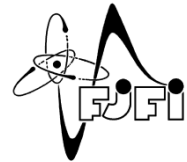




České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



## DISERTAČNÍ PRÁCE

Numerický model šíření únavové trhliny ve smíšeném  
módu zatěžování

## Bibliografický záznam

|                  |  |
|------------------|--|
| Autor            | Ing. Jan Ondráček, České vysoké učení technické v Praze,<br>Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, Katedra materiálů        |
| Název práce      | Numerický model šíření únavové trhliny ve smíšeném módu<br>zatěžování  |
| Studijní program | Aplikace přírodních věd  |
| Studijní obor    | Fyzikální inženýrství  |
| Školitel         | Ing. Aleš Materna, Ph.D., České vysoké učení technické v Praze,<br>Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, Katedra materiálů |
| Akademický rok   | 2018/2019  |
| Počet stran      | 123  |
| Klíčová slova    | numerické modelování, únavová trhlina, MKP   |

## Bibliographic entry

|                       |   |
|-----------------------|---|
| Author                | Ing. Jan Ondráček, Czech Technical University in Prague,<br>Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering,<br>Department of Materials        |
| Title of Dissertation | Numerical model of a fatigue crack growth under mixed mode<br>loading condition   |
| Degree Programme      | Application of Natural Sciences   |
| Field of Study        | Physical Engineering  |
| Supervisor            | Ing. Aleš Materna, Ph.D., Czech Technical University in Prague,<br>Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering,<br>Department of Materials |
| Academic Year         | 2018/2019   |
| Number of Pages       | 123   |
| Keywords              | numerical modelling, fatigue crack, FEM   |

## *Abstrakt*

Disertační práce se zabývá numerickým modelováním šíření magistralní únavové trhliny plastizujícím materiálem. Jsou uvažovány případy šíření trhliny v tahovém módu I i ve smíšeném módu I+II včetně vlivu proporcionálního a neproporcionálního cyklického zatěžování na šířící se únavovou trhlínu. K numerickým simulacím je využívána metoda konečných prvků, přičemž modely zkušebních těles jsou vytvořeny pomocí dvou- i trojrozměrné sítě konečných prvků. Pro šířící se trhlínu je počítána disipovaná plastická energie za cyklus v okolí jejího čela. Tato veličina slouží k odhadu velikosti plastické zóny v okolí čela trhliny a s využitím Klingbeilova energetického kritéria převedena na rychlost šíření únavové trhliny. Všechny diskutované případy jsou porovnány s výsledky únavových zkoušek vybraných hliníkových slitin. Ukázalo se, že Klingbeilovo kritérium je možné pro studované materiály použít i pro případy smíšeného proporcionálního i neproporcionálního zatěžování v módu I+II.

## *Abstract*

The doctoral thesis deals with numerical modelling of fatigue crack growth rate in plastic hardening materials. Cases of fatigue crack growth in tensile mode I and mixed-mode I+II are considered. Moreover, the influence of proportional and non-proportional cyclic loading is studied. Finite element method is used for numerical calculations whereas models of specimens were created using both two- and three-dimensional meshes. The amount of dissipated plastic energy per cycle in the vicinity of the crack tip is computed for a growing crack. This quantity is then used for estimating the size of plastic zone around the crack tip and fatigue crack growth using Klingbeil's energy criterion. All numerical estimations are compared to experimental data of various aluminum alloys. It is shown that Klingbeil's criterion can be used for estimating fatigue crack growth even in cases of proportional or non-proportional mixed-mode loading I+II in studied materials.

## Prohlášení

Potvrzuji, že podíl kandidáta Ing. Jana Ondráčka na tvorbě publikací předkládaných v rámci jeho disertační práce „Numerický model šíření únavové trhliny ve smíšeném módu zatěžování“ odpovídá podílu uvedenému v odst. „1.2 Podíl kandidáta na jednotlivých publikacích“.

.....  
Ing. Jan Ondráček

.....  
Ing. Aleš Materna, Ph.D.

.....  
doc. Ing. Vladislav Oliva, CSc.

.....  
prof. Dr. Ing. Petr Haušild

## **Poděkování**

Tato disertační práce byla vytvořena na katedře materiálů Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské Českého vysokého učení technického v Praze. Rád bych velmi poděkoval vedoucímu disertační práce Ing. Aleši Maternovi, Ph.D. za velký zájem, připomínky a vzorné vedení celé práce. Dále si velmi vážím všech cenných rad, které jsem v průběhu práce dostával od ostatních členů katedry materiálů, zejména od doc. Vladislava Olivy, CSc., doc. Hynka Lauschmanna, CSc., doc. Jana Siegla, CSc., prof. Dr. Ing. Petra Haušilda a prof. Jiřího Kunze, CSc. V neposlední řadě patří velký Dík mé ženě i rodině, že se mnou měli tolik let strpení i pochopení.

V Praze dne 18. 5. 2019

Jan Ondráček

## OBSAH

|   |           |
|---|-----------|
| <b>SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK</b> .....   | <b>9</b>  |
| <b>1 ÚVOD</b> .....   | <b>10</b> |
| 1.1 Cíle disertační práce.....  | 12        |
| 1.2 Podíl kandidáta na jednotlivých publikacích .....   | 13        |
| <b>2 REŠERŠNÍ ČÁST</b> .....  | <b>14</b> |
| <b>2.1 Vymezení hlavních pojmů pro popis šíření trhliny ve smíšeném módu zatěžování</b> .....       | <b>16</b> |
| 2.1.1 Zavedení souřadné soustavy v tělese s trhlinou .....  | 16        |
| 2.1.2 Napětí v okolí čela trhliny a faktor intenzity napětí.....                                    | 16        |
| 2.1.3 Proporcionální a neproporcionální smíšený mód zatěžování.....                                 | 18        |
| <b>2.2 Kritéria pro predikci rychlosti šíření únavové trhliny ve smíšeném módu zatěžování</b> ..... | <b>21</b> |
| 2.2.1 Kritéria založená na faktoru intenzity napětí .....   | 22        |
| 2.2.1.1 Kritérium podle Erdogan a Siha .....  | 24        |
| 2.2.1.2 Kritérium podle Richarda.....   | 24        |
| 2.2.1.3 Kritérium podle Tanaky .....  | 25        |
| 2.2.2 Energetická kritéria .....  | 25        |
| 2.2.2.1 Klingbeilovo kritérium .....  | 26        |
| 2.2.2.2 Kritérium kumulace disipované plastické energie před čelem únavové<br>trhliny .....         | 29        |
| <b>2.3 Kritéria pro predikci směru šíření únavové trhliny ve smíšeném módu zatěžování</b> .....     | <b>33</b> |
| <b>2.4 Napětově-deformační stav na čele prostorové trhliny zatěžované ve smíšeném módu</b> .....    | <b>39</b> |
| <b>2.5 Shrnutí literárních poznatků</b> .....   | <b>42</b> |
| <b>3 FORMULACE PROBLÉMU A MOŽNOSTI JEHO ŘEŠENÍ</b> .....  | <b>44</b> |
| <b>4 MODELOVÁNÍ ŠÍŘENÍ ÚNAVOVÉ TRHLINY VE SMÍŠENÉM MÓDU I A II</b> .....                            | <b>46</b> |
| <b>4.1 Experimentální část</b> .....  | <b>47</b> |
| 4.1.1 Únavové zkoušky ve smíšeném módu I + II .....   | 47        |
| 4.1.1.1 Fraktografické posouzení CT tělesa namáhaného únavově ve<br>smíšeném módu porušování .....  | 52        |
| 4.1.2 Měření nanotvrdosti v okolí čela únavové trhliny .....  | 58        |
| 4.1.2.1 Příprava tělesa s trhlinou a měření nanotvrdosti .....                                      | 59        |
| 4.1.2.2 Numerický výpočet .....   | 60        |
| 4.1.2.3 Výsledky.....   | 62        |
| <b>4.2 Principy modelování šíření únavové trhliny ve smíšeném módu pomocí MKP</b> .....             | <b>65</b> |
| 4.2.1 Síť konečných prvků .....   | 65        |
| 4.2.2 Kontakt lící trhliny .....  | 65        |
| 4.2.3 Algoritmus simulace růstu únavové trhliny .....   | 66        |
| 4.2.3.1 Postup trhliny v 2D síti konečných prvků.....   | 67        |
| 4.2.3.2 Postup trhliny v 3D síti konečných prvků.....   | 67        |

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| 4.2.4      | Určení plastické zóny a množství disipované plastické energie .....   | 67         |
| <b>4.3</b> | <b>Simulace šíření únavové trhliny v módu I.....</b>  | <b>69</b>  |
| 4.3.1      | Materiál zkušebního tělesa .....  | 69         |
| 4.3.2      | Sít konečných prvků .....   | 70         |
| 4.3.2.1    | 2D model .....  | 70         |
| 4.3.2.2    | 3D model .....  | 71         |
| 4.3.3      | Okrajové podmínky zatěžování.....   | 74         |
| 4.3.4      | Okrajové podmínky symetrie .....  | 74         |
| 4.3.5      | Vliv velikosti prvku ve zjemněné oblasti na hodnoty disipované energie<br><b>dW/dN</b> .....                | 75         |
| 4.3.6      | Vliv hustoty sítě ve směru tloušťky tělesa na hodnoty disipované energie<br><b>dW/dN</b> ve 3D modelu ..... | 76         |
| 4.3.7      | 3D simulace šíření únavové trhliny se zakřiveným čelem.....   | 77         |
| 4.3.7.1    | Stanovení disipované plastické energie.....   | 77         |
| 4.3.7.2    | Tvary cyklické plastické zóny .....   | 80         |
| 4.3.8      | Diskuze výsledků simulací šíření únavové trhliny v módu I .....   | 82         |
| <b>4.4</b> | <b>Simulace šíření únavové trhliny ve smíšeném proporcionálním módu<br/>zatěžování I a II.....</b>          | <b>84</b>  |
| 4.4.1      | Tvary plastické zóny pro různé úrovně smíšeného módu zatěžování .....                                       | 84         |
| 4.4.1.1    | MKP model, podmínky zatěžování a materiálová data.....  | 84         |
| 4.4.1.2    | Korelace disipované energie a klasických lomově-mechanických<br>parametrů.....                              | 85         |
| 4.4.2      | Rychlost šíření únavové trhliny ve smíšeném módu zatěžování.....  | 88         |
| 4.4.2.1    | MKP model .....   | 88         |
| 4.4.2.2    | Výsledky simulací .....   | 89         |
| 4.4.3      | Diskuze výsledků simulací šíření únavové trhliny ve<br>smíšeném proporcionálním módu I+II.....              | 95         |
| <b>4.5</b> | <b>Simulace šíření únavové trhliny ve smíšeném neproporcionálním módu<br/>zatěžování I a II.....</b>        | <b>99</b>  |
| 4.5.1      | Geometrie zkušebního tělesa.....  | 99         |
| 4.5.2      | MKP síť .....   | 100        |
| 4.5.3      | Okrajové podmínky.....  | 101        |
| 4.5.4      | Vstupní materiálová data.....   | 102        |
| 4.5.5      | Výpočet faktorů intenzity napětí .....  | 102        |
| 4.5.6      | Výsledky.....   | 103        |
| 4.5.7      | Diskuze výsledků šíření únavové trhliny ve smíšeném neproporcionálním<br>módu I+II.....                     | 107        |
| <b>5</b>   | <b>ZÁVĚR .....</b>  | <b>109</b> |
|            | <b>CITOVANÁ LITERATURA .....</b>  | <b>112</b> |
|            | <b>SEZNAM OBRÁZKŮ .....</b>   | <b>119</b> |



## SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

|                              |  |
|------------------------------|--|
| $\theta, r, z$               | Válcové souřadnice   |
| $\sigma_\theta$              | Normálové napětí v obvodovém směru [MPa]   |
| $\sigma_r$                   | Normálové napětí ve směru $r$ [MPa]  |
| $\sigma_z$                   | Normálové napětí ve směru $z$ [MPa]  |
| $\tau_{r\theta}$             | Smykové napětí v rovině $r - \theta$ [MPa]                                       |
| $\tau_{rz}$                  | Smykové napětí v rovině $r - z$ [MPa]  |
| $\tau_{z\theta}$             | Smykové napětí v rovině $z - \theta$ [MPa]                                       |
| $E$                          | Youngův modul pružnosti [MPa]  |
| $\nu$                        | Poissonovo číslo [1]   |
| $G$                          | Modul pružnosti ve smyku [MPa]   |
| Mód I.                       | Tahový mód porušování  |
| Mód II.                      | Rovinný smykový mód porušování   |
| Mód III.                     | Antirovinný smykový mód porušování   |
| $K_I$                        | Faktor intenzity napětí v tahovém módu I [MPa.m <sup>1/2</sup> ]                 |
| $K_{II}$                     | Faktor intenzity napětí v rovinném smykovém módu II [MPa.m <sup>1/2</sup> ]      |
| $K_{III}$                    | Faktor intenzity napětí v antirovinném smykovém módu III [MPa.m <sup>1/2</sup> ] |
| $\Phi$                       | Úroveň smíšeného módu zatěžování $\Phi = \tan^{-1} \frac{K_{II}}{K_I}$ [rad]     |
| $K_{max}$                    | Maximální hodnota faktoru intenzity napětí v cyklu [MPa.m <sup>1/2</sup> ]       |
| $K_{min}$                    | Minimální hodnota faktoru intenzity napětí v cyklu [MPa.m <sup>1/2</sup> ]       |
| $\Delta K$                   | Rozkmit faktoru intenzity napětí [MPa.m <sup>1/2</sup> ]                         |
| $R$                          | Parametr asymetrie cyklu [1]   |
| $N$                          | Počet cyklů [1]  |
| $a$                          | délka trhliny [m]  |
| $dW/dN$                      | Množství disipované plastické energie za cyklus [J/m]                            |
| $F$                          | Síla [N]   |
| $LLM$                        | Lineární lomová mechanika  |
| $SMZ$                        | Smíšený mód zatěžování   |
| $MKP$                        | Metoda konečných prvků   |
| $R\dot{S}\dot{U}T, \dot{U}T$ | Rychlost šíření únavové trhliny, únavová trhlina                                 |

# 1 ÚVOD

Simulace šíření únavové trhliny v cyklicky zatěžovaných strojních součástech je velmi důležitá disciplína nejen pro stanovení zbytkové životnosti a plánování odstávek zařízení, ale i pro zrychlení jejich návrhu a vytipování kritických míst. V technické praxi jsou konstrukční díly často vystavovány náhodným zatěžovacím sekvencím různého charakteru. Například v případě dopravního letadla představují start, manévrování ve vzduchu i přistání odlišné zatížení jeho konstrukce co do směru i intenzity namáhání. Z hlediska únavové životnosti je nutné brát v úvahu nejen intenzitu zatížení, jeho orientaci vůči kritickému místu konstrukce (již vzniklá trhlina, vrub apod.), ale i souběh různých statických a dynamických zatížení (tzv. neproporcionální zatěžování). Např. v práci Hoffmeyera a kol. [1] byla studována únavová životnost hliníkové slitiny AlMg4,5Mn v podmínkách současného proporcionálního (ve fázi) a neproporcionálního (v opačné fázi) aplikovaného tahového a torzního cyklického posuvy řízeného zatěžování. Ukázalo se, že únavová životnost v případě neproporcionálního zatěžování dosahovala 77-90 % životnosti při proporcionálním zatěžování. Jako jiný případ uveďme titanovou slitinu Ti6Al4V, která se používá k výrobě komponent tryskových motorů. Zkušební tělesa vyrobená z této slitiny byla v [2] podrobena stejným únavovým zkouškám jako v předchozím případě. Únavová životnost neproporcionálně zatěžovaných zkušebních těles činila pouze 10 % životnosti proporcionálně zatěžovaných zkušebních těles.

V této disertační práci jsou zkoumány možnosti numerických výpočtů rychlosti šíření únavové trhliny v plastizujících materiálech pomocí výpočtu množství disipované plastické deformační energie před jejím čelem, je-li zkušební těleso zatěžováno ve smíšeném módu. V minulosti již byla tato metoda ve světě i na pracovišti autora zkoumána. Ukázalo se, že je výhodná, protože dovoluje odhadovat rychlost šíření únavové trhliny (RŠÚT) bez nutnosti provádět referenční únavové zkoušky nebo je výrazně omezit. Množství disipované plastické energie – veličinu rozhodující pro stanovení RŠÚT je možné počítat pomocí metody konečných prvků. Avšak většinou šlo pouze o šíření trhliny v tahovém módu I.

Práce je rozdělena do dvou hlavních částí. Kapitola 2 je věnována stručnému přehledu literárních poznatků o dané problematice. Detailněji jsou rozvedeny hlavně kritéria pro predikci šíření únavové trhliny, zejména energetická kritéria, která jsou v této práci používána. Výsledkům práce je věnována kapitola 4 *Modelování šíření únavové trhliny ve smíšeném módu I a II*. V této kapitole jsou podrobně rozebrány výsledky experimentálních zkoušek i numerických simulací. Nejprve je věnována pozornost šíření únavové trhliny

v tahovém módu I, přičemž je testována konvergence numerických modelů včetně ověření s výsledky únavové zkoušky. V této kapitole je navíc zkoumán vliv zakřivení čela trhliny v trojrozměrném modelu zkušební tělesa a jeho srovnání s běžně používanými dvourozměrnými modely. Dále je zkoumána možnost predikce rychlosti šíření únavové trhliny ve smíšeném módu I+II při proporcionálním zatěžování. Numerické simulace byly ověřeny pomocí únavových zkoušek provedených autorem práce. Poslední kapitola je věnována šíření únavové trhliny ve smíšeném módu I+II zatěžovaném v neproporcionálním módu se současným působením cyklického zatěžování v módu II a statického zatížení v módu I. Ověření výsledků bylo provedeno pomocí výsledků únavových zkoušek převzatých z literatury z důvodu nedostupnosti potřebného zkušební vybavení.

Numerické simulace byly doplněny měřením nanotvrdosti v okolí čela únavové trhliny v tahovém módu I za účelem zjistit přibližnou velikost plastické zóny v okolí čela ÚT a provést porovnání s výsledky numerických simulací.

Tato práce je pokračováním výzkumu modelování růstu únavové trhliny pomocí MKP, který se na KMAT FJFI rozvíjel od devadesátých let minulého století.

## 1.1 Cíle disertační práce

Hlavním cílem disertační práce je úprava algoritmu simulace růstu nesymetrické únavové trhliny ve smíšeném módu porušování I+II v duralových slitinách, jejíž sklon nebo změna směru šíření je vynucena změnou směru zatěžování nebo geometrií tělesa.

Ke splnění vytyčeného cíle je zejména potřeba následující:

1. Rozšířit energetické kritérium pro popis šíření únavové trhliny v tahovém módu I. popsaného Klingbeilem a Nitturem do podmínek 2D smíšeného módu.
2. Implementovat toto kritérium do prostředí konečně prvkového výpočetního balíku MSC.MARC formou fortranovských subrutin, tak aby doba celého výpočtu nepřekračovala neúnosnou míru a výpočet byl tak použitelný v praxi.
3. Provést kalibraci a ověření připraveného MKP modelu pro simulaci růstu únavové trhliny ve smíšeném módu porušování s experimentálními daty.

## 1.2 Podíl kandidáta na jednotlivých publikacích

### A. Článek [3]

Kandidát navrhl počítačové simulace, vytvořil numerický model, vyhodnotil výsledky a napsal článek. Spoluautoři se podíleli na návrhu simulací a přípravě článku (Materna, Oliva).

### B. Článek [4]

Kandidát navrhl počítačové simulace, vytvořil numerický model, vyhodnotil výsledky a napsal článek. Spoluautoři se podíleli na návrhu simulací a přípravě článku (Materna).

### C. Článek [5]

Kandidát navrhl experiment, provedl měření, navrhl počítačové simulace, vytvořil numerický model, vyhodnotil výsledky a napsal článek. Spoluautoři se podíleli na návrhu simulací a přípravě článku (Materna).

### D. Článek [6]

Kandidát byl spoluautorem a podílel se návrhu experimentu a únavových těles, provedl měření únavy i nanoindentační zkoušky a statistické vyhodnocení výsledků měření. Dále provedl numerické simulace a podílel se na přípravě článku. Psaní článku (Materna).

### E. Článek [7]

Kandidát navrhl počítačové simulace, vytvořil numerický model, vyhodnotil výsledky a napsal článek. Spoluautoři se podíleli na návrhu simulací a přípravě článku (Materna).

### F. Článek [8]

Kandidát navrhl počítačové simulace, vytvořil numerický model, vyhodnotil výsledky a napsal článek. Spoluautoři se podíleli na návrhu simulací a přípravě článku (Materna).

### G. Článek [9]

Kandidát navrhl počítačové simulace, vytvořil numerický model, vyhodnotil výsledky a napsal článek. Spoluautoři se podíleli na návrhu simulací a přípravě článku (Materna).

### H. Článek [10]

Kandidát navrhl počítačové simulace, vytvořil numerický model, vyhodnotil výsledky a napsal článek. Spoluautoři se podíleli na návrhu simulací a přípravě článku (Materna).

### I. Článek [11]

Kandidát navrhl počítačové simulace, vytvořil numerický model, vyhodnotil výsledky a napsal článek. Spoluautoři se podíleli na návrhu simulací a přípravě článku (Materna).

## 2 REŠERŠNÍ ČÁST

Život tělesa s únavovou trhlinou v plastizujícím materiálu lze rozdělit do tří fází podle rychlosti šíření únavové trhliny. Popíšme nejdříve jednotlivé fáze růstu únavové trhliny a vyjmenujeme důležité aspekty modelování únavové trhliny v dané fázi.

V první fázi růstu únavové trhliny dochází k iniciaci a koalescenci mikrotrhlin, rychlost růstu mikrotrhlin a jejich směr jsou značně ovlivněny lokální mikrostrukturou (velikost zrna, vměstky apod.). Spolehlivá predikce směru a rychlosti růstu krátké trhliny pouze pomocí počítačové simulace bez detailní znalosti lokální mikrostruktury v daném místě je velmi problematická [12]. Růst krátkých únavových trhlin je ovlivněn přítomností nehomogenit v materiálu, které s mikrotrhlinami silně interagují. V [13, 14] byly provedeny experimenty mapující směr růstu krátké únavové trhliny z vrubu. Bylo zjištěno, že směr růstu krátké únavové trhliny z vrubu je zatížen takovým rozptylem, že výsledky nemají vypovídající hodnotu.

V další fázi šíření je již délka magistrální únavové trhliny podstatně větší než rozměry lokální mikrostruktury materiálu. V této fázi šíření únavové trhliny platí Parisův vztah

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K_{ef}^m, \quad (1)$$

kde  $\frac{da}{dN}$  je rychlost šíření únavové trhliny,  $\Delta K_{ef}$  je rozkmit efektivního faktoru intenzity napětí,  $c$  a  $m$  jsou materiálové konstanty. Předpokládá se, že cyklická plastická deformace v oblasti před čelem únavové trhliny hraje klíčovou roli v procesu porušování v této fázi šíření.

Materiál před čelem únavové trhliny se plasticky přetváří. Plastická zóna kolem čela únavové trhliny vytváří zbytková napětí, které způsobují přerozdělení napjatosti v okolí čela únavové trhliny během zatěžování a ovlivňují další zátěžné cykly.

Vliv pnutí kolem čela únavové trhliny způsobený plastickou deformací je obsažen i v samotném Parisově vztahu (1).  $\Delta K_{ef} = K_{max} - K_{ot}$ ,  $\Delta K_{ef} < \Delta K$ , kde  $K_{max}$  je maximální faktor intenzity napětí a  $K_{ot}$  je hodnota faktoru intenzity napětí, při které dojde k plnému otevření únavové trhliny. Rozkmit faktoru intenzity napětí  $\Delta K$  je možné stanovit z vnějšího zatížení. V případě monotónního cyklického zatěžování lze nalézt v literatuře různé závislosti  $K_{ot}$  na parametru asymetrie cyklu  $R$  a získat tak  $\Delta K_{ef}$ . Složitější situace nastává v případě cyklického zatěžování s proměnnými parametry zatěžování. Zde je zpravidla nutné zjišťovat  $K_{ot}$  cykl po cyklu. Této problematice se věnují různé fenomenologické modely, například PREFAS, ONERA nebo CORPUS [15]. Tyto modely stanovují hodnotu

$K_{ot}$  v aktuálním cyklu v závislosti na předchozích cyklech. Při práci s únavovou trhlinou, která se šíří ve smíšeném módu porušování je nutné velmi pečlivě zvážit platnost fenomenologických modelů i pro smíšený mód porušování [16].

Zbytkovou životnost zařízení s únavovou trhlinou délky  $a_0$  je možné odhadnout integrací vztahu (1). Je nutné znát materiálové konstanty vystupující ve vztahu (1), nedávnou zatěžovací historii (pro výpočet aktuálního  $K_{ot}$ ) a předpokládané zatěžovací charakteristiky při dalším provozu zařízení. Experimentální zjištění materiálových konstant vztahu (1) probíhá zpravidla únavovou zkouškou na tělese, který je cyklován v módu I. Pro stanovení zbytkové životnosti zařízení s únavovou trhlinou, která se šíří ve smíšeném módu porušování slouží kritéria, kterým bude věnována podstatná část této práce. Úkolem těchto kritérií je převést rozkmity intenzity napětí v módech I., II. a III. na ekvivalentní rozkmit intenzity napětí  $\Delta K_{ev}$ , pro který platí stejné růstové zákony zjištěné při módu I.  $\Delta K_{ev}$  je v podstatě převedením vlivu smíšeného módu porušování do módu I. Dále se pokračuje podle postupu uvedeného výše. Některá kritéria pro smíšený mód porušování únavové trhliny predikují i směr dalšího šíření únavové trhliny.

Další možností, jak predikovat růst únavové trhliny, je sledování kumulace poškození před jejím čelem. Předpokládá se, že cyklické zatěžování způsobuje před kořenem trhliny nevratné změny mikrostruktury materiálu (pohyb dislokací, vznik sub-zrn a mikrotrhlin). K pohybu čela únavové trhliny dojde v okamžiku, kdy kvantifikované poškození materiálu před čelem trhliny dosáhne kritické hodnoty. Kritická hodnota poškození materiálu se zjišťuje experimentálně. Existuje několik možností jak kvantifikovat poškození před čelem únavové trhliny. Například je možné sledovat přírůstky plastické deformace před čelem trhliny. Pro nízkocyklovou únavu připomeňme známý Manson-Coffinův zákon založený na kumulaci plastické deformace. Další možností je sledování kumulace hustoty deformační energie před čelem trhliny. Tuto možnost navrhl Sih ve své práci [17].

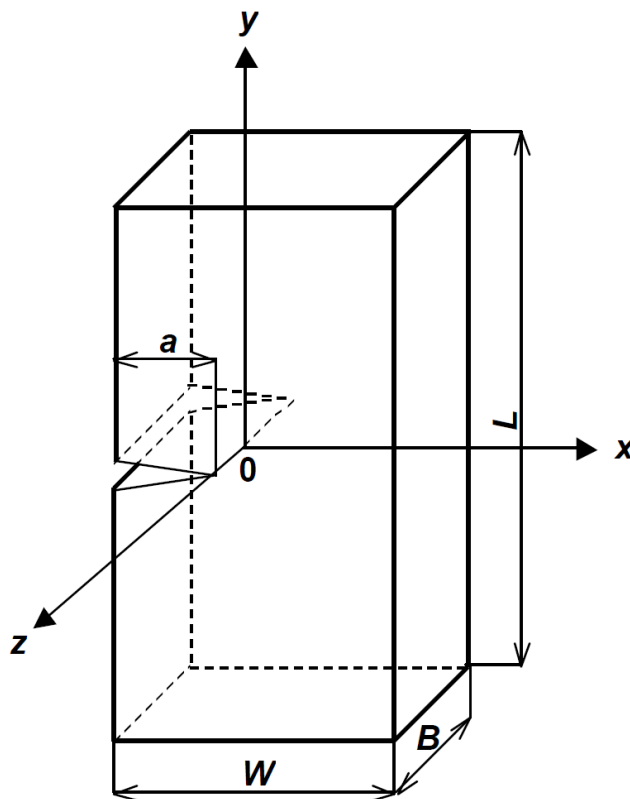
Kritéria sledující nárůst hustoty deformační energie před čelem trhliny se nazývají energetická. Tyto kritéria jsou výhodná pro použití při počítačové simulaci růstu únavové trhliny metodou konečných prvků.

V další části této kapitoly jsou podrobněji rozebrána témata proporcionálního a neproportionálního cyklického zatěžování, kritéria pro predikci RŠÚT šířící se v parisovském režimu založená na rozkmitu faktoru intenzity napětí i energetická kritéria.

## 2.1 Vymezení hlavních pojmů pro popis šíření trhliny ve smíšeném módu zatěžování

### 2.1.1 Zavedení souřadné soustavy v tělese s trhlinou

Střed pravouhlé souřadné soustavy je umístěn ve středu jejího čela podle obr. 2.1. Trhlina se šíří ve směru  $x$ . Celkový rozměr tělesa ve směru osy  $x$  se nazývá šířka tělesa  $W$ . Směr  $y$  je kolmý na rovinu šíření trhliny, celkový rozměr ve směru osy  $y$  se nazývá délka tělesa  $L$ . Směr osy  $z$  probíhá tloušťkou tělesa  $B$ .



Obr. 2.1 Zavedení souřadné soustavy a označení hlavních směrů tělesa s trhlinou

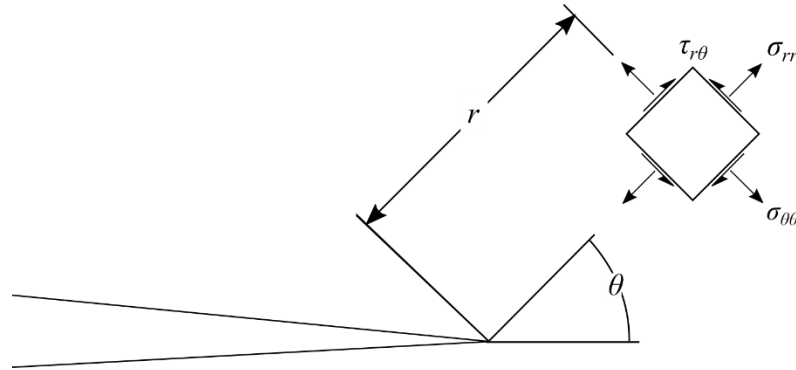
[18]

### 2.1.2 Napětí v okolí čela trhliny a faktor intenzity napětí

Faktor intenzity napětí je mechanická veličina standardně používaná pro popis napjatosti v okolí čela trhliny. V případě platnosti LLM je možné vyjádřit jednotlivé složky napětí v okolí čela trhliny v polárních souřadnicích podle obr. 2.2 v závislosti na faktoru



intenzity napětí  $K_I$  v tahovém módu I,  $K_{II}$  v rovinném smykovém módu II a  $K_{III}$  v antirovinném smykovém módu III



Obr. 2.2 Napjatost v okolí čela trhliny v polárních souřadnicích

pomocí následujících vztahů [18]

$$\sigma_r = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[ 5 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] - \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left[ 5 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3 \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (2a)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[ 3 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] - \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left[ 3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3 \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (2b)$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3 \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (2c)$$

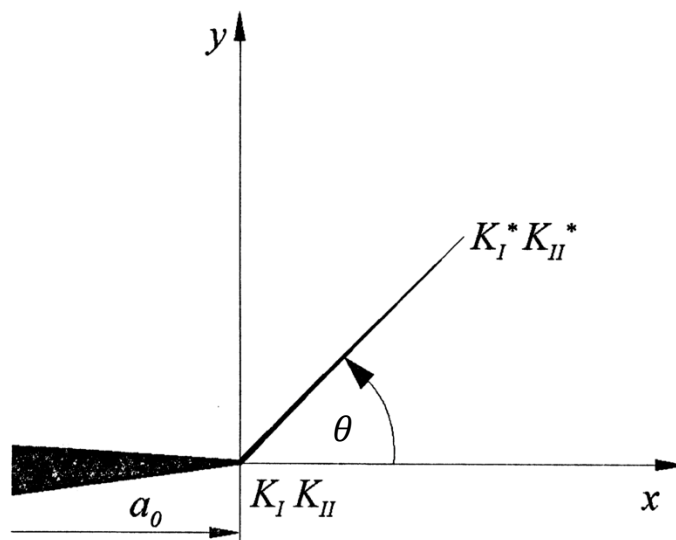
$$\tau_{rz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2d)$$

U trhliny ve smíšeném módu často dochází ke změně směru jejího šíření v důsledku změny geometrie tělesa v okolí trhliny nebo způsobu a intenzity zatěžování. Pro popis napjatosti v okolí trhliny s infinitezimálním zakřivením pod úhlem  $\theta$  v podmínkách rovinné úlohy odvodil Nuismer [19] následující vztahy.

$$K_I^* = \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} [K_I(1 + \cos \theta) - 3K_{II} \sin \theta] \quad (3a)$$

$$K_{II}^* = \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} [K_I \sin \theta + 3K_{II}(3 \cos \theta - 1)] \quad (3b)$$

Faktory intenzity napětí  $K_I^*$  a  $K_{II}^*$  určují napjatost na čele zakřivené trhliny infinitezimální délky vycházející z kořene dlouhé trhliny a jsou funkcí faktorů intenzity napětí na čele dlouhé trhliny a úhlu natočení (viz obr. 2.3).



Obr. 2.3 Faktory intenzity napětí na čele zakřivené trhliny [20]

Určení úhlu  $\theta$ , který určuje směr dalšího šíření trhliny, je předmětem různých kritérií popsaných v odst. 2.2.

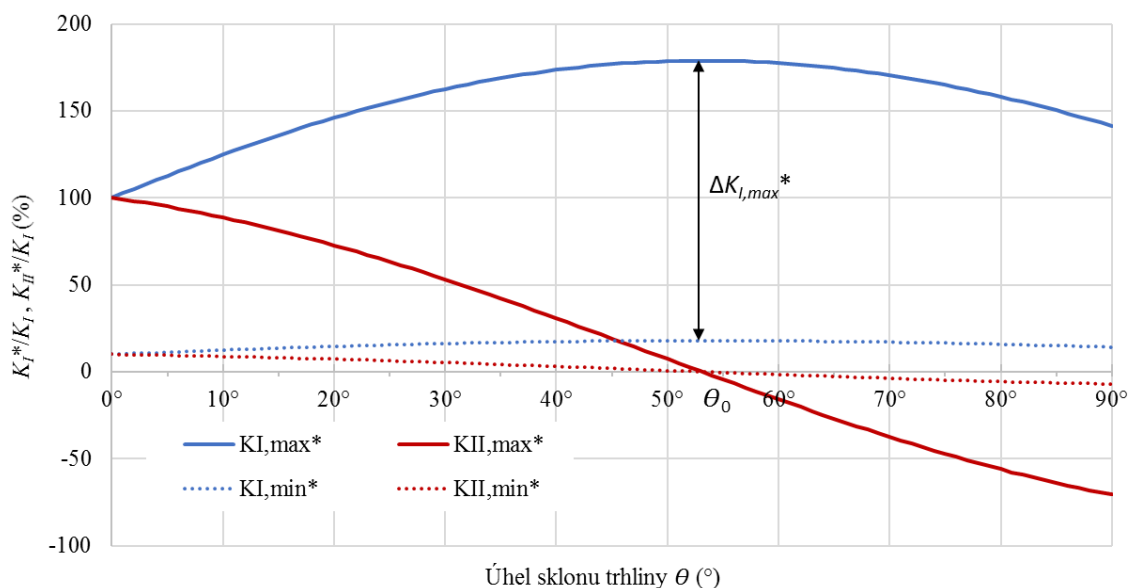
### 2.1.3 Proporcionální a neproporcionální smíšený mód zatěžování

Při cyklickém zatěžování můžeme rozlišovat v závislosti na jeho způsobu dva typy zatěžování: proporcionální a neproporcionální. Při proporcionálním zatěžování nedochází během cyklu ke změně úrovně smíšeného módu  $\Phi$  definovaného vztahem

$$\Phi = \tan^{-1} \frac{K_{II}}{K_I}. \quad (4)$$

Z rovnic (3a,b) plyne, že při daném  $\Phi$  bude  $\Delta K_I^*$  při proporcionálním zatěžování nabývat maxima v určitém úhlu  $\theta_0$  při současné minimalizaci  $\Delta K_{II}^*$  (viz obr. 2.4). Hodnotu  $\Delta K_I^*$  je možné vypočítat pomocí následujícího vztahu, ve kterém úhel  $\theta_0$ , při kterém  $K_{II,min}^*$  i  $K_{II,max}^*$  nabývá nuly.

$$\Delta K_{I,prop.}^* = K_{I,max}^*(\theta_0) - K_{I,min}^*(\theta_0), \quad (5)$$



Obr. 2.4 Průběh  $K_I^*$ ,  $K_{II}^*$  v závislosti na úhlu natočení trhliny při proporcionálním zatěžování, úroveň smíšeného módu  $\Phi = 45^\circ$

Při neproporcionálním zatěžování se poměr  $\Phi$  během cyklu mění. Není již možné stanovit jednoznačný úhel  $\theta_0$ , při kterém dojde k maximalizaci  $\Delta K_I^*$  během jednoho zátěžného cyklu. Neproporcionální mód zatěžování může vzniknout různou kombinací statického a cyklického namáhání. Například jsou na sebe superponovány

- cyklický mód II a statický mód I;
- cyklický mód I a statický mód II;
- proporcionální cyklický mód I a II a statický mód I nebo II;
- cyklický mód I a statický smíšený mód I a II.

Pojmem neproporcionální zatěžování se v literatuře také někdy označuje režim, kdy je zkušební těleso střídavě zatěžováno cyklem v módu I a módu II [21]. Tento způsob zatěžování má totiž podobné důsledky pro šíření únavové trhliny jako skutečný neproporcionální mód. Zde bude však pod pojmem neproporcionální mód rozuměno pouze takové zatěžování, při kterém se během jednoho cyklu mění úroveň smíšeného módu  $\Phi$ .

V této práci je zkoumán první ze zmíněných způsobů neproporcionálního zatěžování, tedy cyklický mód II a statický mód I. V tomto případě je možné přepsat rovnice (3) do tvaru

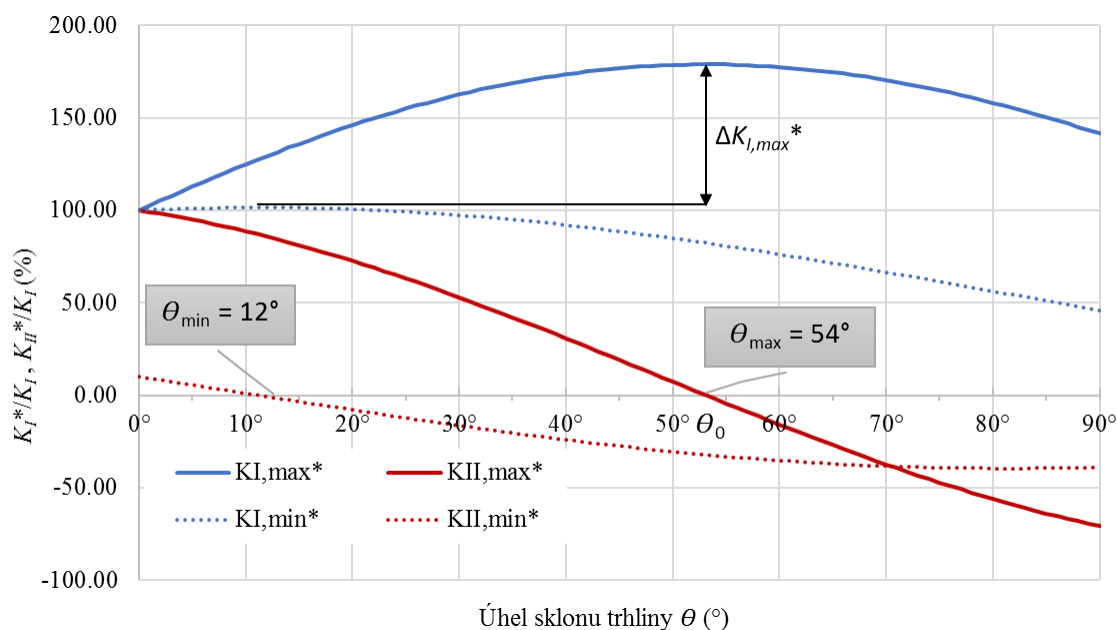
$$K_I^* = \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} [K_{I,stat.}(1 + \cos \theta) - 3K_{II,cykl.} \sin \theta], \quad (6a)$$

$$K_{II}^* = \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} [K_{I,stat.} \sin \theta + 3K_{II,cykl.} (3 \cos \theta - 1)]. \quad (6b)$$

Zobrazíme-li průběh faktorů intenzity napětí podle rovnice (6a,b) na obr. 2.5, zjistíme, že se mění úhel  $\theta$ , při kterém je minimalizována  $K_{II}^*$ . Rozkmit faktoru intenzity napětí  $\Delta K_I^*$  je definován následujícím způsobem

$$\Delta K_{I,neprop.}^* = K_{I,max}^*(\theta_{max}) - K_{I,min}^*(\theta_{min}), \quad (7)$$

kde  $\theta_{min}$ , resp.  $\theta_{max}$  je úhel při kterém  $K_{II,min}^* = 0$ , resp.  $K_{II,max}^* = 0$  [19, 20].



Obr. 2.5 Průběh  $K_I^*$ ,  $K_{II}^*$  v závislosti na úhlu natočení trhliny při neproporcionálním zatěžování se statickým módem I a cyklickým módem II

## 2.2 Kritéria pro predikci rychlosti šíření únavové trhliny ve smíšeném módu zatěžování

Postupů a kritérií pro odhad rychlosti a směru růstu únavové trhliny ve smíšeném módu zatěžování byla vyvinuta celá řada. Nejznámější a v technické praxi nejpoužívanější kritéria pro predikci šíření únavové trhliny ve smíšeném módu zatěžování jsou založená na faktoru intenzity napětí  $K$ , resp. na jeho rozkmitu  $\Delta K$ . Princip jejich fungování ve smíšeném módu je převod rozkmitů faktoru intenzity napětí  $\Delta K_I$ ,  $\Delta K_{II}$  a  $\Delta K_{III}$  na ekvivalentní rozkmit faktoru intenzity napětí  $\Delta K_{ev}$ . S  $\Delta K_{ev}$  se dále pracuje jako v případě  $\Delta K$  tahovém módu I. Pro příklad takového kritéria je zde uvedeno Richardovo kritérium pro proporcionální zatěžování [22, 23]

$$\Delta K_{ev}^{Rich} = \frac{\Delta K_I}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta K_I^2 + 4(\alpha_1 \Delta K_{II})^2 + 4(\alpha_2 \Delta K_{III})^2}, \quad (8)$$

kde  $\alpha_1$ , resp.  $\alpha_2$  jsou materiálové konstanty. Toto fenomenologické kritérium bylo vyvinuto a experimentálně vyzkoušeno pro hliníkové slitiny. Obdobné fenomenologické vztahy pro případ únavové trhliny šířící se v obecném smíšeném módu publikoval například Tanaka [24]

$$\Delta K_{ev}^{Tan} = \sqrt[4]{\Delta K_I^4 + 8\Delta K_{II}^4 + 8\Delta K_{III}^4 / (1 - \nu)}. \quad (9)$$

Únavové zkoušky použité pro získání vztahu byly provedeny se zkušebními tělesy vyrobenými z plechu komerčně čistého hliníku.

Postup predikce rychlosti šíření únavové trhliny ve smíšeném módu porušování pomocí kritéria využívajícího  $\Delta K_{ev}$  lze shrnout do následujících kroků:

1. Numerický nebo analytický výpočet rozkmitů faktorů intenzity napětí  $\Delta K_I$ ,  $\Delta K_{II}$  a  $\Delta K_{III}$  pro danou délku trhliny a parametry zatěžování.
2. Výpočet ekvivalentního rozkmitu faktoru intenzity napětí  $\Delta K_{ev}$  podle zvoleného kritéria (např. vztah (8)).
3. Stanovení experimentální závislosti rychlosti šíření únavové trhliny za cyklus  $da/dN$  na  $\Delta K$  pro zkoumaný materiál v tahovém módu zatěžování, tzn. Parisova vztahu s materiálovými konstantami  $C$  a  $m$

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K_{ev}^m.$$

4. Výpočet délky únavové trhliny v závislosti na počtu zátěžných cyklů integrací Parisova vztahu.

Výše popsaná metoda výpočtu rychlosti šíření únavové trhliny v závislosti na počtu zatěžných cyklů platí pouze pro konstrukce zatížené konstantním cyklem. V případě zatěžování s časově proměnnými parametry cyklu nelze tento postup bez dalších omezení použít, protože o aktuální rychlosti únavové trhliny rozhoduje u elasto-plastických materiálů především plastická zóna před čelem únavové trhliny. Tato plastická zóna je formována během předchozích zatěžných cyklů [18].

Další skupinou kritérií používaných k predikci šíření únavové trhliny v tahovém módu zatěžování jsou kritéria energetická, přičemž hlavním faktorem rozhodujícím o šíření únavové trhliny je hustota deformační energie před jejím čelem. Tato skupina kritérií je velmi vhodná pro použití v počítačové simulaci růstu únavové trhliny metodou konečných prvků (MKP). Množství disipované plastické energie před čelem trhliny je možné spočítat pomocí MKP. Výpočet je však velmi náročný a zdlouhavý i s podporou moderní výpočetní techniky.

Klíčovou studií publikovanou v oblasti energetických kritérií byla práce Weertmana [25] a později Klingbeila [26]. Klingbeil prezentoval techniku pro predikci  $da/dN$  v závislosti na disipaci plastické energie v reverzní zóně před čelem únavové trhliny za jeden cyklus tvořený zatěžujícím a odtěžujícím půlcyklem  $dW/dN$ . Na jeho práci navázali další autoři, mj. Nittur a kol. [27, 28], který vyslovil předpoklad, že k poskoku čela únavové trhliny dojde, dosáhne-li hustota disipované plastické energie před čelem jisté kritické hodnoty  $W_{cr}$ . Hodnota  $W_{cr}$  je považována za materiálový parametr. Zavedením  $W_{cr}$  je tak možné vytvořit numerický model využívající energetické kritérium, který ke své činnosti nevyžaduje apriorní znalost parisonkové závislosti  $da/dN$  na  $\Delta K$ , na rozdíl od již zmíněných kritérií založených na  $\Delta K$ .

V práci [27] byly provedeny počítačové simulace a porovnány s experimenty pro tahový mód I. se zatěžováním konstantním cyklem. Úspěšné použití energetického kritéria pro predikci rychlosti a směru růstu únavové trhliny navrženého Klingbeilem nebo v modifikované verzi Nitturem ve smíšeném módu zatěžování nebylo dosud v literatuře popsáno.

### **2.2.1 Kritéria založená na faktoru intenzity napětí**

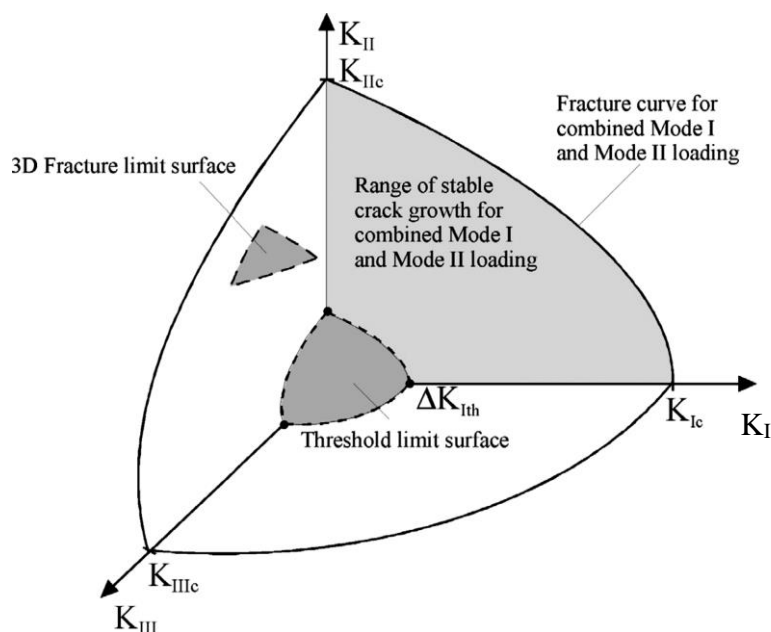
V elasto-plastických materiálech se může únavová trhlina šířit, i pokud je těleso makroskopicky v elastickém stavu. Při cyklickém zatěžování dostatečné intenzity dochází

k disipaci energie v lokálním místě tělesa (na kořeni vrubu, trhliny atp.) a po určitém množství cyklů dojde k lomu. U řady konstrukčních materiálů existuje tzv. mez únavy  $\Delta K_{I,th}$ . Při nižších úrovních  $\Delta K$  buď únavové trhliny vůbec nevzniknou, nebo se zastaví ve stádiu krystalografického růstu.

Únavová trhlina se může v cyklicky zatěžovaném tělese šířit, leží-li faktor intenzity napětí v intervalu uvedeném ve vztahu (10). Pomocí rozkmitu faktoru intenzity napětí lze nerovnost zapsat v následujícím tvaru

$$\Delta K_{I,th} < \Delta K_{ev} < \Delta K_{I,c}, \quad (10)$$

kde  $\Delta K_{I,th}$  je mez únavy materiálu a  $\Delta K_{I,c} = (1 - R)K_{IC}$ , přičemž  $K_{IC}$  je únavová lomová houževnatost materiálu [23]. Naproti tomu rozkmit intenzity napětí  $\Delta K_{ev}$  je v obecném 3D módu porušování funkcí  $\Delta K_I$ ,  $\Delta K_{II}$  a  $\Delta K_{III}$ . Na obr. 2.6 je vztah (10) znázorněn v prostoru faktorů intenzity napětí v tahovém, rovinném smykovém a anti-rovinném smykovém módu.



Obr. 2.6  $K_I$ - $K_{II}$ - $K_{III}$  diagram pro 3D smíšený mód zatěžování s hraničními plochami prahové hodnoty únavy a lomové houževnatosti [22]

V následujících podkapitolách je podán přehled používaných kritérií pro výpočet  $\Delta K_{eq}$  ve smíšeném módu zatěžování zejména v hliníkových slitinách. Některá kritéria nejsou zcela obecná a zabývají se pouze tahovým módem I a smykovým módem II.

### 2.2.1.1 *Kritérium podle Erdogana a Siha*

Podle tohoto kritéria [17], někdy také označovaného jako MTS kritérium, se rovinná trhlina začne šířit radiálně od jejího čela pod úhlem  $\varphi = \varphi_0$  (viz obr. 2.7), kde obvodové napětí  $\sigma_\varphi$  nabývá maxima  $\sigma_{\varphi,max}$ ; matematicky vyjádřeno podmínkami (11a).

$$\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 \sigma_\varphi}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi=\varphi_0} < 0. \quad (11a)$$

Úhel šíření trhliny  $\varphi$  a ekvivalentní rozkmit intenzity napětí ve smíšeném módu  $\Delta K_{ev}$  jsou vypočteny pomocí

$$\varphi_0 = -\arccos\left(\frac{3\Delta K_{II}^2 + \Delta K_I \sqrt{\Delta K_I^2 + 8\Delta K_{II}^2}}{\Delta K_I^2 + 9\Delta K_{II}^2}\right) \quad (11b)$$

$$\Delta K_{I,th} < \Delta K_{ev} = \cos \frac{\varphi_0}{2} \left[ \Delta K_I \cos^2 \frac{\varphi_0}{2} - \frac{3}{2} \Delta K_{II} \sin \varphi_0 \right] < \Delta K_{I,c} \quad (12)$$

### 2.2.1.2 *Kritérium podle Richarda*

Ekvivalentní rozkmit intenzity napětí  $\Delta K_{ev}$  v kritériu pro šíření únavové trhliny podle Richarda [29, 22] ve smíšeném módu zatěžování je definován pomocí vztahu

$$\Delta K_{I,th} < \Delta K_{ev} = \frac{\Delta K_I}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta K_I^2 + 4(\alpha_1 \Delta K_{II})^2 + 4(\alpha_2 \Delta K_{III})^2} < \Delta K_{I,c} \quad (13)$$

kde parametr  $\alpha_1$ , resp.  $\alpha_2$  zohledňuje poměr mezi  $K_{IC}/K_{IIC}$ , resp.  $K_{IC}/K_{IIIC}$ . Úhel šíření únavové trhliny v rovině  $x - y$   $\varphi_0$  se vypočítá pomocí empirického vztahu (14a)

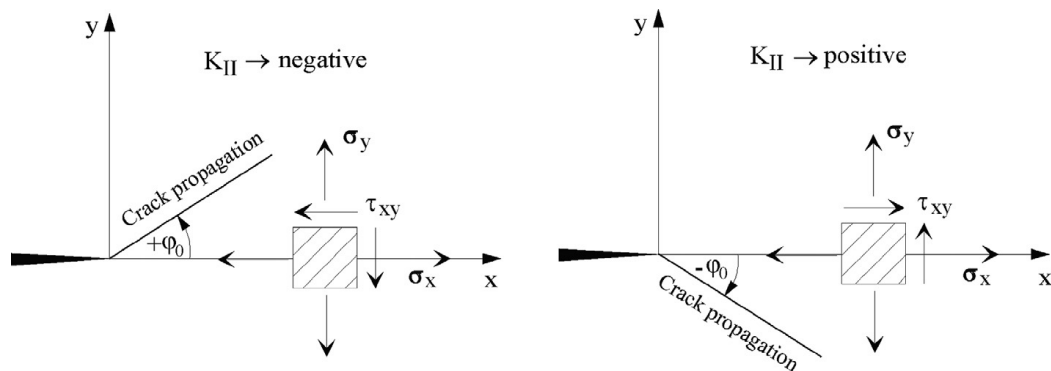
$$\varphi_0 = \pm \left[ A \frac{|\Delta K_{II}|}{|\Delta K_I| + |\Delta K_{II}| + |\Delta K_{III}|} \right] + \left[ B \frac{|\Delta K_{II}|}{|\Delta K_I| + |\Delta K_{II}| + |\Delta K_{III}|} \right]^2, \quad (14a)$$

přičemž pro  $\Delta K_{II} > 0$  je úhel  $\varphi_0 < 0$  a obráceně. Úhel natočení čela trhliny  $\psi_0$  v rovině  $y - z$  se vypočítá pomocí vztahu (14b)

$$\psi_0 = \pm \left[ C \frac{|\Delta K_{III}|}{|\Delta K_I| + |\Delta K_{II}| + |\Delta K_{III}|} \right] + \left[ D \frac{|\Delta K_{III}|}{|\Delta K_I| + |\Delta K_{II}| + |\Delta K_{III}|} \right]^2, \quad (14b)$$

kde  $A, B, C, D$  jsou materiálové konstanty.





Obr. 2.7 Úhel šíření trhliny při smíšeném módu porušování [29]

Toto kritérium bylo vyvinuto pro snadné použití v praktických aplikacích. K jeho použití není nutné řešit rovnice (11) a (12), stačí použít explicitních vztahů (13) a (14).

Ve smíšeném módu I+II je možné vztah (13) zjednodušit:

$$\Delta K_{I,th} < \Delta K_{ev} = \frac{\Delta K_I}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta K_I^2 + 4(\alpha_1 \Delta K_{II})^2} < \Delta K_{I,c} \quad , \quad (15)$$

kde  $\alpha_1$  je materiálový parametr [23].

### 2.2.1.3 Kritérium podle Tanaky

Další kritérium navrhl a experimentálně ověřil na hliníkových slitinách Tanaka [24]. Vztah pro výpočet  $\Delta K_{eq}$  má v následujícím podobu:

$$\Delta K_{ev} = [\Delta K_I^4 + 8\Delta K_{II}^4]^{0.25} < \Delta K_{I,c}. \quad (16)$$

Autor vycházel z představy, že se deformace způsobené módem I a II vzájemně neovlivňují a únavová trhlina roste, pokud suma plastických deformací přes plastickou zónu kolem čela trhliny dosáhne kritické hodnoty. Toto kritérium není plnohodnotné, protože neobsahuje vzorec pro výpočet směru dalšího šíření únavové trhliny. Při použití tohoto kritéria by musel být výpočet směru růstu trhliny doplněn z jiného kritéria [24].

### 2.2.2 Energetická kritéria

Energetická kritéria pracují na rozdíl od modelů založených na  $\Delta K$  s množstvím disipované plastické deformační energie za cyklus jako s řídicí veličinou rychlosti šíření ÚT. Obecně je v mechanice kontinua hustota deformační energie  $w$  definována jako:

$$w = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad (17)$$

kde  $\sigma_{ij}$  je tenzor napětí,  $\varepsilon_{ij}$  tenzor deformace a  $\Gamma$  je deformační cesta. Hustotu plastické deformační energie  $w_p$  je možné získat rozdělením tenzoru deformace na elastickou a plastickou složku pomocí vztahu  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$ . Hustotu deformační plastické energie pak získáme dosazením pouze plastické složky deformace do vztahu (17)

$$w_p = \int_{\Gamma_p} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p, \quad (18)$$

přičemž  $\Gamma_p$  je pouze plastická část deformační cesty. Jednotka hustoty deformační energie je  $\text{J/m}^3$ .

Celková plastická deformační energie se získá integrací její hustoty přes požadovaný objem. Pro případ použití plastické deformační energie v energetických modelech se integruje přes celou reverzní plastickou zónu. U plochých zkušebních těles se často používá  $W_p$  vztažená na jednotkovou tloušťku tělesa se základní jednotkou  $\text{J/m}$ .

Energetická kritéria vycházející z deformační plastické energie v okolí čela únavové trhliny se začala rozvíjet po zveřejnění prací zejména Riceho [30] a Siha [17].

Weertman [25] odvodil analytický vztah (19) mezi rychlostí šíření ÚT v parisovském režimu a faktorem intenzity napětí, když využil model rozvoje plastické deformace v okolí čela trhliny [31] vycházející z teorie dislokací.

$$\frac{da}{dN} = \frac{A(\Delta K)^4}{G\sigma_c^2 U_s} \quad (19)$$

$A$  je materiálová konstanta,  $\Delta K$  je rozkmit faktoru intenzity napětí,  $G$  je modul pružnosti ve smyku,  $\sigma_c$  je pevnostní parametr a  $U_s$  je měrná energie potřebná pro vytvoření povrchu o jednotkové ploše. Vztah (19) je dále diskutován a rozvíjen v [26, 32, 33, 34]. Měření materiálových konstant  $A$  a  $U_s$  byla publikována pro vybrané oceli a hliníkové slitiny v [35, 36]

#### 2.2.2.1 *Klingbeilovo kritérium*

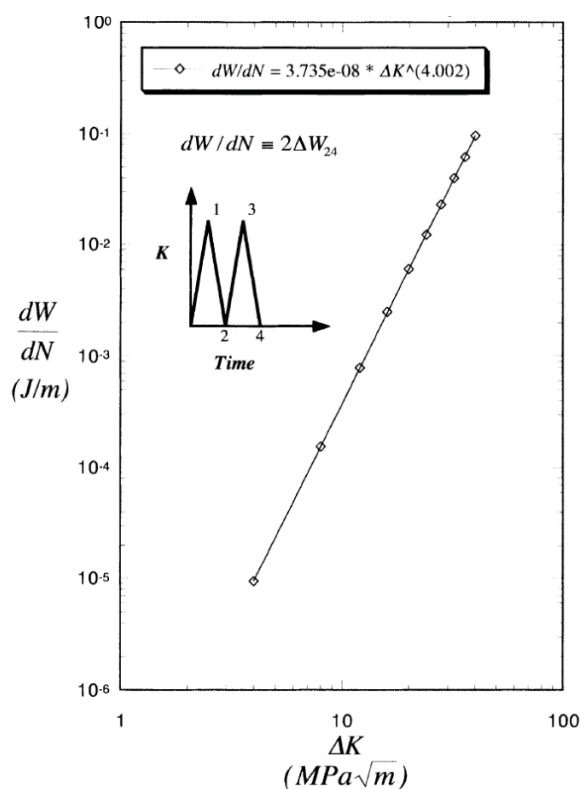
Klingbeilovo kritérium [26], založené především na práci Riceho [30], Siha [17] Weertmana [25] a Bodnera a kol. [33], je energetické kritérium pro tvárné materiály, podle kterého má disipace plastické energie před čelem únavové trhliny zásadní vliv na rychlost šíření únavové trhliny. Hlavní myšlenka Klingbeilova kritéria je, že při poskoku čela únavové trhliny během jednoho cyklu je změna celkové potenciální energie tělesa s trhlinou  $dPE / dN$  rovná změně celkové plastické energie za cyklus  $dW / dN$ . Matematicky lze vztah zapsat pomocí rovnice

$$\frac{dPE}{dN} = \frac{dW}{dN} = \frac{dW}{da} \frac{da}{dN} \quad (20)$$

Položíme-li navíc ve vztahu (20)  $\frac{dW}{da} = G_c$ , kde  $G_c$  je kritická hodnota hnací síly trhliny pro daný materiál, dostaneme přímý vztah mezi rychlostí únavové trhliny  $da / dN$  a disipací celkové plastické energie za cyklus  $dW / dN$ :

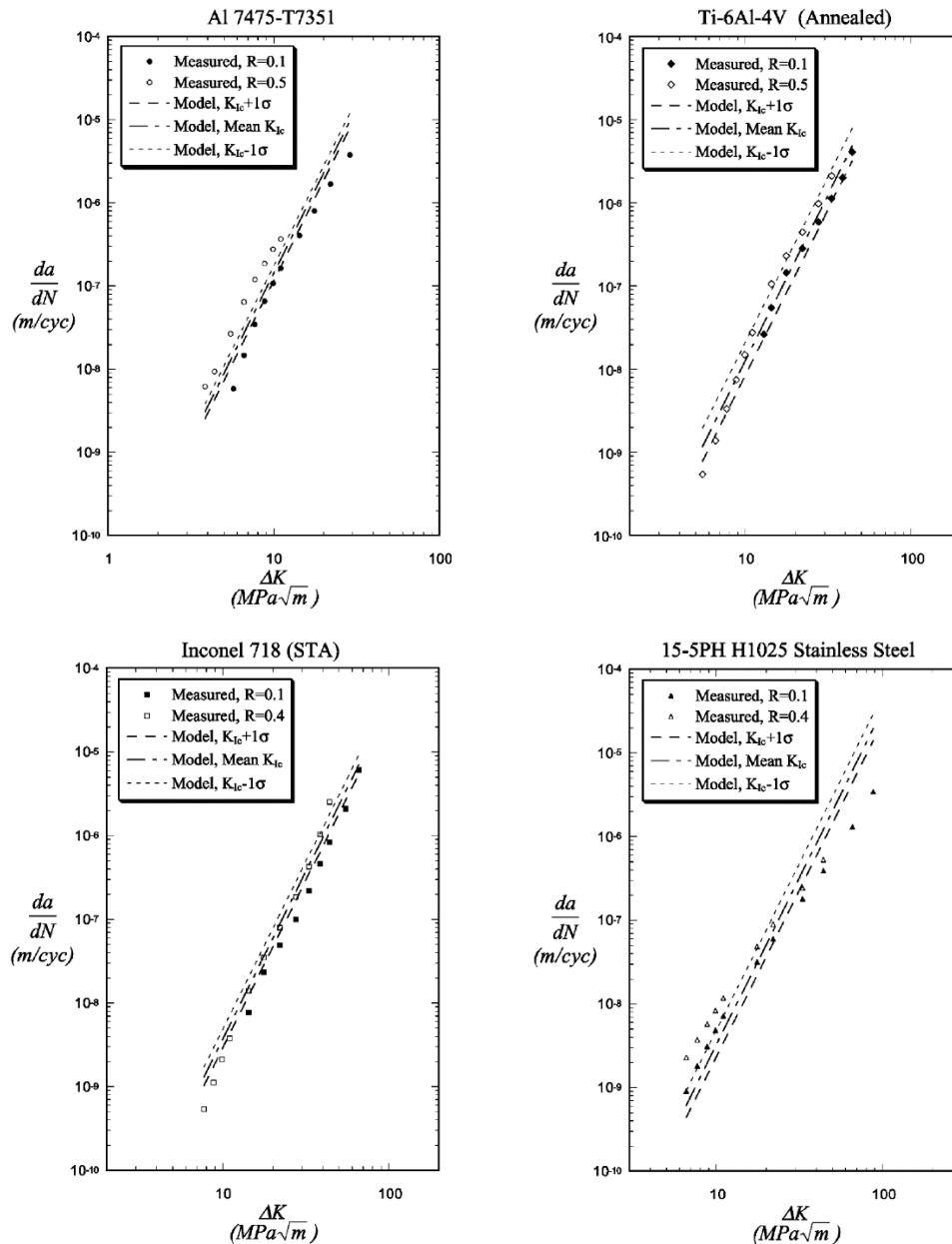
$$\frac{da}{dN} = \frac{1}{G_c} \frac{dW}{dN} \quad (21)$$

V případě modelování cyklického zatěžování s konstantním cyklem lze získat hodnotu  $dW / dN$  pouze pomocí modelování stacionární trhliny [26]. Klingbeil doporučuje nejdříve zařadit jeden cyklus pro ustálení řešení (hluchý cyklus) a hodnotu  $dW / dN$  odečítat až z druhého cyklu, jak je znázorněno na ilustraci na obr. 2.8, dráha 2-4.



Obr. 2.8 Závislost disipace plastické energie za cyklus  $dW / dN$  při tahovém módu zatížení I na  $\Delta K$  pro titanovou slitinu (ideálně elasto-plastický materiál,  $E = 134,9$  GPa,  $\nu = 0,3$  a  $\sigma_y = 1067$  MPa) [26]

Schopnosti predikce růstu únavové trhliny pomocí Klingbeilova kritéria byly porovnány s experimenty popisujícími růst únavové trhliny pro materiály: titanová slitina Ti-64 (po vyžhání), hliníková slitina Al 7475-T7351, Inconel 718 (STA) a korozivzdorná ocel 15-5PH H1025. Výsledky jsou uvedeny na obr. 2.9.



Obr. 2.9 Porovnání predikce šíření únavové trhliny s experimenty pro různé materiály při tahovém módu zatěžování I [26]

Daily a Klingbeil provedli parametrickou studii disipované energie za cyklus pro 2D smíšený mód. Autoři ukázali, že vypočítaná hodnota  $dW / dN$  strmě roste se zvyšující se složkou smíšeného módu II, avšak rychlost šíření únavové trhliny daná vztahem (21) se ve skutečnosti nezvyšuje podle očekávání. Zdánlivou neplatnost Klingbeilovy teorie ve smíšeném módu zatěžování může vysvětlit fakt, že kritická hodnota hnací síly trhliny  $G_c$  strmě roste se zvyšujícím se poměrem smíšeného módu. K ověření vztahu (21) by bylo nutné

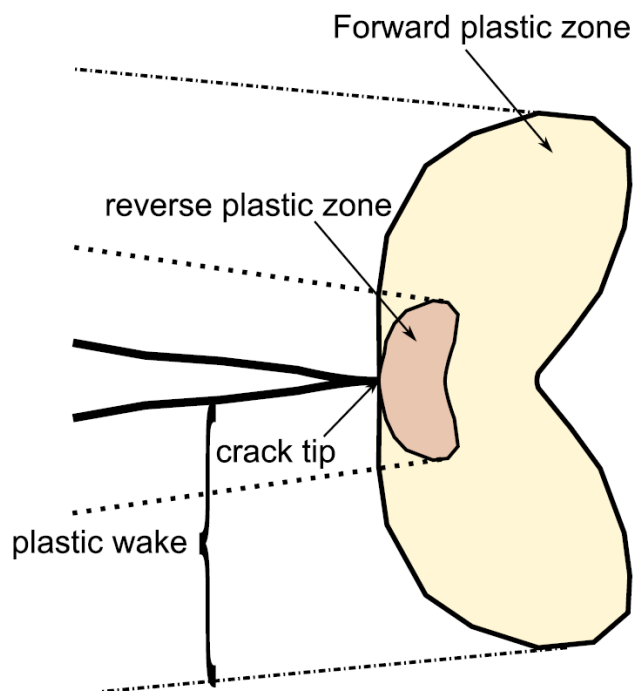
porovnat data lomové houževnatosti ve smíšeném módu s daty ustáleného šíření únavové trhliny ve smíšeném módu [37].

Klingbeilova teorie pracuje pouze s konstantním zatěžovacím cyklem. Toto omezení se ve své práci pokusil odstranit Smith [38], který modeloval retardaci únavové trhliny po tahovém přetěžujícím cyklu pomocí upraveného Klingbeilova kritéria. Predikce rychlosti únavové trhliny podle Smithových výpočtů byla významně závislá na volbě MKP sítě [28, 38]

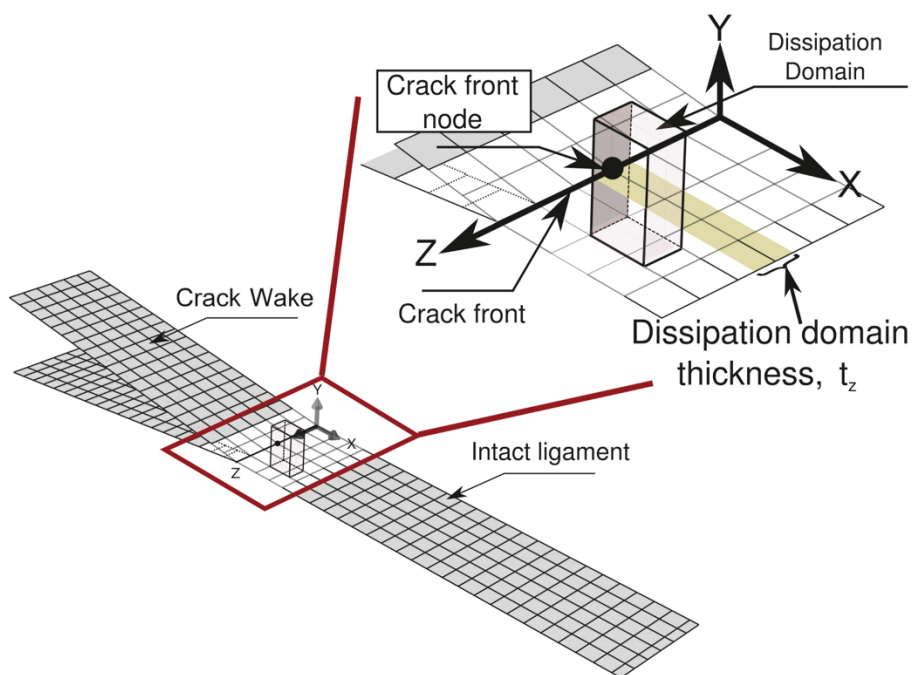
#### 2.2.2.2 *Kritérium kumulace disipované plastické energie před čelem únavové trhliny*

Klingbeilovo kritérium využívající disipaci plastické energie před čelem únavové trhliny vyjadřuje korelaci mezi rychlostí šíření únavové trhliny a množstvím disipované plastické energie před jejím čelem. Pro predikci rychlosti šíření únavové trhliny je tedy nutné mít k dispozici výsledky únavové zkoušky pro daný materiál.

Byly vyvinuty postupy simulace únavové trhliny šířící se ovšem pouze v módu I pomocí metody konečných prvků [12, 27, 39], které částečně odbourávají nutnost znalosti kompletní parisovské závislosti rychlosti šíření únavové trhliny na  $\Delta K$  pro predikci rychlosti šíření únavové trhliny. Výpočet kumulace disipované plastické energie v reverzní plastické zóně  $W$  před čelem únavové trhliny (obr. 2.10) probíhá cyklus po cyklu. Vyhodnocení kritického množství disipované plastické energie je sledováno v tzv. disipační doméně obr. 2.11. Disipační doména je definovaná několika elementy v okolí kořene trhliny. Poté, co množství disipované plastické energie před čelem únavové trhliny ve sledované disipační doméně dosáhne kritické hodnoty  $W_{cr}$ , kořen únavové trhliny postoupí o jednu délku elementu. Po poskočení kořene trhliny se znovu porovná množství disipované plastické energie v nové disipační doméně s hodnotou  $W_{cr}$ . Je-li opět větší, kořen ÚT opět postoupí o jednu délku elementu a postup se opakuje. Trhlina tedy může být několik cyklů nehybná, nebo naopak poposkočit o několik délek elementu během jednoho cyklu. Navíc je možné rozdělit disipační zóny po tloušťce tělesa a simulovat tak zakřivení čela trhliny.



Obr. 2.10 Plastická deformace před čelem únavové trhliny [28]

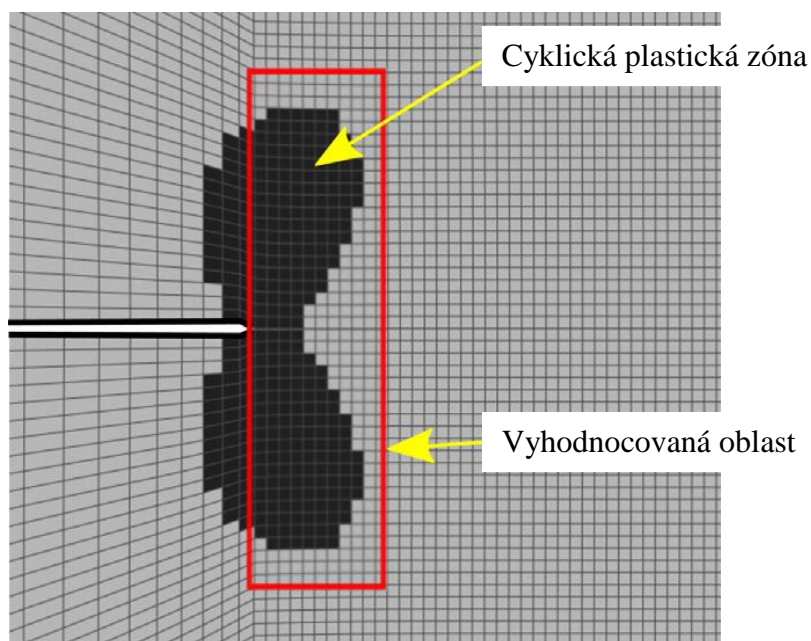


Obr. 2.11 Disipační domény podél tloušťky tělesa umožňující simulaci zakřivení čela trhliny [27]

Samotný růst únavové trhliny je ve všech studovaných modelech tohoto typu realizován rozpojením uzlů sítě. Nejmenší možný přírůstek délky trhliny je tedy rovný délce hrany

elementu. Přesto však tyto modely nevykazují síťovou závislost, je-li plastická zóna v okolí kořene trhliny rozložena aspoň mezi čtyři elementy, protože kritické množství disipované energie ve sledované oblasti je škálováno podle délky hrany elementu, o který únavová trhlina v jednom kroku přiroste [27].

Volba vyhodnocované oblasti, která rozhoduje o šíření únavové trhliny, je v práci [27, 28] obdélníkového tvaru. Je volena tak, aby pokryla reverzní plastickou zónu před čelem únavové trhliny (obr. 2.12).

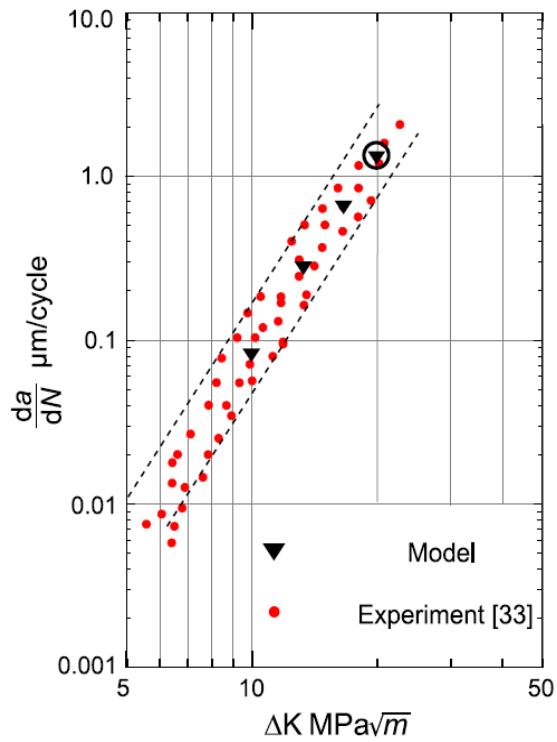


Obr. 2.12 Obdélníková vyhodnocovaná oblast plně obklopuje cyklickou plastickou zónu před kořenem ÚT zatížené v módu I [28]

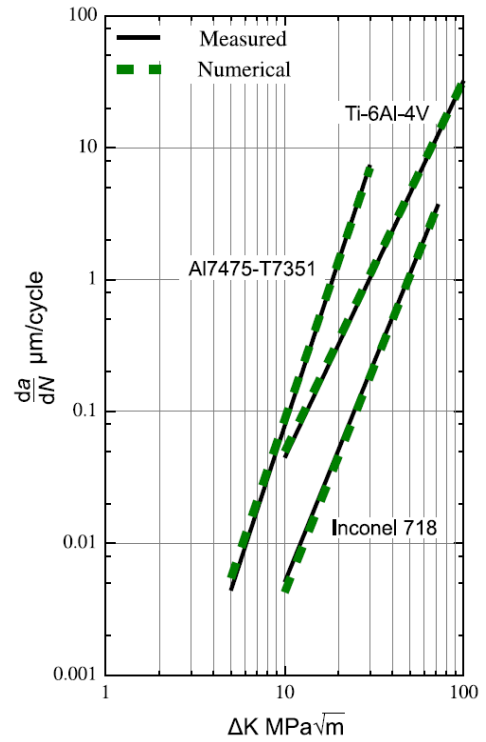
Klíčovou otázkou modelů kumulace plastické energie před čelem únavové trhliny je správná volba kritické disipované plastické energie před čelem únavové trhliny  $W_{cr}$ . Tento parametr je v práci [27] považován za materiálovou konstantu a rozhoduje o rychlosti šíření únavové trhliny v materiálu.

V dostupné literatuře nebyly nalezeny zdroje, ve kterých by se  $W_{cr}$  podařilo spolehlivě experimentálně stanovit bez nutnosti provádět únavovou zkoušku. Aspektům experimentálního stanovení  $W_{cr}$  se podrobně věnuje práce [40].

Kumulativní energetická kritéria pro predikci rychlosti šíření únavové trhliny dosahují dobré shody s experimentem (viz obr. 2.13).



Obr. 2.13a Porovnání rychlosti šíření únavové trhliny v módu I včetně rozptylu experimentálních dat pro slitinu Al 7475-T7351;  $R=0,1$  [28]



Obr. 2.13b Porovnání rychlosti šíření únavové trhliny v módu I pro slitiny Al 7475-T7351, Ti-6Al-4V, Inconel 718;  $R=0,1$  [28]



### 2.3 Kritéria pro predikci směru šíření únavové trhliny ve smíšeném módu zatěžování

V roce 1963 publikoval Erdogan a Sih [41] kritérium pro určování směru šíření únavové trhliny ve smíšeném módu zatěžování I. a II. označované jako MTS (z anglického výrazu maximum tangential stress) nebo MHS (maximum hoop stress). Podle tohoto kritéria se trhlina dále šíří ve směru odpovídajícímu úhlu  $\theta = \theta_0$ , kde obvodové napětí  $\sigma_\theta$  (viz obr. 2.2) nabývá maxima  $\sigma_{\theta,max}$ , matematicky vyjádřeno podmínkami (22)

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\theta_0} < 0. \quad (22)$$

Aplikováním podmínky (22) na vztahy pro napětí v okolí čela trhliny (2b) je možné vypočítat úhel dalšího šíření trhliny  $\theta_0$  v závislosti na velikosti faktorů intenzity napětí  $K_I$  a  $K_{II}$ .

MTS kritérium bylo původně navrženo pro křehké materiály. Je logické, že u těchto materiálů je obvodová složka napjatosti rozhodující pro další růst trhliny. Shih [42] však rozšířil Erdoganovo a Sihovo kritérium pro elasto-plastické materiály. Experimenty provedené v [43, 44] ukázaly, že odchylky směru šíření trhliny od směru vypočteného pomocí MTS kritéria jsou zanedbatelné u materiálů s nízkou mocninou zpevnění  $n$  v Ramberg-Osgoodově konstitutivním vztahu pro výpočet zpevnění [45]

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K}\right)^{\frac{1}{n}},$$

kde  $K$  je materiálová konstanta. U materiálů s vysokou mocninou zpevnění  $n$  se předpovědi liší o přibližně 10 % v závislosti na úrovni smíšeného módu zatěžování [42].

Sih [46] v roce 1974 publikoval kritérium založené na hustotě deformační energie v okolí trhliny. Podle tohoto kritéria se trhlina dále šíří ve směru nejmenší hustoty deformační energie dané vztahem

$$S = a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2 + a_{33}K_{III}^2, \quad (23)$$

kde pro stav rovinné deformace platí.

$$a_{11} = \frac{1}{16\pi G} [(3 - 4\nu - \cos\theta)(1 + \cos\theta)],$$

$$a_{12} = \frac{1}{8\pi G} \sin\theta [\cos\theta - 1 + 2\nu],$$

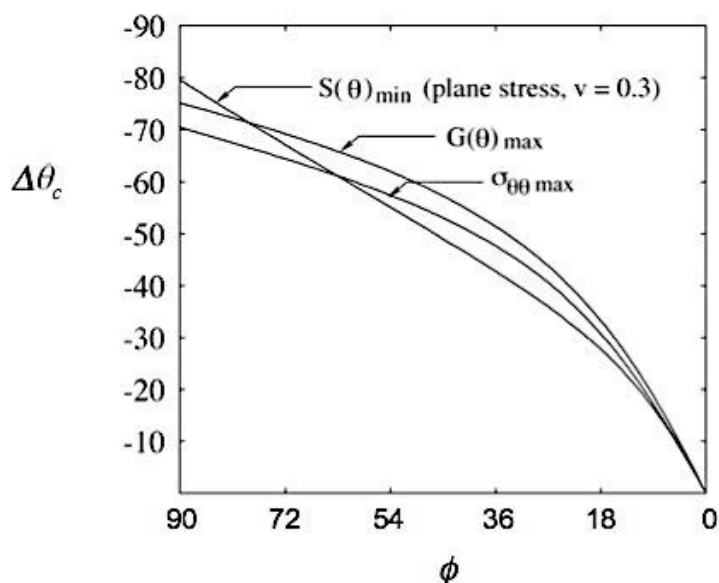
$$a_{22} = \frac{1}{16\pi G} [4(1 - \nu)(1 - \cos\theta) + (1 + \cos\theta)(3\cos\theta - 1)],$$

$$a_{33} = \frac{1}{4\pi G}$$

$\nu$  označuje Poissonovo číslo materiálu,  $G$  modul pružnosti ve smyku,  $\theta$  je polární úhel (viz Obr. 2.2). Směr šíření trhliny lze určit z následujících podmínek.

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\theta_0} > 0 \quad (24)$$

Sihovo  $S$ -kritérium bylo následně experimentálně zkoumáno dalšími výzkumníky [47, 48, 49, 50]. Pro malý podíl II. módu zatěžování predikuje  $S$ -kritérium téměř identický úhel dalšího šíření trhliny jako MTS kritérium, s jeho vzrůstajícím zastoupením predikuje  $S$ -kritérium vyšší úhel dalšího šíření trhliny, který dosahuje až 15% pro čistý smykový mód [24].

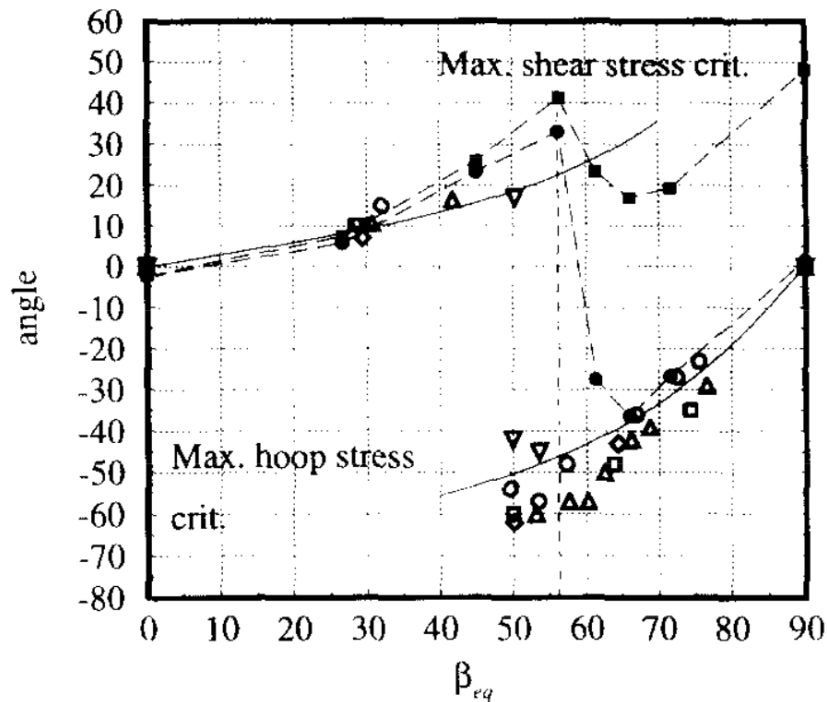


Obr. 2.14 Srovnání kritérií pro predikci směru šíření trhliny;  $S$ -kritérium [46],  $G_{\max}$  [51],  $\sigma_{\theta}$  - MTS kritérium [41]; převzato z [52]

MTS ani  $S$ -kritérium a další podobná kritéria předpovídající další šíření trhliny ve směru kolmém k maximálnímu obvodovému napětí neplatí zcela univerzálně pro všechny úrovně smíšeného módu zatěžování  $\Phi$  a všechny materiály. V [53], resp. [54] byla monotónně zatěžována zkušební tělesa vyrobená z oceli HY 130, resp. hliníkové slitiny AA7075, ve smíšeném módu I a II. Ukázalo se, že při vyšších hodnotách  $\Phi$  přestávají kritéria MTS a  $S$ -kritérium platit. Trhlina se začíná šířit ve směru rovnoběžném s rovinou maximálního

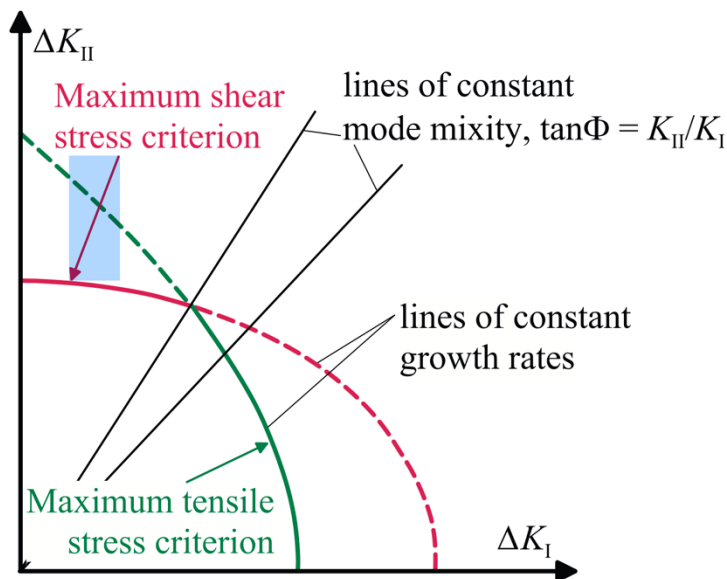
smykového napětí místo kolmému směru k rovině maximálního obvodového normálového napětí.

V literatuře bývá toto kritérium označované jako MSS (maximum shear stress) kritérium [53, 54, 55]. Na obr. 2.15 je znázorněna závislost úhlu šíření trhliny na  $\Phi$  (autor [54] definuje úroveň smíšeného módu zatěžování jako  $\beta_{eq} = \tan^{-1} \frac{K_I}{K_{II}}$ , dnes je obecněji přijímána forma definice  $\Phi$  s převráceným čitatelem a jmenovatelem). U experimentů provedených s malým  $\Phi$  odpovídá úhel šíření trhliny  $\theta$  MTS kritériu, pro  $\Phi > 44^\circ$  však  $\theta$  sleduje MSS kritérium, které dává pro vyšší hodnoty  $\Phi$  zcela odlišné předpovědi  $\theta$ . Dosud se nepodařilo nalézt spolehlivý vztah pro určení přechodové hodnoty  $\Phi$  v závislosti na parametrech materiálu.



Obr. 2.15 Experimentální výsledky závislosti změny směru šíření trhliny na  $\Phi$ ,  $\Phi$  na schématu označené jako  $\beta_{eq} = 90^\circ - \Phi$  z [54]

Oblast platnosti MTS a MSS kritéria v závislosti na faktorech intenzity napětí  $K_I$  a  $K_{II}$  je možné schematicky znázornit na obr. 2.16.



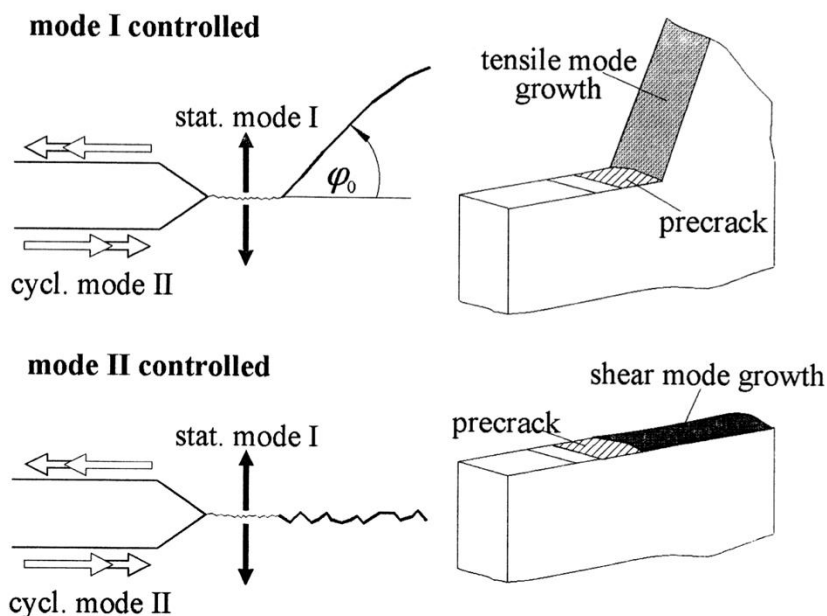
Obr. 2.16 Schématické znázornění oboru platnosti MTS a MSS kritéria [21]

MTS, MSS i *S*-kritérium byly původně vypracovány pro monotónní zatěžování zkušebního tělesa ve smíšeném módu I a II. Tělesa převážně typu CTS (Compact-Tension-Shear) s trhlinou cyklovanou v módu I. nebo s vrubem byla následně monotónně zatížena, až došlo k nestabilnímu šíření trhliny. Pozdější práce ukázaly, že výše zmíněná kritéria pro určení směru je možné použít i při únavovém proporcionálním zatěžování ve smíšeném módu [24].

Experimenty však ukazují [56, 57, 58], že při vytvoření proporcionálního smíšeného módu změnou orientace vnějšího zatížení k původnímu směru šíření únavové trhliny, se únavová trhlina stočí do směru, kde je dominantní pouze tahový mód šíření.

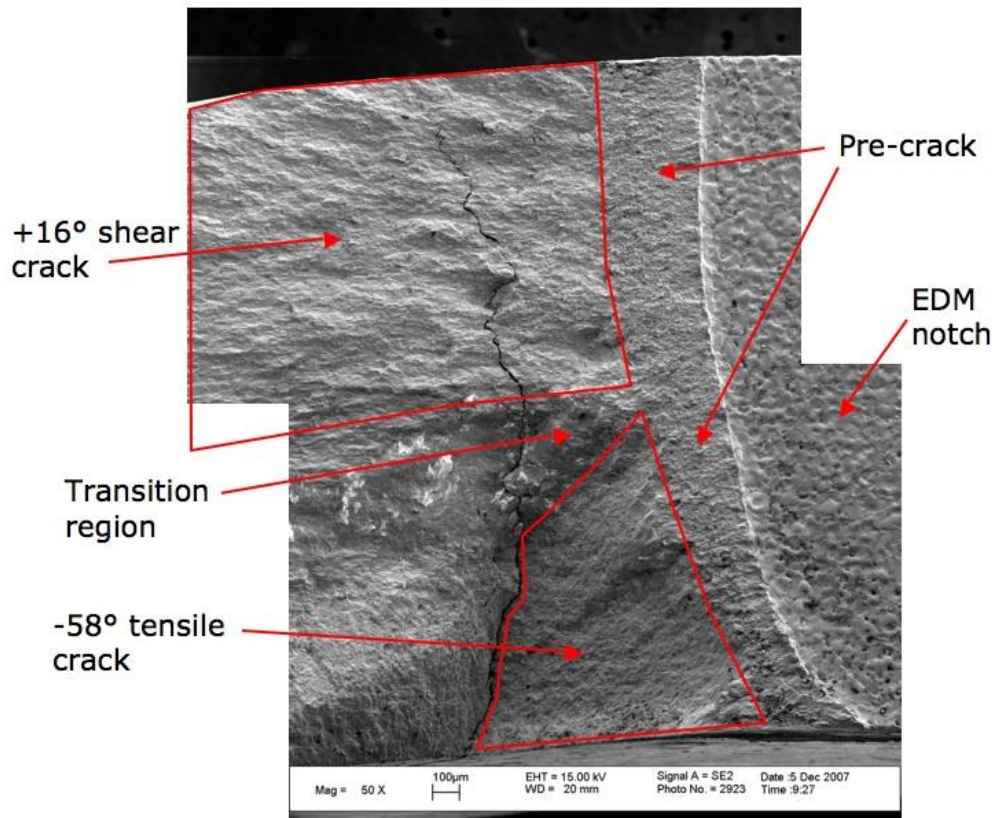
Plank a Kuhn [20] zveřejnili v rozsáhlé studii výsledky únavových experimentů v neproporcionálním smíšeném módu zatěžování I a II vypracovaných na pěti různých hliníkových slitinách. Neproporcionálního způsobu zatěžování bylo docíleno pomocí přípravku, který byl připevněn na zkušební CTS těleso. Bylo tak možné zkušební těleso staticky předepnout ve směru nezávislém na směru cyklického namáhání. Testovány byly různé kombinace statického faktoru intenzity napětí  $K^{statické}$  v jednom a rozkmitu faktoru intenzity napětí  $\Delta K$  v jiném směru. Během jednoho zátěžného cyklu se tak měnil poměr jednotlivých složek tenzoru napětí před kořenem únavové trhliny. Ukázalo se, že při zatížení  $K_I^{statické}$  a  $\Delta K_{II}$  dochází v závislosti hodnotách obou veličin ke dvojímu způsobu šíření únavové trhliny – tahovému a smykovému módu šíření (viz obr. 2.17).

Úhly šíření neproporcionálně zatěžované trhliny rostoucí v tahovém módu byly v dobré shodě s predikcemi MTS kritéria s využitím pouze  $K_I^{max}$  a  $K_{II}^{max}$  pro všechny v práci [20] studované slitiny.



Obr. 2.17 Různé módy šíření únavové trhliny

Tahový a smykový způsob šíření trhliny se vyskytuje i při jiných kombinacích módů zatěžování s neproporcionálním průběhem. Highsmith [59] zkoumal neproporcionální šíření únavové trhliny v módu I a II a prostorovém módu I, II a III na vzorcích tvaru válce a tenkostěnné trubky vyrobených ze slitiny Inconel 718. U zkušebních těles tvaru tenkostěnné trubky bylo pozorováno rozdělení únavové trhliny na část šířící se smykovým a část tahovým způsobem (viz obr. 2.18). Toto chování je připisováno výrazně se měnící úrovni smíšeného zatížení podél čela trhliny. U vnějšího povrchu nabývá  $\Phi$  vyšších hodnot a směr šíření trhliny odpovídá spíše MSS kritériu, u vnitřního povrchu je  $\Phi$  malé a trhlina se šíří v této části zkušebního tělesa pod úhlem odpovídajícím MTS kritériu.



Obr. 2.18 Snímek z řádkovacího elektronového mikroskopu s rozvětvenou trhlinou, v blízkosti vnějšího, resp. vnitřního povrchu trubky se trhlina šíří smykovým, resp. tahovým způsobem [59]

## 2.4 Napět'ově-deformační stav na čele prostorové trhliny zatěžované ve smíšeném módu

V případě trojrozměrného tělesa s magistrální trhlinou je největší plastická zóna na čele trhliny na povrchu tělesa a směrem pod povrch její velikost klesá. V tenké povrchové vrstvě tělesa u kořene trhliny je normálové napětí kolmé k povrchu zkušebního tělesa nulové a napjatost odpovídá podmínkám stavu rovinné napjatosti (RN), hlouběji pod povrchem naopak stavu rovinné deformace (RD). Maximální smykové napětí řídící skluzové procesy, které jsou projevem plastické deformace materiálu, je tedy podstatně menší uprostřed tělesa.

Důsledkem měnícího se napět'ového pole podél čela prostorové trhliny se mění efektivní mez kluzu materiálu. To má za následek změnu velikosti a tvaru plastické zóny [60], otvírání a zavírání trhliny [61, 62] i změnu lomové houževnatosti [60]. Tento fenomén se neuplatňuje jen v případě únavových trhlín. Je známé, že při vysoké hydrostatické tahové napjatosti i původně plastický materiál může být porušen křehkým lomem, naopak při vysoké hydrostatické tlakové napjatosti se i křehký materiál plastizuje. Důsledkem je, že při šíření únavové trhliny v módu I i smíšeném módu je možné sledovat zakřivení jejího čela [63, 64]. U CT zkušebních těles má čelo magistrální trhliny tvar oblouku. Na povrchu tělesa je trhlina kratší než uprostřed. Konkrétní tvar zakřivení trhliny se ale liší podle materiálu tělesa a geometrie v místě styku čela trhliny s volným povrchem [64, 65].

Charakter napět'ového stavu při monotónním zatěžování vyjadřuje parametr zvaný triaxialita napětí zavedený v [66] definovaný pomocí vztahu

$$\eta = \frac{\sigma_h}{\sigma_v} = \frac{\frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}, \quad (25)$$

kde  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  jsou hlavní napětí,  $\sigma_h$  je hydrostatické napětí a  $\sigma_v$  je von Missesovo efektivní napětí. V některých pracích je parametr  $\eta$  (někdy též  $TF$  z angl. triaxiality factor) definovaný jako  $\sigma_{octaedrické}/\tau_{octaedrické}$ , který se liší od triaxiality definované vztahem (25) faktorem  $\sqrt{2}/3$ .

Fyzikální opodstatnění parametru  $\eta$  je následující: Hydrostatické napětí je úměrné změně objemu. von Missesovo efektivní napětí je úměrné odmocnině druhého invariantu deviátoru napětí, který je zodpovědný za změnu tvaru. Triaxialita napětí  $\eta$  tedy vyjadřuje poměr mezi lokální pružnou změnou objemu ( $\sim\sigma_h$ ) a změnou tvaru ( $\sim\sigma_v$ ) související s plastickou deformací. Při vysokých hodnotách  $\eta$  v okolí čela trhliny je možné očekávat vyšší pravděpodobnost kvazi-křehkého porušování.

Triaxilitu napětí lze použít nejen pro vysvětlení tunelování čela trhliny, ale i pro empirický odhad únavové životnosti při cyklickém zatěžování ve smíšeném módu z únavových zkoušek v tahovém módu. Je ale nutné použít jinou definici parametru  $\eta$ , protože při cyklickém zatěžování mění parametr  $\eta$  svou hodnotu v průběhu cyklu. Park a Nelson [67] navrhli pozměněný parametr  $H_s$  (pozn. dolní index  $s$  znamená *stress*) definovaný vztahem

$$\eta_s = \frac{\sigma_{ha}}{S_{eq}}, \quad (26)$$

kde  $\sigma_{ha}$  je amplituda hydrostatického napětí v cyklu,  $S_{eq}$  je amplituda ekvivalentního deviátorového napětí definovaného vztahem

$$S_{eq} = \sqrt{\frac{3}{8} S_{ija}^2}. \quad (27)$$

$S_{ija}$  je tenzorová veličina vyjadřující amplitudu deviátoru napětí pro cyklus.  $\eta_s$  je díky použití amplitud napětí veličina definovaná pro proporcionální i neproporcionální cyklické zatěžování. Parametr  $\eta_s$  je také možné použít pro odhad lomové houževnatosti a únavové životnosti tělesa zatěžovaného v napěťových podmínkách odlišných od únavové zkoušky [67].

Problém při použití parametru  $\eta_s$  je v tom, že není schopen odhadnout únavovou životnost pro všechny módy zatěžování. Aby bylo možné parametr  $\eta_s$  použít pro odhad únavové životnosti i pro zatěžování s hodnotou  $\eta_s < 1$  byl v [67, 68] navržen vztah pro výpočet tzv. faktoru víceososti napětí  $MF$  (z angl. *multiaxiality factor*)

$$MF = 2^{k(T_s-1)}, \quad (28)$$

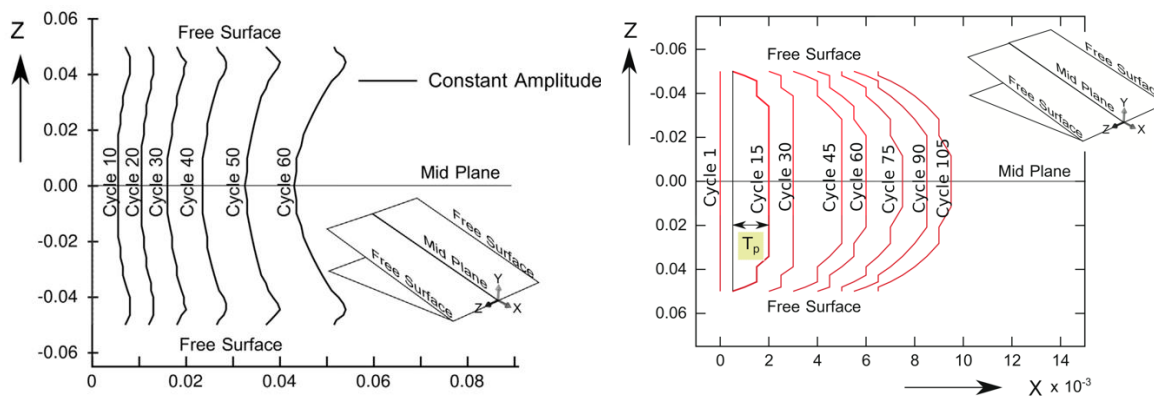
kde  $k$  je materiálová konstanta. Pozn.: V práci [68] byl vztah (28) definovaný pro triaxialitu napětí při monotónním zatěžování, v [67] byl zobecněn pro cyklické zatěžování V [69] byl  $MF$  parametr použit pro korelaci únavové životnosti při tahovém a torzním zatěžování při nízkocyklové únavě.

V [27] byl simulován růst rovinné únavové trhliny v módu I pomocí metody konečných prvků. Těleso s trhlinou bylo po tloušťce rozděleno 32 vrstvami elementů. Postup trhliny v každé hloubkové vrstvě elementů byl řízen Klingbeilovým kritériem popsáním v odst. 2.2.2. Provedené simulace růstu prostorové trhliny nedávaly správný odhad tvaru čela prostorové únavové trhliny (obr. 2.19 vlevo). Poté byla zavedena korekce kritické plastické disipované energie  $W_{cr}^p$  s použitím faktoru víceososti (obr. 2.19 vpravo) podle vztahu



$$W_{cr}^{p*} = \frac{W_{cr}^p}{MF}. \quad (29)$$

Po aplikaci této korekce byl již model schopný správně simulovat jev tunelování čela únavové trhliny v hloubce.



Obr. 2.19 Srovnání tvaru čela trhliny při simulaci únavového šíření prostorové trhliny v módu I bez použití multiaxiálního faktoru  $MF$  (vlevo), s použitím  $MF$  (vpravo)

[27]

## 2.5 Shrnutí literárních poznatků

Studium literárních zdrojů týkajících se modelů růstu dlouhých únavových trhlin ve smíšeném módu zatěžování ukázalo, že tato problematika nebyla zatím spolehlivě vyřešena. Nejvíce se v literatuře vyskytují modely šíření únavových trhlin založených na faktoru intenzity napětí. Tyto často fenomenologické modely jsou schopné s větší či menší přesností vystihnout rychlost i směr šíření únavové trhliny ve smíšeném módu porušování. Základem těchto modelů je zpravidla vztah pro převod rozkmitů faktorů intenzity napětí v jednotlivých módech zatěžování na faktor intenzity napětí ekvivalentní tomu v tahovém módu I. Pomocí růstové křivky únavové zkoušky a při znalosti  $\Delta K_I, \Delta K_{II}, \Delta K_{III}$  je tam možné odhadnout rychlost dalšího šíření, zbytkovou životnost atp. Úkolem výpočtáře je získání  $\Delta K_I, \Delta K_{II}, \Delta K_{III}$  pro dané zatěžování a geometrii tělesa.

V analýze pomocí metody konečných prvků byly vyvinuty různé postupy pro výpočet faktoru intenzity napětí. Jde například o metody VCCT nebo J-Integrálu. Pro správné fungování těchto metod by však bylo nutné speciálně přizpůsobit síť konečných prvků v okolí čela trhliny. Modely, které vypočítají  $\Delta K_I, \Delta K_{II}, \Delta K_{III}$  pouze pro určité délky trhliny s nutnou tvorbou sítě pro každou její délku, nejsou vhodné pro simulaci šíření únavové trhliny s přetěžujícími cykly, případně s proměnným cyklováním. Důvodem je fakt, že nově vytvořený model pro další délku trhliny neobsahuje informaci o elasto-plastickém stavu v okolí jejího čela.

Modely založené na disipaci plastické energie v okolí čela trhliny odstraňují některé z nedostatků výše zmíněných modelů založených na faktoru intenzity napětí. V [26, 27, 28, 12, 39] jsou prezentovány MKP modely, které počítají disipovanou plastickou energii v okolí čela únavové trhliny. Veličina  $dW / dN$  je korelována podle podmínek popsanych v odst. 2.2.2 s rychlostí šíření únavové trhliny. V [27, 39] je šíření trhliny simulováno na jedné síti konečných prvků. Přírůstek trhliny je modelován postupným rozpojováním uzlů. Tento postup dovoluje studovat i zatěžování s přetěžujícím nebo proměnným cyklem, protože se zachovává elasto-plastický stav v okolí čela únavové trhliny od předchozího zatěžování. Citovaná energetická kritéria založená na výpočtu  $dW / dN$  s výjimkou práce [37] pracují pouze se zatěžováním v tahovém módu I. V [37] jsou provedeny výpočty  $dW / dN$  se stacionární trhlinou zatěžovanou proporcionálním smíšeným módem I a II. Výpočty disipované plastické energie v okolí čela rostoucí trhliny v tělese zatěžovaném ve smíšeném proporcionálním a neproporcionálním módu dosud chybí.

Většina studovaných prací se také orientuje na výpočetně méně náročné úlohy s 2D sítí konečných prvků. S 2D výpočtem je možné odhadnout rozložení plastické deformace v okolí čela trhliny i množství disipované plastické energie za cyklus v tělesech s jednoduchou geometrií. 2D výpočet bohužel nedovoluje studovat chování prostorového čela trhliny, ani výpočty se složitější geometrií tělesa. 3D výpočtům  $dW / dN$  v jednoduchém tělese zatěžovaném v tahovém módu I se věnuje práce [27]. Trojrozměrné energetické výpočty na tělesech s rostoucí prostorovou trhlinou zatěžovaných ve smíšeném módu zatím nebyly publikovány.

### 3 FORMULACE PROBLÉMU A MOŽNOSTI JEHO ŘEŠENÍ

Tato práce má přispět ke schopnostem simulovat šíření únavových trhlin ve složitějších konstrukcích vyrobených z různých, nejen hliníkových slitin, v nichž může docházet k růstu únavové trhliny.

V minulosti byly světovou vědeckou komunitou, ale i na Katedře materiálů při FJFI, pracovišti autora, prezentovány numerické odhady rychlosti růstu trhliny založené na výpočtech disipované plastické energie v okolí čela únavové trhliny metodou konečných prvků. Předpokládá se, že tato veličina je korelována s rychlostí šíření únavové trhliny především u leteckých hliníkových slitin, ale i slitin titanu a ocelí. Na základě simulací plastické zóny v okolí čela únavové trhliny bylo možné odhadovat zbytkovou životnost konstrukce díky flexibilitě metody konečných prvků i v tělesech se složitější geometrií a různorodým cyklickým zatěžováním.

Většina dostupných prací zabývajících se touto tematikou byla ovšem vypracována za použití dvourozměrných numerických modelů zkušební tělesa zatěžovaného v čistém tahovém módu I. Dalším častým omezením existujících modelů je pouze stacionární výpočet bez simulace postupného přirůstání únavové trhliny, který neumožňuje sledovat vývoj velikosti a tvaru plastické zóny před čelem ÚT, ani cyklické konstitutivní chování materiálu, prorůstá-li trhlina již zpevněným materiálem. Numerický výpočet stacionární trhliny dále nebere v potaz plasticky indukované zavírání únavové trhliny.

Použití pouze dvourozměrných numerických modelů při standardně prováděných numerických výpočtech je dalším limitujícím faktorem, protože tyto modely poskytují pouze krajní meze sledovaných veličin pro případy velmi tenkého (RN) nebo naopak tlustého zkušební tělesa (RD). U některých konstrukčních materiálů je navíc složité vyrobít zkušební těleso takové tloušťky, aby bylo možné sledovat šíření trhliny čistě v podmínkách rovinné deformace. Je proto vhodné využít i trojrozměrné MKP simulace šíření únavové trhliny, kterým je v této práci věnován odst. 4.3.

Dalším problémem současných modelů je neschopnost odhadovat různé lomově-mechanické veličiny v konstrukcích složitější geometrie, ve kterých může docházet k šíření ÚT ve smíšeném módu porušování. Tento stav porušování může být dán nejen složitostí geometrie konstrukce s trhlinou, ale i superpozicí různých cyklických zatížení s proměnnými parametry cyklu. Zvláště pak při proměnlivém cyklickém zatěžování několika současně působícími zdroji zatížení může podle zkušeností z praxe docházet ke

značně odlišnému chování únavové trhliny než pouze v tahovém módu I. Této problematice jsou věnovány odst. 4.4 a 4.5.

## 4 MODELOVÁNÍ ŠÍŘENÍ ÚNAVOVÉ TRHLINY VE SMÍŠENÉM MÓDU I A II

Pro účely vytvoření modelu šíření únavové trhliny v tělese zatěžovaném ve smíšeném módu byly v laboratoři KMAT FJFI provedeny únavové zkoušky ve smíšeném módu zatěžování I. a II. Dále byla vyhodnocena zpevněná oblast na povrchu zkušebního tělesa v okolí kořene trhliny pomocí nanoindentace. Experimentální práce jsou podrobně popsány v následujících odstavcích. Tyto výsledky doplněné o data nalezené v literatuře byly použity pro ověření numerických modelů.

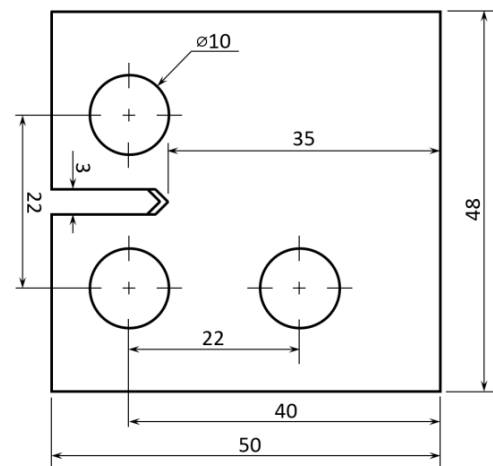
Šíření únavové trhliny bylo modelováno pomocí metody konečných prvků ve výpočtovém prostředí MSC.Marc. Samotný výpočtový software byl doplněn autorem naprogramovanými subrutinami napsanými v jazyce Fortran90. Tyto subrutiny slouží k řízení výpočtu a výpisu dílčích výsledků během jeho běhu. Výpočty byly prováděny na verzích softwaru MSC.Marc 2012–2015. Výsledky byly zpracovány pomocí volně dostupných nástrojů pro vědecké výpočty v ekosystému jazyka Python. Zejména se jedná o knihovny NumPy [70], Pandas [71] a Matplotlib [72]. Výsledky simulací jsou v následujících odstavcích členěny podle způsobu zatěžování a podle použití dvourozměrné nebo trojrozměrné sítě konečných prvků. Zvláštní odstavec 4.5 je věnován šíření únavové trhliny při neproporcionálním smíšeném módu zatěžování. Algoritmus růstu trhliny je pro všechny modely shodný, proto mu bude věnován samostatný odstavec 4.2.

## 4.1 Experimentální část

Únavové zkoušky upravených CT těles (viz obr. 5) byly provedeny pro hliníkovou slitinu D16CT1 typu AlCu4Mg1 a korozivzdornou ocel AISI 304. CT tělesa byla opatřena dalším otvorem pro čep, aby bylo možné simulovat šíření únavové trhliny ve smíšeném módu I. a II. Po zkouškách byla provedena fraktografická analýza lomových ploch slitiny D16CT1. V okolí čela únavové trhliny ve zkušebním tělese z oceli AISI 304 byly provedeny i zkoušky nanotvrdosti za účelem zjištění rozsahu zpevněné oblasti v okolí jejího čela.

### 4.1.1 Únavové zkoušky ve smíšeném módu I + II

V laboratoři Katedry materiálů (KMAT) byly provedeny únavové zkoušky upravených CT těles. Úprava CT těles spočívala ve vyvrtání dalšího otvoru pro vložení čepu pro upevnění do čelistí pulsátoru (obr. 4.1). Ukázka zkušebního tělesa a jeho schéma se nachází na obr. 4.2 a obr. 4.3. Po nacyklování únavové trhliny do takové délky, aby čelo trhliny leželo na spojnici otvorů 1 a 3, bylo zkušební těleso v pulsátoru upnut do těchto otvorů. Tím došlo ke změně směru zatěžování vůči směru šíření únavové trhliny. CT těleso bylo navrženo tak, aby při jeho přetočení lomová plocha již vzniklé únavové trhliny svírala se spojnici čepů určených pro smíšený mód úhel  $45^\circ$ . Parametry zatěžování zůstaly i po přetočení zkušebního tělesa v pulsátoru stejné.



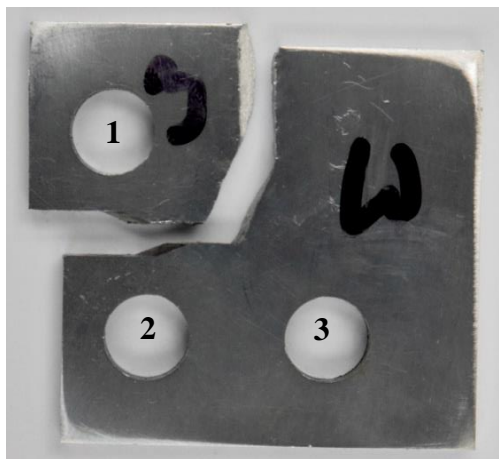
Obr. 4.1 Schéma upraveného CT tělesa

Při únavové zkoušce ve smíšeném módu zatěžování I + II trhlina může měnit směr šíření. Je proto nutné během experimentu odečítat délku trhliny nejenom v ose  $x$ , ale kótovat polohu čela trhliny na povrchu zkušebního tělesa. Do posuvného měřicího zařízení pulsátoru byl proto přidán speciální okulár s optickým křížem. Při vyhodnocení experimentu mohla tak být sledována trajektorie ústí čela únavové trhliny na povrch v závislosti na počtu cyklů. Celkem byly provedeny únavové zkoušky tří těles, která byla vyrobena z hliníkové slitiny

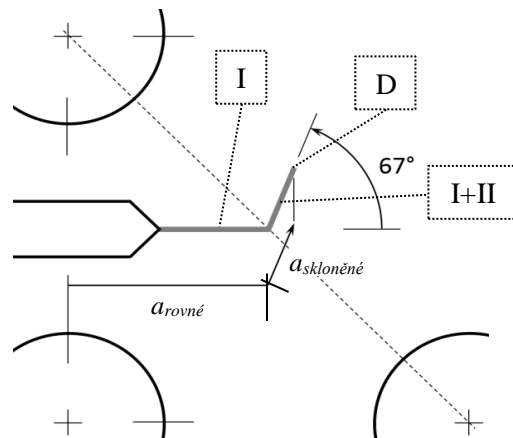
D16CT1. Cyklování probíhalo na hydraulickém pulsátoru neměnným sinusovým zatížením s frekvencí 15 Hz bez přetěžujících cyklů či proměnných sekvencí. Každá

únavová zkouška byla provedena s jinými parametry zatěžování, které jsou souhrnně uvedeny v

tab. 1. Maximální zatížení  $F_{\max}$  bylo pro první únavovou zkoušku zvoleno 2 750 N a pro následující zkoušku bylo vždy cca o 10 % sníženo. Minimální zatížení  $F_{\min}$  bylo ponecháno 100 N, aby bylo těleso vždy tahově zatížené a nedocházelo ke vzájemnému pohybu čepů a zkušební tělesa.



Obr. 4.2 Zkušební těleso č. 1 po únavové zkoušce



Obr. 4.3 Schematicky znázorněný směr růstu únavové trhliny v tělese č. 1, délka trhliny v tahovém (I) a rovinném smykovém módu (I+II), ÚZ zakončena statickým dolomem (D)

Tab. 1 Přehled parametrů zatěžování a výsledků únavových zkoušek pro jednotlivá zkušební tělesa, ZSZ – změna směru zatěžování

|                            | Těleso č. 1 | Těleso č. 2 | Těleso č. 3 |
|----------------------------|-------------|-------------|-------------|
| $F_{\min}$ [N]             | 100         | 100         | 100         |
| $F_{\max}$ [N]             | 2750        | 2 486       | 2 220       |
| $R$                        | 0,036       | 0,040       | 0,045       |
| Počet cyklů do ZSZ         | 207 000     | 204 400     | 408 000     |
| Počet cyklů od ZSZ do lomu | 337 630     | 549 000     | 1 297 200   |
| Celkový počet cyklů        | 544 630     | 753 400     | 1 705 200   |
| Úhel šíření trhliny po ZSZ | 67°         | 49°         | 62°         |

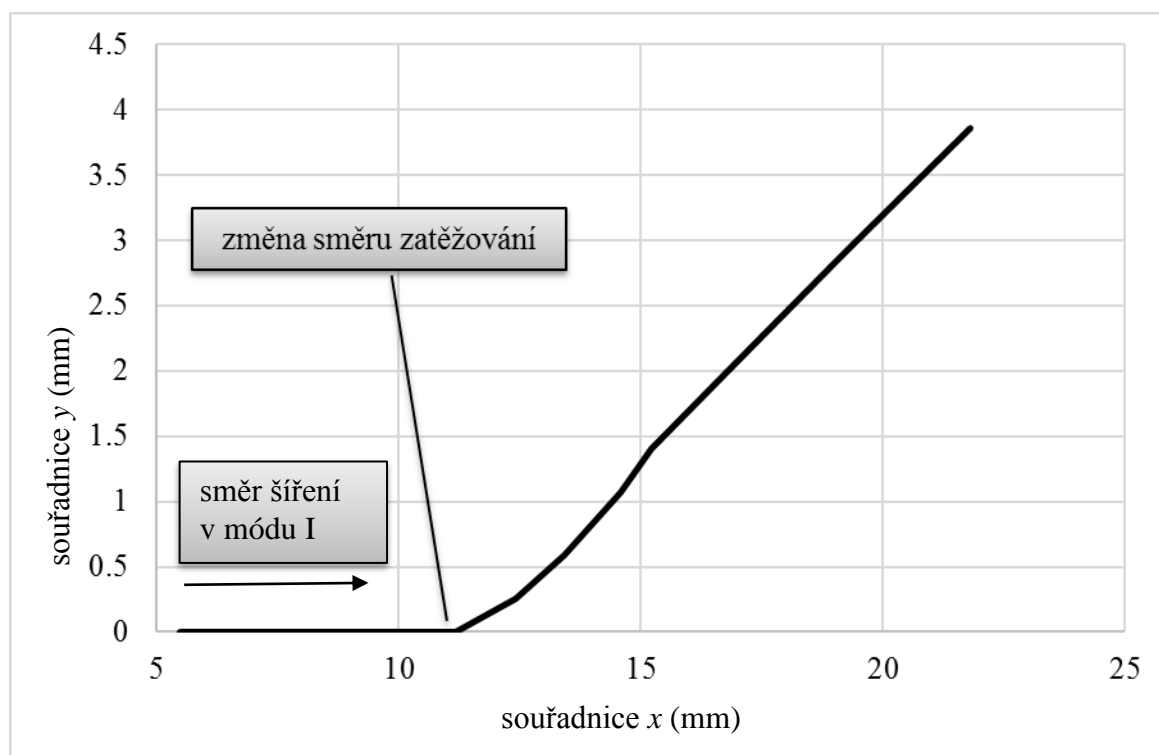
Bezprostředně po změně směru zatěžování (ZSZ) se trhlina odklonila od původního směru šíření a v novém směru setrvala až do konce únavové zkoušky. Žádná přechodová oblast s postupnou změnou směru nebyla pozorována a trajektorie trhliny tak



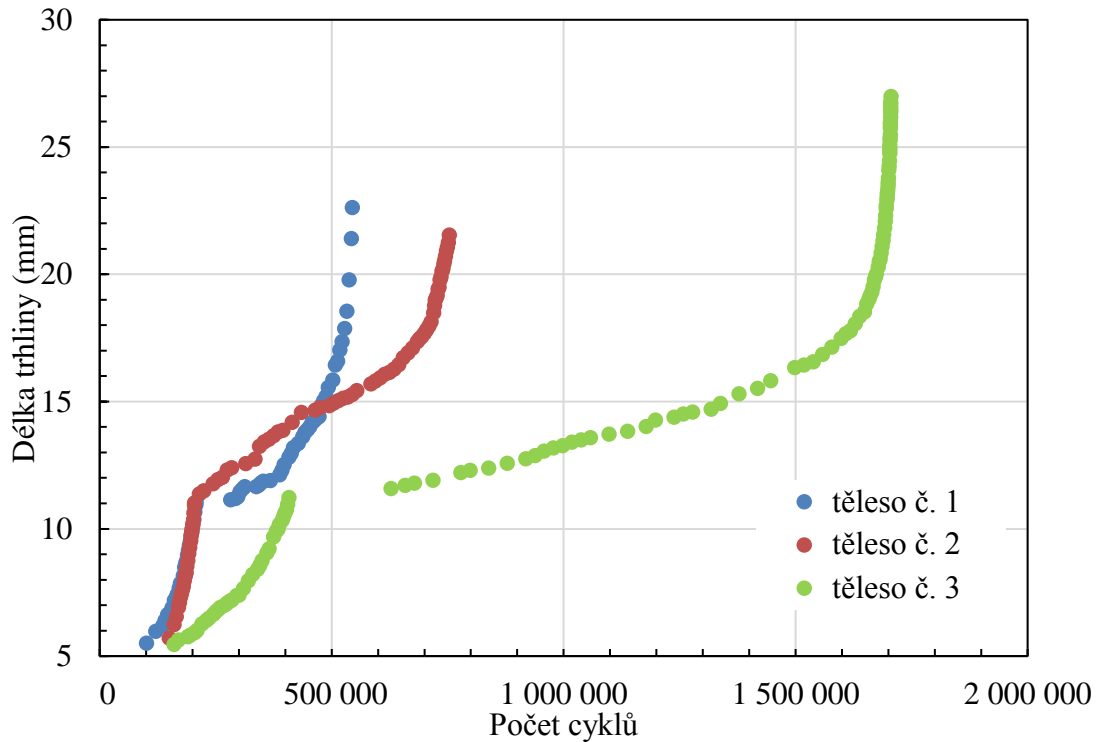
představuje lomenou čáru. U zkušebních těles č. 1 a 3 byl odklon od původního směru vyšší než  $60^\circ$ , což je podstatně více než očekávaných  $45^\circ$ . U tělesa č. 2 nepřesáhl  $50^\circ$  (viz

tab. 1). Při dalším zatěžování se tento směr šíření trhliny neměnil a trajektorie trhliny tak představuje lomenou čáru. Menší úhel v případě tělesa č. 2 byl dán zřejmě různou délkou trhliny na obou površích tělesa, kdy na zadním povrchu byla délka trhliny o cca 1,5 mm kratší a nedosáhla tak požadované délky dané spojnicí otvorů pro čepy 1 a 3. Z toho důvodu budou detailní analýze podrobeny pouze tělesa 1 a 3. Celková délka trhliny  $a$  je součtem délky trhliny měřené na povrchu zkušebního tělesa před a po ZSZ (viz obr. 4.4). Růstové křivky pro všechna tři tělesa jsou na obr. 4.5.

Šíření únavové trhliny v této zkoušce se dá rozdělit do tří fází. V první fázi se trhlina šíří z iniciačního vrubu v tahovém módu I. Po ZSZ se růst trhliny u zkušebních těles 1 a 3 na nějakou dobu výrazně zpomalí. Rychlost trhliny po ZSZ je zpočátku nižší vzhledem k nižší vzdálenosti kořene trhliny od paprsku vnějších sil. Nakonec bylo těleso dolomeno při monotónně vzrůstajícím zatížení. Na lomové ploše závěrečného statického lomu se vytvořily smykové okraje.



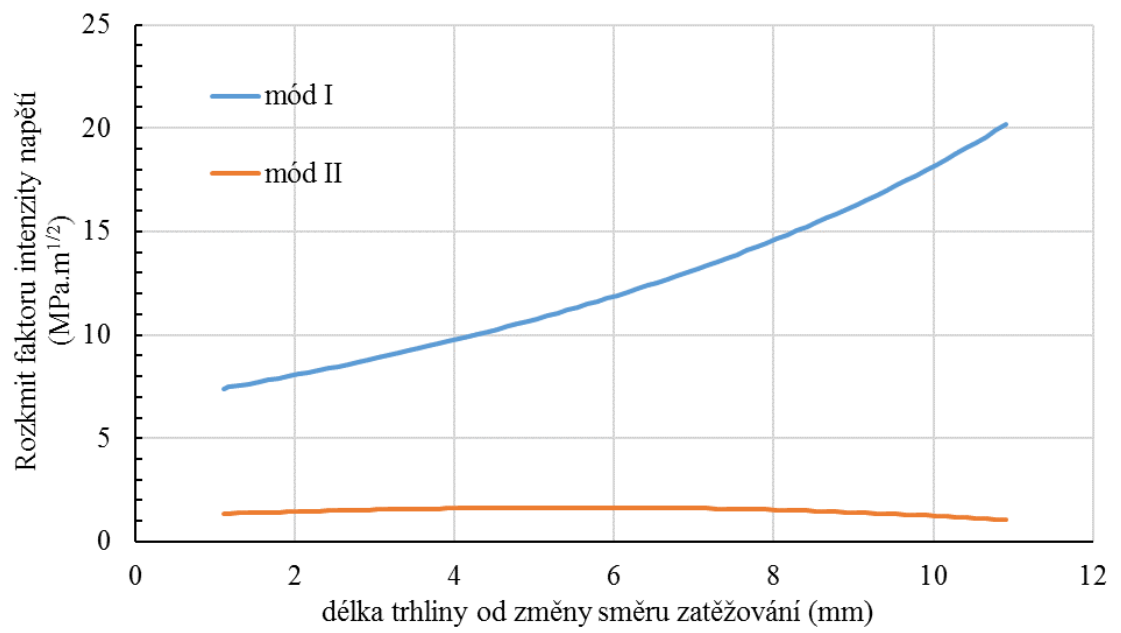
Obr. 4.4 Změřená trajektorie trhliny na čelním povrchu pro zkušební těleso č. 1, změna směru šíření při délce trhliny 11,174 mm



Obr. 4.5 Celková délka trhliny v závislosti na počtu cyklů pro všechna tělesa

Z naměřených dat pro těleso č. 1 byla zjištěna závislost rychlosti šíření únavové trhliny na rozkmitu faktoru intenzity napětí  $\frac{da}{dN} - \Delta K$ . Rozkmit faktoru intenzity napětí byl pro obě fáze šíření před i po ZSZ zjištěn pomocí MKP výpočtu s předpokladem rovinné napjatosti. Ve smíšeném módu zatěžování I + II je nenulový nejenom  $\Delta K_I$ , ale i  $\Delta K_{II}$ . Závislost  $\Delta K_I$  a  $\Delta K_{II}$  na délce trhliny od okamžiku změny směru zatížení je uvedena na obr. 4.6. Zatímco  $\Delta K_I$  průběžně roste,  $\Delta K_{II}$  má po ZSZ téměř konstantní průběh s menším poklesem v oblasti vyšších délek trhliny. Aby bylo možné vzájemně porovnat rychlosti šíření ÚT v módu I a smíšeném módu I + II, byly hodnoty  $\Delta K_I$  a  $\Delta K_{II}$  převedeny na ekvivalentní  $\Delta K_{ev}$  pomocí vztahu (13).

Výsledky simulací s použitím experimentálních dat z tohoto odst. jsou uvedeny v odst. 4.4.2.



Obr. 4.6 Průběh vypočítaných hodnot  $\Delta K_I$  a  $\Delta K_{II}$  v závislosti na délce trhliny ve zkušebním tělese č. 1, délka trhliny vyjádřena pomocí  $a$  skloněné z obr. 4.2

#### 4.1.1.1 *Fraktografické posouzení CT tělesa namáhaného únavově ve smíšeném módu porušování*

Na skenovacím elektronovém mikroskopu JEOL JSM 840A na pracovišti KMAT byly pořízeny snímky lomové plochy upravených CT zkušebních těles cyklovaných nejdříve v tahovém módu I. a následně v smíšeném módu zatěžování I a II. Pozornost při fraktografické analýze byla věnována hlavně porovnání mikromorfologie lomu v oblasti šíření únavové trhliny v tahovém módu I (obr. 4.7) a krátce po reiniciaci únavové trhliny ve smíšeném módu I a II (obr. 4.9). V obou případech byla na lomové ploše nalezena pole striací. Mechanismus tvorby striací je typický pro šíření únavové trhliny v tahovém módu I.

Lomová plocha zkušebního CT tělesa č. 1 (viz odstavec 4.1.1) upraveného pro studování růstu únavové trhliny ve smíšeném módu porušování I a II byla podrobena fraktografické analýze. Na tělese byly zkoumány celkem tři oblasti: oblast krátce po iniciaci únavové trhliny od vrubu v módu I – oblast I (viz obr. 4.3); druhá oblast I+II odpovídá místu reiniciace trhliny ve smíšeném módu porušování I. a II a oblast D zobrazuje místo ukončení únavové zkoušky. Poté bylo zkušební těleso staticky dolomeno.

Snímky lomové plochy v oblasti iniciace trhliny jsou na obr. 4.7 a obr. 4.8. Na Obr. 4.7 je vidět lomová plocha v blízkosti vrubu při nižším zvětšení. Kolem vrubu dochází k násobné iniciaci mikrotrhlin, které se následně spojí do jedné makroskopické trhliny. Z obrázku je patrné, že nejdříve se směr šíření mikrotrhlin neslučoval se směrem šíření makroskopické únavové trhliny. Na obr. 4.8 je ve vyšším zvětšení vidět mikromorfologie lomové plochy včetně pole striací.

Oblast reiniciace únavové trhliny ve smíšeném módu porušování je znázorněna na obr. 4.9 – 4.12. Rozhraní, kde únavová trhlina prudce změnila směr šíření vlivem změny směru zatěžování (viz obr. 4.3) je znázorněno na obr. 4.9 a obr. 4.10. Z obrázků je patrné, že čelo únavové trhliny (označeno tečkovaně) bylo v okamžiku změny směru zatěžování značně zakřivené od jednoho povrchu směrem k druhému. Délka trhliny na povrchu zkušebního tělesa měřená optickým mikroskopem v průběhu zkoušky byla v okamžiku změny zatěžování vůči nesledovanému povrchu vyšší přibližně o 1 mm.

Únavová trhlina, pozorovaná na měřeném povrchu tělesa, se po změně směru zatížení odchýlila vůči původnímu směru šíření o  $67^\circ$  a dále již neměnila směr. Z obr. 4.10 je patrné, že ústí čela únavové trhliny do nesledovaného povrchu tělesa měnilo po změně zatížení směr. Nesledovaný povrch se nachází na pravé straně obr. 4.10.

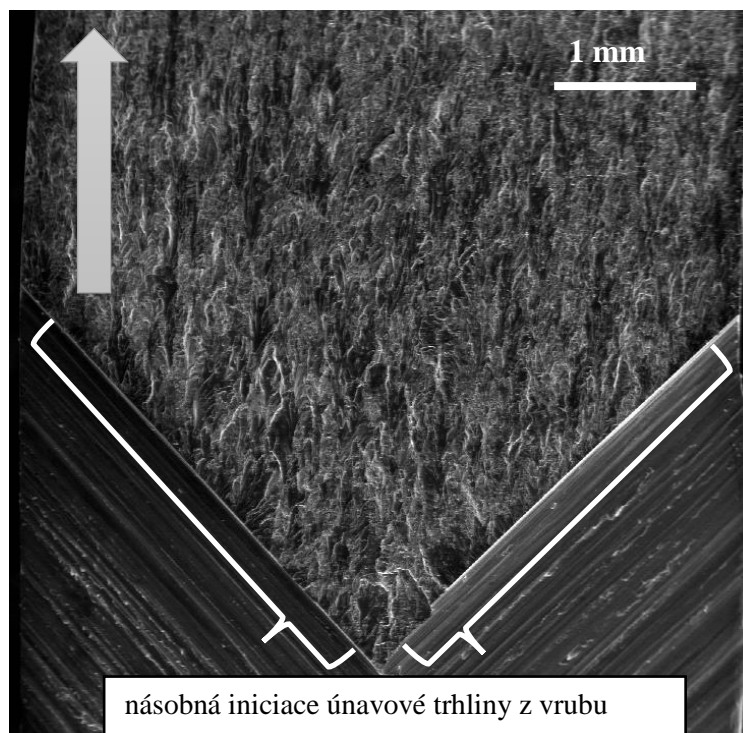
Mikromorfologie lomové plochy v oblasti reiniciace únavové trhliny ve smíšeném módu porušování I a II je zobrazena na obr. 4.11. I v této oblasti byla pozorována pole striací.

Pole striací jsou typická pro šíření únavové trhliny v módu I. Tento fakt nasvědčuje tomu, že mód I. je dominantní i krátce po reiniciaci trhliny ve smíšeném módu porušování.

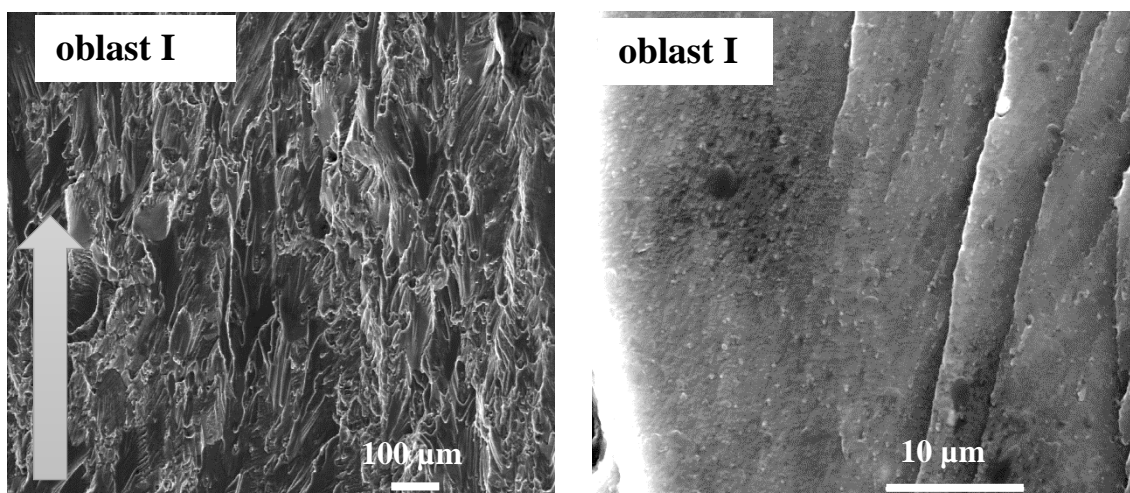
Pozorování šíření únavové trhliny ve smíšeném módu porušování odpovídá výpočtům faktoru intenzity napětí ve smíšeném módu porušování v předchozí práci autora [5]. Faktor intenzity napětí v módu I. je přibližně 10x vyšší než v módu II. Odklon směru růstu trhliny u studovaného zkušebního tělesa ve smíšeném módu je pouze 22° od směru kolmého na směr zatěžování. Z uvedeného vyplývá, že se trhlina ve sledovaném tělese velmi rychle začala šířit ve směru, ve kterém je při smíšeném módu dominantní zatěžovací mód I.

Na obr. 4.12 je vidět snímek pole striací v oblasti I+II reinicace únavové trhliny, na obr. 4.13 pak pořízený ve vysokém rozlišení. Striace jsou jasně patrné, bylo tak možné změřit jejich průměrnou rozteč 0,2  $\mu\text{m}$ . Podobné měření bylo provedeno i pro oblast A iniciace únavové trhliny v módu I. Vzdálenost striací v oblasti A byla 0,4  $\mu\text{m}$ . Rychlost šíření únavové trhliny v oblasti I a hlavně I+II je zatížena velkým rozptylem. Její přibližné hodnoty jsou pro obě oblasti srovnatelné a pohybují se mezi 0,02 a 0,05  $\mu\text{m}/\text{cyklus}$ . Větší rozteč striací než rychlost únavové trhliny v  $\mu\text{m}$  za cyklus je způsobena zřejmě vysokým výskytem hluchých cyklů v této fázi šíření únavové trhliny. Větší rozteč striací v oblasti A než v oblasti I+II je možné vysvětlit vyšší efektivní hodnotou rozkmitu faktoru intenzity napětí v této oblasti. Po změně směru zatěžování leží čelo trhliny prakticky na spojnici čepů a délka trhliny, která vstupuje do výpočtu faktoru intenzity napětí, je velmi malá.

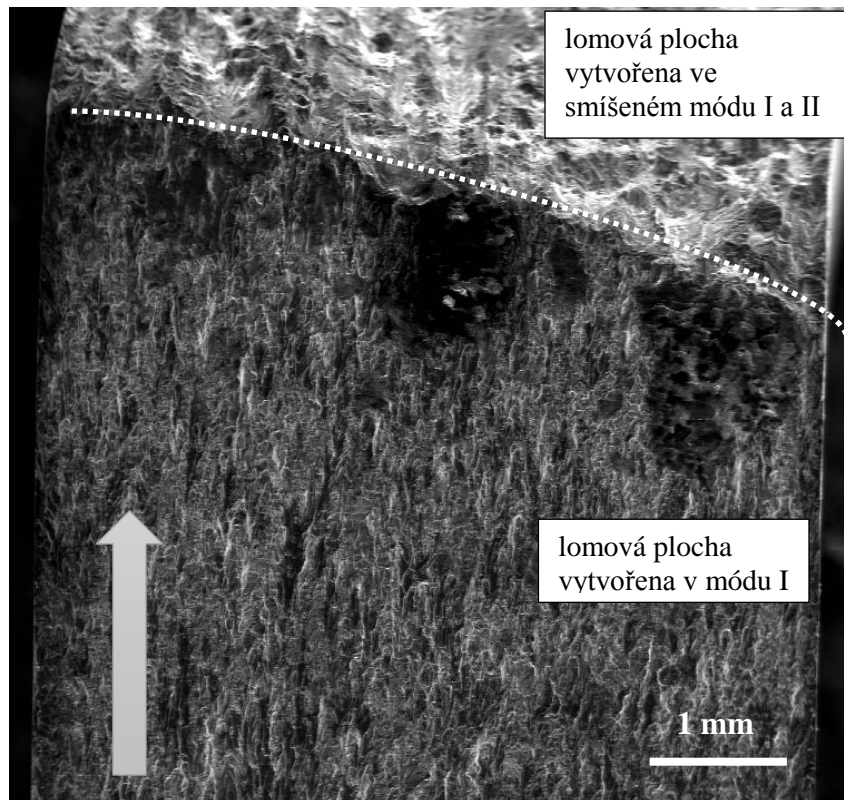
Na obr. 4.14 je znázorněna oblast konce únavové zkoušky. Z obrázku je patrný nejen tvar čela únavové trhliny v okamžiku silového dolomu, ale i okamžitá tvorba smykových okrajů po silovém přetížení. Výsledky fraktografické analýzy se potvrdily, že parametry zatěžování byly zvoleny dostatečně citlivě a během šíření únavové trhliny nedocházelo k tvorbě výrazných smykových okrajů. Experimentálně zjištěné údaje nezbytné pro modelování tak nebyly přítomností smykových okrajů ovlivněny.



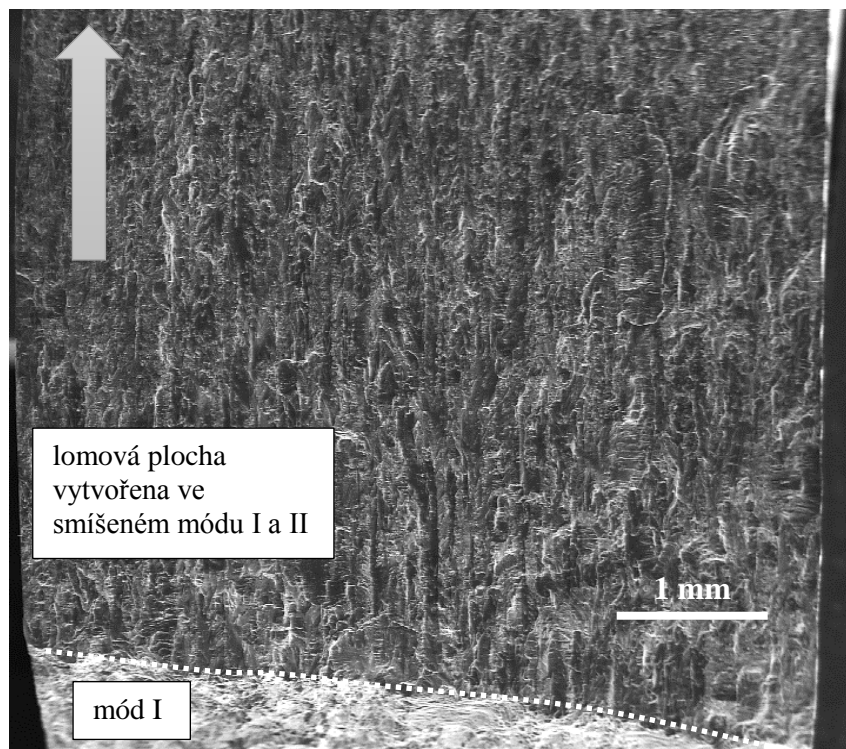
Obr. 4.7 Snímek lomové plochy u vrubu, šipka označuje směr šíření makroskopické trhliny



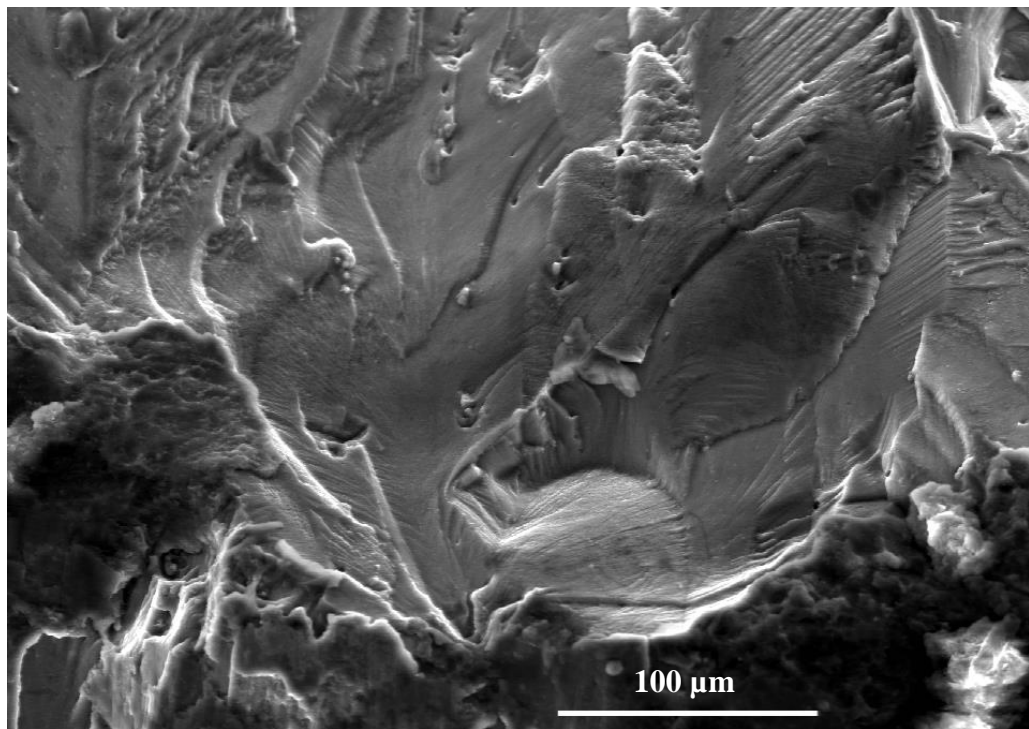
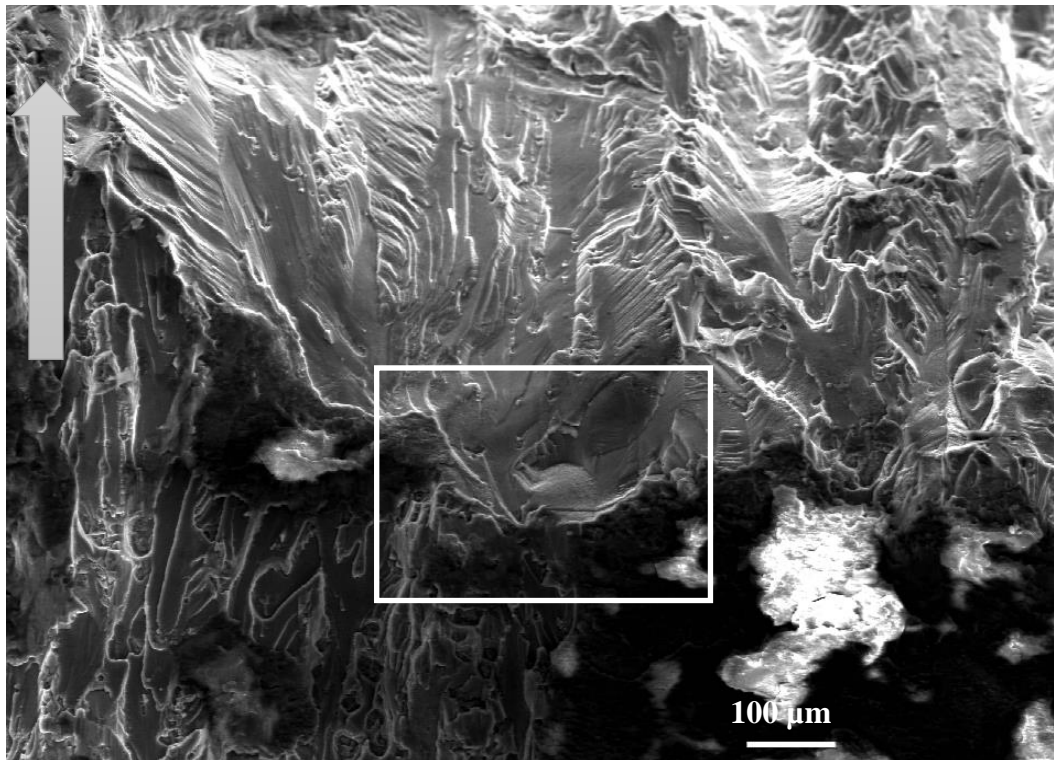
Obr. 4.8 Mikromorfologie lomu vytvořeného šířením únavové trhliny v módu I v oblasti I vyznačené na obr. 4.3.



Obr. 4.9 Pohled na rozhraní změny směru šíření únavové trhliny, šipka odpovídá směru šíření magistrální trhliny

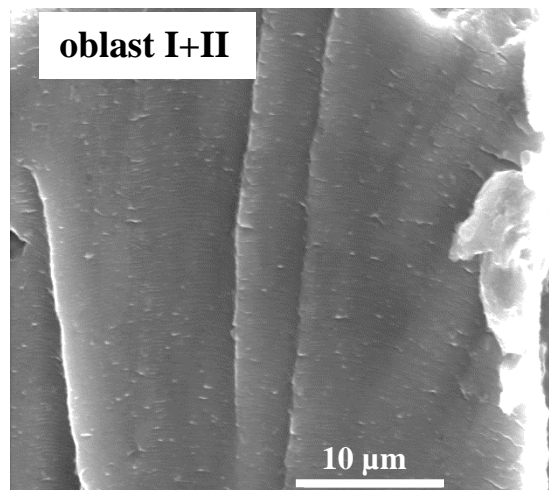
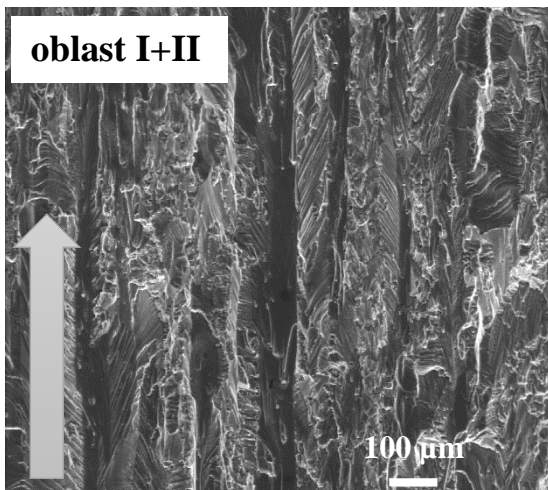


Obr. 4.10 Pohled na rozhraní změny směru šíření únavové trhliny, šipka odpovídá směru šíření magistrální trhliny

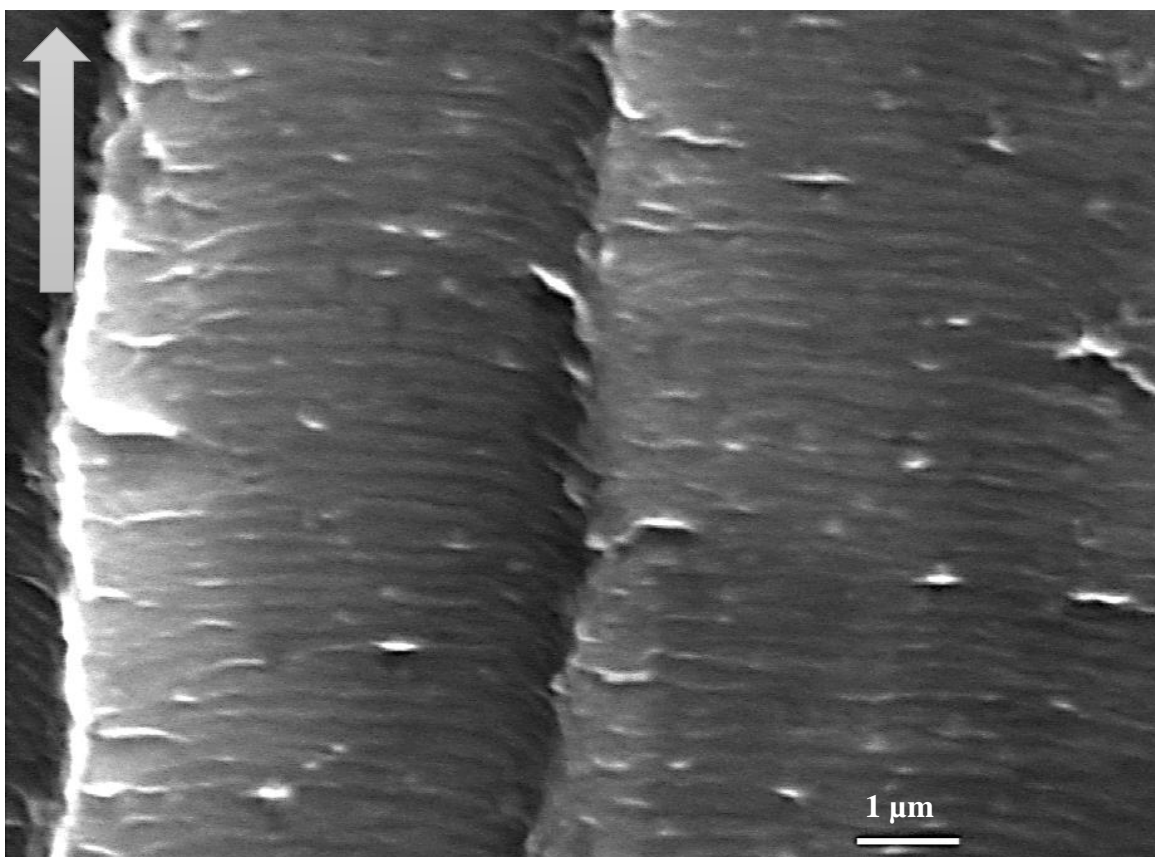


Obr. 4.11 Oblast reiniciacie únavové trhliny ve smíšeném módu porušování. Na spodním snímku je znázorněn detail místa reiniciacie únavové trhliny ve smíšeném módu I a II, šipka označuje směr šíření makroskopické trhliny

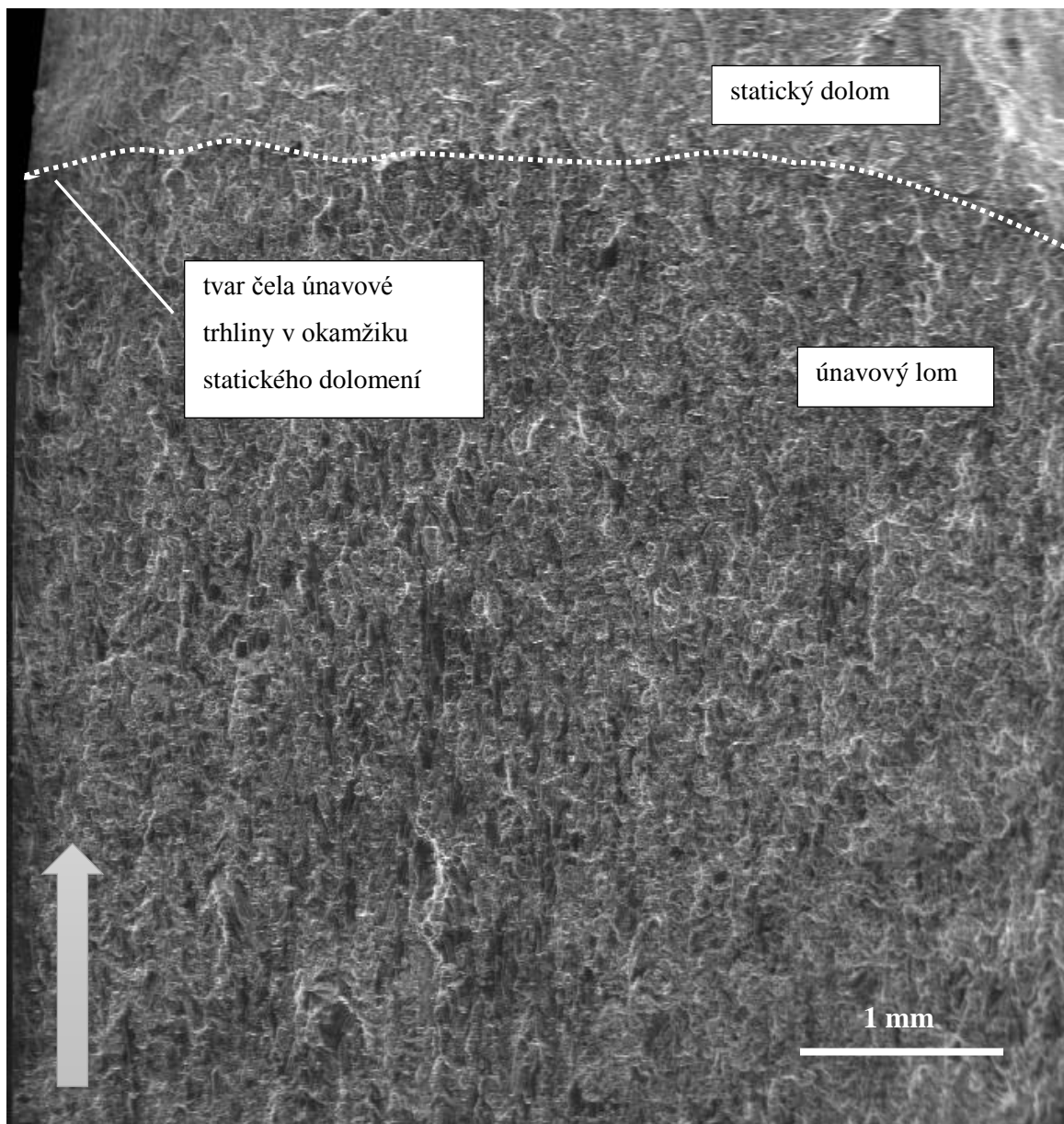




Obr. 4.12 Mikromorfologie lomu vytvořeného šířením únavové trhliny ve smíšeném módu I a II v oblasti I+II vyznačené na obr. 4.3, šipka označuje směr šíření makroskopické trhliny



Obr. 4.13 Detailní pohled na pole striací při vysokém zvětšení v oblasti I+II, šipka označuje směr šíření makroskopické trhliny



Obr. 4.14 Snímek lomové plochy na rozhraní mezi únavovým lomem ve smíšeném módu I a II a silovým dolomem, šipka označuje směr šíření makroskopické trhliny

#### 4.1.2 Měření nanotvrdosti v okolí čela únavové trhliny

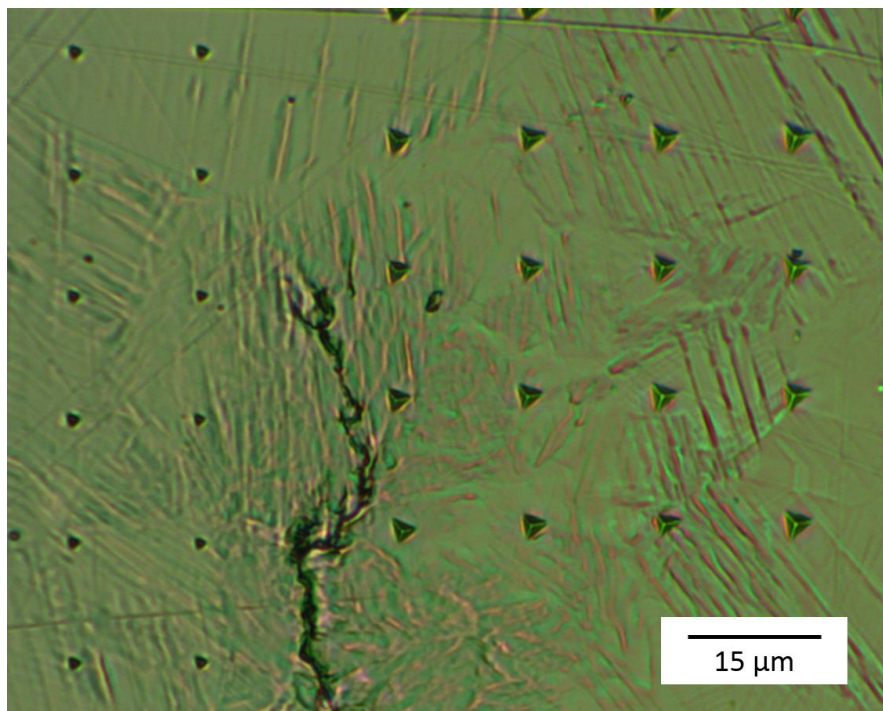
Měření nanotvrdosti bylo provedeno na CT tělese vyrobeném z korozivzdorné oceli AISI 304. Šířka tělesa  $W$  byla 30 mm a tloušťka  $B = 5$  mm. Cílem měření bylo zjistit velikost a tvar cyklicky zpevněné oblasti v okolí čela únavové trhliny a porovnat tyto charakteristiky s výsledky numerického modelu. Je známo, že vlivem cyklického zpevnění v okolí čela únavové trhliny se mění tvrdost [18]. Slitina AISI 304 byla vybrána pro experiment místo některé z hliníkových slitin pro letecký průmysl dostupných na KMAT ze tří důvodů:

1. Vzhledem k vyšší lomové houževnatosti lze cyklovat s vysokými hodnotami  $\Delta K$  pro vznik větší cyklické plastické zóny,
2. malé množství vměstků a nečistot ve slitině, které by vedly k lokálnímu navýšení nanotvrdosti,
3. snadnější příprava povrchu pro měření bez vnitřních pnutí v povrchové vrstvě.

Tento experiment byl spolu s numerickými výpočty velikosti cyklické plastické zóny publikován v [6].

#### 4.1.2.1 *Příprava tělesa s trhlinou a měření nanotvrdosti*

1. Povrch CT tělesa byl nejprve vyleštěn mechanicky a následně byla elektrolyticky vyleštěna v laboratoři KIPL na FJFI kruhová oblast s průměrem 15mm na povrchu tělesa s cílem odstranění vnitřních pnutí povrchové vrstvy vytvořené při výrobě zkušebního tělesa a mechanickém zpracování jeho povrchu. Umístění elektrolyticky vyleštěné oblasti bylo voleno tak, aby čelo ÚT délky 16 mm leželo přibližně uprostřed.
2. Na dynamickém zatěžujícím stroji INOVA ZUZ 50 byla na zkušebním CT tělese nacyklována únavová trhлина tak, aby ústí jejího čela leželo v elektrolyticky vyleštěné oblasti. Těleso bylo zatěžováno konstantním cyklem s frekvencí 15 Hz pouze v tahovém módu I. Parametry zatěžování byly  $F_{\min} = 220 \text{ N}$ ,  $F_{\max} = 2\,200 \text{ N}$ ,  $R = 0,1$ .
3. Na nanotvrdoměru CSM CPX NHT v laboratoři KMAT byla změřena nanotvrdost v okolí čela trhliny pomocí dvou měření s různým nastavením zátěžné síly nanoindentoru. V obou případech bylo měření provedeno na pravidelné síti 15x15 vtisků s roztečí 15  $\mu\text{m}$  v oblasti okolí čela únavové trhliny. Při prvním měření byla zvolena přitlačná síla 5 mN, při druhém byla použita metoda CMC (angl. continuous multi cycle) s přitlačnými silami nanoindentoru 5, 10, 20 mN (viz obr. 4.15). Pro porovnání byla změřena nanotvrdost v pravidelné síti 5x5 vtisků s roztečí 15  $\mu\text{m}$  a maximální přitlačnou silou 5 mN i v trhlinou neovlivněné oblasti zkušebního tělesa ve vzdálenosti přibližně 5 mm od čela trhliny ke stanovení nanotvrdosti neovlivněného materiálu.

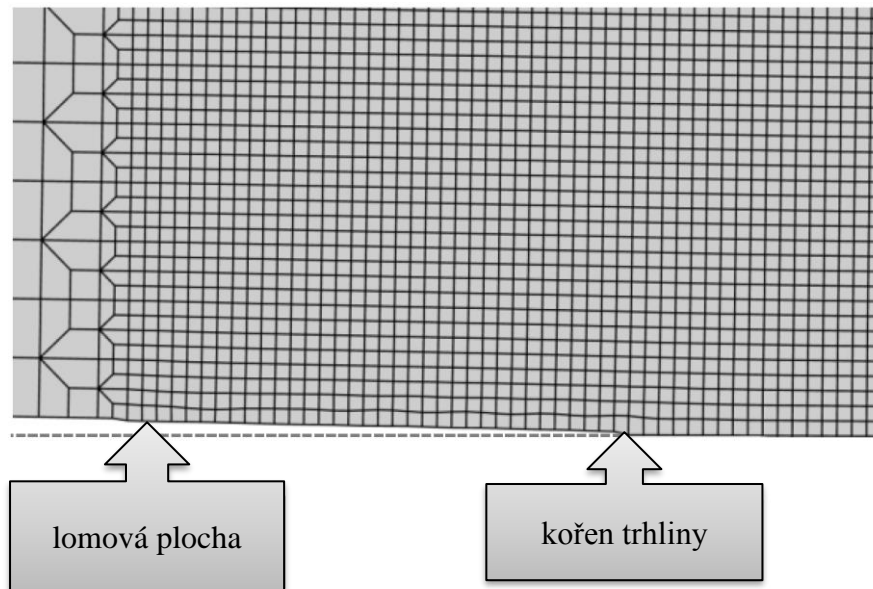


Obr. 4.15 Snímek povrchu tělesa vyrobeného z oceli AISI304 v okolí čela trhliny se sítí vtisků [6]

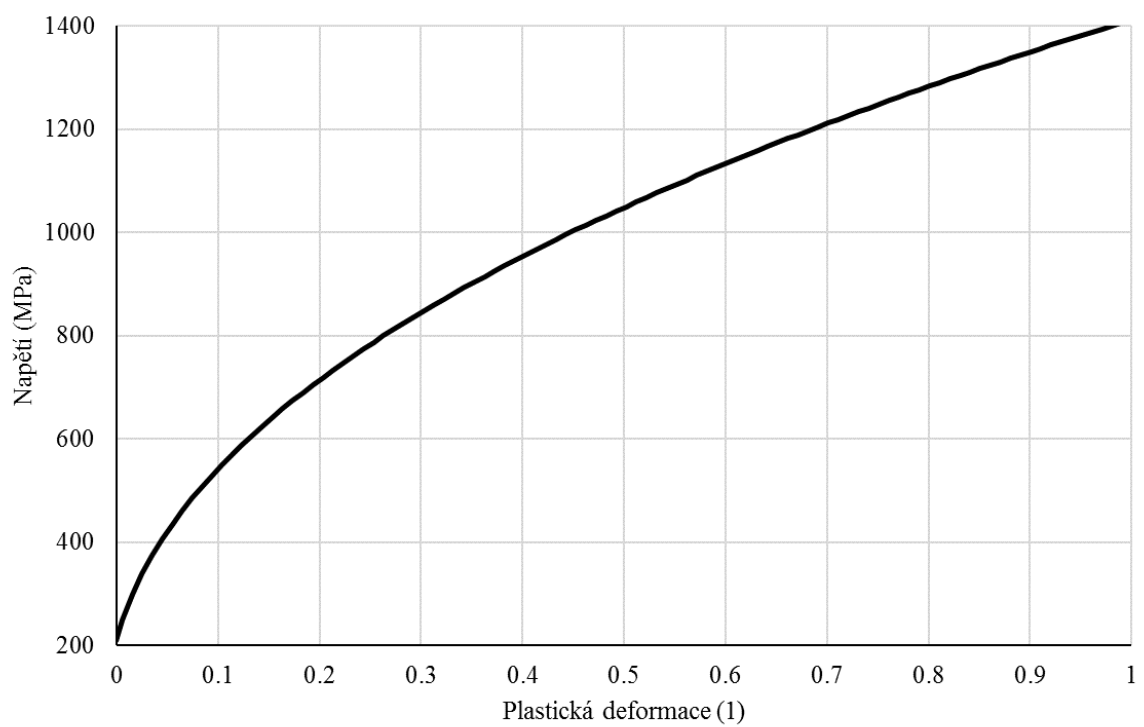
#### 4.1.2.2 Numerický výpočet

Souběžně s nanoindentačními zkouškami byly provedeny numerické výpočty s cílem odhadu velikosti plastické zóny v okolí čela únavové trhliny. K výpočtu byla použita dvourozměrná síť prvků se zjemněnou oblastí v okolí čela ÚT se čtvercovými lineárními prvky o velikosti  $20 \times 20 \mu\text{m}$ . Z důvodu symetrie zkušebního tělesa byla modelována pouze jeho polovina podle obr. 4.16. Modelové těleso bylo cyklicky zatěžováno se stejnými parametry zatěžování jako při experimentu. ÚT rostla každý druhý cyklus o jednu délku strany prvku. Růst trhliny v mříži konečných prvků byl realizován postupným uvolňováním okrajové podmínky omezení posuvu uzlů před čelem trhliny. Materiálové vlastnosti použité korozivzdorné oceli AISI 304 byly zadány takto: Youngův modul je 200 GPa, Poissonovo číslo 0,29 a mez kluzu 210 MPa. Zpevnění materiálu je dáno mocninnou závislostí napětí-plastická deformace na obr. 4.17 s mezí kluzu 210 MPa. Pro popis cyklického plastického chování materiálu byl použit isotropní model zpevnění. Simulace byly provedeny v podmínkách rovinné napjatosti i deformace.

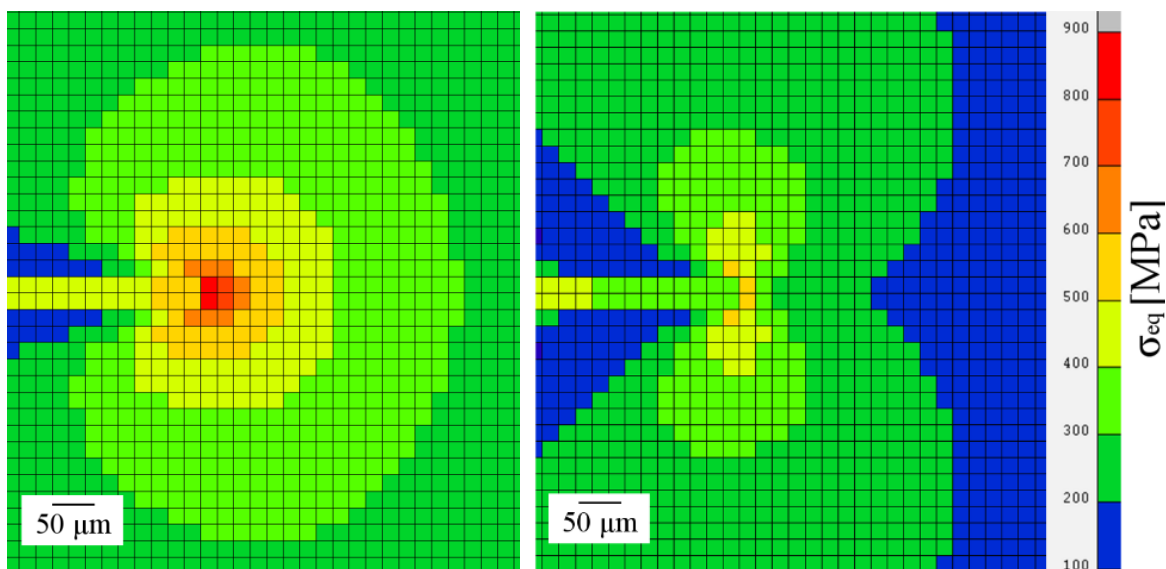
Rozložení von Misesova ekvivalentního napětí před čelem ÚT je znázorněno na obr. 4.18 pro případ rovinné napjatosti i deformace. Toto napětí, je-li rovné nebo vyšší než mez kluzu 210 MPa, přibližně vymezuje oblast, ve které je materiál plasticky deformován a kde dochází k jeho zpevnění. V případě simulace v podmínkách RN, resp. RD má plastická zóna v okolí ÚT typický oválný, resp. křídlovitý tvar.



Obr. 4.16 Ukázka poloviny dvourozměrné sítě v okolí čela ÚT



Obr. 4.17 Křivka zpevnění korozivzdorné oceli AISI 304



Obr. 4.18 Rozložení von Misesova ekvivalentního napětí  $\sigma_{eq}$  v okolí čela únavové trhliny délky 16 mm, vlevo – rovinná napjatost, vpravo – rovinná deformace [6]

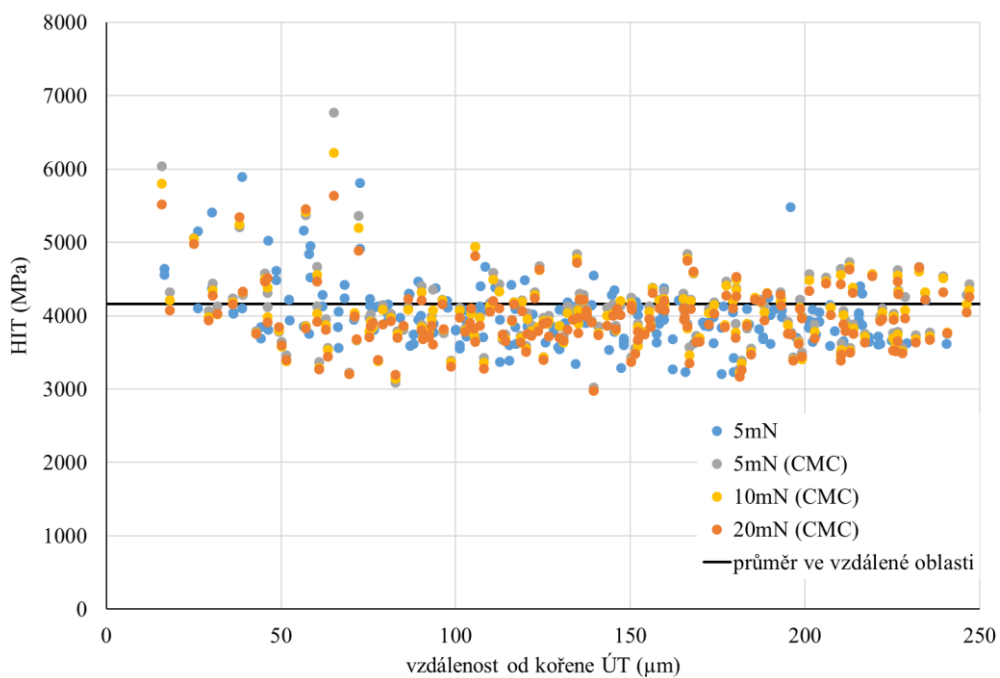
#### 4.1.2.3 Výsledky

Měření nanotvrdosti provedené s přítláčnými silami 5, 10 a 20 mN byla statisticky zpracována. Vzniklo rozložení nanotvrdosti v závislosti na vzdálenosti od čela únavové trhliny (viz obr. 4.19). Z výsledků vyplývá, že poloměr zpevněné plastické zóny ve zkušebním tělese vyrobeného z korozivzdorné oceli AISI 304 v okolí čela únavové trhliny rozeznatelný nanoindentační metodou měří přibližně 70  $\mu\text{m}$ , ačkoli viditelný přechod tvrdosti ze zpevněné do nezpevněné oblasti nebyl zaznamenán a nejde tak stanovit tvar plastické zóny na povrchu tělesa. Tento fakt dokumentují teplotní mapy tvrdosti v okolí čela ÚT na obr. 4.20.

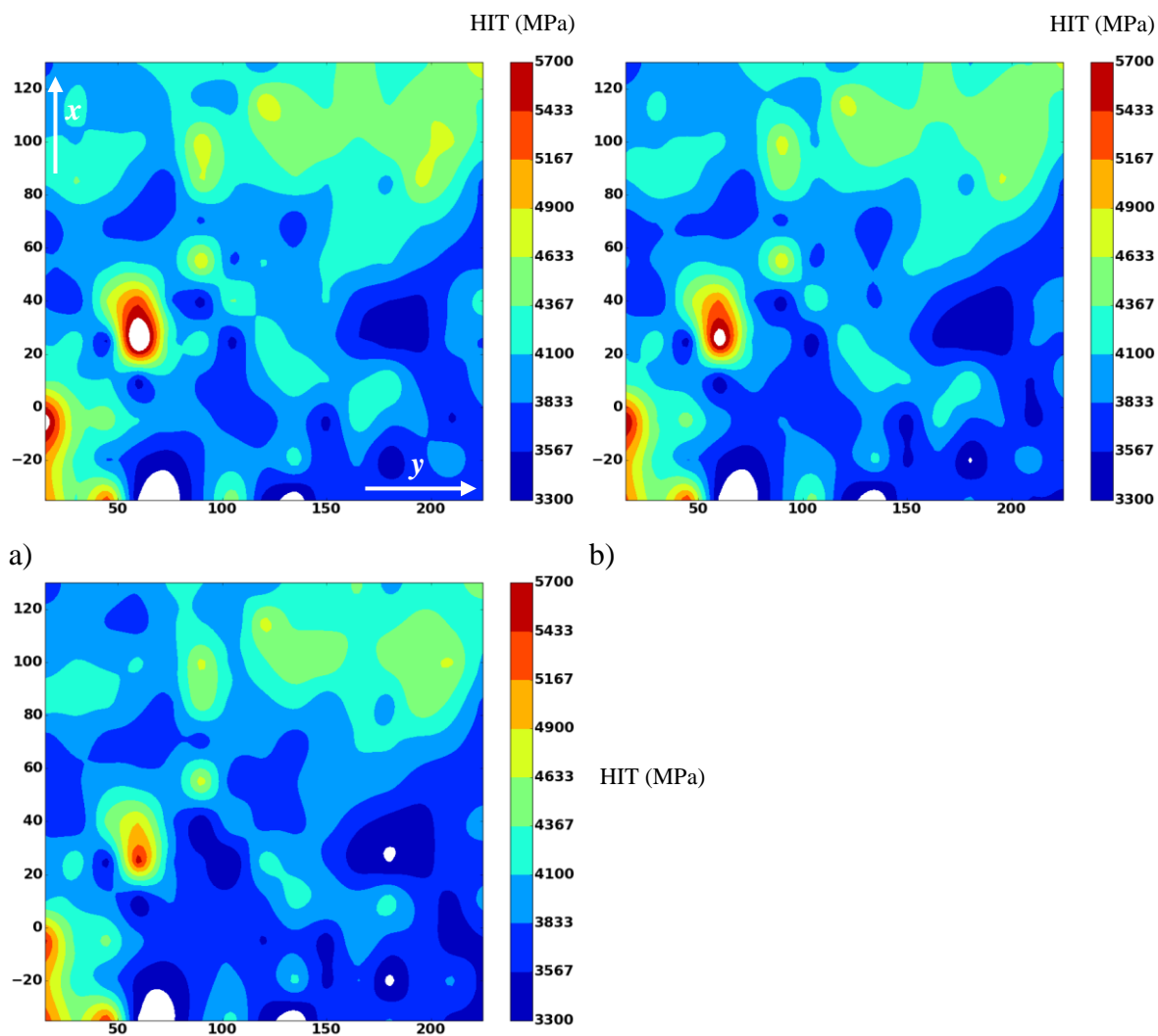
Hodnoty nanotvrdosti jsou získány z velmi tenké povrchové vrstvy, proto se očekávalo, že výsledky budou více odpovídat simulacím provedeným v podmínkách RN. V oblasti zvýšené tvrdosti do 70  $\mu\text{m}$  od čela ÚT dosahovalo ekvivalentní napětí  $\sigma_{eq}$  v podmínkách RN přes 600 MPa, v podmínkách RD klesalo  $\sigma_{eq}$  od 500 MPa k přibližně 250 MPa. Při pohledu na oblast v okolí čela ÚT s poloměrem 150  $\mu\text{m}$ , zjistíme, že nejmenší napětí  $\sigma_{eq}$  je zhruba 400 MPa v případě RN a 200 MPa v případě RD, což už je pod úrovní meze kluzu 210 MPa. Z toho vyplývá, že ačkoliv měření probíhalo ve velmi tenké vrstvě na povrchu zkušebního tělesa, výsledky simulací odpovídají stavu napjatosti mezi RD a RN. Výsledky simulací však řádově odpovídají provedenému experimentu.

Nemožnost stanovit konkrétní tvar plastické zóny je pravděpodobně způsobena zrnitostí materiálu. Na obr. 4.15 jsou vidět skluzové pásy v různých rovinách naznačující různou

orientaci zrn v materiálu v okolí čela ÚT. Je pravděpodobné, že rozdílné zpevnění materiálu v jednotlivých zrnech způsobuje vysoký rozptyl hodnot nanotvrdosti a znemožňuje detailní určení tvaru cyklické plastické zóny v okolí čela únavové trhliny pomocí nanoindentace.



Obr. 4.19 Naměřené hodnoty tvrdosti v závislosti na vzdálenosti od čela únavové trhliny délky 16 mm pro indentační síly 5, 10 a 20 mN [6]



c)  
Obr. 4.20 Mapa tvrdosti v okolí kořene únavové trhliny umístěném v bodě (0; 0) měřená metodou CMC při zatížení

- a) 5 mN,
- b) 10 mN,
- c) 20 mN,

směr  $x$  představuje směr šíření ÚT,  $y$  směr zatěžování



## **4.2 Principy modelování šíření únavové trhliny ve smíšeném módu pomocí MKP**

### **4.2.1 Síť konečných prvků**

V této práci jsou používány 2D a 3D MKP modely různých zkušebních těles pro únavové experimenty. Ve všech modelech jsou používány lineární prvky s uzly rozmístěnými v rozích. Dále je ve všech modelech obsažena zjemněná oblast pro přesné modelování plastické deformace v okolí čela únavové trhliny. Ta je vyplněna pravidelnými prvky tvaru čtverce ve 2D nebo kvádry se čtvercovou podstavou ve 3D modelu. Síť 3D modelu vychází vždy ze sítě odpovídajícího 2D modelu, která byla vytažena ve směru tloušťky tělesa. Polovina tloušťky zkušebního tělesa (vždy je simulována pouze polovina tělesa ve směru tloušťky díky jeho zrcadlové symetrii) je rozdělena několika vrstvami elementů. Rozteč jednotlivých vrstev klesá od středu tělesa směrem ke kraji, aby byly lépe vystiženy gradienty napětí u povrchu zkušebního tělesa (viz obr. 4.25 a obr. 4.26). Vzhledem k náročnosti výpočtu byly uvažovány pouze malé deformace.

Velikost prvků ve zjemněné oblasti a jejich tvar je kritický pro správné zachycení gradientů plastické deformace v okolí čela trhliny. Tato práce se řídí doporučeními z [73] a cyklická plastická zóna ve směru šíření trhliny je rozdělena alespoň 3-4 prvky. Dovolí-li to výpočetní možnosti, je vhodné pokrýt i celou statickou zónu stejně velkými prvky.

Vně zjemněné oblasti se prvky postupně zředňují, aby jejich celkový počet v modelu nebyl příliš vysoký. V [74] je doporučován maximální poměr zředování sítě 3. V této práci je při ředění sítě používán poměr délky hran sousedních prvků 2.

### **4.2.2 Kontakt lící trhliny**

Během cyklického zatěžování zkušebních těles dochází za kořenem trhliny ke kontaktu jejich lící. V MKP programech jsou implementovány kontaktní algoritmy pro simulaci vzájemného kontaktu oddělených sítí nebo jejich částí. Kontaktní algoritmus se stará o to, aby nedošlo ke vzájemné penetraci částí sítě. V této práci je používán kontaktní algoritmus typu „Node-To-Segment“ implementovaný v MSC.Marc [75].

Klíčovými parametry kontaktního algoritmu je správné nastavení tolerančního pásma definovaného pomocí parametrů vychýlení (angl. bias) a tolerance. Tyto parametry ovlivňují vzdálenost uzlu od povrchu, při které začnou být na uzel uplatňovány kontaktní podmínky,

aby bylo zabráněno jeho penetraci povrchem. V této práci byly používány přednastavené hodnoty parametru vychýlení 0 a tolerance 0,95.

### 4.2.3 Algoritmus simulace růstu únavové trhliny

Použitý software pro MKP výpočty MSC.Marc umožňuje několik způsobů růstu trhliny v tělese během výpočtu [75] :

1. oddělením sítě po hraně prvku
2. oddělením sítě napříč prvkem
3. nahrazení původní sítě novou sítí (angl. remeshing) s respektováním nově vytvořených lící trhliny

Způsoby dělení sítě 2. a 3. předpokládají smazání starých a vytvoření nových prvků a pomocí algoritmu, který nemá uživatel programu možnost ovlivnit, mění síť v kritické oblasti okolí čela trhliny. Přenos výsledků ze staré sítě na novou je zdrojem nepřesností výpočtu a zhoršení numerické konvergence řešení.

Nejvhodnější se tedy ukázala 1. metoda dělení sítě po hraně prvku. Předem byla vytvořena zjemněná oblast s pravidelnou sítí konečných prvků. Modelový růst trhliny je dán rozpojováním sítě během výpočtu pomocí doprogramované subrutiny USPLIT\_MESH v jazyce Fortran [76]. Nejmenší možný přírůstek trhliny je roven jedné velikosti strany elementu.

Zatížení bylo realizováno po přírůstcích s 20 přírůstky na jeden zátěžný cyklus. Cyklické zatěžování konstantním cyklem bylo rovnoměrně rozděleno na celkem 20 časových inkrementů. Maximální zátěžné síly bylo tak dosaženo v přírůstcích 10, 30, 50 atd. Délka trhliny se zvětšovala o jednu délku strany prvku každý druhý cyklus, tj. na začátku 41, 81, 121, ... přírůstku. Každé dva cykly mezi poskoky čela trhliny jsou v této práci nazývány aktivní a hluchý cyklus. Aktivní cyklus začíná modelovým poskokem trhliny. Ten je následován hluchým cyklem, na jehož začátku a konci jsou zaznamenány hodnoty plastické deformační energie ve všech integračních bodech prvků kolem čela trhliny. Změna hodnot energie za hluchý cyklus je uložena do souboru pro následnou analýzu. Tento způsob výpočtu se zařazením aktivních a hluchých cyklů je doporučován v [26].

Implementace algoritmu pro postup trhliny v síti konečných prvků se u 2D a 3D modelů liší v následujících detailech.

#### 4.2.3.1 *Postup trhliny v 2D síti konečných prvků*

MSC.MARC má pro modelování růstu trhliny v pravidelné 2D síti předpřipraveny procedury. V grafickém prostředí MENTAT lze definovat trhlinu pomocí již rozdělené sítě se dvěma lícemi a uzlu označujícího její kořen. Dále se stanoví směr růstu, velikost přírůstku délky trhliny, metoda rozdělení sítě a okamžik, kdy k tomuto rozdělení dojde. V autorem doprogramovaných subrutinách je zajišťován sběr dat pro výpis výsledků. V této práci jsou prezentovány výsledky, kterých bylo dosaženo při růstu trhliny po hranách konečných prvků.

#### 4.2.3.2 *Postup trhliny v 3D síti konečných prvků*

Šíření trhliny ve 3D síti bylo realizováno pomocí autorem doprogramované subrutiny USPLIT\_MESH, která zajišťovala rozpojování uzlů metodou dělení v uzlu podél prostorového čela trhliny. Při některých simulacích bylo prostorové čelo zakřivené podle skutečného zakřivení čela trhliny v tělese po únavové zkoušce. Vytvořený algoritmus umožňuje modelovat nejenom trhlinu s rovným čelem, ale i s čelem zakřiveným podle reality. Omezení představuje pouze umístění uzlů předem vytvořené sítě. Tato metoda s využitím doprogramované je připravena i pro simulace šíření únavové trhliny, v nichž se bude v průběhu výpočtu měnit zakřivení čela.

#### 4.2.4 **Určení plastické zóny a množství disipované plastické energie**

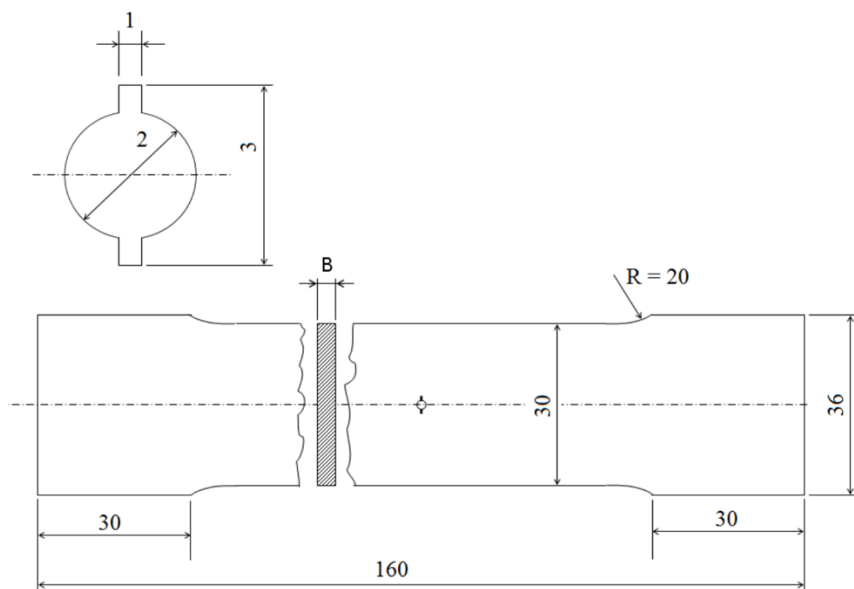
Výchozí veličinou pro odhad rychlosti šíření únavové trhliny získané z MKP simulací je dle odst. 2.2.2 množství disipované plastické energie za cyklus  $dW / dN$ . Předpokladem modelů v této práci je to, že k plastickému přizpůsobení dojde u trhliny určité délky již při prvním cyklu. To bylo potvrzeno výpočtem pro použitý model kinematického zpevnění a je to i ve shodě s [38]. Díky tomu není nutné simulovat všechny zátěžné cykly odpovídající experimentu, ale střídat aktivní cykly (s poskokem trhliny) a hluché (bez poskoku). Získaná změna plastické deformace v hluchém cyklu není tedy ovlivněna počtem zařazení hluchých cyklů.

Všechny elementy v okolí čela trhliny, ve kterých se zvýšila během hluchého cyklu plastická deformace, tvoří cyklickou plastickou zónu. Plastická deformační energie není však v plastické zóně uložena rovnoměrně. Drtivá většina energie je uvolněna pouze ve zlomku oblasti. Ukázalo se, že pouhé sledování nenulové hodnoty změny plastické deformace může vzhledem k numerickým nepřesnostem vést k nepravidelnému tvaru okraje zóny. Proto by bylo výhodné zavést minimální prahovou hodnotu změny plastické

deformace pro detekci zóny. V této práci se vychází z alternativního přístupu, kdy se sleduje množství disipované energie v plastické zóně a její tvar a velikost určuje oblast, ve které se uvolní většina energie. V práci [77] se zjistilo, že klasické analytické odhady velikosti plastické zóny odpovídají přibližně oblasti, kde se disipuje 90 % plastické energie. Pokud nebude uvedeno jinak, budou tedy prezentovány výsledky pro tuto tzv. 90 % plastickou zónu.

### 4.3 Simulace šíření únavové trhliny v módu I

Simulace šíření únavové trhliny v módu I byly provedeny pro ploché zkušební těleso s centrálním otvorem (obr. 4.21). Odpovídající vysoko-cyklové únavové zkoušky nebyly předmětem této disertační práce, ale byly převzaty z práce [78]. Zkušební tělesa měla tři různé tloušťky 0,5, 1 a 5 mm. Po ukončení zkoušek byly z lomové plochy stanoveny tvary čel trhliny při její délce na povrchu 5,55 mm, což odpovídalo hodnotě rozkmitu faktoru intenzity napětí  $\Delta K = 8 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$ . Simulace prezentované v tomto odstavci mají za účel stanovit vliv velikosti konečného prvku v procesní zóně trhliny na množství spočítané disipované energie, porovnat výsledky 2D a 3D modelu v případě nejjednoduššího typu zatěžování tahovým módem I a porovnat výsledky 3D modelu v případě modelování rovného čela trhliny a reálně zakřiveného podle výsledků z únavových zkoušek.

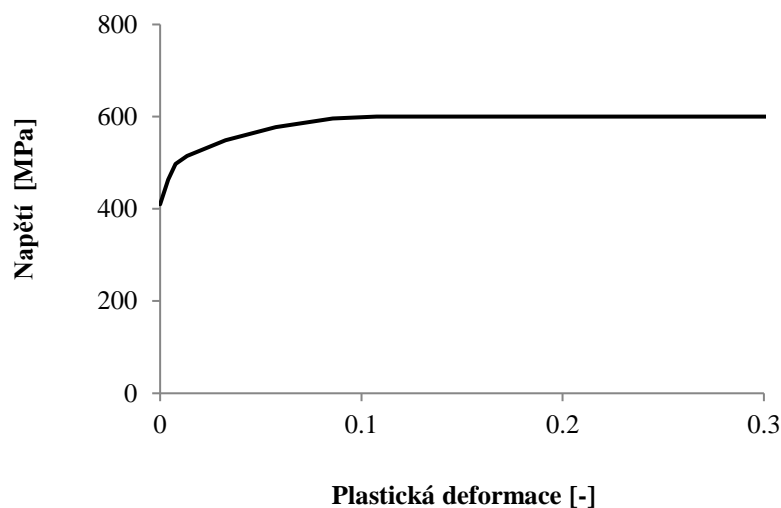


Obr. 4.21 Geometrie plochého tělesa pro VCÚ zkoušky [78]

#### 4.3.1 Materiál zkušebního tělesa

Zkušební těleso ze [78] bylo vyrobené z duralové slitiny D16CT1 (AlCu4Mg1) používané v leteckém průmyslu. Youngův modul pružnosti slitiny je 67 906 MPa, Poissonovo číslo 0,34. Zpevnování materiálu je dáno křivkou napětí-deformace na obr. 4.22 s mezí kluzu 410 MPa. Tato křivka byla stanovena z tahové zkoušky tělesa, které bylo předtím předcyklováno, a u kterého se předpokládalo ustálení cyklických charakteristik.

Cyklické plastické chování materiálu se řídí kinematickým modelem zpevnění. Tyto charakteristiky budou použity v následujícím textu, nebude-li uvedeno jinak.

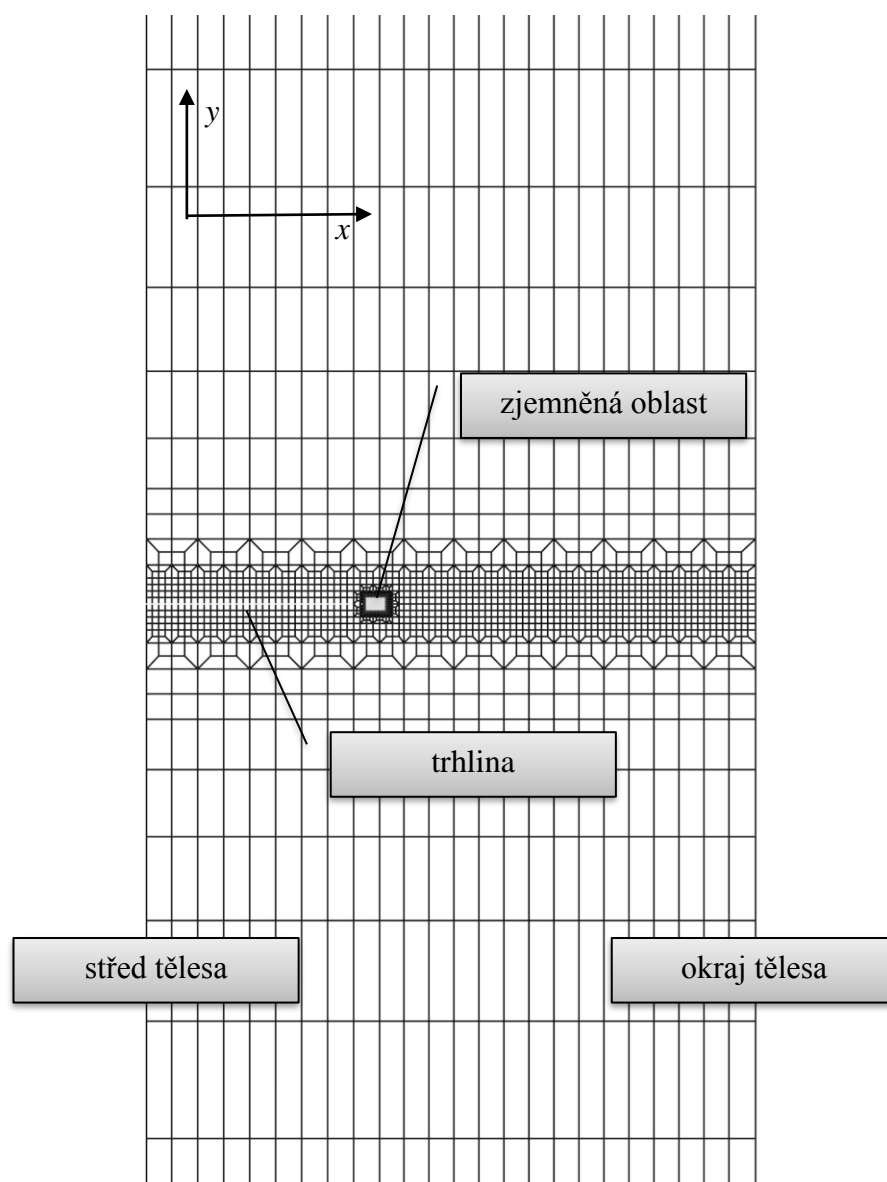


Obr. 4.22 Zpevnění hliníkové slitiny D16CT1 [78]

### 4.3.2 Síť konečných prvků

#### 4.3.2.1 2D model

Z důvodu dvojnásobné symetrie zkušební tělesa byla simulována pouze jeho jedna čtvrtina zkušební tělesa. Síť konečných prvků v okolí zjemněné oblasti je zobrazena na obr. 4.23. Zjemněná oblast má rozměr 0,45x0,3 mm a začíná přibližně ve vzdálenosti 5,45 mm od středu tělesa, tak aby bylo možno simulovat růst únavové trhliny od přibližně této délky. Velikost prvku ve zjemněné oblasti byla volena postupně 5; 2,5 a 1,125  $\mu\text{m}$ , tomu odpovídá počet prvků ve zjemněné oblasti 5 400, 21 600 a 86 400. Počet prvků vně zjemněné oblasti je přibližně 19 500.



Obr. 4.23 Výřez 2D sítě konečných prvků plochého zkušebního tělesa s centrálním otvorem – pohled na ploché zkušební těleso ze směru osy  $z$

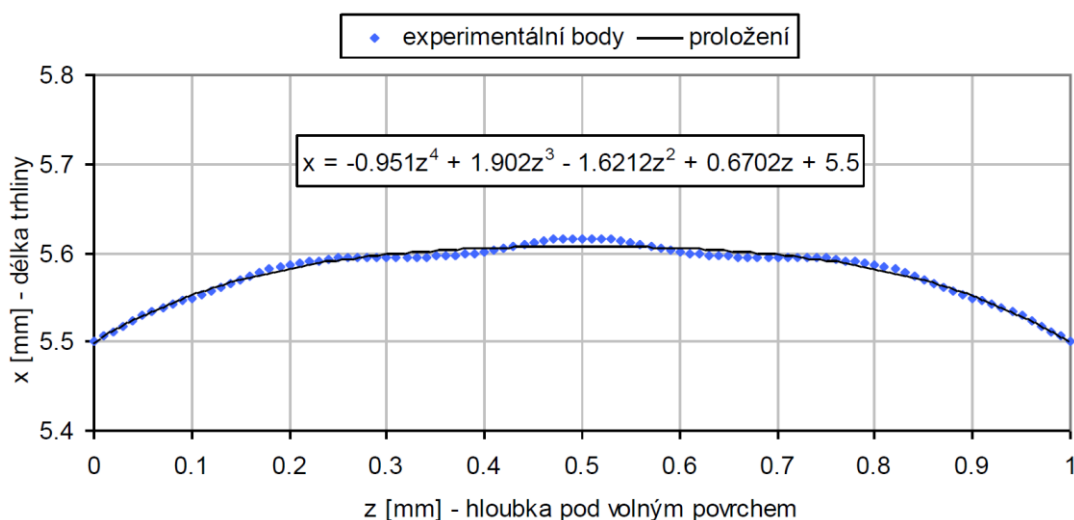
#### 4.3.2.2 *3D model*

3D síť konečných prvků vychází z 2D sítě. Po tloušťce ve směru osy  $z$  je těleso rozděleno 7 vrstvami elementů. Tloušťka vrstvy lineárně klesá směrem od středu k povrchu zkušebního tělesa. Tloušťky vrstev pro všechny tři modelované tloušťky těles jsou uvedeny v tab. 2.

Tab. 2 Tloušťky vrstev elementů v 3D MKP síti pro simulované tloušťky zkušebních těles

| tloušťka tělesa $B$<br>(mm) | číslo vrstvy, tloušťka vrstvy (mm) |        |        |        |        |        |              |
|-----------------------------|------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------------|
|                             | 1<br>(povrch)                      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7<br>(střed) |
| 0,5                         | 0,0089                             | 0,0179 | 0,0268 | 0,0357 | 0,0446 | 0,0536 | 0,0625       |
| 1                           | 0,0179                             | 0,0357 | 0,0536 | 0,0714 | 0,0893 | 0,1071 | 0,125        |
| 5                           | 0,0893                             | 0,1786 | 0,2678 | 0,3572 | 0,4464 | 0,5357 | 0,625        |

Síť konečných prvků byla pro každou tloušťku tělesa vytvořena pro šíření trhliny jak s rovným tak i se zakřiveným čelem (obr. 4.26). Tvary zakřivení čela trhliny byly převzaty z práce [78]. V [78] byly tvary čela trhliny s délkou přibližně 5,55 mm také aproximovány polynomickými funkcemi (např. obr. 4.24), které jsou přehledně zobrazeny v tab. 3.



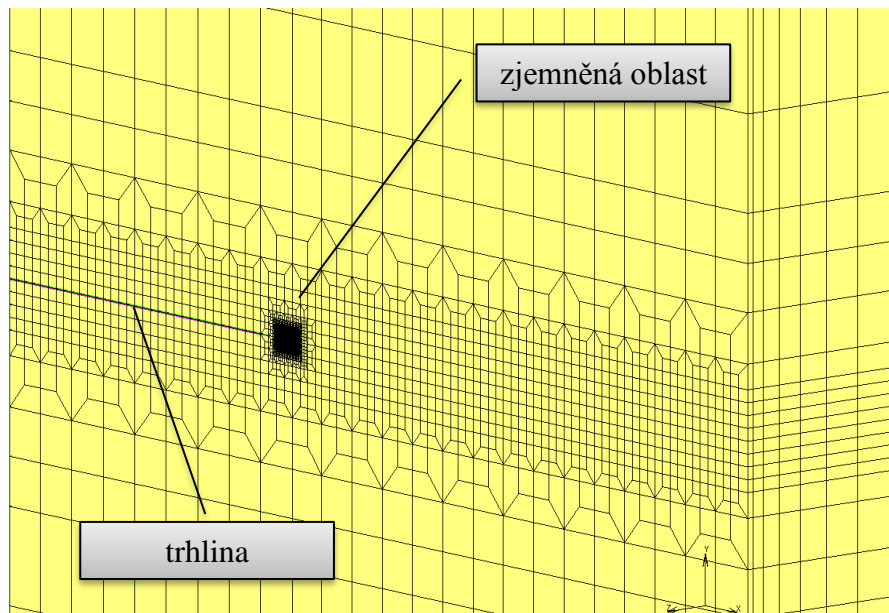
Obr. 4.24 Tvar sjednoceného čela pro všechna tělesa o tloušťce 1 mm a proložení polynomem 4. stupně [78], kde  $z$  označuje hloubku pod povrchem

Tab. 3 Polynomy definující tvar čela trhliny,  $z$  – hloubka pod povrchem [78]

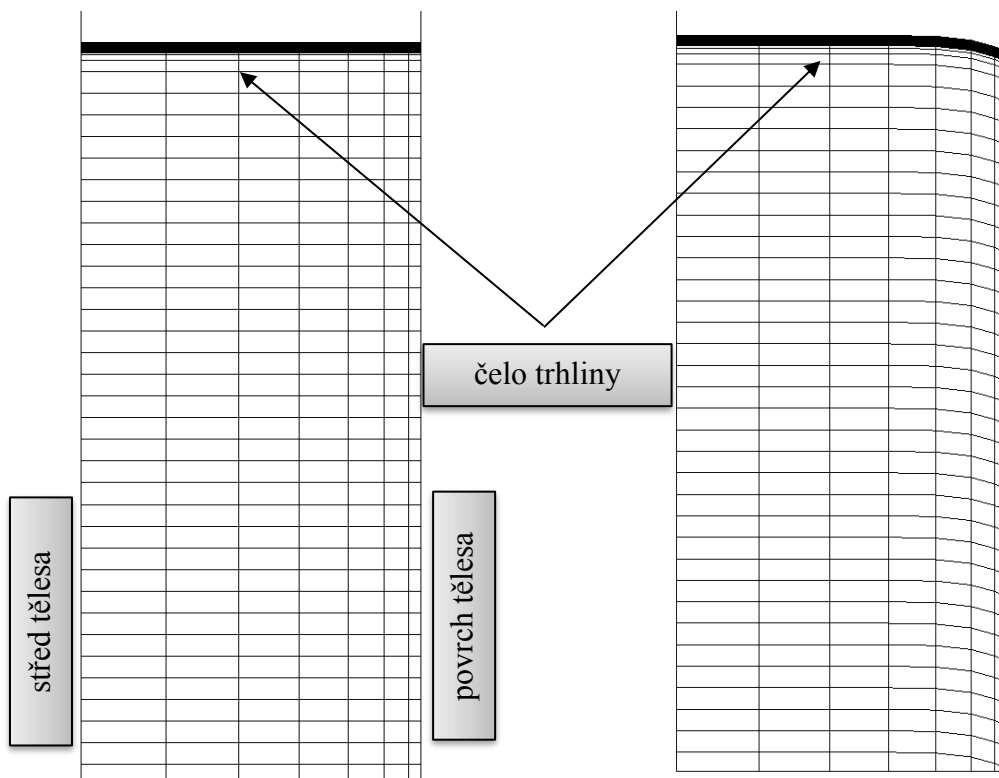
| tloušťka<br>(mm) | funkční předpis pro křivku čela (mm)                                      |
|------------------|---|
| 0,5              | $x = -11,121z^4 + 11,121z^3 - 4,3973z^2 + 0,8085z + 5,5$                  |
| 1                | $x = -0,951z^4 + 1,902z^3 - 1,6212z^2 + 0,6702z + 5,5$                    |
| 5                | $x = -0,1848z^4 + 0,5913z^3 - 0,7813z^2 + 0,4933z + 5,5$<br>pro $z < 0,8$ |



$$x = 5,62166 \text{ pro } z > 0,8$$



Obr. 4.25 3D síť konečných prvků ve středové oblasti tělesa, celkový rozměr MKP sítě je 160x15 mm s rozměrem ve směru z 0,25; 0,5 a 2,5 mm (polovina tloušťky)



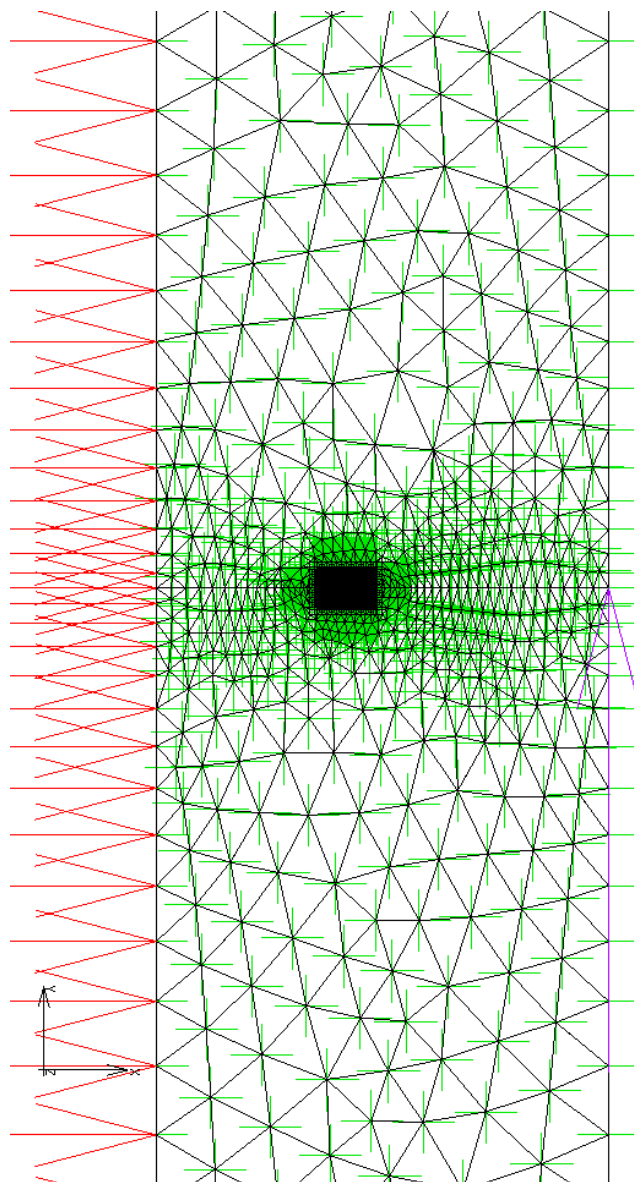
Obr. 4.26 3D síť konečných prvků, těleso tloušťky 5 mm – rovné čelo trhliny (vlevo), zakřivené čelo trhliny (vpravo), pohled ze směru y

### 4.3.3 Okrajové podmínky zatěžování

Zkušební tělesa byla v MKP modelu zatížena cyklickým tahovým napětím na horních a spodních hranách, resp. stěnách v případě 2D, resp. 3D síť. Parametry zatěžování byly  $R = 0,3$  a  $\Delta\sigma_y = 56$  MPa. 2D výpočty byly provedeny za předpokladu rovinné deformace.

### 4.3.4 Okrajové podmínky symetrie

Okrajové podmínky symetrie byly v MKP modelu simulovány zamezením příslušných posuvů uzlů ležících v rovině symetrie (viz obr. 4.27). Při zatěžování v tahovém rovinném módu I by bylo možné využít i zrcadlovou symetrii tělesa v rovině trhliny a modelovat tak pouze osminu tělesa. Z důvodu ověření algoritmu růstu únavové trhliny pomocí rozpojování uzlů nebyla však tato symetrie využita.

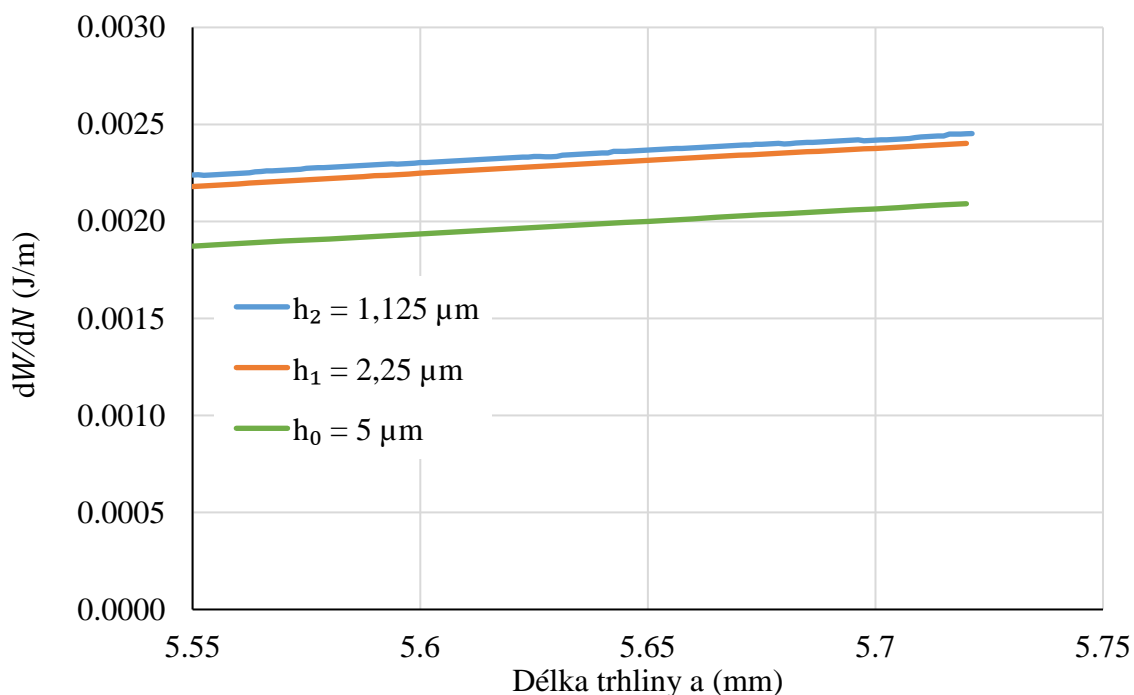


Obr. 4.27 Znáznornění okrajových podmínek v programu MSC.MARC. Svislé červené šipky reprezentují zrcadlovou symetrii zkušebního tělesa podle jeho středové osy, zelené šipky kolmé k rovině zobrazení zrcadlovou symetrii zkušebního tělesa (použité pouze u 3D modelu) podle jeho tloušťky a fialová vodorovná šipka uchycení tělesa v jednom uzlu ve směru y, tak aby se model nemohl pohybovat jako tuhý celek

#### 4.3.5 Vliv velikosti prvku ve zjemněné oblasti na hodnoty disipované energie $dW/dN$

Za účelem zjištění vlivu velikosti prvku ve zjemněné oblasti na výsledné hodnoty  $dW/dN$  byly provedeny 2D výpočty s velikostí prvku ve zjemněné oblasti  $h = 5; 2,25$  a  $1,125 \mu\text{m}$ . Trhlina se šířila z počáteční délky  $a_0 = 5,475 \text{ mm}$  do maximální délky  $a_{max} =$

5,725 mm. V závislosti na velikosti parametru  $h$  bylo simulováno 50, 100 a 200 poskoků délky trhliny. Výsledky jsou zobrazeny na obr. 4.28. Se snižující se velikostí prvku se sice energie nepatrně zvyšuje, ale rozdíl mezi výsledky pro prvek velikost 2,25 a 1,125  $\mu\text{m}$  nepřesahuje 3 %. Dá se tedy předpokládat, že další zjemňování sítě by nepřineslo výraznější zpřesnění. S rostoucí délkou trhliny rostou hodnoty  $dW / dN$ , protože dochází k většímu rozvoji plastické deformace rozprostřené na větším počtu prvků. U jinak stejného výpočtu v podmínkách rovinné napjatosti s větší cyklickou plastickou zónou se dá očekávat dosažení přijatelné konvergence řešení dokonce s většími prvky.

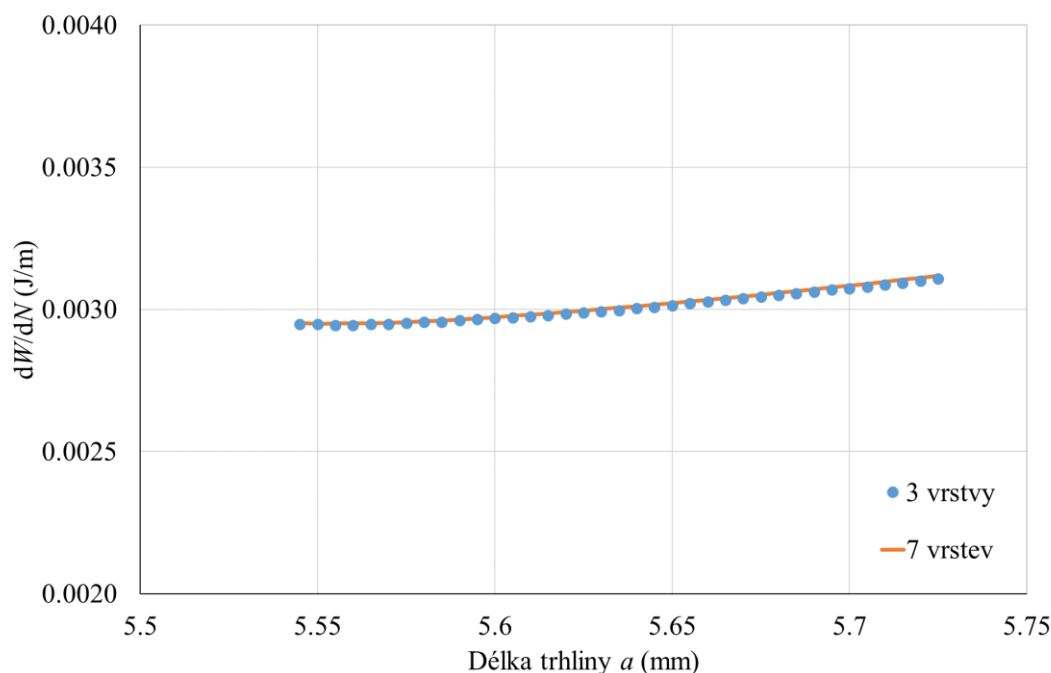


Obr. 4.28 Vliv velikosti prvku ve zjemněné oblasti na hodnoty disipované energie  $dW / dN$ , 2D model s podmínkou RD

#### 4.3.6 Vliv hustoty sítě ve směru tloušťky tělesa na hodnoty disipované energie $dW/dN$ ve 3D modelu

Pro určení vlivu hustoty sítě ve směru tloušťky tělesa byla provedena 3D simulace šíření únavové trhliny s rovným čelem v tělese celkové tloušťky  $B = 1$  mm. Polovina tloušťky zkušebního tělesa  $B$  byla rozdělena pouze třemi vrstvami elementů s jinak stejnými parametry sítě i zatěžování jako v ostatních výpočtech popsanych v tomto odstavci. Tloušťky vrstev směrem od středu tělesa byly: 0,2321; 0,1786 a 0,0893 mm. Výsledky této simulace byly porovnány s výpočtem se sedmi vrstvami elementů (viz tab. 2). Porovnání výsledků je na obr. 4.29. Disipovaná plastická energie  $dW / dN$  se téměř nezměnila, bylo-

li použito tří nebo sedmi vrstev v polovině tloušťky tělesa. Hodnota  $dW / dN$  byla vyhodnocována podle odst. 4.2.4.



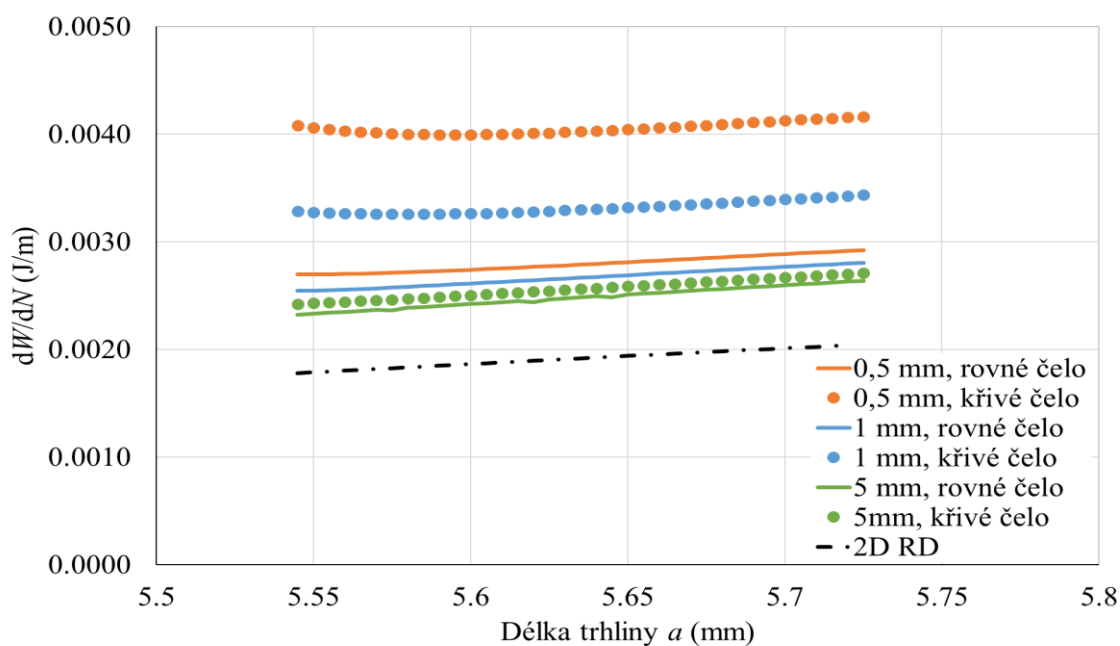
Obr. 4.29 Vliv počtu vrstev v tloušťce  $B / 2$  na  $dW / dN$  v 3D modelu šíření ÚT v módu I

### 4.3.7 3D simulace šíření únavové trhliny se zakřiveným čelem

#### 4.3.7.1 Stanovení disipované plastické energie

Simulace provedené v tomto odstavci byly provedeny podle únavových zkoušek, při kterých bylo kromě rychlosti šíření únavové trhliny měřeno i zakřivení jejího čela [78]. Tato data byla využita ke studiu chování 3D modelu šíření ÚT. Ve shodě s experimenty byly provedeny simulace třech tlouštěk tělesa 0,5; 1 a 5 mm. Pro každou tloušťku byla provedena simulace šíření ÚT jak s rovným tak zakřiveným čelem. Matematický zápis zakřivení čela byl uveden již v tab. 3.

Na obr. 4.30 je zobrazena závislost veličiny  $dW / dN$  na délce trhliny pro simulace se zakřiveným i rovným čelem. Pro porovnání je v grafu uvedena i závislost pro 2D simulaci v podmínkách rovinné deformace.

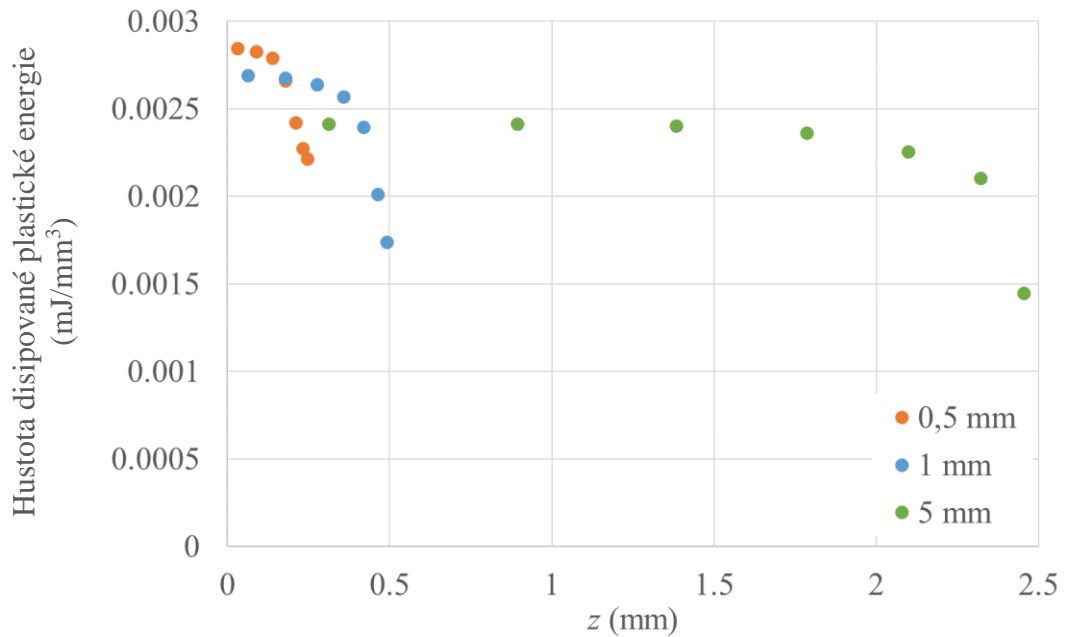


Obr. 4.30 Závislost  $dW / dN$  v reverzní plastické zóně na délce trhliny pro různé tloušťky tělesa, 3D simulace provedené s rovným a zakřiveným čelem

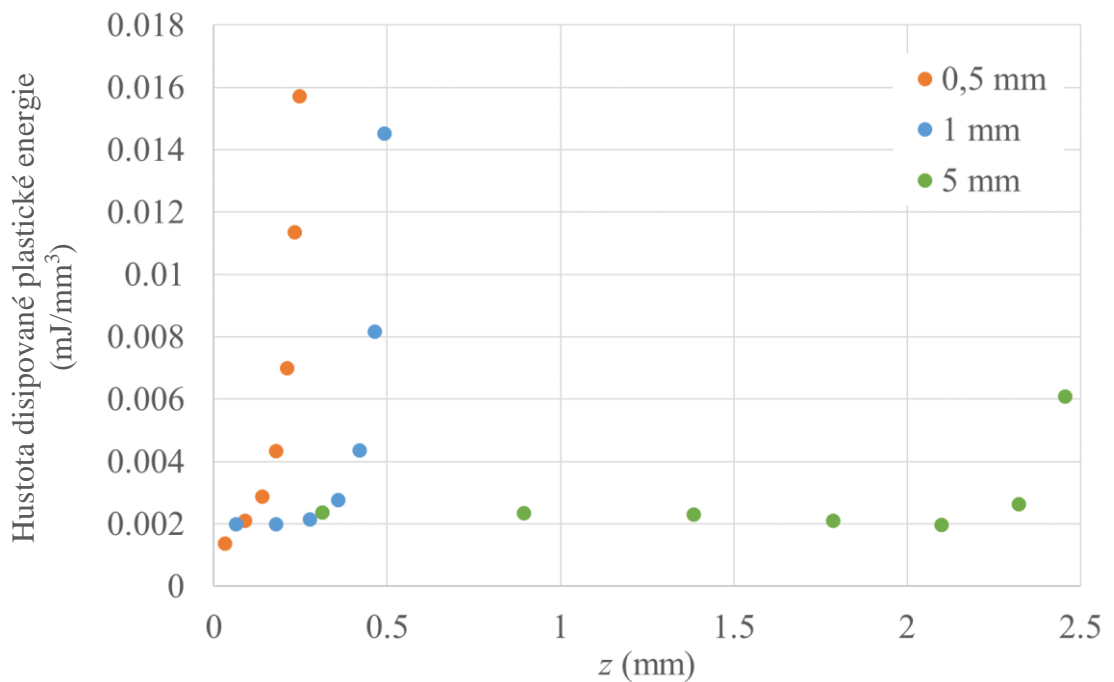
Výsledky ukazují, že s rostoucí tloušťkou tělesa klesá  $dW / dN$  a postupně se její hodnota přibližuje k hodnotě energie vypočítané pomocí dvourozměrné simulace v podmínkách RD. Množství disipované plastické energie za cyklus se také liší v případě, je-li uvažováno rovné nebo zakřivené čelo trhliny.  $dW / dN$  u těles se zakřiveným čelem trhliny také klesá s rostoucí tloušťkou tělesa, je však vždy vyšší než v případě těles s rovným čelem trhliny. Tento rozdíl mezi energií za cyklus u tělesa se zakřiveným a rovným čelem se snižuje s jeho rostoucí tloušťkou. V případě tělesa tloušťky 0,5 mm vychází  $dW / dN$  se zakřiveným čelem o 32% více než s rovným čelem, je-li tloušťka tělesa 1 mm, je tento rozdíl 17% a nakonec u nejtlustšího tělesa je to jen necelé 3%.

Na obr. 4.31, resp. obr. 4.32 jsou zobrazeny průběhy hustoty disipované plastické energie podél čela trhliny pro rovné, resp. křivé čelo trhliny. Každý bod představuje hodnotu sledované veličiny pro jednu vrstvu elementů vyneseny v jejím těžišti ve směru tloušťky tělesa  $z$ . V případě tělesa s rovným čelem hustota disipované plastické energie za cyklus směrem k jeho povrchu klesá. U tělesa se zakřiveným čelem hodnota disipované plastické energie směrem k jeho povrchu naopak výrazně roste. Při tloušťce 5 mm jsou tyto trendy vidět až v povrchové vrstvě přibližně 0,5 mm, ve vnitřní části tělesa je hustota energie přibližně konstantní a zhruba stejná pro oba případy tvaru čela trhliny. Tělesa tloušťky 0,5 a

1 mm mají výraznou hustoty energie na tloušťce ve všech vrstvách. Všimněme si rozdílných měřítek svislé osy obou grafů.



Obr. 4.31 Průběh hustoty disipované plastické energie podél čela trhliny délky  $a = 5,55$  mm pro různé tloušťky tělesa, 3D simulace s rovným čelem,  $z = 0$  je střed tělesa



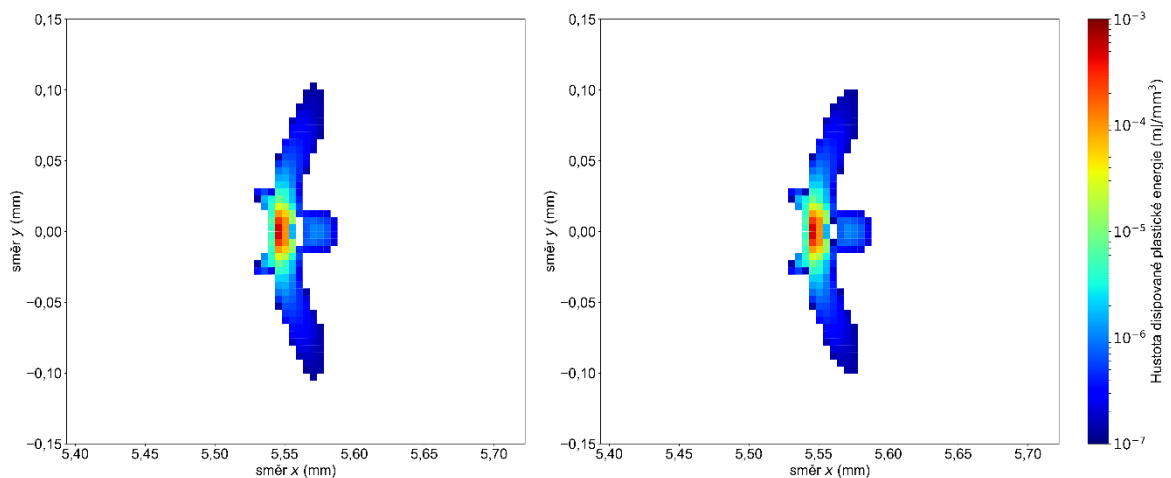
Obr. 4.32 Průběh hustoty disipované plastické energie podél čela trhliny délky  $a = 5,55$  mm pro různé tloušťky tělesa, 3D simulace se zakřiveným čelem,  $z = 0$  je střed tělesa

#### 4.3.7.2 Tvary cyklické plastické zóny

Na obr. 4.33, resp. na obr. 4.34 jsou zobrazeny cyklické plastické zóny ve středové, resp. povrchové vrstvě elementů pro trhlinu s rovným a zakřiveným čelem. Jednotlivé barvy na obrázku odpovídají logaritmickým hodnotám disipované energie. Nejvíce energie je disipováno v první dvojici elementů před čelem trhliny.

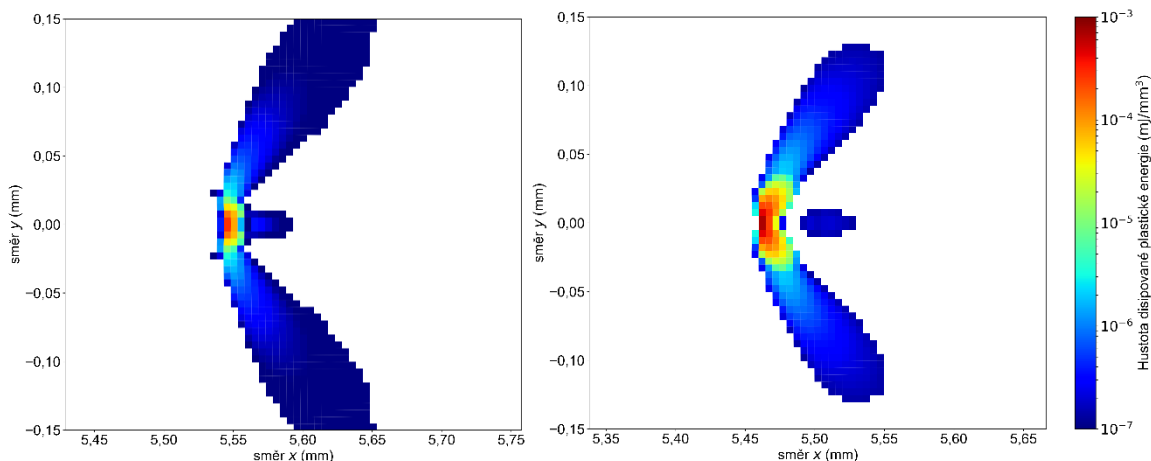
Plastická zóna ve střední části tělesa pro zakřivené čelo je nepatrně menší než pro čelo rovné, přičemž obě zóny svou velikostí a tvarem dobře odpovídají 2D řešení za podmínky rovinné deformace. V případě povrchové vrstvy na obr. 4.34 je plastická zóna u tělesa s rovným čelem trhliny opticky větší, avšak v této zóně je disipováno pouze 42% energie ve srovnání s tělesem se zakřiveným čelem ÚT. Při detailnějším pohledu na obr. 4.34 je vidět výrazně menší oblast s velmi vysokými hodnotami hustoty disipované plastické energie v blízkosti kořene trhliny v případě tělesa s rovným čelem trhliny.

Na obr. 4.35 je pro srovnání zobrazena plastická zóna z dvourozměrné simulace s podmínkou RD.

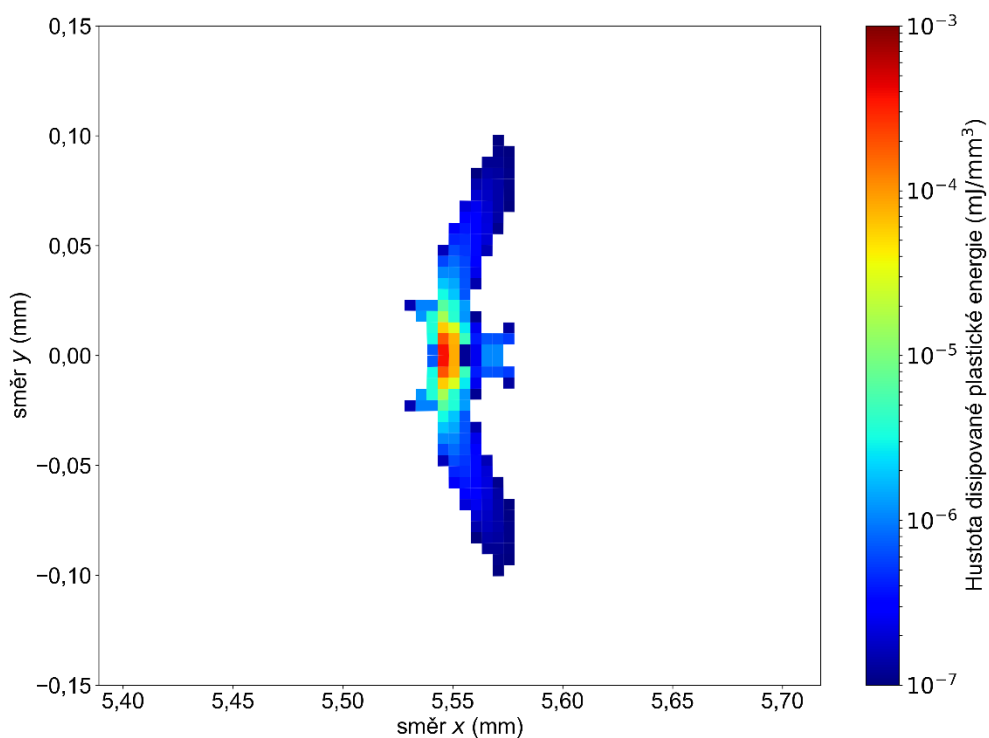


Obr. 4.33 Porovnání hustoty disipované plastické energie za cyklus v okolí čela únavové trhliny ve střední rovině tělesa ( $z = 0$ ) pro rovné (vlevo) a zakřivené (vpravo) čelo trhliny délky 5,55 mm v tělese tloušťky  $B = 5$  mm, 3D model





Obr. 4.34 Porovnání hustoty disipované plastické energie za cyklus v okolí čela únavové trhliny v povrchové vrstvě tělesa ( $z = 0$ ) pro rovné (vlevo) a zakřivené (vpravo) čelo trhliny délky 5,55 mm v tělese tloušťky  $B = 5$  mm, 3D model



Obr. 4.35 Rozložení hustoty disipované plastické energie za cyklus v okolí čela únavové trhliny, 2D simulace, podmínky rovinné deformace, délka trhliny  $a = 5,55$  mm

#### 4.3.8 Diskuze výsledků simulací šíření únavové trhliny v módu I

Dvourozměrné výpočty disipované plastické energie v reverzní zóně před čelem ÚT uvedené na obr. 4.28 ukazují postupnou konvergenci výsledků se zmenšující se velikostí prvku. Je-li ve zmíněné simulaci volena velikost prvku 5  $\mu\text{m}$ , výsledná hodnota  $dW / dN$  je o 16 % nižší než v případě velikosti prvku 2,5  $\mu\text{m}$ . Při dalším zjemnění prvku z 2,5 na 1,125  $\mu\text{m}$  dojde k dalšímu zvýšení hodnoty  $dW / dN$  pouze o necelá 3 %. Další zjemňování velikosti prvku by vedlo k pouze nepatrnému zpřesnění výpočtů, ale také k neúměrnému prodloužení nejen samotného výpočtového času, ale také k větším nárokům na úložný prostor a složitějšímu následnému zpracování dat. Pro odhad dostatečně malé velikosti prvku ve zjemněné oblasti je v literatuře [73, 79] při numerických výpočtech zavírání trhliny uvedeno následující doporučení. Monotónní plastická zóna by měla obsahovat alespoň 3-4 prvky. Velikost monotónní plastické zóny je přitom možné odhadnout pomocí Irwinova vzorce

$$R_p = \frac{1}{2\alpha\pi} \left( \frac{K_{max}}{R_p 0.2} \right)^2, \quad (30)$$

kde  $\alpha = 1$ , resp. 3 pro RN, resp. RD. Pro konfiguraci použitou v tomto odstavci vychází velikost monotónní plastické zóny přibližně 42  $\mu\text{m}$ . Prvky o velikost 5, 2,5 a 1,125 jsou v této plastické zóně obsazeny přibližně 8.5x, 17x a 34x. Podle výsledků tohoto odstavce je pro dobrou konvergenci řešení nutné volit přibližně 4x nižší velikost prvku, než uvádí doporučení z literatury [73, 79]. Při použití obdobného vzorce pro odhad velikosti reverzní plastické zóny při šíření únavové trhliny [18]

$$r_p = \frac{1}{2\alpha\pi} \left( \frac{\Delta K}{2R_p 0.2} \right)^2,$$

vychází velikost reverzní plastické zóny 5  $\mu\text{m}$ , což odpovídá velikosti největšího prvku, dvojnásobku středního prvku a čtyřnásobku nejmenšího použitého prvku. Dobré přesnosti výsledků je přitom dosaženo s velikostí prvku rovnou polovině analytického odhadu velikosti reverzní plastické zóny. Nesoulad s doporučením z literatury může být způsobený tím, že pro výpočty v této práci je použit zpevňující materiál s parametrem asymetrie cyklu 0,3 na rozdíl od citovaných prací, kde je použit ideálně plastický materiál s parametrem asymetrie cyklu 0.

Dle obr. 4.29 dosahuje trojrozměrný výpočet dobré konvergence i v případě použití pouze tří prvků ve směru tloušťky tělesa. Aby bylo možné lépe zachytit chování sledovaných

veličin v blízkosti vnějšího okraje tělesa, bude v dalších simulacích používáno sedm elementů podél poloviny tloušťky zkušebního tělesa.

Při modelování růstu únavové trhliny s reálně zakřiveným čelem podle experimentálních dat z [78] byl zjištěn důležitý vliv toho zakřivení zvláště u tenčích zkušebních těles (viz obr. 4.30). Pro těleso tloušťky 5 mm je rozdíl v množství disipované energie za cyklus mezi výpočtem se zakřiveným a rovným čelem pouze 3 %, avšak stále o 30 % vyšší než v případě dvourozměrného výpočtu v podmínkách RD. Tyto výsledky odpovídají známému problému závislosti lomové houževnatosti  $K_c$  na tloušťce tělesa. Lomové houževnatosti ve stavu rovinné deformace  $K_{Ic}$  je dosaženo, až v případě je-li velikost monotónní plastické zóny alespoň 50x menší než příslušný geometrický parametr  $B$ ,  $a$  a  $(W-a)$  [18]. Podmínku pro minimální tloušťku tělesa lze tedy vyjádřit vztahem

$$B \geq 2.5 \left( \frac{K_{Ic}}{R_p 0.2} \right)^2 .$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu hodnotu  $K_{Ic} = 37 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$  nalezenou pro ekvivalentní materiál v [80], musí být tloušťka tělesa pro splnění podmínky stavu rovinné deformace  $B \geq 20 \text{ mm}$ . Vychází-li pro daný typ materiálu přibližně 15x menší velikost monotónní plastické zóny, než je tloušťka zkušebního tělesa, pak při výpočtu množství disipované plastické energie za cyklus není třeba provádět simulace šíření ÚT se zakřiveným čelem.

Hodnoty  $dW / dN$  sice neodpovídají simulaci šíření ÚT v podmínkách rovinné deformace, ale tvary reverzních plastických zón ve středové i povrchové vrstvě elementů (viz obr. 4.33 a obr. 4.34) odpovídají spíše tvaru plastické zóny v podmínkách rovinné deformace. Všechny tyto výsledky byly získány pro materiál z odst. 4.3.1 použitý i v následujících simulacích v odst. 4.4.

## 4.4 Simulace šíření únavové trhliny ve smíšeném proporcionálním módu zatěžování I a II

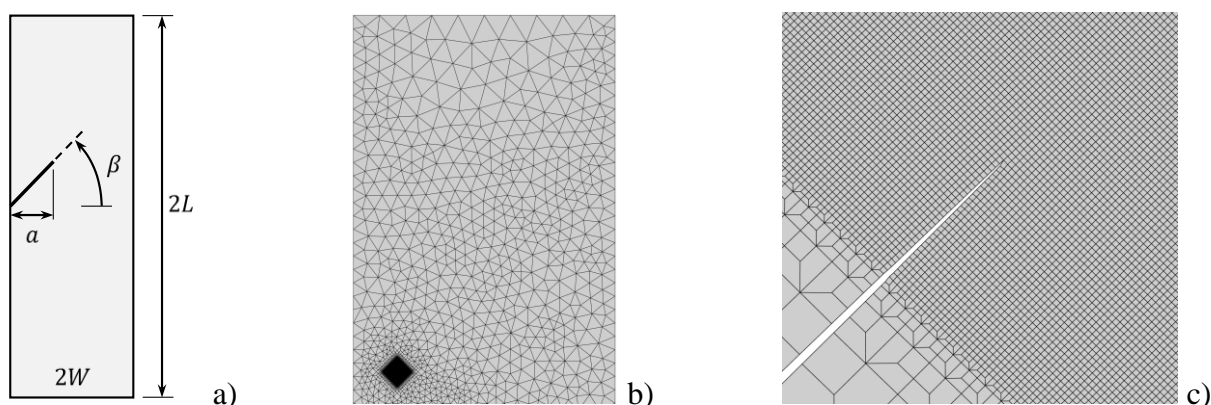
### 4.4.1 Tvary plastické zóny pro různé úrovně smíšeného módu zatěžování

#### 4.4.1.1 MKP model, podmínky zatěžování a materiálová data

Šíření únavové trhliny bylo sledováno v plochém zkušebním tělese s poměrem stran  $W/L = 1/3$ ,  $L = 30$  mm a tloušťkou  $B = 1$  mm. Skloněná trhlina vystupuje z povrchu tělesa v polovině jeho výšky. Pro určení plastické zóny a disipované plastické energie  $dW/dN$  při různých poměrech  $\Delta K_I/\Delta K_{II}$  byly vytvořeny čtyři modely s různým sklonem směru růstu únavové trhliny  $\beta = 0, 15, 30$  a  $45$  stupňů (obr. 4.37). Pro všechny úhly byly provedeny dvourozměrné výpočty ve stavu rovinné napjatosti i deformace.

Síť konečných prvků byla ve zjemněné oblasti tvořena lineárními čtyřúhelníkovými prvky, zbytek sítě byl tvořen lineárními trojúhelníkovými prvky. Velikost prvků ve zjemněné oblasti byla  $12 \times 12 \mu\text{m}$ . Prvky ve zjemněné oblasti byly vždy orientovány podél směru růstu trhliny (obr. 4.36c).

Zkušební těleso bylo v MKP modelu zatíženo cyklickým tahovým napětím na jeho horních a spodních hranách. Parametry zatěžování byly  $R = 0,1$  a  $\Delta\sigma_y = 135$  MPa. Algoritmus růstu únavové trhliny odpovídal postupu popsanému v odst. 4.2.3.1. Pro popis cyklického plastického chování materiálu hliníkové slitiny D16CT1 byl použit kinematický model zpevnění (obr. 4.22). Jeho parametry jsou popsány v odst. 4.3.1.



Obr. 4.36 Geometrie zkušebního tělesa (a) a síť konečných prvků – pohled na horní polovinu modelu (b) a pohled na zjemněnou oblast v okolí kořene únavové trhliny (c)

#### 4.4.1.2 Korelace disipované energie a klasických lomově-mechanických parametrů

Množství disipované plastické energie v reverzní plastické zóně  $dW/dN$  je podle [26] korelované v tahovém módu I šíření s rozkmitem faktoru intenzity napětí  $\Delta K_I$ , šíří-li se trhlina v parisovském režimu. Pro porovnání  $dW/dN$  při různých úrovních smíšeného módu zatěžování bylo nejdříve nutné stanovit ekvivalentní lomově-mechanickou veličinu ve smíšeném módu. Byly zkoumány tyto veličiny: J-Integrál,  $\Delta K_{eq}^{Rich}$  definované vztahem (15) a  $\Delta K_{eq}^{Tan}$  definované vztahem (16). Dále byla pro každou simulovanou úroveň smíšeného módu a každou zkoumanou lomově-mechanickou veličinu stanovena taková délka  $\dot{U}T$ , aby byl tento lomově-mechanický parametr rovný předem zvolené konstantně. Když trhlina dosáhla stanovené délky, byla simulace šíření  $\dot{U}T$  zastavena a byla odečtena velikost reverzní plastické zóny a množství disipované plastické energie v reverzní plastické zóně  $dW/dN$ .

Simulace na dvourozměrné síti s únavovou trhlinou šířící se v předem definovaných směrech  $\beta = 0, 15, 30$  a  $45$  stupňů byly provedeny vždy v podmínkách RD i RN pro tři případy: na čele  $\dot{U}T$  byl stejný rozkmit J-Integrálu, konstantní  $\Delta K_{ev}^{Rich}$  a konstantní  $\Delta K_{ev}^{Tan}$ . Hodnoty J-Integrálu byly určeny přímo v MKP modelu, hodnoty  $\Delta K_I$  a  $\Delta K_{II}$  potřebné pro výpočet  $\Delta K_{ev}^{Rich}$  a  $\Delta K_{ev}^{Tan}$  byly určeny z empirických vztahů pro výpočet faktoru intenzity napětí pro danou geometrii tělesa [81].

Výsledky simulací pro konstantní hodnotu J-Integrálu jsou uvedeny v tab. 4. Z výsledků pro konstantní rozkmit J-Integrálu vyplývá, že se shodně pro podmínky rovinné deformace i napjatosti se s rostoucím úhlem šíření  $\dot{U}T$  a úrovně smíšeného módu zatěžování  $\Phi$  zvyšuje hodnota  $dW/dN$ . Plocha plastické zóny  $A_{pz}$  trhliny skloněné  $45^\circ$  je dvakrát větší než v případě tahového módu I,  $dW/dN$  je třikrát větší. J-Integrál proto není vhodný kandidát pro predikci velikosti plastické zóny a disipované plastické energie ve smíšeném módu zatěžování pro studovaný materiál.

Výsledky simulací pro konstantní  $\Delta K_{ev}^{Rich}$  a  $\Delta K_{ev}^{Tan}$  jsou uvedeny v tab. 5. Má-li únavová trhlina pro odlišné směry šíření stejnou hodnotu  $\Delta K_{ev}^{Rich}$ , zůstává se zvyšujícím se úhlem  $\beta$  téměř konstantní plocha plastické zóny  $A_{pz}$  a  $dW/dN$  jen mírně roste.  $\Delta K_{ev}^{Tan}$  se pro predikci velikosti plastické zóny a disipované plastické energie ve smíšeném módu zatěžování pro studovaný materiál nehodí, protože obě veličiny prudce rostou se zvyšujícím se úhlem sklonu šíření  $\dot{U}T$ . Kritérium  $\Delta K_{ev}^{Rich}$  je tedy nejvýhodnější.

Podmínky rovinné deformace a napjatosti dvourozměrného výpočtu mají velký vliv na výslednou velikost plastické zóny i  $dW/dN$ . Při stejné délce trhliny je  $A_{pz}$  přibližně 2,5x

větší v případě výpočtu s RN než při RD, což je ve shodě s klasickými vztahy pro výpočet velikosti plastické zóny. Také  $dW/dN$  je v případě RN přibližně třikrát větší.

Se vzrůstajícím zastoupením  $\Delta K_{II}$  se nepatrně zvětšuje i disipovaná plastická energie v reverzní plastické zóně v okolí kořene ÚT.

Tab. 4 Výsledky simulací šíření šikmé únavové trhliny v RD i RN pro konstantní hodnotu rozkmitu J-Integrálu  $\Delta J = 3,38 \text{ kJ/m}^2$  pro RD a  $\Delta J = 3,00 \text{ kJ/m}^2$  pro RN

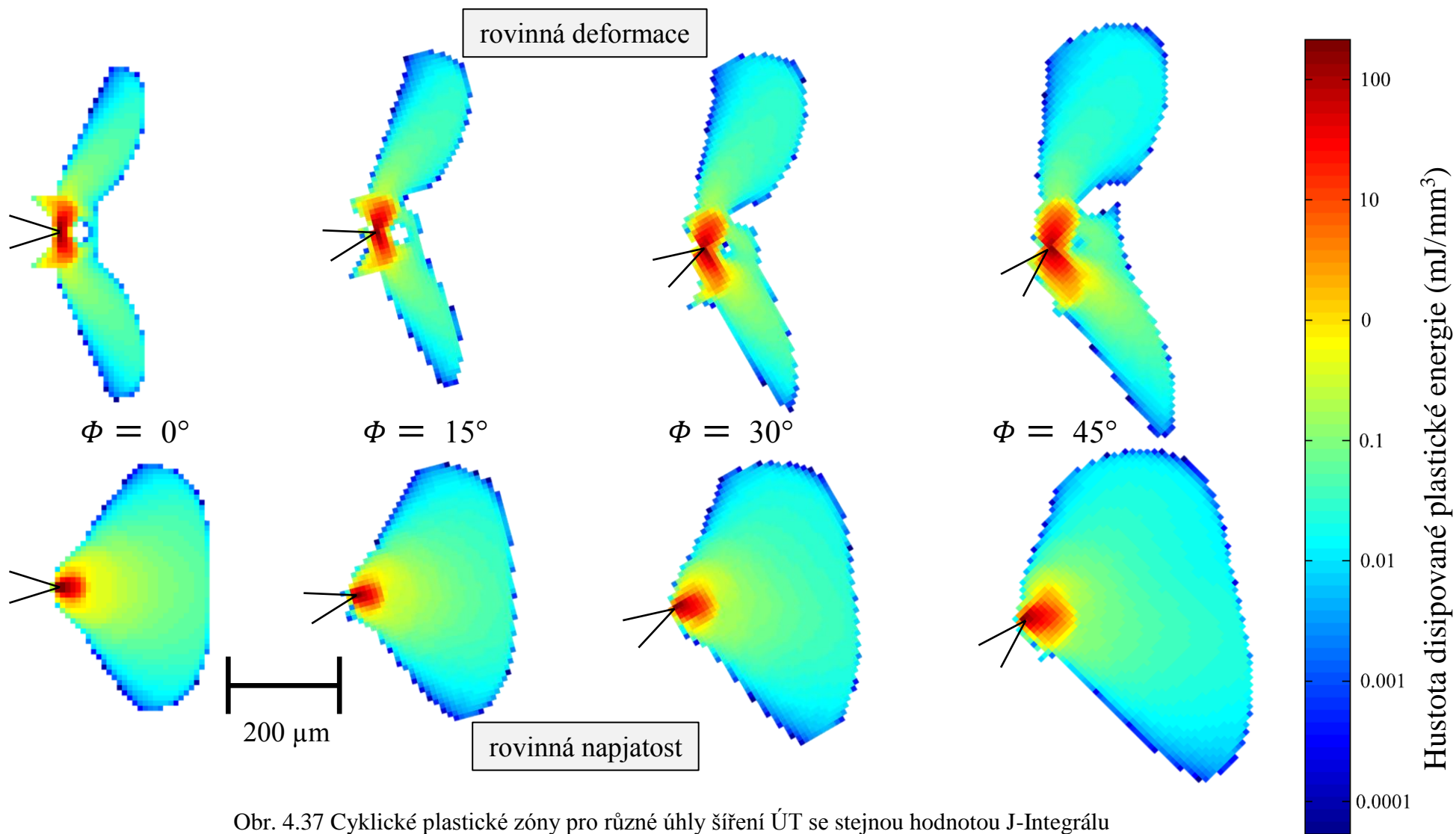
| $\beta$ | Rovinná napjatost |      |                    |         |                         |                         | Rovinná deformace |      |                    |         |                         |                         |
|---------|-------------------|------|--------------------|---------|-------------------------|-------------------------|-------------------|------|--------------------|---------|-------------------------|-------------------------|
|         | $\Phi$            | $a$  | $A_{pz}$           | $dW/dN$ | $\Delta K_I$            | $\Delta K_{II}$         | $\Phi$            | $a$  | $A_{pz}$           | $dW/dN$ | $\Delta K_I$            | $\Delta K_{II}$         |
| [°]     | [-]               | [mm] | [mm <sup>2</sup> ] | [J/m]   | [MPa·m <sup>1/2</sup> ] | [MPa·m <sup>1/2</sup> ] | [-]               | [mm] | [mm <sup>2</sup> ] | [J/m]   | [MPa·m <sup>1/2</sup> ] | [MPa·m <sup>1/2</sup> ] |
| 0       | 0,00              | 2,33 | 0,14               | 0,064   | 12,89                   | 0,00                    | 0,00              | 2,88 | 0,10               | 0,030   | 14,58                   | 0,00                    |
| 15      | 0,16              | 2,40 | 0,16               | 0,068   | 12,73                   | 2,05                    | 0,16              | 2,97 | 0,11               | 0,035   | 14,34                   | 2,32                    |
| 30      | 0,37              | 2,63 | 0,19               | 0,116   | 12,21                   | 4,14                    | 0,33              | 3,23 | 0,13               | 0,052   | 13,81                   | 4,66                    |
| 45      | 0,51              | 3,04 | 0,28               | 0,163   | 11,27                   | 6,26                    | 0,50              | 3,68 | 0,19               | 0,083   | 12,77                   | 7,04                    |

Tab. 5 Výsledky simulací šíření šikmé únavové trhliny v RD i RN pro konstantní hodnoty  $\Delta K_{ev}^{Rich}$  a  $\Delta K_{ev}^{Tan}$

|                        | Rovinná napjatost |        |      |                    | Rovinná deformace |                    |         |  |
|------------------------|-------------------|--------|------|--------------------|-------------------|--------------------|---------|--|
|                        | $\beta$           | $\Phi$ | $a$  | $A_{pz}$           | $dW/dN$           | $A_{pz}$           | $dW/dN$ |  |
|                        | [°]               | [-]    | [mm] | [mm <sup>2</sup> ] | [J/m]             | [mm <sup>2</sup> ] | [J/m]   |  |
| $\Delta K_{ev}^{Rich}$ | 0                 | 0,00   | 2,88 | 0,26               | 0,117             | 0,10               | 0,030   |  |
|                        | 15                | 0,16   | 2,87 | 0,25               | 0,113             | 0,10               | 0,032   |  |
|                        | 30                | 0,33   | 2,87 | 0,24               | 0,144             | 0,09               | 0,036   |  |
|                        | 45                | 0,51   | 2,96 | 0,26               | 0,151             | 0,10               | 0,042   |  |
| $\Delta K_{ev}^{Tan}$  | 0                 | 0,00   | 2,88 | 0,26               | 0,117             | 0,10               | 0,030   |  |
|                        | 15                | 0,16   | 3,02 | 0,30               | 0,129             | 0,11               | 0,037   |  |
|                        | 30                | 0,33   | 3,38 | 0,40               | 0,231             | 0,15               | 0,060   |  |
|                        | 45                | 0,50   | 3,65 | 0,44               | 0,274             | 0,18               | 0,079   |  |

Dále byly studovány rozdíly tvarů reverzní plastické zóny. Přehled plastických zón je uveden na obr. 4.37. Plastické zóny v podmínkách RD, resp. RN mají křídlovitý, resp. vějířovitý tvar. Tvar plastické zóny v podmínkách RD odpovídá spíše tvaru plastické zóny v hloubce pod povrchem u reálného tělesa s trhlinou. Podmínky blízké RN se naopak vyskytují těsně u povrchu tělesa.

Se zvětšováním úhlu sklonu směru šíření  $\beta$  postupně klesá symetrie plastické zóny. Největší hustota uvolněné plastické energie je opět v blízkosti čela ÚT. Směrem od tohoto bodu hustota energie rychle klesá.



Obr. 4.37 Cyklické plastické zóny pro různé úhly šíření ÚT se stejnou hodnotou J-Integrálu

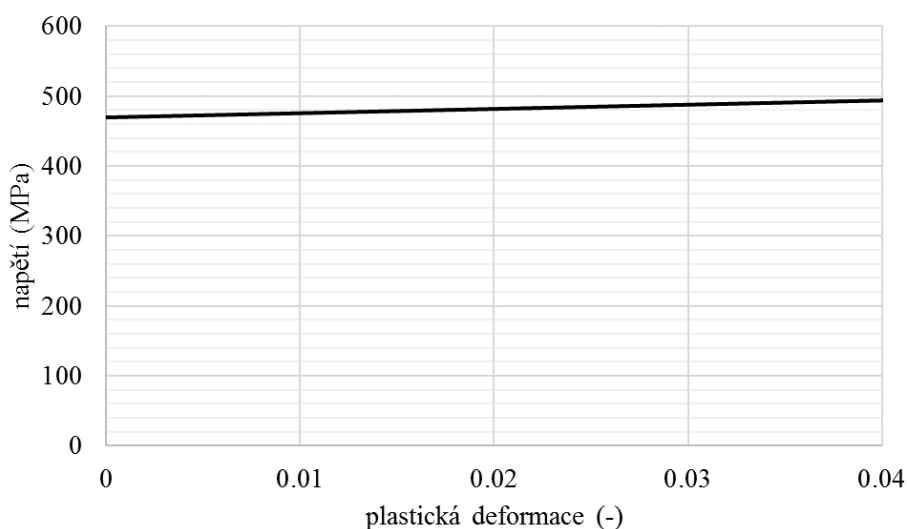
## 4.4.2 Rychlost šíření únavové trhliny ve smíšeném módu zatěžování

### 4.4.2.1 MKP model

Pro výpočty byl použit dvourozměrný model CT tělesa s dodatečným otvorem (schéma s rozměry viz obr. 4.1). Během experimentu byl změněn směr zatížení, což vyvolalo změnu směru šíření únavové trhliny. Proto byly vytvořeny dva MKP modely pro šíření ÚT v módu I a smíšeném módu I+II (obr. 4.39). Všechny výpočty byly provedeny v podmínkách RD i RN.

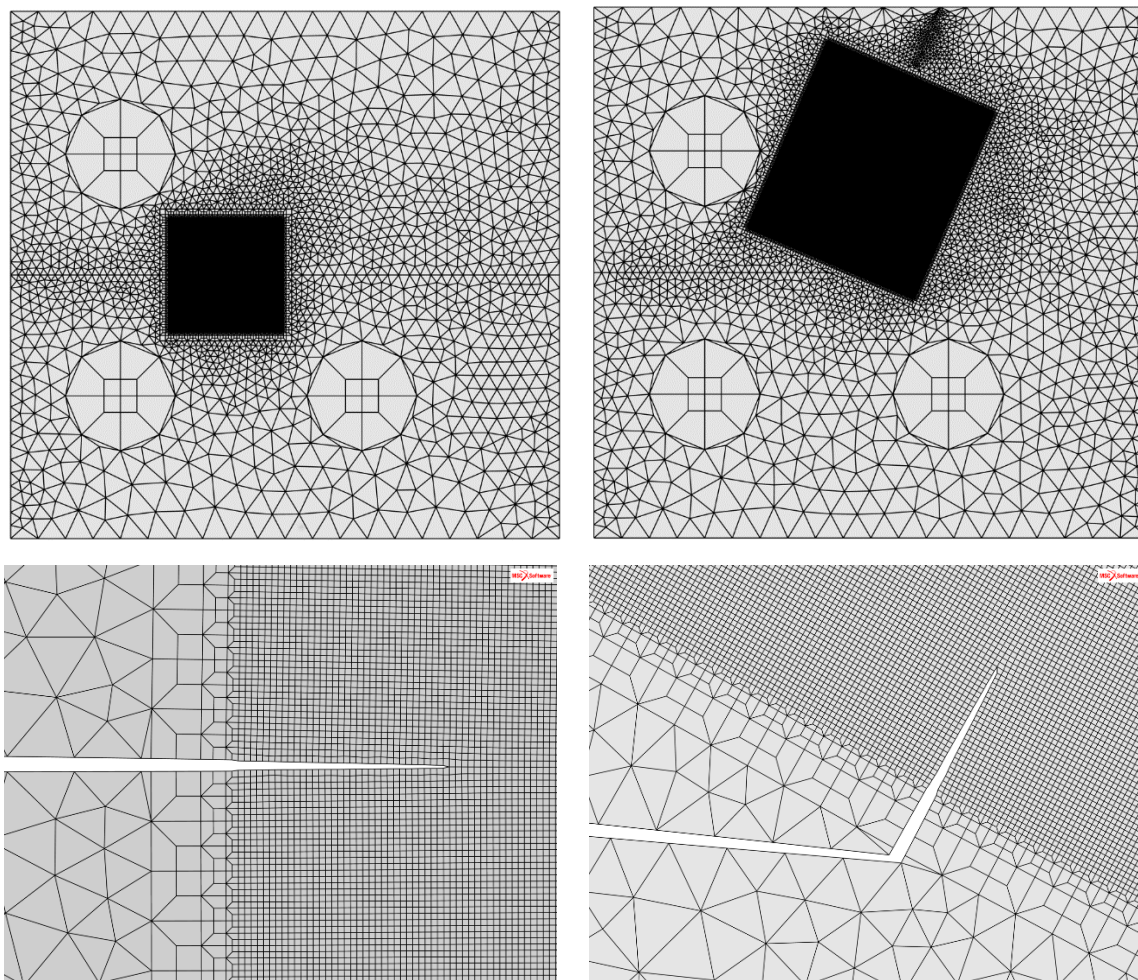
Sít sestávala opět ze dvou druhů konečných prvků. Ve zjemněné oblasti byly použity lineární čtyřúhelníkové prvky, zbytek sítě byl tvořen lineárními trojúhelníkovými prvky. Velikost elementů ve zjemněné oblasti byla  $60 \times 60 \mu\text{m}$ . Tato velikost elementů představuje asi 1/5, resp. 1/25 velikosti cyklické plastické zóny ve směru šíření v podmínkách RD, resp. RN. Velikost prvku byla zvolena tak, aby bylo dosaženo dostatečné konvergence podle odst. 4.3.5. Čtvercové elementy ve zjemněné oblasti jsou zarovnané ve směru šíření trhliny v modelu simulace rovinného šíření v módu I i ve smíšeném módu I+II. Vrub v CT tělese nebyl modelován, protože délka trhliny byla tak velká, že by nedocházelo k ovlivnění výsledků přítomností vrubu. Jako algoritmus šíření trhliny byl použit postup popsáný v odst. 4.2.3.

Místo standardně používané křivky zpevnění vycházející z cyklických vlastností materiálu byla použita lineární křivka zpevnění uvedena na následujícím obrázku.



Obr. 4.38 Lineární zpevnění hliníkové slitiny D16CT1 [78]





Obr. 4.39 2D MKP síť pro trhlinu v upraveném CT tělese – celkový pohled a detail, vlevo síť pro výpočet v módu I, vpravo síť pro výpočet ve smíšeném módu I+II

#### 4.4.2.2 *Výsledky simulací*

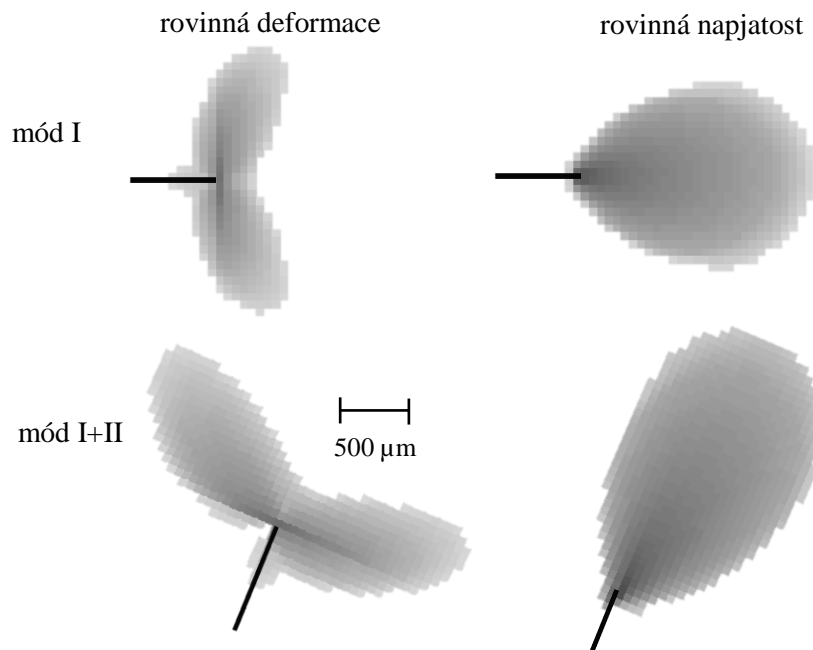
Numerické simulace šíření únavové trhliny v tahovém módu I i smíšeném módu I+II

v upravených CT tělesech byly provedeny na dvourozměrné síti konečných prvků v podmínkách rovinné napjatosti i deformace. Všechny simulace byly provedeny se stejnými parametry zatěžování i cyklování jako při experimentu s tělesem č. 1 z

tab. 1 vyrobeného z hliníkové slitiny D16CT1. Více informací o provedení únavových zkoušek a vlastnostech materiálu zkušební tělesa je uvedeno v odst. 4.1.1 a 4.3.1.

Tvary reverzních plastických zón v okolí čela trhliny jsou uvedeny na obr. 4.40. Pro lepší názornost je na obrázku zobrazena pouze relevantní oblast odpovídající 95 % celkové disipované plastické energie. Tvary plastické zóny vytvořené v podmínkách rovinné deformace mají typický křídlovitý tvar. Nejvíce plastické energie zde není akumulováno před kořenem trhliny přímo ve směru jejího šíření, ale ve směrech skloněných přibližně pod

úhlem 65°. V podmínkách rovinné napjatosti má plastická zóna oválný tvar, největší hustota plastické energie je těsně před čelem trhliny ve směru jejího šíření. V případě šíření únavové trhliny ve smíšeném módu I+II jsou tvary plastických zón podle očekávání mírně asymetrické, protože směr zatěžování není kolmý ke směru šíření ÚT. Větší plastická zóna ve smíšeném módu není dána přítomností II. módu, ale větší délkou trhliny.



Obr. 4.40 Tvary plastických zón pro délku trhiny 11 mm v módu I a 18 mm v módu I+II – tmavší barva odpovídá větší disipované plastické energii v logaritickém měřítku

Pro zjištění závislosti rychlosti šíření únavové trhliny na množství disipované plastické energie za cyklus byly hodnoty  $dW / dN$  vypočítány v celé trajektorii šíření ÚT v reálném tělese č. 1. Tyto hodnoty byly proloženy exponenciální funkcí v závislosti na délce trhliny  $a$ . Vzniklá funkce  $f(a) = dW / dN$  byla použita pro spárování rychlosti šíření ÚT z experimentu s vypočítanými hodnotami  $dW / dN$ . Závislosti  $da / dN$  na  $dW / dN$  pro tahový mód I, resp. smíšený mód I+II v podmínkách simulace RD i RN jsou zobrazeny na obr. 4.41, resp. obr. 4.42. Do grafů byly navíc doplněny predikce rychlosti šíření únavové trhliny podle Klingbeilova vztahu

$$\frac{da}{dN} = \frac{1}{G_c} \frac{dW}{dN} \quad ,$$

kde  $G_c$  je kritická hodnota hnací síly trhliny (Klingbeilovu kritériu je podrobně věnována odst. 2.2.2.1).  $G_c$  je pak možné pomocí známého vztahu přepočítat na kritickou hodnotu faktoru intenzity napětí  $K_{Ic}$ . V tabulkách [80] byla nalezena hodnota  $K_{Ic} = 37 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$

odpovídající stavu rovinné deformace, jehož by bylo dosaženo až u tělesa s minimální tloušťkou 20,4 mm. U studovaného tělesa tloušťky 6 mm se dá očekávat vyšší kritická hodnota  $K_c$ . Konkrétní hodnota  $K_{Ic}$  byla odhadnuta s použitím Irwinova vztahu [82]

$$K_c = K_{Ic} \sqrt{1 + \frac{1.4}{B^2} \left( \frac{K_{Ic}}{R_{p0.2}} \right)^4} \quad (31)$$

a pro tloušťku  $B = 6$  mm má hodnotu  $70 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$ . V grafech pro mód I i smíšený mód I+II jsou pro ilustraci použity obě tyto hodnoty kritické hodnoty faktoru intenzity napětí při stanovení RŠÚT podle Klingbeilova vztahu.

V případě módu I na obr. 4.41 odpovídá experimentálně stanovená RŠÚT numerickým simulacím při RD s použitím  $K_{Ic}$  v Klingbeilově vztahu (21). Predikovaná RŠÚT pomocí  $dW / dN$  vypočítané v podmínkách RN s použitím  $K_{Ic}$  v Klingbeilově vztahu (21) je výrazně vyšší než odpovídá skutečnosti. Použije-li se místo lomové houževnatosti  $K_{Ic}$  hodnota  $K_c$  upravená pomocí Irwinova vztahu (31), odpovídá i predikce RŠÚT v podmínkách RN experimentálním datům.

Výsledky simulace šíření ÚT ve smíšeném módu I+II jsou uvedeny na obr. 4.42. Je možné provést obdobné závěry jako v případě šíření ÚT v módu I. Avšak díky charakteru únavové zkoušky dochází zpočátku k vyššímu rozptylu experimentálně získaných hodnot  $da / dN$ . Důvodem je fakt, že efektivní délka trhliny ve smíšeném módu I+II, tzn. délka trhliny od pomyslného průsečíku paprsku zatížení, je velmi nízká a efektivní faktor intenzity napětí leží v blízkosti jeho prahových hodnot (obr. 4.43).

Porovnání predikce šíření ÚT na základě výpočtu  $dW / dN$  v podmínkách RD je vyneseno na obr. 4.44. Z obrázku vyplývá, že pro danou konfiguraci je možné použít stejný způsob výpočtu šíření ÚT v módu I i smíšeném módu I+II.

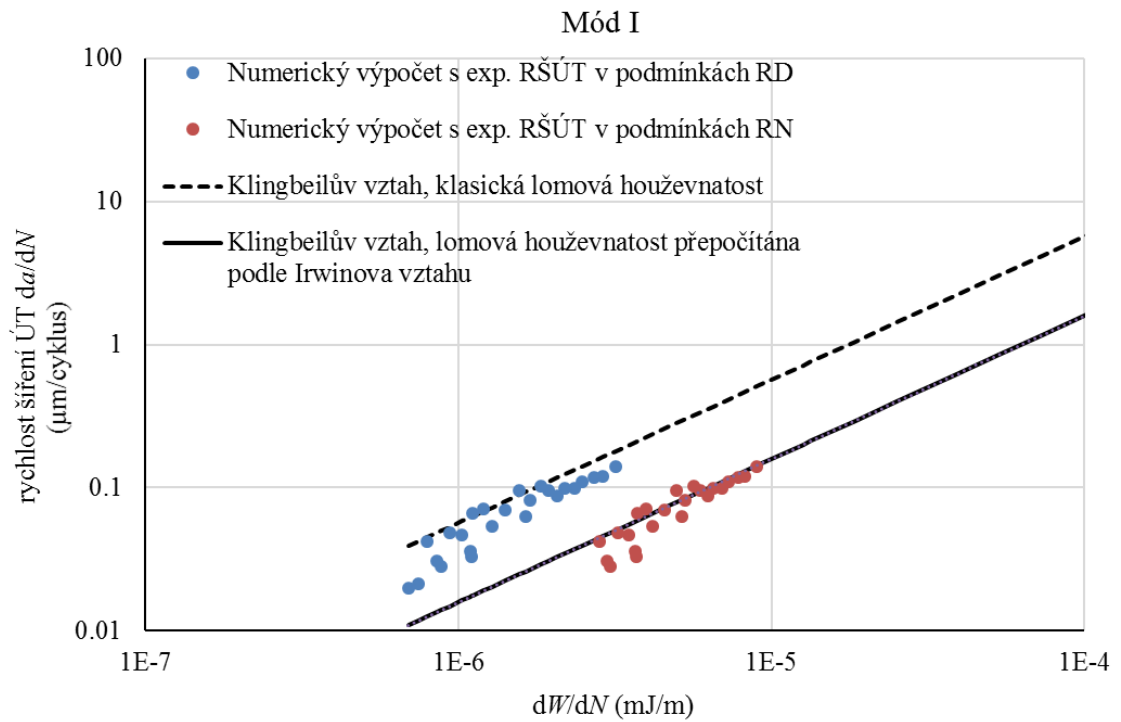
Dále byla určena úroveň smíšeného módu po změně směru zatížení. K tomu byl použit numerický výpočet rozkmitu faktoru intenzity napětí. Na stejné síti, na které probíhaly numerické výpočty  $dW / dN$ , byly vypočteny hodnoty hnací síly trhliny v módu I a I+II pomocí metody VCCT, která je implementována přímo v programu MSC.Marc. Následně byly tyto hodnoty přepočítány na hodnoty faktoru intenzity napětí, resp. jeho rozkmitu  $\Delta K_I$  a  $\Delta K_{II}$ . V tahovém módu I byly navíc hodnoty faktoru intenzity napětí pro kontrolu numerického výpočtu spočítány podle normy pro použité zkušební těleso. Bylo dosaženo dobré shody mezi oběma metodami. Aby bylo možné porovnat šíření únavové trhliny v tahovém módu I a smíšeném módu I+II, ve kterém se vyskytuje i  $\Delta K_{II}$ , byl použit přepočet

$\Delta K_I$  a  $\Delta K_{II}$  na ekvivalentní rozkmit faktoru intenzity napětí  $\Delta K_{eq}$  podle Richarda podle vzorce

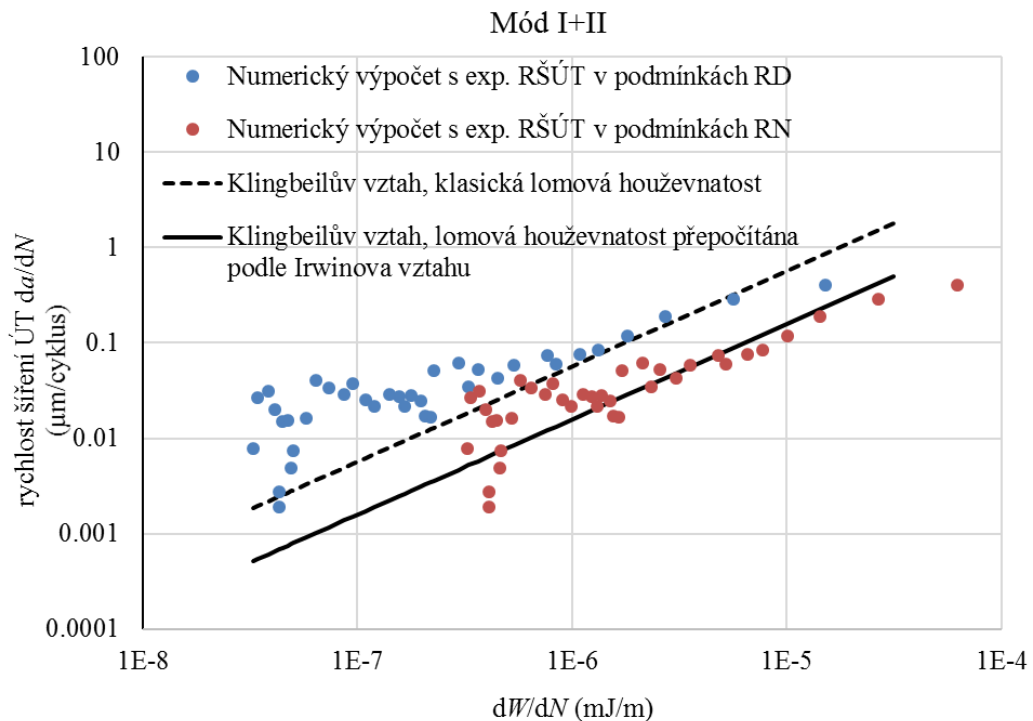
$$\Delta K_{ev} = \frac{\Delta K_I}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta K_I^2 + 4(\alpha \Delta K_{II})^2} \quad ,$$

kde  $\alpha$  bylo dle doporučení z práce [23] rovno 1,155. Toto kritérium bylo vybráno jako nejvhodnější pro použitý materiál D16CT1 [3]. Výsledky jsou vyneseny na obr. 4.45. Richardovu kritériu je podrobněji věnován samostatný odst. 2.2.1.2

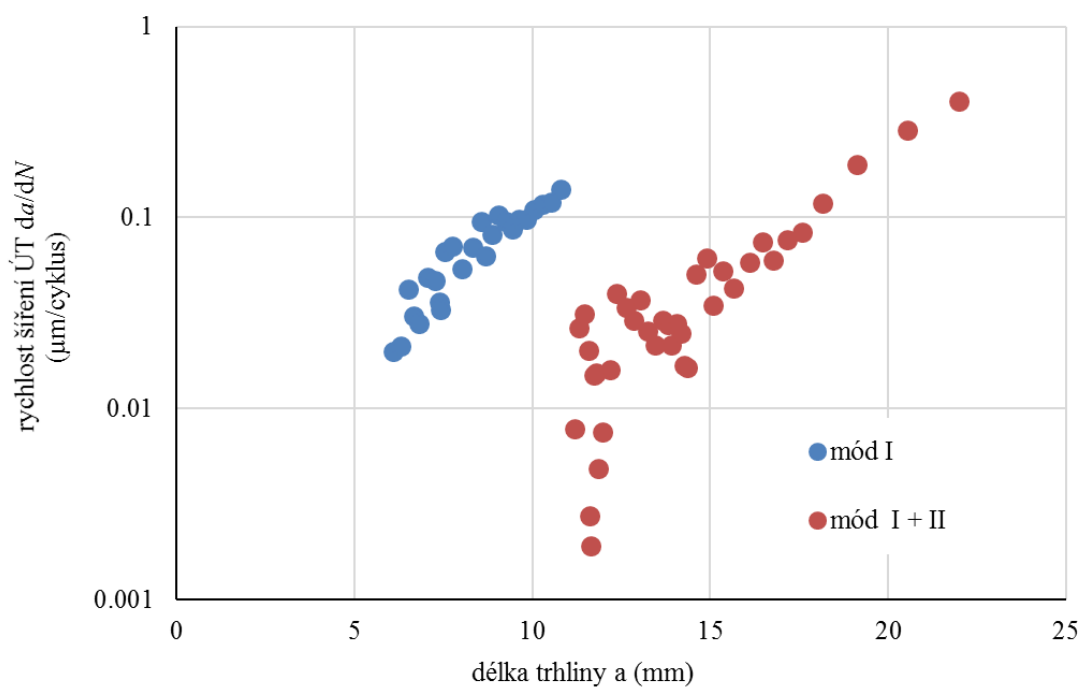
Výsledky pro smíšený mód I+II jsou, jak již bylo zmíněno výše, zatíženy zvláště v oblasti nižších hodnot rozkmitu faktoru intenzity napětí větším rozptylem. Od začátku měření ve smíšeném módu I+II, tj. pro  $\Delta K_{ev}$  přibližně od 7 MPa.m<sup>1/2</sup> do 9,5 MPa.m<sup>1/2</sup>, odpovídá závislost  $da/dN - \Delta K_{ev}$  první fázi šíření ÚT v prahových hodnotách rozkmitu faktoru intenzity napětí. Pro tuto fázi jsou typické nízké rychlosti šíření ÚT. Počínaje hodnotou 9,5 MPa.m<sup>1/2</sup> je závislost  $da / dN$  na  $\Delta K_{ev}$  v log-log souřadnicích přibližně lineární a odpovídá tak druhé fázi šíření ÚT, tzn. oblasti platnosti Parisova vztahu. Ve srovnání se smíšeným módem I+II má tahový mód I nižší rozptyl dat, v oblasti nižších hodnot  $\Delta K_{ev}$  jsou rychlosti šíření ÚT pro oba módy obdobné, v oblasti vyšších hodnot  $\Delta K_{ev}$  dosahuje rychlost šíření ÚT vyšších hodnot v tahovém módu I.



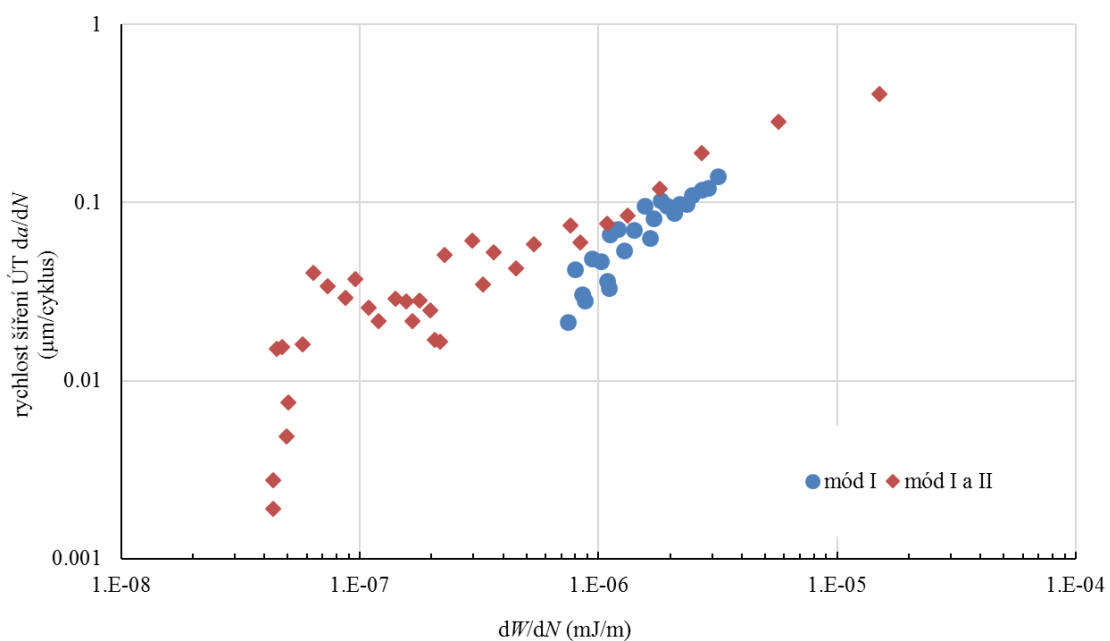
Obr. 4.41 Závislost experimentální rychlosti šíření únavové trhliny v módu I na  $dW/dN$  v podmínkách RD a RN v log-log souřadnicích, Klingbeilův vztah podle (21)



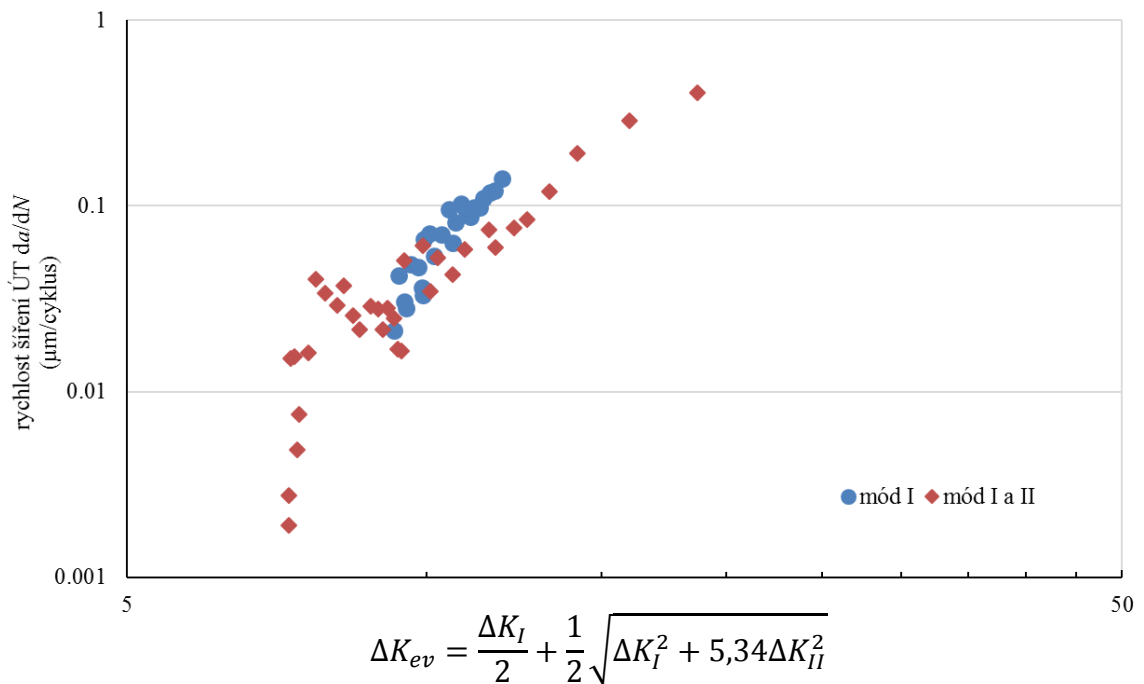
Obr. 4.42 Závislost experimentální rychlosti šíření únavové trhliny v módu I+II na  $dW/dN$  v podmínkách RD a RN v log-log souřadnicích, Klingbeilův vztah podle (21)



Obr. 4.43 Změřená rychlost šíření únavové trhliny ve zkušebním tělese č. 1 v závislosti na délce trhliny



Obr. 4.44 Závislosti naměřené rychlosti šíření ÚT na  $dW/dN$  v RD pro šíření v módu I a smíšeném módu I+II, měřeno na zkušebním tělese č. 1, vyneseno v log-log souřadnicích



Obr. 4.45 Závislosti rychlosti šíření ÚT na  $\Delta K_{ev}$  pro šíření v módu I a smíšeném módu I+II, měřeno na zkušebním tělese č. 1, vyneseno v log-log souřadnicích

#### 4.4.3 Diskuze výsledků simulací šíření únavové trhliny ve smíšeném proporcionálním módu I+II

Základním účelem numerických výpočtů s různě skloněnou trhlinou bylo ověřit korelaci závislosti množství disipované plastické energie za cyklus na délce trhliny s několika lomově-mechanickými parametry používanými v proporciálním smíšeném módu zatěžování I+II u studovaného materiálu D16CT1. Jedná se o rozkmit J-Integrálu, ekvivalentní rozkmit faktoru intenzity napětí podle Richarda definovaný vztahem (15) a ekvivalentní rozkmit faktoru intenzity napětí podle Tanaky definovaný vztahem (16).

Nejméně korelovaným ze zkoumaných parametrů je podle výsledků J-Integrál. Pro zajištění konstantní hodnoty tohoto lomově-mechanického parametru pro všechny sklony trhliny je nutné zvyšovat délku trhliny se zvyšujícím se úhlem sklonu. Např. v podmínkách RD byla délka trhliny při nulovém sklonu trhliny 2,88 mm a při nejvyšším zkoumaném sklonu 45° 3,68 mm. Pro srovnání se délka trhliny v případě použití parametru  $\Delta K_{ev}^{Rich}$  zvýší pouze na 2,96 mm. Hodnotu rozkmitu J-Integrálu v podmínkách RD je možné vypočítat také ze vztahů pro rozptyl faktoru intenzity napětí  $\Delta K_I$  a  $\Delta K_{II}$ :

$$J_{max} = \frac{1-\nu^2}{E} (K_{I,max}^2 + K_{II,max}^2), \quad J_{min} = \frac{1-\nu^2}{E} (K_{I,min}^2 + K_{II,min}^2), \quad \text{pro RD a}$$

$$\Delta J = J_{max} - J_{min}$$

$$J_{max} = \frac{1}{E} (K_{I,max}^2 + K_{II,max}^2), \quad J_{min} = \frac{1}{E} (K_{I,min}^2 + K_{II,min}^2), \quad \text{pro RN.}$$

$$\Delta J = J_{max} - J_{min}$$

Ve srovnání s nejlépe korelovaným lomově-mechanickým parametrem  $\Delta K_{ev}^{Rich}$  definovaným vztahem (15) přiřazuje  $\Delta J$  menší váhu  $\Delta K_{II}$ , který rychle narůstá se zvyšujícím se úhlem sklonu trhliny. Proto je nutné zvyšovat délku trhliny tak, aby  $\Delta J$  zůstal konstantní. Zároveň ale rostou i sledované veličiny množství disipované plastické energie za cyklus a velikost reverzní plastické zóny. Tyto veličiny, zvláště pak  $dW / dN$ , odpovídají podle předpokladů z literatury rychlosti šíření únavové trhliny.

V rámci uvedených výsledků je možné rozšířit pro studovaný materiál známý vztah pro odhad středního poloměru reverzní plastické zóny v okolí trhliny šířící se ve smíšeném módu zatěžování I+II následujícím způsobem:

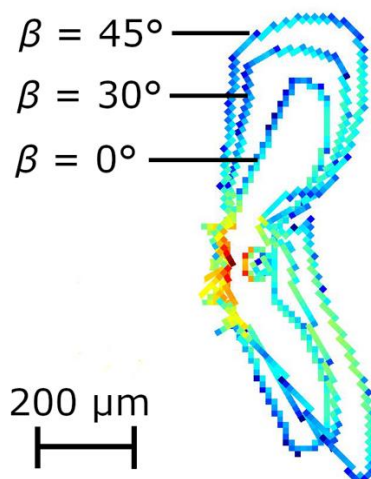
$$r_p = \frac{1}{2\alpha\pi} \left( \frac{\Delta K_{ev}^{Rich}}{2R_p 0.2} \right)^2,$$

kde  $\alpha = 1$ , resp. 3 pro RN, resp. RD. Dosadíme-li do tohoto vzorečku hodnoty  $\Delta K_{ev}^{Rich} = 14.58 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$  vyjde poloměr reverzní zóny  $r_p = 17 \text{ } \mu\text{m}$ . Velikost poloměru  $r_p$  přibližně odpovídá červeně zbarvené oblasti na obr. 4.37 s rozložením disipované plastické energie v okolí čela trhliny.

Se vzrůstajícím úhlem sklonu trhliny se také mění tvary plastických zón (viz obr. 4.37). Plastické zóny při výpočtu v podmínkách RD mají typický křídlovitý tvar. V případě výpočtu  $\beta = 0^\circ$  vystupují od kořene trhliny dva symetrické laloky skloněné vůči směru šíření trhliny pod úhlem přibližně  $65-70^\circ$ . Již ve velmi malé vzdálenosti několika desítek  $\mu\text{m}$  ve směru růstu trhliny k plastické deformaci nedochází. Při vyšších úhlech sklonu trhliny přestává být plastická zóna symetrická. Zejména dobře je to vidět na porovnání kontur plastické zóny pro různé  $\beta$  na obr. 4.46. Při vyšších úhlech  $\beta$  však nedochází k otáčení plastické zóny, resp. plastická zóna již není symetrická podél osy šíření trhliny, ale směřuje spíše ke směru, který by odpovídal čistě tahovému módu šíření trhliny. Toto pozorování je lépe vidět na tvarech plastické zóny počítané v podmínkách RN. Zóna má vějířovitý tvar.



Směr největšího gradientu hustoty disipace plastické energie má stále směr, který by odpovídal čistě tahovému módu šíření pro všechny zkoumané hodnoty úhlu  $\beta$ .

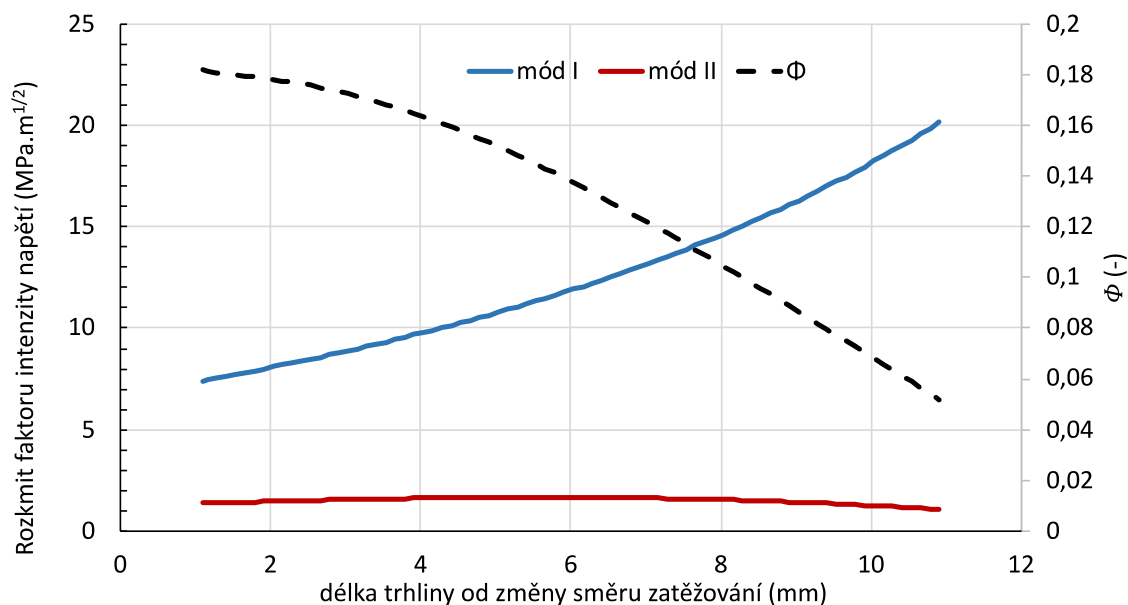


Obr. 4.46 Porovnání tvaru plastické zóny počítané v podmínkách RD pro konstantní hodnotu  $\Delta J = 3,38 \text{ kJ/m}^2$  pro různé úhly sklonu růstu trhliny  $\beta$

Dále byla v kap. 4.4.2 zkoumána rychlost šíření ÚT s úhlem  $\beta = 45^\circ$  ve smíšeném módu I+II pomocí speciálně upraveného CT zkušební tělesa (viz obr. 4.1). Únavové zkoušky provedené autorem práce v laboratořích KMAT ukázaly, že se únavová trhlina záhy po změně směru zatěžování stočila a dále už svůj směr neměnila. V případě zkušební tělesa vybraného pro následné simulace se trhlina stočila o  $67^\circ$ , což odpovídá směru šíření otočeném o  $22^\circ$  vůči čistě tahovému směru šíření trhliny. Tento úhel se však u jiných zkušebních těles lišil. Na obr. 4.40 jsou zobrazeny tvary plastické zóny pro počáteční fázi šíření ÚT v módu I, následnou fázi šíření ve smíšeném módu I+II. Tvary plastických zón nejsou symetrické po ose šíření ÚT, ale mírně se sklánějí ke směru, který by odpovídal šíření trhliny v čistě tahovém módu I, tedy pod úhlem  $45^\circ$  vůči směru šíření před přetočením zkušební tělesa.

Zastoupení  $\Delta K_I$  a  $\Delta K_{II}$  při šíření ÚT ve smíšeném módu I+II je možné vidět na obr. 4.47.  $\Delta K_I$  s rostoucí délkou trhliny roste a  $\Delta K_{II}$  mírně klesá. Odpovídající úroveň smíšeného módu  $\Phi$  proto postupně klesá.  $\Phi = 0.16$ , které odpovídá úhlu šíření ÚT pod úhlem  $15^\circ$ , nabývá únavová trhlina při délce přibližně 4,2 mm od přetočení směru zatěžování. Malému zastoupení smykového módu II při šíření ÚT odpovídají i výsledky fraktografického posouzení lomových ploch v kap. 4.1.1.1. Stočení ÚT dále odpovídá i poznatkům z literatury

[21], že šíření ÚT ve smíšeném módu I+II s proporcionálním zatěžováním je nestabilní a únavová trhlina se stočí ke směru šíření v čistě tahovém módu I.



Obr. 4.47  $\Delta K_I$  a  $\Delta K_{II}$  po změně směru zatěžování a odpovídající úroveň smíšeného módu  $\Phi$

Odhad rychlosti šíření ÚT podle Klingbeilova vztahu (kap. 2.2.2.1) z množství disipované plastické energie za cyklus je možné použít i u studované slitiny D16CT1. Navíc se zdá, že je možné použít lomovou houževnatost  $K_{Ic}$  získanou standardním postupem i pro výpočty šíření ÚT ve smíšeném módu I+II (viz obr. 4.44).

Při použití Richardova ekvivalentního rozkmitu faktoru intenzity napětí (obr. 4.45) je možné s dobrou shodou porovnat rychlosti šíření únavové trhliny v tahovém a smíšeném módu I+II. Toto pozorování je ve shodě se závěry odst. 4.4.1.

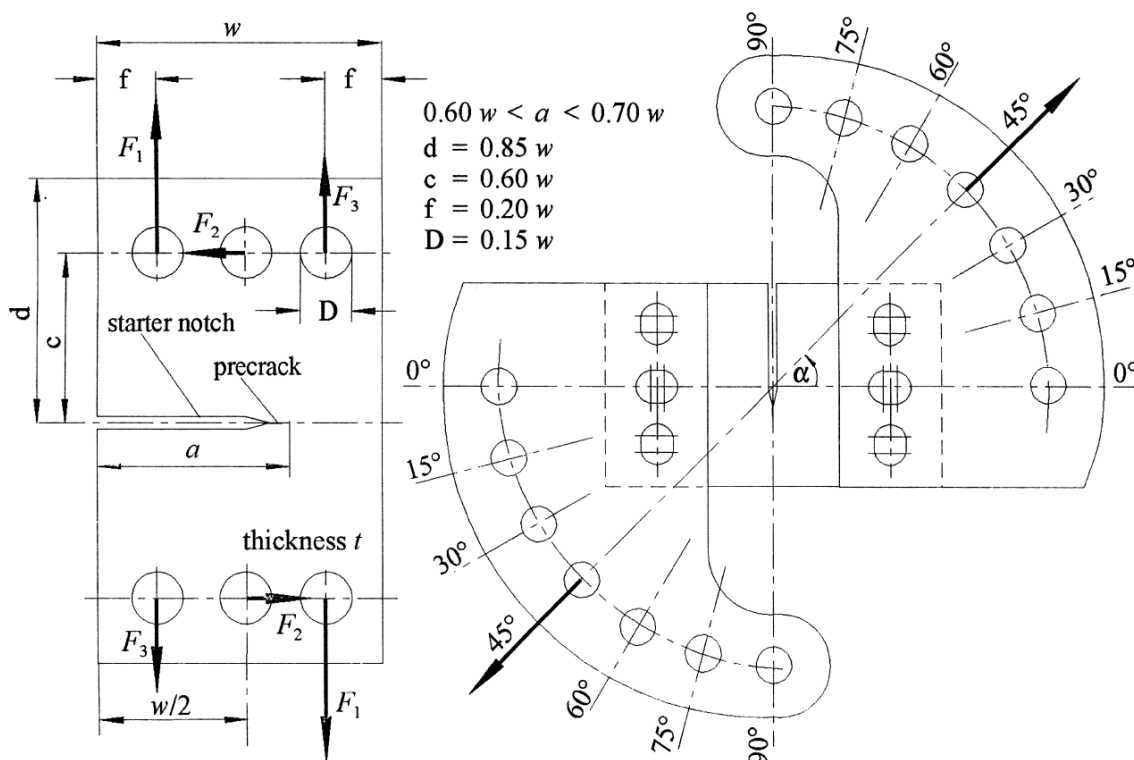
## 4.5 Simulace šíření únavové trhliny ve smíšeném neproporcionálním módu zatěžování I a II

Simulace šíření ÚT v neproporcionálním módu zatěžování byly realizovány na základě experimentálních dat uvedených v práci [20], ve které byly provedeny únavové zkoušky se zkušebními tělesy typu CTS (Compact Tension Shear) vyrobenými z duralové slitiny AA2017. Pro studium únavové trhliny šířící se v neproporcionálním módu bylo CTS těleso opatřeno speciálním přípravkem, který umožnil současné statické a dynamické namáhání zkušební tělesa. Z experimentů vyplývá, že při zvoleném neproporcionálním zatěžování únavové trhliny v módu I a II mohou nastat dva stabilní způsoby jejího šíření v závislosti na parametrech zatěžování. Při experimentu bylo vždy použito zkušební těleso s předpřipravenou únavovou trhlinou stanovené délky cyklovanou standardním způsobem v tahovém módu I. Následně se začalo cyklovat v neproporcionálním smíšeném módu a v závislosti na podmínkách zatěžování se ÚT buď stočila a šířila se dále v jiném směru (tzv. neproporcionální tahový mód šíření – NT), nebo pokračovala v růstu v původním směru (tzv. neproporcionální smykový mód šíření – NS). Rostla-li trhlina v NS módu šíření, měla výrazně větší rychlost než při NT módu s jinak obdobnými podmínkami zatěžování.

Simulace šíření ÚT byly provedeny pro neproporcionální tahový i smykový růstový mód šíření s cílem stanovit  $dW / dN$  pro oba dva módy šíření a porovnat to s rychlostí šíření ÚT a rozkmitu faktoru intenzity napětí. Aby bylo možné porovnat  $dW / dN$  jako kritérium rychlosti růstu ÚT a  $\Delta K$ , byly také provedeny referenční simulace šíření ÚT jen v tahovém módu I. Všechny simulace byly počítány na dvourozměrné síti konečných prvků v podmínkách rovinné deformace a napjatosti.

### 4.5.1 Geometrie zkušební tělesa

Geometrie CTS tělesa použitého pro simulace včetně pomocného zatěžovacího přípravku je na obr. 4.48. Šířka tělesa v této práci je  $w = 100$  mm a tloušťka  $t = 10$  mm, ostatní rozměry zkušební tělesa jsou úměrné šířce (vztahy viz obr. 4.48).



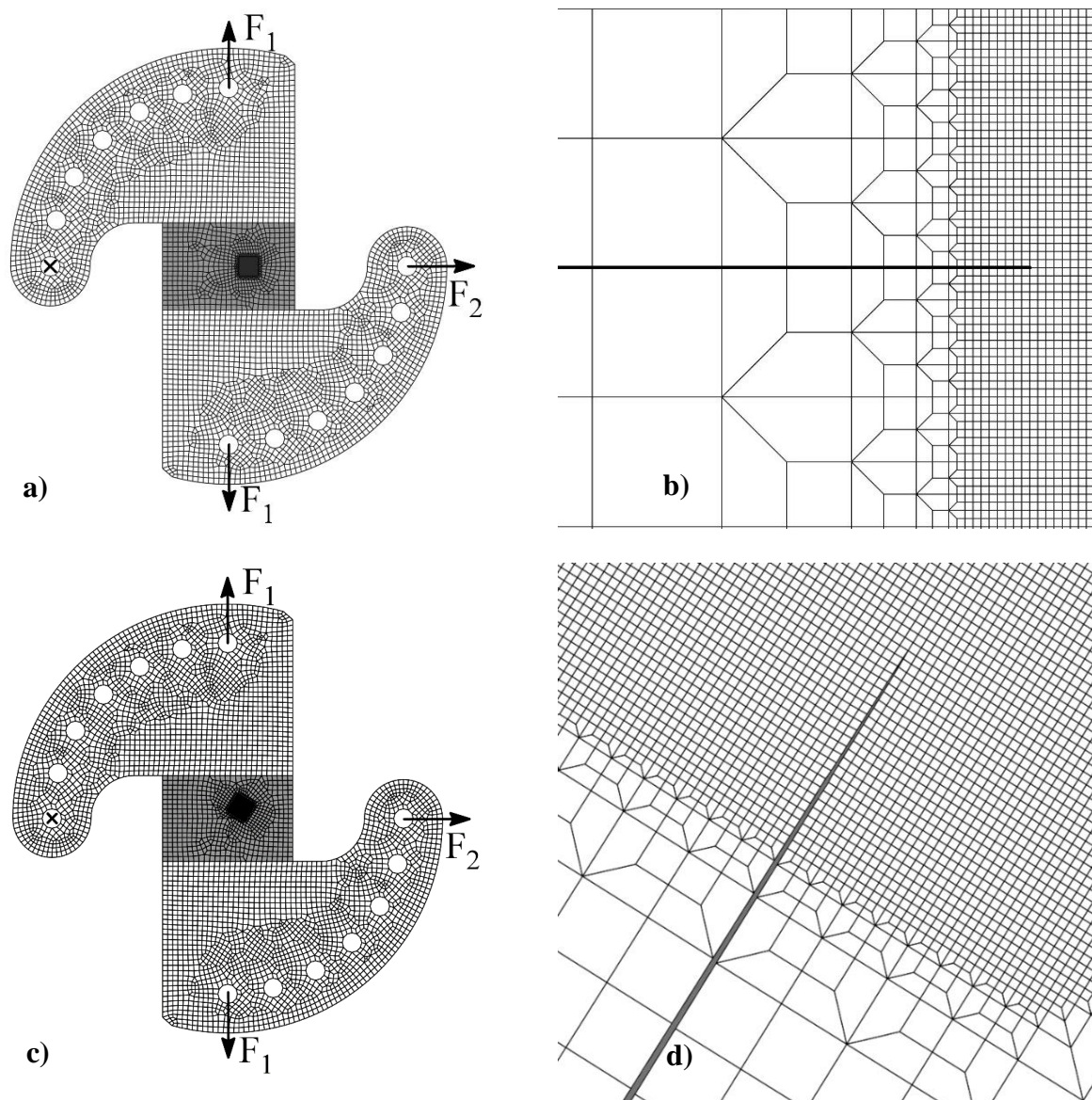
Obr. 4.48 Geometrie CTS tělesa zařízení pro upnutí do pulsátoru [20]

#### 4.5.2 MKP síť

Zkušební těleso CTS bylo modelováno metodou konečných prvků s dvourozměrnou sítí včetně pomocného zatěžovacího přípravku (viz obr. 4.48). Pomocný přípravek a zkušební těleso bylo modelováno dohromady pomocí jedné sítě (obr. 4.49). Jejich rozlišení bylo dosaženo pouze volbou materiálu (materiál CTS tělesa má na obr. 4.49 šedivou barvou). Vliv skutečného upevnění přípravku k tělesu třemi šrouby na každé straně byl zanedbán.

Pro tvorbu sítě byly použity lineární čtyřúhelníkové rovinné prvky. Oblast šíření únavové trhliny byla vyplněna jemnými čtvercovými prvky  $12 \times 12$ . Prvky ve zjemněné oblasti byly zarovnány pro oba dva módy šíření ÚT rovnoběžně ke směru šíření únavové trhliny (obr. 4.49b,d). Směr šíření únavové trhliny byl vždy předem určen v souladu s modelovaným experimentem. V případě tahového módu růstu byla celá zjemněná oblast otočena směrem k hraně zkušebního tělesa pod úhlem  $58^\circ$  v  $a = 50$  mm.

Síť zbytku tělesa a zatěžovacího přípravku byla vytvořena pomocí automatického generátoru sítě prvky se střední velikostí 3.7 mm. Každý model obsahuje dohromady okolo 45 000 elementů.



Obr. 4.49 MKP síť zkušebního tělesa celkový pohled a) a c), detailní pohled na oblast šíření únavové trhliny b) a d), tahový mód I a) a b), smíšený mód I+II c) a d)

### 4.5.3 Okrajové podmínky

Zkušební těleso bylo nezávisle zatěžováno statickým tahovým módem I a cyklickým smykovým módem II. Statické zatížení módem I bylo realizováno pomocí síly  $F_1 = 1\,800\text{ N}$  (obr. 4.49), cyklické zatížení v módu II pomocí síly  $F_2$  s parametry  $F_{2max} = 6\,700\text{ N}$  a parametrem asymetrie cyklu  $R = 0,1$ . Zároveň byl proveden referenční výpočet v čistě tahovém módu I při zatěžování s parametry  $F_{1max} = 3\,300\text{ N}$  a parametrem asymetrie cyklu  $R = 0,1$ . Síla  $F_2$  nebyla v tomto případě aplikována.

Zkušební těleso bylo pevně uchyceno pomocí omezení uzlových posunů v bodě levého závěsu (označeno křížkem na obr. 4.49) a posuvy ve vertikálním směru byly omezeny v místě působení síly  $F_2$ , aby se zabránilo rotaci tělesa jako tuhého celku.

Jako algoritmus šíření trhliny byl použit postup popsáný v odst. 4.2.3.

#### 4.5.4 Vstupní materiálová data

Simulace byly provedeny s hliníkovou slitinou AA2017 (typ AlCuMg1). Mechanické vlastnosti slitiny byly převzaty z práce [20] a jsou uvedeny v následující tabulce.

Tab. 6 Mechanické vlastnosti slitiny AA2017 [20]

|  | AA2017                 |
|--|------------------------|
| Youngův modul $E$ (MPa)                              | 74 800                 |
| Poissonovo číslo $\nu$ (1)                           | 0,34                   |
| Mez kluzu $R_p0.2$ (MPa)                             | 307,7                  |
| Mez pevnosti $R_m$ (MPa)                             | 441,2                  |
| Celková deformace při lomu $A$ (%)                   | 19,8                   |
| Konstanta Parisova vztahu $C$ (m/cyklus)             | $4,17 \times 10^{-13}$ |
| Exponent Parisova vztahu $m$ (1)                     | 3,43                   |
| Lomová houževnatost $K_{Ic}$ (MPa.m <sup>1/2</sup> ) | 48                     |

Plastická odpověď materiálu je reprezentována pomocí lineární křivky zpevnění. Tato křivka byla odhadnuta z celkové tažnosti při lomu naměřené tahovou zkouškou v [20]. Pro výpočet zpevnění materiálu byl použit kinematický model zpevnění.

Materiál přípravku je běžná ocel s elastickými konstantami  $E = 210\,000$  GPa a  $\nu = 0,3$ . V oblasti přípravku se úroveň napětí nepřibližovala mezi kluzu materiálu, materiál přípravku byl proto modelován pouze elasticky.

#### 4.5.5 Výpočet faktorů intenzity napětí

Rozkmitý faktor intenzity napětí byly pro oba modely tahového a smykového šíření únavové trhliny stanoveny numericky MKP metodou VCCT s použitím stejné sítě jako v případě ostatních výpočtů (obr. 4.49) a se stejnými okrajovými podmínkami. Přímou v programu MSC.Marc byly postupně počítány hodnoty VCCT pro celou cestu růstu

únavové trhliny. Získané hodnoty hnací síly trhliny  $G$  v maximu a minimu cyklu byly pomocí vzorce

$$G = \frac{K^2}{\bar{E}},$$

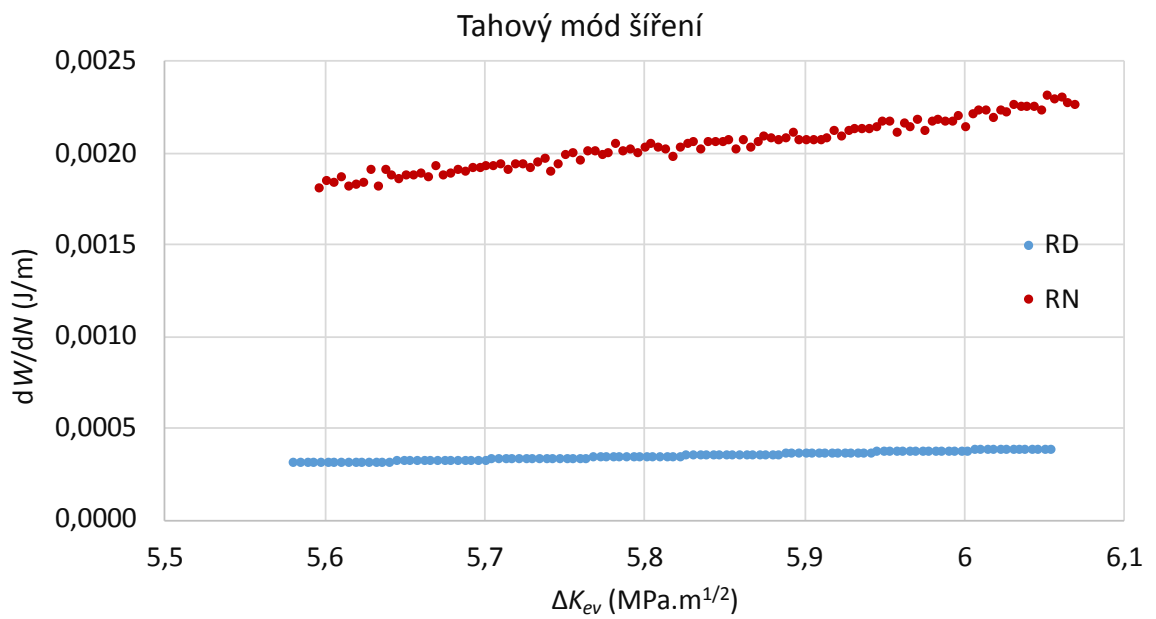
kde  $\bar{E} = E$  v případě rovinné napjatosti a  $\bar{E} = \frac{E}{1-\nu^2}$  v případě rovinné deformace, přepočítány na  $K_I^{max}$ ,  $K_I^{min}$ , resp.  $K_{II}^{max}$ ,  $K_{II}^{min}$  a následně na  $\Delta K_I$ , resp.  $\Delta K_{II}$ . Rozkmity faktoru intenzity napětí byly získány odečtením hodnoty v minimu cyklu od hodnoty v jeho maximu.

#### 4.5.6 Výsledky

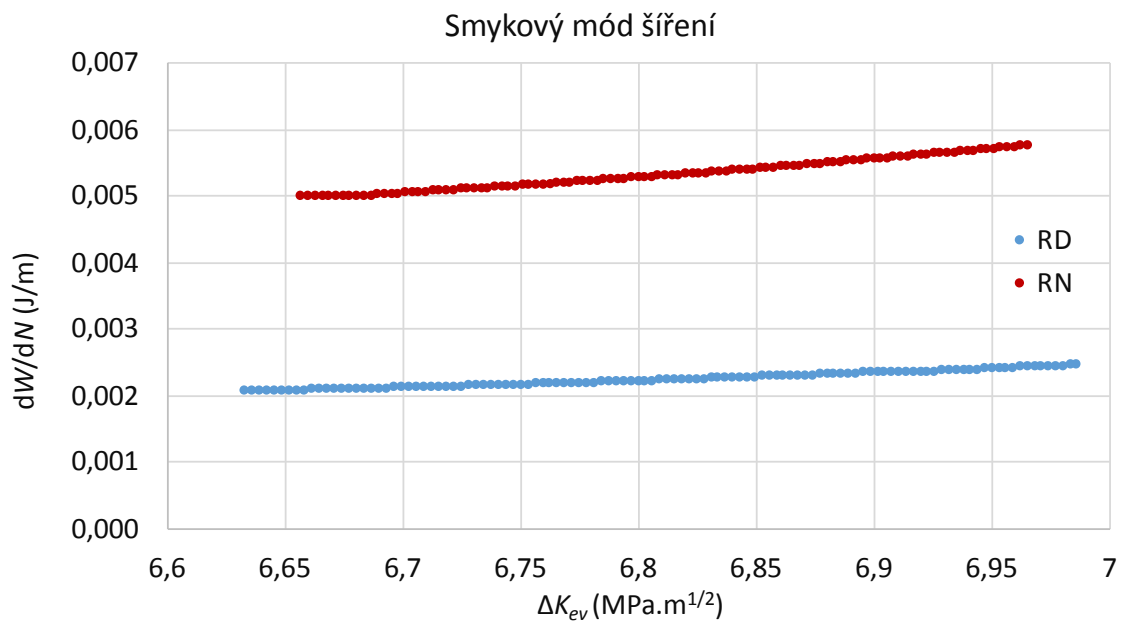
Množství disipované plastické energie za cyklus  $dW/dN$  bylo vypočítáno v podmínkách rovinné deformace pomocí dvourozměrného MKP modelu v tahovém i smykovém módu růstu ÚT při neproporcionálním zatěžování i referenční výpočet v čistě tahovém módu I. Pro slitinu AA2017 byla pro porovnání s proporcionálním zatěžováním počítána  $dW/dN$  i v podmínkách rovinné napjatosti.

Aby bylo možné porovnat  $dW/dN$  při neproporcionálním šíření ÚT s referenčním výpočtem tahovém módu I, byly pro oba módy šíření ÚT vypočteny i rozkmity faktoru intenzity napětí  $\Delta K_I$  a  $\Delta K_{II}$  metodou VCCT (Virtual Crack Closure Technique). Hodnoty  $\Delta K_I$  a  $\Delta K_{II}$  byly dále převedeny na  $\Delta K_{eq}$  podle Richarda pomocí vzorce (15). Vznikla tak závislost  $dW/dN$  na  $\Delta K_{eq}$  pro všechny počítané konfigurace.

Závislost  $dW/dN$  na  $\Delta K_{eq}$  pro tahový i smykový mód šíření ÚT v materiálu AA2017 je zobrazena na obr. 4.50, resp. obr. 4.51 pro MKP simulace provedené v podmínkách RD i RN. Všimněme si rozdílného měřítka na svislé ose. V případě tahového módu šíření trhliny je hustota disipované plastické energie za cyklus přibližně 6x větší, je-li výpočet proveden v podmínkách RN ve srovnání s RD. V případě smykového módu šíření je tento poměr pouze přibližně 2,4.



Obr. 4.50 Závislost  $dW/dN$  na  $\Delta K_{ev}$  v podmínkách RD i RN, tahový mód šíření únavové trhliny v materiálu AA2017



Obr. 4.51 Závislost  $dW/dN$  na  $\Delta K_{ev}$  v podmínkách RD i RN, smykový mód šíření únavové trhliny v materiálu AA2017



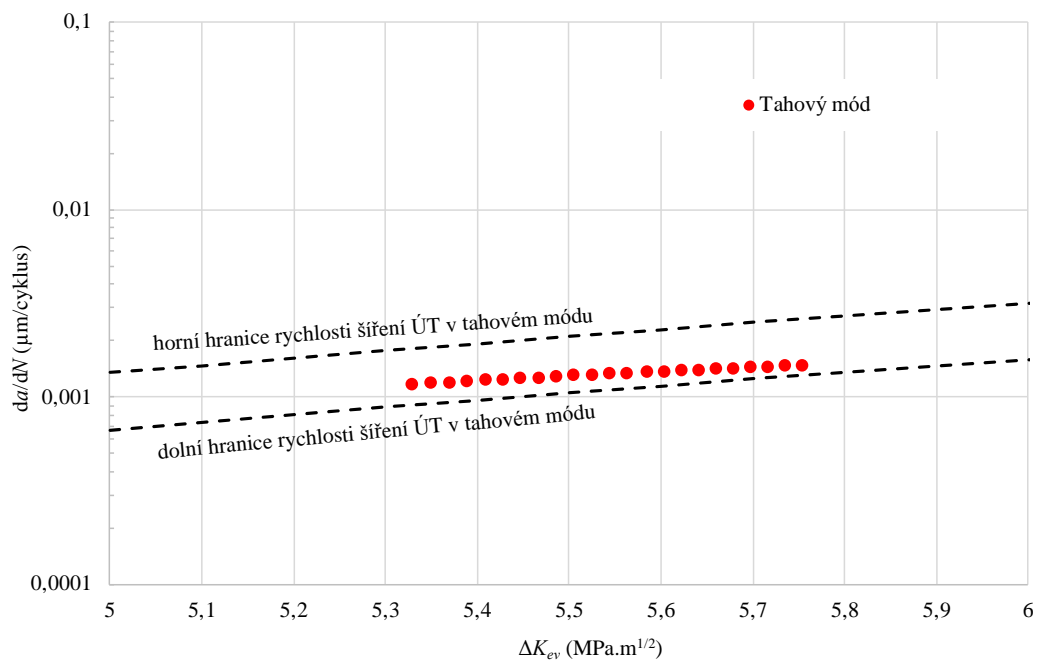
Kvůli povaze prezentovaných dat z únavových zkoušek v [20] jsou výsledky simulací šíření ÚT v tahovém resp. smykovém módu šíření porovnány s těmito daty v závislosti na  $\Delta K_{ev}$  podle Richardova vztahu (15), resp. v závislosti na  $\Delta K^*$  definovaným vztahem (7) v kap. 2.1.3. Při šíření ÚT v tahovém módu trhlina změní směr šíření takovým způsobem, že  $\Delta K_{II}$  dané cyklickým zatěžováním je změnou směru minimalizováno a šíření trhliny je dále řízeno tahovým módem I [20]. Z toho důvodu je v případě tahového módu šíření v [20] použito  $\Delta K_{ev}$  (obr. 4.52). V případě šíření ve smykovém módu je  $\Delta K_{II}$  stále dominantní, proto je pro srovnání numerických simulací s experimentem použito  $\Delta K^*$  (obr. 4.53).

Hodnoty  $dW/dN$  získané numerickou simulací byly přepočítány na rychlost šíření ÚT  $da / dN$  pomocí Klingbeilova vztahu

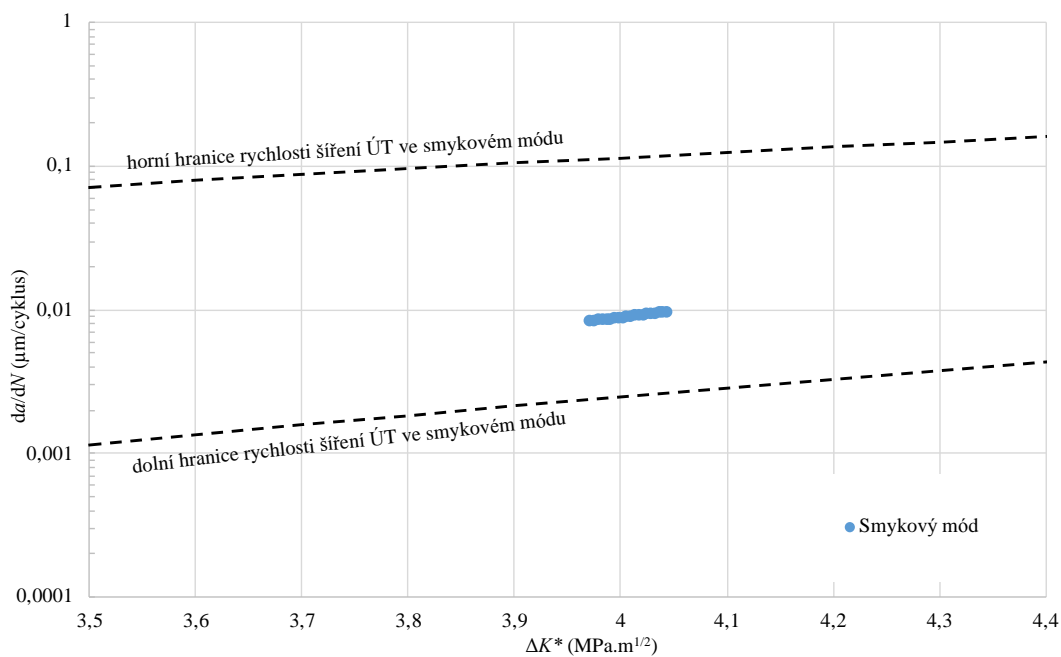
$$\frac{da}{dN} = \frac{1}{G_c} \frac{dW}{dN} \quad ,$$

kde  $G_c$  je kritická hodnota hnací síly trhliny (Klingbeilovu kritériu je podrobně věnován odst. 2.2.2.1).  $G_c$  je pak možné pomocí známého vztahu přepočítat na kritickou hodnotu faktoru intenzity napětí  $K_c$ . Použitá hodnota  $K_c$  materiálu AA2017 je uvedena v tab. 6. Korekce  $K_c$  na tloušťku tělesa nebyly použity.

V obou případech se numerické simulace dobře shodují s únavovými zkouškami. V případě šíření ÚT ve smykovém módu mají však experimentální data vysoký rozptyl daný konfigurací únavové zkoušky.



Obr. 4.52 Porovnání simulací šíření (RD) únavové trhliny v tahovém módu s výsledky únavových zkoušek převzatých z [20], dolní a horní čárkované hranice odpovídají rozptylu exp. dat



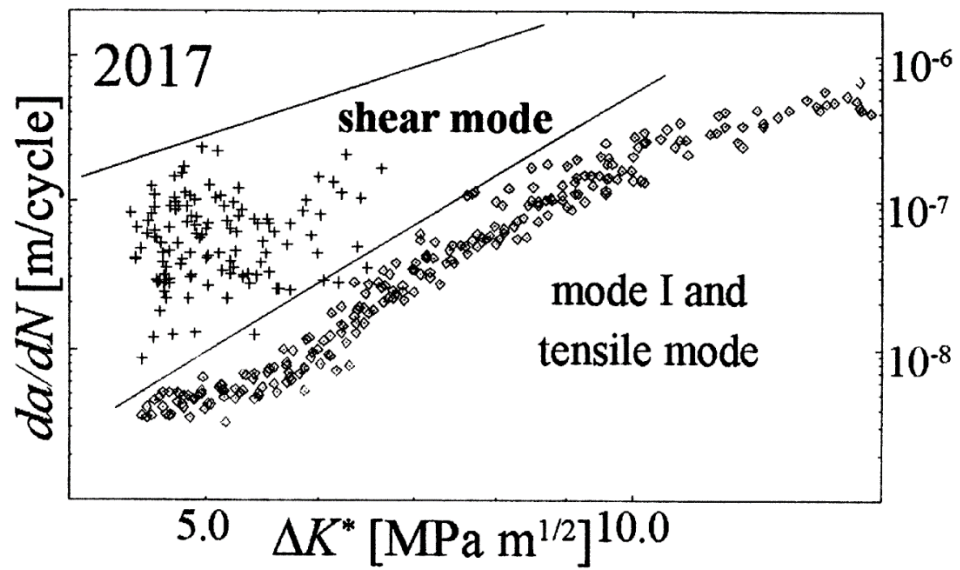
Obr. 4.53 Porovnání simulací šíření ÚT ve smykovém módu s výsledky únavových zkoušek převzatých z [20], dolní a horní čárkované hranice odpovídají rozptylu exp. dat

#### 4.5.7 Diskuze výsledků šíření únavové trhliny ve smíšeném neproporcionálním módu I+II

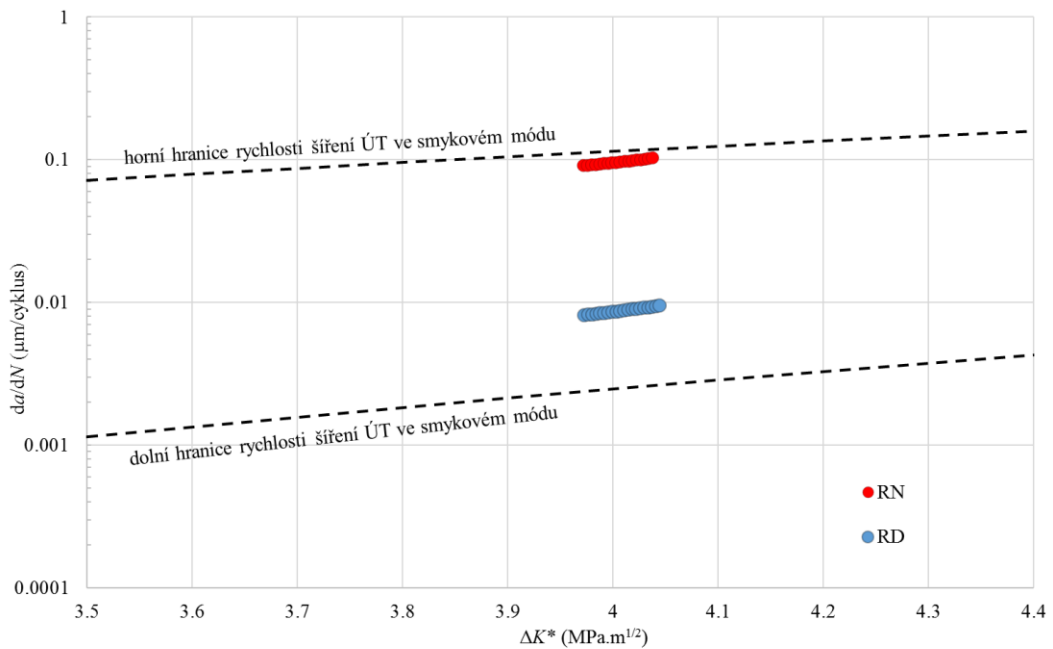
V tomto odstavci 4.5 byly provedeny simulace šíření únavové trhliny ve smíšeném módu I+II při neproporcionálním zatěžování statickým módem I a cyklickým módem II. Při simulacích bylo použito zkušební těleso na obr. 4.49a. To je možné zatěžovat různými variantami statického i cyklického smíšeného módu I+II. Zvolený způsob zatěžování byl při simulacích zvolen proto, že při takovém způsobu zatěžování se trhlina šíří tahovým nebo smykovým módem [20] v závislosti na zvoleném poměru  $K_I$  a  $\Delta K_{II}$ . Rychlosti šíření ÚT u smykového a tahového módu se však dramaticky liší, jak ukazuje obr. 4.54. Hodnoty  $K_I$  a  $\Delta K_{II}$  byly zvoleny podle [20] tak, aby se během experimentů vyskytovaly oba dva módy šíření. Výsledky numerických simulací na obr. 4.52 a obr. 4.53 dobře odpovídají únavovým zkouškám a je možné odhadnout rychlost ÚT v obou módech šíření.

Smykový mód je příznačný velkým rozptylem rychlosti šíření ÚT (obr. 4.54). V [20] je tento rozptyl vysvětlován tím, že je nejprve nutné vyhladit asperity na lomových plochách, které brání jejich smykovému pohybu, potom se teprve může trhlina šířit dále. V numerických simulacích nebylo zohledněno vyhlazování asperit, ani tření lomových ploch. Je tedy předmětem dalšího výzkumu zjistit, jestli je uvažování vzájemného tření lomových ploch pro zpřesnění numerického modelu nutné. Naproti tomu přidaný statický mód I soustavně odtahuje lomové plochy od sebe a zmírňuje tak vliv zmírněného vzájemného zamykání lomových ploch. Vliv vzájemného tření ploch v závislosti na velikosti statického módu I bude z tohoto důvodu velmi složité odhadnout. Ve smykovém módu trhlina navíc postupuje ve srovnání s tahovým po mnohem klikatější cestě. Tento fakt také přispívá k většímu rozptylu rychlosti šíření trhliny měřeného pomocí postupu jejího čela pouze v jednom směru.

Na obr. 4.55 je pro porovnání doplněn graf rychlosti šíření ÚT ve smykovém módu o výpočet v podmínkách RN. Rychlost šíření ÚT při použití výpočtu v RN vychází v blízkosti horní hranice rozptylu. Výpočty  $dW/dN$  pomocí dvourozměrné sítě poskytují horní a dolní odhad  $da/dN$ . Avšak použitá zkušební tělesa tloušťky 10 mm splňují pro daný materiál podmínku RD. Je tedy možné na základě výsledků kap. 4.3.7 předpokládat, že i při použití trojrozměrné MKP sítě by se rychlost šíření ÚT odpovídala střední rychlosti určené z experimentálních dat.



Obr. 4.54 Výsledky únavových zkoušek pro materiál AA2017, + označuje smykový mód,  $\diamond$  tahový mód a čistý mód I [20]



Obr. 4.55 Šíření ÚT ve smykovém módu, simulace provedené v podmínkách RD (modře) a RN (červeně), dolní a horní čárkované hranice odpovídají rozptylu exp. dat

## 5 ZÁVĚR

V práci byla zkoumána možnost použití energetického Klingbeilova kritéria pro predikci rychlosti šíření únavové trhliny v běžných konstrukčních materiálech vykazujících plastickou deformaci. K ověření teorie byly použity duralové slitiny.

Nejprve byl vytvořen numerický konečněprvkový model zkušebního tělesa typu CT a plochého tělesa, pomocí nichž byly nastaveny základní parametry modelu v případě numericky nejjednoduššího modelování šíření trhliny v tahovém módu I. Simulace byly provedeny pomocí dvourozměrné i trojrozměrné reprezentace zkušebního tělesa. Výsledky simulací vedly k následujícím dílčím závěrům:

- a) Spočítané množství disipované plastické energie v reverzní plastické zóně za cyklus závisí na velikosti konečných prvků v okolí kořene, ale při dostatečně malé velikosti prvku se tato hodnota již prakticky nemění. S ohledem na náročnost numerického výpočtu a jeho následné zpracování je nutné volit optimální velikost prvku pro dostatečnou přesnost, ale s únosným časem výpočtu.

- b) Pro prvotní odhad velikosti prvku v procesní zóně je možné použít vztah

$$vel_{prvku} = \frac{1}{16\alpha\pi} \left( \frac{\Delta K}{R_{p0.2}} \right)^2, \text{ rovnající se polovičnímu poloměru reverzní plastické zóny}$$

$$r_p \text{ před čelem ÚT podle vztahu } r_p = \frac{1}{2\alpha\pi} \left( \frac{\Delta K}{2R_{p0.2}} \right)^2, \text{ kde } \alpha = 1, \text{ resp. } 3 \text{ pro RN, resp.}$$

RD.

- c) Při použití trojrozměrného modelu plochého zkušebního tělesa vyrobeného z hliníkové slitiny D16CT1 tloušťky 5 mm s rovným čelem trhliny je celkové množství disipované plastické energie za cyklus přibližně o 30 % větší než v případě dvourozměrného tělesa v podmínkách RD.
- d) Ze srovnání trojrozměrných numerických simulací únavové trhliny se zakřiveným čelem podle skutečného zakřivení pozorovaného na lomové ploše a s rovným čelem ÚT vyplývá, že pro materiál D16CT1 vede zakřivení čela ÚT ke zvýšení celkového spočítaného množství disipované plastické energie za cyklus ve srovnání s rovným čelem trhliny. Tento vliv však se zvětšující se tloušťkou zkušebního tělesa slábne.

V další etapě práce byl numerický model zkušebního CT tělesa rozšířen tak, aby bylo možné simulovat šíření trhliny ve smíšeném módu I+II při proporcionálním zatížení. Provedení numerických simulací a porovnání s únavovými zkouškami provedenými autorem práce vedlo k těmto závěrům:

- e) Závislost množství disipované plastické energie v reverzní zóně okolo kořene trhliny za cyklus pro studovanou hliníkovou slitinu D16CT1 na délce trhliny šířící se ve smíšeném módu I+II je nejlépe korelována s ekvivalentním rozkmitem faktoru intenzity napětí ve smíšeném módu I+II podle Richarda  $\Delta K_{ev} = \frac{\Delta K_I}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta K_I^2 + 5.34(\Delta K_{II})^2}$ . Další zkoumané elastické veličiny tj. ekvivalentní rozkmit faktoru intenzity napětí podle Tanaky a rozkmit J-Integrálu jsou méně vhodné.
- f) Se zvyšujícím se úhlem odklonu vůči původnímu směru růstu trhliny v módu I se ztrácí symetrie plastické zóny v okolí jejího čela. Nejvíce energie je disipováno v oblasti směrem k původní trajektorii šíření ÚT.
- g) Pro odhad středního poloměru reverzní plastické zóny trhliny šířící se ve smíšeném módu I+II je možné použít vztah  $r_p = \frac{1}{2\alpha\pi} \left( \frac{\Delta K_{ev}^{Rich}}{2R_p 0.2} \right)^2$ , kde  $\alpha = 1$ , resp. 3 pro RN, resp. RD a  $\Delta K_{ev}^{Rich}$  je ekvivalentní rozkmit faktoru intenzity napětí podle Richarda.
- h) Pro konkrétní materiál hliníkové slitiny D16CT1 stačí pro odhad rychlosti šíření únavové trhliny ve smíšeném módu I+II použít pouze klasickou lomovou houževnatost  $K_{Ic}$  a Klingbeilovo kritérium.

Nakonec byla zkoumána možnost použití numerického modelu i pro případ tzv. neproporcionálního zatěžování v módu I+II, konkrétně pro cyklické zatěžování tělesa s trhlinou doprovázené statickým předpětím ve směru kolmém k cyklickému zatěžování. Z těchto výpočtů vyplynuly následující závěry:

- i) Navržený numerický model je schopen predikce rychlosti šíření únavové trhliny v tahovém i smykovém módu šíření. V rámci rozptylu experimentálních dat (zejména ve smykovém módu šíření) je dosaženo dobré shody výsledků.
- j) Pro odhad rychlosti šíření ÚT je stejně jako v případě únavové trhliny zatěžované v proporcionálním módu možné použít v Klingbeilově vztahu klasickou lomovou houževnatost materiálu  $K_{Ic}$ .

Pro další rozvoj numerického modelu je žádoucí ověřit jeho platnost pro další materiály a geometrie zkušební tělesa. Dále je žádoucí zkoumat možnosti predikce směru šíření únavové trhliny. Současná kritéria, např. MTS kritérium, pro odhad směru šíření ÚT poskytují podle experimentálních měření často spolehlivý odhad směru šíření. Jejich implementace do numerického modelu při použití Klingbeilova kritéria využívajícího plastickou deformaci v okolí čela ÚT včetně zpevnění materiálu je však komplikovaná. S měnící se trajektorií trhliny je nutné dynamicky měnit síť konečných prvků a přenášet

aktuální napěťový a deformační stav materiálu ze staré na novou síť, což může být zdrojem značných chyb.

## CITOVANÁ LITERATURA

- [1] HOFFMEYER, J. – DÖRING, R. – SEEGER, T. – VORMWALD M.: Deformation behaviour, short crack growth and fatigue lives under multiaxial nonproportional loading. *International Journal of Fatigue*, 28, 2006, pp. 508-520.
- [2] NAKAMURA, H. – TAKANASHI, M. – ITOH, T. – WU, M. – SHIMIZU, Y.: Fatigue crack initiation and growth behavior of Ti-6Al-4V under non-proportional multiaxial loading. *International Journal of Fatigue*, 33, 2011, pp. 842-848.
- [3] ONDRÁČEK, J. – MATERNA, A. – OLIVA, V.: A Numerical Estimation of Fatigue Crack Tip Plastic Zone Size and Shape under Mixed-Mode Loading Condition. *Key Engineering Materials*, 252, 2013, pp. 217-220.
- [4] ONDRÁČEK, J. – MATERNA, A.: Vliv parametru asymetrie cyklu na množství energie disipované v cyklické zóně únavové trhliny zatěžované ve smíšeném módu. In: *JuveMatter 2013 – Sborník přednášek studentské vědecké konference*, Praha, 2013.
- [5] ONDRÁČEK, J. – MATERNA, A.: FEM Evaluation of the Dissipated Energy in Front of a Crack Tip under 2D Mixed Mode Loading Condition. *Procedia Materials Science*, 3, 2014, pp. 673-678.
- [6] ONDRÁČEK, J. – MATERNA, A.: Plastic zone around fatigue crack determined by FEM and nanoindentation. *Key Engineering Materials*, 662, 2015, pp. 69-72.
- [7] ONDRÁČEK, J. – MATERNA, A.: MKP simulace šíření únavové trhliny v 2D neproporcionálním smíšeném módu zatěžování ve slitinách AA2017 a AA5083. In: *JuveMatter 2015 – Sborník přednášek studentské vědecké konference*, Prague, 2015.
- [8] ONDRÁČEK, J. – MATERNA, A.: Numerical evaluation of a Crack Growth Algorithm under 2D Non-Proportional Mixed Mode. *Powder Metallurgy Progress*, 15, 2015, pp. 94-98.
- [9] ONDRÁČEK, J. – MATERNA, A.: MKP výpočet energie disipované před čelem únavové trhliny v al slitině AA5083. In: *JuveMatter 2016 – Sborník přednášek studentské vědecké konference*, Praha, 2016.
- [10] ONDRÁČEK, J.: Kritéria lomové mechaniky pro šíření únavové trhliny ve smíšeném módu porušování. [Výzkumná zpráva R-KMAT-935/15], Praha: ČVUT, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, Katedra materiálů, 2015, p. 23.



- [11] ONDRÁČEK, J. – MATERNA, A.: Trojrozměrná MKP simulace plastické zóny v okolí zakřiveného čela únavové trhliny. Abstrakt ve sborníku semináře Výpočty konstrukcí metodou konečných prvků 2016. Brno: Fakulta strojního inženýrství, VUT.
- [12] COJOCARU, D. – KARLSSON, A. M.: Assessing plastically dissipated energy as a condition for fatigue crack growth. *International Journal of Fatigue*, 31, 2008, pp. 1154-1162.
- [13] ZHANG, J. – JOHNSTON, J. – CHATTOPADHYAY, A.: Physics-based multiscale damage criterion for fatigue crack prediction in aluminium alloy. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 37, 2014, pp. 119-131.
- [14] LUO, Ch. – CHATTOPADHYAY, A.: Prediction of fatigue crack initial stage based on a multiscale damage criterion. *International Journal of Fatigue*, 33, 2010, pp. 403-413.
- [15] PADMADINATA, U.H.: Investigation of Crack-Closure Prediction Models for Fatigue in Aluminium Alloy Sheet under Flight-Simulation Loading. [Report LR-619] Delft, Faculty of Aerospace Engineering, TU Delft 1990, p. 352.
- [16] KUNEŠ, I.: Použití metody konečných prvků pro modelování šíření únavové trhliny po jednorázovém přetížení. [Dizertační práce V-KMAT-373/93.]. Praha, ČVUT-FJFI-KMAT, 1993, 139 s.
- [17] SIH, G. C.: A Special Theory of Crack Propagation. In: *Mechanics of Fracture I*. Leyden, Noordhoff International Publishing, 1973, p. 21-45.
- [18] KUNZ, J.: Aplikovaná lomová mechanika, Praha: Nakladatelství ČVUT, 2005, 272 s.
- [19] NUISMER, J. R.: An energy release rate criterion for mixed mode fracture. *International Journal of Fracture*, 11, 1975, pp. 245-250.
- [20] PLANK, R. – KUHN, G.: Fatigue crack propagation under non-proportional mixed mode loading. *Engineering Fracture Mechanics*, 62, 1999, pp. 203-229.
- [21] ZERRES P. – VORMWALD, M.: Review of fatigue crack growth under nonproportional mixed-mode loading. *International Journal of Fatigue*, 58, 2014, pp. 75-83.
- [22] RICHARD, H. – SCHRAMM, B. – SCHIRMEISEN, N.: Cracks on Mixed Mode loading - Theories, experiments, simulations. *International Journal of Fatigue*, 62, 2014, pp. 93-103.
- [23] RICHARD, H.A. – FULLAND, M. – SANDER, M.: Theoretical crack path prediction. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 28, 2004, pp. 3-12.

- [24] TANAKA, K.: Fatigue crack propagation from a crack inclined to the cyclic tensile axis. *Engineering Fracture Mechanics*, 6, 1974, pp. 493-507.
- [25] WEERTMAN, J.: Theory of fatigue crack growth based on a BCS crack theory with work hardening. *International Journal of Fracture*, 9, 1973, pp. 125-131.
- [26] KLINGBEIL, N.: A total dissipated energy theory of fatigue crack growth in ductile solids. *International Journal of Fatigue*, 25, 2003, pp. 117-128.
- [27] NITTUR, P.G. – KARLSSON, A.M. – CARLSSON, L.A.: Implementation of a plastically dissipated energy criterion for three dimensional modelling of fatigue crack growth. *International Journal of Fatigue*, 54, 2013, pp. 47-55.
- [28] NITTUR, P.G. – KARLSSON, A.M. – CARLSSON, L.A.: Numerical evaluation of Paris-regime crack growth rate based on plastically dissipated energy. *Engineering Fracture Mechanics*, 124, 2014, pp. 155-166.
- [29] RICHARD, H.A.: Safety estimation for construction units with cracks under complex loading. *International Journal of Materials and Product Technology*, 3, 1988, pp. 326-338.
- [30] RICE, J.R.: Mechanics of crack tip deformation and extension by fatigue. *Symposium on fatigue crack growth*, ASTM-STP, 1967, vol. 415, p. 247-311.
- [31] BILBY, B.A. – COTTRELL, A.H. – SWINDEN, K.H.: The Spread of Plastic Yield from a Notch. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 272, 1963, pp. 304-314.
- [32] MURA, T. – LIN, C.T.: Theory of fatigue crack growth for work hardening materials. *International Journal of Fracture*, 10, 1974, pp. 284-287.
- [33] BODNER, S.R. – DAVIDSON, D.L. – LANKFORD, J.: A description of fatigue crack growth in ductile solids. *Engineering Fracture Mechanics*, 17, 1983, pp. 189-191.
- [34] MAZARI, M. – BOUCHOUICHA, B. – ZEMRI, M. – BENGUEDIAB, M. – RANGANATHAN, N.: Fatigue crack propagation analyses based on plastic energy approach. *Computational Materials Science*, 41, 2008, pp. 344-349.
- [35] LIAW, P.K. – KWUN, S.I. – FINE, M.E.: Plastic work of fatigue crack propagation in steels and aluminum alloys. *Metallurgical Transactions*, 12, 1981, pp. 49-55.
- [36] FINE, M.E. – DAVIDSON, D.: Quantitative measurement of energy associated with a moving fatigue crack. In: *Fatigue Mechanisms: Advances in Quantitative*, ASTM International, 1983, pp. 350-370.
- [37] DAILY, J.S. – KLINGBEIL, N.W.: Plastic dissipation in fatigue crack growth under mixed-mode loading. *International Journal of Fatigue*, 26, 2004, pp. 727-738.

- [38] SMITH, K.V.: Application of the dissipated energy criterion to predict fatigue crack growth of Type 304 stainless steel following a tensile overload. *Engineering Fracture Mechanics*, 78, 2011, pp. 3183-3195.
- [39] COJOCARU, D. – KARLSSON, A.M.: An object-oriented approach for modeling and simulation of crack growth in cyclically loaded structures. *Advances in Engineering Software*, 39, 2009, pp. 995-1009.
- [40] RANGANATHAN, N. – CHALON, F. – MEO, S.: Some aspects of the energy based approach to fatigue crack propagation. *International Journal of Fatigue*, 30, 2008, pp. 1921-1929.
- [41] ERDOGAN F. -SIH, G.C.: On the Crack Extension in Plates Under Plane Loading and Transverse Shear. *Journal of Basic Engineering*, 12, 1963, pp. 519-525.
- [42] SHIH, C.F.: Small-scale yielding analysis of mixed mode plane-strain crack problems. In: *Fracture Analysis: Proceedings of the 1973 National Symposium on Fracture Mechanics, Part II*, ASTM International, 1974, pp. 187-210.
- [43] LIU, A.F.: Crack Growth and Failure of Aluminium Plate Under In-Plane Shear. *AIAA Journal*, 12, 1973, pp. 180-185.
- [44] POOK, L.P.: The effect of crack angle on fracture toughness. *Engineering Fracture Mechanics*, 3, 1971, pp. 205-218.
- [45] RAMBERG, W. – OSGOOD, W.R.: Description of stress–strain curves by three parameters. *Technical Note No. 902, Advisory Committee For Aeronautics NASA*, Washington DC., 1943, 29 p.
- [46] SIH, G.C.: Strain-energy density factor applied to mixed mode plane strain crack problems. *International Journal of Fracture*, 10, 1974, pp. 305-321.
- [47] SIH, G.C. – BARTHELEMY, B.M.: Mixed mode fatigue crack growth predictions. *Engineering Fracture Mechanics*, 13, 1980, pp. 439-451.
- [48] BADALIANCE, R.: Application of strain energy density factor to fatigue crack growth analysis. *Engineering Fracture Mechanics*, 13, 1980, pp. 657-666.
- [49] PATEL, A.B. – PADNEY, P.K.: Fatigue crack growth under mixed mode loading. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 4, 1981, pp. 65-77.
- [50] GAO, H. – BROWN, M. W. - MILLER, K. J.: Mixed-mode fatigue thresholds. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 5, 1982, pp. 1-17.

- [51] HUSSAIN, M. – PU, L. – UNDERWOOD, J.: Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode II. In: *Fracture Analysis: Proceedings of the 1973 National Symposium on Fracture Mechanics, Part II*, ASTM International, 1974, pp. 2-28
- [52] PETTIT, R.G.: Crack turning in integrally stiffened aircraft structures. [*Disertační práce*], Ithaca, USA, Faculty of Graduate School of Cornell University, 2000, 235 s.
- [53] MACCAGNO, T.M. – KNOTT, J.F.: The mixed mode I/II fracture behaviour of lightly tempered HY130 steel at room temperature. *Engineering Fracture Mechanics*, 41, 1992, pp. 805-820.
- [54] HALLBACK, N. – NILSSON, F.: Mixed-mode I/II fracture behaviour of an aluminium alloy. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 42, 1994, pp. 1345-1374.
- [55] HALLBACK, N.: The influence of finite geometry and material properties on mixed-mode I/II fracture of aluminium. *International Journal of Fatigue*, 87, 1997, pp. 151-188.
- [56] BOLD, P.E. – BROWN, M.W. – ALLEN, R.J.: A review of fatigue crack growth in steels under mixed mode I and II. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 15, 1992, pp. 965-977.
- [57] SCHILLING, R. – KUHN G.: Ermüdungsrißausbreitung bei gleichphasiger Mixed-Mode I+II Belastung. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*, 23, 1992, pp. 139-144.
- [58] SCHILLING, R.: Ein Beitrag zur Ermüdungsrißausbreitung bei gleichphasiger Mixed-Mode-Belastung. In: *Fortschritt-Berichte Reihe 18*, 1990, Düsseldorf, ISSN: 0341-2369; 0178-9457.
- [59] HIGHSMITH, J.: Crack path determination for non-proportional mixed-mode fatigue. [*Disertační práce*], Atlanta, USA Georgia Institute of Technology, 2009, 249 p.
- [60] ZAMRIK, S. – MIRDAMADI, M. – DAVIS, D.: A Proposed Model for Biaxial Fatigue Analysis Using the Triaxiality Factor Concept. *Advances in Multiaxial Fatigue*, 85, 1993, pp. 1191-1213.
- [61] CHERMAHINI, R.G. – SHIVAKUMAR, K.N. – NEWMAN, J.C. – BLOM, A.F.: Three-Dimensional aspects of plasticity-induced fatigue crack closure. *Engineering Fracture Mechanics*, 34, 1989, pp. 393-401.

- [62] ROYCHOWDHURY, S. – ROBERT, H. – DODDS H. Jr.: A numerical investigation of 3-D small-scale yielding fatigue crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 70, 2003, pp. 2363-2383.
- [63] HEYDER, M. – KUHN, G.: 3D fatigue crack propagation: Experimental studies. *International Journal of Fatigue*, 28, 2006, pp. 627-637.
- [64] HEYDER, M. – KUHN, G.: Numerical and experimental investigations of the influence of corner singularities on 3D fatigue crack propagation. *Engineering Fracture Mechanics*, 72, 2005, pp. 2095-2105.
- [65] BAKKER, A.: Three-dimensional constraint effects on stress intensity distributions in plate geometries with through-thickness cracks. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 15, 1992, pp. 1051-1069.
- [66] DAVIS, E.A. – CONNELLY, F.M.: Stress distribution and plastic deformation in rotating cylinders of strain hardening material. *Journal of Applied Mechanics*, 26, 1959, pp. 25-30.
- [67] PARK, J. – NELSON, D.: Evaluation of an energy-based approach and a critical plane approach for predicting constant amplitude multiaxial fatigue life. *International Journal of Fatigue*, 22, 2000, pp. 23-39.
- [68] MANJOINE, M.J.: Ductility Indices at Elevated temperature. *Journal of Engineering Materials & Technology*, 4, 1975, pp. 156-161.
- [69] MANSON, S.S. – HALFORD, G.R.: Discussion: “Multiaxial Low-Cycle Fatigue of Type 304 Stainless Steel” (Blass, J. J., and Zamrik, S. Y., 1976 Winter Annual Meeting). *Journal of Engineering Materials and Technology*, 7, 1977, pp. 283-286.
- [70] van der WALT, S. – COLBERT, Ch. – VAROQUAUX, G.: The NumPy Array: A Structure for Efficient Numerical Computation. *Computing in Science & Engineering*, 13, 2011, pp. 22-30.
- [71] MCKINNEY, W.: Data Structures for Statistical Computing in Python. In: *Proceedings of the 9th Python in Science Conference (SCIPY2010)*, 2010, pp. 51-57.
- [72] Hunter, J.D.: Matplotlib: A 2D Graphics Environment. *Computing in Science & Engineering*, 9, 20017, pp. 90-95.
- [73] SOLANKI, K. – DANIEWICZ, S.R. – NEWMAN, J.C.: Finite element analysis of plasticity-induced fatigue crack closure: an overview. *Engineering Fracture Mechanics*, 71, 2004, pp. 149-171.

- [74] SOLANKI, K. – DANIEWICZ, S.R. – NEWMAN, J.C.: Finite element modeling of plasticity-induced crack closure with emphasis on geometry and mesh refinement effects. *Engineering Fracture Mechanics*, 70, 2003, pp. 1475-1489.
- [75] MSC.Marc Mentat Help - Marc Volume A: Theory and User Information, 2015.
- [76] MSC.Marc Mentat Help - Marc Volume D: User subroutines, 2015.
- [77] MATERNA, A. – OLIVA, V.: A numerical estimation of the effect of a bi-material interface on crack tip plastic zone size and shape. *Acta Metallurgica Slovaca*, 3, 2013, pp. 90-97.
- [78] ŠIMEK, O.: Numerické modelování růstu únavové trhliny ve slitině D16CT1. [Dizertační práce V-KMAT-891/13.]. Praha, ČVUT-FJFI-KMAT, 2013, 137 s.
- [79] ROYCHOWDHURY, S. – DODDS H. Jr.: Three-dimensional effects on fatigue crack closure in the small-scale yielding regime—a finite element study. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 26, 2003, pp. 663–673.
- [80] *ASM Aerospace Specification Metals Inc.* [Online]. Pompano Beach, FL, USA, [cit. 18.5.2018], Dostupné z MatWeb: <http://asm.matweb.com/search/SpecificMaterial.asp?bassnum=MA2024T4>.
- [81] BECHTLE, S. – FETT, T. – RIZZI, G. – HABELITZ, S. – SCHNEIDER, G.A.: Mixed-mode stress intensity factors for kink cracks with finite kink length loaded in tension and bending. *Journal of the Mechanical Behaviour of Biomedical Materials*, 3, 2010, pp. 303-312.
- [82] IRWIN, G.R.: Fracture Mode Transition for a Crack Traversing a Plate. *Journal of Basic Engineering*, 82, 1960, pp. 417-422.
- [83] YAN, X. – DU, S. – ZHANG, Z.: Mixed mode fatigue crack growth prediction in biaxially stretched sheets,“ *Engineering Fracture Mechanics*, 43, 1992, pp. 471-475.
- [84] RICHARD, H.A. – FULLAND, M. – SANDER, M.: Theoretical crack path prediction. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 28, 2005, pp. 3-12.

## SEZNAM OBRÁZKŮ

|  |    |
|--|----|
| Obr. 2.1 Zavedení souřadné soustavy a označení hlavních směrů tělesa s trhlinou [17]<br>.....  | 16 |
| Obr. 2.2 Napjatost v okolí čela trhliny v polárních souřadnicích .....   | 17 |
| Obr. 2.3 Faktory intenzity napětí na čele zakřivené trhliny [19] .....   | 18 |
| Obr. 2.4 Průběh $K_I^*$ , $K_{II}^*$ v závislosti na úhlu natočení trhliny při proporcionálním<br>zatěžování, úroveň smíšeného módu $\Phi = 45^\circ$ .....  | 19 |
| Obr. 2.5 Průběh $K_I^*$ , $K_{II}^*$ v závislosti na úhlu natočení trhliny při .....   | 20 |
| Obr. 2.6 $K_I$ - $K_{II}$ - $K_{III}$ diagram pro 3D smíšený mód zatěžování s hraničními plochami<br>prahové hodnoty únavy a lomové houževnatosti [21] .....   | 23 |
| Obr. 2.7 Úhel šíření trhliny při smíšeném módu porušování [28] .....   | 25 |
| Obr. 2.8 Závislost disipace plastické energie za cyklus $dW / dN$ při tahovém módu<br>zatížení I na $\Delta K$ pro titanovou slitinu (ideálně elasto-plastický materiál, $E =$<br>$134,9$ GPa, $\nu = 0,3$ a $\sigma_y = 1067$ MPa) [25] ..... | 27 |
| Obr. 2.9 Porovnání predikce šíření únavové trhliny s experimenty pro různé materiály<br>při tahovém módu zatěžování I [25] .....   | 28 |
| Obr. 2.10 Plastická deformace před čelem únavové trhliny [27] .....  | 30 |
| Obr. 2.11 Disipační domény podél tloušťky tělesa umožňující simulaci zakřivení čela<br>trhliny [26] .....  | 30 |
| Obr. 2.12 Obdélníková vyhodnocovaná oblast plně obklopuje cyklickou plastickou<br>zónu před kořenem ÚT zatížené v módu I [27] .....  | 31 |
| Obr. 2.13a Porovnání rychlosti šíření únavové trhliny v módu I včetně rozptylu<br>experimentálních dat pro slitinu Al 7475-T7351; $R=0,1$ [27] .....   | 32 |
| Obr. 2.14 Srovnání kritérií pro predikci směru šíření trhliny; S-kritérium [45], $G_{max}$<br>[50], $\sigma_\theta$ - MTS kritérium [40]; převzato z [51] .....  | 34 |
| Obr. 2.15 Experimentální výsledky závislosti změny směru šíření trhliny na $\Phi$ , $\Phi$ na<br>schématu označené jako $\beta_{eq} = 90^\circ - \Phi$ z [53] .....  | 35 |
| Obr. 2.16 Schématické znázornění oboru platnosti MTS a MSS kritéria [20] .....   | 36 |
| Obr. 2.17 Různé módy šíření únavové trhliny .....  | 37 |
| Obr. 2.18 Snímek z řádkovacího elektronového mikroskopu s rozvětvenou trhlinou,<br>v blízkosti vnějšího, resp. vnitřního povrchu trubky se trhlina šíří smykovým,<br>resp. tahovým způsobem [58] .....   | 38 |

|  |    |
|--|----|
| Obr. 2.19 Srovnání tvaru čela trhliny při simulaci únavového šíření prostorové trhliny v módu I bez použití multiaxiálního faktoru $MF$ (vlevo), s použitím $MF$ (vpravo) [26] .....   | 41 |
| Obr. 4.1 Schéma upraveného CT tělesa.....  | 47 |
| Obr. 4.2 Zkušební těleso č. 1 po únavové zkoušce.....  | 48 |
| Obr. 4.3 Schematicky znázorněný směr růstu únavové trhliny v tělese č. 1, délka trhliny v tahovém (I) a rovinném smykovém módu (I+II), ÚZ zakončena statickým dolomem (D).....   | 48 |
| Obr. 4.4 Změřená trajektorie trhliny na čelním povrchu pro zkušební těleso č. 1, změna směru šíření při délce trhliny 11,174 mm.....   | 49 |
| Obr. 4.5 Celková délka trhliny v závislosti na počtu cyklů pro všechna tělesa.....   | 50 |
| Obr. 4.6 Průběh vypočítaných hodnot $\Delta KI$ a $\Delta KII$ v závislosti na délce trhliny ve zkušebním tělese č. 1, délka trhliny vyjádřena pomocí $a_{skloněné}$ z obr. 4.2.....   | 51 |
| Obr. 4.7 Snímek lomové plochy u vrubu, šipka označuje směr šíření makroskopické trhliny .....  | 54 |
| Obr. 4.8 Mikromorfologie lomu vytvořeného šířením únavové trhliny v módu I v oblasti I vyznačené na obr. 4.3. ....   | 54 |
| Obr. 4.9 Pohled na rozhraní změny směru šíření únavové trhliny, šipka odpovídá směru šíření magistrální trhliny.....   | 55 |
| Obr. 4.10 Pohled na rozhraní změny směru šíření únavové trhliny, šipka odpovídá směru šíření magistrální trhliny.....  | 55 |
| Obr. 4.11 Oblast reiniciace únavové trhliny ve smíšeném módu porušování. Na spodním snímku je znázorněn detail místa reiniciace únavové trhliny ve smíšeném módu I a II, šipka označuje směr šíření makroskopické trhliny..... | 56 |
| Obr. 4.12 Mikromorfologie lomu vytvořeného šířením únavové trhliny ve smíšeném módu I a II v oblasti I+II vyznačené na obr. 4.3, šipka označuje směr šíření makroskopické trhliny .....  | 57 |
| Obr. 4.13 Detailní pohled na pole striací při vysokém zvětšení v oblasti I+II, šipka označuje směr šíření makroskopické trhliny .....  | 57 |
| Obr. 4.14 Snímek lomové plochy na rozhraní mezi únavovým lomem ve smíšeném módu I a II a silovým dolomem, šipka označuje směr šíření makroskopické trhliny .....   | 58 |
| Obr. 4.15 Snímek povrchu tělesa vyrobeného z oceli AISI304 v okolí čela trhliny se sítí vtisků [6].....  | 60 |



|  |    |
|--|----|
| Obr. 4.16 Ukázka poloviny dvourozměrné sítě v okolí čela ÚT .....  | 61 |
| Obr. 4.17 Křivka zpevnění korozivzdorné oceli AISI 304 .....   | 61 |
| Obr. 4.18 Rozložení von Misesova ekvivalentního napětí $\sigma_{eq}$ v okolí čela únavové<br>trhliny délky 16 mm, vlevo – rovinná napjatost, vpravo – rovinná deformace [6]<br>.....   | 62 |
| Obr. 4.19 Naměřené hodnoty tvrdosti v závislosti na vzdálenosti od čela únavové<br>trhliny délky 16 mm pro indentační síly 5, 10 a 20 mN [6] .....   | 63 |
| Obr. 4.20 Mapa tvrdosti v okolí kořene únavové trhliny umístěném v bodě (0; 0)<br>měřená metodou CMC při zatížení .....  | 64 |
| Obr. 4.21 Geometrie plochého tělesa pro VCÚ zkoušky [77].....  | 69 |
| Obr. 4.22 Zpevňování hliníkové slitiny D16CT1 [77] .....   | 70 |
| Obr. 4.23 Výřez 2D sítě konečných prvků plochého zkušební tělesa s centrálním<br>otvorem – pohled na ploché zkušební těleso ze směru osy z .....   | 71 |
| Obr. 4.24 Tvar sjednoceného čela pro všechna tělesa o tloušťce 1 mm a proložení<br>polynomem 4. stupně [77], zde z označuje hloubku pod povrchem .....   | 72 |
| Obr. 4.25 3D síť konečných prvků ve středové oblasti tělesa, celkový rozměr MKP<br>sítě je 160x15 mm s rozměrem ve směru z 0,25; 0,5 a 2,5 mm (polovina tloušťky)<br>.....   | 73 |
| Obr. 4.26 3D síť konečných prvků, těleso tloušťky 5 mm – rovné čelo trhliny (vlevo),<br>zakřivené čelo trhliny (vpravo), pohled ze směru y .....   | 73 |
| Obr. 4.27 Znázornění okrajových podmínek v programu MSC.MARC. Svislé červené<br>šipky reprezentují zrcadlovou symetrii zkušební tělesa podle jeho středové<br>osy, zelené šipky kolmé k rovině zobrazení zrcadlovou symetrii zkušební<br>tělesa (použité pouze u 3D modelu) podle jeho tloušťky a fialová vodorovná<br>šipka uchycení tělesa v jednom uzlu ve směru y, tak aby se model nemohl<br>pohybovat jako tuhý celek..... | 75 |
| Obr. 4.28 Vliv velikosti prvku ve zjemněné oblasti na hodnoty disipované energie<br>$dW / dN$ , 2D model s podmínkou RD.....   | 76 |
| Obr. 4.29 Vliv počtu vrstev v tloušťce $B / 2$ na $dW / dN$ v 3D modelu šíření ÚT v<br>módu I.....   | 77 |
| Obr. 4.30 Závislost $dW / dN$ v reverzní plastické zóně na délce trhliny pro různé<br>tloušťky tělesa, 3D simulace provedené s rovným a zakřiveným čelem .....   | 78 |

|   |    |
|---|----|
| Obr. 4.31 Průběh hustoty disipované plastické energie podél čela trhliny délky $a = 5,55$ mm pro různé tloušťky tělesa, 3D simulace s rovným čelem, $z = 0$ je střed tělesa .....   | 79 |
| Obr. 4.32 Průběh hustoty disipované plastické energie podél čela trhliny délky $a = 5,55$ mm pro různé tloušťky tělesa, 3D simulace se zakřiveným čelem, .....  | 79 |
| Obr. 4.33 Porovnání hustoty disipované plastické energie za cyklus v okolí čela únavové trhliny ve střední rovině tělesa ( $z = 0$ ) pro rovné (vlevo) a zakřivené (vpravo) čelo trhliny délky 5,55 mm v tělese tloušťky $B = 5$ mm, 3D model ..  | 80 |
| Obr. 4.34 Porovnání hustoty disipované plastické energie za cyklus v okolí čela únavové trhliny v povrchové vrstvě tělesa ( $z = 0$ ) pro rovné (vlevo) a zakřivené (vpravo) čelo trhliny délky 5,55 mm v tělese tloušťky $B = 5$ mm, 3D model .. | 81 |
| Obr. 4.35 Rozložení hustoty disipované plastické energie za cyklus v okolí čela únavové trhliny, 2D simulace, podmínky rovinné deformace, délka trhliny $a = 5,55$ mm.....  | 81 |
| Obr. 4.36 Geometrie zkušební tělesa (a) a síť konečných prvků – pohled na horní polovinu modelu (b) a pohled na zjemněnou oblast v okolí kořene únavové trhliny (c).....  | 84 |
| Obr. 4.37 Cyklické plastické zóny pro různé úhly šíření ÚT se stejnou hodnotou J-Integrálu.....   | 87 |
| Obr. 4.38 Lineární zpevňování hliníkové slitiny D16CT1 [77] .....   | 88 |
| Obr. 4.39 2D MKP síť pro trhlinu v upraveném CT tělese – celkový pohled a detail, vlevo síť pro výpočet v módu I, vpravo síť pro výpočet ve smíšeném módu I+II.....   | 89 |
| Obr. 4.40 Tvary plastických zón pro délku trhiny 11 mm v módu I a 18 mm v módu I+II – tmavší barva odpovídá větší disipované plastické energii v logaritmickém měřítku.....   | 90 |
| Obr. 4.41 Závislost experimentální rychlosti šíření únavové trhliny v módu I na $dW/dN$ v podmínkách RD a RN v log-log souřadnicích, Klingbeilův vztah podle (21) .....   | 93 |
| Obr. 4.42 Závislost experimentální rychlosti šíření únavové trhliny v módu I+II na $dW/dN$ v podmínkách RD a RN v log-log souřadnicích, Klingbeilův vztah podle (21) .....  | 93 |
| Obr. 4.43 Změřená rychlost šíření únavové trhliny ve zkušebním tělese č. 1 v závislosti na délce trhliny .....  | 94 |

|   |     |
|---|-----|
| Obr. 4.44 Závislosti naměřené rychlosti šíření ÚT na $dW/dN$ v RD pro šíření v módu I a smíšeném módu I+II, měřeno na zkušebním tělese č. 1, vyneseno v log-log souřadnicích.....         | 94  |
| Obr. 4.45 Závislosti rychlosti šíření ÚT na $\Delta K_{ev}$ pro šíření v módu I a smíšeném módu I+II, měřeno na zkušebním tělese č. 1, vyneseno v log-log souřadnicích.....               | 95  |
| Obr. 4.46 Porovnání tvaru plastické zóny počítané v podmínkách RD pro konstantní hodnotu $\Delta J = 3,38 \text{ kJ/m}^2$ pro různé úhly sklonu růstu trhliny $\beta$ .....               | 97  |
| Obr. 4.47 $\Delta K_I$ a $\Delta K_{II}$ po změně směru zatěžování a odpovídající úroveň smíšeného módu $\Phi$ .....  | 98  |
| Obr. 4.48 Geometrie CTS tělesa zařízení pro upnutí do pulsátoru [19].....   | 100 |
| Obr. 4.49 MKP síť zkušebního tělesa celkový pohled a) a c), detailní pohled na oblast šíření únavové trhliny b) a d), tahový mód I a) a b), smíšený mód I+II c) a d).....                 | 101 |
| Obr. 4.50 Závislost $dW/dN$ na $\Delta K_{ev}$ v podmínkách RD i RN, tahový mód šíření únavové trhliny v materiálu AA2017.....  | 104 |
| Obr. 4.51 Závislost $dW/dN$ na $\Delta K_{ev}$ v podmínkách RD i RN, smykový mód šíření únavové trhliny v materiálu AA2017.....   | 104 |
| Obr. 4.52 Porovnání simulací šíření (RD) únavové trhliny v tahovém módu s výsledky únavových zkoušek převzatých z [19], dolní a horní čárkované hranice odpovídají rozptylu exp. dat..... | 106 |
| Obr. 4.53 Porovnání simulací šíření ÚT ve smykovém módu s výsledky únavových zkoušek převzatých z [19], dolní a horní čárkované hranice odpovídají rozptylu exp. dat.....                 | 106 |
| Obr. 4.54 Výsledky únavových zkoušek pro materiál AA2017, + označuje smykový mód, $\diamond$ tahový mód a čistý mód I [19].....   | 108 |
| Obr. 4.55 Šíření ÚT ve smykovém módu, simulace provedené v podmínkách RD (modře) a RN (červeně), dolní a horní čárkované hranice odpovídají rozptylu exp. dat.....                        | 108 |