

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra matematiky

Studijní program: Aplikované matematicko-stochastické metody



Predikce nerovnováhy v
elektroenergetické přenosové
soustavě

Prediction of the imbalance in the
power system

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vypracoval: Bc. Filip Mairinger
Vedoucí práce: Ing. Jiří Franc, Ph.D.
Rok: 2023

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: Bc. Filip Mairinger
Studijní program: Aplikované matematicko-stochastické metody
Název práce (česky): Predikce nerovnováhy v elektroenergetické přenosové soustavě
Název práce (anglicky): Prediction of the imbalance in the power system

Pokyny pro vypracování:

- 1) Seznamte se se základními vlastnostmi energetické přenosové soustavy a hlavními vlivy, které způsobují nestabilitu v síti.
- 2) Proveďte rešerši metod, které se používají k predikci systémové odchylky a zaměřte se především na metody vycházející z teorie časových řad a Kalmanův filtr v teorii kontroly systémů.
- 3) Implementujte Kalmanův filtr na reálná data z elektroenergetické přenosové soustavy a analyzujte chybu predikce vzhledem k použitým proměnným systému a vzhledem k časovému horizontu predikce.
- 4) Zkonstruujte pomocí předchozích výsledků binární klasifikátor predikující typ odchylky.
- 5) Proveďte porovnání výsledků sestrojeného modelu vzhledem k modelům vycházejících ze strojového učení (RF, NN, ..).

Doporučená literatura:

- 1) J. D. Hamilton, Time Series Analysis. Princeton University Press, 1994.
- 2) R. Hyndman, G. Athanasopoulos, Forecasting: principles and practice. oText, 2018.
- 3) A. Géron, Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn, Keras, and TensorFlow. O'Reilly Media, 2019.
- 4) A. Nielsen, Practical Time Series Analysis: Prediction with Statistics and Machine Learning. O'Reilly Media, 2019.
- 5) Y. Goodfellow, A. Bengio, Courville, Deep Learning: Adaptive Computation and Machine Learning series. The MIT Press, 2016.

Jméno a pracoviště vedoucího diplomové práce:

Ing. Jiří Franc, Ph.D.

České vysoké učení technické v Praze, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, Katedra matematiky, Trojanova 13, 120 00 Praha 2

Jméno a pracoviště konzultanta:

Datum zadání diplomové práce: 28.2.2022

Datum odevzdání diplomové práce: 5.1.2023

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

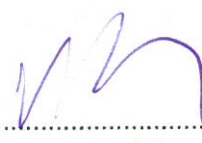
V Praze dne 28.02.2022



garant oboru



vedoucí katedry



děkan



Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a uvedl jsem všechnu použitou literaturu.

V Praze dne 5.1.2023


.....
Bc. Filip Mairinger

Poděkování

Chtěl bych zde poděkovat především svému školiteli Ing. Jiřímu Francovi, Ph.D. za pečlivost, ochotu, vstřícnost a odborné i lidské zázemí při vedení mé diplomové práce.

Bc. Filip Mairinger

Název práce:

Predikce nerovnováhy v elektroenergetické přenosové soustavě

Autor: Bc. Filip Mairinger

Studijní program: Aplikované matematicko-stochastické metody

Druh práce: Diplomová práce

Vedoucí práce: Ing. Jiří Franc, Ph.D.

Katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská,
České vysoké učení technické v Praze

Abstrakt: Tato diplomová práce se zabývá predikcí systémové odchylky v přenosové soustavě. Na začátku této práce je představen energetický trh, systémová odchylka a její regulace, k čemuž je připojen přehled používaných metod při predikci odchylky. V další části je představen Kalmanův filtr, což je hlavní použitý algoritmus. Kalmanův filtr je odvozen z jednodimenzionálního případu a následně je rozšířen do více dimenzí. Poté jsou představena použitá data a stavový model trhu s elektřinou. Pak je implementován základní referenční model, LSTM a Kalmanův filtr a porovnávána jejich predikce na jeden a dva kroky dopředu. Je přidáno i několik binárních klasifikátorů pro predikci přebytku nebo nedostatku elektřiny, které jsou rovněž porovnány s Kalmanovým filtrem. Na závěr jsou navržena možná vylepšení a přístupy, kterými se lze zabývat.

Klíčová slova: Kalmanův filtr, energetický trh, systémová odchylka

Title:

Prediction of the imbalance in the power system

Author: Bc. Filip Mairinger

Abstract: This master thesis deals with the prediction of system imbalance in the electric transmission system. At the beginning of this thesis, the electricity market, system deviation, and its regulation are introduced, followed by an overview of the methods used in imbalance prediction. The following section presents the Kalman filter, the main algorithm used. The Kalman filter is derived from the one-dimensional case and then extended to multiple dimensions. Afterward, the data used and the state model of the electricity market are presented. Then, the baseline reference model, LSTM and Kalman filter are implemented, and their predictions are compared with one and two steps prediction horizon. Several binary classifiers are added to predict electricity surplus or deficit, which are compared with the Kalman filter. Finally, possible improvements and approaches are suggested for consideration.

Key words: Kalman filter, electricity market, system imbalance

Obsah

Úvod	11
1 Energetický trh a vznik odchylky	13
1.1 Regulační energie	14
1.2 Vnitrodenní trh	16
1.3 Rešerše přístupů pro odhad odchylky	16
2 Kalmanův filtr	19
2.1 Intuitivní odvození v jedné dimenzi	19
2.2 Rozšíření do více dimenzí	22
2.2.1 Rovnice extrapolace stavu	22
2.2.2 Rovnice extrapolace kovariance	24
2.2.3 Rovnice aktualizace stavu	24
2.2.4 Rovnice aktualizace kovariance	25
2.2.5 Kalmanův přírůstek	26
2.3 Formální shrnutí	31
3 Implementace Kalmanova filtru na reálných datech	37
3.1 Data	37
3.1.1 Odchylka	38
3.1.2 Plánovaná výroba	39
3.1.3 Plánovaná spotřeba	40
3.1.4 Plánované přeshraniční toky	41
3.1.5 Zúčtovací cena a teplota	42
3.1.6 Srovnání odchylky, výroby, spotřeby a toků	43
3.2 Stavový model trhu s elektřinou	44
3.3 LSTM	46
3.4 LSTM a Kalmanův filtr	47
3.4.1 Predikce na jeden krok dopředu	48
3.4.2 Predikce na dva kroky dopředu	51
3.5 Binární klasifikátor	53
3.6 Navržené zobecnění	58
Závěr	61
Literatura	63

Úvod

Elektřina je neodmyslitelnou součástí našich každodenních životů, nicméně málokdo tuší, co vše se skrývá za zásuvkou. Jedná se o velice komplexní systém, do kterého nepatří pouze výroba elektřiny a její dopravení až na místo spotřeby. Jednou z mnoha důležitých částí tohoto systému je například velké množství predikčních modelů, které předpovídají výrobu, spotřebu, cenu nebo nerovnováhu v síti. Bez těchto modelů by celé toto složité odvětví nemohlo fungovat a my bychom se potýkali přinejmenším s častými blackouty. Z tohoto důvodu se tato práce bude zabývat právě predikcí nerovnováhy v elektroenergetické přenosové soustavě.

Přístup k predikci odchylky lze rozdělit na období před a po nástupu strojového učení. Prvotní predikční modely vznikaly na bázi ARMA modelů, logistické regrese atp. Obrovský rozvoj strojového učení s sebou přinesl nové nástroje, díky kterým mohly vzniknout nové modely pro predikci odchylky. Modely vycházející ze strojového učení potřebují velké množství kvalitních dat, ve kterých dokáží lépe identifikovat jejich vnitřní strukturu a tím porazit klasické modely. Nicméně kvůli častým a četným změnám na energetickém trhu je problematické získat dostatečně velký a kvalitní dataset, nehledě na to, že každá takováto dynamická změna zapříčiní i zcela odlišné chování celého energetického trhu, čímž se dosavadní modely stanou nepoužitelnými. Energetický trh za poslední dekádu nejvíce ovlivnilo například začlenění značného množství obnovitelných zdrojů energie do produkce, vznik platform pro mezistátní sdílení elektřiny, koronavirová pandemie, emisní povolenky a aktuálně energetická krize. Kvůli těmto událostem často není dostupné dostatečné množství dat pro trénink modelů strojového učení, a proto mají šanci na úspěch i metody jako je Kalmanův filtr, který jsme si vybrali, protože nepotřebuje tak rozsáhlé datasey.

Nyní již k samotné práci. V první části této práce se budeme zabývat samotným energetickým trhem, kde si vysvětlíme, jak se elektřina obchoduje, představíme si správce sítě a příčiny vzniku nerovnováhy. Na to navážeme regulační energií a jejími druhy, společně s kterými zmíníme i sdílení regulační energie na úrovni Evropské unie. V této části si rovněž nastíníme fungování vnitrodenního trhu, který nás bude zajímat nejvíce. Tuto část završíme rešerší používaných metod pro predikci odchylky.

Další část této práce se již bude zabývat potřebným matematickým aparátem, zejména Kalmanovým filtrem. Ten se skládá z pěti rovnic, které si postupně představíme. Jmenovitě se jedná o rovnici extrapolace stavu, rovnici extrapolace kovariance, rovnici aktualizace stavu, rovnici aktualizace kovariance a Kalmanův přírůstek. Začneme tím, že si intuitivně a přirozenou cestou odvodíme některé z těchto rovnic v jedné dimenzi. Tyto rovnice dále rozšíříme do více dimenzí, doplníme nutné před-

poklady a uvedeme některé věty spjaté s Kalmanovým filtrem.

V poslední části si představíme náš dataset, který budeme používat. Tento dataset se bude skládat ze systémové odchytky, plánované výroby, plánované spotřeby, plánovaných přeshraničních toků, zúčtovací ceny a teploty. Dále si představíme stavový model trhu s elektřinou, který nám příslušnými diferenciálními rovnicemi popíše produkci, spotřebu, odchytku a cenu. Následně již sestrojíme LSTM a Kalmanův filtr a porovnáme jimi dosažené výsledky. Rovněž sestrojíme binární klasifikátory predikující, zdali bude v síti přebytek či nedostatek elektřiny, a opět je srovnáme s Kalmanovým filtrem. Na závěr navrhne zobecnění stavového modelu, které by mohlo pomoci v dosažení lepších výsledků.

Kapitola 1

Energetický trh a vznik odchylky

Celé energetické odvětví si během 90. let minulého století prošlo velkou reformou. Došlo k liberalizaci, privatizaci a ke vzniku konkurenčních trhů. To umožňuje každému účastníkovi trhu podílet se na obchodování s touto nepostradatelnou komoditou na různých typech kontraktů. Mezi ty s nejdelším obchodovatelným časovým oknem patří futures a forwardové kontrakty, které umožňují obchodovat s elektřinou na týdny, měsíce nebo roky dopředu. Kromě těchto dlouhodobých kontraktů existují i krátkodobé kontrakty, mezi které patří denní a vnitrodenní trh. Denní trh slouží především k posledním úpravám v portfoliu, zatímco u vnitrodenního trhu by se dalo říci, že slouží především ke spekulacím a vyrovnání nečekaných změn ve spotřebě či produkci.

Postupně také dochází k čím dál většímu začleňování obnovitelných zdrojů energie do výroby, kvůli snaze o docílení větší ekologičnosti a snížení emisí uhlíku. Toto začleňování s sebou přináší větší nepředvídatelnost celkové produkce (především větrné elektrárny), což společně s dalšími vlivy může mít za následek způsobení nerovnováhy mezi aktuální produkcí a spotřebou. Aby se znovu nastolila rovnováha, tak je třeba soustavu regulovat. Proto má každý stát subjekt, který za toto udržování rovnováhy zodpovídá. Tímto subjektem je provozovatel přenosové soustavy (transmission system operator, TSO), jehož důležitost v posledních letech vzrůstá právě kvůli zvyšujícímu se podílu obnovitelných zdrojů na produkci. Hlavním úkolem TSO je provozovat přenosovou soustavu a udržovat rovnováhu mezi dodávkou elektřiny a její spotřebou. K balancování soustavy používá regulační energii, jejíž celkové množství a směr potom označujeme jako systémovou odchylku.

Dle [Guv+21] je několik hlavních příčin, které způsobují nerovnováhu v soustavě. První z nich je kolísavost trhu. Ať už se predikuje stav soustavy den či hodinu dopředu, nelze se vyvarovat chybě v předpovědi, která je citlivá na řadu věcí. Jednou z nich je například proměnlivost spotřeby průmyslových nebo komerčních subjektů. Další může být již výše zmíněná fluktuace produkce obnovitelných zdrojů, která se vzhledem k meteorologické situaci může během několika vteřin diametrálně změnit.

Další příčina má co do činění s rozkolem mezi tržními operacemi a fyzickým tokem elektřiny. Veškeré operace na trhu i jeho regulace probíhá v závislosti na čase, což znamená, že je k němu přistupováno diskrétně v jednogodinových, případně patnáct-

timinutových blocích, zatímco tok elektřiny je nepřetržitý. A jako poslední příčinu si uvedeme neočekávané výpadky v síti, kdy například z nějaké technického důvodu přestane producent vyrábět elektřinu.

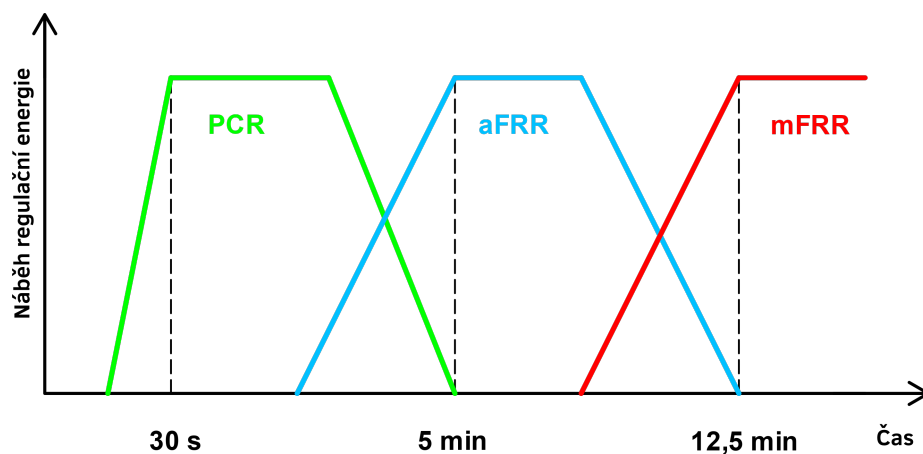
1.1 Regulační energie

Samotnou nerovnováhu v soustavě vyrovnává TSO daného státu Evropské unie pomocí regulační energie. Tato energie se dá dělit na různé typy podle několika kritérií. Prvním z kritérií je směr regulace, které dělí regulační energii na kladnou a zápornou, protože je potřeba regulovat jak přebytek elektřiny v síti, tak nedostatek. Kladnou regulační energii tedy rozumíme energii, kterou je potřeba do sítě dodat, je-li v ní aktuálně nedostatek. V opačném případě by byla použita záporná regulační energie. Co si ale představit pod pojmem záporná energie? V takové situaci je v síti přebytek energie a TSO tedy „dodává“ zápornou energii. To ale neznamená nic jiného, než že někde začne skladovat přebytečnou elektřinu (např. přečerpávací elektrárna), dohodne se s některým producentem na snížení výroby, anebo ji poskytne jinému TSO, pokud má aktuálně nedostatek elektřiny a je volná přeshraniční kapacita.

Dalším kritériem je rychlost, s jakou může být daná regulační energie nasazená. Nejrychlejší a nejčastěji používaná regulační energie je FCR (Frequency Containment Reserve), někdy též PCR (Primary Control Reserve), která se vždy používá jako první. Tato energie musí být k dispozici maximálně do 30 sekund a musí zvládnout běžet alespoň 15 minut. Pokud tedy nastane odchylka od rovnováhy, FCR automaticky během několika málo vteřin zasáhne a začne obnovovat rovnováhu. V rámci některých evropských států se ještě používá FCR Cooperation, která umožňuje sdílení FCR v rámci různých TSO.

Druhá nejrychlejší regulační energie je aFRR (automatic Frequency Restoration Reserve), někdy též SCR (Secondary Control Reserve). Ta se zpravidla aktivuje 30 sekund po FCR, kterou začne postupně nahrazovat, a k plné aktivaci dojde do 5 minut. Tuto regulační energii obvykle poskytují spolehlivé a lehce korigovatelné elektrárny jako jsou přečerpávací nebo plynové. I u této energie již funguje její sdílení napříč různými TSO v rámci PICASSO (Platform for the International Coordination of Automated Frequency Restoration and Stable System Operation). Tato rozvíjející se platforma, do které by se měly postupně dostat všechny evropské státy, má za cíl umožnit sdílení aFRR mezi všemi účastníky, což by vedlo k větší energetické stabilitě.

Poslední regulační energií je mFRR (manual Frequency Restoration Reserve), která je známá i pod zkratkou TCR (Tertiary Control Reserve). Tento typ energie se využívá v případech, kdy přetrvává nerovnováha v síti po delší dobu a nedaří se ji obnovit za použití FCR a aFRR. Čas nasazení je 12,5 minut, a poté musí být aktivní alespoň 5 minut. Na rozdíl od předchozích dvou je třeba tuto energii nasadit manuálně, což má na starosti TSO. Stejně jako u předchozích dvou má i mFRR svojí evropskou platformu, díky které je možné ji sdílet, nazývanou MARI (Manually Activated Reserve Initiative).



Obrázek 1.1: Typy regulační energie dle rychlosti nasazení

Jak taková regulace může vypadat lze vidět na obrázku 1.1. TSO reguluje síť na základě frekvence, která by měla být 50 Hz. Pokud dojde k jednostrannému výkyvu ve frekvenci, tak přichází na řadu regulační energie. Při déletrvajícím výkyvu nastupuje po PCR nejprve aFRR a poté mFRR. Na obrázku 1.1 je zobrazen stav, kdy mFRR nahradí aFRR, nicméně je možné, aby tyto dvě regulační energie byly použity zároveň. Množství použité regulační energie je navyšováno do té doby, než se podaří stabilizovat frekvenci na 50 Hz.

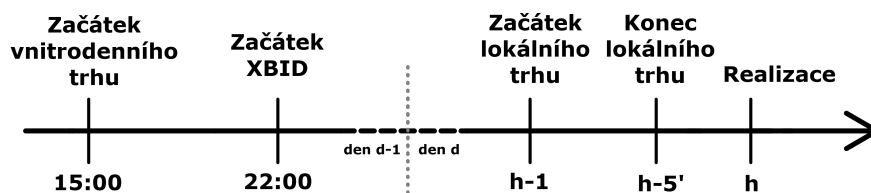
Klíčem k tomu, aby si evropské státy mohly vzájemně pomáhat balancovat svoje sítě, jsou společná pravidla, na kterých se jednotlivá TSO musí shodnout. Proto vzniklo ENTSO-E (European Network of Transmission System Operators for Electricity), které pomáhá jednotlivým státům implementovat EBGL (Electricity Balancing Guideline), což je dokument vytvořený Evropskou komisí, který má za cíl stabilizovat evropský trh s elektřinou a umožnit levnější a spolehlivější nákup regulační energie. Proto ENTSO-E přišlo s 5 pilíři, které je nutné splnit pro to, aby se podařilo realizovat EBGL. Tři z nich jsme již zmínili výše a to FCR Cooperation, PICASSO a MARI. Čtvrtou platformou je TERRE (Trans European Replacement Reserves Exchange), která má za cíl umožnit obchodování s RR (Replacement Reserves), což je druh regulační energie, který je srovnatelný s mFRR. Problém s touto energií je ten, že neexistuje ve všech státech. Poslední nezmíněný projekt je IGCC (International Grid Control Cooperation), který má za cíl vytvořit platformu pro přeshraniční vyrovnávání nerovnováhy. Uvedeme si tuto platformu v praxi na příkladu dvou států. První stát má právě nedostatek elektřiny, proto je nucen použít kladnou regulační energii. Druhý stát je na tom opačně a je tedy za normálních okolností nucen použít zápornou regulační energii. Nicméně díky IGCC, pokud je mezi těmito dvěma státy volná přeshraniční kapacita, je možné jejich nerovnováhy vyrovnat vzájemně, což povede k nižšímu množství použité regulační energie v každém z nich (nebo dokonce ke stavu, kdy nebude potřeba použít žádnou regulační energii).

Poslední a velmi důležitá věc, kterou jsme již okrajově zmínili a je spjatá s regulační energií, je finanční penalizace pro subjekty, které způsobují nerovnováhu. Metodika výpočtu tohoto finančního vypořádání se liší napříč všemi TSO, nicméně vždy vychází z ceny použité regulační energie. Můžeme se setkat například s váženým

průměrem vzhledem k množství nebo mezními náklady, což je v případě nedostatku elektřiny nejdražší použitá regulační energie a při přebytku nejlevnější použitá.

1.2 Vnitrodenní trh

Naším hlavním bodem zájmu je předpovídání systémové nerovnováhy v rámci vnitrodenního trhu, proto si tento trh krátce uvedeme. V rámci tohoto trhu se obchodují různé kontrakty, ale nejčastěji to bývají hodinové a čtvrt hodinové kontrakty, nicméně je možné se setkat i s půlhodinovými a dvouhodinovými kontrakty. Po konci obchodování všech kontraktů na následující den na denním trhu, což je v 15:00 (SEČ), se otevírají tyto kontrakty na vnitrodenním trhu v rámci daného státu. Jelikož jsou tyto kontrakty ještě daleko od své realizace, tak se většinou prvních několik hodin neobchodují vůbec nebo velmi málo. Aktivní obchodování začíná zpravidla ve 22:00, kdy startuje XBID (Cross-border intraday trading). V tento moment dochází k připojení ostatních států, je-li dostupná přeshraniční kapacita, což umožňuje obchodování elektřiny napříč různými státy. Kontrakt se obchoduje v rámci XBIDu až do doby jedné hodiny před realizací kontraktu. Poté kontrakt přechází z XBIDu na lokální trh, kde mezi sebou již mohou obchodovat pouze účastníci spadající pod konkrétní TSO. Tato poslední fáze kontraktu na vnitrodenním trhu trvá obvykle až do doby pěti minut před realizací, kdy končí obchodování na daném kontraktu. Fáze vnitrodenního trhu jsou graficky znázorněny na obrázku 1.2.



Obrázek 1.2: Schéma vnitrodenního trhu

1.3 Rešerše přístupů pro odhad odchylky

Ačkoli se jedná o celkem aktuální a důležité téma, článků zabývajících se právě předpovědí systémové odchylky je překvapivě málo, na čemž se shodují i autoři těchto článků. Důvodů, proč tomu tak je, může být více, ale je možné, že nové predikční modely vznikají především u soukromých subjektů, které z pochopitelných důvodů svoje modely nezveřejňují, aby si udrželi svoji konkurenční výhodu. Avšak kvůli aktuální energetické krizi roste zájem o toto téma a rovněž roste i počet účastníků na energetických burzách, tudíž můžeme očekávat více článků na dané téma. Nicméně většina nově vznikajících článků vychází především ze čtyř prací, které si proto nyní v krátkosti představíme.

V článku [GK06] se autoři nejprve zabývají metodami ARIMA a exponenciálním vyhlazením, které shledávají za nepříliš vhodné kvůli neperiodicitě, nestacionaritě a

zašumělosti dat. Další slabina těchto přístupů spočívá v jejich schopnosti odhalit nelineární vztahy mezi proměnnými. Proto dále svoji pozornost obrací k neuronovým sítím, které vykazují lepší výsledky. Ke zvýšení přesnosti predikce došlo právě díky lepšímu zachycení nelineárních vztahů mezi vysvětlujícími a vysvětlovanými proměnnými. Nicméně shledávají, že i tento přístup má své problémy jako například pomalá konvergence a manuální určování parametrů.

Jedním z prvních článků, ze kterého vychází mnoho pozdějších článků, je [Tay06]. Úlohu samotné předpovědi systémové odchylky si autor rozdělil na bodovou predikci a volatilitu odchylky. Pro bodovou predikci využívá různé typy ARMA modelů, exponenciální vyhlazování, neuronové sítě, regresi atd. Nejlépe si vedly SARMA a periodický AR model. Dále se práce snaží získané výsledky ekonomicky interpretovat a vytyčuje různé směry, kterými by bylo možné se dále ubírat.

Trochu z jiného úhlu je nahlíženo na danou problematiku v [Kra16], kde autor nejprve zkoumá, které prediktory jsou nejdůležitější, k čemuž využívá autokorelační analýzu. Zjišťuje, že proměnné s maximálně dvouhodinovým zpožděním mají dostatečnou výpovědní hodnotu. Účelem navrženého modelu, který je založen na lineární regresi, není přesně předpovídat systémovou odchylku, ale určit, v jakém z pěti navržených intervalů bude systémová odchylka. Tento model je následně porovnán s referenčním modelem ARMA(1,1) a ukáže se, že na dvouhodinových predikcích překonává referenční model.

Čtvrtá práce [Con16] využívá k predikci odchylky náhodný les se čtrnácti faktory. Autor se pokoušel stejně jako [Kra16] vybrat nejvíce vypovídající faktory, avšak nakonec se rozhodl k použití všech. Finální model je natrénován na osmidenním souboru dat a predikován je den devátý. Stojí za zmínku, že mezi faktory nebyly zahrnuty historické výsledky nerovnováhy soustavy.

Nově vznikající články se již více odklánějí od klasických přístupů a více tíhnou k využívání neuronových sítí a ke strojovému učení. Metody, které se aktuálně v této problematice používají, lze společně s jejich autory nalézt v tabulce 1.1.

Článek	Rok	Země	Model
[GK06]	2006	GB	ARIMA, dopředné NN
[Tay06]	2006	GB	SARMA
[Kra16]	2016	CZ	Vícetřídová klasifikace, ARMA
[Fer16]	2016	NO	Posílený rozhodovací strom a rozhodovací les
[Con16]	2016	ES	Náhodný les
[FS17]	2017	GB	ARMAX
[BGK18]	2018	AT	Vícefaktorový stochastický latentní momentový model
[Bro18]	2018	GB	Logistická regrese
[GPB19]	2019	DE	OLS, kvantilová regrese, ARMA
[Sal+19]	2019	NO	Kvantilové regresní lesy
[OT19]	2019		ARIMAX
[Pie+20]	2020	IT	SARIMA
[Guv+21]	2021	TR	Rekurzivní NN s genetickým algoritmem
[Mak+21]	2021	GB	Rekurzivní NN a LSTM
[Tou+22]	2022	BE	Rekurzivní NN a LSTM
[Del+22]	2022	TR	Optimalizace hejnem částic, rekurzivní NN a LSTM

Tabulka 1.1: Seznam používaných metod

Naším cílem je na danou problematiku použít Kalmanův filtr. Nepodařilo se nám dohledat práci, ve které by někdo tento filtr použil na predikci systémové odchylky. V neposlední řadě je důležité zmínit, že se nám podařilo najít článek [TR16] využívající Kalmanův filtr k predikci frekvence sítě, což je údaj, který je se systémovou odchylkou úzce spjat. Autoři dokonce došli závěru, že modely SARMA a dopředné neuronové sítě lze překonat vylepšenou verzí metody exponenciálního vyhlazení obo-
hacenou právě o Kalmanův filtr.

Kapitola 2

Kalmanův filtr

V této kapitole si představíme Kalmanův filtr. Nejprve začneme s intuitivním odvozením v jedné dimenzi, které by čtenáři mohlo pomoci s lepším pochopením rovnic, ze kterých se Kalmanův filtr skládá. Následně provedeme rozšíření do více dimenzí, které budeme potřebovat pro naše účely. Na závěr si vše formálně a precizně shrneme a teorii doplníme o důležité věty, které se vážou ke Kalmanově filtru a jeho vlastnostem. Teoretický aparát pro tuto kapitolu byl čerpán z [Bec22; Kal+60; Cat88; Rib04; Mad08; Ham08].

2.1 Intuitivní odvození v jedné dimenzi

Začneme s případem, kdy budeme odhadovat stav statického systému, což je systém, který svůj stav nemění v průběhu času. Stav takového systému v čase n si můžeme odhadnout například průměrem všech naměřených hodnot do času n , tj.

$$\hat{x}_{n,n} = \frac{1}{n}(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i,$$

kde $\hat{x}_{n,n}$ je odhad stavu v čase n a z_i značí naměřenou váhu v čase i . Podotýkáme, že odhad $\hat{x}_{n,n}$ je udělán až po naměření z_n .

Jelikož je náš systém statický, není těžké si rozmyslet, že pokud budeme v čase n odhadovat budoucí stav v čase $n + 1$, tak platí rovnost

$$\hat{x}_{n+1,n} = \hat{x}_{n,n}, \tag{2.1}$$

kde tedy $\hat{x}_{n+1,n}$ značí odhad budoucího stavu v čase $n + 1$, nicméně tento odhad jsme udělali v čase n . Rovnost si dále ještě upravíme, protože z důvodu nutnosti pamatovat si hodnoty všech předchozích měření není tato rovnost vhodná pro implementaci.

Proto použijeme následující rovnost

$$\begin{aligned}\hat{x}_{n,n} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} z_i + z_n \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} z_i + \frac{1}{n} z_n = \frac{1}{n} \frac{n-1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} z_i + \frac{1}{n} z_n = \\ &= \frac{n-1}{n} \hat{x}_{n-1,n-1} + \frac{1}{n} z_n = \hat{x}_{n-1,n-1} - \frac{1}{n} \hat{x}_{n-1,n-1} + \frac{1}{n} z_n = \\ &= \hat{x}_{n-1,n-1} + \frac{1}{n} (z_n - \hat{x}_{n-1,n-1}).\end{aligned}$$

V kombinaci výše odvozené rovnosti s (2.1) získáváme rovnici

$$\hat{x}_{n,n} = \hat{x}_{n,n-1} + \frac{1}{n} (z_n - \hat{x}_{n,n-1}), \quad (2.2)$$

což je první z rovnic tvořící Kalmanův filtr. Tato rovnice se nazývá rovnice aktualizace stavu (state update equation) a říká nám, že odhad stavu v aktuálním čase n získáme jako součet predikované hodnoty systému v čase n , kterou jsme napočítali v čase $n-1$, a rozdílu naměřené hodnoty v čase n se stejnou predikovanou hodnotou systému, který je navíc přenásobený nějakým faktorem. Faktor $\frac{1}{n}$ je specifický pro náš příklad a obecně může vypadat jinak, proto tento faktor budeme nadále obecně značit α_n a budeme ho nazývat Kalmanův přírůstek (Kalman gain). V obecnosti je tedy rovnice (2.2) ve tvaru

$$\hat{x}_{n,n} = \hat{x}_{n,n-1} + \alpha_n (z_n - \hat{x}_{n,n-1}). \quad (2.3)$$

Máme tedy první z pěti rovnic a můžeme dále pokračovat.

Nyní přejdeme k dynamickému systému, což je systém, který mění svůj stav v průběhu času. Typickým příkladem tohoto systému je pohybuující se těleso s konstantní rychlostí. Pokud by nás v takovém příkladu zajímala třeba uražená vzdálenost v čase $n+1$ (tj. x_{n+1}), tak by tento systém byl popsán pohybovými rovnicemi

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \Delta t v_n, \\ v_{n+1} &= v_n,\end{aligned}$$

kde Δt je časový rozestup mezi jednotlivými měřeními vzdálenosti a v_n by byla rychlost v čase n .

Pokud bychom tento systém rovnic přepsali do podoby, kdy chceme v čase n předpovědět polohu v čase $n+1$, dostali bychom

$$\begin{aligned}\hat{x}_{n+1,n} &= \hat{x}_{n,n} + \Delta t \hat{v}_{n,n}, \\ \hat{v}_{n+1,n} &= \hat{v}_{n,n}.\end{aligned} \quad (2.4)$$

Tento systém rovnic je specifický pro náš dynamický systém s konstantní rychlostí, i přes to se ale jedná se o druhou z pěti rovnic Kalmanova filtru, která je nazývána rovnicí extrapolace stavu (state extrapolation equation).

Zbývají nám ještě tři rovnice, z nichž se nám podaří intuitivně odvodit pouze jednu. Význam zbylých dvou rovnic bude jasnější až při odvození maticové formy Kalmanova filtru v N dimenzích. První z nich už jsme se okrajově dotkli na začátku této

sekte, kde jsme zmínili Kalmanův přírůstek α_n , ale více jsme se jím nezabývali, což nyní napravíme.

Dále již budeme $\hat{x}_{n,n}$ a z_n jako náhodné veličiny. Na začátku jsme si označili $\alpha_n = \frac{1}{n}$, což lze interpretovat jako váhu, kterou dáváme výrazu v závorce v rovnici (2.3), který do odhadu přináší novou informaci. Konkrétně by šlo říci, že při $\frac{1}{n}$ z počátku nemáme dost informací o aktuálním stavu, proto se více spoléháme na měření. S postupem času, jak $\frac{1}{n}$ klesá, začínáme dávat více váhy samotnému odhadu. Můžeme tedy říci, že při hledání nového odhadu se snažíme najít optimální kombinaci nově naměřené hodnoty a předchozího odhadu. Tuto myšlenku lze pozorovat už u rovnice (2.3), když si ji upravíme do tvaru

$$\hat{x}_{n,n} = \alpha_n z_n + (1 - \alpha_n) \hat{x}_{n,n-1}, \quad (2.5)$$

kde $0 \leq \alpha_n \leq 1$ plní funkci váhy.

Nyní aplikujeme rozptyl na rovnici (2.5)

$$\text{Var}[\hat{x}_{n,n}] = \text{Var}[\alpha_n z_n + (1 - \alpha_n) \hat{x}_{n,n-1}]. \quad (2.6)$$

Nyní si zavedeme značnící $\text{Var}[\hat{x}_{n,n}] = p_{n,n}$ pro rozptyl odhadu a $\text{Var}[z_n] = r_n$ pro rozptyl měření. U obou rozptylů předpokládáme, že jsou konečné. Použijeme-li vlastnosti rozptylu, podaří se nám rovnici (2.6) upravit do tvaru

$$p_{n,n} = \alpha_n^2 r_n + (1 - \alpha_n)^2 p_{n,n-1}. \quad (2.7)$$

Rovnice (2.7) nám tedy dává vztah mezi rozptyly. Jelikož hledáme optimální odhad, tak bychom rádi minimalizovali $p_{n,n}$. Potřebujeme tedy najít váhu α_n , která bude minimalizovat $p_{n,n}$, čehož docílíme zderivováním $p_{n,n}$ podle α_n a položíme výraz roven nule. Navíc α_n v rovnici (2.7) vystupuje v druhé mocnině, takže si můžeme být jisti, že vždycky získáme právě jedno řešení.

$$\begin{aligned} \frac{dp_{n,n}}{d\alpha_n} &= 2\alpha_n r_n - 2(1 - \alpha_n) p_{n,n-1} \\ 2\alpha_n r_n - 2(1 - \alpha_n) p_{n,n-1} &\stackrel{!}{=} 0 \\ \alpha_n &= \frac{p_{n,n-1}}{p_{n,n-1} + r_n} \end{aligned}$$

Při derivování podle α_n je pro nás $p_{n,n-1}$ již známá konstanta, která je závislá na α_{n-1} , tudíž nemusíme jakkoli řešit její derivaci. Tímto jsme získali třetí rovnici pro Kalmanův filtr, která se nazývá Kalmanův přírůstek a je ve tvaru

$$k_n = \frac{p_{n,n-1}}{p_{n,n-1} + r_n}. \quad (2.8)$$

Kalmanův přírůstek nám tedy říká, o kolik chceme změnit svůj odhad při daném měření, což lze jednoduše vidět, pokud rovnici (2.3) upravíme do tvaru

$$\hat{x}_{n,n} = \hat{x}_{n,n-1} + k_n (z_n - \hat{x}_{n,n-1}) = (1 - k_n) \hat{x}_{n,n-1} + k_n z_n. \quad (2.9)$$

Čtvrtou rovnicí je rovnice aktualizace kovariance (covariance update equation), která je ve tvaru

$$p_{n,n} = (1 - k_n) p_{n,n-1}. \quad (2.10)$$

Z rovnice (2.10) je patrné, že s každou další iterací se rozptyl $p_{n,n}$ snižuje, protože platí $1 - k_n \leq 1$.

Poslední rovnici bychom získali jednoduše aplikací rozptylu na rovnici (2.1), čímž bychom dostali

$$p_{n+1,n} = p_{n,n}. \quad (2.11)$$

Rovnice (2.11) nese název rovnice extrapolace kovariance (covariance extrapolation equation).

Tímto jsme zakončili odvozování pěti rovnic Kalmanova filtru v jedné dimenzi. Je třeba ale zdůraznit, že uvedené rovnice nejsou ve své plné obecnosti a jedná se pouze o náš specifický případ. Plná obecnost těchto rovnic v N dimenzích bude následovat až v další části této práce, protože naší snahou v této sekci bylo čtenáři přiblížit význam těchto rovnic.

2.2 Rozšíření do více dimenzí

V této části se budeme zabývat rozšířením Kalmanova filtru do více dimenzí. Všechny rovnice, ze kterých se tento filtr skládá, si představíme v plné obecnosti, nicméně někde se možná dopustíme menšího kompromisu mezi složitostí a názorností, což nijak neovlivní získané rovnice a pochopení jejich vzniku.

Než začneme s první rovnicí, tak ještě zmíníme, že nadále budeme uvažovat lineární časově invariantní systémy, na kterých stojí základní verze Kalmanova filtru. Pro nelineární systémy nebo časově proměnlivé systémy existují další verze Kalmanova filtru. Rovněž budeme $\hat{x}_{n,n}$ a z_n brát v celé této části jako náhodné veličiny s konečným rozptylem.

2.2.1 Rovnice extrapolace stavu

První rovnicí, kterou se budeme zabývat, bude rovnice extrapolace stavu. Jedná se tedy o rovnici (2.4), která má ve více dimenzích v maticovém tvaru podobu

$$\hat{x}_{n+1,n} = F\hat{x}_{n,n} + Gu_n + w_n, \quad (2.12)$$

kde $\hat{x}_{n+1,n}$ a $\hat{x}_{n,n}$ je predikovaný a odhadnutý stavový vektor, u_n je řídicí proměnná, w_n je šum s nulovou střední hodnotou a kovarianční maticí $Q = E[w_t w_t^T]$, F je matice přechodu a G je řídicí matice.

Nyní přejdeme k samotnému odvození. Nejprve budeme potřebovat rovnice, které budou popisovat náš systém. Jelikož uvažujeme lineární časově invariantní systém, tak jeho základní stavová reprezentace (state-space representation) je ve tvaru

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.13)$$

$$z(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (2.14)$$

kde x je stavový vektor, z je vektor výstupu, A je matice systému, B je vstupní matice, C je výstupní matice a D je dopředná matice. Od tohoto popisu bychom

se rádi dostali k rovnici (2.12), proto musíme nejprve vyřešit diferenciální rovnici (2.13), abychom našli matice F a G . Až budeme mít tyto matice, tak budeme mít vše potřebné pro rovnici extrapolace stavu. Začneme tedy tím, že vyřešíme stavovou diferenciální rovnici (2.13).

Vyřešit rovnici (2.13) nebude od pohledu nic těžkého, neboť pokud bychom byli pouze v jedné dimenzi, jednalo by se o lineární diferenciální rovnici ve tvaru $y' + p(x) = q(x)$. Proto budeme postupovat obdobně, jako bychom řešili lineární diferenciální rovnici. Začali bychom řešit tuto rovnici bez pravé strany, tj.

$$\dot{x} = Ax. \quad (2.15)$$

Dále si trochu pomůžeme postupem pro jednodimenzionální případ, ve kterém by tato rovnice mohla vypadat takto

$$\frac{dx}{dt} = kx.$$

Tuto rovnici lehce vyřešíme následujícím postupem za použití ekvidistantní časového dělení s krokem Δt , čímž získáme

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{x} dx = \int_0^{\Delta t} k dt, \\ x_1 = x_0 e^{k\Delta t}.$$

Odtud tedy můžeme získat výsledek pro náš vícedimenzionální případ, jehož řešení by bylo pro čas n (díky časově invariantnímu systému) ve tvaru

$$x_{n+1} = x_n e^{A\Delta t}, \quad (2.16)$$

kde e^A je maticová exponenciála, kterou lze za pomoci Taylorova rozvoje napsat jako

$$e^X = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} X^k = I + X + \frac{X^2}{2!} + \dots$$

Z rovnice (2.16) rovněž získáváme tvar matice F , který je

$$F = e^{A\Delta t}.$$

Tímto máme za sebou první část postupu řešení rovnice (2.13). Možností, jak dále postupovat je vícero, nicméně obecné řešení jednodimenzionální lineární diferenciální rovnice lze získat například pomocí metody variace konstant, díky které bychom se dopracovali až řešení rovnice (2.13), které by bylo ve tvaru

$$x(t + \Delta t) = e^{A\Delta t}x(t) + Bu(t) \int_0^{\Delta t} e^{At} dt. \quad (2.17)$$

Rovněž z rovnice (2.17) získáváme i poslední chybějící část, což je matice G , která bude ve tvaru

$$G = B \int_0^{\Delta t} e^{At} dt.$$

2.2.2 Rovnice extrapolace kovariance

Další rovnicí je rovnice extrapolace kovariance, která je zobecněním rovnice (2.11) ve více dimenzích, a má tvar

$$P_{n+1,n} = FP_{n,n}F^T + Q, \quad (2.18)$$

kde $P_{n+1,n}$ je kovarianční matice následujícího stavu, $P_{n,n}$ je kovarianční matice aktuálního stavu, F je již dříve odvozená matice přechodu a Q je matice šumu.

Pro jednoduchost provedeme odvození pro případ bez šumu, tj. $Q = 0$. Kovarianční matice je ve tvaru

$$P_{n,n} = \text{Cov}(\hat{x}_{n,n}, \hat{x}_{n,n}) = E[(\hat{x}_{n,n} - E[\hat{x}_{n,n}])(\hat{x}_{n,n} - E[\hat{x}_{n,n}])^T].$$

Potom tedy

$$P_{n+1,n} = E[(\hat{x}_{n+1,n} - E[\hat{x}_{n+1,n}])(\hat{x}_{n+1,n} - E[\hat{x}_{n+1,n}])^T].$$

Nyní využijeme znalosti rovnice (2.12) a pokračujeme v úpravách výrazu

$$\begin{aligned} P_{n+1,n} &= E[(F\hat{x}_{n,n} + G\hat{u}_{n,n} - F\mu_{x_{n,n}} - G\hat{u}_{n,n})(F\hat{x}_{n,n} + G\hat{u}_{n,n} - F\mu_{x_{n,n}} - G\hat{u}_{n,n})^T] \\ &= E[F(\hat{x}_{n,n} - \mu_{x_{n,n}})(F(\hat{x}_{n,n} - \mu_{x_{n,n}}))^T] \\ &= E[F(\hat{x}_{n,n} - \mu_{x_{n,n}})(\hat{x}_{n,n} - \mu_{x_{n,n}})^T F^T] \\ &= FE[(\hat{x}_{n,n} - \mu_{x_{n,n}})(\hat{x}_{n,n} - \mu_{x_{n,n}})^T] F^T \\ &= FP_{n,n}F^T. \end{aligned}$$

2.2.3 Rovnice aktualizace stavu

Tuto rovnici jsme si pro jednu dimenzi odvodili již v předchozí sekci. Její verze ve více dimenzích vypadá následovně

$$\hat{x}_{n,n} = \hat{x}_{n,n-1} + K_n(z_n - H\hat{x}_{n,n-1}), \quad (2.19)$$

kde $\hat{x}_{n,n}$ je odhadnutý stavový vektor v čase n , $\hat{x}_{n,n-1}$ je predikovaný stavový vektor v čase $n - 1$, K_n je Kalmanův přírůstek v maticovém tvaru, z_n je vektor měření a H je matice pozorování.

Jelikož mezi rovnicemi (2.19) a (2.9) není žádný velký rozdíl, tak odvození vynecháme, protože je analogické již ukázanému postupu. Zmíníme se pouze o matici H , která představuje jediný velký rozdíl od jednodimenzionálního případu. Účelem matice pozorování H je ve své podstatě převádět naměřenou hodnotu za pomoci lineárních transformací, protože se může stát, že naměřená hodnota nepředstavuje stav systému. Příkladem toho, kdy naměřená hodnota nepředstavuje stav systému, je měření vzdálenosti za pomoci odraženého signálu, kdy náš měřič vyšle signál směrem k objektu a měří čas mezi vysláním a opětovným přijetím signálu, ačkoli nás zajímá naše vzdálenost od měřeného objektu. Kvůli těmto případům platí pro naměřené hodnoty rovnice

$$z_n = Hx_n + v_n, \quad (2.20)$$

kde z_n je vektor měření, x_n je vektor pravého stavu systému, H je matice pozorování a v_n je vektor šumu způsobený měřicím zařízením.

2.2.4 Rovnice aktualizace kovariance

Předposlední rovnicí je rovnice aktualizace kovariance, která je ve tvaru

$$P_{n,n} = (I - K_n H) P_{n,n-1} (I - K_n H)^T + K_n R_n K_n^T, \quad (2.21)$$

kde $P_{n,n}$ je kovarianční matice aktuálního stavu, $P_{n,n-1}$ je kovarianční matice aktuálního stavu, která byla predikována za předchozího stavu, K_n je Kalmanův přírůstek v maticovém tvaru, H je matice pozorování a $R_n = E[v_n v_n^T]$ je kovarianční matice šumu měření.

Nyní se již můžeme pustit do odvození. Začneme tím, že si označíme chybu odhadu jako $e_n = x_n - \hat{x}_{n,n}$. Pokud dosadíme za $\hat{x}_{n,n}$ rovnici aktualizace stavu (2.19) a posléze za z_n rovnici (2.20), tak dostaneme

$$\begin{aligned} e_n &= x_n - \hat{x}_{n,n-1} - K_n (H x_n + v_n - H \hat{x}_{n,n-1}) \\ &= x_n - \hat{x}_{n,n-1} - K_n H (x_n - \hat{x}_{n,n-1}) - K_n v_n \\ &= (I - K_n H) (x_n - \hat{x}_{n,n-1}) - K_n v_n. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Abychom obdrželi kýženou rovnici aktualizace kovariance, je třeba vyjádřit $P_{n,n}$ jako funkci Kalmanova přírůstku K_n . Vyjdeme tedy z rovnice

$$P_{n,n} = E[e_n e_n^T] = E[(x_n - \hat{x}_{n,n})(x_n - \hat{x}_{n,n})^T],$$

do které dosadíme výraz (2.22) a budeme pokračovat v úpravách.

$$\begin{aligned} P_{n,n} &= E \left[((I - K_n H) (x_n - \hat{x}_{n,n-1}) - K_n v_n) ((I - K_n H) (x_n - \hat{x}_{n,n-1}) - K_n v_n)^T \right] \\ &= E \left[((I - K_n H) (x_n - \hat{x}_{n,n-1}) - K_n v_n) ((x_n - \hat{x}_{n,n-1})^T (I - K_n H)^T - (K_n v_n)^T) \right] \end{aligned}$$

Dále si roznásobíme výrazy ve střední hodnotě a následně je rozložíme na jednotlivé součty středních hodnot.

$$\begin{aligned} P_{n,n} &= E \left[(I - K_n H) (x_n - \hat{x}_{n,n-1}) (x_n - \hat{x}_{n,n-1})^T (I - K_n H)^T \right] \\ &\quad - E \left[(I - K_n H) (x_n - \hat{x}_{n,n-1}) (K_n v_n)^T \right] \\ &\quad - E \left[K_n v_n (x_n - \hat{x}_{n,n-1})^T (I - K_n H)^T \right] \\ &\quad + E \left[K_n v_n (K_n v_n)^T \right] \end{aligned}$$

Druhý a třetí člen je nulový, protože $(x_n - \hat{x}_{n,n-1})$ a v_n jsou nekorelované a zbyte nám

$$\begin{aligned} P_{n,n} &= E \left[(I - K_n H) (x_n - \hat{x}_{n,n-1}) (x_n - \hat{x}_{n,n-1})^T (I - K_n H)^T \right] \\ &\quad + E \left[K_n v_n (K_n v_n)^T \right]. \end{aligned}$$

Využijeme vlastnosti transpozice a vytkneme konstanty před střední hodnotu

$$P_{n,n} = (I - K_n H) E \left[(x_n - \hat{x}_{n,n-1}) (x_n - \hat{x}_{n,n-1})^T \right] (I - K_n H)^T + K_n E \left[v_n v_n^T \right] K_n^T.$$

Nyní už jsme téměř u konce. Stačí si všimnout, že první střední hodnota není nic jiného než $P_{n,n-1}$ a že druhá střední hodnota představuje kovarianční matici šumu měření R_n . Tím dostáváme rovnici

$$P_{n,n} = (I - K_n H) P_{n,n-1} (I - K_n H)^T + K_n R_n K_n^T,$$

ke které jsme se chtěli dostat.

2.2.5 Kalmanův přírůstek

Jako poslední nám zbyvá rovnice Kalmanova přírůstku, který je dán rovnicí

$$K_n = P_{n,n-1}H^T(HP_{n,n-1}H^T + R_n)^{-1}, \quad (2.23)$$

kde K_n je Kalmanův přírůstek, $P_{n,n-1}$ je kovarianční matice aktuálního stavu, která byla predikována za předchozího stavu, H je matice pozorování a R_n je kovarianční matice šumu měření.

Rovnici Kalmanova přírůstku lze odvodit z rovnice aktualizace kovariance (2.21). Začneme tím, že se zbavíme transpozice a roznásobíme si první závorku

$$\begin{aligned} P_{n,n} &= (I - K_nH)P_{n,n-1}(I - K_nH)^T + K_nR_nK_n^T \\ &= (I - K_nH)P_{n,n-1}(I - H^TK_n^T) + K_nR_nK_n^T \\ &= (P_{n,n-1} - K_nHP_{n,n-1})(I - H^TK_n^T) + K_nR_nK_n^T. \end{aligned}$$

Dále si roznásobíme zbytek závorek a seskupíme poslední dva členy

$$\begin{aligned} P_{n,n} &= (P_{n,n-1} - K_nHP_{n,n-1})(I - H^TK_n^T) + K_nR_nK_n^T \\ &= P_{n,n-1} - P_{n,n-1}H^TK_n^T - K_nHP_{n,n-1} + K_nHP_{n,n-1}H^TK_n^T + K_nR_nK_n^T \\ &= P_{n,n-1} - P_{n,n-1}H^TK_n^T - K_nHP_{n,n-1} + K_n(HP_{n,n-1}H^T + R_n)K_n^T. \end{aligned}$$

Nyní využijeme toho, že Kalmanův filtr je optimální filtr ve smysli minimálního rozptylu odhadu. Toto tvrzení si dokážeme v následující sekci. Za předpokladu, že zmíněné tvrzení je pravdivé, bude našim cílem minimalizovat rozptyl odhadu, což znamená minimalizovat Kalmanův přírůstek. Abychom tohoto dosáhli, musíme minimalizovat hlavní diagonálu kovarianční matice $P_{n,n}$. To znamená, že budeme chtít zderivovat stopu matice $P_{n,n}$ vzhledem k K_n a celý výraz položit roven nule a vyjádříme si K_n .

Začneme přepisem matic do tvaru stop a zároveň využijeme znalosti vlastnosti stopy, která říká, že stopa matice je rovna stopě transponované matice, čímž dostaneme rovnici

$$\text{Tr}(P_{n,n}) = \text{Tr}(P_{n,n-1}) - 2 \cdot \text{Tr}(K_nHP_{n,n-1}) + \text{Tr}(K_n(HP_{n,n-1}H^T + R_n)K_n^T).$$

Ke zderivování tohoto výrazu využijeme znalosti rovnic

$$\begin{aligned} \frac{d}{dA}(\text{Tr}(AB)) &= B^T \\ \frac{d}{dA}(\text{Tr}(ABA^T)) &= AB^T + AB. \end{aligned}$$

Aplikací těchto vztahů a položením vzniklé rovnice nule získáme

$$\begin{aligned} \frac{d(\text{Tr}(P_{n,n}))}{dK_n} &= 0 - 2(HP_{n,n-1})^T + K_n(HP_{n,n-1}H^T + R_n)^T \\ &\quad + K_n(HP_{n,n-1}H^T + R_n) = 0. \end{aligned}$$

Nyní nám už pouze zbývá využít symetričnosti kovarianční matice a vyjádřit si Kalmanův přírůstek, čímž obdržíme

$$K_n = P_{n,n-1}H^T(H P_{n,n-1}H^T + R_n)^{-1}.$$

Než přejdeme k další části, tak si názorně ilustrujeme použití Kalmanova filtru na reálném příkladu.

Příklad 2.2.1 (Odhad pozice auta). V tomto příkladu, který je převzat z [Bec22, Příklad 10], budeme odhadovat pozici jedoucího auta. Konkrétně budeme odhadovat x a y souřadnice za předpokladu, že se auto pohybuje s konstantním zrychlením.

Připomeneme si rovnici extrapolace stavu, která má tvar

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_{n+1,n} = F\widehat{\boldsymbol{x}}_{n,n} + Gu_n.$$

Jelikož v našem zadání nevystupuje žádné řízení, můžeme vypustit člen s u_n . Tím se rovnice extrapolace stavu zjednoduší na tvar

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_{n+1,n} = F\widehat{\boldsymbol{x}}_{n,n}.$$

Stavový vektor systému bude mít tvar

$$\boldsymbol{x}_n = (x_n, v_n^x, a_n^x, y_n, v_n^y, a_n^y)^T.$$

Příslušné extrapolované pohybové rovnice v čase $n + 1$ budou popsány rovnicemi

$$\begin{aligned}\widehat{x}_{n+1,n} &= \widehat{x}_{n,n} + \widehat{v}_{n,n}^x \Delta t + \frac{1}{2} \widehat{a}_{n,n}^x \Delta t^2, \\ \widehat{v}_{n+1,n}^x &= \widehat{v}_{n,n}^x + \widehat{a}_{n,n}^x \Delta t, \\ \widehat{a}_{n+1,n}^x &= \widehat{a}_{n,n}^x, \\ \widehat{y}_{n+1,n} &= \widehat{y}_{n,n} + \widehat{v}_{n,n}^y \Delta t + \frac{1}{2} \widehat{a}_{n,n}^y \Delta t^2, \\ \widehat{v}_{n+1,n}^y &= \widehat{v}_{n,n}^y + \widehat{a}_{n,n}^y \Delta t, \\ \widehat{a}_{n+1,n}^y &= \widehat{a}_{n,n}^y.\end{aligned}$$

Dále si připomeneme rovnici extrapolace kovariance, která je ve tvaru

$$P_{n+1,n} = FP_{n,n}F^T + Q.$$

Matice P je obecně ve tvaru

$$P = \begin{pmatrix} p_x & p_{xv^x} & p_{xa^x} & p_{xy} & p_{xv^y} & p_{xa^y} \\ p_{v^x x} & p_{v^x} & p_{v^x a^x} & p_{v^x y} & p_{v^x v^y} & p_{v^x a^y} \\ p_{a^x x} & p_{a^x v^x} & p_{a^x} & p_{a^x y} & p_{a^x v^y} & p_{a^x a^y} \\ p_{yx} & p_{yv^x} & p_{ya^x} & p_y & p_{yv^y} & p_{ya^y} \\ p_{v^y x} & p_{v^y v^x} & p_{v^y a^x} & p_{v^y y} & p_{v^y} & p_{v^y a^y} \\ p_{a^y x} & p_{a^y v^x} & p_{a^y a^x} & p_{a^y y} & p_{a^y v^y} & p_{a^y} \end{pmatrix},$$

kde diagonální prvky představují rozptyl odhadu pozice veličiny ve spodním indexu a mimodiagonální prvky představují kovarianci veličin ve spodním indexu. Zde budeme předpokládat, že chyby v odhadu v X a Y jsou nekorelované, čímž se nám matice P zjednoduší do tvaru

$$P = \begin{pmatrix} p_x & p_{xv^x} & p_{xa^x} & 0 & 0 & 0 \\ p_{v^x x} & p_{v^x} & p_{v^x a^x} & 0 & 0 & 0 \\ p_{a^x x} & p_{a^x v^x} & p_{a^x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_y & p_{yv^y} & p_{ya^y} \\ 0 & 0 & 0 & p_{v^y y} & p_{v^y} & p_{v^y a^y} \\ 0 & 0 & 0 & p_{a^y y} & p_{a^y v^y} & p_{a^y} \end{pmatrix}.$$

Chybí nám ještě zjistit tvar matice Q , která je obecně ve tvaru

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xv^x} & \sigma_{xa^x} & \sigma_{xy} & \sigma_{xv^y} & \sigma_{xa^y} \\ \sigma_{v^x x}^2 & \sigma_{v^x}^2 & \sigma_{v^x a^x}^2 & \sigma_{v^x y}^2 & \sigma_{v^x v^y}^2 & \sigma_{v^x a^y}^2 \\ \sigma_{a^x x}^2 & \sigma_{a^x v^x}^2 & \sigma_{a^x}^2 & \sigma_{a^x y}^2 & \sigma_{a^x v^y}^2 & \sigma_{a^x a^y}^2 \\ \sigma_{yx}^2 & \sigma_{yv^x}^2 & \sigma_{ya^x}^2 & \sigma_y^2 & \sigma_{yv^y}^2 & \sigma_{ya^y}^2 \\ \sigma_{v^y x}^2 & \sigma_{v^y v^x}^2 & \sigma_{v^y a^x}^2 & \sigma_{v^y y}^2 & \sigma_{v^y}^2 & \sigma_{v^y a^y}^2 \\ \sigma_{a^y x}^2 & \sigma_{a^y v^x}^2 & \sigma_{a^y a^x}^2 & \sigma_{a^y y}^2 & \sigma_{a^y v^y}^2 & \sigma_{a^y}^2 \end{pmatrix},$$

Rovněž si zde tuto matici zjednodušíme tím, že budeme předpokládat nekorelovanost procesního šumu v x a y , čímž dostaneme

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xv^x} & \sigma_{xa^x} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{v^x x}^2 & \sigma_{v^x}^2 & \sigma_{v^x a^x}^2 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{a^x x}^2 & \sigma_{a^x v^x}^2 & \sigma_{a^x}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_y^2 & \sigma_{yv^y}^2 & \sigma_{ya^y}^2 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{v^y y}^2 & \sigma_{v^y}^2 & \sigma_{v^y a^y}^2 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{a^y y}^2 & \sigma_{a^y v^y}^2 & \sigma_{a^y}^2 \end{pmatrix}.$$

Zbývá nám zjistit tvar jednotlivých členů matice.

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - E[x]^2 = E \left[\left(\frac{1}{2} a^x \Delta t^2 \right)^2 \right] - \left(\frac{1}{2} \Delta t^2 E[a^x] \right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \Delta t^4 E[(a^x)^2] - \frac{1}{4} \Delta t^4 E[a^x]^2 = \frac{\Delta t^4}{4} \sigma_{a^x}^2$$

$$\sigma_{v^x}^2 = E[(v^x)^2] - E[v^x]^2 = E[(a^x \Delta t)^2] - (a^x \Delta t E[a^x])^2$$

$$= \Delta t^2 E[(a^x)^2] - \Delta t^2 E[a^x]^2 = \Delta t^2 \sigma_{a^x}^2$$

$$\text{Cov}(x, v^x) = E[xv^x] - E[x]E[v^x] = E \left[\frac{1}{2} a^x \Delta t^2 a^x \Delta t \right] - \frac{1}{2} \Delta t^2 E[a^x] \Delta t E[a^x]$$

$$= \frac{1}{2} \Delta t^3 E[(a^x)^2] - \frac{1}{2} \Delta t^3 E[a^x]^2 = \frac{\Delta t^3}{2} \sigma_{a^x}^2$$

$$\text{Cov}(x, a^x) = E[xa^x] - E[x]E[a^x] = E \left[\frac{1}{2} \Delta t^2 a^x a^x \right] - \frac{1}{2} \Delta t^2 E[a^x] E[a^x]$$

$$= \frac{1}{2} \Delta t^2 E[(a^x)^2] - \frac{1}{2} \Delta t^2 E[a^x]^2 = \frac{1}{2} \Delta t^2 \sigma_{a^x}^2$$

$$\text{Cov}(v^x, a^x) = E[v^x a^x] - E[v^x]E[a^x] = E[a^x \Delta t a^x] - \Delta t E[a^x] E[a^x]$$

$$= \Delta t E[(a^x)^2] - \Delta t E[a^x]^2 = \Delta t \sigma_{a^x}^2$$

Analogicky bychom aplikovali postup pro y , v^y a a^y . Dosazením jednotlivých členů získáváme

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\Delta t^4}{4} & \frac{\Delta t^3}{2} & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta t^3}{2} & \Delta t^2 & \Delta t & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta t^2}{2} & \Delta t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta t^4}{4} & \frac{\Delta t^3}{2} & \frac{\Delta t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta t^3}{2} & \Delta t^2 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} & \Delta t & 1 \end{pmatrix} \sigma_a^2.$$

Zbývá nám zjistit tvar dvou matic, z nichž jedna je matice H , díky které máme na výstupu pouze ty proměnné, které chceme, tedy

$$z_n = Hx_n,$$

kde $z_n = (x_n^m, y_n^m)^T$ (horní index m slouží k označení naměřených hodnot). Odtud dostáváme jednoduše matici H ve tvaru

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poslední chybějící maticí je R_n , kterou potřebujeme do rovnice Kalmanova přírůstku. Tato matice je obecně ve tvaru

$$R_n = \begin{pmatrix} \sigma_{x_n^m}^2 & \sigma_{x_n^m y_n^m}^2 \\ \sigma_{x_n^m y_n^m}^2 & \sigma_{y_n^m}^2 \end{pmatrix}.$$

Znovu budeme předpokládat nekorelovanost mezi jednotlivými měřeními, čímž se nám matice zjednoduší do tvaru

$$R_n = \begin{pmatrix} \sigma_{x_n^m}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{y_n^m}^2 \end{pmatrix}.$$

Matice v tomto tvaru se může lišit mezi jednotlivými měřeními, což reflektuje skutečný reálný systém, nicméně mi ji budeme pro jednoduchost předpokládat konstantní, tj.

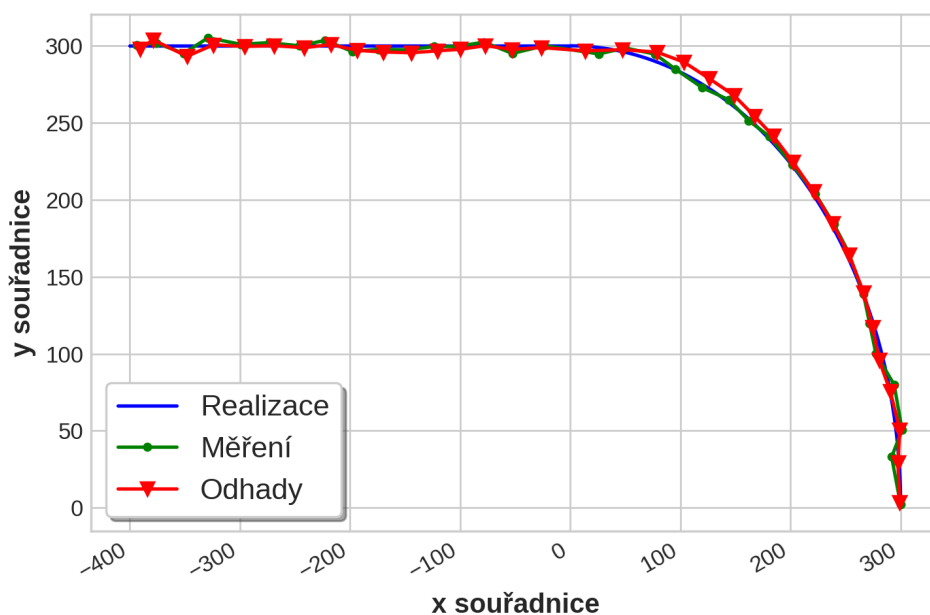
$$R_1 = R_2 = \dots = R_n = R.$$

Nyní již máme veškerou potřebnou teorii k dopočítání příkladu. Zbývá nám dodat pouze praktické aspekty příkladu. Nechť se auto pohybuje po přímce konstantní rychlostí ve směru osy X . Po ujetí 400 metrů auto odbočí doprava v kruhovém manévru o poloměru 300 m. Během tohoto manévru bude na auto působit úhlové zrychlení. Hodnoty použitých parametrů budou $\Delta t = 1$ s, $\sigma_a = 0,2$ m \cdot s⁻² a $\sigma_{x_n^m} = \sigma_{y_n^m} = 3$ m. Jako poslední pouze dodáme naměřená zašumělá data, která jsou v tabulce 2.1.

	1	2	3	4	5	6	7
x	-393,66	-375,93	-351,04	-328,96	-299,35	-273,36	-245,89
y	300,4	301,78	295,1	305,19	301,06	302,05	300
	8	9	10	11	12	13	14
x	-222,58	-198,03	-174,17	-146,32	-123,72	-103,47	-78,23
y	303,57	296,33	297,65	297,41	299,61	299,6	302,39
	15	16	17	18	19	20	21
x	-52,63	-23,34	25,96	49,72	76,94	95,38	119,83
y	295,04	300,09	294,72	298,61	294,64	284,88	272,82
	22	23	24	25	26	27	28
x	144,01	161,84	180,56	201,42	222,62	239,4	252,51
y	264,93	251,46	241,27	222,98	203,73	184,1	166,12
	29	30	31	32	33	34	35
x	266,26	271,75	277,4	294,12	301,23	291,8	299,89
y	138,71	119,71	100,41	79,76	50,62	32,99	2,14

Tabulka 2.1: Naměřené hodnoty pozice auta

Použitím Kalmanova filtru na tato naměřená data dostaneme odhadnutou trajektorii, která je společně s reálnou trajektorií a naměřenými hodnotami zobrazena v grafu 2.1.



Obrázek 2.1: Reálná, naměřená a odhadnutá trajektorie auta

2.3 Formální shrnutí

Než začneme se samotným shrnutím, tak uděláme malou změnu ve značení. Je běžnou praxí, že se reálné náhodné veličiny značí velkými písmeny. proto i my v tomto shrnutí, kde je naším cílem precizní matematická formulace, takto budeme značit reálné náhodné veličiny, což budou X_n a Z_n s konečným rozptylem. Teoretické poznatky obsažené v této sekci byly čerpány především z [Mad08].

Předpokládejme, že máme lineární časově nezávislý systém, který lze popsat lineárním stochastickým stavovým modelem

$$X_{n+1} = FX_n + Gu_n + w_n \quad (2.24)$$

$$Z_n = HX_n + v_n, \quad (2.25)$$

kde X_n je $(k \times 1)$ stavový vektor, $F \in \mathbb{R}^{k \times k}$ matice přechodu, $G \in \mathbb{R}^{k \times a}$ je řídicí matice, u_n je $(a \times 1)$ řídicí vektor, w_n je $(k \times 1)$ vektor šumu procesu, Z_n je $(m \times 1)$ vektor naměřených hodnot, $H \in \mathbb{R}^{m \times k}$ je matice pozorování a v_n je $(m \times 1)$ vektor šumu měření. Necht' dále vektory šumu v_n a w_n jsou gaussovské, mají nulovou střední hodnotu a splňují

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[v_t v_\tau^T] &= \begin{cases} R & \text{pro } t = \tau \\ 0 & \text{pro } t \neq \tau \end{cases} \\ \mathbb{E}[w_t w_\tau^T] &= \begin{cases} Q & \text{pro } t = \tau \\ 0 & \text{pro } t \neq \tau, \end{cases} \end{aligned}$$

kde $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ je kovarianční matice šumu měření a $Q \in \mathbb{R}^{k \times k}$ je kovarianční matice šumu procesu. Rovněž pro šумы předpokládejme, že splňují

$$\mathbb{E}[w_t v_\tau^T] = 0 \quad \text{pro všechna } t, \tau.$$

Začneme přípravou vět a rovnic, které budeme potřebovat.

Věta 2.3.1 (Projekce pro normálně rozdělené veličiny). *Necht' $(Z^T, X^T)^T$ je normálně rozdělená náhodná veličina se střední hodnotou a kovariancí*

$$\begin{pmatrix} \mu_Z \\ \mu_X \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{ZZ} & \Sigma_{ZX} \\ \Sigma_{XZ} & \Sigma_{XX} \end{pmatrix}.$$

Potom podmíněný náhodný vektor $Z|X$ má normální rozdělení se střední hodnotou

$$\mathbb{E}[Z|X] = \mu_Z + \Sigma_{ZX} \Sigma_{XX}^{-1} (X - \mu_X) \quad (2.26)$$

a rozptylem

$$\text{Var}[Z|X] = \Sigma_{ZZ} - \Sigma_{ZX} \Sigma_{XX}^{-1} \Sigma_{ZX}^T. \quad (2.27)$$

Navíc platí, že $(Y - \mathbb{E}[Y|X])$ a X jsou nezávislé.

Důkaz. Důkaz lze dohledat například v [Jaz70]. □

Nechť $X_n = (X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(k)})^T$ a $Z_n = (Z_n^{(1)}, \dots, Z_n^{(m)})^T$ jsou náhodné vektory a necht' $(k + m \times 1)$ vektor $(Z_n^T, X_n^T)^T$ je normálně rozdělený se středními hodnotami a kovariancemi danými

$$\begin{pmatrix} \mu_{Z_n} \\ \mu_{X_n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{Z_n Z_n} & \Sigma_{Z_n X_n} \\ \Sigma_{X_n Z_n} & \Sigma_{X_n X_n} \end{pmatrix}.$$

Potom z věty 2.3.1 plyne, že podmíněný náhodný vektor $X|Z$ je normálně rozdělený se střední hodnotou a rozptylem

$$E[X_n|Z_n] = \mu_{X_n} + \Sigma_{X_n Z_n} \Sigma_{Z_n Z_n}^{-1} (Z_n - \mu_{Z_n}), \quad (2.28)$$

$$\text{Var}[X_n|Z_n] = \Sigma_{X_n X_n} - \Sigma_{X_n Z_n} \Sigma_{Z_n Z_n}^{-1} \Sigma_{Z_n X_n}^T. \quad (2.29)$$

Poznámka 2.3.2. Věta 2.3.1 platí i pro podmíněný vektor $(\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix} | Z)$. Pro tento vektor by rovnice (2.28) a (2.29) přešly do tvaru

$$E[X|Y, Z] = E[X|Z] + \text{Cov}[X, Y|Z] \text{Var}^{-1}[Y|Z] (Y - E[Y|Z]), \quad (2.30)$$

$$\text{Var}[X|Y, Z] = \text{Var}[X|Z] - \text{Cov}[X, Y|Z] \text{Var}^{-1}[Y|Z] \text{Cov}^T[X, Y|Z]. \quad (2.31)$$

Dále si zavedeme

$$\mathcal{Z}_n = (Z_1^T, \dots, Z_n^T)^T, \quad (2.32)$$

což je vektor obsahující všechna měření až do času n . Navíc předpokládáme, že známe i řízení u_1, \dots, u_n .

Nyní si představíme

$$\hat{X}_{n+k,n} = E[X_{n+k} | \mathcal{Z}_n], \quad (2.33)$$

kde $\hat{X}_{n+k,n}$ nazýváme predikcí X_{n+k} (pro $k \geq 1$). Pro $k = 0$ je $\hat{X}_{n,n}$ nazýváno rekonstrukcí X_n .

Dále budeme potřebovat chybu predikce a chybu měření, které jsou dány rovnicemi

$$\tilde{X}_{n+k,n} = X_{n+k} - \hat{X}_{n+k,n} \quad (2.34)$$

$$\tilde{Z}_{n+k,n} = Z_{n+k} - \hat{Z}_{n+k,n} \quad (2.35)$$

a kovarianci X_{n+k} , kterou lze za pomoci (2.33) vyjádřit následovně

$$\begin{aligned} P_{n+k,n}^X &= \text{Var}[X_{n+k} | \mathcal{Z}_n] \\ &= E[(X_{n+k} - E[X_{n+k} | \mathcal{Z}_n])(X_{n+k} - E[X_{n+k} | \mathcal{Z}_n])^T | \mathcal{Z}_n] \\ &= E[(X_{n+k} - \hat{X}_{n+k,n})(X_{n+k} - \hat{X}_{n+k,n})^T | \mathcal{Z}_n] \\ &= E[\tilde{X}_{n+k,n} \tilde{X}_{n+k,n}^T | \mathcal{Z}_n] \\ &= \text{Var}[\tilde{X}_{n+k,n} | \mathcal{Z}_n]. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Pokud bychom navíc předpokládali, že $\tilde{X}_{n+k,n}$ a \mathcal{Z}_n jsou nezávislé, tak by dokonce platilo

$$\text{Var}[\tilde{X}_{n+k,n} | \mathcal{Z}_n] = \text{Var}[\tilde{X}_{n+k,n}]. \quad (2.37)$$

Dosazením (2.37) do (2.36) získáme finální podobu

$$P_{n+k,n}^X = \text{Var}[X_{n+k}|\mathcal{Z}_n] = \text{Var}[\tilde{X}_{n+k,n}]. \quad (2.38)$$

Analogickým postupem bychom se dopracovali i k

$$\begin{aligned} P_{n+k,n}^Z &= \text{Var}[Z_{n+k}|\mathcal{Z}_n] = \text{Var}[\tilde{Z}_{n+k,n}], \\ P_{n+k,n}^{XZ} &= \text{Cov}[X_{n+k}, Z_{n+k}|\mathcal{Z}_n] = \text{Cov}[\tilde{X}_{n+k,n}, \tilde{Z}_{n+k,n}] = P_{n+k,n}^{ZX}. \end{aligned}$$

Nyní si představíme další větu, kterou budeme potřebovat pro další postup.

Věta 2.3.3 (O optimální predikci). *Platí, že*

$$\min_g \text{E}[(Y - g(X))^2|X = x] = \text{E}[(Y - g^*(x))^2|X = x], \quad (2.39)$$

kde $g^*(x) = \text{E}[Y|X = x]$.

Důkaz. Důkaz lze najít v [Mad08]. □

Z věty 2.3.3 plyne, že pokud chceme minimalizovat střední hodnotu kvadrátu chyby predikce, tak optimální rekonstrukci a predikci získáme pomocí podmíněné střední hodnoty.

Nyní máme již vše potřebné, abychom se dopracovali k optimální rekonstrukci X_n . Stačí nám do (2.30) a (2.31) dosadit za $X = X_n$, $Y = Z_n$ a $Z = \mathcal{Z}_{n-1}$, čímž získáme následující větu.

Věta 2.3.4 (O optimální rekonstrukci). *Optimální rekonstrukci X_n získáme pomocí rovnice*

$$\begin{aligned} \hat{X}_{n,n} &= \text{E}[X_n|Z_n, \mathcal{Z}_{n-1}] \\ &= \text{E}[X_n|\mathcal{Z}_{n-1}] + \text{Cov}[X_n, Z_n|\mathcal{Z}_{n-1}]\text{Var}^{-1}[Z_n|\mathcal{Z}_{n-1}](Z_n - \text{E}[Z_n|\mathcal{Z}_{n-1}]), \end{aligned}$$

kteřou je možné dále přepsat do tvaru

$$\hat{X}_{n,n} = \hat{X}_{n,n-1} + P_{n,n-1}^{XZ} (P_{n,n-1}^Z)^{-1} (Z_n - \hat{Z}_{n,n-1}). \quad (2.40)$$

Dále kovariance chyby rekonstrukce bude ve tvaru

$$P_{n,n}^X = P_{n,n-1}^X - P_{n,n-1}^{XZ} (P_{n,n-1}^Z)^{-1} (P_{n,n-1}^{XZ})^T. \quad (2.41)$$

Důkaz. Plyne z postupu výše. □

Označíme si

$$K_n = P_{n,n-1}^{XZ} (P_{n,n-1}^Z)^{-1},$$

což je náš známý Kalmanův přírůstek.

Ze stavových rovnic (2.24) a (2.25) plynou rovnice pro predikci na jeden krok dopředu ve tvaru

$$\widehat{X}_{n+1,n} = F\widehat{X}_{n,n} + Gu_n, \quad (2.42)$$

$$\widehat{Z}_{n+1,n} = H\widehat{X}_{n+1,n} \quad (2.43)$$

a příslušné rovnice predikční chyby jsou

$$\begin{aligned} \widetilde{X}_{n+1,n} &= X_{n+1} - \widehat{X}_{n+1,n} \\ &= F(X_n - \widehat{X}_{n,n}) + w_{n+1} \\ &= F\widetilde{X}_{n,n} + w_{n+1}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\widetilde{Z}_{n+1,n} = H\widetilde{X}_{n+1,n} + v_{n+1}. \quad (2.45)$$

Ještě si k predikčním chybám vyjádříme jejich kovariance

$$\text{Var}[\widetilde{X}_{n+1,n}] = F\text{Var}[\widetilde{X}_{n,n}]F^T + Q = FP_{n,n}^X F^T + Q = P_{n+1,n}^X, \quad (2.46)$$

$$\text{Var}[\widetilde{Z}_{n+1,n}] = H\text{Var}[\widetilde{X}_{n+1,n}]H^T + R_n = HP_{n+1,n}^X H^T + R_n = P_{n+1,n}^Z, \quad (2.47)$$

$$\text{Cov}[\widetilde{X}_{n+1,n}, \widetilde{Z}_{n+1,n}] = \text{Var}[\widetilde{X}_{n+1,n}]H^T = P_{n+1,n}^X H^T = P_{n+1,n}^{XZ}. \quad (2.48)$$

Věta 2.3.5 (Kalmanův filtr). *Optimální lineární rekonstrukce $\widehat{X}_{n,n}$ v systému, který je dán rovnicemi (2.24) a (2.25), je dána rovnicemi*

$$\widehat{X}_{n,n} = \widehat{X}_{n,n-1} + K_n(Z_n - H\widehat{X}_{n,n-1}), \quad (2.49)$$

$$P_{n,n}^X = P_{n,n-1}^X - K_n(HP_{n,n-1}^X H^T + R_n)K_n^T = P_{n,n-1}^X - K_nHP_{n,n-1}^X, \quad (2.50)$$

kde Kalmanův přírůstek K_n je dán rovnicí

$$K_n = P_{n,n-1}^X H^T (HP_{n,n-1}^X H^T + R_n)^{-1}. \quad (2.51)$$

Dále optimální lineární predikce $\widehat{X}_{n+1,n}$ je dána rovnicemi

$$\widehat{X}_{n+1,n} = F\widehat{X}_{n,n} + Gu_n, \quad (2.52)$$

$$P_{n+1,n}^X = FP_{n,n}^X F^T + Q, \quad (2.53)$$

$$(2.54)$$

Počáteční podmínky jsou

$$\widehat{X}_{1,0} = E[X_1] = \mu_0, \quad (2.55)$$

$$P_{1,0}^X = \text{Var}[X_1] = V_0. \quad (2.56)$$

Toto tvrzení je výsledkem Kalmanova původního článku [Kal+60], čímž jsme získali Kalmanův filtr s diskretním časem ve formě předpovědi na jeden krok dopředu.

Porovnáme-li si odvozené rovnice Kalmanova filtru z minulé sekce s těmi získanými z věty 2.3.5, tak se nám ihned shodují všechny rovnice kromě (2.50), která není

ve stejném tvaru jako rovnice (2.21). Proto budeme vycházet z rovnice (2.21) a pokusíme se ji upravit do tvaru rovnice (2.50), tj.

$$\begin{aligned} P_{n,n} &= (I - K_n H) P_{n,n-1} (I - K_n H)^T + K_n R_n K_n^T \\ &= P_{n,n-1} - P_{n,n-1} H^T K_n^T - K_n H P_{n,n-1} + K_n (H P_{n,n-1} H^T + R_n) K_n^T. \end{aligned}$$

Začali jsme tím, že jsme si roznásobili závorku. Dále si za první K_n v posledním členu dosadíme (2.23), čímž získáme

$$\begin{aligned} P_{n,n} &= P_{n,n-1} - P_{n,n-1} H^T K_n^T - K_n H P_{n,n-1} \\ &\quad + P_{n,n-1} H^T (H P_{n,n-1} H^T + R_n)^{-1} (H P_{n,n-1} H^T + R_n) K_n^T. \end{aligned}$$

V upravování jsme již skoro u konce, protože nám zbývá si uvědomit, že součin výrazů v závorkách dá jednotkovou matici, čímž se nám rovnice zjednoduší do tvaru

$$\begin{aligned} P_{n,n} &= P_{n,n-1} - P_{n,n-1} H^T K_n^T - K_n H P_{n,n-1} + P_{n,n-1} H^T K_n^T \\ &= P_{n,n-1} - K_n H P_{n,n-1} \end{aligned}$$

Tímto postupem jsme se dopracovali k cíli, jelikož se nám rovnic (2.21) podařilo upravit do tvaru rovnice (2.50).

Poznámka 2.3.6. Nabízí se otázka, který ze zápisů rovnice aktualizace kovariance při implementaci použít. Dle [BJ68] je lepší tato rovnice ve tvaru (2.21), protože již malá chyba ve výpočtu Kalmanova přírůstku může vést k obrovským chybám ve výsledcích. Typicky může něco takového způsobit zaokrouhlování.

Rovnicí (2.52) můžeme získat predikci stavu na jeden krok dopředu. Co když ale budeme chtít predikci na $r \in \mathbb{N}$ kroků dopředu? Toho lze pod jednou podmínkou docílit vcelku jednoduše. Abychom mohli predikovat více kroků dopředu, musíme v rovnici (2.24) vypustit řízení, protože neznáme naše budoucí řízení.

Hledáme tedy predikci $\hat{X}_{n+r,n}$ a máme n měření Z_1, \dots, Z_n . Nejprve si rozepíšeme $\hat{X}_{n+r,k}$ pomocí střední hodnoty a rovnice (2.24) bez řízení, díky čemuž se dostaneme k rovnici

$$\hat{X}_{n+r,n} = \mathbb{E}[X_{n+r} | \mathcal{Z}_n] = \mathbb{E}[F X_{n+r-1} + w_{n+r-1} | \mathcal{Z}_n].$$

Budeme dále pokračovat v úpravách.

$$\begin{aligned} \hat{X}_{n+r,n} &= \mathbb{E}[F X_{n+r-1} | \mathcal{Z}_n] + \mathbb{E}[w_{n+r-1} | \mathcal{Z}_n] \\ &= F \mathbb{E}[X_{n+r-1} | \mathcal{Z}_n] \\ &= F \hat{X}_{n+r-1,n} \end{aligned}$$

Nyní již nezbývá nic jiného, než tento postup iterativně zopakovat a dostat se k cíli

$$\hat{X}_{n+r,n} = F \hat{X}_{n+r-1,n} = F(F \hat{X}_{n+r-2,n}) = \dots = F^{r-1} \hat{X}_{n+1,n}. \quad (2.57)$$

Kapitola 3

Implementace Kalmanova filtru na reálných datech

Na začátku této kapitoly se seznámíme s daty, s kterými budeme pracovat. Dále si představíme stavový model trhu s elektřinou, na kterém bude stát náš Kalmanův filtr. Na to již navážeme samotným Kalmanovým filtrem a LSTM, kde si představíme získané výsledky a pomocí různých metrik je vzájemně porovnáme. Na konec se ještě podíváme na to, jak by si Kalmanův filtr vedl jako binární klasifikátor a porovnáme ho s běžně používanými binárními klasifikátory.

3.1 Data

Pro implementaci Kalmanova filtru jsme si vybrali Rakousko, které spadá pod největší evropskou energetickou burzu EPEX. Rakouské TSO je Austrian Power Grid AG (zkráceně APG) a bude pro nás hlavním zdrojem dat, ze kterého budeme čerpat. Pro naše účely jsme si vybrali časový horizont od 1. 9. 2021 do 17. 10. 2022.

	Odchylka [MW]	Výroba [MW]	Spotřeba [MW]	Toky [MW]
Počet	39552	39168	39552	39552
Průměr	-10,43	5946	7018	1480
Směr. odch.	127,32	1581	1223	1433
Minimum	-843,53	2486	4396	-3936
1. kvartil	-85,21	4742	6004	527
Medián	-11,14	5731	7044	1606
3. kvartil	62,21	6954	7876	2528
Maximum	1088,25	12169	9924	5336

Tabulka 3.1: Základní statistiky odchylky, výroby, spotřeby a přeshraničních toků

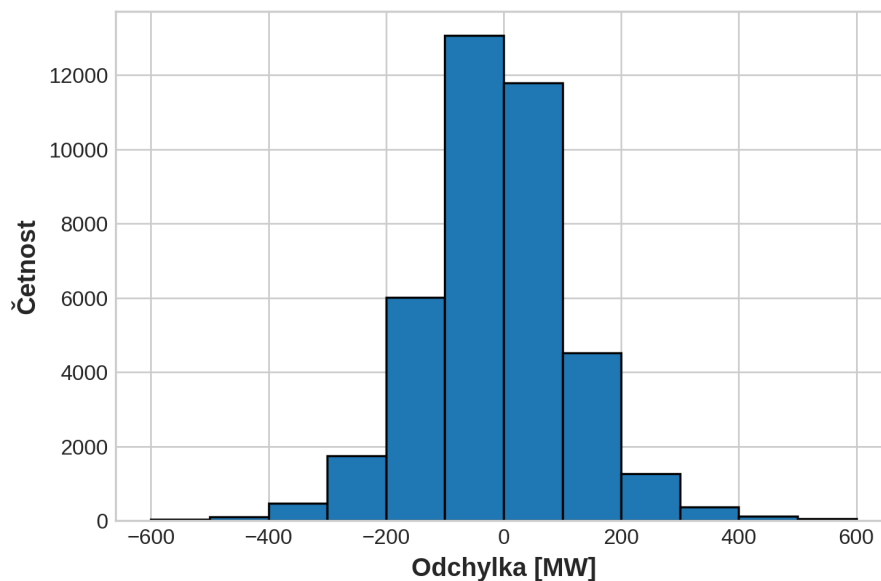
3.1.1 Odchylka

Nejprve začneme s historickými daty o odchylce, která jsme získali z [AG22a]. Výsledná hodnota odchylky je udávána v patnáctiminutové agregaci a jedná se o součet veškeré použité sekundární a terciální regulační energie v daných patnácti minutách. Souhrnné statistiky pro celou odchylku lze vidět v tabulce 3.1, ze kterých pozorujeme, že v daném časovém období byla odchylka lehce více v nedostatku, a to konkrétně v 54,17 % případů. Jelikož se jedná o velký časový interval, podíváme se ještě na měsíční data, která jsou uvedena v tabulce 3.2.

Měsíc	Počet	Přebytek [%]	Nedostatek [%]	Průměr [MW]
Září 2021	2880	42,17	57,83	-13,83
Říjen 2021	2980	54,26	45,74	16,73
Listopad 2021	2880	36,94	63,06	-39,82
Prosinec 2021	2976	46,57	53,43	-9,79
Leden 2022	2976	42,57	57,43	-23,7
Únor 2022	2688	44,35	55,65	-15,29
Březen 2022	2972	44,11	55,89	-17,28
Duben 2022	2880	43,65	56,35	-19,68
Květen 2022	2976	50,81	49,19	7,14
Červen 2022	2880	40,45	59,55	-28,14
Červenec 2022	2976	53,70	46,30	12,38
Srpen 2022	2976	43,04	56,96	-15,67
Září 2022	2880	45,66	54,34	-5,26
Říjen 2022	1632	57,99	42,01	16,83

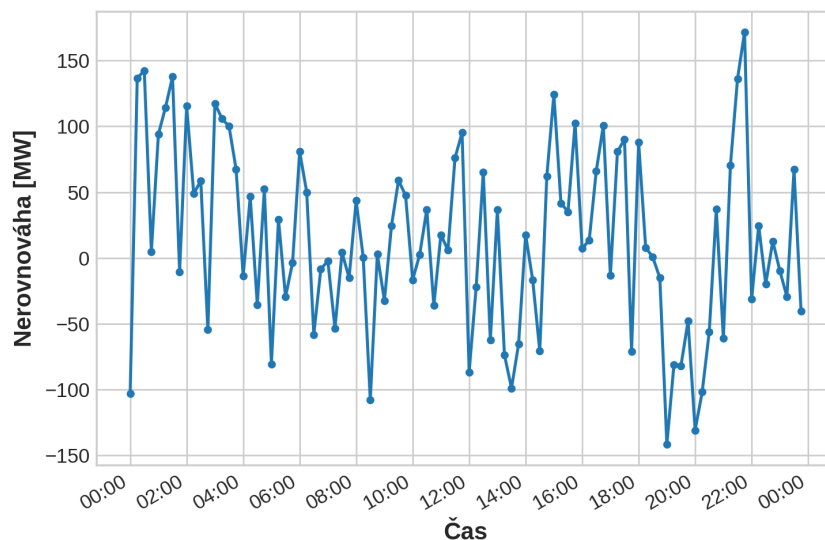
Tabulka 3.2: Shrnutí odchylky po měsících

Dále si vykreslíme histogram, abychom viděli, jestli se odchylka drží spíše blízko u nuly, anebo často dosahuje vysokých hodnot.



Obrázek 3.1: Histogram odchylky

Pro představu, jak se odchylka může měnit v průběhu dne, jsme vybrali jeden náhodný den, který můžete vidět v grafu 3.2, kde kladné hodnoty představují přebytek elektřiny v síti a záporné nedostatek.

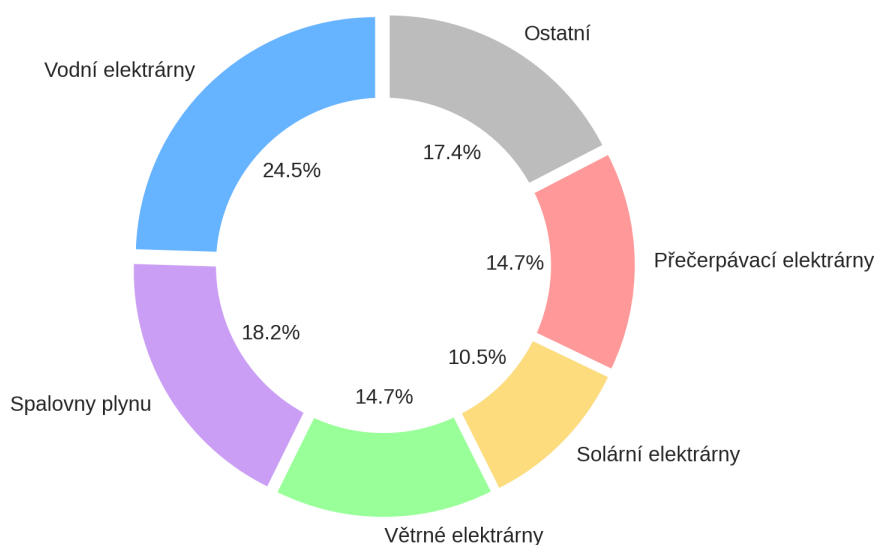


Obrázek 3.2: Odchylka dne 12. 8. 2022

V grafu 3.2 je zobrazena odchylka v patnáctiminutové agregaci, kde jednotlivé body značí hodnotu a počátek dané čtvrt hodiny.

3.1.2 Plánovaná výroba

Dále budeme používat data o předpovědi plánované výroby, která jsou dostupná na [AG22c]. Celý energetický mix Rakouska je zobrazen v grafu 3.3.

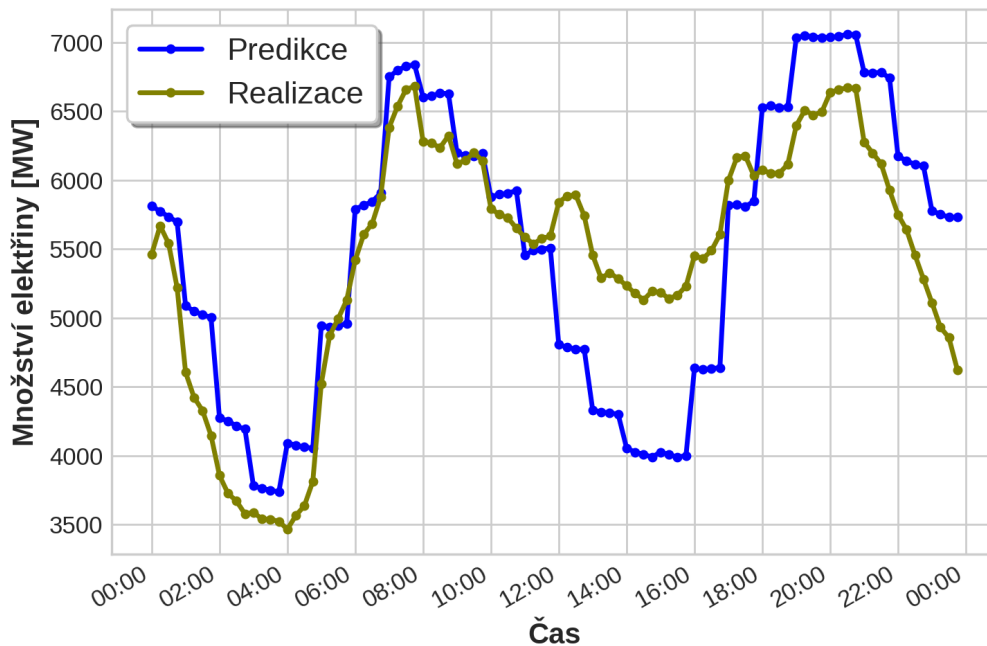


Obrázek 3.3: Energetický mix Rakouska

Jak lze vidět z obrázku 3.3, největší podíl na výrobě mají na svědomí vodní elektrárny, které jsou následovány spalovnami plynu a větrnými elektrárnami. Zajímavostí u Rakouska je to, že vzhledem ke svojí celkové produkce mají značný podíl výroby v přečerpávacích elektrárnách.

Základní statistiky popisující plánovanou výrobu je možné najít v tabulce 3.1.

Nyní si opět vykreslíme jeden den, abychom viděli typický tvar produkce během dne, ale kromě plánované produkce přidáme i reálnou produkci, abychom viděli rozdíl mezi nimi.



Obrázek 3.4: Plánovaná a realizovaná produkce dne 12. 8. 2022

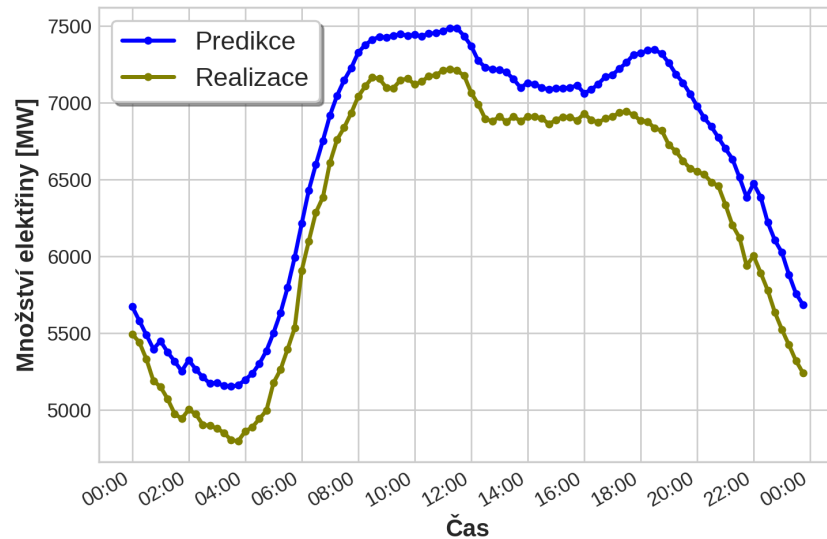
V grafu 3.4 můžeme vidět, že predikce a realizace si drží podobný tvar, ale místy realizace výrazně neodpovídá predikci.

3.1.3 Plánovaná spotřeba

K plánované produkci patří plánovaná spotřeba, která je publikovaná na [AG22d].

Základní statistiky spotřeby lze vidět v tabulce 3.1.

Rovněž si opět vykreslíme plánovanou spotřebu oproti reálné.

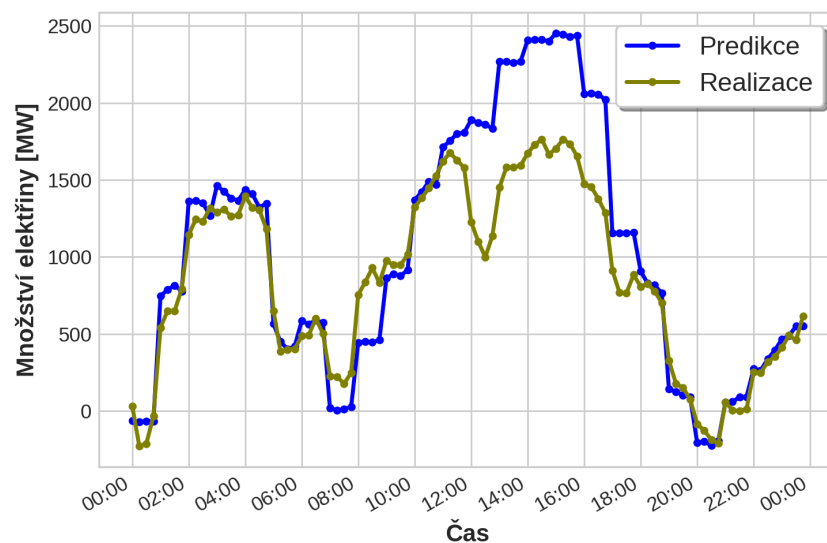


Obrázek 3.5: Plánovaná a realizovaná spotřeba dne 12. 8. 2022

V grafu 3.5 můžeme vidět, že v daný den byla po celou dobu realizovaná produkce nižší než plánovaná.

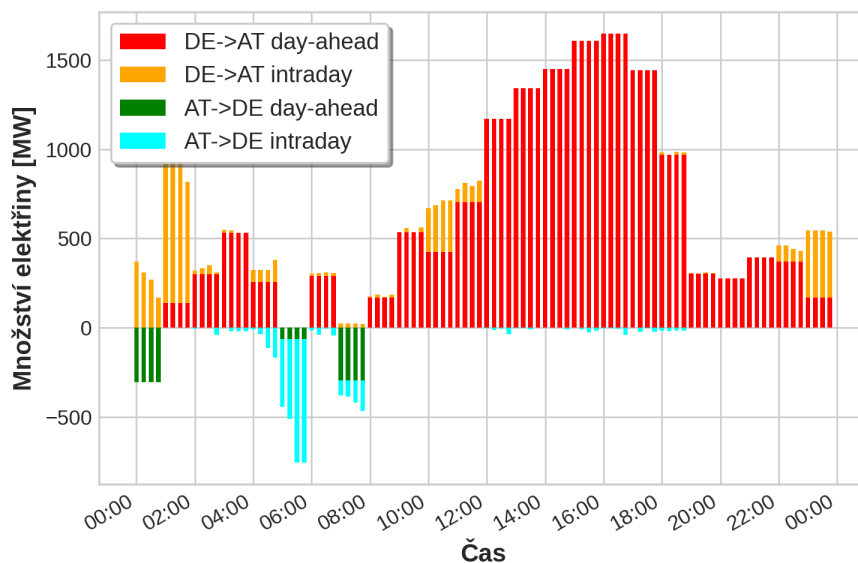
3.1.4 Plánované přeshraniční toky

Poslední údaj, který utváří celkovou produkci/spotřebu a odchylku, je plánovaný přeshraniční tok, který získáváme z [AG22b]. Rakousko si „vyměňuje“ elektřinu se všemi svými sousedy vyjma Slovenska, jmenovitě tedy s Českou republikou, Maďarskem, Slovinskem, Itálií, Švýcarskem a Německem. Přeshraniční toky s těmito státy jsou plánovány ročně, měsíčně, den před realizací a během dne realizace. Souhrnné statistiky jsou uvedeny v tabulce 3.1.



Obrázek 3.6: Plánované a realizované přeshraniční toky dne 12. 8. 2022

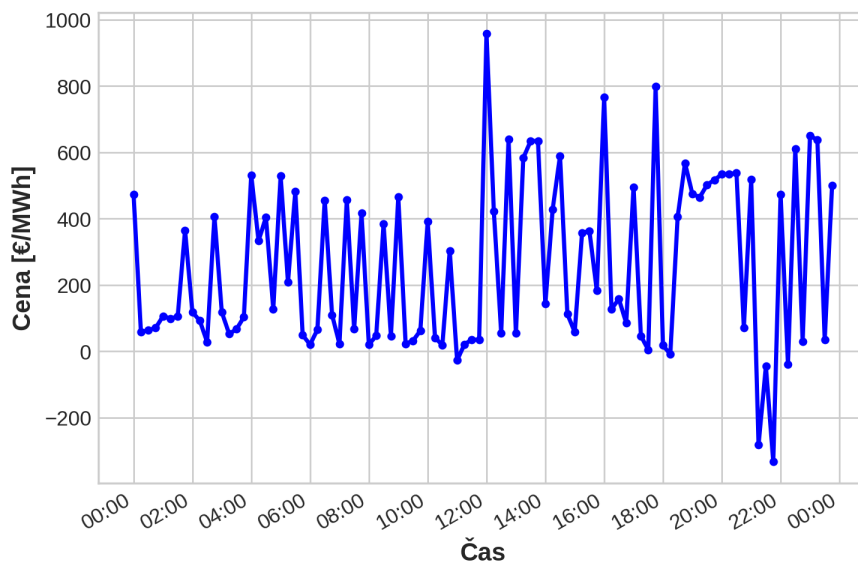
V grafu 3.4 můžeme vidět, jaká byla realizace přeshraničních toků oproti plánovaným. Je třeba si uvědomit, že v grafu 3.6 pozorujeme kumulativní přeshraniční toky, tj. souhrnný stav veškerého importu a exportu se všemi státy. Pro zajímavost si vykreslíme přeshraniční toky pouze s Německem, které lze vidět v grafu 3.7.



Obrázek 3.7: Plánované přeshraniční toky s Německem dne 12. 8. 2022

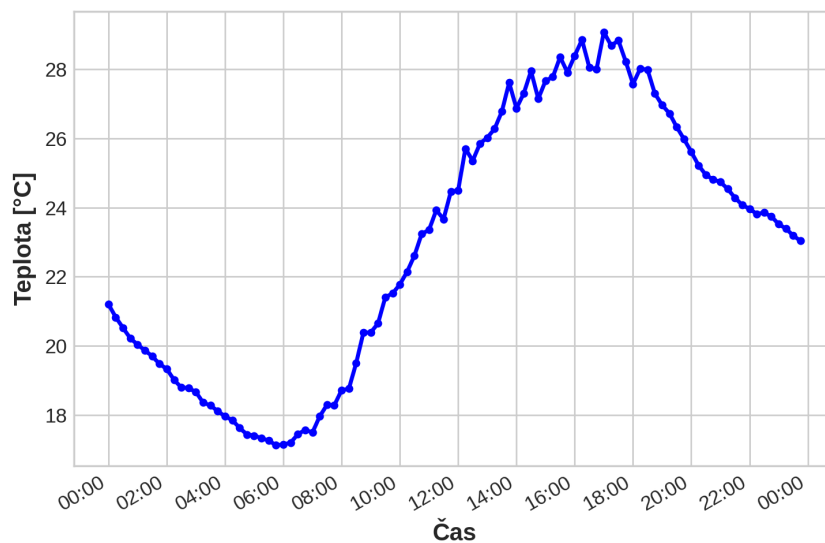
3.1.5 Zúčtovací cena a teplota

Zbývají nám poslední dvě proměnné, které musíme zmínit. První z nich je zúčtovací cena, za kterou TSO vyrovnával soustavu. Tuto cenu jsme získali z [AG22e]. V grafu 3.8 je možné vidět zúčtovací ceny na čtvrthodinách během jednoho dne.



Obrázek 3.8: Zúčtovací ceny dne 12. 8. 2022

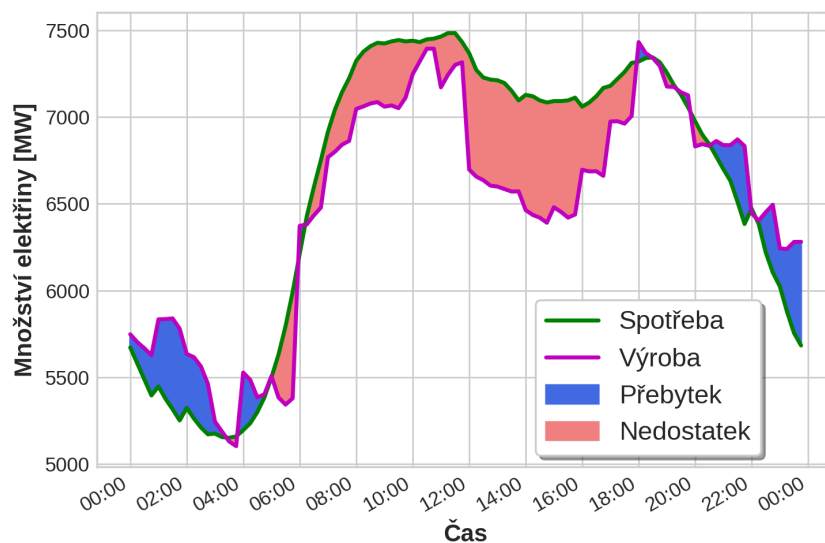
A jako poslední proměnná, kterou použijeme do binárního klasifikátoru, je teplota ve Vídni, kterou budeme brát z [Und22]. Průběh teploty v rámci jednoho dne je zobrazen v grafu 3.9.



Obrázek 3.9: Teplota ve Vídni dne 12. 8. 2022

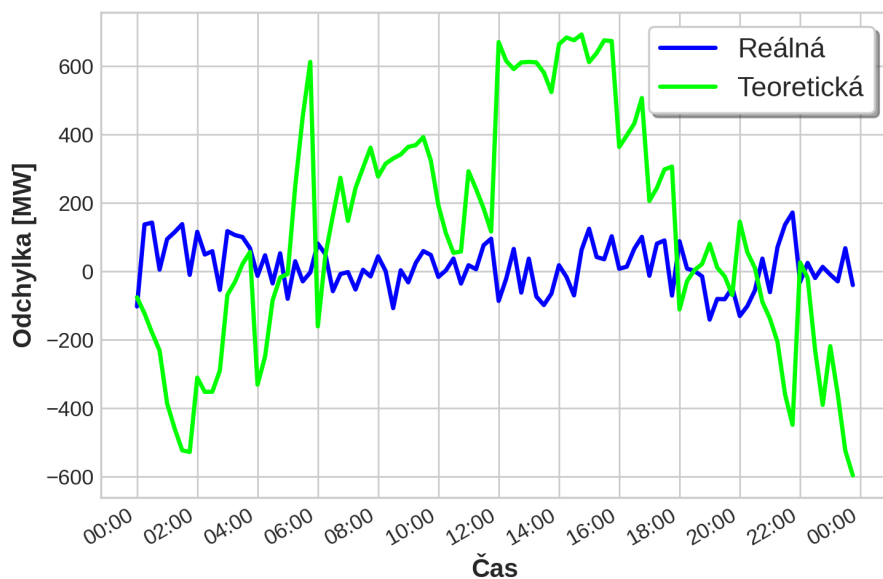
3.1.6 Srovnání odchytky, výroby, spotřeby a toků

Jak jsme již zmínili, odchytka vzniká jako rozdíl mezi celkovou výrobou a celkovou spotřebou včetně všech přeshraničních toků. Nicméně jak jsme již ukázali, tak predikce výroby, spotřeby a toků je vzdálená od realizace. Proto bychom rádi názorně ukázali, jak by vypadala odchytka, pokud by predikce byly přesné. Tuto „plánovanou“ odchytku následně srovnáme s realizovanou odchytkou.



Obrázek 3.10: Plánovaná výroba a spotřeba včetně toků dne 12. 8. 2022

V grafu 3.10 pozorujeme, že dle predikcí by teoretická odchylka, vyplývající z plánované výroby, spotřeby a toků, měla být ráno a večer v přebytku a ve zbytku dne v nedostatku. Tuto získanou odchylku porovnáme s reálnou odchylkou v grafu 3.11.



Obrázek 3.11: „Plánovaná“ a reálná odchylka dne 12. 8. 2022

V grafu 3.11 pozorujeme, že odchylky se vůbec vzájemně neshodují. Proto je úloha predikce odchylky tak netriviální, protože na ni má v reálném čase vliv spousta faktorů.

3.2 Stavový model trhu s elektřinou

Abychom mohli použít Kalmanův filtr, tak potřebujeme příslušné diferenciální rovnice, které budou popisovat náš dynamický systém. Pro tento účel převezmeme model, který byl představen v [Alv97]. Jedná se o model jednoho dodavatele a jednoho spotřebitele, který je popsán rovnicemi

$$\dot{P}_g = \frac{-b_g - c_g P_g + \lambda - kE}{\tau_g}, \quad (3.1)$$

$$\dot{P}_d = \frac{b_d + c_d P_g - \lambda}{\tau_d}, \quad (3.2)$$

$$\dot{E} = P_g - P_d, \quad (3.3)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{-E}{\tau_\lambda}, \quad (3.4)$$

kde P_g je množství vyrobené elektřiny, P_d je množství spotřebované elektřiny, E je nerovnováha v soustavě a λ je cena elektřiny, τ_g je časová konstanta výroby elektřiny dodavatele, τ_d je časová konstanta spotřeby elektřiny spotřebitele, τ_λ je časová konstanta ceny elektřiny, člen $b_g + c_g P_g$ značí mezní náklady dodavatele a člen $b_d + c_d P_d$ mezní náklady spotřebitele.

Ačkoli se jedná o starší model, tak je i přes to v současnosti stále ve formě různých derivátů používán. V poslední době na něj bylo možné narazit v článcích [Das+21; TP21; Kër+21], které se zabývají inteligentním řízením obnovitelných zdrojů či vylepšováním stávajícího modelu. Rovněž je možné najít články zabývající se predikcí ceny a spotřeby.

Nyní se pokusíme jednoduše a výstižně interpretovat tento systém rovnic. Výrobce se podle rovnice (3.1) chová tak, že zvyšují svoji produkci, pokud cena elektřiny převyšuje mezi náklady na výrobu. Obdobně je tomu tak u rovnice (3.2), kde spotřebitel zvyšuje svoji spotřebu, když mezní náklady převyšují cenu. Jelikož reálně není možné v každé chvíli přesně vyrovnat produkci a spotřebu, vzniká tak systémová odchylka popsaná rovnicí (3.3). V případě přebytku energie dojde ke snížení ceny dle rovnice (3.4), načež toto snížení ceny způsobí zvýšení spotřeby a snížení produkce, což povede ke snížení přebytku energie v soustavě. Aby se docílilo stabilního chování trhu, je nutné zařadit do rovnic dodatečný cenový signál, který je v tomto případě pouze na straně producenta vyjádřen členem kE .

Celý systém rovnic můžeme diskrétně přepsat do maticové podoby následovně

$$x_{n+1} = Fx_n + Gu_n + w_n, \quad (3.5)$$

kde

$$\begin{aligned} x_n &= (P_n^g \quad P_n^d \quad E_n \quad \lambda_n)^T, \\ u_n &= (b_g \quad b_d \quad 0 \quad 0)^T, \\ F &= I + \begin{pmatrix} -\frac{c_g}{\tau_g} & 0 & -\frac{k}{\tau_g} & \frac{1}{\tau_g} \\ 0 & \frac{c_d}{\tau_d} & 0 & -\frac{1}{\tau_d} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_\lambda} & 0 \end{pmatrix} \Delta t, \\ G &= \text{diag} \left(-\frac{1}{\tau_g} \quad \frac{1}{\tau_d} \quad 0 \quad 0 \right) \Delta t. \end{aligned}$$

Suboptimální nastavení parametrů jsme získali tak, že jsme udělali sít vhodných hodnot přes všechny parametry modelu a minimalizovali jsme RMSE (viz rovnice (3.11)). Tím jsme získali hodnoty parametrů uvedené v tabulce 3.3.

Parametr	Hodnota
b_g	10
c_g	0,1
k	0,5
τ_g	0,1
b_d	10
c_d	-0,75
τ_d	0,1
τ_λ	100

Tabulka 3.3: Parametry Alvaradova modelu

Než přejdeme k reálným výsledkům, tak si ještě stručně představíme LSTM. Předpokládáme, že čtenář je seznámen s teorií neuronových sítí. Pokud by nebyl, tak lze potřebné informace dohledat v [And95; Ras+22; Rus+10]. V následující sekci uvedeme stručný základní popis architektury, kterou používáme.

3.3 LSTM

Long short-term memory (LSTM) je typ rekurentní neuronové sítě, která je schopná efektivně zpracovávat a analyzovat sekvenční data. Zvláště užitečná je pro překlad jazyka, jazykové modely a predikci časových řad.

LSTM byly představeny dvojicí Sepp Hochreiter a Jürgen Schmidhuber v 90. letech minulého století a byly publikovány v [HS97]. Tito autoři si kladli za cíl vypořádat se s problémem mizejícího gradientu, který je přítomen u klasických rekurentních neuronových sítí. Tento problém se projevuje tím, že znesnadňuje sítím naučit se dlouhodobé závislosti kvůli tomu, že gradient začne být velmi malý.

Základní struktura LSTM buňky se skládá ze tří bran, které slouží k řízení toku informací buňkou. Zpravidla se jedná o vstupní, výstupní a zapomínací bránu. Jak již samotné názvy napovídají, tak vstupní brána má za úkol rozhodovat, které vstupní informace mají vstoupit do buňky. Výstupní brána je zodpovědná za rozhodování o tom, které informace mají být výstupem buňky, a zapomínací brána rozhoduje o vyřazení některých informací. Tyto brány jsou popsány následujícími rovnicemi

$$i_t = \sigma(W_{ix}x_t + W_{ih}h_{t-1} + b_i), \quad (3.6)$$

$$o_t = \sigma(W_{ox}x_t + W_{oh}h_{t-1} + b_o), \quad (3.7)$$

$$f_t = \sigma(W_{fx}x_t + W_{fh}h_{t-1} + b_f), \quad (3.8)$$

kde x_t označuje vstupní vektor, W je matice vah, b je bias a σ je funkce sigmoid.

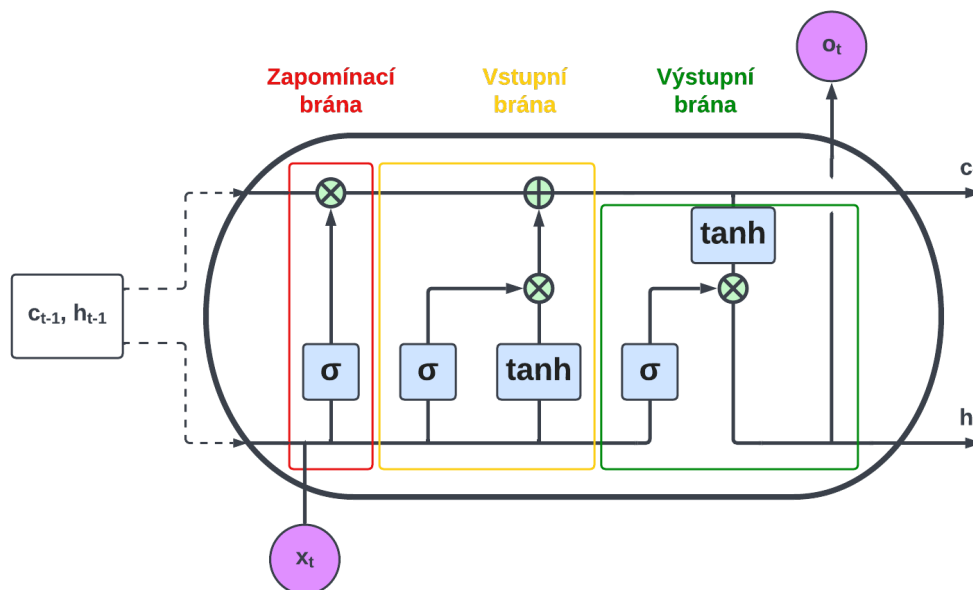
Kromě těchto bran má ještě každá buňka svůj stav, který je zodpovědný za uchování informace v dlouhém časovém horizontu. Každá buňka ještě rovněž obsahuje svůj skrytý stav, který umožňuje síti využít předchozí informace k předpovědím v aktuálním kroku. Oba tyto stavy se řídí rovnicemi

$$c_t = f_t \odot c_{t-1} + i_t \odot \tanh(W_{cx}x_t + W_{ch}h_{t-1} + b_c), \quad (3.9)$$

$$h_t = o_t \odot \tanh(c_t), \quad (3.10)$$

kde kromě již zmíněných veličin ještě vystupuje \odot , což je násobení po složkách (někdy též Hadamardův součin).

Těmito pěti zmíněnými rovnicemi je dán proces učení LSTM a na obrázku 3.12 lze pozorovat schéma výměny informací mezi buňkami v čase.



Obrázek 3.12: Schéma LSTM

Nicméně i LSTM má své limity. Jedním z nich je vysoká výpočetní náročnost, která ve spojení s potřebou velkého množství dat může způsobit nepřiměřeně dlouhý čas trénování sítě. Rovněž je tento typ sítí náchylný na přetrénování a je citlivý na volbu hyperparametrů.

V kontextu energetiky se LSTM často využívají pro predikci spotřeby, ceny elektřiny nebo produkce obnovitelných zdrojů.

To je vše k úvodu do LSTM a čtenáře, kteří by se rádi dozvěděli více, odkážeme na některou z knih [GBC16; Cha19; Ket17; Ger19; Nie19].

3.4 LSTM a Kalmanův filtr

Hlavní předností Kalmanova filtru je jeho schopnost zpřesnit zašumělá data, ať už šum vzniká měřením či samotným procesem. Naším cílem je predikovat nerovnováhu v soustavě nejprve na jeden krok, a poté na dva kroky dopředu za použití Alvaradova modelu. Odchylku ovlivňuje velké množství faktorů jako produkce, spotřeba a přeshraniční tok, nicméně kromě těchto zřejmých faktorů v sobě nesou spoustu informace i historická data o odchylce. Abychom této informaci využili co nejvíce, rozhodli jsme se zkonstruovat rekurentní neuronovou síť s LSTM architekturou, která je natrénovaná na historických datech o odchylce z období od 1. 9. 2021. do 31. 8. 2022 a validovaná na datech od 1. 9. 2022 do 10. 10. 2022.

Abychom mohli porovnávat výsledky, bude potřeba si zavést vhodné metriky. My si zvolíme tři, které se používají pravděpodobně nejčastěji. Jedná se o RMSE (Root

Mean Square Error), MAE (Mean Absolute Error) a R^2 , které jsou definovány vztahy

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2}{n}}, \quad (3.11)$$

$$\text{MAE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\hat{y}_i - y_i|, \quad (3.12)$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}, \quad (3.13)$$

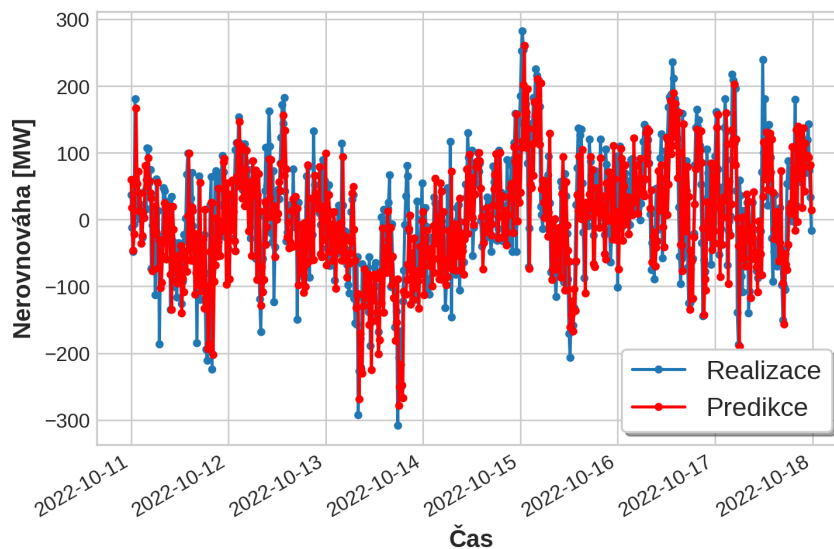
kde \hat{y}_i je predikovaná hodnota, y_i je reálná hodnota a $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$.

3.4.1 Predikce na jeden krok dopředu

Začneme s případem, kdy budeme predikovat odchylku na jeden krok dopředu, tedy jakmile obdržíme hodnotu odchylky dané čtvrt hodiny, tak budeme predikovat následující. V tomto případě bychom měli docílit vyšší přesnosti než při následující predikci na dva kroky dopředu. Budeme predikovat odchylku od 11. 10. 2022 do 17. 10. 2022, kdy nejprve srovnáme reálná data s predikcí pouze za využití LSTM a následně s kombinací LSTM a Kalmanova filtru.

Na začátek si představíme naprosto základní model, se kterým budeme naše výsledky porovnávat. U tohoto modelu budeme předpokládat, že predikovaná odchylka bude stejná jako poslední známá. Jedná se o nejjednodušší predikční model, od kterého nemáme velká očekávání, ale bude dobrý pro srovnání s LSTM a Kalmanovým filtrem. V tabulce 3.4 jsou uvedeny hodnoty metriky charakterizující náš základní model.

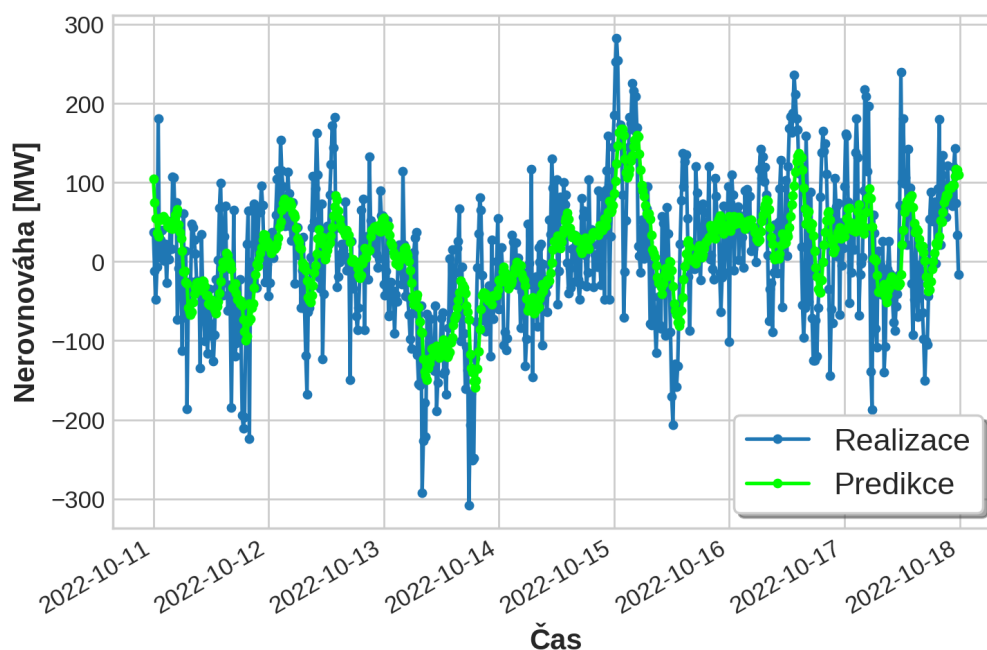
Nyní již můžeme přejít na LSTM. Začneme tím, že si zaneseme do grafu predikované hodnoty oproti reálným.



Obrázek 3.13: Predikce LSTM vůči reálným hodnotám odchylky

V grafu 3.13 můžeme pozorovat, že LSTM si vede celkem dobře v zachycování extrémních hodnot. Bohužel ve chvílích, kdy je odchylka relativně klidná s malými změnami, má tendenci hodnoty dost nadsazovat. Přesto však mají největší vypovídající hodnotu naše tři metriky, jejichž hodnoty jsou uvedeny v tabulce 3.4.

Nyní přejdeme ke Kalmanově filtru, který bude pro vstup využívat predikovanou hodnotu odchylky pomocí LSTM. Do Kalmanova filtru rovněž vstupují získaná data o plánované výrobě, spotřebě a přeshraničních tocích. Výsledek si opět vykreslíme společně s realizací.



Obrázek 3.14: Predikce Kalmanova filtru vůči reálným hodnotám

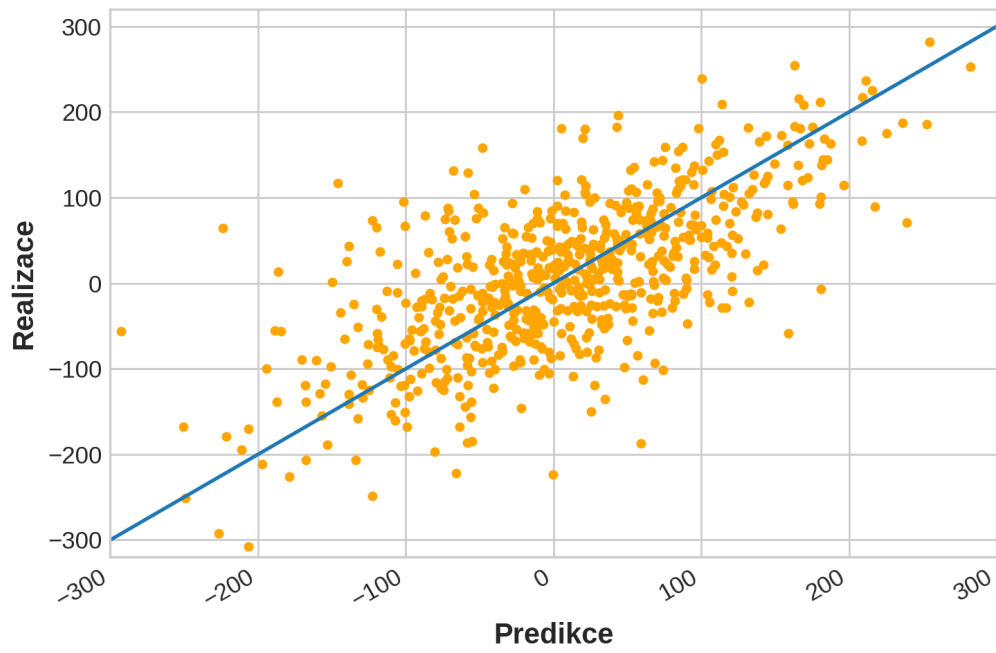
Na grafu 3.14 můžeme pozorovat zajímavý trade-off, ke kterému došlo. V grafu 3.13 jsme mohli pozorovat predikce s velkým rozptylem snažící se zachytit každou změnu, zatímco v grafu 3.14 pozorujeme spíše držení hlavního trendu. Napočítáme si i pro tento případ metriky, abychom mohli všechny tři modely porovnat.

Metrika	Základní model	LSTM	Kalmanův filtr
RMSE	80,15	76,73	74,32
MAE	61,65	60,06	59,64
R^2	0,302	0,258	0,298

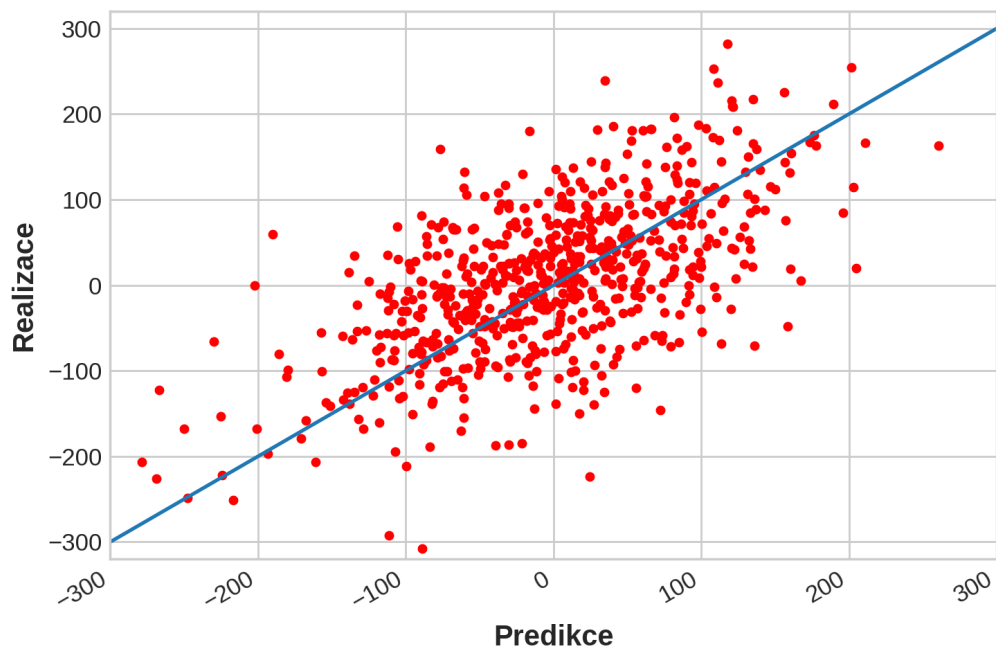
Tabulka 3.4: Metriky pro predikci odchylky na jeden krok dopředu

Z tabulky 3.4 je zřejmé, že si Kalmanův filtr vedl lépe v RMSE i MAE oproti zbylým dvěma modelům. U základního modelu může být překvapivé, že R^2 má srovnatelný s Kalmanovým filtrem, tedy že oba modely vysvětlují variabilitu téměř shodně.

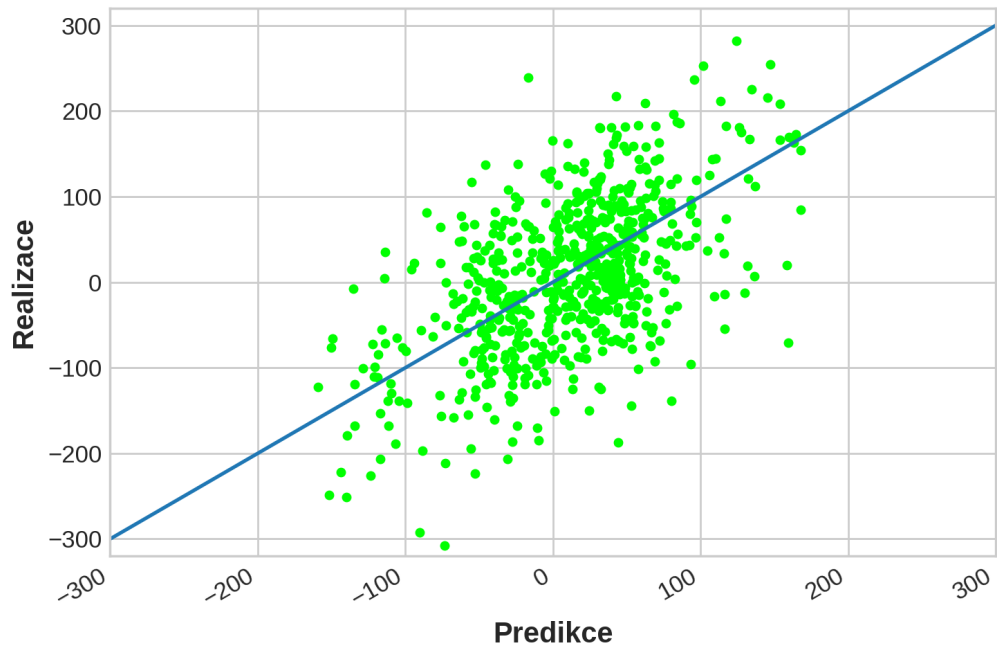
Pro lepší představu, jak si modely vedly, si ještě ke každému z nich vykreslíme korelační diagram, ve kterém proti sobě vyneseme hodnoty predikce a realizace.



Obrázek 3.15: Korelační diagram základního modelu



Obrázek 3.16: Korelační diagram LSTM



Obrázek 3.17: Korelační diagram Kalmanova filtru

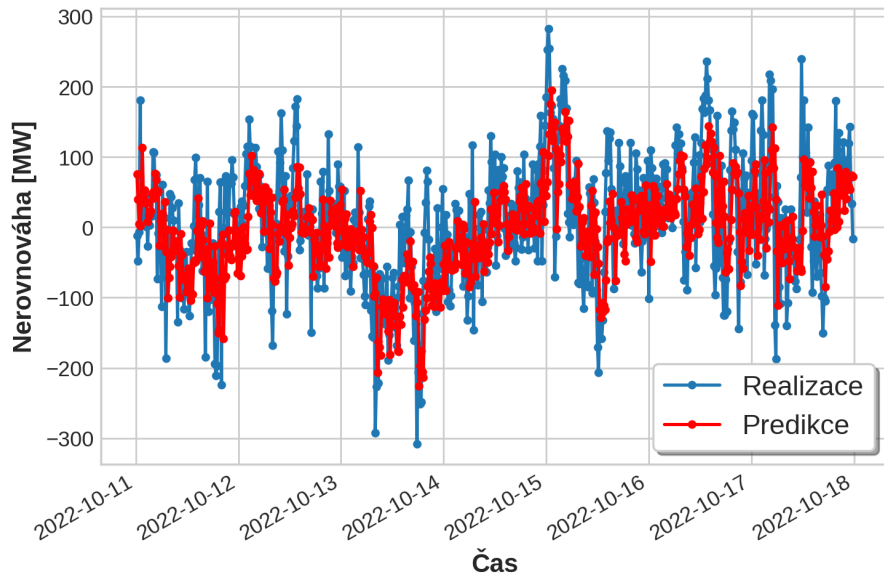
U grafů 3.15 a 3.16 pozorujeme velkou podobnost, kde je většina bodů soustředěna v blízkosti přímky, ale se značným oblakem bodů, které jsou vzdálené. Na druhou stranu v grafu 3.17 vidíme vzdálených bodů od přímky o něco méně, ale zároveň můžeme vidět, jak Kalmanův filtr držel všechny predikované hodnoty pod 200 MW.

3.4.2 Predikce na dva kroky dopředu

V této části analogicky zopakujeme postup z předchozí sekce pouze s rozdílem, že budeme predikovat na dva kroky dopředu. Dá se očekávat, že predikce bude o něco horší a s tím i spojené metriky, ale uvidíme, zdali mají i tak dostatečnou kvalitu. Rovněž zjistíme, zdali si Kalmanův filtr poradí s výrazně méně přesnými daty i v tomto případě.

Opět nejprve sestrojíme základní model, který tentokrát bude predikci na dva kroky brát z posledních dvou známých hodnot odchylky. Hodnoty metrik tohoto modelu lze najít v tabulce 3.5, ve které lze vidět prudké zhoršení oproti základnímu modelu při predikci na jeden krok.

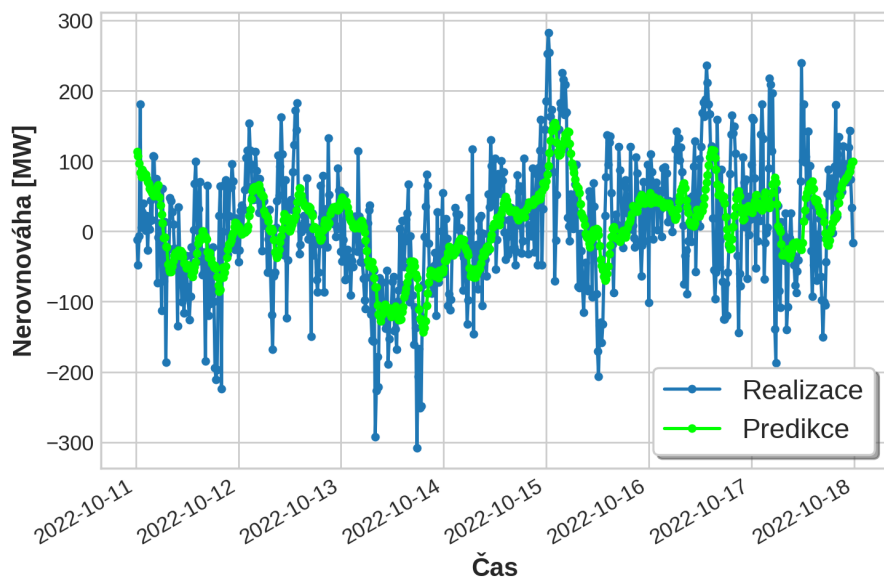
Dále přejdeme k LSTM, u kterého vykreslíme jeho predikci oproti realizaci.



Obrázek 3.18: Predikce LSTM vůči reálným hodnotám odchylky

Oproti LSTM s predikcí na jeden krok dopředu v grafu 3.18 pozorujeme značné snížení rozptylu predikovaných hodnot. Také lze vidět, že se zhoršila predikce vyšších hodnot odchylky, nicméně i tak si ale predikce drží stejný trend jako realizace.

V tabulce 3.5 pozorujeme u LSTM zhoršení ve všech metrikách, ale není nijak zvlášť drastické. Stále dostáváme vcelku dobré predikce. Nyní se podíváme, jak si vedl Kalmanův filtr.



Obrázek 3.19: Predikce Kalmanova filtru vůči reálným hodnotám

Na první pohled se zdají být predikce v 3.19 velmi podobné jako v grafu 3.14. Spočteme si ještě metriky, které nám situaci více objasní.

Metrika	Základní model	LSTM	Kalmanův filtr
RMSE	86,91	79,25	80,09
MAE	68,83	62,69	63,88
R^2	0,051	0,210	0,193

Tabulka 3.5: Metriky pro predikci odchyly na dva kroky dopředu

Jasně můžeme v tabulce 3.5 pozorovat, že Kalmanův filtr nám poskytl o něco horší predikci než LSTM. Ačkoli není rozdíl nijak závratný, můžeme alespoň pozorovat, že Kalmanův filtr není všespásný a nemusí nám vždy nutně pomoci se získáním lepších odhadů. Co se týče výsledků základního modelu, vidíme, že je tento model kvůli jeho špatným výsledkům nepoužitelný.

3.5 Binární klasifikátor

V této části sestrojíme několik klasických binárních klasifikátorů. Nejprve použijeme totožné datové vstupy, jako jsme použili u Kalmanova filtru, abychom porovnali výsledky za stejných podmínek. Následně přidáme další vstupy (teplota, rychlost větru) a podíváme se, o kolik se zlepší predikce. Dále výsledky z binárních klasifikátorů porovnáme s výsledky z Kalmanova filtru, který tentokrát budeme brát jako binární klasifikátor, tzn. bude nás zajímat, zdali bude predikován přebytek nebo nedostatek elektřiny v síti.

Než se pustíme do samotných klasifikátorů, zavedeme si metriky, které budeme potřebovat k jejich porovnávání. Používané metriky pro binární klasifikátory jsou přesnost, preciznost a senzitivita, nicméně tyto tři pojmy jsou spíše známé pod anglickými názvy accuracy, precision a recall, které v tomto případě upřednostníme. Tyto metriky jsou definovány následujícími vztahy

$$\text{Accuracy} = \frac{\text{TP} + \text{TN}}{\text{TP} + \text{TN} + \text{FP} + \text{FN}}, \quad (3.14)$$

$$\text{Precision} = \frac{\text{TP}}{\text{TP} + \text{FP}}, \quad (3.15)$$

$$\text{Recall} = \frac{\text{TP}}{\text{TP} + \text{FN}}, \quad (3.16)$$

kde TP značí skutečně pozitivní (True positive), TN skutečně negativní (True negative), FP falešně pozitivní (False positive) a FN falešně negativní (False negative).

V krátkosti si popíšeme, co nám jednotlivé metriky říkají. Začneme s nejjednodušší accuracy, která nám říká, kolik našich predikcí bylo správných. Dále nám precision určuje poměr správně předpovězených pozitivních pozorování vůči celkovému počtu předpovězených pozitivních pozorování. Vysoká hodnota precision je tedy spojená s nízkou mírou falešně pozitivních výsledků. A poslední recall nám určuje, jak je model dobrý v predikování určité třídy.

Začneme s běžnými binárními klasifikátory jako jsou logistická regrese, rozhodovací stromy, náhodný les, naivní Bayes, metoda podpůrných vektorů nebo třeba nejbližší soused. Jelikož máme velké množství binárních klasifikátorů, ze kterých můžeme vybírat, tak si zvolíme jako náš základní referenční model logistickou regresi. Pro první verzi využijeme jako vstupní data historické hodnoty odchylky, předpokládanou spotřebu, předpokládanou výrobu a předpokládané přeshraniční toky.

Klasifikátor	Accuracy	Precision	Recall
Logistická regrese	0,7464	0,6807	0,7678
Rozhodovací stromy	0,6480	0,6130	0,6419
Náhodný les	0,7248	0,6557	0,7440
Naivní Bayes	0,7271	0,6854	0,7322
Podpůrné vektory	0,7460	0,6798	0,7675
Nejbližší soused	0,7005	0,6442	0,7090

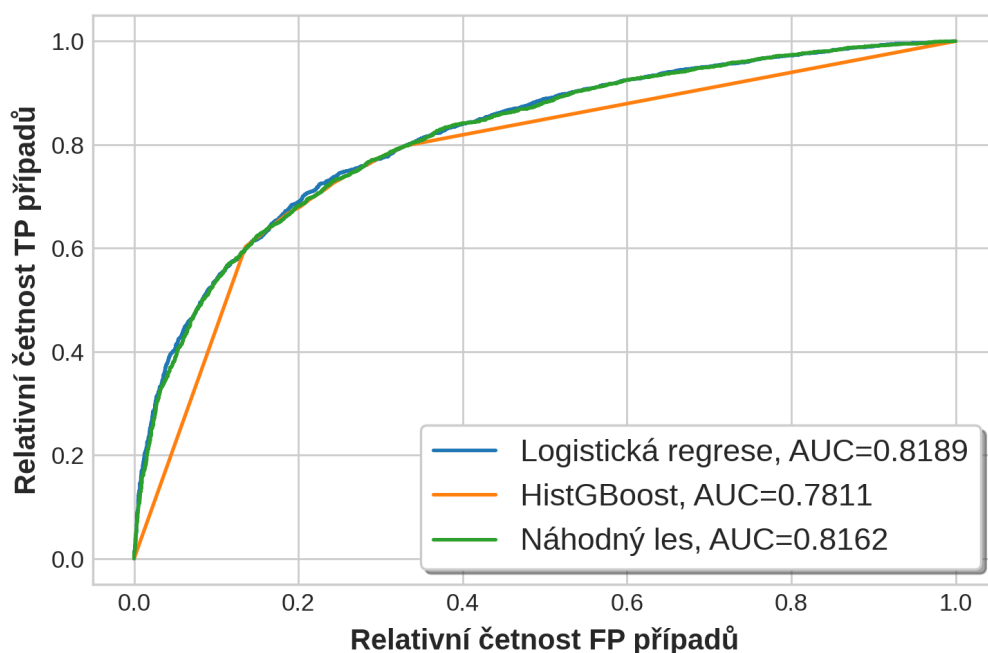
Tabulka 3.6: Výsledky binárních klasifikátorů

Z tabulky 3.6 je vidět, že si všechny klasifikátory vedly podobně až na rozhodovací stromy. Připomeňme si, že z dostupných článků se nám podařilo zjistit, že vícero autorů používalo logistickou regresi a náhodný les, jak lze vidět v 1.1, proto jsme se na tyto dva klasifikátory zaměřili a vylepšili jsme nastavení jejich hyperparametrů. Rovněž jsme rozhodli tuto dvojici doplnit o HistGBoost, což je o něco složitější klasifikátor, který by mohl mít dobré výsledky na našich datech. Po vylepšení hyperparametrů získáváme hodnoty uvedené v tabulce 3.7.

Klasifikátor	Accuracy	Precision	Recall
Logistická regrese	0,7468	0,6798	0,7691
Náhodný les	0,7413	0,6695	0,7653
HistGBoost	0,7423	0,6666	0,7689

Tabulka 3.7: Výsledky trojice klasifikátorů s vylepšenými hyperparametry

Značný posun můžeme vidět u náhodného lesa, který má téměř totožné hodnoty metrik jako logistická regrese, jež se víceméně nezměnila, protože na rozdíl od náhodného lesa nemá příliš hyperparametrů, které by bylo možné ladit. Výsledky HistGBoostu jsou srovnatelné s předchozími dvěma klasifikátory. Ještě se podíváme na ROC křivky těchto klasifikátorů, které by nám mohly poodkrýt další informace.



Obrázek 3.20: ROC křivky

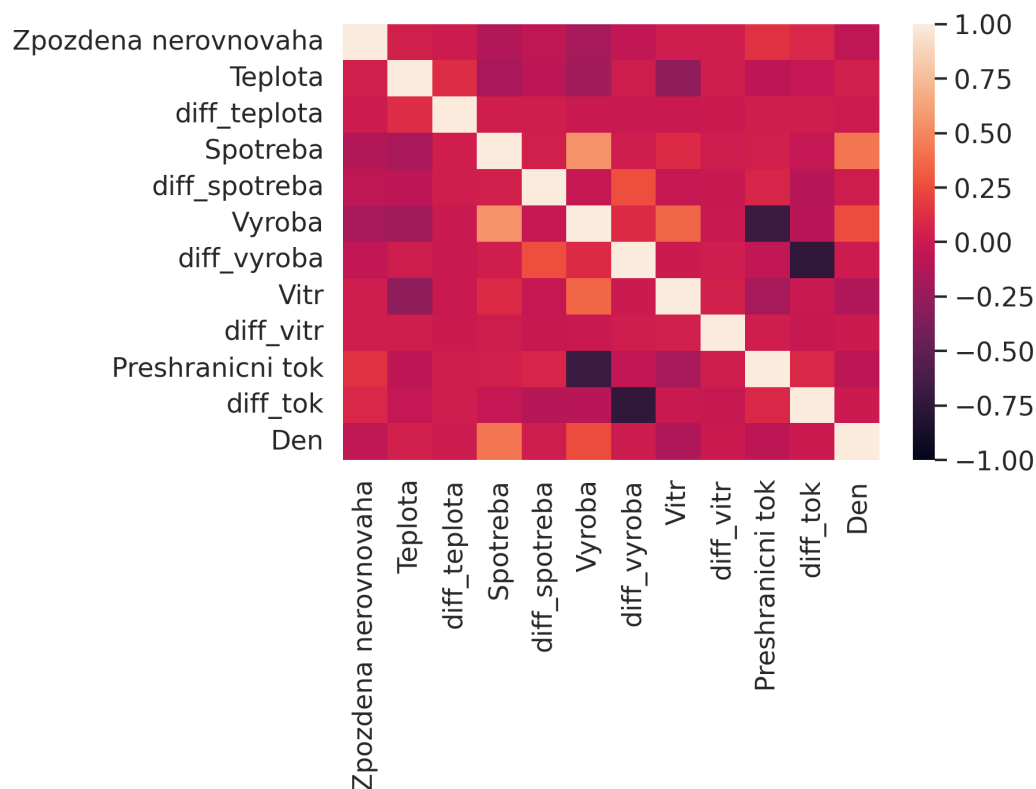
V grafu 3.20 pozorujeme, že logistická regrese i náhodný les si vedly stejně dobře, zatímco HistGBoost zaostával. Tímto jsme se pravděpodobně dostali na samou hranici toho, kam lze tyto binární klasifikátory dotáhnout na daném datasetu.

V dalším kroku rozšíříme náš dataset o relevantní proměnné, které by mohly mít vliv na odchylku. Začneme tím, že přidáme teplotu. Zvýšení teploty může mít za následek například to, že lidé zapnou klimatizace, čímž způsobí větší spotřebu. Nebo naopak teplota výrazně klesá a lidé začínají více topit, což má opět za následek zvýšení spotřeby. Teplotu budeme brát z okolí Vídně, jelikož se jedná o nejlidnatější město. Protože v Rakousku v produkci hraje zásadní roli vítr, tak přidáme i predikci výroby z větru. Navíc ke každé proměnné vyjma odchylky přidáme rozdíl od předchozí hodnoty, abychom viděli, o kolik se daná proměnná změnila. Jako poslední přidáme binární proměnnou, která nám bude říkat, zdali je všední den nebo víkend. Některé tyto proměnné budeme dále použít pod kódovými označení, které je možné najít v tabulce 3.8.

Proměnná	Kódové označení
Rozdíl teplot	diff_teplota
Rozdíl spotřeby	diff_spotreba
Rozdíl výroby	diff_vyroba
Rozdíl větru	diff_vitr
Rozdíl toku	diff_tok

Tabulka 3.8: Kódové označení přidaných proměnných

Než tento obohacený dataset použijeme, tak nejprve zkontrolujeme, jestli mezi proměnnými není výrazná korelace.



Obrázek 3.21: Korelační matice rozšířeného datasetu

Až na dvě malé výjimky to vypadá, že data spolu příliš nekorelují, tudíž je můžeme použít do našich binárních klasifikátorů.

Klasifikátor	Accuracy	Precision	Recall
Logistická regrese	0,7453	0,6843	0,7597
Rozhodovací stromy	0,6363	0,6151	0,6213
Náhodný les	0,7373	0,6592	0,7601
Naivní Bayes	0,6988	0,6949	0,6819
Podpůrné vektory	0,7440	0,6813	0,7591
Nejbližší soused	0,6847	0,6293	0,6835

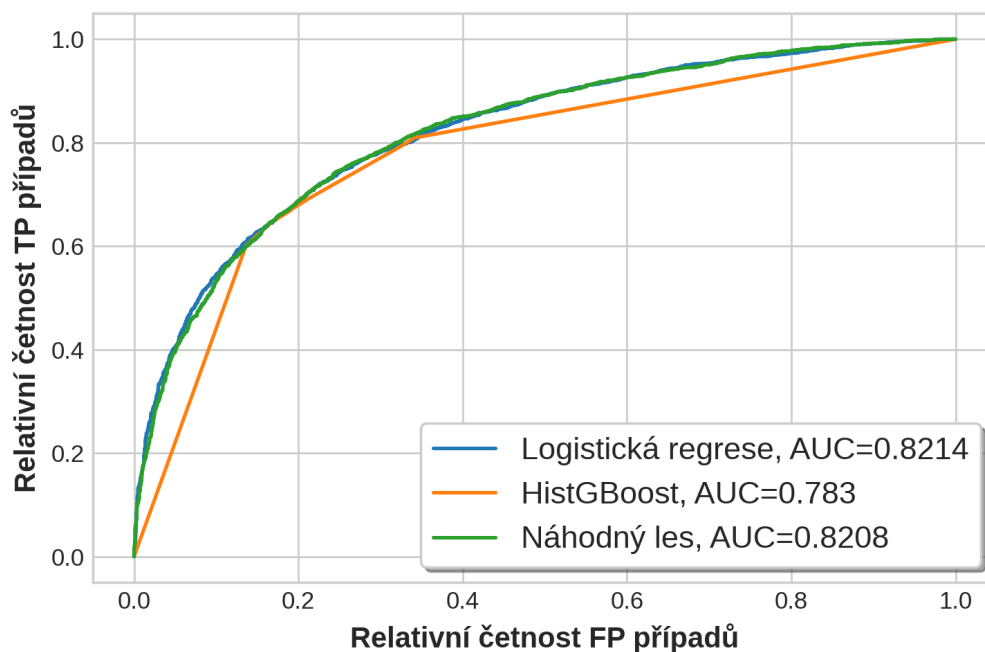
Tabulka 3.9: Výsledky binárních klasifikátorů na rozšířeném datasetu

V tabulce 3.9 můžeme pozorovat, že k žádnému výraznému zlepšení překvapivě nedošlo. V některých případech dokonce nastalo malé zhoršení. Abychom si byli výsledky jisti, tak opět naladíme hyperparametry u logistické regrese a náhodného lesa a přidáme HistGBoost.

Klasifikátor	Accuracy	Precision	Recall
Logistická regrese	0,7454	0,6843	0,7597
Náhodný les	0,7447	0,6743	0,7649
HistGBoost	0,7426	0,6707	0,7627

Tabulka 3.10: Výsledky trojice klasifikátorů s vylepšenými hyperparametry na rozšířeném datasetu

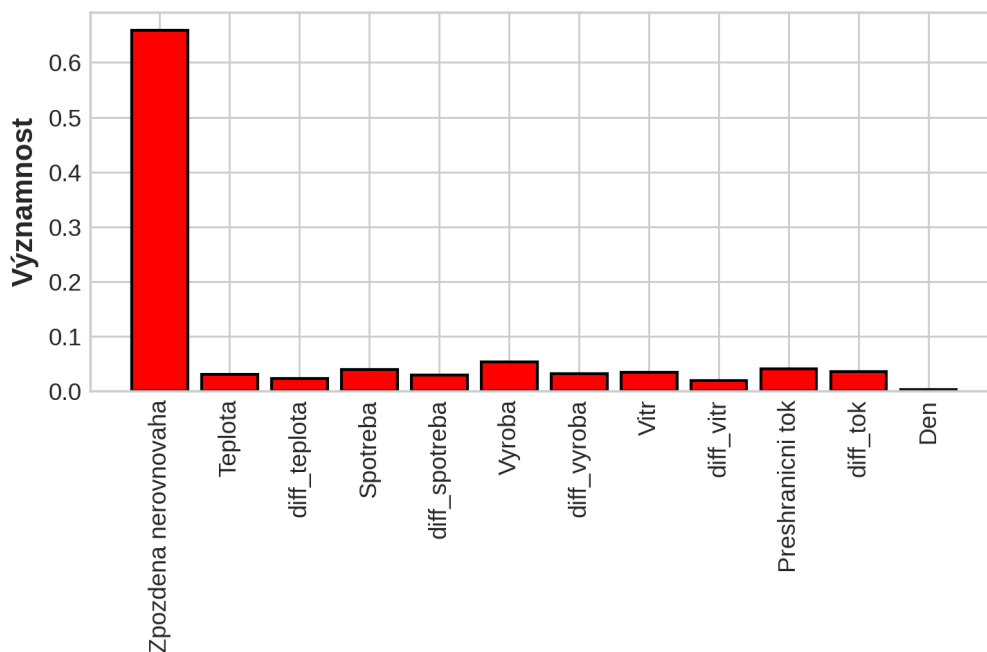
Můžeme tedy vidět, že přidáním dalších proměnných jsme již významného zlepšení klasifikátorů nedosáhli. Zkusili jsme přidat i vícekrát zpožděnou nerovnováhu, ale nedosáhli jsme významně lepších výsledků.



Obrázek 3.22: ROC křivky pro rozšířený dataset

Graf 3.22 vypadá téměř shodně jako graf 3.20, což se shoduje s tím, co jsme již zmínili, tedy že přidáním dalších proměnných jsme nezískali významně lepší výsledky.

Než se pustíme do porovnání s Kalmanovým filtrem, tak se ještě pro zajímavost podíváme, jaké proměnné měly v našem modelu největší význam, tzn. které proměnné nejvíce přispěly k přesnosti predikce.



Obrázek 3.23: Významnost proměnných

Z grafu 3.23 můžeme jasně pozorovat, že největší výpovědní hodnotu má sama nerovnováha ve svých historických datech, což jsme již dříve zmínili.

Na závěr se podíváme, jak si vedl Kalmanův filtr jako binární klasifikátor.

Klasifikátor	Accuracy	Precision	Recall
Kalmanův filtr	0,6964	0,7873	0,6917

Tabulka 3.11: Výsledky binárního Kalmanova filtru

Z tabulky 3.11 plyne, že Kalmanův filtr bohužel nedosahuje takové accuracy a recall jako předchozí binární klasifikátory. Nicméně stojí za zmínku, že je předčil v precision.

3.6 Navržené zobecnění

Cílem do budoucna je samozřejmě zlepšit predikci odchylky. Nabízí se spousta nových metod, které by se daly použít, nicméně pokud bychom chtěli zůstat u dosavadního přístupu, tak se nabízí použít jiný model popisující energetický trh nebo ten stávající zobecnit. Stávající model je přeci jen velkým zjednodušením oproti realitě, a proto má jeho zobecnění velkou hodnotu. Zobecněním bychom mohli lépe aproximovat trh a získat lepší predikce.

Jako první se nabízí zobecnění rovnice (3.4), která popisuje cenu. Zde by mohlo být přínosné přejít k funkci dvou proměnných, kde by každá z proměnných byla zúčtovací cena zohledňující přebytkovou a nedostatkovou soustavu. Z těchto dvou

cen bychom udělali konvexní obal, kde by každá z cen nastala s pravděpodobností zohledňující predikci nerovnováhy. Takováto rovnice by byla ve tvaru

$$\dot{\lambda}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{\tau_\lambda} (\alpha\lambda_1 + (1 - \alpha)\lambda_2),$$

kde τ_λ je škálovací konstanta, λ_1 je zúčtovací cena přebytkové soustavy, λ_2 je zúčtovací cena nedostatkové soustavy a $\alpha = \alpha(E)$. Dále je třeba zjistit tvar funkce α , na kterou klademe následující podmínky:

1. $\alpha(E)$ je spojitá a ostře rostoucí,
2. pro všechna $E \in \mathbb{R}$ platí $0 \leq \alpha(E) \leq 1$,
3. $\alpha(0) = \frac{1}{2}$.

Funkce α je pro nás pravděpodobnost stavu, kdy bude v síti přebytek elektřiny. Pro tyto je vhodné použít funkci arctan. Tato funkce je určitě spojitá i ostře rostoucí, čímž je splněna první podmínka. Zbylé dvě podmínky splníme jednoduše přeškálováním a posunutím. Tvar funkce α zohledňující všechny tyto podmínky tedy bude

$$\alpha(E) = \frac{1}{\pi} \arctan(E) + \frac{1}{2}.$$

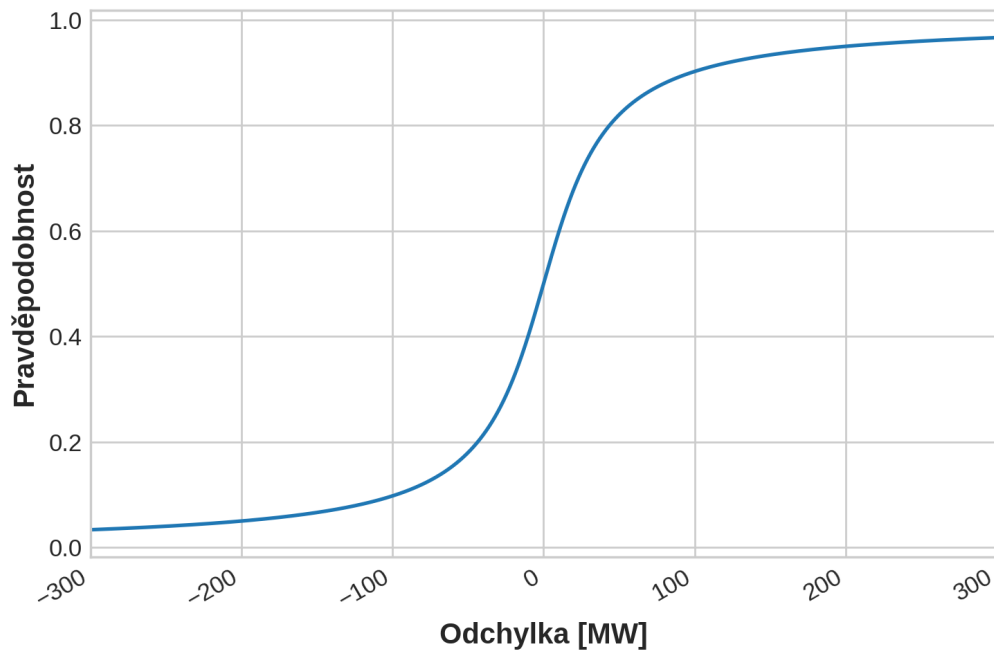
Tím bychom mohli skončit, ale z čistě praktických důvodů si ještě naškálujeme argument funkce arkus tangens. Tím docílíme toho, že budeme moci pevně nastavit pravděpodobnost pro jednu danou hodnotu odchylky. Proto vydělíme argument parametrem K_β , který má tvar

$$K_\beta = \frac{E_\beta}{\tan\left(\pi\left(\beta - \frac{1}{2}\right)\right)},$$

kde E_β je hodnota odchylky, pro kterou nastavujeme hodnotu pravděpodobnosti $\beta \in (0, 1)$. Dosazením bychom získali finální podobu funkce $\alpha(E)$ ve tvaru

$$\alpha(E) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{E}{E_\beta} \tan\left(\pi\left(\beta - \frac{1}{2}\right)\right)\right) + \frac{1}{2}. \quad (3.17)$$

Pokud bychom se tedy například rozhodli nastavit pravděpodobnost pro 200 MW přebytek na 95 %, tak by funkce $\alpha(E)$ měla podobu zobrazenou v grafu 3.24.



Obrázek 3.24: Funkce $\alpha(E)$ pro $E_\beta = 200$ a $\beta = 0,95$

Tímto způsobem jsme zobecnili rovnici pro cenu. To ale není vše, co je potřeba udělat, protože tímto zobecněním jsme přešli od lineární diferenciální rovnice k nelineární, kvůli čemuž už nebudeme moci použít klasický Kalmanův filtr. Proto je potřeba přejít na jeho zobecněnou formu, která by si s nelineárními diferenciálními rovnicemi poradila. Zobecněných forem existuje více, ale nejznámější formou je rozšířený Kalmanův filtr, který přechází z rovnic (2.24) a (2.25) na rovnice

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= f(x_k, u_k) + w_k, \\z_k &= h(x_k) + v_k.\end{aligned}$$

Více informací o rozšířeném Kalmanově filtru je možné dohledat v [Hol20; CC17]. Se zobecňováním bychom mohli pokračovat i u ostatních rovnic, případně bychom mohli přidat nějakou novou rovnici. Dále je možné rozšířit datasety o nové proměnné. Ve spojitosti s obnovitelnými zdroji elektřiny by to mohly být například rychlost větru a síla slunečního záření. Rovněž se nabízí přejít od LSTM k transformerům, což jsou modely hlubokého učení, které jsou nástupcem LSTM sítí. Prostor pro zlepšení je i u binárních klasifikátorů, kde bychom mohli zkusit použít některý z třídy ensemble klasifikátorů.

Závěr

Cílem této práce bylo seznámit se s energetickým trhem, systémovou odchylkou a Kalmanovým filtrem. Dále potom využít nové znalosti ke zkonstruování modelu pro predikci odchylky.

V první kapitole jsme se zabývali energetickým trhem. To s sebou kromě samotného popisu obchodování na energetické burze neslo i seznámení se s funkcí provozovatele přenosové soustavy, vznikem systémové odchylky a její regulací pomocí regulační energie. Dále jsme připojili souhrn článků a metod, které jsou využívány k predikci odchylky.

Druhá kapitola seznamuje čtenáře s Kalmanovým filtrem. Zprvu je kladen důraz na co nejintuitivnější odvození rovnic Kalmanova filtru v jedné dimenzi. Na to bylo navázáno odvozením ve více dimenzích, které bylo doplněno o názorný příklad. Následně jsme celý postup zastřešili veškerými potřebnými matematickými předpoklady a náležitostmi, čímž jsme zakončili veškerou potřebnou teorii ke Kalmanově filtru.

Na začátku třetí kapitoly byla představena veškerá použitá data, mezi něž spadá odchylka, plánovaná výroba, spotřeba, přeshraniční toky, zúčtovací cena a teplota. Následně byl představen Alvaradův stavový model trhu s elektřinou, který jsme rozšířili z případu jednoho výrobce a jednoho spotřebitele na celou rakouskou soustavu. Na to jsme navázali stručným úvodem k LSTM sítím. Poté již následovala implementace v programovacím jazyku Python a vyhodnocení výsledků základního referenčního modelu, LSTM a Kalmanova filtru. Při predikci na jeden krok dosahoval Kalmanův filtr nejlepších výsledků, nicméně zbylé dva modely měly rovněž dobré výsledky. Výrazná změna v přesnosti predikcí nastala až při predikci na dva kroky dopředu, kde již základní model nebyl použitelný. LSTM a Kalmanův filtr si vedly velmi podobně, nicméně LSTM byl ve finále o trochu lepší. Dále jsme se zabývali binárními klasifikátory, kterými jsme predikovali přebytek či nedostatek elektřiny v síti. Nejprve jsme začali s běžně používanými binárními klasifikátory na základním datasetu, což je dataset, který obsahuje totožné datové vstupy jako ty, které jsme použili při predikci Kalmanovým filtrem. Ze základních binárních klasifikátorů jsme například použili logistickou regresi, naivního Bayese a náhodný les. Následně jsme přidali HistGBoost a u vybraných modelů jsme ještě vylepšili hyperparametry. Tento postup jsme analogicky aplikovali i na rozšířený dataset, který jsme obohatili o binární proměnnou rozlišující mezi všedním dnem a víkendem, teplotu a změny ve všech proměnných vyjma nerovnováhy a binární proměnné. Při porovnávání výsledků jsme dospěli k závěru, že na rozšířeném datasetu si binární

klasifikátory nevedly signifikantně lépe. Rovněž jsme klasifikátory srovnali s Kalmanovým filtrem, který si vedl o něco hůře ve srovnání s ostatními klasifikátory. Na závěr jsme jsme navrhli směry, kterými se lze dále ubírat.

Výsledky této práce nám ukazují na nové možnosti, jak tuto práci rozšířit a dostat se tak k ještě přesnějším predikcím. Jednou z těchto možností je nastíněná zobecněná diferenciální rovnice popisující cenu elektřiny, která bere v potaz jak zúčtovací cenu při přebytku elektřiny v síti, tak při nedostatku. Rovněž se nabízí použití nových proměnných (rychlost větru, síla slunečního záření), které by mohly predikci zpřesnit. Také je možné přejít k novějším architektuřám, mezi které patří například transformery, nebo se blíže podívat na třídu ensemble klasifikátorů.

Literatura

- [AG22a] Austrian Power Grid AG. *Control Area Imbalance*. <https://markttransparenz.apg.at/en/markt/Markttransparenz/Netzregelung/control-area-imbalance>. 2022. (Cit. 30.10.2022).
- [AG22b] Austrian Power Grid AG. *Cross-Border Schedules*. <https://markttransparenz.apg.at/en/markt/Markttransparenz/cross-border-exchange/Nominierungen>. 2022. (Cit. 30.10.2022).
- [AG22c] Austrian Power Grid AG. *Day Ahead Forecast for Generation*. <https://markttransparenz.apg.at/en/markt/Markttransparenz/generation/generation-forecast>. 2022. (Cit. 30.10.2022).
- [AG22d] Austrian Power Grid AG. *Day Ahead Load Forecast*. <https://markttransparenz.apg.at/en/markt/Markttransparenz/load/load-forecast>. 2022. (Cit. 30.10.2022).
- [AG22e] Austrian Power Grid AG. *Imbalance prices*. <https://markttransparenz.apg.at/en/markt/Markttransparenz/Netzregelung/Ausgleichsenergiepreise>. 2022. (Cit. 30.10.2022).
- [Alv97] F. L. Alvarado. „The Dynamics of Power System Markets“. *Technical Report Pserc-97-01, Power Systems Engineering Research Consortium (Pserc), The University of Wisconsin* (1997).
- [And95] J.A. Anderson. *An Introduction to Neural Networks*. The MIT Press, 1995. ISBN: 9780262510813.
- [Bec22] Alex Becker. *Kalman filter*. <https://www.kalmanfilter.net/>. 2022. (Cit. 09.07.2022).
- [Bro18] Jethro Browell. „Risk Constrained Trading Strategies for Stochastic Generation with a Single-Price Balancing Market“. *Energies* 11 (čvn. 2018). DOI: 10.3390/en11061345.
- [BJ68] R.S. Bucy a P.D. Joseph. *Filtering for Stochastic Processes with Applications to Guidance*. Interscience Publishers, New York, 1968. ISBN: 9780470116524.
- [BGK18] Derek W. Bunn et al. „A Trading-Based Evaluation of Density Forecasts in a Real-Time Electricity Market“. *Energies* 11.10 (2018). ISSN: 1996-1073. DOI: 10.3390/en11102658. URL: <https://www.mdpi.com/1996-1073/11/10/2658>.

- [Cat88] D. E. Catlin. *Estimation, Control, and the Discrete Kalman Filter*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 1988. ISBN: 978-0-387-96777-6. DOI: 10.1007/978-1-4612-4528-5.
- [Con16] Carolina Contreras. „System Imbalance Forecasting and Short-Term Bidding Strategy to Minimize Imbalance Costs of Transacting in the Spanish Electricity Market“. Dipl. pr. Comillas Pontifical University, 2016.
- [Das+21] Ioannis Dassios et al. „Fractional-order dynamical model for electricity markets“. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* (lis. 2021). DOI: 10.1002/mma.7892.
- [Del+22] Eren Deliaslan et al. „Grid Imbalance Prediction Using Particle Swarm Optimization and Neural Networks“. Led. 2022, s. 87–101. ISBN: 978-3-030-96591-4. DOI: 10.1007/978-3-030-96592-1_7.
- [Fer16] Polina Pires Ferreira. „Volume and Price in The Nordic Balancing Power Market“. Dipl. pr. Norwegian University of Science a Technology, 2016.
- [FS17] Kevin F. Forbes a O. C. St. Cyr. „The Challenge Posed by Geomagnetic Activity to Electric Power Reliability: Evidence From England and Wales“. *Space Weather* 15.10 (2017), s. 1413–1430. DOI: 10.1002/2017SW001668.
- [GK06] Maria Garcia a D. S. Kirschen. „Forecasting System Imbalance Volumes in Competitive Electricity Markets“. *Power Systems, IEEE Transactions on* 21 (břez. 2006), s. 240–248. DOI: 10.1109/TPWRS.2005.860924.
- [Ger19] Aurelien Geron. *Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn, Keras, and TensorFlow: Concepts, Tools, and Techniques to Build Intelligent Systems*. 2nd. O’Reilly Media, Inc., 2019. ISBN: 1492032646.
- [GPB19] Shadi Goodarzi et al. „The impact of renewable energy forecast errors on imbalance volumes and electricity spot prices“. *Energy Policy* 134 (2019), s. 110827. DOI: 10.1016/j.enpol.2019.06.035.
- [GBC16] Ian Goodfellow et al. *Deep Learning*. <http://www.deeplearningbook.org>. MIT Press, 2016.
- [Guv+21] Denizhan Guven et al. „Predicting Power Deviation in the Turkish Power Market Based on Adaptive Factor Impacts“. Čvc. 2021, s. 213–234. ISBN: 978-3-030-80846-4. DOI: 10.1007/978-3-030-80847-1_14.
- [Ham08] James Douglas Hamilton. *Time Series Analysis*. Řij. 2008. ISBN: 978-0-691-04289-3. DOI: 10.1201/9781420059687.
- [HS97] Sepp Hochreiter a Jürgen Schmidhuber. „Long Short-Term Memory“. *Neural Computation* 9.8 (1997), s. 1735–1780. DOI: 10.1162/neco.1997.9.8.1735.
- [Hol20] M. Holland. *An Introduction to the Extended Kalman Filter*. Mathematics research developments. Nova Science Publishers, 2020. ISBN: 9781536188752.
- [Cha19] Eugene Charniak. *Introduction to Deep Learning*. The MIT Press, 2019. ISBN: 0262039516.

- [CC17] Charles K. Chui a Guanrong Chen. *Kalman Filtering with Real-Time Applications*. Springer Cham, 2017. ISBN: 9783319476124. DOI: 10.1007/978-3-319-47612-4.
- [Jaz70] Andrew H. Jazwinski. *Stochastic processes and filtering theory*. Mathematics in science and engineering. Acad. Press, 1970. ISBN: 0123815509.
- [Kal+60] Rudolph Emil Kalman et al. „A new approach to linear filtering and prediction problems“. *Journal of basic Engineering* 82 (1960), s. 35–45. DOI: 10.1115/1.3662552.
- [Kër+21] Taulant Kërçi et al. „A Short-Term Dynamic Electricity Market Model with Memory Effect“. Čvc. 2021. DOI: 10.1109/PESGM46819.2021.9637934.
- [Ket17] Nikhil Ketkar. *Deep Learning with Python*. Apress Berkeley, CA, 2017. ISBN: 9781484227664. DOI: 10.1007/978-1-4842-2766-4.
- [Kra16] Štěpán Kratochvíl. „System Imbalance Forecast“. Dis. pr. České vysoké učení technické v Praze, 2016.
- [Mad08] Henrik Madsen. *Time Series Analysis*. Říj. 2008. ISBN: 978-1-4200-5967-0. DOI: 10.1201/9781420059687.
- [Mak+21] Elpiniki Makri et al. „Short Term Net Imbalance Volume Forecasting Through Machine and Deep Learning: A UK Case Study“. Čvn. 2021, s. 377–389. ISBN: 978-3-030-79156-8. DOI: 10.1007/978-3-030-79157-5_31.
- [Nie19] A. Nielsen. *Practical Time Series Analysis: Prediction with Statistics and Machine Learning*. O’Reilly Media, Incorporated, 2019. ISBN: 9781492041658.
- [OT19] Andre Ortner a Gerhard Totschnig. „The future relevance of electricity balancing markets in Europe - A 2030 case study“. *Energy Strategy Reviews* 24 (dub. 2019), s. 111–120. DOI: 10.1016/j.esr.2019.01.003.
- [Pie+20] Marco Pierro et al. „Italian protocol for massive solar integration: Imbalance mitigation strategies“. *Renewable Energy* 153 (ún. 2020). DOI: 10.1016/j.renene.2020.01.145.
- [Ras+22] S. Raschka et al. *Machine Learning with PyTorch and Scikit-Learn: Develop Machine Learning and Deep Learning Models with Python*. Packt Publishing, 2022. ISBN: 9781801819312.
- [Rib04] Maria Isabel Ribeiro. *Kalman and Extended Kalman Filters: Concept, Derivation and Properties*. Institute for Systems a Robotics, Lisboa, 2004.
- [Rus+10] S. Russell et al. *Artificial Intelligence: A Modern Approach*. Prentice Hall series in artificial intelligence. Prentice Hall, 2010. ISBN: 9780136042594.
- [Sal+19] Tárik S. Salem et al. „Forecasting Intra-Hour Imbalances in Electric Power Systems“. *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence* 33 (čvc. 2019), s. 9595–9600. DOI: 10.1609/aaai.v33i01.33019595.

- [Tay06] James Taylor. „Density forecasting for the efficient balancing of the generation and consumption of electricity“. *International Journal of Forecasting* 22 (říj. 2006), s. 707–724. DOI: 10.1016/j.ijforecast.2006.02.001.
- [TR16] James W. Taylor a Matthew B. Roberts. „Forecasting Frequency-Corrected Electricity Demand to Support Frequency Control“. *IEEE Transactions on Power Systems* 31.3 (2016), s. 1925–1932. DOI: 10.1109/TPWRS.2015.2444665.
- [TP21] Anuradha Tomar a Amruta Pattnaik. „Smart Energy Management in Renewable Energy Systems“. Led. 2021, s. 1–24. ISBN: 978-0-7354-2282-7. DOI: 10.1063/9780735422827_001.
- [Tou+22] Jean-François Toubreau et al. „Interpretable Probabilistic Forecasting of Imbalances in Renewable-Dominated Electricity Systems“. *IEEE Transactions on Sustainable Energy* 13.2 (2022), s. 1267–1277. DOI: 10.1109/TSTE.2021.3092137.
- [Und22] Weather Underground. *Local Weather Data*. <https://www.wunderground.com/wundermap>. 2022. (Cit. 30. 10. 2022).