České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Propustná hranice v hydrodynamických modelech kolektivního chování

Permeable boundary in hydrodynamic models of collective behaviour

Bakalářská práce

Autor: **Štěpán Studenovský**

Vedoucí práce: **RNDr. Václav Mácha, Ph.D.**

Akademický rok: 2022/2023

České vysoké učení technické v Praze, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra: matematiky Akademický rok: 2021/2022

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student:	Štěpán Studenovský
Studijní program:	Aplikace přírodních věd
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Studijní zaměření:	Aplikované matematicko-stochastické metody
Název práce (česky):	Propustná hranice v hydrodynamických modelech kolektivního chování
Název práce (anglicky):	Permeable boundary in hydrodynamics models of collective behavior

Pokyny pro vypracování:

1) Na úvod představte modely kolektivního chování a příklady jejich použití. Také vysvětlete jednotlivé síly v hejnu (stádu), motivace jednotlivců a jejich souvislost s jednotlivými členy v rovnici.
2) Ve druhé části bakalářské práce odvoďte postup, jakým se z částicového modelu (přes kinetickou teorii) odvodí model mechaniky kontinua s nelokálními (konvolučními) členy.
3) Ve třetí části bakalářské práce student navrhne jak modelovat chování jednotlivců v blízkosti (n-1)-rozměrné překonatelné překážky (například cesta, nízký plot, terénní schod). Poté postupem z druhé části odvodí příslušný popis rovnicemi mechaniky kontinua.

Doporučená literatura:

1) K. Huang, Statistical Mechanics, second edition. John Wiley & Sons, New York, 1987.

2) T. K. Karper, A. Mellet, K. Trivisa, Hydrodynamic limit of the kinetic Cucker-Smale flocking model. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 2015, 131-163.

3) J. A. Canizo, J. A. Carrillo, J. Rosado, A well-posedness theory in measures for some kinetic models of collective motion. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 2011, 515--539.

4) J. A. Carrillo, Y. P. Choi, Critical thresholds in 1D Euler equations with non-local forces. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 2016, 185-206.

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

RNDr. Václav Mácha, Ph.D.
Matematický ústav AV ČR, Žitná 609, 110 00 Nové Město

Jméno a pracoviště konzultanta:

Datum zadání bakalářské práce: 31.10.2021

Datum odevzdání bakalářské práce: 7.7.2022

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

V Praze dne 21. října 2021

garant oboru

vedoucí katedry

děkan

Poděkování:
Chtěl bych zde poděkovat především svému školiteli doktoru Václavu Máchovi za pečlivost, ochotu, vstřícnost a odborné i lidské zázemí při vedení mé bakalářské práce.

Čestné prohlášení:
Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a uvedl jsem všechnu použitou literaturu.

V Praze dne 5. ledna 2023

Název práce:

Propustná hranice v hydrodynamických modelech kolektivního chování

Autor: Štěpán Studenovský

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Aplikované matematicko - stochastické metody

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: RNDr. Václav Mácha Ph.D., Matematický ústav AV ČR, Žitáná 609, 110 00 Nové město

Abstrakt: Účelem první části práce je představení a odvození modelů kolektivního chování. Výchozím bodem jsou částicové modely kolektivního chování představené Cucker-Smalem [3]. Následuje odvození kinetického a dynamického modelu kolektivního chování. Hlavním cílem této práce je přidání vlastní síly do zmíněných modelů, představující propustnou hranici či překážku, a odvození změny chování částic při působení této síly.

Klíčová slova: Cucker-Smale, kinetické a hydrodynamické modely, modely kolektivního chování, monokinetický ansatz, normální rozdělení, vlastní síla, vzájemné interakce.

Title:

Permeable boundary in hydrodynamic models of collective behaviour

Author: Štěpán Studenovský

Abstract: The purpose of the first part of the paper is to introduce and derive models of collective behaviour. The starting point is the particle models of collective behaviour introduced by Cucker-Smale [3]. Then, the kinetic and dynamic models of collective behaviour are derived. The main goal of this thesis is to add a custom force to these models, representing a permeable boundary or obstacle, and to derive the change in particle behaviour when this force is applied.

Key words: Cucker-Smale, kinetic and hydrodynamic models, models of collective behaviour, monokinetic ansatz, mutual interactions, normal distribution, self force.

Obsah

Úvod **8**

1 Od částicového systému ke kinetickému **10**

2 Od kinetického modelu k dynamickému **16**
2.1 Odvození dynamického modelu 16
2.2 Mono-kinetický ansatz 19
2.3 Normální rozdělení 19

3 Modelování chování jednotlivců v blízkosti překážky **21**
3.1 Rozbor integrálu $\int fF(x,\xi)\mathrm{d}\xi$ 23
3.1.1 F nezávislá na rychlosti 23
3.1.2 Nelinearita - mono-kinetický ansatz 23
3.1.3 Nelinearita - normální rozdělení 23

Závěr **25**

Úvod

V přírodě se běžně setkáváme s mnoha skupinami různých jedinců, ať už jde o hejna ptáků, ryb nebo o stáda dobytka, či dokonce skupinu lidí, hmyzu. Všechny skupiny sdílí jednu společnou vlastnost, a to že mezi sebou nějak interagují. Nemyslíme teď interakci mezi jednotlivými skupinami, nýbrž interakci vzájemnou mezi členy jednotlivé skupiny. Právě díky této vzájemné interakci jedinců vznikají námi dobře pozorovatelné společné rysy chování nebo ještě lépe pozorovatelné typické tvary jednotlivých skupin jednotlivců, např. hejno ptáků letících ve tvaru písmene V.
Cílem této práce je zaměřit se na určitou skupinu jednotlivců a pomocí matematických nástrojů popsat její charakteristické chování v čase a prostoru. Nejprve začneme pracovat s jednoduchým částicovým systémem, na který klademe rozumné požadavky, například aby na jednotlivé částice nepůsobil vliv okolí, či aby do sebe navzájem nenarážely. Popíšeme chování jednotlivých částic individuálně a následně jako celku. V další části práce budeme pozorovat změnu chování, začne-li na částice působit nějaká nenulová síla v nějakém (opačném) směru. V převedení do řeči našich jedinců se například jedná o stádo bizonů, kteří se pohybují vstříc nízké mízce reprezentující polopropustnou překážku či hranici.

Pro prvotní popis uvažujme rychlostní časoprostor (t, x, v)[1] s $N \in \mathbb{N}$ částicemi. Každé částici přiřadíme polohu $x \in \mathbb{R}^d$ a rychlost $v \in \mathbb{R}^d$ v čase, $d \in \mathbb{R}$ značí dimenzi našeho prostoru. Naším výchozím bodem bude kinetický částicový model představený Cuckerem a Smalem (CS) [3], popisující polohu a rychlost každé částice zvlášť v čase. Zcela obecný kinetický částicový model můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \partial_t x_i = v_i \\ \dot{v}_i &= \partial_t v_i = F_i^A - F_i^I, \end{aligned}$$

kde F_i^A představuje vlastní sílu generovanou i-tou částicí a F_i^I je interakce i-té částice s ostatními částicemi v okolí. Člen F_i^I můžeme dále rozvést podle vzdálenosti částic v okolí na krátkodosahovou odpudivou složku síly a dalekodosahovou přitažlivou složku síly. Pro lepší představu můžeme uvažovat opět stádo. Je-li toto stádo příliš velké, vzrůstá tendence jednotlivců rozdělit se a utvořit menší stáda. Naopak máme-li dva jedince o samotě, tím spíše půjdou k sobě a utvoří stádo nové.

Nicméně v našem kinetickém modelu se uvažuje pouze jeden mechanismus z předchozích, a to ten, který bere v potaz vzájemnou interakci mezi jednotlivci. Kinetický model pro konečný počet jednotlivců zapisujeme ve tvaru

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \partial_t x_i = v_i \\ \dot{v}_i &= \partial_t v_i = -\frac{1}{N} \sum_{i \neq j}^{N} K(x_i, x_i)(v_i - v_j). \end{aligned}$$

[1] V následujícím textu neodlišujeme vektory a skaláry stylem písma, nemělo by to tedy vést ke zmatení čtenáře, protože bude vždy jasné, o co se jedná.

Tento model představuje chování jednotlivců, kdy každý jedinec ve skupině upravuje svůj směr a rychlost v závislosti na poloze vůči ostatním členům skupiny. Přičemž $K(x_i, x_j)$ představuje míru, která kvantifikuje, jak se vzájemně členové skupiny ovlivňují. Například máme-li dva jednotlivce daleko od sebe pohybující se různými rychlostmi a směry, budou mít tendenci změnit směr a rychlost pohybu tak, aby se k sobě vzájemně přiblížili, nebo v opačném případě vzdálili. Dále si povšimneme, že je-li jejich rychlost stejná, tento člen je nulový.

Takto definovaný model pro distribuční funkci $f = f(t, x, v)$, popisující rozložení a stav částic v prostoru, vede k následující kinetické rovnici [3] (kinetická rovnice pro čistě fyzikální modely se dá najít například v [1] nebo v [2])

$$\partial_t f + v\nabla_x f + \operatorname{div}_v(fL[f]) = 0.$$

Existence řešení takto definovaného modelu je dokázána v [7] pro konečný čas. Přičemž $L[f]$ je běžný CS operátor srovnání pohybu částic a má tvar

$$L[f] = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} K_0(x, y)f(y, w)(w - v)\,\mathrm{d}w\mathrm{d}y.$$

Dále přejdeme od individuálního popisu částic ke spojitému, kdy již nebudeme uvažovat částice jednotlivě, ale jako celek. Odvodíme tedy rovnice dynamiky kontinua pro neznámou hustotu $\rho = \rho(t, x)$ a rychlost $u = u(t, x)$, které jsou definovány jako integrace přes rychlost ξ takto

$$\rho = \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, \xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$\rho\, u = \int_{\mathbb{R}^d} \xi\, f(t, x, \xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Pomocí těchto definičních vztahů odvodíme již zmiňované rovnice kontinuity pro zkoumaný model kolektivního chování. Tyto modely jsou zkoumány například v [4] nebo v [5].

V předchozí části jsme popisovali chování každé částice zvlášť. Z tohoto popisu pro velký počet částic je téměř nemožné pochopit jejich chování jako celku. Proto přecházíme k praktičtějšímu řešení, spojitému popisu částic, který přináší také menší výpočetní náročnost pro velké množství jedinců. Jelikož se opět jedná o CS model, budeme uvažovat jistá omezení, která platí pro všechny jednotlivce. Jedno z těchto omezení je, že v jistý moment bude platit například mono-kinetický ansatz, který nám zakazuje srážky mezi jednotlivci. Budeme tedy uvažovat vhodnější variantu naší distribuční funkce$f$

$$f(t, x, v) = \varrho(t, x) \otimes \delta_{u(t,x)}(v).$$

V poslední části práce se zaměříme na to, jak se změní oba naše předchozí popisy jednotlivců, přidáme-li jim do cesty $d - 1$ dimenzionální překážku. Pro představu uvažujme pohybující se stádo mířící směrem k ohradníku, či k nízké stráni, která ovlivní chování celého stáda. Vytvoříme tedy vlastní model a navrhneme vlastní sílu, která bude fungovat jako překážka a bude měnit chování jednotlivců na hranici. A pro takto námi zadefinovaný model odvodíme nové výsledné tvary pohybových rovnic.

Kapitola 1

Od částicového systému ke kinetickému

Zde se podíváme na odvození kinetického modelu, kde výchozím bodem bude Cucker Smale model, který je představen v [3]. Uvažujme tedy celkem $N \in \mathbb{N}$ jedinců, kde i-tý jedinec je v poloze $x_i(t)$ a má rychlost $v_i(t)$. Pak platí následující pozorování.

Pozorování 1. Nechť $(x_i(t), v_i(t)) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ pro $t \in \mathbb{R}$ a $i \in \{1, \dots, N\}$ a $x_i \neq x_j$ pro $t \in \mathbb{R}$ a $i \neq j$. Nechť $f(t, x, v) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i(t)} \delta_{v_i(t)}$ je empirická distribuční funkce. Pak

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_i &= v_i \\
\dot{v}_i &= -\frac{1}{N} \sum_{i \neq j}^{N} K_0(x_i, x_j)(v_j - v_i),
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

právě tehdy, když platí rovnice

$$
\partial_t f + \xi \nabla_x f + \operatorname{div}_\xi (f L[f]) = 0. \tag{1.2}
$$

Kde $L[f]$ představuje stabilizační operátor polohy a rychlostí, který je definován následovně

$$
L[f] = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} K_0(x, y) f(y, w)(w - v) \,\mathrm{d}w \mathrm{d}y.
$$

Důkaz. Nejprve dokážeme platnost (1.2) z (1.1). Chceme dokázat, že (1.2) platí ve slabém smyslu, tedy

$$
\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, v)\, \partial_t g(t, x, \xi) \; + f(t, x, \xi) \nabla_x (\xi\, g(t, x, \xi)) + f L[f] \operatorname{div}_\xi (g(t, x, \xi)) \,\mathrm{d}\xi \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t = 0. \tag{1.3}
$$

Toto by mělo platit pro každou testovací funkci $g \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ s kompaktním nosičem. Povšimneme si, že integrand můžeme rozdělit na tři samostatné integrály, každý z nich budeme řešit zvlášť. Pro první z nich platí následující rovnost

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, v)\, \partial_t g(t, x, \xi) \,\mathrm{d}\xi \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i(t)} \delta_{v_i(t)}\, \partial_1 g(t, x, \xi) \,\mathrm{d}\xi \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \partial_1 g(t, x_i(t), v_i(t)) \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Zároveň jsme použili formuli $\int g\delta_{x_i}\mathrm{d}x = g(x_i)$.
Druhý integrál upravíme podobně jako první. Při úpravě použijeme navíc jednu z identit známých diferenciálních operátorů

$$\operatorname{div}_x(\xi g) = g \operatorname{div}_x(\xi) + v\,\nabla_x(g) = \xi\,\nabla_x(g).$$

Druhý integrál obdržíme podobným odvozením jako výše

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(t,x,v)\operatorname{div}_x(\xi\, g(t,x,\xi))\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \xi\, f(t,x,v)\,\partial_x(g(t,x,\xi))\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i(t)}\delta_{v_i(t)}\, v\,\partial_x(g(t,x,\xi))\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N v_i\nabla_x g(t,x_i,v_i)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Zbývající třetí integrál se upraví na poslední požadovaný tvar jako

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} fL[f]\operatorname{div}_v(g(t,x,\xi))\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i(t)}\delta_{v_i(t)}\left(\iint K_0(x,y)f(y,w)(w-\xi)\mathrm{d}w\,\mathrm{d}y\right)\operatorname{div}_\xi g(t,x,\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i(t)}\delta_{v_i(t)}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N K_0(x,x_j(t))(v_j(t)-\xi)\operatorname{div}_\xi g(t,x,\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N K_0(x_i(t),x_j(t))(v_j(t)-v_i(t))\operatorname{div}_v g(t,x_i(t),\xi_i(t))\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Spojením (1.4), (1.5), (1.6) dostaneme, že levá strana (1.3) je v následujícím tvaru

$$\begin{aligned}LS = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \Big(&\partial_1 g(t,x_i(t),\xi_i(t)) + \xi_i\,\nabla_x g(t,x_i(t),\xi_i(t)) \\ &+ \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N K_0(x_i,x_j)(\xi_j-\xi_i)\operatorname{div}_\xi g(t,x_i(t),\xi_i(t))\Big)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Dle (1.1) máme $v_i = \dot{x}_i$ a $\dot{\xi}_i = -\frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^N K_0(x_i,x_j)(\xi_j-\xi_i)$. S použitím věty o derivaci složené funkce a věty o prohození integrálu a sumy nám vyplývá následující a poslední rovnost této části důkazu

$$\begin{aligned}LS &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \partial_1 g(t,x_i(t),\xi_i(t)) + \dot{x}_i\nabla_x g(t,x_i,\xi_i) + \dot{v}_i\nabla_v g(t,x_i,\xi_i)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\int_{\mathbb{R}} \partial_t g(t,x_i(t),\xi_i(t))\,\mathrm{d}t = 0 = PS,\end{aligned}$$

což je pravá strana (1.3). Poslední rovnost platí, protože $g(t, x, \xi)$ je hladká funkce s kompaktním nosičem, tedy existuje M takové, že $g(t, x, \xi) = 0$ pro všechna t, z toho nám vyplývá, že existuje M takové, že $g(t, x, \xi) = 0$ pro všechna t z intervalu $(-\infty, -M) \cup (M, \infty)$, tzn.

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_t g(t, x\xi)\, \mathrm{d}t = \int_{-M}^{M} \partial_t g(t, x, \xi)\, \mathrm{d}t = g(M) - g(-M) = 0.$$

Nyní dokážeme opačnou implikaci, tj. z (1.2) plyne (1.1). Důkaz této implikace si rozdělíme na dvě části. V první části budeme uvažovat testovací funkci závislou na čase a poloze, tj. $g = g(t, x)$. Vynásobíme (1.2) naší novou testovací funkcí $g = g(t, x)$ a pak ve slabém smyslu bude platit následující odvození, přičemž využíváme již znalostí z prvního důkazu, tedy

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} g(t, x)\, \partial_t f\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} g(t, x)\, \xi\, \nabla_x f\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f\, \partial_1 g(t, x)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \xi \nabla_x f g(t, x)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Za povšimnutí stojí, že třetí člen (1.2) vypadne, protože naše testovací funkce nezávisí na rychlosti ξ. Využijeme Fubiniho větu a první člen v předchozí finální rovnici upravíme následovně

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d} \partial_1 g(t, x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} f\, \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d} \partial_1 g(t, x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i(t)} \delta_{v_i(t)} \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \partial_1 g(t, x) \delta_{x_i(t)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} \partial_1 g(t, x_i(t))\, \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

kde jsme využili znalosti, že $\int_{\mathbb{R}^N} \delta_{v_i(t)}\, \mathrm{d}\xi = 1$. Podobně upravíme i druhý člen a dostaneme

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \xi \nabla_x (f g(t, x))\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d} \xi_i(t) \nabla_x g(t, x_i(t))\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t.$$

Celkově tedy máme

$$0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d} \partial_1 g(t, x_i(t))\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d} \xi_i(t) \nabla_x g(t, x_i(t))\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t. \tag{1.7}$$

V další části provedeme akci na samotnou $f = f(t, x, \xi)$ s tou samou testovací funkcí $g = g(t, x)$. V posledním kroku derivujeme složenou funkci a dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} g(t, x)\, \partial_t f(t, x, \xi)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, \xi)\, \partial_t g(t, x)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i} \delta_{\xi_i}\, \partial_t g(t, x)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} \partial_t g(t, x_i(t))\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} \partial_1 g(t, x_i(t))\, \mathrm{d}t + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} \dot{x}_i(t)\, \partial_2 g(t, x_i(t))\, \mathrm{d}t = 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Porovnáním (1.7) a (1.8) dostáváme

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}}\nabla_2 g(t,x_i(t))\,(\dot{x}_i(t)-v)\,\mathrm{d}t=0.$$

Platí následující tvrzení: pro všechna $i\in(1,\dots,n)$ a pro všechna $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ existuje $g\in C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)$ takové, že

$$(\forall j\neq i)\Rightarrow\nabla_2 g(t,x_j(t))=0\ \&\ \nabla_2 g(t,x_i(t))=\varphi(t). \tag{1.9}$$

Dle předchozího tvrzení a po jednoduchých úpravách dostáváme následující

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}}\partial_2 g(t,x_i(t))(\dot{x}_i-\xi_i)\,\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{R}}\partial_2 g(t,x_i(t))\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\dot{x}_i-\xi_i)\,\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{R}}\varphi\sum_{i=1}^{N}(\dot{x}_i-\xi_i)\,\mathrm{d}t=0.$$

Pak z teorie distribučních funkcí pro všechna i platí

$$\dot{x}_i(t)=\xi_i.$$

Ve druhé části této implikace budeme naopak uvažovat testovací funkci závislou již na všech proměnných tj. $g=g(t,x,\xi)$, $g\in C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)$. Vycházíme opět z (1.2), kde ve slabém smyslu získáme naši výchozí rovnici

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}g(t,x,\xi)\,\partial_t f(t,x,v)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\ +\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}g(t,x,\xi)\,\xi\,\nabla_x f(t,x,v)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\ +\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}g(t,x,\xi)\mathrm{div}_\xi(fL[f])\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=0. \tag{1.10}$$

V následujících výpočtech využíváme toho, že nosič funkce $g(t,x,v)$ je kompaktní a první člen upravíme následujícím způsobem

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}g(t,x,\xi)\,\partial_t f(t,x,\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t&=-\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}f(t,x,\xi)\partial_1 g(t,x,\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &\overset{Fubini}{=}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\partial_1 g(t,x,\xi)\,\delta_{x_i(t)}\delta_{v_i(t)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}}\partial_1 g(t,x_i(t),\xi_i(t))\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

druhý člen analogicky jako první

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}g(t,x,\xi)\,\xi\,\nabla_x f(t,x,\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t&=-\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\xi f(t,x,\xi)\nabla_x g(t,x,\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &\overset{Fubini}{=}0-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\xi\,\delta_{x_i(t)}\delta_{v_i(t)}\nabla_x g(t,x,\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}}\xi_i(t)\nabla_x g(t,x_i(t),\xi_i(t))\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

a zbývající třetí

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} g(t,x,\xi)\mathrm{div}_{\,\xi}(fL[f])\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} g(t,x,\xi)\sum_{i=1}^{N}\partial_{\xi_i}(fL_i[f])\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$= -\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}(\partial_{\xi_i}g(t,x,\xi))\,fL_i[f]\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}(\nabla_\xi g(t,x,\xi))f(t,x,v)L[f]\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{*}{=} -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\delta_{x_i(t)}\delta_{v_i(t)}\,\nabla_\xi g(t,x,\xi)\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}K_0(x,x_j)(v_j-\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_{\mathbb{R}}\nabla_v g(t,x_i,\xi_i)K_0(x_i,x_j)(\xi_j-\xi_i)\mathrm{d}t.$$

Zde jsme v (*) využili definici operátoru $L[f]$ a upravili jej po dosazení f jako

$$L[f] = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}K_0(x,y)f(y,w)(w-\xi)\mathrm{d}w\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}K_0(x,y)\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_{x_j}\delta_{\xi_j}(w-v)\mathrm{d}w\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}K_0(x,x_j)(\xi_j-\xi).$$

Celkově po všech úpravách získáme z (1.10) následující rovnici

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}}\partial_1 g(t,x_i(t),\xi_i(t))\,\mathrm{d}t + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}}\xi_i(t)\nabla_x g(t,x_i(t),\xi_i(t))\,\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_{\mathbb{R}}\nabla_\xi g(t,x_i,\xi_i)K_0(x_i,x_j)(\xi_j-\xi_i)\mathrm{d}t = 0. \quad (1.11)$$

Nyní odvodíme rovnice pro funkci $f = f(t,x,\xi)$. Spolu s $g = g(t,x,\xi), g \in C_c^\infty$ ve slabém smyslu dostaneme následující

$$0 = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\partial_t f(t,x,\xi)g(t,x,\xi)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\partial_t g(t,x_i(t),\xi_i(t))$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}}\left(\partial_1 g(t,x_i(t),\xi_i(t)) + \nabla_x g(t,x_i(t),\xi_i(t))\frac{\partial x_i}{\partial t} + \mathrm{div}_{\,\xi} g(t,x_i(t),\xi_i(t))\frac{\partial \xi_i}{\partial t}\right). \quad (1.12)$$

Porovnáním (1.11) a (1.12) a dosazením $\dot{x}_i = \xi_i$, výše dokázaného vypadnou první dva členy a získáme následující rovnost

$$0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}}\left(\nabla_v g(t,x_i,v_i)\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}K_0(x_i,x_j)(\xi_j-\xi_i)\right)\right).$$

Podobně jako v tvrzení (1.9) odvodíme

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} K_0(x_i, x_j)(v_j - v_i) \right) \mathrm{d}t = 0.$$

A z toho vyplývá, že

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} K_0(x_i, x_j)(v_j - v_i).$$

□

Kapitola 2

Od kinetického modelu k dynamickému

Výchozím bodem pro odvození rovnic dynamiky kontinua bude naše výchozí kinetická rovnice (1.2), v níž nyní funkce $f = f(t, x, \xi)$ představuje skalární hustotu jednotlivců. Pomocí definičních vztahů

$$\begin{aligned} \varrho &= \int_{\mathbb{R}} f(t, x, \xi) \mathrm{d}\xi \\ \varrho u &= \int_{\mathbb{R}} \xi f(t, x, \xi) \mathrm{d}\xi \end{aligned} \tag{2.1}$$

zjistíme, že dynamické vlastnosti $f = f(t, x, \xi)$ jsou popsány Eulerovým shlukovým modelem, to znamená následujícím systémem rovnic

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}_x(\varrho u) &= 0 \\ \partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}_x(\varrho u \otimes u) + \int_{\mathbb{R}^d} K_0(x, y)\varrho(x)\varrho(y)(u(x) - u(y))\mathrm{d}y &= 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Avšak v našem modelování pohybu hejn neuvažujeme srážky jednotlivců a rychlost v celém hejnu je stejná, proto můžeme aplikovat mono-kinetický ansatz pro $f = f(t, x, \xi)$ [6]. V průběhu kapitoly předpokládáme, že funkce f je z C_c^∞.

2.1 Odvození dynamického modelu

Pro odvození první rovnice z (2.2) vyintegrujeme (1.2) přes ξ, tj.

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial_t f + \xi \nabla_x f + \operatorname{div}_v(f L[f]) \mathrm{d}\xi = 0.$$

Pro jednotlivé členy zvlášť dostaneme následující

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t f(t, x, \xi)\, \mathrm{d}\xi &= \partial_t \int f(t, x, \xi)\, \mathrm{d}\xi = \partial_t \varrho, \\ \int_{\mathbb{R}^d} \xi \nabla_x f(t, x, \xi)\, \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div}_x (\xi f(t, x, \xi))\, \mathrm{d}\xi &- \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, \xi) \operatorname{div}_x \xi\, \mathrm{d}\xi = \operatorname{div}_x(\varrho u), \\ \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div}_\xi (f L[f])\, \mathrm{d}\xi &= 0. \end{aligned}$$

Poslední rovnice je nulová, protože existuje koule $B \subset \mathbb{R}^d$, B je omezená tak, že $supp(f) \subset B$ tedy dle Stokesovy věty platí

$$\int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div}_\xi(fL[f])\mathrm{d}\xi = \int_B \operatorname{div}_\xi(fL[f])\mathrm{d}\xi = \int_{\partial B} \operatorname{div}_\xi(fL[f])\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}S = 0. \tag{2.3}$$

Celkově jsme tedy obdrželi první ze dvou rovnic v (2.2)

$$\partial_t\varrho + \operatorname{div}_x(\varrho u) = 0. \tag{2.4}$$

Nyní odvodíme druhou z rovnic v (2.2), kterou rozepíšeme do složek a s použitím Einsteinovy sumační konvence dostaneme

$$\partial_t f(t,x,\xi) + \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}(\xi_i f(t,x,\xi)) + \sum_{i=1}^d \partial_{\xi_i}(fL_i[f]) = 0.$$

Následně chceme vynásobit a vyintegrovat předchozí přes ξ, opět rozepsané ve složkách obdržíme následující

$$\int_{\mathbb{R}^d} \xi_j\partial_t f(t,x,\xi) + \xi_j\sum_{i=1}^d \partial_i(\xi_i f(t,x,\xi)) + \xi_j\sum_{i=1}^d \partial_{\xi_i}(fL[f])\mathrm{d}\xi = 0. \tag{2.5}$$

Pro lepší přehlednost odvodíme jednotlivé členy zvlášť. První člen v (2.5) se upraví použitím identity a definičního vztahu (2.1) jako

$$\int_{\mathbb{R}^d} \xi_j\partial_t f(t,x,\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t(\xi f)_j\,\mathrm{d}\xi = \partial_t\left(\int_{\mathbb{R}^d}\xi f\right)_j \mathrm{d}\xi = \partial_t(\varrho\, u)_j. \tag{2.6}$$

V následujícím druhém členu je možné zpozorovat, proč bylo výhodné rozepsání do složek a upravíme jej tímto způsobem

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \xi_j\sum_{i=1}^d \partial_i(\xi_i f(t,x,\xi)\mathrm{d}\xi &= \sum_{i=1}^d \partial_i\int_{\mathbb{R}^d}\xi_j\xi_i f(t,x,\xi))\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^d \partial_i\int_{\mathbb{R}^d}(\xi\otimes\xi)_{ij}f(t,x,\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= \sum_{i=1}^d \partial_i\int_{\mathbb{R}^d}(((\xi-u)+u)\otimes((\xi-u)+u))_{ij}f(t,x,\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= \sum_{i=1}^d \partial_i\int_{\mathbb{R}^d}((\xi-u)\otimes(\xi-u))_{ij}f(t,x,\xi)\mathrm{d}\xi + \sum_{i=1}^d \partial_i\int_{\mathbb{R}^d}((\xi-u)\otimes u)_{ij}f(t,x,\xi)\mathrm{d}\xi \\
&\quad + \sum_{i=1}^d \partial_i\int_{\mathbb{R}^d}(u\otimes(\xi-u))_{ij}f(t,x,\xi)\mathrm{d}\xi + \sum_{i=1}^d \partial_i\int_{\mathbb{R}^d}(u\otimes u)_{ij}f(t,x,\xi)\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Povšimneme si, že $\int_{\mathbb{R}^d}(u\otimes u)\,f(t,x,\xi)\mathrm{d}\xi = \varrho(u\otimes u)$, protože se jedná o integraci hustoty. Dále zjednodušíme integrál $\int_{\mathbb{R}^d}((\xi-u)\otimes u)\,f(t,x,\xi)\mathrm{d}\xi = 0$, který je roven nule, a ze symetrie tím pádem bude i $\int_{\mathbb{R}^d}(u\otimes(\xi-u))\,f(t,x,\xi)\mathrm{d}\xi = 0$. Odvození těchto dvou rovností je v následujícím textu

$$\int_{\mathbb{R}^d}((\xi-u)\otimes u)\,f(t,x,\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{\mathbb{R}^d}(\xi\otimes u)\,f(t,x,\xi)\mathrm{d}\xi-\int_{\mathbb{R}^d}(u\otimes u)\,f(t,x,\xi)\mathrm{d}\xi$$
$$=\int_{\mathbb{R}^d}\xi\,f(t,x,\xi)\mathrm{d}\xi\otimes u-(u\otimes u)\int_{\mathbb{R}^d}f(t,x,\xi)\mathrm{d}\xi=\varrho(u\otimes u)-(u\otimes u)\varrho=0.$$

Předchozími úpravami jsme získali druhý hledaný vztah, jenž má tvar

$$\int_{\mathbb{R}^d}\xi_j\sum_{i=1}^{N}\partial_i(\xi_i\,f(t,x,\xi))\mathrm{d}\xi=\sum_{i=1}^{N}\partial_i\int_{\mathbb{R}^d}(\xi-u)\otimes(\xi-u)\,f(t,x,\xi)\mathrm{d}\xi+\varrho(u\otimes u). \tag{2.7}$$

Poslední, třetí část rovnice (2.5) se upraví obdobně. Použijeme definici operátoru $fL[f]$ z předchozí kapitoly a získáme

$$\int_{\mathbb{R}^d}\xi_j\sum_{i=1}^{N}\partial_{\xi_i}(fL_i[f])\mathrm{d}\xi=\int_{\mathbb{R}^d}\xi_j\sum_{i=1}^{N}\partial_{\xi_i}f\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}K_0(x,y)f(y,w)(w_i-\xi_i)\mathrm{d}w\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi$$
$$=\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\xi_j\sum_{i=1}^{N}\partial_{\xi_i}f\,(K_0\varrho(y)u_i(y)-K_0\varrho(y)\xi_i)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi. \tag{2.8}$$

Následně prohodíme pořadí integrování a aplikací diferenciálních vektorových identit odvodíme tvar prvního členu v závorce na pravé straně (2.4), získáme tedy vztah

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\xi_j\sum_{i=1}^{N}\partial_{\xi_i}f\,(K_0(x,y)\varrho(y)u_i(y))\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}y$$
$$=\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{i=1}^{N}\partial_{\xi_i}(\xi_j fK_0(x,y)\varrho(y)u_i(y))\mathrm{d}\xi\mathrm{d}y-\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\partial_{\xi_i}\xi_j\right)fK_0(x,y)\varrho(y)u_i(y)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}y$$
$$=-\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\delta_{ij}fK_0(x,y)\varrho(y)u_i(y)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}y=-\int_{\mathbb{R}^d}K_0(x,y)\varrho(x)\varrho(y)u_j(y)\mathrm{d}y, \tag{2.9}$$

protože nosič funkce $\partial_{\xi_i}(\xi_j fK_0(x,y)\varrho(y)u_i(y))$ je omezený a stejně jako dříve v (2.3) použijeme Stokesovu větu.
Analogicky upravíme i druhý člen v (2.8) a odvodíme, že

$$-\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\xi_j\sum_{i=1}^{N}\partial_{\xi_i}fK_0(x,y)\varrho(y)\xi_i\mathrm{d}\xi\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^d}K_0(x,y)\varrho(x)\varrho(y)u_j(x)\mathrm{d}y. \tag{2.10}$$

Spojením výsledků (2.9) a (2.10) dostaneme třetí člen hledané rovnice, který je

$$\int_{\mathbb{R}^d}\xi\mathrm{div}_{\,\xi}(fL[f])\mathrm{d}\xi=\int_{\mathbb{R}^d}K_0(x,y)\varrho(x)\varrho(y)(u(x)-u(y))\mathrm{d}y. \tag{2.11}$$

Spojením výsledku (2.6), (2.7) a (2.11) dostaneme výsledný tvar

$$\partial_t(\varrho u)+\mathrm{div}_{\,x}(u\otimes u\varrho)+\mathrm{div}_{\,x}\int_{\mathbb{R}^d}(\xi-u)\otimes(\xi-u)\,f(t,x,\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{\mathbb{R}^d}K_0(x,y)\varrho(x)\varrho(y)(u(y)-u(x))\mathrm{d}y. \tag{2.12}$$

V dalším textu se budeme zabývat třetím členem na levé straně.

2.2 Mono-kinetický ansatz

Když si představíme nějaké částice, typicky nějaké hejno či uskupení jedinců, nestává se často, že by do sebe jednotlivci naráželi. Jejich pohyb je tedy bezkolizní. Dále uvažujeme přibližně stejnou rychlost všech jedinců v onom hejnu, můžeme tedy použít jisté nastavení funkce $f = f(t, x, v)$ tak, že splňuje mono-kinetický ansatz pro f:

$$f(t, x, \xi) = \delta_u \varrho(t, x).$$

O mono-kinetickém ansatzu se čtenář může víc dočíst v [6]. Tento ansatz je použitelný jen pro globální pohyb hejn, nemůže být použit pro několik vzájemně oddělených skupin hejn, ve kterých nastávají srážky.
Pro třetí člen v (2.12) dostáváme, že

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_x \int_{\mathbb{R}^d} (\xi - u) \otimes (\xi - u) f(t, x, \xi) \mathrm{d}\xi &= \operatorname{div}_x \int_{\mathbb{R}^d} (\xi - u) \otimes (\xi - u) \varrho(t, x) \delta_u \mathrm{d}\xi \\ &= \operatorname{div}_x (u - u) \otimes (u - u) \varrho(t, x) = 0,\end{aligned}$$

a odtud plyne (2.2).

2.3 Normální rozdělení

Nyní se opět podívejme blíže na naše dynamické rovnice (2.12), ale uvažujme nyní normální rozdělení částic. Naše distribuční funkce přejde na tvar $f(t, x, \xi) \to \varrho(t, x)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^d e^{-\frac{(\xi - u(t,x))^2}{2}}$, kde ϱ a u řeší dynamické rovnice (2.2).
Třetí člen na levé straně (2.12) upravíme substitucí a následnou transformací do sférických souřadnic. Budeme nyní uvažovat d=3 a dostaneme

$$\begin{aligned}\varrho(t, x) \int_{\mathbb{R}^3} (\xi - u) \otimes (\xi - u) e^{-\frac{(\xi - u(t,x))^2}{2}} \mathrm{d}\xi &= \varrho(t, x) \int_{\mathbb{R}^3} (\omega \otimes \omega) e^{-\frac{\omega^2}{2}} \mathrm{d}\omega \\ &= \left[\varrho(t, x) \int_{\mathbb{R}^3} (\omega_i \omega_j) e^{-\frac{|\omega|^2}{2}} \mathrm{d}\omega \right]_{ij=1}^3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Jednotlivé členy vypočteme z příslušných integrálů. Ve výpočtech se nám bude hodit znalost integrálu $\int_0^\infty x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = 2^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty y^{\frac{3}{2}} e^{-y} \mathrm{d}y = 2^{\frac{3}{2}} \Gamma(\frac{5}{2}) = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, kde $\Gamma(\frac{1}{2} + n) = \binom{n - \frac{1}{2}}{n} n! \sqrt{n}$ je známá Gamma funkce. Máme

$$\begin{aligned}a_{11} &= \int_{\mathbb{R}^3} \omega_1 \omega_1 e^{-\frac{|\omega|^2}{2}} \mathrm{d}\omega = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \sin^3(\theta) \cos^2(\varphi) e^{-\frac{|r|^2}{2}} \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r, \\ &= \int_0^\infty r^4 e^{-\frac{|r|^2}{2}} \mathrm{d}r \int_0^\pi \sin^3(\theta) \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) \mathrm{d}\varphi = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}} * \frac{1}{3} * \pi = \sqrt{8\pi^2}, \\ a_{22} &= \int_0^\infty r^4 e^{-\frac{|r|^2}{2}} \mathrm{d}r \int_0^\pi \sin^3(\theta) \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi) \mathrm{d}\varphi = \sqrt{8\pi^2}, \\ a_{33} &= \int_0^\infty r^4 e^{-\frac{|r|^2}{2}} \mathrm{d}r \int_0^\pi \cos^2(\theta) \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \sin(\varphi) \mathrm{d}\varphi = \sqrt{8\pi^2}.\end{aligned}$$

Odtud vidíme, že členy a_{11}, a_{22}, a_{33} se rovnají, a dále si všimněme, že nediagonální členy jsou symetrické, tj. $a_{12} = a_{21}$. Tyto nediagonální členy jsou nulové, tj.

$$\begin{aligned}
a_{12} &= \int_{\mathbb{R}^3} \omega_1 \omega_2 e^{-\frac{|\omega|^2}{2}} \mathrm{d}\omega = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \sin^3(\theta) \cos(\varphi) \sin(\varphi) e^{-\frac{|r|^2}{2}} \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r \\
&= \int_0^\infty r^4 e^{-\frac{|r|^2}{2}} \mathrm{d}r \int_0^\pi \sin^3(\theta) \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \cos(\varphi) \sin(\varphi) \mathrm{d}\varphi = 0, \\
a_{13} &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \sin^2(\theta) \cos(\theta) \cos(\varphi) e^{-\frac{|r|^2}{2}} \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r = 0, \\
a_{23} &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \sin^2(\theta) \cos(\theta) \sin(\varphi) e^{-\frac{|r|^2}{2}} \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r = 0.
\end{aligned}$$

Dostáváme tedy diagonální matici ve tvaru $\begin{bmatrix} \sqrt{8\pi^2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{8\pi^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{8\pi^2} \end{bmatrix}$, což v jiném slova smyslu je $C\,\mathbb{I}$, kde $C \in \mathbb{R}$. Obdrželi jsme tedy finální podobu námi hledaného vztahu, kdy

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\xi \otimes \xi) f \mathrm{d}\xi = \varrho \, C \mathbb{I} + (u \otimes u) \varrho.$$

Vložení tohoto vztahu do (2.12) dává požadovaný vztah, kde člen navíc představuje tlak, který vyvolávají vzájemné srážky částic mezi sebou.
Dostáváme tedy Eulerův systém s momentovou rovnicí obsahující tlak

$$\partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}_x(u \otimes u\varrho) + \operatorname{div}_x P(x, \xi) + \int_{\mathbb{R}^3} K_0(x, y) \varrho(x) \varrho(y) (u(x) - u(y)) \mathrm{d}y = 0.$$

Stejný výsledek dostaneme i v dimenzích $d = 1$ a $d = 2$.

Kapitola 3

Modelování chování jednotlivců v blízkosti překážky

V této kapitole je navrženo několik možných případů propustných překážek, které budou jednotlivým částicím komplikovat pohyb. Například budeme uvažovat stádo bizonů, které se bude pohybovat směrem k elektricky nabitému ohradníku, a budeme popisovat, jaký vliv má síla působící na bizony. Tyto nové síly přidáme do matematického modelu (1.2) a odvodíme příslušné CS dynamické rovnice a porovnáme, jak se změní oproti klasickým (2.2).
Zde upravíme náš kinetický model (1.2) a přidáme k němu sílu, reprezentující například ohradník nabitý elektrickým proudem, nízký plot či mez. Uvažujme tedy funkci $F(x,\xi) \in (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, tato síla působí proti pohybu jednotlivců na hranici a snaží se otočit pohyb jednotlivců jiným směrem. Doplníme-li CS model o tuto funkci, dostaneme

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= v_i \\ \dot{v}_i &= -\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}^{N} K_0(x_i, x_j)(v_j - v_i) + F(x_i, v_i). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Pro tento model nyní odvodíme kinetickou rovnici a budeme zkoumat, jak se v ní nově přidaná funkce promítne. Opět uvažujeme výchozí funkce $f = f(t,x,\xi)$ jako v Pozorování(1). Pak ve slabém smyslu platí pro každou funkci $g = g(t,x,v)$ spojitě diferencovatelnou na $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tj. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Dostaneme tedy

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} g\,\partial_t f(t,x,\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &= -\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(t,x,\xi)\partial_t g(t,x,\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ = -\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{x_i(t)}\delta_{v_i(t)}\partial_t g(t,x,\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &= -\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\partial_t g(t,x_i,\xi_i)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}}\left(\partial_1 g(t,x_i,v_i) + \partial_2 g\frac{\partial x_i}{\partial t} + \partial_{3j} g\frac{(\partial v_i)_j}{\partial t}\right)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}}\Big(\partial_1 g(t,x_i,v_i) + \dot{x}_i\partial_2 g + \dot{v}_i\partial_{3j} g\Big)\,\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{3.2}$$

kde výrazem $\partial_3 j$ rozumíme derivaci j-té složky dle třetí proměnné. První dva výrazy máme již upravené v předchozí kapitole, podíváme se proto pouze na to, jak se nám změní třetí výraz poté, co dosadíme za zrychlení nový model (3.1), dostaneme

$$-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}} \dot{v}_i \partial_3 g(t,x,\xi)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}\int_{\mathbb{R}}\left(-\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}^{N} K_0(x_i,x_j)(v_j-v_i)+F(x,\xi)\right)\partial_t g(t,x,\xi)\,\mathrm{d}t.$$

Zde máme již první člen v integrálu odvozený z předchozího a budeme zkoumat pouze to, jak se tudíž změní námi přidaná funkce $F(x,\xi)$. Získáváme

$$\begin{aligned}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}} \partial_{3j} g(t,x_i(t)),v_i(t)F_j(x_i,\xi)\mathrm{d}t &= -\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\partial_{\xi_j} g(t,x,\xi)F_j f\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} g(t,x,\xi)\partial_{\xi_j}\left(F_j f\right)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

To je náš hledaný člen ve slabém smyslu. Výsledná kinetická rovnice se tedy po přidání neznámé síly se tedy příliš nemění a rovnice přechází na tvar

$$\partial_t f + \xi\nabla_x f + \mathrm{div}_{\xi}(fL[f] + fF(x,\xi)) = 0. \tag{3.3}$$

Dále se podíváme na to, jak se změní dynamické rovnice, které odvodíme z kinetické. Uvažujme tedy (3.3) spolu s (2.1) a sledujme, jak se změní (2.2). Ihned zpozorujeme, že první rovnice (2.2) se nezmění. Budeme dále zkoumat jen druhou rovnici z (2.2). Vynásobíme a vyintegrujeme tedy (2.2) ξ a získáme následující rovnici

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\mathbb{R}^d}\partial_t f + \xi\nabla_x f + \mathrm{div}_v(fL[f] + fF(x,\xi))\mathrm{d}\xi\\ &= \partial_t\varrho + \mathrm{div}_x(u\otimes\varrho u) + \mathrm{div}_x P + \int_{\mathbb{R}^d}\xi div_{\xi}(fL[f]+fF(x,\xi))\mathrm{d}\xi\\ &= \partial_t\varrho + \mathrm{div}_x(u\otimes\varrho u) + \mathrm{div}_x P + \int_{\mathbb{R}^d}K_0(x,y)\varrho(x)\varrho(y)(u(x)-u(y))\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}^d}\xi\mathrm{div}_{\xi}(fF(x,\xi))\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

Dostáváme podobný tvar jako u (2.2) pouze s očekávaným členem navíc, se kterým budeme dále pracovat a pokusíme se jej upravit do lepší podoby

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\xi\mathrm{div}_{\xi}(f(t,x,\xi)F(x,\xi))\mathrm{d}\xi &= \int_{\mathbb{R}^d}\xi\sum_{i=1}^{d}\partial_{\xi_i}(f(t,x,\xi)F_i(x,\xi))\mathrm{d}\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\sum_{i=1}^{d}\partial_{\xi_i}(\xi_j f(t,x,\xi)F(x,\xi)) - \delta_{ij}f(t,x,\xi)F_i(x,\xi)\mathrm{d}\xi = -\int_{\mathbb{R}^d}f(t,x,\xi)F(x,\xi)\mathrm{d}\xi.\end{aligned}\tag{3.4}$$

3.1 Rozbor integrálu $\int f F(x,\xi)\mathrm{d}\xi$

3.1.1 F nezávislá na rychlosti

Nechť je nyní F závislá pouze na poloze, tj. $F = F(x)$. Pak se nám integrál (3.4) změní na $\int f F(x)\mathrm{d}\xi = \varrho F(x)$. To dá

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}_x(u \otimes \varrho u) + \operatorname{div}_x P = \int_{\mathbb{R}^d} K_0(x,y)\varrho(x)\varrho(y)(u(y) - u(x))\mathrm{d}y - \varrho F(x).$$

3.1.2 Nelinearita - mono-kinetický ansatz

Nyní nechť $F = F(x,\xi)$ dostáváme dva případy, kdy $\int f(\xi)F(x,\xi)\mathrm{d}\xi$ je nelineární. Pro jednoduchost budeme uvažovat mono-kinetický ansatz a dostaneme, že

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(t,x,\xi)F(x,\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \delta_u\, \varrho(x,\xi)F(x,\xi)\mathrm{d}\xi = \varrho(x,u)\, F(x,u).$$

Momentová rovnice (2.2) má tedy tvar

$$\partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}_x(\varrho u \otimes u) + \operatorname{div}_x P = \int_{\mathbb{R}^d} K_0(x,y)\varrho(x)\varrho(y)(u(y) - u(x))\mathrm{d}y - \varrho(x,u)F(x,u).$$

3.1.3 Nelinearita - normální rozdělení

Předpokládáme, že nebude platit mono-kinetický ansatz. Budeme uvažovat normální rozdělení částic a pro jednoduchost uvažujme následující funkci

$$F(x,v) = \left(0, \frac{v_2^2 - \bar{v}^2}{2x}\chi_{(0,\bar{x}_2)}(x)\,\chi_{(\bar{v}),\infty)}(v_2)\right), \tag{3.5}$$

kde $\bar{x}$, $\bar{v} \in \mathbb{R}$ jsou vysvětleny níže.
Tato funkce má následující motivaci. Uvažujme překážku v prostoru o dimenzi $d = 2$, nacházející se na pozici $(x_1, x_2) = (x_1, 0)$. Dále uvažujme, že všechny částice jsou nad překážkou, tj. $\varrho(t,x) = 0$ pro $x_2 < 0$. Dále předpokládejme homogenní překážku. Síla představující tuto překážku závisí pouze na vzdálenosti od překážky a na rychlosti směrem k překážce, tzn. $F(x_1, x_2, v_1, v_2) = F(x_2, v_2)$. Nechť ve vzdálenosti $\bar{x}_2 > 0$ začne na jedince působit síla $F(x_2, v_2)$ opačného směru, která zpomaluje pohyb částic. Ty se v důsledku této síly začnou pohybovat rovnoměrně zpomaleným pohybem až do místa polohy překážky.
Uvažujme nyní obecný předpis pro sílu $F = m\,a$, kde položíme $m = 1$. Z rovnic platných pro rovnoměrně zpomalený pohyb

$$\begin{aligned} s &= v_2\, t - \frac{1}{2}at^2 \\ \bar{v} &= v_2 - a\, t, \end{aligned}$$

získáme zrychlení a. Délka s představuje vzdálenost od překážky, kdy se změní rovnoměrný pohyb na rovnoměrně zpomalený, $\bar{v}$ reprezentuje finální rychlost, na kterou jedinec zpomalí. Přenásobíme první rovnici zrychlením a a dosadíme z druhé rovnice do první $a\,t = \bar{v} - v_2$, to nám dá

$$
\begin{aligned}
s\,a &= v_2 a\,t - \frac{1}{2}a^2t^2 \\
s\,a &= v_2(v_2 - \bar{v}) - \frac{1}{2}(v_2 - \bar{v})^2 \\
s\,a &= v_2^2 - v_2\bar{v} - \frac{1}{2}(v_2^2 - 2v_2\bar{v} + \bar{v}) \\
a &= \frac{1}{2s}(v_2^2 - \bar{v}^2).
\end{aligned}
$$

To jest po dosazení do obecného předpisu funkce a vynásobením charakteristickými funkcemi $\chi(x), \chi(v)$ (síla nepůsobí jinde než na intervalu $(0, \bar{x_2})$ a rychlost není nulová ani záporná) dostaneme (3.5).

Dále se podívejme na integrál (3.4) po dosazení (3.5), dostaneme

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} F(x_2, \xi_2) f(t, x, \xi)\,\mathrm{d}\xi &= \int_{\mathbb{R}^d} F(x_2, \xi_2) \frac{\varrho(t, x)}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^d} e^{\frac{-(u-\xi)^2}{2}}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\xi_2^2 - \bar{\xi}^2}{2x} \chi_{(0,\bar{x_2})}(x)\, \chi_{(\bar{\xi},\infty)}(\xi_2) \frac{\varrho(t, x)}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^d} e^{\frac{-(u-\xi)^2}{2}}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{\chi_{(0,\bar{x_2})}(x)}{4\pi x} \varrho(t, x) \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-(u_1-\xi_1)^2}{2}} \int_{\bar{\xi}}^{\infty} (\xi_2^2 - \bar{\xi}^2) e^{\frac{-(u_2-\xi_2)^2}{2}}\,\mathrm{d}\xi_2\,\mathrm{d}\xi_1 \\
&= \frac{\chi_{(0,\bar{x_2})}(x)}{4\pi x} \varrho(t, x) \sqrt{2\pi} \int_{\bar{\xi}}^{\infty} (\xi_2^2 - \bar{\xi}^2) e^{\frac{-(u_2-\xi_2)^2}{2}}\,\mathrm{d}\xi_2.
\end{aligned}
$$

Výsledný tvar momentové rovnice (2.2) má tedy následující tvar

$$
\begin{aligned}
\partial_t \varrho + \operatorname{div}_x(u \otimes \varrho u) + \operatorname{div}_x P + \int_{\mathbb{R}^d} K_0(x, y) \varrho(x) \varrho(y)(u(x) - u(y))\mathrm{d}y \\
+ \frac{\chi_{(0,\bar{x_2})}(x)}{4\pi x} \varrho(t, x) \sqrt{2\pi} \int_{\bar{\xi}}^{\infty} (\xi_2^2 - \bar{\xi}^2) e^{\frac{-(u_2-\xi_2)^2}{2}}\,\mathrm{d}\xi_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Závěr

Tato práce byla věnována tématu hydrodynamických modelů kolektivního chování. V úvodu je představeno několik modelů, kterými jsme se v práci zabývali, a zároveň jsme objasnili problematiku věci.
Výchozím bodem je klasický kinetický částicový model, od něhož byl odvozen tvar Cucker-Smaleho kinetického modelu. Dále byl představen a odvozen Eulureův shlukový dynamický model. Pro jeho výsledný tvar jsme nejprve uvažovali sílu zcela nezávislou na rychlosti, pak mono-kinetický ansatz a v poslední řadě jsme brali v potaz normální rozdělení částic.
V další části práce jsme představili koncept propustné hranice či překážky umístěné do směru pohybu jednotlivců, kterou představovala neznámá síla F. Představili jsme více možností podoby této síly, například je-li nezávislá na rychlosti, nebo opět po aplikaci mono-kinetického ansatzu. V úplném závěru jsme představili vlastní návrh toho, jak by tato síla mohla vypadat při normálním rozdělení částic. Pro všechny výše uvedené možnosti jsem odvodil výsledný tvar dynamických rovnic s příslušným tvarem síly.

Literatura

[1] C. Bardos: *Kinetic equations*, Encyclopedia of Mathematical Physics, Oxford: Elsevier, Volume 3, 200–206, (2006).

[2] K. Huang: *Statistical Mechanics, second edition.* John Wiley and Sons, New York, 1987.

[3] T. K. Karper, A. Mallet, K.Trivisa: *Hydrodynamics limit of the kinetic Cucker-Smale flocking model*. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 2015, 131-163.

[4] J. A. Canizo, J.A. Carrillo, J. Rosado: *A well-posedness theory in measures for some kinetic models of collective motion*. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 2011, 515–539.

[5] J. A. Carrillo, Y. P. Choi: *Critical thresholds in 1D Euler equations with non-local forces.* Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 2016, 185-206.

[6] HA, Seung-Yeal, Moon-Jin KANG a Bongsuk KWON: *A hydrodynamic model for the interaction of Cucker–Smale particles and incompressible fluid.* Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 2014, 2311-2359.

[7] T. Karper, A. Mellet and K. Trivisa: *Existence of weak solutions to kinetic flocking models* SIAM. Math. Anal. 56 (2013) 215-243.