

## Posudek disertační práce:

### NUMERICAL SOLUTION OF THE INCOMPRESSIBLE FLOW USING THE DOMAIN DECOMPOSITION METHOD

*Ing. Martin Hanek*

#### *a) Dosažení cíle*

Předložená disertační práce se zabývá víceúrovňovým a paralelním numerickým řešením Navierových-Stokesových rovnic pro stacionární proudění nestlačitelné tekutiny pomocí metody konečných prvků, jež slouží jako základ pokročilých algoritmů známých jako metoda *Balancing Domain Decomposition by Constraints* (BDDC). Metoda BDDC předpokládá, že diskretizovaná oblast, na níž se rovnice řeší, je vhodně rozdělena na podoblasti. Jejich vlastnosti jsou pro efektivitu dalších výpočtů velmi důležité. Práce se věnuje i tomuto tématu a autor navrhuje vlastní algoritmus rozdělení oblasti se sítí konečných prvků.

Stanoveného cíle bylo dosaženo, metoda byla použita pro řešení několika 3D úloh, včetně průmyslově zaměřeného modelování hydrostatického ložiska.

#### *b) Rozbor současného stavu*

Zasazením své práce do kontextu odborné literatury se autor zabývá obsáhle v podkapitole 1.2 a dále, pro specifická témata jednotlivých kroků metody BDDC, v podkapitolách 3.4, 3.5 a 4.1. Je patrné, že se autor dobře orientuje v současném vývoji jak vlastní metody BDDC, tak navazujících témat (sít' a její dekompozice, paralelní organizace výpočtů aj.).

#### *c) Teoretický a praktický přínos*

V práci jsou vyloženy hlavní myšlenky a algoritmy metody i dalších souvisejících kroků. Do značné míry jde o autorskou kompilaci z jiných zdrojů, vlastní přínos spočívá v zaměření na řešení soustav lineárních algebraických rovnic s nesymetrickou maticí a na víceúrovňové předpodmínění – obojí v kontextu metody BDDC a Navierových-Stokesových (NS) rovnic. Jde zkrátka o komplexní „vyladění“ jednotlivých komplikovaných kroků metody tak, aby efektivně řešila úlohy s NS rovnicemi; práce je aplikačně zaměřena.

Její praktický přínos je značný, neboť doktorand dostupný software doplnil vlastními programy a vytvořil nástroj pro efektivní řešení rozsáhlých 3D úloh s NS rovnicemi. Výsledky numerických testů a jejich rozbor zároveň ukazují jak přednosti metody, tak úskalí, která vyvstávají při řešení velkých úloh.

#### *d) Vhodnost použitých metod řešení; znalosti*

Výsledky dokládají, že použité metody jsou vhodné a způsob jejich aplikace je správný. Zároveň je patrné, že doktorand prokázal odpovídající znalosti v daném oboru, a to v širokém rozpětí od porozumění složitým algoritmům, přes vytváření vlastních algoritmů, pokročilé programování, práci s cizím softwarem, až po organizaci paralelních výpočtů.

#### *e) Formální úroveň práce*

Práce je psaná srozumitelnou angličtinou jen s řídkými opomenutími<sup>1</sup>, sazba (L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X) je úhledná, tabulky přehledné, obrázky (převážně barevné) názorné a s čitelnými popisy os a barevných stupnic – s výjimkou Fig. 5.24 a Fig. 5.40.

Méně spokojenosti však vyvolává výklad o metodě BDDC, je totiž poněkud „rozevlátý“. Několik příkladů. Na straně 11 a 12 se hranice oblasti  $\omega$  značí  $\partial\Omega$  i  $\Gamma$ , ale

<sup>1</sup>Například 12<sup>3</sup> corresponds, 14<sup>7</sup> results, 15<sub>9</sub> corresponds, 19<sub>6</sub> a 19<sub>5</sub> corresponds, 20<sub>13</sub> a 21<sup>6</sup> matrices, 21<sup>2</sup> uses aj.; občas by se dalo diskutovat o (ne)užívání určitých a neurčitých členů.

od strany 24 už  $\Gamma$  má význam rozhraní mezi podoblastmi  $\Omega_i$ , což je naštěstí explicitně řečeno. Na první třetině strany 18 jsou mj. zavedeny funkce  $\phi_{xj}, \phi_{yj}, \phi_{zj}$ , avšak v součtech o něco níže vystupují funkce  $N_{xj}, N_{yj}, N_{zj}$ , což čtenáře směřuje k tvarovým funkcím  $N$  ze stran 16 a 17, ty však jsou jinak indexovány a definovány na referenční krychli před jejím zobrazením na prvky sítě (zobrazení také není zmíněno). V sumách (2.17) má počet sčítanců asi být třetinový, protože se sčítají vektorové funkce. Nároky na čtenáře zvyšuje i to, že jeden symbol značíva jak funkci, která je lineární kombinací bázevých funkcí, tak vektor koeficientů této kombinace — např. ve (2.31) má  $\mathbf{u}^k$  význam funkce, ale ve (2.34)  $\mathbf{u}^{k+1}$  představuje vektor. Nečíslovaná soustava na straně 24 neodpovídá soustavě (3.1) (měla by mít přeuspořádané i sloupce). Na straně 25 se objevuje prostor  $H_0^1(\Omega_i, \partial\Omega_i \cap \Gamma)$ , jenž nebyl definován; čtenář uhaduje, že asi jde o podprostor funkcí s nulovou stopou na  $\partial\Omega_i \cap \Gamma$ . Na stejném místě je zmíněn a dále používán skalární součin  $a_i(\cdot, \cdot)$ , není však definován. U lemmatu 3 by bylo dobré vysvětlit kvaziuniformitu sítí, ta se navíc obvykle týká posloupnosti sítí, zde však žádná posloupnost zmíněna není. Na straně 27 se objeví prostory  $W_i$  dané prostory stop  $W^h(\partial\Omega_i \cap \Gamma)$ , čtenář jen dle  $h$  odhaduje, že asi jde o stopy konečnoprvkových funkcí. V téže větě se píše, že prvky prostoru  $W = \prod_{i=1}^N W_i$  jsou nespojitě napříč rozhraním, ale tím se naznačuje, že jsou definované i uvnitř podoblastí  $\Omega_i$ . Hned v další větě se hovoří o spojitě konečnoprvkové aproximaci (ale čeho?) a podprostoru  $\widehat{W}$ , možná, že vlastně jde o prostor  $V_h$  zavedený na straně 18. Srozumitelnosti nepomáhá ani to, že na straně 38 se o  $W_i$  píše jako o matici vah.

Míst, kde se čtenář může zarazit je více. Jistou omluvou je složitost metody, kdy se pracuje na podoblastech, na rozhraních, na jemné síti, na hrubších sítích a je třeba používat řadu operátorů mezi jednotlivými prostory funkcí. Je proto velice těžké metodu stručně, ale srozumitelně popsat. Například by pomohly schematické obrázky, případně ucelený výčet jednotlivých operátorů a jejich maticových reprezentací (symbolů), aby čtenář s horší pamětí nemusel neustále listovat a hledat, kde byl symbol poprvé zmíněn.

Věřím, že při obhajobě autor využije svou prezentaci k jasnému vyložení hlavních myšlenek metody.

#### f) Závěr a doporučení

Ačkoli v části e) uvádím ukázky výhrad, netýkají se těžiště práce, za něž považuji výpočetní modelování úloh s NS rovnicemi. A tady je vidět, že doktorand odvedl velký kus práce, o jejímž rozsahu ve své disertaci částečně a skromně pomlčel — mám na mysli například detaily propojení softwarových balíčků s vlastními programy, více podrobností o organizaci paralelních výpočtů a o prostředcích pro zpracování a vizualizaci výsledků aj.).

Uchazeč svou práci doložil, že se orientuje v dané odborné problematice a že je schopen samostatně a novátorské vědecké činnosti ústící až do aplikačního použití. **Doporučuji proto, aby jeho disertační práce *Numerical solution of the incompressible flow using the domain decomposition method* byla přijata k obhajobě.**

V Praze dne 22. května 2022

Jan Chleboun

*Otázky k případné diskusi*

1) Na straně 65 dole se píše, že lineární iterace byly zastaveny po maximálně 100 iteracích, avšak hned na další straně se uvádí, že v průměru bylo vykonáno 511 lineárních iterací.

2) Na obrázcích hydrostatického ložiska (např. na straně 71 a 72) je vidět, že při vstupu do tenké vrstvy se rychlost oleje prudce zvýší. Nepůsobil tento jev výpočetní potíže? Jak dobře je podchycen? Zkoušel jste v oblastech výrazné změny rychlosti jemnit síť?