapa radiálního napětí [MPa] v soustavě s vnitřní dutinou, s přesahem, bez vnějšího zatížení, zjištěná simulací MKP

Obr. 30: Mapa tečného napětí [MPa] v soustavě s vnitřní dutinou, s přesahem, bez vnějšího zatížení, zjištěná simulací MKP



Obr. 31: Grafy průběhu napětí v soustavě s vnitřní dutinou a přesahem, bez vnějšího zatížení, zjištěných simulací MKP

Polytropy popisující průběh napětí na obou silnostěnných nádobách odpovídají teoreticky získaným. Mezní hodnoty napětí příslušící vnější nádobě jsou

$$\sigma_1 = \sigma_{max} = 25,99 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = \sigma_{min} = -9,99 \text{ MPa}$$

Porovnáním s hodnotami teoretickými z rovnice (6.6) byla zjištěna chyba 0,1 %. Vyšší přesnosti lze dosáhnout úpravou modelu MKP, není však zaručeno, že dojde k větší shodě hodnot.

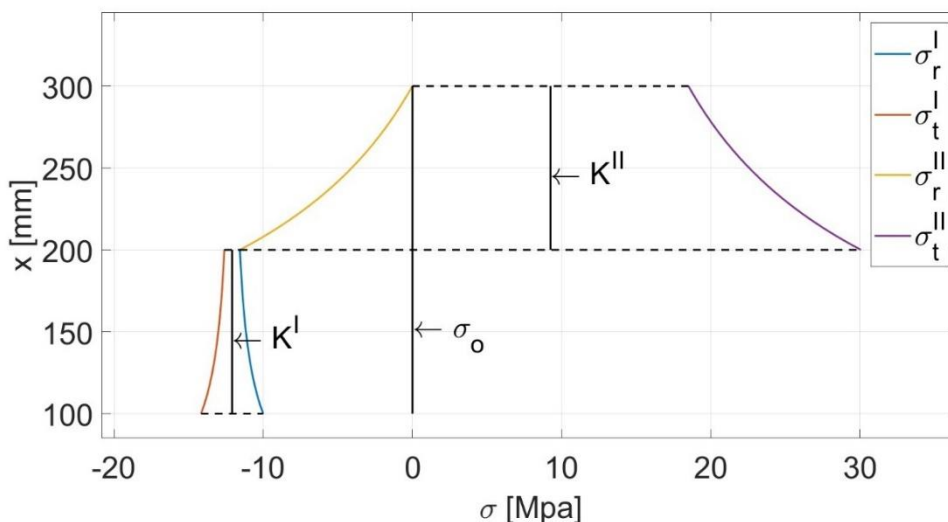
6.3. Soustava s vnitřní dutinou, s vnitřním přetlakem a přesahem

Tento stav může nastat, naplníme-li nádobu uvedenou v předchozím příkladu na tlak p_1 , který je již nenulový. Tato hodnota pak může mít zásadní vliv na velikost redukovaného napětí, které může nabývat větší hodnoty na vnější, nebo vnitřní součásti.

$$p_1 > p_2 > p_3 \rightarrow C^I > 0, C^{II} > 0 \rightarrow \sigma_r^I(x) < \sigma_t^I(x), \sigma_r^{II}(x) < \sigma_t^{II}(x)$$

Pro následující příklad byla zvolena hodnota vnitřního tlaku $p_1 = 10 \text{ MPa}$ vlivem této změny se i zvýší kontaktní tlak p_2 . Ten nyní spočteme dle vzorce (6.7), který vychází z rovnice pro přesah (5.1). Průběhy napětí jsou popsány grafy na obr. 32.

$$p_2 = \left(\frac{\delta \cdot E}{2 \cdot r_2^3} + \frac{p_3 \cdot r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} + \frac{p_1 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) \cdot \frac{(r_3^2 - r_2^2) \cdot (r_2^2 - r_1^2)}{r_2^2 \cdot (2 \cdot r_2^2 - r_3^2 - r_1^2)} \quad (6.7)$$



Obr. 32: Teoretické průběhy napětí v soustavě s vnitřní dutinou, s vnitřním přetlakem a s přesahem

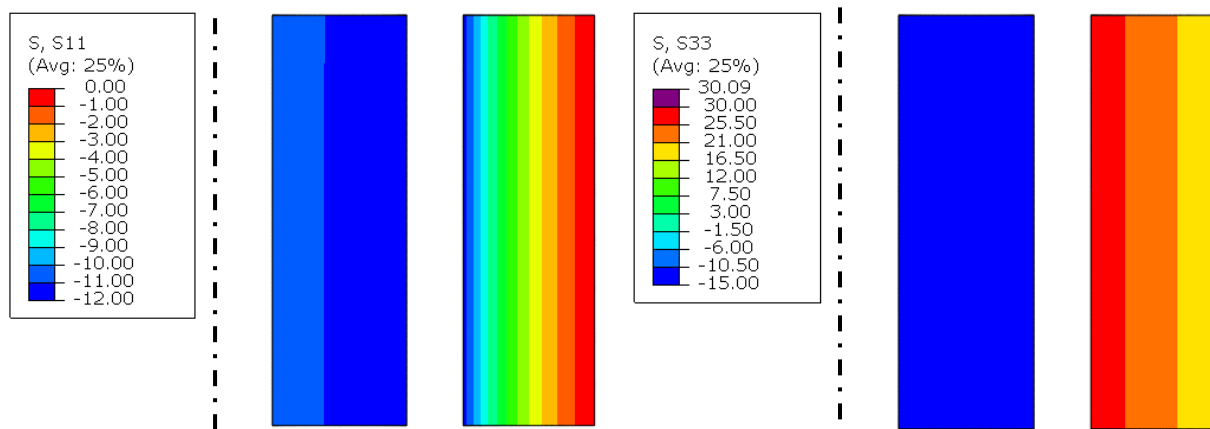
Hodnoty příslušných hlavních napětí pro vnější nádobu jsou popsány v rovnici (6.8), resp. v rovnici (6.6).

$$\sigma_1 = \sigma_t^{II} = 30,06 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = \sigma_o = 0 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = \sigma_r^{II} = -11,56 \text{ MPa} \quad (6.8)$$

6.3.1. Výsledky simulace v programu Abaqus

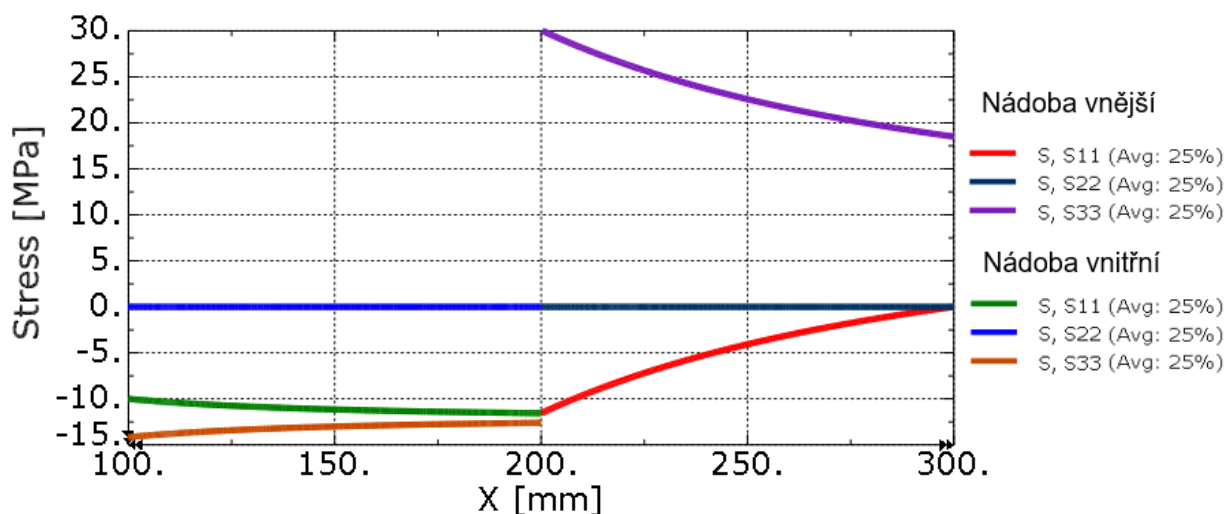
Parametry jsou podobné, jako v příkladu z kapitoly 6.2 ve kterém soustava nebyla zatížena vnitřním, nebo vnějším tlakem.

$$r_2 = 100 \text{ mm}, r_3 = 200 \text{ mm}, p_1 = 10 \text{ MPa}, p_3 = 0 \text{ MPa}, \delta = 40,6 \mu\text{m}$$



Obr. 33: Mapa radiálního napětí [MPa] v soustavě s vnitřní dutinou, s přesahem, s vnitřním přetlakem, zjištěná simulací MKP

Obr. 34: Mapa tečného napětí [MPa] v soustavě s vnitřní dutinou, s přesahem, s vnitřním přetlakem, zjištěná simulací MKP



Obr. 35: Grafy průběhu napětí v soustavě s vnitřní dutinou, s přesahem, s vnitřním přetlakem, zjištěná simulací MKP

Polytropy popisující průběh napětí na obou silnostěnných nádobách odpovídají teoreticky získaným. Mezní hodnoty napětí příslušící vnější nádobě jsou

$$\sigma_1 = \sigma_{max} = 30,04 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = \sigma_{min} = -11,54 \text{ MPa}$$

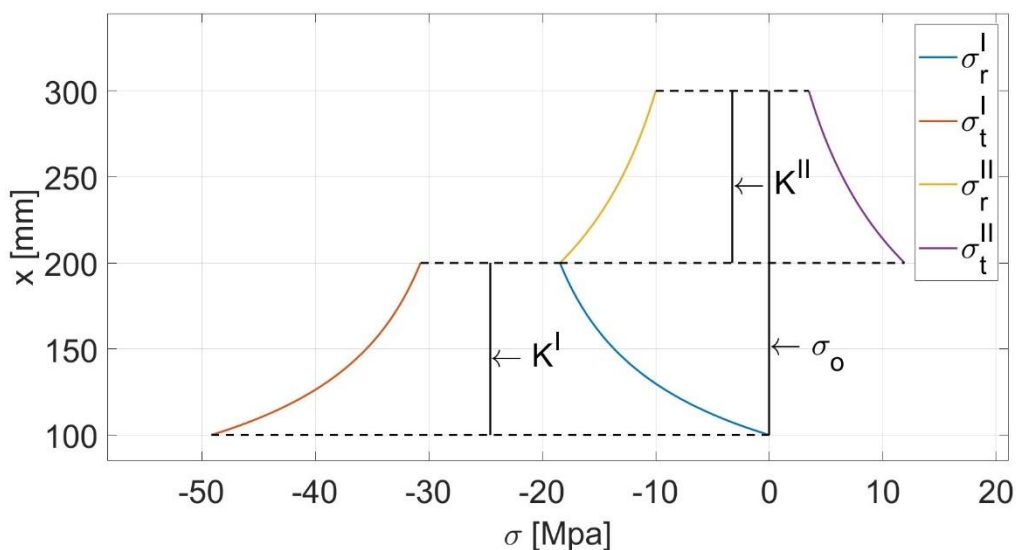
Porovnáním s hodnotami teoretickými z rovnice (6.8) byla zjištěna chyba 0.17%. Vyšší přesnosti lze dosáhnout úpravou modelu MKP, není však zaručeno, že dojde k větší shodě hodnot.

6.4. Soustava s vnitřní dutinou, s vnějším přetlakem a přesahem

Podstatou je tento případ podobný předchozímu. Vnější tlak p_3 je však tentokrát větší nežli tlak vnitřní p_1 . Stav napjatosti dále závisí na tlaku p_2 v ploše nalisování. Poměry tlaků p_1, p_2, p_3 nám pak udávají konkrétní stav napjatosti.

V našem příkladě ukážeme soustavu z předchozího příkladu, ale tentokrát namísto hodnot tlaků $p_1 = 10 \text{ MPa}, p_3 = 0$, reprezentující vnitřní přetlak, uijeme hodnoty tlaků $p_1 = 0 \text{ MPa}, p_3 = 10 \text{ MPa}$ reprezentující přetlak vnější. Užití parametry jsou popsány rovnicí (6.9).

$$\begin{aligned} r_1 &= 100 \text{ mm}, r_2 = 200 \text{ mm}, r_3 = 300 \text{ mm} \\ p_1 &= 0 \text{ MPa}, p_3 = 10 \text{ MPa}, \delta = 40,6 \mu\text{m} \end{aligned} \quad (6.9)$$



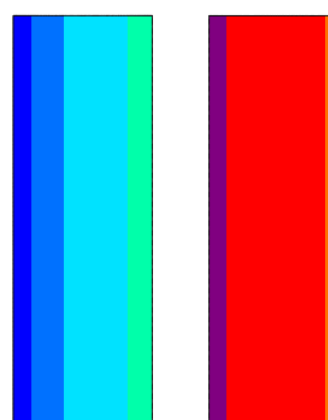
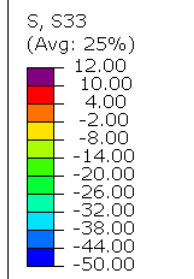
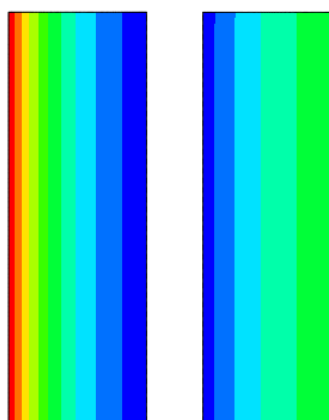
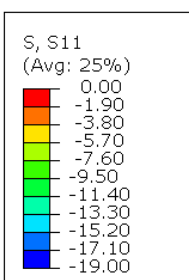
Obr. 36: Teoretické průběhy napětí v soustavě s vnitřní dutinou, s vnějším přetlakem a s přesahem

V tomto případě je redukované napětí větší na nádobě vnitřní, což však nemusí být pravidlem. Konkrétní hodnoty hlavních napětí jsou popsány v rovnici (6.10).

$$\sigma_1 = \sigma_t^I = 0 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = \sigma_o = 0 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = \sigma_t^I = -49.17 \text{ MPa} \quad (6.10)$$

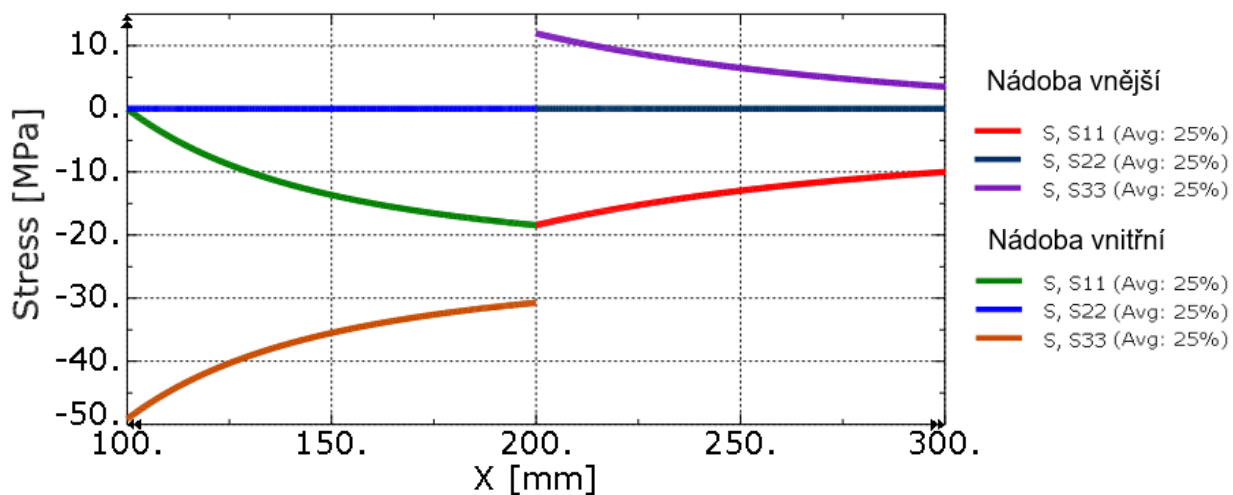
6.4.1. Výsledky simulace v programu Abaqus

Pro simulaci byly použité parametry dané rovnicí (6.9).



Obr. 37: Mapa radiálního napětí [MPa] v soustavě s vnitřní dutinou, s přesahem, s vnějším přetlakem, zjištěná simulací MKP

Obr. 38: Mapa tečného napětí [MPa] v soustavě s vnitřní dutinou, s přesahem, s vnějším přetlakem, zjištěná simulací MKP



Obr. 39: Grafy průběhu napětí v soustavě s vnitřní dutinou, s přesahem, s vnějším přetlakem, zjištěná simulací MKP

Polytropy popisující průběh napětí na obou silnostěnných nádobách odpovídají teoreticky získaným. Mezní hodnoty napětí příslušící vnitřní nádobě jsou

$$\sigma_1 = \sigma_{max} = 0 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = \sigma_{min} = -49,12 \text{ MPa}$$

Porovnáním s hodnotami teoretickými z rovnice (6.10) byla zjištěna chyba 0,1 %. Vyšší přesnosti lze dosáhnout úpravou modelu MKP, není však zaručeno, že dojde k větší shodě hodnot.

7 Lisovací síla a únosnost spojení

Pro následující vztahy vycházíme z [3] – B-2.2 Řešení únosnosti nalisovaného spoje.

7.1. Únosnost spojení

Pro přenos momentu síly M_{max} o určité velikosti, je zapotřebí v nalisovaném spoji délky b na průměru d o součiniteli tření f vytvořit dostatečně velký tlak p_{min} , který zaručí dostatečnou třecí sílu F_t , bránící prokluzu, tedy rotaci náboje na hřídeli. Tuto podmínku lze zapsat v následujícím tvaru, kde F_o představuje sílu vyvinutou momentem na daném poloměru spoje.

$$F_o \leq F_t$$
$$\frac{2 \cdot M_{max}}{d} \leq f \cdot p_{min} \cdot \pi \cdot d \cdot b$$

Úpravou tohoto vzorce získáme výsledný vztah stanovující minimální tlak potřebný pro přenesení kroutícího momentu přivedeného na soustavu hřídel – náboj.

$$\frac{2 \cdot M_{max}}{\pi \cdot d^2 \cdot b \cdot f} \leq p_{min} \quad (4.1)$$

Tato podmínka se obvykle uvádí ve tvaru uvažující bezpečnost $k \geq 1$.

$$\frac{2 \cdot M_{max}}{\pi \cdot d^2 \cdot b \cdot f} \cdot k \leq p_{min}$$

7.2. Lisovací síla

Lisovací síla F je minimální nutná síla potřebná k překonání třecího odporu ve spojení při lisování náboje na hřídel. Třecí síla $F_t = F_{lisovací}$ nabývá nejvyšší hodnoty, dochází-li ke tření již v celé požadované ploše spoje.

$$F_{lisovací} = f \cdot p_2 \cdot \pi \cdot d \cdot b \quad (4.2)$$

8 Vliv smykového napětí na stav napjatosti soustav HN

Pro následující úvahy vycházíme z prací [4], [5], [6], [7], [8] kde byly provedeny různé rozborů nalisovaného spoje. My nyní budeme zkoumat, jak se změní průběh napětí, vezmeme-li v potaz vliv smykového napětí, které může v součástech vzniknout.

Takovéto smykové napětí může vzniknou různými způsoby, například lisováním za studena, přenášením momentu síly z náboje na hřídel a jinými způsoby. Ve válcové ploše spoje vzniká třecí síla jako důsledek tohoto zatížení. Maximální hodnota smykového napětí je tedy závislá na tlaku a koeficientu tření ve spojení dle (8.1) a může nanejvýš nabývat hodnoty napětí ve spojení bránícímu prokluzu v kontaktní ploše spoje.

$$\tau(r_2) = f \cdot p_2 \quad (8.1)$$

$$\int_{S(r_2)} \tau(r_2) \cdot dS(r_2) = \int_{S(x)} \tau(x) \cdot dS(x) ; \quad x > r_2 \quad (8.2)$$

Ze silové rovnováhy plyne, že se zvětšujícím poloměrem smykové napětí klesá, a to z důvodu zvětšující se rotační plochy S přenášející toto napětí.

Průběh napětí záleží na způsobu zatížení. V této části si rozebereme různé stavy, při kterých může vznikat smykové napětí v soustavě HN – Hřídel, na němž je nalisovaný náboj. Parametry uvažované soustavy, která slouží jako příklad, jsou popsány rovnicemi (8.3), které byly již použity v předchozích kapitolách. Pro následující analýzu byly navíc stanoveny další potřebné parametry popsané v rovnicích (8.4).

$$r_2 = 100 \text{ mm}, r_3 = 200 \text{ mm}, p_1 = 0 \text{ MPa}, p_3 = 0 \text{ MPa}, \delta = 12,7 \mu\text{m} \quad (8.3)$$

$$b = 200 \text{ mm}, \quad f = 0,15, \quad r_L = 200 \text{ mm} \quad (8.4)$$

Příslušná lisovací síla a kroutící moment je zde dopočítáván z kontaktního tlaku p_2 v ploše nalisovaného spojení, kterého chceme dosáhnout. Tyto hodnoty pro případ zatížení lisovací silou, nebo zatížení kroutícím momentem jsou z důvodů konvergence simulace přenásobeny koeficientem $k = 0.95$. Pro vyšší hodnoty simulace nebyla schopna najít stav statické rovnováhy pomocí implicitní simulace. Stav lisování uvažujeme na konci tohoto děje, kdy je náboj na místě a zatížen statickou silou.

Poloměr r_L udává horní rozměr čela lisovacího nástroje. Tedy náboj je lisován pomocí trubky s vnitřním poloměrem přibližně r_2 a vnějším r_L . Hodnota vnitřního poloměru je o něco vyšší, tak aby nedocházelo ke tření mezi touto trubkou a hřídelem.

Radiální a tečné napětí v plném hřídeli se bude rovnat, jak již bylo dříve ukázáno. Naproti tomu u za studena nalisovaného náboje, tedy silnostěnné nádoby s vnitřním přetlakem bude mít za standartních napětí tečné vyšší hodnotu než napětí radiální.

$$\sigma_r^I(x) = \sigma_t^I(x) = K^I \quad \sigma_r^{II}(x) < \sigma_t^{II}(x)$$

8.1. Montážní stav – lisování

Montáž náboje na hřídel se realizuje obvykle dvěma způsoby. V závislosti na tom, který způsob zvolíme, vzniká odlišný stav napjatosti soustavy. Tyto vlivy je vhodné rozebrat, protože mohou mít vliv na způsob zatížení soustavy, a tedy i stav napjatosti potažmo na redukované napětí a pevnostní podmínku.

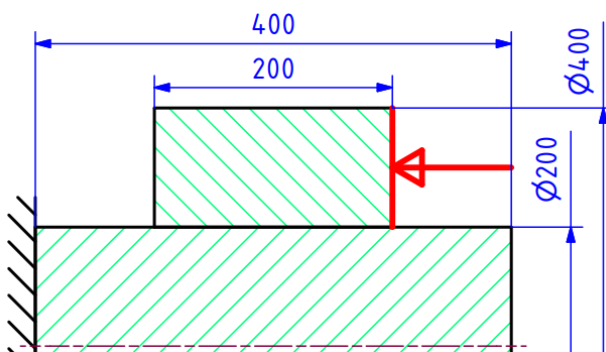
a) nasazením za tepla

Náboj se ohřeje a v důsledku teplotní roztažnosti zvětší průměr vnitřní dosedací plochy. Průměr se zvětší, tak aby rozdíl průměrů náboje a hřídele odpovídal montážní vůli, při jejíž dosažení lze náboj již snadno nasadit. Následně vychladnutím dojde ke smrštění materiálu a vytvoření kontaktního tlaku mezi uvedenými součástmi.

b) lisování za studena

Náboj je přítlačnou osovou silou nalisován na hřídel. Při tomto procesu vzniká ve ploše spoje třením smykové napětí, které se při návrhu nalisovaného spoje nemusí zanedbávat.

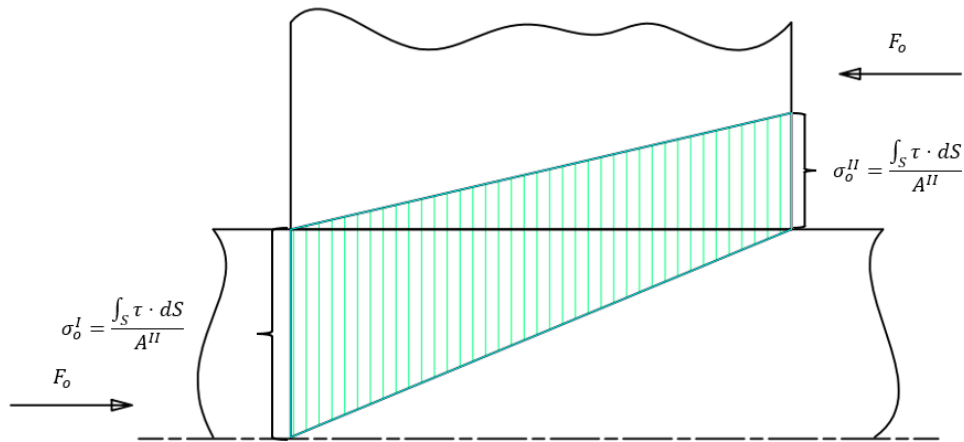
Přesah spoje je v důsledku poškození styčných povrchů zredukován. Z těchto důvodů se při lisování za studena přesah zvětšuje o hodnotu závislou na kvalitě povrchů lisovaných ploch.



Obr. 40: Schéma zatížení osovou silou při lisování v soustavě Hřídel – Náboj

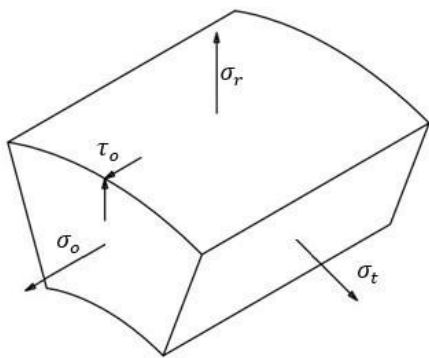
V hřídeli a náboji vzniká tlakové osové napětí, které je závislé na přítlačné ploše na náboji A^{II} označené na obr. 42 červeně a kolmém průřezu hřídele A^I , kontaktní ploše nalisovaného spoje S a smykovém napětí τ v této kontaktní ploše. Při konstantním průběhu smykového napětí na kontaktní ploše nalisovaného spoje tlakové má osové napětí v hřídeli a v náboji průběhy podle obr. 43. Musí totiž platit rovnováha popsaná rovnicí (8.5)

$$\int_{A^I} \sigma_o^I dA = \int_{S(r_2)} \tau(r_2) \cdot dS(r_2) = \int_{A^{II}} \sigma_o^{II} dA \quad (8.5)$$



Obr. 41: Schéma osového napětí při lisování v soustavě HN

8.1.1. Stav napjatosti hřídele



Obr. 42: Znázornění zatížení elementu objemu hřídele během lisování

Během lisování vzniká vlivem přesahu tlakové radiální napětí na kontaktním povrchu mezi hřídelem a nábojem, které proti směru lisovací síly umožňuje vznik tření, jež se projevuje smykovým napětím $\tau = p_2 \cdot f$, viz obr. 44, které jako tlak p_2 předpokládáme na kontaktním povrchu konstantní.

Předpokládáme, že tlakové osové napětí se po délce nalisovaného spoje mění podle obr. 43 a přibližné hodnoty vzhledem k hodnotě smykového napětí τ_o je dáno vztahem (8.6). Parametr b určuje délku náboje, a tedy i nalisovaného spoje.

$$\sigma_o^I = \int_{S(r_2)} \frac{\tau_o \cdot dS}{A^I} = \tau \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot b}{\pi \cdot r_2^2} = -\frac{2 \cdot f \cdot p_2 \cdot b}{r_2} \quad (8.6)$$

Hodnota tečného a radiálního napětí má stejnou hodnotu rovnou zápornému tlaku p_2 . Tečné napětí je kolmé k rovině, v níž leží napětí radiální spolu s napětím smykovým. Tečné napětí σ_t^I pak stanovuje druhé hlavní napětí. Tyto předpoklady jsou vyobrazeny pomocí Mohrovy kružnice na obr. 45.

$$\sigma_t^I = \sigma_2^I = -p_2$$

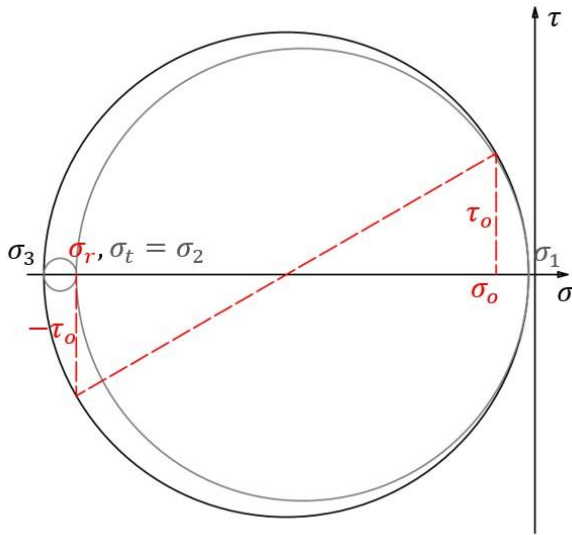
Hodnoty zbylých hlavních napětí hledáme pomocí známého vzorce (8.7) plynoucího z definice Mohrovy kružnice.

$$\sigma_{1,3} = S \pm R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_z)^2} \quad (8.7)$$

$$\sigma_{1,3}^I = \frac{\sigma_o + \sigma_r^I(r_2)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_o - \sigma_r^I(r_2)}{2}\right)^2 + \tau_o^2}$$

Dosazením příslušných hodnot získáváme výsledný vztah (8.8).

$$\sigma_{1,3}^I = \frac{\sigma_o^I - p_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_o^I + p_2}{2}\right)^2 + (f \cdot p_2)^2}; \quad \sigma_o^I = -\frac{2 \cdot f \cdot p_2 \cdot b}{r_2} \quad (8.8)$$



Obr. 43: Mohrova kružnice – napjatost elementu hřídele při lisování

Při lisování se změní napjatost hřídele z rovinné na prostorovou v důsledku zatížení osovou silou. Vlivem smykového napětí při lisování se nám zvětší největší Mohrova kružnice. Stav napjatosti se nám však nezmění, je-li osové napětí dostatečně velké.

Hřídel by též mohl být namáhán tahem za předpokladu protahování nábojem. V takovém případě by první hlavní napětí bylo kladné, tahové. Část největší Mohrovy kružnice by zasahovala do pravé poloosy normálového napětí, a tedy by tato kružnice byla větší nežli kružnice znázorňující stav napjatosti hřídele namáhaného tlakovou osovou silou.

Pro hodnoty vstupních parametrů uvedených na začátku kapitoly 8 v rovnicích (8.3) a (8.4) lze vypočítat následující hodnoty napětí:

$$\sigma_t^I = -10 \text{ MPa}, \quad \sigma_r^I = -10 \text{ MPa}, \quad \sigma_o^I = -5,7 \text{ MPa}, \quad \tau_o = 1,43 \text{ MPa}$$

Běžným postupem bychom stanovili tyto hodnoty hlavních napětí:

$$\sigma_1^I = \sigma_o^I = -5,7 \text{ MPa}, \quad \sigma_2^I = \sigma_3^I = \sigma_r^I = \sigma_t^I - 10 \text{ MPa}$$

Postupem zahrnující vliv smykových napětí dle (8.8) byly stanoveny hodnoty hlavních napětí:

$$\sigma_1^I = -5,27 \text{ MPa}, \quad \sigma_2^I = -10 \text{ MPa}, \quad \sigma_3^I = -10,43 \text{ MPa}$$

8.1.1. a) Trescova hypotéza - τ_{max}

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3$$

Běžný postup:

Postup zahrnují vliv smykového napětí:

$$\sigma_{red}^I = -5,7 - (-10) = 4,3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red}^I = -5,27 - (-10,43) = 5,16 \text{ MPa}$$

8.1.1. b) Teorie pevnosti energetická – HMM

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)}$$

Běžný postup:

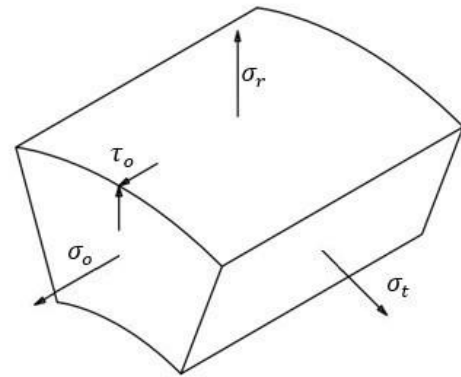
Postup zahrnují vliv smykového napětí:

$$\sigma_{red}^I = 4,3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red}^I = 4,96 \text{ MPa}$$

8.1.2. Stav napjatosti náboje

Tečné napětí σ_t^{II} je stejně tak jako u hřídele hlavním napětím. Jeho hodnota je však nyní kladná a odlišná od hodnoty radiálního napětí σ_r^{II} , které je spolu s osovým napětím σ_o^{II} tlakové, tak jako tomu bylo u hřídele. Stav napjatosti je vyobrazen na elementu náboje v obr. 46, na Mohrových kružnicích na obr. 47 a obr. 48, kde předpokládáme vztahy dle (8.9).

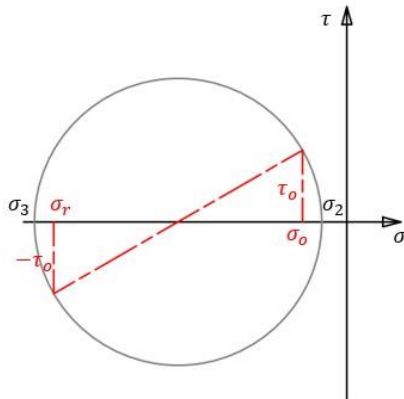


Obr. 44: Znárodnění zatížení elementu objemu náboje během lisování

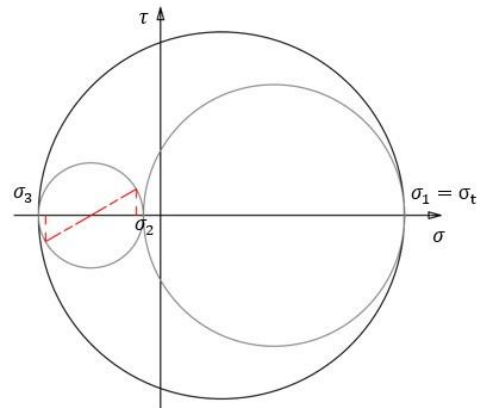
$$\sigma_1^{II} = \sigma_t^{II}(r_2) > 0 > \sigma_o^{II};$$

$$\sigma_o^{II} = - \int_{S(r_2)} \frac{\tau_o \cdot dS}{A^{II}} > \sigma_r^{II}(r_2)$$

(8.9)



Obrázek 45: Mohrova kružnice – napjatost elementu náboje při lisování za studena – detail



Obr. 46: Mohrova kružnice – napjatost elementu náboje při lisování za studena

Osová síla a tím pádem lisovací osově napětí závisí velikostí jak na tlaku, tak na velikosti styčné plochy na rozdíl od radiálního a tečného napětí. Proto hodnota osového napětí může nabývat různé záporné hodnoty.

V systému rovinných řezů elementu kolmých na rovinu tečného napětí (viz obr. 46), v němž leží roviny smykového napětí τ_o a radiálního napětí σ_r , můžeme stanovit dvě hlavní napětí Mohrovou kružnicí dle vztahu (8.10).

$$\sigma_{2,3}^{II} = \frac{\sigma_o^{II} + \sigma_r^{II}(r_2)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_o^{II} - \sigma_r^{II}(r_2)}{2}\right)^2 + \tau_o^2} \quad (8.10)$$

Dosazením příslušných hodnot napětí do rovnice (8.10) získáme závislost (8.11) hlavních napětí na tlaku p_2 .

$$\sigma_{2,3}^{II} = \frac{\sigma_o^{II} - p_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_o^{II} + p_2}{2}\right)^2 + (f \cdot p_2)^2} \quad (8.11)$$

$$\sigma_o^{II} = -\tau \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot b}{\pi \cdot r_L^2 - \pi \cdot r_2^2} = -\frac{2 \cdot f \cdot p_2 \cdot b \cdot r_2}{r_L^2 - r_2^2} \quad (8.12)$$

V rovnici (8.12) r_L vymezuje horní hranici plochy A^{II} , na niž je aplikována lisovací síla například pomocí trubky.

Je vidno, že během lisování se celková kružnice z obr. 48 zvětšila. Došlo ke zvětšení kružnice v rovině radiálního a osového napětí z obr. 47, která je menší kružnicí z tří Mohrových kružnic z obr. 48. Z hlediska maximálního redukovaného napětí pro nás bude tato změna zajímavější v porovnání s hřídelem, kterému přísluší menší Mohrova kružnice.

Pro hodnoty vstupních parametrů uvedených na začátku kapitoly 8 v rovnicích (8.3) a (8.4) lze vypočítat následující hodnoty napětí:

$$\sigma_t^{II} = 16,67 \text{ MPa}, \quad \sigma_r^{II} = -10 \text{ MPa}, \quad \sigma_o^{II} = -1,9 \text{ MPa}, \quad \tau_o = 1,43 \text{ MPa}$$

Běžným postupem bychom stanovili tyto hodnoty hlavních napětí:

$$\sigma_1^{II} = \sigma_t^{II} = 16,67 \text{ MPa}, \quad \sigma_2^{II} = \sigma_o^{II} = -1,9 \text{ MPa}, \quad \sigma_3^{II} = \sigma_r^{II} = -10 \text{ MPa}$$

Postupem zahrnující vliv smykových napětí dle (8.11) byly stanoveny hodnoty hlavních napětí:

$$\sigma_1^{II} = 16,67 \text{ MPa}, \quad \sigma_2^{II} = -1,66 \text{ MPa}, \quad \sigma_3^{II} = -10,24 \text{ MPa}$$

8.1.2. a) Trescova hypotéza - τ_{max}

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3$$

Běžný postup:

Postup zahrnují vliv smykového napětí:

$$\sigma_{red}^{II} = 16,67 - (-10) = 26,67 \text{ MPa} \quad \sigma_{red}^{II} = 16,67 - (-10,24) = 26,91 \text{ MPa}$$

8.1.2. b) Teorie pevnosti energetická – HMH

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)}$$

Běžný postup:

Postup zahrnují vliv smykového napětí:

$$\sigma_{red}^{II} = 23,68 \text{ MPa} \quad \sigma_{red}^{II} = 23,81 \text{ MPa}$$

8.2. Nezatížený stav

Tímto stavem se rozumí stav po nalisování, kdy soustava ještě není pod vlivem pracovního zatížení, např. kroutícího momentu. Tento stav byl popsán v kapitole 6.1.

8.2.1. Hřídel

Rozbor průběhu napětí v hřídeli v nezatíženém stavu je identický s postupem v kapitolách 4.1 a 6.1. V nezatíženém stavu po nalisování vyjma tečného a radiálního napětí nepředpokládáme další napětí.

8.2.2. Náboj

Rozbor průběhu napětí na náboji v nezatíženém stavu se opět neliší od dříve uvedeného průběhu v kapitolách 4.2 a 6.1. Hlavní význam zde má napětí radiální a tečné. Žádná další napětí v tomto stavu neuvažujeme.

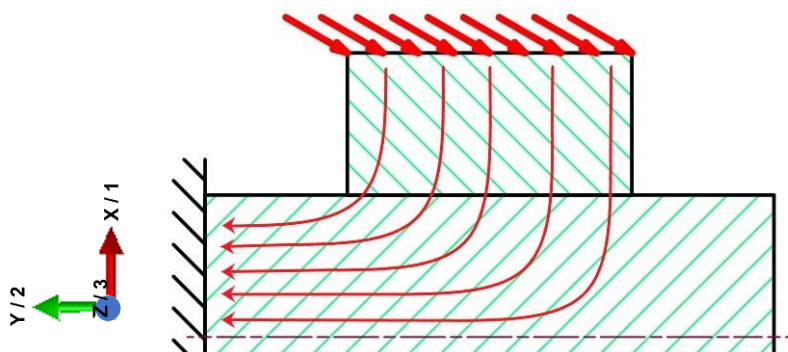
8.3. Pracovní stav – zatížení momentem síly

Jak jsme již ukázali v kapitole 8.1.1. přítomnost smykového napětí může mít vliv na průběh napětí a stav napjatosti soustavy. Během pracovního stavu je soustava namáhána různými vnějšími silovými účinky. Kromě napětí vzniklého v důsledku nalisování je pak možné uvažovat i tyto vlivy.

V této části kapitoly se věnujeme vlivu kroutícího momentu a potenciálnímu vlivu šikmého ozubení na napjatost soustavy hřídel-náboj spojené nalisováním.

Přenos kroutícího momentu z náboje do hřídele probíhá skrz plochu nalisování. Jelikož naším předpokladem je konstantní rozložení tlaku v této ploše, je pak nutné, aby i smyková síla v této ploše byla konstantní. Tento fakt nám zaručuje postupné přenášení momentu. Uvažujeme-li i rovnoměrné rozložení momentu síly na náboji, pak přírůstek na náboji celkového kroutícího momentu měl být kompenzován úbytkem v ploše spoje. Jednotlivé rovinné řezy náboje kolmé na směr osy symetrie tedy nejsou vzájemně zatíženy konvenčním smykovým napětím příslušícím kroutícímu momentu τ_{yz} . Naopak

jednotlivé válcové vrstvy příslušící různým poloměrům r jsou navzájem zatíženy smykovým napětím τ_{xz} .



Obr. 47: Znázornění toku kroutícího momentu z náboje do hřídele

V hřídeli pak předpokládáme postupný nárůst smykového napětí ve směru osy symetrie. Největší hodnoty smykového napětí způsobeného krutem hřídele by tedy měly být na tom konci plochy nalisovaného spoje, který je blíže vetknutí, které reprezentuje spojení s potenciálním zbytkem případného mechanismu. Maximální hodnota tohoto smykového napětí je dána vztahem (8.14). V tomto vztahu W_k je modul průřezu v krutu. Vztah (8.13) nám popisuje celkový tok kroutícího momentu, který z důvodu předpokládaného konstantního kontaktního tlaku, a tedy i konstantního smykového napětí musí být podél čar na obr. 49 konstantní.

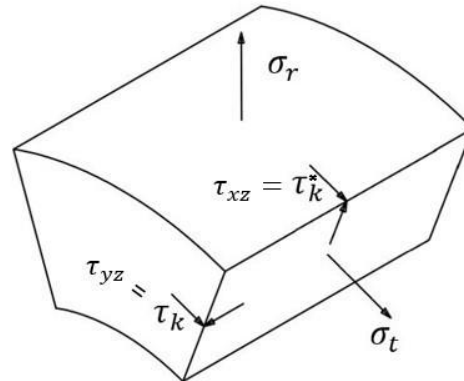
$$M_k = \int_{S_{r_2}} p_2 \cdot f \cdot r_2 \cdot dS = \int_{A^I} \tau_k \cdot r \cdot dA = 2 \cdot p_2 \cdot f \cdot r_2^2 \cdot \pi \cdot b \quad (8.13)$$

$$\frac{\tau_{k_{max}}}{2} = \frac{M_k}{2 \cdot W_k} = \frac{2 \cdot p_2 \cdot f \cdot b}{r_2}; W_k = \frac{\pi \cdot (2 \cdot r_2)^3}{16} \quad (8.14)$$

Jelikož však neuvažujeme napětí na okrajích náboje, kde vlivem uložení vzniká vrub, budeme napětí uvažovat v polovině délky plochy nalisovaného spoje, tak abychom mohli srovnat teoreticky získané výsledky s výsledky získanými pomocí simulace MKP. Uvažujeme-li lineární závislost smykového napětí v průřezu hřídele, pak i maximální hodnota smykového napětí musí být v polovině délky plochy nalisování rovna jedné polovině hodnoty na konci nalisování. Ačkoli tedy kritické místo je na konci nalisování, pro srovnání užijeme hodnoty uprostřed.

8.3.1. Stav napjatosti hřídele

Pro tento případ budeme uvažovat smyková napětí vzniklá v důsledku přenosu momentu síly, který vzniká například u přímého čelního ozubení. Pro zjednodušení nebudeme uvažovat lokální účinky zatížení. Stejně jako u teorie silnostěnných nádob budeme uvažovat osovou symetrii tohoto zatížení a přímou závislost na poloměru. Dále uvažujeme nulové osové napětí.



Obr. 48: Znárodnění zatížení elementu objemu hřídele během zatěžování kroučícím momentem

Způsob zatížení elementu objemu je zobrazen na obr. 50. Nejde o rovinný stav napjatosti a není nám známo ani jedno z hlavní napětí. Z těchto důvodů nemůžeme užít Mohrovy kružnice běžným způsobem pro zjištění hlavních napětí. V tomto případě nejjednodušší možností bude užití matematické teorie pružnosti dle [2] – 2 – Základy matematické teorie pružnosti. Z tenzoru napětí můžeme hlavní napětí získat jako hodnoty vlastních čísel. Příslušné vlastní vektory pak udávají směr jednotlivých hlavních napětí. Tenzor napětí popsán rovnicí (8.15).

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (8.15)$$

Zde stejně jako v předešlých simulacích a úvahách použijeme stejný popis souřadného systému. Orientace Osy x udává směr působení radiálního napětí. Osa y je totožná s osou symetrie hřídele a náboje. Směr osy z je totožný se směrem tečného napětí. Hodnoty normálových napětí zde uvažujeme kladné tahové a záporné tlakové podle vztahů (8.16).

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_r = -p_2, \quad \sigma_y = \sigma_o = 0 \\ \sigma_z = \sigma_t = -p_2, \quad \tau_x = \tau_k = \frac{4 \cdot p_2 \cdot f \cdot b}{r_2} \\ \tau_y = \tau_k^* = p_2 \cdot f, \quad \tau_z = 0 \end{aligned} \quad \vec{\sigma} = \begin{bmatrix} -p_2 & 0 & \frac{p_2 \cdot f}{r_2} \\ 0 & 0 & \frac{2 \cdot p_2 \cdot f \cdot b}{r_2} \\ p_2 \cdot f & \frac{2 \cdot p_2 \cdot f \cdot b}{r_2} & -p_2 \end{bmatrix} \quad (8.16)$$

Dle vztahu (8.14) a jemu předcházejících úvah bylo zvolena hodnota smykového napětí jako hodnota maximálního smykového napětí v krutu dělená dvěma. Hlavní napětí σ_h jsou tedy vlastními čísly tenzoru napětí, jak již bylo zmíněno. Rovnice (8.17) je tedy řešením.

$$0 = \det \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_h & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y - \sigma_h & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z - \sigma_h \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 - \sigma_h & 0 & \tau_o \\ 0 & \sigma_t - \sigma_h & \tau_k \\ \tau_o & \tau_k & \sigma_r - \sigma_h \end{pmatrix} \quad (8.17)$$

Tuto rovnici lze zapsat v zjednodušeném tvaru pomocí invariantů.

$$0 = \sigma_h^3 - I_1 \sigma_h^2 + I_2 \sigma_h - I_3$$

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x - \tau_x^2 - \tau_y^2 - \tau_z^2$$

$$I_3 = \det \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} \end{pmatrix} = \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z + 2 \cdot \tau_x \cdot \tau_y \cdot \tau_z - \sigma_x \cdot \tau_x^2 - \sigma_y \cdot \tau_y^2 - \sigma_z \cdot \tau_z^2$$

Dosadíme-li příslušné hodnoty napětí získáme výsledný vztah, který jak je vidno je kubickou rovnicí, jelikož nulové jsou pouze dvě hodnoty z šesti možných hodnot napětí.

$$I_1 = -2 \cdot p_2$$

$$I_2 = p_2^2 - \left(\frac{4 \cdot p_2 \cdot f \cdot b}{r_2} \right)^2 - (p_2 \cdot f)^2, \quad I_3 = \det \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} \end{pmatrix} = p_2 \cdot \left(\frac{4 \cdot p_2 \cdot f \cdot b}{r_2} \right)^2$$

$$0 = \sigma_h^3 + 2 \cdot p_2 \cdot \sigma_h^2 + \left(p_2^2 - \left(\frac{4 \cdot p_2 \cdot f \cdot b}{r_2} \right)^2 - (p_2 \cdot f)^2 \right) \cdot \sigma_h + p_2 \cdot \left(\frac{4 \cdot p_2 \cdot f \cdot b}{r_2} \right)^2$$

Výslednou rovnici je vhodné již řešit pro konkrétní případ vzhledem k její složitosti. Avšak můžeme předpokládat jisté vlastnosti výsledků. Absolutní hodnota prvního, resp. třetího napětí musí být pochopitelně větší nežli absolutní hodnota tečného, resp. radiálního napětí. Tento fakt je zřejmý, jelikož redukované napětí této soustavy se musí nutně zvětšit při zahrnutí námi definovaného dodatečného zatížení.

Pro hodnoty vstupních parametrů uvedených na začátku kapitoly 8 v rovnicích (8.3) a (8.4) lze vypočítat následující hodnoty napětí:

$$\sigma_t^I = -10 \text{ MPa}, \quad \sigma_r^I = -10 \text{ MPa}, \quad \sigma_o^I = 0 \text{ MPa}$$

$$\tau_k = 5,7 \text{ MPa}, \quad \tau_k^* = 1,43 \text{ MPa}$$

Běžným postupem bychom stanovili tyto hodnoty hlavních napětí:

$$\sigma_1^I = \sigma_o^I = 0 \text{ MPa}, \quad \sigma_2^I = \sigma_3^I = \sigma_r^I = \sigma_t^I = -10 \text{ MPa}$$

Postupem zahrnující vliv smykových dle (8.17) napětí stanovíme následující hodnoty hlavních napětí:

$$\sigma_1^I = 2,61 \text{ MPa}, \quad \sigma_2^I = -9,49 \text{ MPa}, \quad \sigma_3^I = -13,13 \text{ MPa}$$

8.3.1. a) Trescova hypotéza - τ_{max}

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3$$

Běžný postup:

Postup zahrnují vliv smykového napětí:

$$\sigma_{red}^I = 10 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red}^I = 2,61 - (-13,13) = 15,74 \text{ MPa}$$

8.3.1. a) Teorie pevnosti energetická – HMM

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)}$$

Běžný postup:

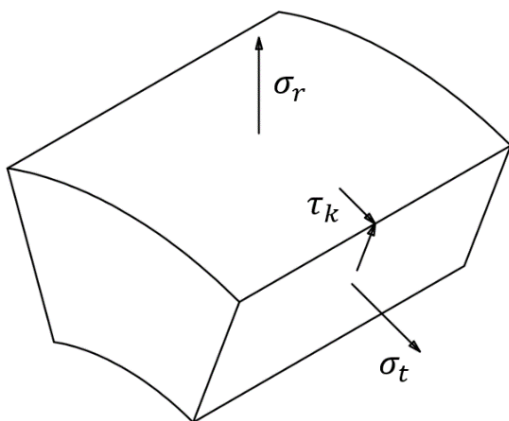
Postup zahrnují vliv smykového napětí:

$$\sigma_{red}^I = 10 \text{ MPa}$$

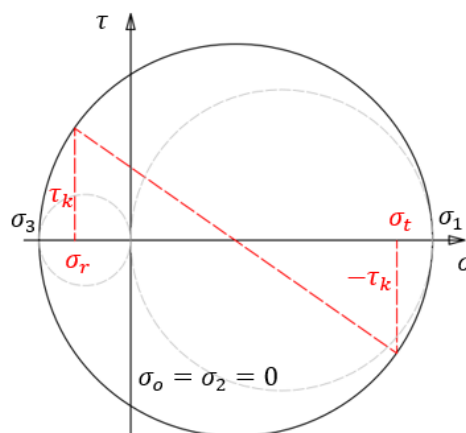
$$\sigma_{red}^I = 14,27 \text{ MPa}$$

8.3.2. Stav napjatosti náboje

Element objemu náboje podléhajícímu tomuto zatížení je vyobrazen na obr. 51 a příslušící Mohrově kružnici na obr. 52.



Obr. 49: Znárodnění zatížení elementu objemu náboje při zatížení kroučícím momentem



Obr. 50: Mohrova kružnice – napjatost elementu náboje při zatížení kroučícím momentem

Rovnice (8.18) je momentovou rovnováhou, ze které můžeme odvodit vztah pro průběh smykového napětí na náboji (8.19). Nejvyšší vliv smykové napětí v náboji má v ploše nalisovaného spoje, kde je válcová plocha s nejmenším přípustným poloměrem r_2 . Dle rovnice (8.19) smykové napětí je právě funkcí tohoto poloměru – vzdálenosti x , a je zde největší. V této ploše je moment síly přenášen dále do hřídele.

$$M_k = \int_{S(r_2)} \tau_k(r_2) \cdot r_2 \cdot dS(r_2) = \int_{S(x)} \tau_k(x) \cdot x \cdot dS(x) \quad (8.18)$$

$$\tau_k(r_2) \cdot r_2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_2 = \tau_k(x) \cdot x \cdot 2 \cdot \pi \cdot x$$

$$\tau_k(x) = \tau(r_2) \cdot \frac{r_2^2}{x^2} = p_2 \cdot f \cdot \frac{r_2^2}{x^2} \quad (8.19)$$

Nyní můžeme pokračovat k stanovení hlavních napětí, která stanovíme z Mohrovy kružnice. Druhým hlavním napětím je napětí osová, které pro tento případ pokládáme za nulové.

$$\sigma_2^{II} = \sigma_o^{II} = 0$$

Pro určení prvního a druhého hlavního napětí použijeme vzorce (8.7).

$$\sigma_{1,3}^{II}(r_2) = \frac{\sigma_t^{II}(r_2) + \sigma_r^{II}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_t^{II}(r_2) - \sigma_r^{II}(r_2)}{2}\right)^2 + \tau_{k(r_2)}^2}$$

Hodnoty vystupujících napětí v tomto vzorci jsou popsány následujícími rovnicemi (8.20):

$$\sigma_t^{II}(r_2) = K^{II} + \frac{C^{II}}{r_2^2} = 2 \cdot K^{II} + p_2, \quad \sigma_r^{II} = K^{II} - \frac{C^{II}}{r_2^2} = -p_2, \quad \tau_{k(r_2)} = p_2 \cdot f \quad (8.20)$$

Dosazením těchto hodnot do předešlé rovnice získáme výsledný vztah (8.19) pro výpočet prvního a třetího hlavního napětí.

$$\sigma_{1,3}^{II} = K^{II} \pm \sqrt{\left(\frac{C^{II}}{r_2^2}\right)^2 + (p_2 \cdot f)^2} = K^{II} \pm \sqrt{(K^{II} + p_2)^2 + (p_2 \cdot f)^2} \quad (8.21)$$

Pro hodnoty vstupních parametrů uvedených na začátku kapitoly 8 v rovnicích (8.3) a (8.4) lze vypočítat následující hodnoty napětí:

$$\sigma_t^{II} = 16,67 \text{ MPa}, \quad \sigma_r^{II} = -10 \text{ MPa}, \quad \sigma_o^{II} = 0 \text{ MPa}, \quad \tau_k^* = 1,43 \text{ MPa}$$

Běžným postupem bychom stanovili tyto hodnoty hlavních napětí:

$$\sigma_1^{II} = \sigma_t^{II} = 16,67 \text{ MPa}, \quad \sigma_2^{II} = \sigma_o^{II} = 0 \text{ MPa}, \quad \sigma_3^{II} = \sigma_r^{II} = -10 \text{ MPa}$$

Postupem zahrnující vliv smykových dle (8.21) napětí stanovíme následující hodnoty hlavních napětí:

$$\sigma_1^{II} = 16,74 \text{ MPa}, \quad \sigma_2^{II} = 0 \text{ MPa}, \quad \sigma_3^{II} = -10,08 \text{ MPa}$$

8.3.2. a) Trescova hypotéza - τ_{max}

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3$$

Běžný postup:

Postup zahrnují vliv smykového napětí:

$$\sigma_{red}^{II} = 16,67 - (-10) = 26,67 \text{ MPa} \quad \sigma_{red}^{II} = 16,743 - (-10,076) = 26,82 \text{ MPa}$$

8.3.2. b) Teorie pevnosti energetická – HMH

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)}$$

Běžný postup:

Postup zahrnují vliv smykového napětí:

$$\sigma_{red}^{II} = 23,33 \text{ MPa} \quad \sigma_{red}^{II} = 23,46 \text{ MPa}$$

8.4. Pracovní stav – zatížení momentem síly a osovou silou

Nyní navíc k momentu síly mající kroutící účinek budeme uvažovat sílu působící v osovém směru. Takovéto zatížení může vzniknout například na ozubeném kole s šikmým ozubením.

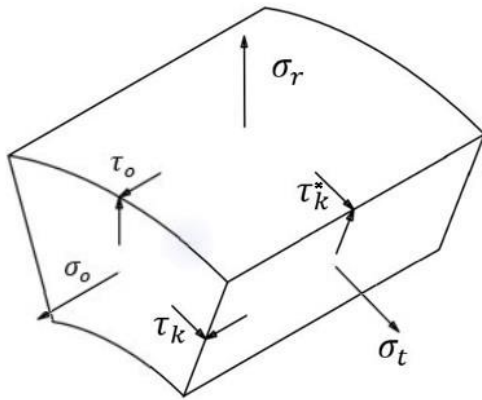
Z důvodu robustnosti této práce a postupného uvažování různých vlivů nebudeme uvažovat účinek přítláčné síly v radiálním směru a ohybového momentu způsobeného osovou silou v ozubení. Následující analýza pak může sloužit jako funkční základ právě pro zmíněné zanedbané vlivy.

8.4.1. Stav napjatosti hřídele

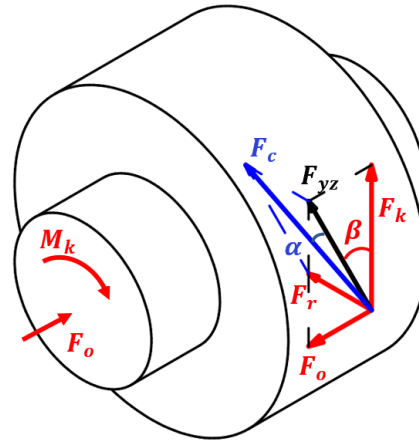
Tedy pro tento případ platí stejné předpoklady jako u kapitoly 8.1.3 a), b) s rozdílem, že nyní element objemu bude navíc zatížen i smykovým napětím jehož původem je osová síla. Toto napětí po sobě bude smýkat jednotlivé válcové vrstvy ve směru osy symetrie. Tento vztah je popsán rovnicí (8.22)

$$F_o = \int_{S(x)} \tau_o(x) \cdot dS(x) = \int_{S(r_2)} \tau(r_2) \cdot dS(r_2) = \left| \int_{A^I} \sigma_o^I dA \right| \quad (8.22)$$

Způsob zatížení elementu objemu je zobrazen na obr. 53 a obr. 54. Postup stanovení hlavních napětí se pro tento případ podobá tomu, který byl rozebrán v kapitole 8.1.3 a) a proto popíšeme jen části, které se liší.



Obr. 51: Znárodnění elementu objemu hřídele při zatížení momentem síly a osovou silou



Obr. 52: Schéma zatížení kroutícím momentem a osovou silou v soustavě HN s šikmým čelním ozubením

Poměr smykových napětí τ_o a τ_k^* je dán úhlem sklonu zubů stejně jako pro síly F_k a F_o z obr. 54. Výsledná síla F_c se nejprve rozloží na složku F_{yz} a složku radiální F_r , která způsobuje průhyb hřídele, jenž nyní pro jednoduchost zanedbáme. Síla F_{yz} se dále sínovým, respektive cosínovým průmětem rozloží na složky F_k , respektive F_o . Smykové napětí v kontaktní ploše nemůže přesáhnout hodnotu $p_2 \cdot f$, aby nedošlo k prokluzu, tedy hodnota celkového smykového napětí, které je dáno vektorovým součtem napětí τ_o a τ_k^* , nesmí přesáhnout hodnotu $p_2 \cdot f$ a tedy musí být dáno vztahy (8.23).

Pro analýzu a simulace uijeme úhel $\beta = 20^\circ$.

Přibližná hodnota osového napětí je stanovena vztahem (8.24).

$$F_o = F_{yz} \cdot \sin \beta, \quad F_k = F_{yz} \cdot \cos \beta$$

$$\tau_o = p_2 \cdot f \cdot \sin \beta, \quad \tau_k^* = p_2 \cdot f \cdot \cos \beta \quad (8.23)$$

$$\sigma_o^I = \int_{S(r_2)} \frac{\tau_o \cdot dS}{A^I} = \tau \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot b}{\pi \cdot r_2^2} = -\frac{2 \cdot f \cdot p_2 \cdot b}{r_2} \quad (8.24)$$

Rovnice (8.25) popisuje tenzor napětí pro námi uvažované vlivy.

$$\vec{\vec{\sigma}} = \begin{bmatrix} -p_2 & p_2 \cdot f \cdot \sin \beta & p_2 \cdot f \cdot \cos \beta \\ p_2 \cdot f \cdot \sin \beta & -\frac{2 \cdot f \cdot p_2 \cdot b}{r_2} & \frac{2 \cdot p_2 \cdot f \cdot b}{r_2} \cdot \sin \beta \\ p_2 \cdot f \cdot \cos \beta & \frac{2 \cdot p_2 \cdot f \cdot b}{r_2} \cdot \sin \beta & -p_2 \end{bmatrix} \quad (8.25)$$

Hlavní napětí jsou dále stanovena jako vlastní čísla tohoto tenzoru. Tento postup byl nastíněn v kapitole 8.1.3 a).

Pro hodnoty vstupních parametrů uvedených na začátku kapitoly 8 v rovnicích (8.3) a (8.4) lze vypočítat následující hodnoty napětí:

$$\begin{aligned} \sigma_t^I &= -10 \text{ MPa}, & \sigma_r^I &= -10 \text{ MPa}, & \sigma_o^I &= -2,05 \text{ MPa} \\ \tau_k &= 5,64 \text{ MPa}, & \tau_k^* &= 1,41 \text{ MPa}, & \tau_o &= 0,51 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Běžným postupem bychom stanovili tyto hodnoty hlavních napětí:

$$\sigma_1^I = \sigma_o^I = -2,05 \text{ MPa}, \quad \sigma_2^I = \sigma_3^I = \sigma_r^I = \sigma_t^I = -10 \text{ MPa}$$

Postupem zahrnující vliv smykových dle (8.25) napětí stanovíme následující hodnoty hlavních napětí:

$$\sigma_1^I = 0,98 \text{ MPa}, \quad \sigma_2^I = -9,79 \text{ MPa}, \quad \sigma_3^I = -13,25 \text{ MPa}$$

8.4.1. a) Trescova hypotéza - τ_{max}

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3$$

Běžný postup:

Postup zahrnující vliv smykového napětí:

$$\sigma_{red}^I = -2,05 - (-10) = 7,95 \text{ MPa} \quad \sigma_{red}^I = 0,98 - (-13,25) = 14,23 \text{ MPa}$$

8.4.1. b) Teorie pevnosti energetická – HMH

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)}$$

Běžný postup:

Postup zahrnující vliv smykového napětí:

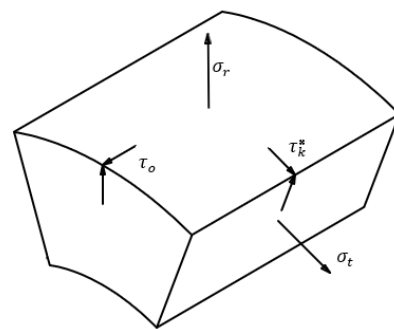
$$\sigma_{red}^I = 7,95 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red}^I = 12,86 \text{ MPa}$$

8.4.2. Stav napjatosti náboje

Náboj je zatížený kroutícím momentem, a navíc osovou silou oproti kapitole 8.1.3 b), kde byly stanoveny hodnoty radiálního a tečného napětí, které platí i pro tento případ, viz (8.26). Stejně tak náboj nepodléhá konvenčnímu smykovému napětí odpovídajícímu kroutícímu momentu. Namísto toho zde uvažujeme smykové napětí mezi jednotlivými válcovými vrstvami τ_k^* , jak bylo odvozeno v odstavci 8.1.3 a).

Hodnoty smykových napětí jsou souhlasně jako u hřídele dány rovnicí (8.23). Tenzor napětí pak nabývá tvaru popsání rovnicí (8.27).



Obr. 53: znázornění elementu objemu náboje při zatížení momentem síly a osovou silou

$$\sigma_t^{II}(r_2) = 2 \cdot K^{II} + p_2, \quad \sigma_r^{II} = -p_2, \quad (8.26)$$

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} -p_2 & p_2 \cdot f \cdot \sin \beta & p_2 \cdot f \cdot \cos \beta \\ p_2 \cdot f \cdot \sin \beta & 0 & 0 \\ p_2 \cdot f \cdot \cos \beta & 0 & 2 \cdot K^{II} + p_2 \end{bmatrix} \quad (8.27)$$

Hlavní napětí bychom opět hledali jako vlastní čísla tohoto tenzoru.

Pro hodnoty vstupních parametrů uvedených na začátku kapitoly 8 v rovnicích (8.3) a (8.4) lze vypočítat následující hodnoty napětí:

$$\sigma_t^{II} = 16,67 \text{ MPa}, \quad \sigma_r^{II} = -10 \text{ MPa}, \quad \sigma_o^{II} = -0,68 \text{ MPa}$$

$$\tau_k^* = 1,41 \text{ MPa}, \quad \tau_o = 0,51 \text{ MPa}$$

Běžným postupem bychom stanovili tyto hodnoty hlavních napětí:

$$\sigma_1^{II} = \sigma_t^{II} = 16,67 \text{ MPa}, \quad \sigma_2^{II} = \sigma_o^{II} = -0,68 \text{ MPa}, \quad \sigma_3^{II} = \sigma_r^{II} = -10 \text{ MPa}$$

Postupem zahrnující vliv smykových dle (8.27) napětí stanovíme následující hodnoty hlavních napětí:

$$\sigma_1^{II} = 16,74 \text{ MPa}, \quad \sigma_2^{II} = -0,65 \text{ MPa}, \quad \sigma_3^{II} = -10,10 \text{ MPa}$$

8.4.2. a) Trescova hypotéza - τ_{max}

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3$$

Běžný postup:

Postup zahrnující vliv smykového napětí:

$$\sigma_{red}^{II} = 16,67 - (-10) = 26,67 \text{ MPa} \quad \sigma_{red}^{II} = 16,74 - (-10,10) = 26,84 \text{ MPa}$$

8.4.2. b) Teorie pevnosti energetická – HMH

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)}$$

Běžný postup:

Postup zahrnující vliv smykového napětí:

$$\sigma_{red}^{II} = 23,44 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red}^{II} = 23,58 \text{ MPa}$$

9 Výsledky simulace v programu Abaqus

V této kapitole budou popsány stavy zatížení soustavy uvedené v kapitole 8 pomocí analýzy MKP. Užití parametry soustavy jsou popsány rovnicí (9.1). Průběhy napětí stanovíme v ploše uprostřed hřídele a náboje, kde je nejmenší vliv okrajů uložení, abychom mohli snadno srovnat výsledky teoretické s výsledky získanými pomocí simulace MKP.

Přesah popsáný v rovnici (9.1) je dimenzován tak, aby vyvolal kontaktní tlak v nalisované ploše $p_2 = 10 \text{ MPa}$.

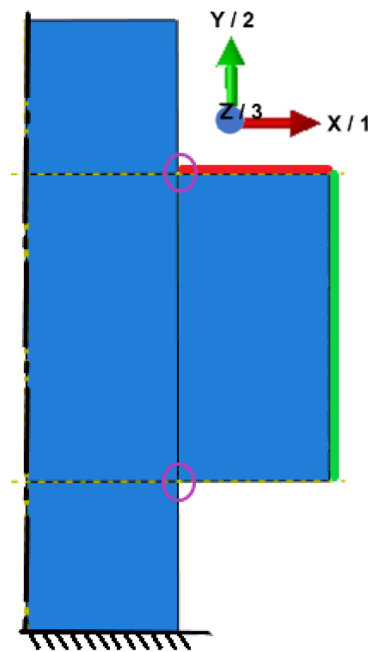
$$r_2 = 100 \text{ mm}, r_3 = 200 \text{ mm}, p_1 = 0 \text{ MPa}, p_3 = 0 \text{ MPa}, \delta = 12,7 \mu\text{m} \quad (9.1)$$

$$\begin{aligned} b = 200 \text{ mm}, \quad f = 0,15, \quad r_L = 200 \text{ mm} \\ L_{\text{hřídel}} = 400 \text{ mm}, \quad L_{\text{naboj}} = 200 \text{ mm} \end{aligned} \quad (9.2)$$

Soustava hřídel-náboj v tomto případě již nemá stejnou délku plochy nalisovaného spoje, délku hřídele a délku náboje. Vlivem tohoto uložení v hřídeli i náboji dochází k změně napjatosti především na okrajích uložení označených na obr. 56 fialovými kroužky.

Červeně označená plocha je užitá k zavádění lisovací síly. Plocha zelená slouží pro aplikaci kroutícího momentu, případně osově síly příslušící šikmému ozubení.

Příslušná lisovací síla a kroutící moment je zde dopočítáván z kontaktního tlaku p_2 v ploše nalisovaného spojení, kterého chceme dosáhnout. Tyto hodnoty pro případ zatížení lisovací silou, nebo zatížení kroutícím momentem jsou z důvodů konvergence simulace přenásobeny koeficientem $k = 0.95$. Pro vyšší hodnoty simulace nebyla schopna najít stav statické rovnováhy pomocí implicitní simulace. Stav lisování uvažujeme na konci tohoto děje, kdy je náboj na místě a zatížen statickou silou.

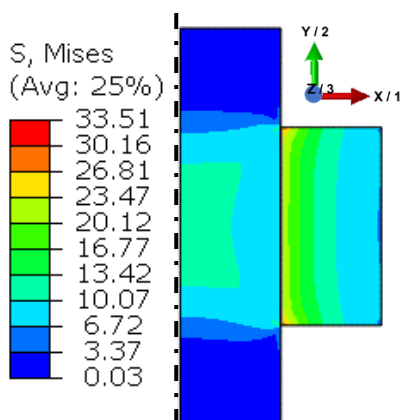


Obr. 56: Model pro simulaci v programu Abaqus

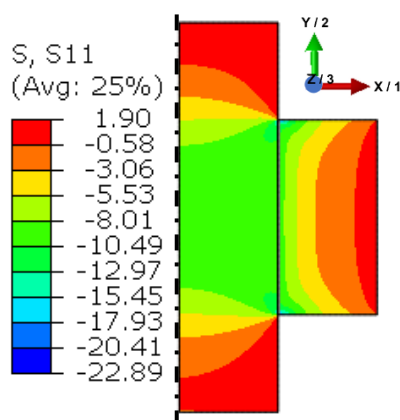
9.1. Soustava HN v nezátženém stavu

V této stati budou ukázány výsledky získané pomocí simulací MKP pro nezátžený stav soustavy Hřídle – Náboj.

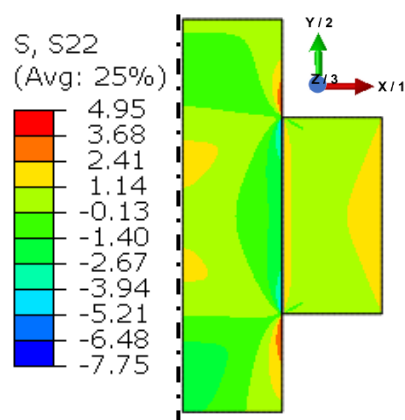
Na napětových mapách na obr. 56-60 je vyobrazeno rozložení napětí SVM – stress von Mises, S11 – napětí radiální, S22 – napětí osová, S33 – napětí tečné, S12 smykové napětí $\tau_{xy} = \tau_o$. Zbylá napětí – S13, S23 jsou nulová.



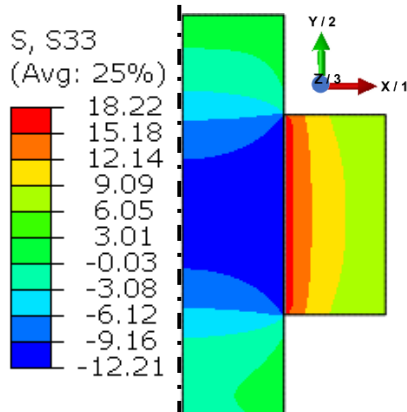
Obr. 54: Napětová mapa SVM pro soustavu HN v nezátženém stavu – MKP



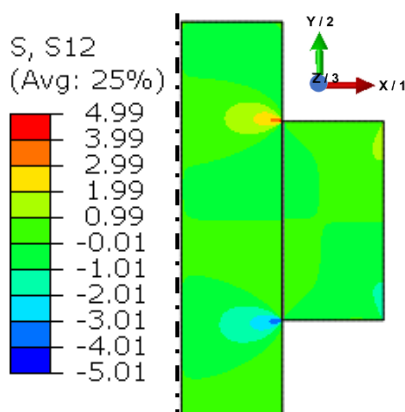
Obr. 55: Napětová mapa S11 pro soustavu HN v nezátženém stavu – MKP



Obr. 56: Napětová mapa S22 pro soustavu HN v nezátženém stavu – MKP

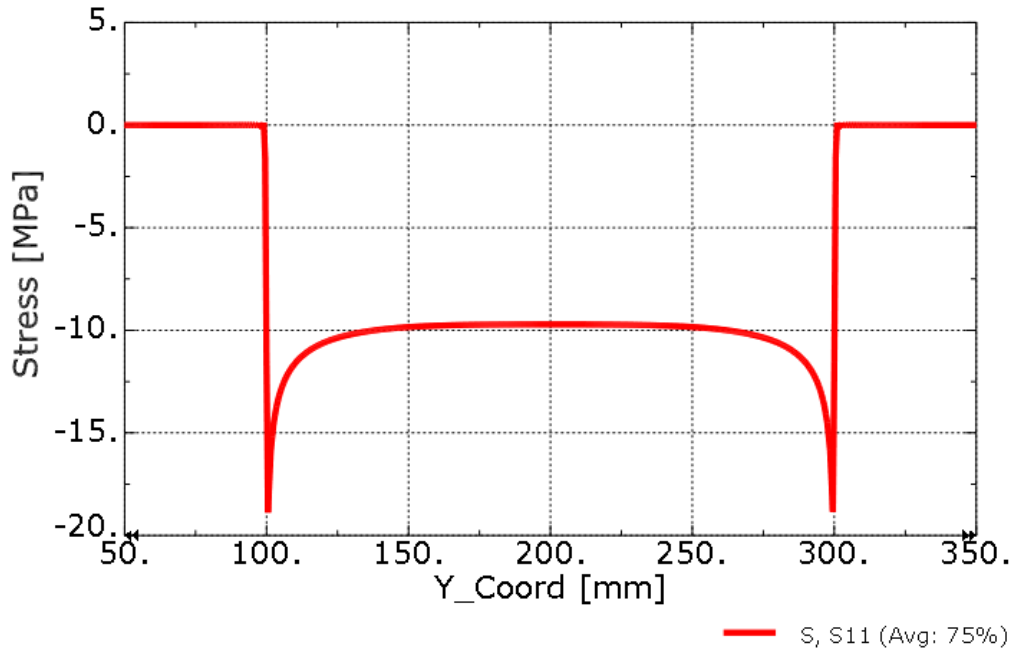


Obr. 57: Napětová mapa S33 pro soustavu HN v nezátženém stavu – MKP



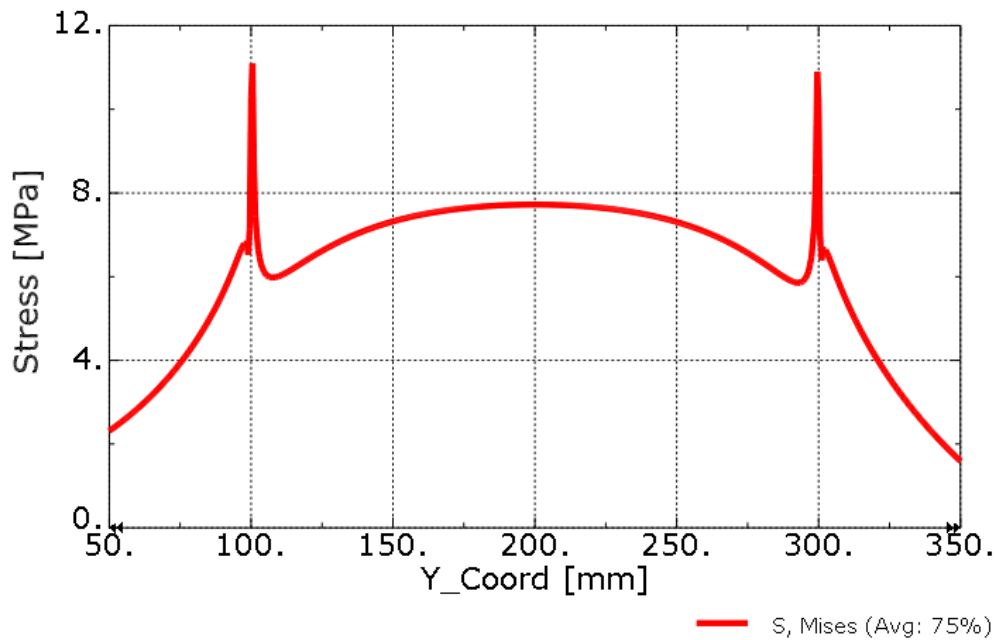
Obr. 58: Napětová mapa S12 pro soustavu HN v nezátženém stavu – MKP

Jedním z našich hlavních předpokladů byl konstantní průběh smykových napětí, tak jako tomu bylo u soustav se stejnou délkou hřídele, náboje a plochy nalisování. Aby tento předpoklad byl splněn, je nezbytné, aby průběh radiálního napětí po délce nalisovaného spoje byl konstantní. Tento předpoklad dle obr. 61 není splněn. Hodnoty tlaku uprostřed plochy jsou však velmi blízko záporné hodnotě tlaku $p_2 = 10 \text{ MPa}$. Zde předpokládáme platnost dříve odvozených vztahů s poměrně malou chybou.



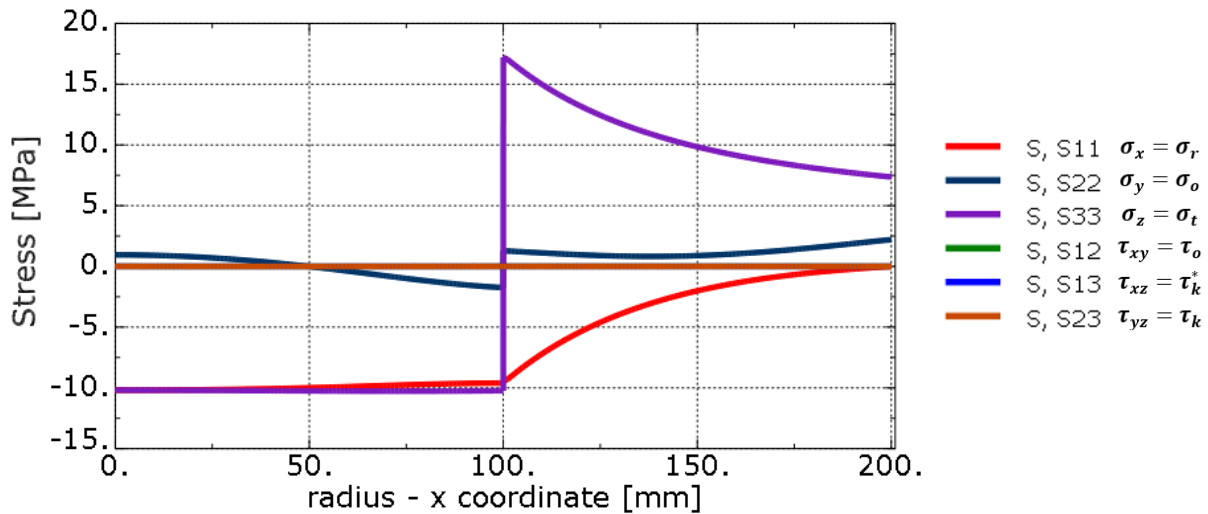
Obr. 59: Graf průběhu radiálního napět v hřídeli podél Y pro soustavu HN v nezátíženém stavu – MKP

Na obr. 62 je znázorněn průběh Misesova napětí podél plochy nalisování. Z tohoto průběhu je jasně patrné, že kraje uložení jsou koncentrátory napětí a uložení je nutno navrhovat s ohledem právě na tyto místa.



Obr. 60: Graf průběhu Misesova napět v hřídeli podél Y pro soustavu HN v nezátíženém stavu – MKP

Na Obr. 63 je vyobrazen průběh napětí středem hřídele, či náboje, zde je nejmenší vliv okrajů uložení a předpokládáme tedy největší podobnost klasické teorii silnostěnných nádob.



Obr. 61: Grafy průběhů napětí pro soustavu HN v nezátíženém stavu – MKP

Hodnoty napětí na poloměru r_2 získané pomocí simulace MKP – Hřídel:

$$\begin{aligned} \sigma_o^I &= -1,74 \text{ MPa}, & \sigma_r^I &= -9,60 \text{ MPa}, & \sigma_t^I &= -10,25 \text{ MPa} \\ \sigma_1^I &= -1,74 \text{ MPa}, & \sigma_2^I &= -9,60 \text{ MPa}, & \sigma_3^I &= -10,23 \text{ MPa} \\ \sigma_{VM}^I &= 8,19 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Hodnoty napětí na poloměru r_2 získané pomocí simulace MKP – Náboj:

$$\begin{aligned} \sigma_t^{II} &= 17,20 \text{ MPa}, & \sigma_o^{II} &= 1,28 \text{ MPa}, & \sigma_r^{II} &= -9,46 \text{ MPa} \\ \sigma_1^{II} &= 17,20 \text{ MPa}, & \sigma_2^{II} &= 1,28 \text{ MPa}, & \sigma_3^{II} &= -9,46 \text{ MPa} \\ \sigma_{VM}^{II} &= 23,23 \text{ MPa} \end{aligned}$$

V kapitole 6.1 byly simulací MKP zjištěny následující hodnoty napětí pro náboj:

$$\sigma_1^{II} = 16,65 \text{ MPa}, \quad \sigma_3^{II} = -9,99 \text{ MPa}, \quad \sigma_{VM}^{II} = 23,31 \text{ MPa}$$

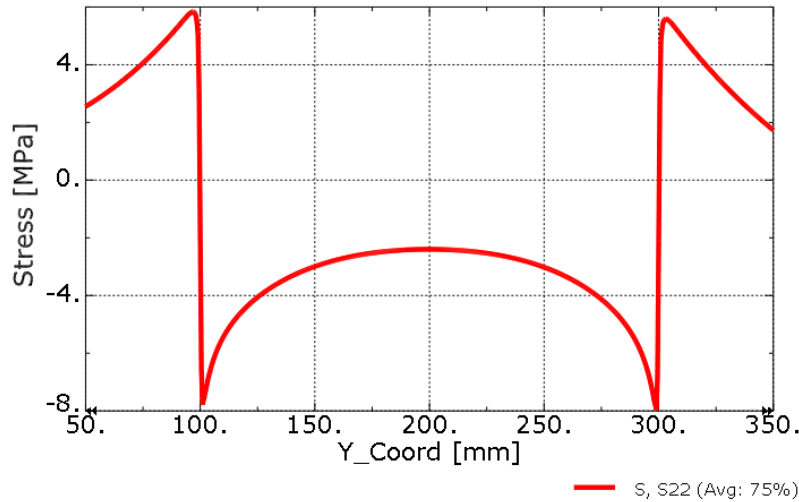
V kapitole 6.1 byly klasickým výpočtem stanoveny následující hodnoty napětí pro náboj:

$$\sigma_1^{II} = 16,67 \text{ MPa}, \quad \sigma_3^{II} = -10 \text{ MPa}, \quad \sigma_{VM}^{II} = 23,33 \text{ MPa}$$

Hodnota Misesova napětí $\sigma_{VM}^{II} = 23,23 \text{ MPa}$ získaná simulací se zohledněním vlivů okrajů uložení se od předchozích liší o 0,43 %.

Z napěťových map je vidno, že okraje uložení mají zásadní vliv na stav napjatosti a potenciální kritická místa, které by pro takové spojení bylo nutno analyzovat.

Dále je možné pozorovat na grafu na obr. 64 nenulový průběh osového napětí podél délky plochy nalisování v hřídeli, právě vlivem uložení. Na okrajích tohoto nalisování má toto osově napětí velmi vysoké gradienty. Pro případný ohybový moment by hodnoty na krajích byly posunuty o toto osově napětí. Tyto místa jsou detailněji probrány v [8].

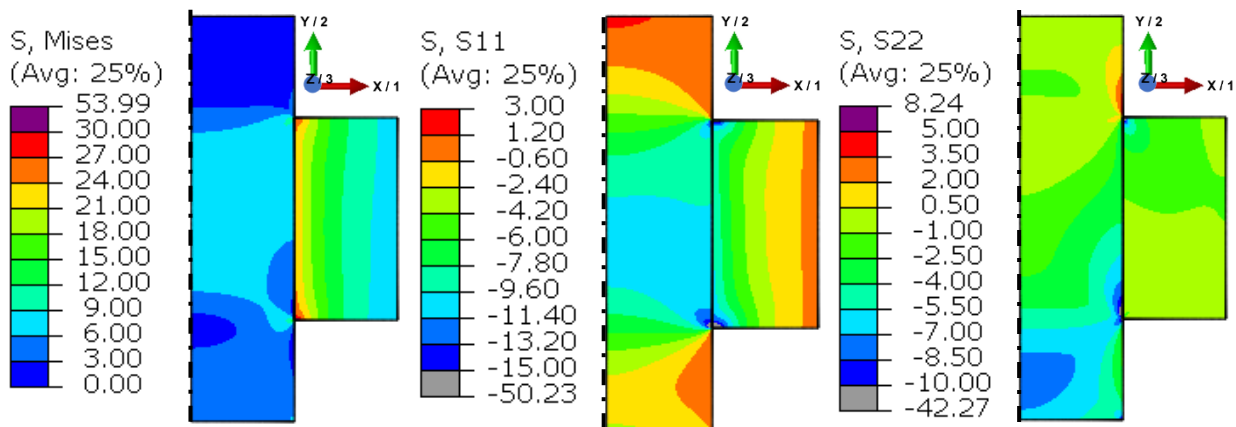


Obr. 62: Graf průběhu osového napětí v hřídeli podél Y pro soustavu HN v nezátíženém stavu – MKP

9.2. Montážní stav stavby soustavy HN – lisování

V této stati budou ukázány výsledky získané pomocí simulací MKP pro soustavu Hřídel – Náboj zatíženou lisovací silou na konci procesu lisování.

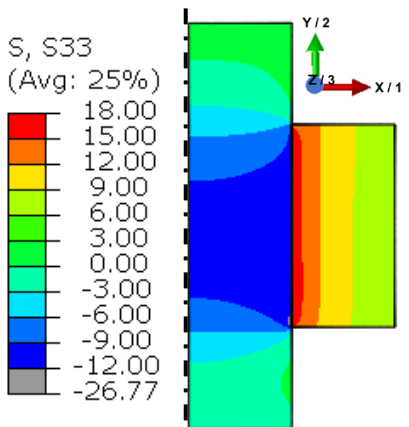
Na napěťových mapách na obr. 65-69 je vyobrazeno rozložení napětí SVM – stress von Mises, S11 – napětí radiální, S22 – napětí osově, S33 – napětí tečné, S12 smykové napětí $\tau_{xy} = \tau_o$. Hodnoty zbylých napětí – S13, S23 jsou přibližně rovny nule.



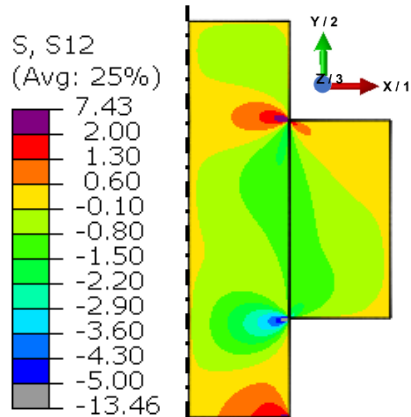
Obr. 63: Napěťová mapa SVM pro soustavu HN zatíženou lisovací silou – MKP

Obr. 64: Napěťová mapa S11 pro soustavu HN zatíženou lisovací silou – MKP

Obr. 65: Napěťová mapa S22 pro soustavu HN zatíženou lisovací silou – MKP

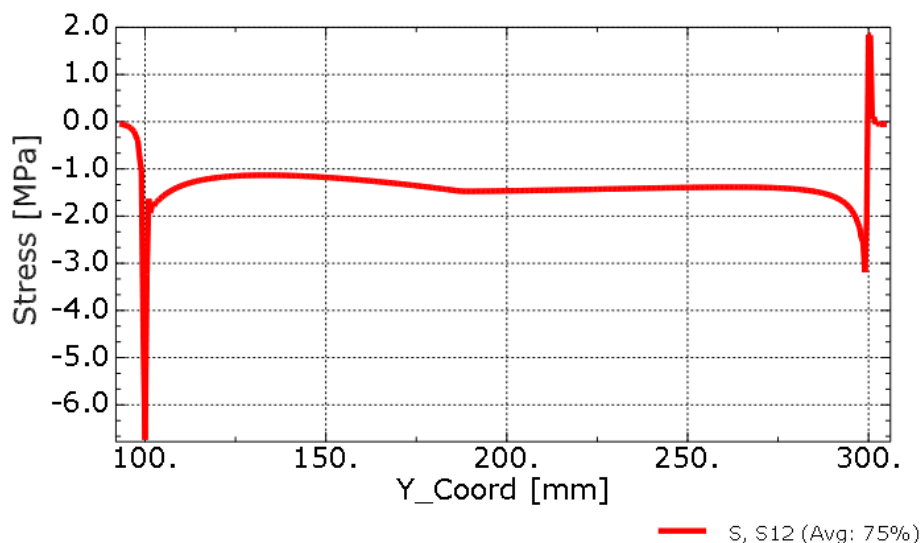


Obr. 66: Napěťová mapa S33 pro soustavu HN zatíženou lisovací silou – MKP



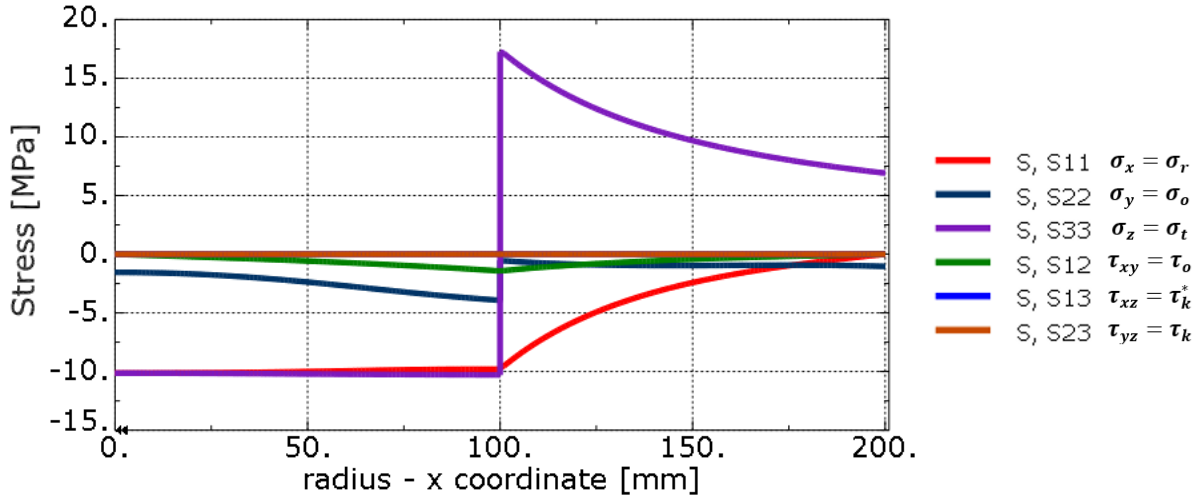
Obr. 67: Napěťová mapa S12 pro soustavu HN zatíženou lisovací silou – MKP

Průběh napětí τ_o , podél osy symetrie v ploše nalisování je vyobrazeno v grafu na obr. 70. Hodnota napětí $\tau_{xy} = \tau_o$ byla v kapitole stanovena na hodnotu $\tau_o = 1,43 \text{ MPa}$. V prostřední části grafu, lze odečíst hodnotu $\tau_k^* = 1,46 \text{ MPa}$. Na okrajích, kde je však vrub, toto napětí vzroste. Záleží také na parametrech simulace, jak vysoká tyto napětí vypočteme. Pro tuto oblast by pak bylo nutné simulaci optimalizovat.



Obr. 68: Graf průběhů napětí S12 podél osy Y pro soustavu HN zatíženou lisovací silou – MKP

Na Obr. 71 je vyobrazen průběh napětí středem hřídele, či náboje, zde je nejmenší vliv okrajů uložení a předpokládáme tedy největší podobnost klasické teorii silnostěnných nádob.



Obr. 69: Grafy průběhů napětí pro soustavu HN zatíženou lisovací silou – MKP

Hodnoty napětí na poloměru r_2 získané pomocí simulace MKP – Hřídel:

$$\begin{aligned}\sigma_o^I &= -3,88 \text{ MPa}, & \sigma_r^I &= -9,82 \text{ MPa}, & \sigma_t^I &= -10,27 \text{ MPa} \\ \sigma_1^I &= -3,54 \text{ MPa}, & \sigma_2^I &= -10,16 \text{ MPa}, & \sigma_3^I &= -10,27 \text{ MPa} \\ \sigma_{VM}^I &= 6,68 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Hodnoty napětí na poloměru r_2 získané pomocí simulace MKP – Náboj:

$$\begin{aligned}\sigma_t^{II} &= 17,29 \text{ MPa}, & \sigma_o^{II} &= -0,61 \text{ MPa}, & \sigma_r^{II} &= -9,75 \text{ MPa} \\ \sigma_1^{II} &= 17,29 \text{ MPa}, & \sigma_2^{II} &= -0,39 \text{ MPa}, & \sigma_3^{II} &= -9,98 \text{ MPa} \\ \sigma_{VM}^{II} &= 23,96 \text{ MPa}\end{aligned}$$

V kapitole 8.1 byly klasickým výpočtem stanoveny následující hodnoty napětí pro hřídel:

$$\begin{aligned}\sigma_1^I &= \sigma_o^I = -5,7 \text{ MPa}, & \sigma_2^I &= \sigma_3^I = \sigma_r^I = \sigma_t^I - 10 \text{ MPa} \\ \sigma_{VM}^I &= 4,3 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Dále výpočtem zahrnující smyková napětí byly stanoveny tyto hodnoty napětí pro hřídel:

$$\begin{aligned}\sigma_1^I &= -5,27 \text{ MPa}, & \sigma_2^I &= -10 \text{ MPa}, & \sigma_3^I &= -10,43 \text{ MPa} \\ \sigma_{VM}^I &= 4,96 \text{ MPa}\end{aligned}$$

V kapitole 8.1 byly klasickým výpočtem stanoveny následující hodnoty napětí pro náboj:

$$\begin{aligned}\sigma_1^{II} &= \sigma_t^{II} = 16,67 \text{ MPa}, & \sigma_2^{II} &= \sigma_o^{II} = -1,9 \text{ MPa}, & \sigma_3^{II} &= \sigma_r^{II} = -10 \text{ MPa} \\ \sigma_{VM}^{II} &= 23,68 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Dále výpočtem zahrnující smyková napětí byly stanoveny tyto hodnoty napětí pro náboj:

$$\sigma_1^{II} = 16,67 \text{ MPa}, \quad \sigma_2^{II} = -1,66 \text{ MPa}, \quad \sigma_3^{II} = -10,24 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{VM}^{II} = 23,81 \text{ MPa}$$

Teoretická hodnota Misesova napětí $\sigma_{VM}^I = 4,96 \text{ MPa}$ pro hřídel získaná výpočtem zahrnujícím vliv smykových napětí se od hodnoty Misesova napětí $\sigma_{VM}^I = 6,68 \text{ MPa}$ získaného simulací liší o 25,7 %. Tento rozdíl je především způsoben rozdílem osových napětí, jak ukazují vztahy (9.3). Větších tlakových hodnot je dosaženo na krajích uložení, kde následně přecházejí v hodnoty tahové, viz obr. 64. V okrajích uložení je však dosahováno vyšších absolutních hodnot ostatních napětí a ani zde bychom se teoretickou hodnotou získanou postupem z odstavce 8.1 více nepřiblížili hodnotě skutečné.

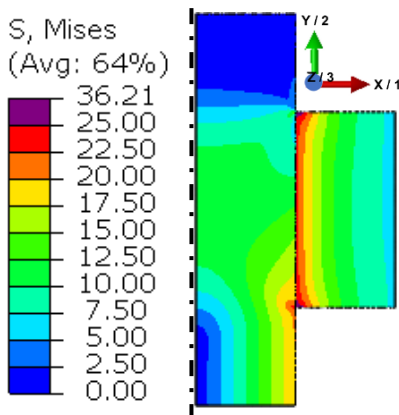
$$\sigma_{MKP}^I = -3,88 \text{ MPa}, \quad \sigma_{Teor}^I = -5,7 \text{ MPa} \quad (9.3)$$

Teoretická hodnota Misesova napětí $\sigma_{VM}^{II} = 23,81 \text{ MPa}$ pro náboj získaná výpočtem zahrnujícím vliv smykových napětí se od hodnoty Misesova napětí $\sigma_{VM}^{II} = 23,96 \text{ MPa}$ získaného simulací liší o 0,6 %. Naproti tomu hodnota Misesova napětí pro náboj získaná běžným postupem $\sigma_{VM}^{II} = 23,68 \text{ MPa}$ se liší o 1,2 %. Výsledek je však diskutovatelný, jelikož jde vidět, že hodnoty hlavních napětí se s takovou přesností neshodují. Pro takový případ by prosté přenásobením bezpečnostním koeficientem bylo dostačujícím řešením, pokud pomineme zásadní rozdíly na okrajích uložení, které nám určují kritická místa s daleko vyššími napětími.

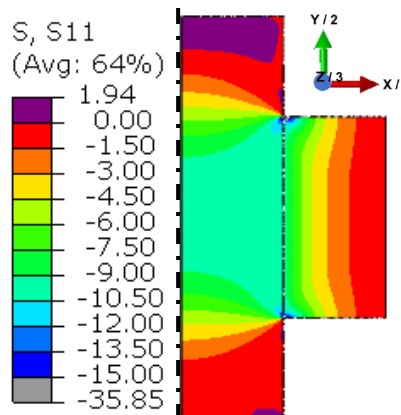
9.3. Soustava HN zatížená kroutícím momentem

V této stati budou ukázány výsledky získané pomocí simulací MKP pro soustavu Hřídel – Náboj kroutícím momentem na vnější válcové ploše.

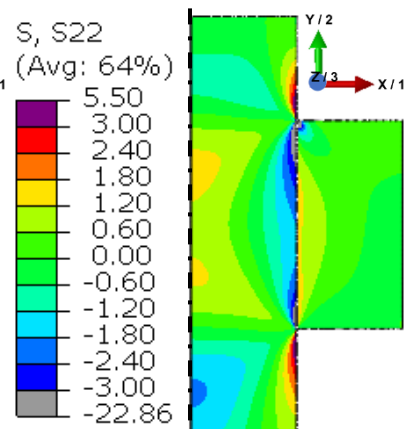
Na napěťových mapách na obr. 72-78 je vyobrazeno rozložení napětí SVM – stress von Mises, S11 – napětí radiální, S22 – napětí osová, S33 – napětí tečná, S12 smykové napětí $\tau_{xy} = \tau_o$, S23 smykové napětí $\tau_{yz} = \tau_k$, S13 smykové napětí $\tau_{xz} = \tau_k^*$.



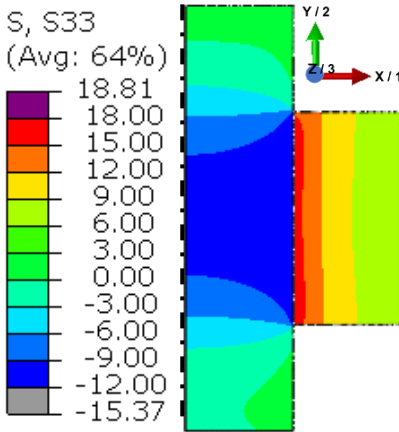
Obr. 70: Napěťová mapa SVM pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem – MKP



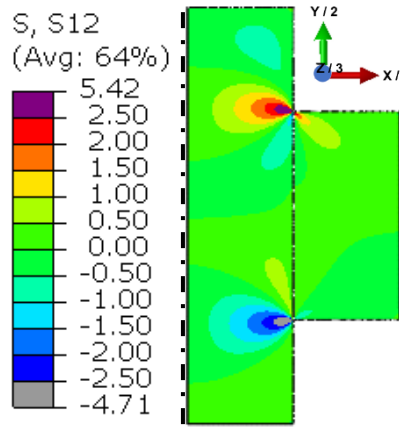
Obr. 71: Napěťová mapa S11 pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem – MKP



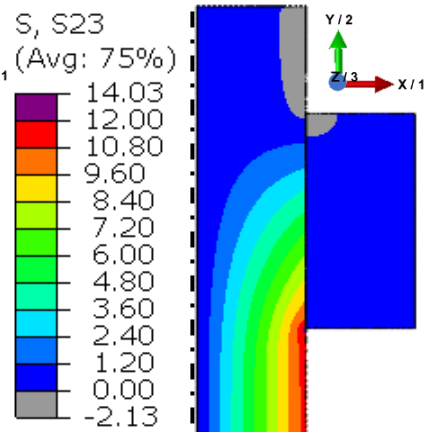
Obr. 72: Napěťová mapa S22 pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem – MKP



Obr. 73: Napěťová mapa S33 pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem – MKP

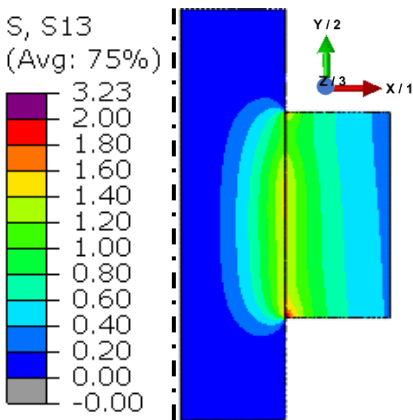


Obr. 74: Napěťová mapa S12 pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem – MKP

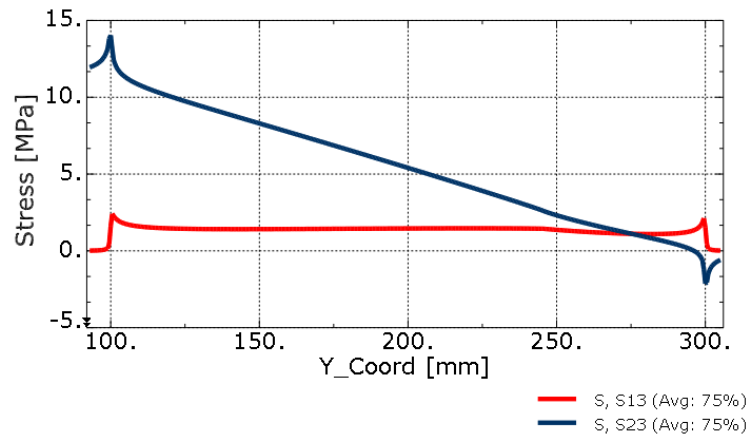


Obr. 75: Napěťová mapa S23 pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem – MKP

V kapitole 8.3 na obr. 49 byl popsán tok momentu a následně průběh smykového napětí S23 $\tau_{yz} = \tau_k$, které je vyobrazeno na napěťové mapě na obr. 77 a grafu na obr. 79. Z tohoto grafu uprostřed náboje, tedy ve vzdálenosti $y = 200 \text{ mm}$, lze vyčíst hodnotu $\tau_k = 5,4 \text{ MPa}$. Teoretická hodnota stanovená dle 8.3.1 je $\tau_k = 5,7 \text{ MPa}$.



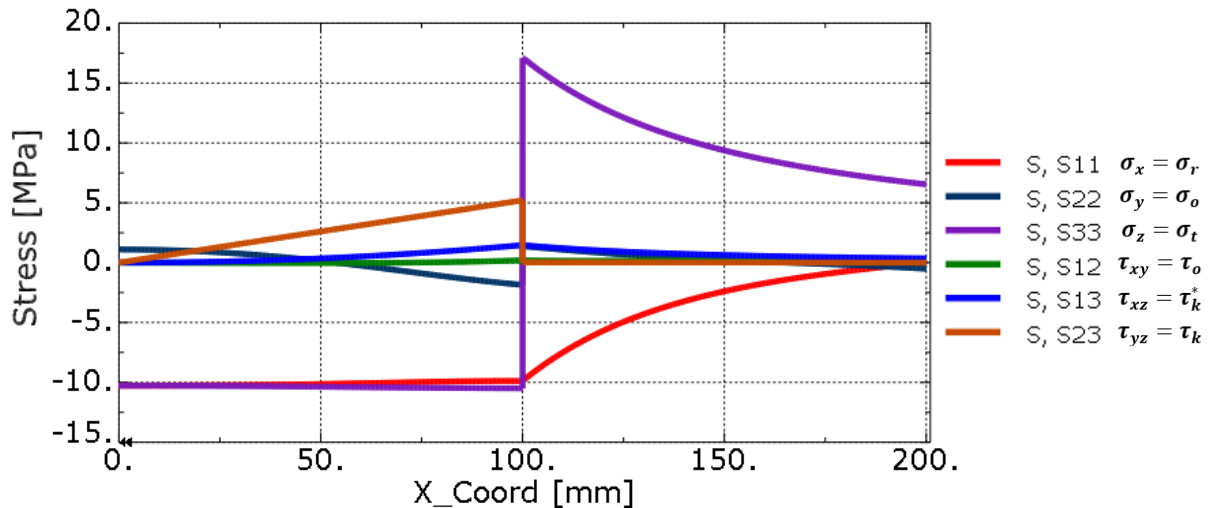
Obr. 76: Napěťová mapa S13 pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem – MKP



Obr. 77: Grafy průběhů napětí S13, S23 podél osy Y pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem – MKP

Průběh obou napětí τ_k, τ_k^* podél osy symetrie v ploše nalisování je vyobrazeno v grafu na obr. 79. Hodnota napětí $\tau_{xz} = \tau_k^*$ byla v kapitole stanovena na hodnotu $\tau_k^* = 1,43 \text{ MPa}$. V prostřední části grafu, lze odečíst hodnotu $\tau_k^* = 1,45 \text{ MPa}$. Na okrajích, kde je však vrub, toto napětí vzroste.

Na obr. 80 je vyobrazen průběh napětí středem hřídele, či náboje, zde je nejmenší vliv okrajů uložení a předpokládáme tedy největší podobnost klasické teorii silnostěnných nádob.



Obr. 78: Grafy průběhů napětí pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem – MKP

Hodnoty napětí na poloměru r_2 získané pomocí simulace MKP – Hřídel:

$$\begin{aligned} \sigma_o^I &= 1,79 \text{ MPa}, & \sigma_r^I &= -9,87 \text{ MPa}, & \sigma_t^I &= -10,47 \text{ MPa} \\ \sigma_1^I &= 0,94 \text{ MPa}, & \sigma_2^I &= -9,53 \text{ MPa}, & \sigma_3^I &= -13,59 \text{ MPa} \\ \sigma_{VM}^I &= 12,94 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Hodnoty napětí na poloměru r_2 získané pomocí simulace MKP – Náboj:

$$\begin{aligned} \sigma_t^{II} &= 17,06 \text{ MPa}, & \sigma_o^{II} &= 1,35 \text{ MPa}, & \sigma_r^{II} &= -9,80 \text{ MPa} \\ \sigma_1^{II} &= 17,14 \text{ MPa}, & \sigma_2^{II} &= 1,35 \text{ MPa}, & \sigma_3^{II} &= -9,88 \text{ MPa} \\ \sigma_{VM}^{II} &= 23,52 \text{ MPa} \end{aligned}$$

V kapitole 8.1 byly klasickým výpočtem stanoveny následující hodnoty napětí pro hřídel:

$$\begin{aligned} \sigma_1^I &= \sigma_o^I = 0 \text{ MPa}, & \sigma_2^I &= \sigma_3^I = \sigma_r^I = \sigma_t^I = -10 \text{ MPa} \\ \sigma_{VM}^I &= 10 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Dále výpočtem zahrnující smyková napětí byly stanoveny tyto hodnoty napětí pro hřídel:

$$\begin{aligned} \sigma_1^I &= 2,61 \text{ MPa}, & \sigma_2^I &= -9,49 \text{ MPa}, & \sigma_3^I &= -13,13 \text{ MPa} \\ \sigma_{VM}^I &= 14,27 \text{ MPa} \end{aligned}$$

V kapitole 8.1 byly klasickým výpočtem stanoveny následující hodnoty napětí pro náboj:

$$\begin{aligned} \sigma_1^{II} &= \sigma_t^{II} = 16,67 \text{ MPa}, & \sigma_2^{II} &= \sigma_o^{II} = 0 \text{ MPa}, & \sigma_3^{II} &= \sigma_r^{II} = -10 \text{ MPa} \\ \sigma_{VM}^{II} &= 23,33 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Dále výpočtem zahrnující smyková napětí byly stanoveny tyto hodnoty napětí pro náboj:

$$\sigma_1^{II} = 16,74 \text{ MPa}, \quad \sigma_2^{II} = 0 \text{ MPa}, \quad \sigma_3^{II} = -10,08 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{VM}^{II} = 23,46 \text{ MPa}$$

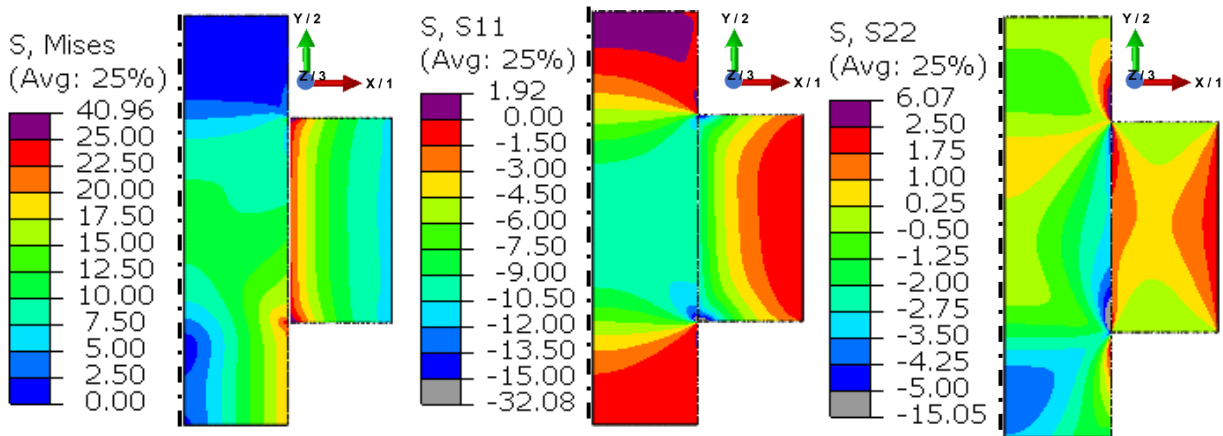
Teoretická hodnota Misesova napětí $\sigma_{VM}^I = 14,27 \text{ MPa}$ pro hřídel získaná výpočtem zahrnujícím vliv smykových napětí se od hodnoty Misesova napětí $\sigma_{VM}^I = 12,94 \text{ MPa}$ získaného simulací liší o 10,3 %. Tento rozdíl je především způsoben rozdílem osových napětí, jak ukazuje rovnice (9.4).

$$\sigma_{oMKP}^I = 1,79 \text{ MPa}, \quad \sigma_{oTeor}^I = 0 \text{ MPa} \quad (9.4)$$

Teoretická hodnota Misesova napětí $\sigma_{VM}^{II} = 23,46 \text{ MPa}$ pro náboj získaná výpočtem zahrnujícím vliv smykových napětí se od hodnoty Misesova napětí $\sigma_{VM}^{II} = 23,52 \text{ MPa}$ získaného simulací liší o 0,3 %. Naproti tomu hodnota Misesova napětí pro náboj získaná běžným postupem $\sigma_{VM}^{II} = 23,33 \text{ MPa}$ se liší o 0,8 %. Výsledek je však diskutovatelný, jelikož jde vidět, že hodnoty hlavních napětí se s takovou přesností neshodují.

9.4. Soustava HN zatížená krutícím momentem a osovou silou

V této stati budou ukázány výsledky získané pomocí simulací MKP pro soustavu Hřídel – Náboj zatíženou krutícím momentem na vnější válcové ploše a osovou silou příslušící šikmému ozubení.

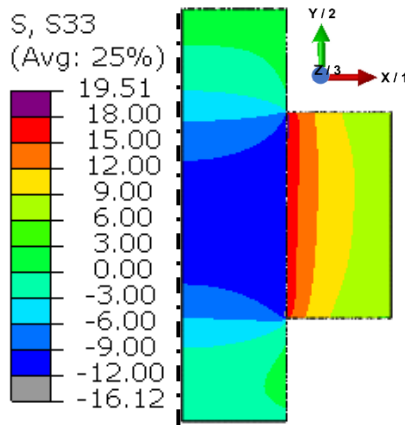


Obr. 79: Napěťová mapa SVM pro soustavu HN zatíženou krutícím momentem a osovou silou – MKP

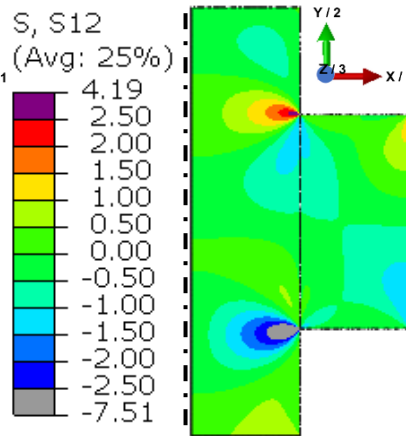
Obr. 80: Napěťová mapa S11 pro soustavu HN zatíženou krutícím momentem a osovou silou – MKP

Obr. 81: Napěťová mapa S22 pro soustavu HN zatíženou krutícím momentem a osovou silou – MKP

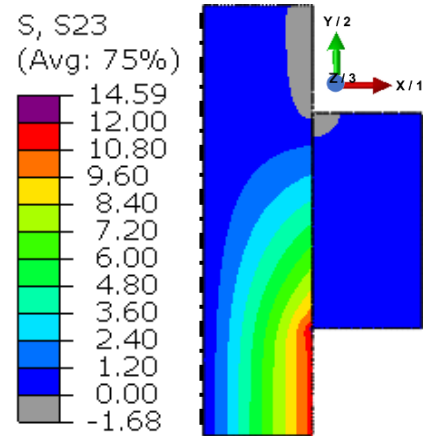
Na napěťových mapách na obr. 81-87 je vyobrazeno rozložení napětí SVM – stress von Mises, S11 – napětí radiální, S22 – napětí osově, S33 – napětí tečné, S12 smykové napětí $\tau_{xy} = \tau_o$, S23 smykové napětí $\tau_{yz} = \tau_k$, S13 smykové napětí $\tau_{xz} = \tau_k^*$.



Obr. 82: Napěťová mapa S33 pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem a osovou silou – MKP

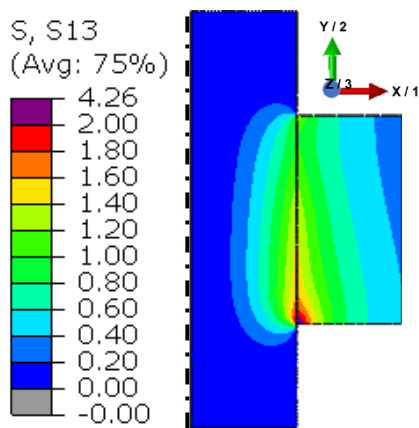


Obr. 83: Napěťová mapa S12 pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem a osovou silou – MKP

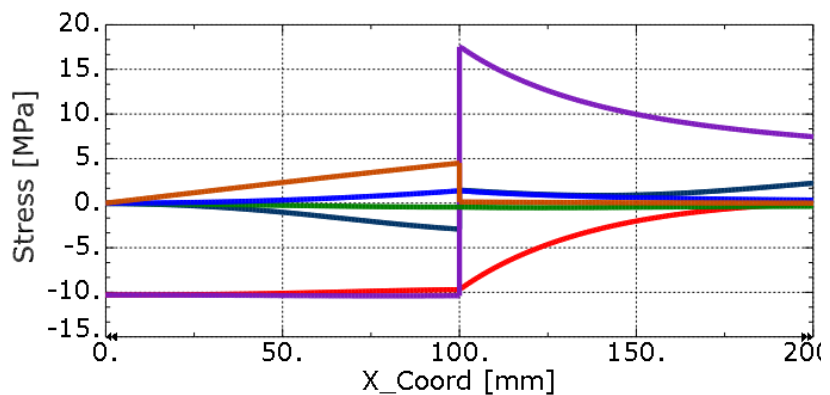


Obr. 84: Napěťová mapa S23 pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem a osovou silou – MKP

Na Obr. 88 je vyobrazen průběh napětí středem hřídele, či náboje, zde je nejmenší vliv okrajů uložení a předpokládáme tedy největší podobnost klasické teorii silnostěnných nádob.



Obr. 85: Napěťová mapa S13 pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem a osovou silou – MKP



Obr. 86: Grafy průběhů napětí pro soustavu HN zatíženou kroutícím momentem a osovou silou – MKP

- S, S11 $\sigma_x = \sigma_r$
- S, S22 $\sigma_y = \sigma_o$
- S, S33 $\sigma_z = \sigma_t$
- S, S12 $\tau_{xy} = \tau_o$
- S, S13 $\tau_{xz} = \tau_k^+$
- S, S23 $\tau_{yz} = \tau_k$

Hodnoty napětí na poloměru r_2 získané pomocí simulace MKP – Hřídel:

$$\begin{aligned} \sigma_o^I &= -2,93 \text{ MPa}, & \sigma_r^I &= -9,73 \text{ MPa}, & \sigma_t^I &= -10,40 \text{ MPa} \\ \sigma_1^I &= -0,61 \text{ MPa}, & \sigma_2^I &= -9,17 \text{ MPa}, & \sigma_3^I &= -13,30 \text{ MPa} \\ \sigma_{VM}^I &= 11,21 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Hodnoty napětí na poloměru r_2 získané pomocí simulace MKP – Náboj:

$$\begin{aligned}\sigma_t^{II} &= 17,49 \text{ MPa}, & \sigma_o^{II} &= 1,40 \text{ MPa}, & \sigma_r^{II} &= -9,66 \text{ MPa} \\ \sigma_1^{II} &= 17,56 \text{ MPa}, & \sigma_2^{II} &= 1,42 \text{ MPa}, & \sigma_3^{II} &= -9,75 \text{ MPa} \\ \sigma_{VM}^{II} &= 23,78 \text{ MPa}\end{aligned}$$

V kapitole 8.1 byly klasickým výpočtem stanoveny následující hodnoty napětí pro hřídel:

$$\begin{aligned}\sigma_1^I = \sigma_o^I &= -2,05 \text{ MPa}, & \sigma_2^I = \sigma_3^I = \sigma_r^I = \sigma_t^I &= -10 \text{ MPa} \\ \sigma_{VM}^I &= 7,95 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Dále výpočtem zahrnující smyková napětí byly stanoveny tyto hodnoty napětí pro hřídel:

$$\begin{aligned}\sigma_1^I &= 0,98 \text{ MPa}, & \sigma_2^I &= -9,79 \text{ MPa}, & \sigma_3^I &= -13,25 \text{ MPa} \\ \sigma_{VM}^I &= 12,86 \text{ MPa}\end{aligned}$$

V kapitole 8.1 byly klasickým výpočtem stanoveny následující hodnoty napětí pro náboj:

$$\begin{aligned}\sigma_1^{II} = \sigma_t^{II} &= 16,67 \text{ MPa}, & \sigma_2^{II} = \sigma_o^{II} &= -0,68 \text{ MPa}, & \sigma_3^{II} = \sigma_r^{II} &= -10 \text{ MPa} \\ \sigma_{VM}^{II} &= 23,44 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Dále výpočtem zahrnující smyková napětí byly stanoveny tyto hodnoty napětí pro náboj:

$$\begin{aligned}\sigma_1^{II} &= 16,74 \text{ MPa}, & \sigma_2^{II} &= -0,65 \text{ MPa}, & \sigma_3^{II} &= -10,10 \text{ MPa} \\ \sigma_{VM}^{II} &= 23,58 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Teoretická hodnota Misesova napětí $\sigma_{VM}^I = 12,86 \text{ MPa}$ pro hřídel získaná výpočtem zahrnujícím vliv smykových napětí se od hodnoty Misesova napětí $\sigma_{VM}^I = 11,21 \text{ MPa}$ získaného simulací liší o 14,7 %. Tento rozdíl je především způsoben rozdílem osových napětí, jak ukazuje rovnice (9.5).

$$\sigma_{o_{MKP}}^I = -2,93 \text{ MPa}, \quad \sigma_{o_{Teor}}^I = -2,05 \text{ MPa} \quad (9.5)$$

Teoretická hodnota Misesova napětí $\sigma_{VM}^{II} = 23,58 \text{ MPa}$ pro náboj získaná výpočtem zahrnujícím vliv smykových napětí se od hodnoty Misesova napětí $\sigma_{VM}^{II} = 23,78 \text{ MPa}$ získaného simulací liší o 0,8 %. Naproti tomu hodnota Misesova napětí pro náboj získaná běžným postupem $\sigma_{VM}^{II} = 23,44 \text{ MPa}$ se liší o 1,4 %. Výsledek je však diskutovatelný, jelikož jde vidět, že hodnoty hlavních napětí se s takovou přesností neshodují.

10 Závěr

V analýzách pomocí MKP bylo ukázáno, že kritická místa jsou na kraji uložení nalisovaného spoje, kde jinak zhruba konstantní průběh radiálního a tečného napětí, tedy i smykových napětí, je popsán vysokými gradienty. Přesto však hodnoty ve středu nalisované plochy odpovídají s dostatečnou přesností teorii silnostěnných nádob pro námi uvedený příklad.

S hodnotami výsledných redukovaných napětí jsme se uprostřed hřídele a náboje přiblížili k výsledkům získaným pomocí metody MKP. Jak bylo zmíněno stanovené úvahy o průběhu smykových napětí se potvrdily, avšak jejich vliv na přesnost výsledků je poměrně zanedbatelný vůči vlivům způsobu uložení náboje na hřídeli.

Dále byl ukázán vliv osového napětí, který je taktéž zanedbatelný, a to především pro hřidel na krajích nalisované plochy, kde toto napětí má vysoké gradienty.

Pro dimenzování nalisovaného spoje je tedy nutno přihlídnout především k způsobu uložení na kraji nalisovaného spoje.