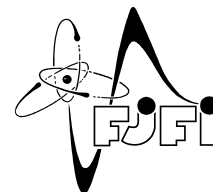




ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



Pokročilé geometrické metody zpracování obrazu

Advanced geometric methods of image processing

Bakalářská práce

Autor: **Aaron Schick**

Vedoucí práce: **prof. Dr. Ing. Michal Beneš**

Akademický rok: 2021/2022

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student:	Aaron Schick
Studijní program:	Aplikace přírodních věd
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Studijní zaměření:	Matematické modelování
Název práce (česky):	Pokročilé geometrické metody zpracování obrazu
Název práce (anglicky):	Advanced geometric methods of image processing

Pokyny pro vypracování:

- 1) Seznamte se s postupy při zpracování digitálního obrazu s důrazem na difuzní procesy.
- 2) Prostudujte výsledky analytického řešení lineárních parciálních diferenciálních rovnic parabolického typu.
- 3) Seznamte se s problematikou numerického řešení parciálních diferenciálních rovnic parabolického typu.
- 4) Seznamte se s nelineární řízenou difuzí a dynamikou křivek či nadploch v závislosti na jejich křivosti.
- 5) Na základě získaných informací vyzkoušejte konkrétní úlohu degenerované difuze pro použití při zpracování obrazu.

Doporučená literatura:

- 1) A. Bovik, Image & Video Processing. Academic Press, 2000.
- 2) G. Aubert, P. Kornprobst, Mathematical Problems in Image Processing, Partial Differential Equations and the Calculus of Variations. Springer, 2002.
- 3) A. N. Tichonov , A. A. Samarskij , Rovnice matematické fyziky. Glavizdat, Moskva, 1953.
- 4) J. Sethian, Level Set Methods. Cambridge, 1996.
- 5) J. Weickert, Anisotropic diffusion in image processing, ECMI Series. Teubner, Stuttgart, 1998.
- 6) F. Cao, Geometric Curve Evolution and Image Processing. Springer Verlag, 2003.

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

prof. Dr. Ing. Michal Beneš

Katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze, Trojanova 13, 120 00 Praha 2, Česká republika

Jméno a pracoviště konzultanta:

Datum zadání bakalářské práce: 31.10.2020

Datum odevzdání bakalářské práce: 7.7.2021

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

V Praze dne 30.10.2020



garant oboru



vedoucí katedry



děkan

Poděkování:

Chtěl bych zde poděkovat svému školiteli prof. Dr. Ing. Michalu Benešovi za pečlivost, ochotu, vstřícnost a odborné i lidské zázemí při vedení mé bakalářské práce.

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a uvedl jsem všechnu použitou literaturu.

V Praze dne 7. července 2022

.....
Aaron Schick

Název práce:

Pokročilé geometrické metody zpracování obrazu

Autor: Aaron Schick

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Matematické modelování

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: prof. Dr. Ing. Michal Beneš, Katedra matematiky, FJFI, ČVUT

Konzultant: —

Abstrakt: Tato práce se zaměřuje na zpracování digitálního obrazu pomocí geometrických a difuzních metod. Nejprve je zájem upřen na lineární rovnici difuze. Dále se práce zaměřuje na nelineární difuzní a geometrické modely používající se ve zpracování obrazu jako jsou například Peronova-Malikova rovnice a vrstevnicová rovnice. Po popsání těchto modelů se práce zabývá jejich aproximativním řešením pomocí diferenčních schémat založených na metodě konečných diferencí. V poslední kapitole jsou tato schémata aplikována na testovací obrazová data.

Klíčová slova: metoda konečných diferencí, Peronova-Malikova rovnice, rovnice vedení tepla, vrstevnicová rovnice, zpracování obrazu

Title:

Advanced geometric methods of image processing

Author: Aaron Schick

Abstract: This thesis focuses on digital image processing using geometric and diffusion methods. First, interest is focused on the linear diffusion equation. Furthermore, the work focuses on nonlinear diffusion and geometric models used in image processing, such as the Perona-Malik equation and the level-set equation. After describing these models, the work deals with their approximate solution using difference schemes based on the finite difference method. In the last chapter, these schemes are applied to test image data.

Key words: finite difference method, heat equation, image processing, level-set method, Perona-Malik equation

Obsah

Použité značení	9
Úvod	11
1 Geometrické a difuzní metody ve zpracování obrazu	13
2 Diferenciální rovnice ve zpracování obrazu	19
2.1 Analytické řešení rovnice difuze	19
2.1.1 Smíšená úloha pro rovnici vedení tepla na úsečce	19
2.1.2 Smíšená úloha pro rovnici vedení tepla na obdélníku	25
2.1.3 Konvoluce a její vlastnosti	28
2.1.4 Cauchyova úloha pro rovnici vedení tepla v \mathbb{R}^n	28
2.2 Peronova-Malikova rovnice	29
2.3 Pohyb křivek podle střední křivosti	30
2.3.1 Parametrický přístup	31
2.3.2 Vrstevnicový přístup	33
2.4 Mumfordův-Shahův funkcionál	34
3 Numerické řešení difuzních úloh ve zpracování obrazu	37
3.1 Diferenční náhrady a jejich chyby	37
3.2 Rovnice vedení tepla na úsečce	39
3.3 Peronova-Malikova rovnice	39
3.4 Vrstevnicová rovnice	42
3.5 Mumfordův-Shahův funkcionál	44
4 Výpočetní studie	45
4.1 Rovnice vedení tepla	45
4.1.1 Jednorozměrný případ	45
4.1.2 Dvourozměrný případ	47
4.2 Peronova-Malikova rovnice	50
4.3 Vrstevnicová rovnice	57
4.4 Mumfordův-Shahův funkcionál	66
Závěr	71

Použité značení

$\partial\Omega$	hranice množiny Ω
$\bar{\Omega}$	uzávěr množiny Ω
$f' \equiv \frac{df}{dx}$	derivace funkce f podle x
$\dot{f} \equiv \frac{df}{dt}$	derivace funkce f podle t
$\partial_t u \equiv \frac{\partial u}{\partial t}$	první parciální derivace funkce u podle proměnné t
$\partial_{xy} u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$	druhá parciální derivace funkce u podle proměnných x a y
$\partial_n u \equiv \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$	první parciální derivace funkce u ve směru vektoru \mathbf{n}
$\text{dom}(u)$	definiční obor funkce u
$\text{ran}(u)$	obor hodnot funkce u

Úvod

Zrak je nepochybně náš nejdůležitější smysl, jelikož většina vjemů, které v každodenním životě přijímáme, jsou ty vizuální. Proto je pořizování obrazu a jeho následná analýza pro nás přirozený způsob, jakým můžeme získávat informace o našem světě. Právě kvůli vysoké poptávce je zpracování obrazu v dnešní době již velmi rozvinutou disciplínou, která nachází uplatnění téměř ve všech sférách lidské činnosti. Geometrické metody pak mají za úkol rozkrýt geometrickou povahu daného obrazu. To znamená určit polohu a velikost objektů v něm. Příkladem může být určení objemu srdeční komory ze snímků z magnetické rezonance (MRI).

V první kapitole si stručně uvedeme některé vybrané postupy zpracování digitálního obrazu. V další kapitole představíme parciální diferenciální rovnice hrající svou roli ve zpracování obrazu. Nejprve provedeme odvození analytického řešení lineární rovnice vedení tepla a dále si ukážeme nelineární rovnici Peronovu-Malikovu, která ze zmíněné lineární úlohy vychází. Nakonec si zde představíme rovnice vycházející z úlohy o pohybu křivky podle její střední křivosti a Eulerovy rovnice pro minimalizaci eliptické aproximace Mumfordova-Shahova funkcionálu.

Ve třetí kapitole se pak seznámíme s problematikou numerického řešení těchto rovnic pomocí metody konečných diferencí. V poslední kapitole uvedeme vlastní numerické výsledky. Pomocí experimentálního řádu konvergence ověříme u lineárních úloh se známým analytickým řešením teoretický řád konvergence daných diferenčních schémat z předchozí kapitoly. Na závěr uvedeme numerické řešení modelů určených k odstraňování šumu, zvýrazňování hran a segmentaci aplikovaných na testovací obrázky.

Tato bakalářská práce vznikla v rámci projektu *Centrum pokročilých aplikovaných přírodních věd* č. CZ.02.1.01/0.0/0.0/16_019/0000778 MŠMT ČR.

Kapitola 1

Geometrické a difuzní metody ve zpracování obrazu

Zpracování obrazu našlo uplatnění v mnoha oblastech lidské činnosti. Mezi tyto oblasti patří astronomie, částicová fyzika, autonomní navigování či medicína, kde se například zpracovávají lékařské snímky z magnetické rezonance (MRI) či z výpočetní tomografie (CT). O využití geometrických metod v medicíně podrobně pojednává publikace [24].

Konečným cílem zpracování obrazu je pochopení a interpretace obsahu daného obrazu. Před tím, než k tomuto kroku přistoupíme, musíme ho různě upravit. Nejdříve musíme obraz vůbec pořídit a vhodně reprezentovat. Následně ho musíme zbavit nežádoucích jevů jako je například přílišné zašumění, zkreslení vzniklé při digitalizaci či nevýraznost obrysů objektů, které nám brání v úspěšném vlastním zpracování. Postup zpracování obrazu můžeme tedy shrnout do těchto kroků:

1. **Pořízení a digitalizace.**
2. **Předzpracování.** (například odstranění šumu, obnovení obrazu)
3. **Vlastní zpracování.** (například segmentace)
4. **Interpretace získaných informací a porozumění jim.**

My se zde dále zůžeme na techniky, které budeme podrobněji rozebírat v dalších kapitolách. Vzorce pro výpočet diskretní Gaussovy konvoluční masky jsou odvozeny z důvodu jejich využití v poslední kapitole.

Při tvorbě této kapitoly bylo převážně čerpáno ze zdrojů [9], [4], [42], [39] a [23].

Diskretizace spojitého obrazu

Na vstupní signál (obraz) můžeme nahlížet jako na obrazovou funkci dvou proměnných $u: (\mathbb{R}^2) \rightarrow \text{ran}(u)$ se souvislým definičním oborem $\text{dom}(u)$ i oborem hodnot $\text{ran}(u)$. Obor hodnot obsahuje všechny možné barvy vyskytující se v obraze a definiční obor všechny možné souřadnice. V této práci budeme pro jednoduchost za obor hodnot dále brát pouze stupně šedi.

Nicméně takovou funkci u není možné na digitálním zařízení žádným způsobem kompletně zaznamenat. Signál je potřeba digitalizovat (diskretizovat) a to jak definiční obor, tak i obor hodnot funkce u .

Vzorkování

Diskretizace definičního oboru se nazývá vzorkování. Funkci u zúžíme na množinu

$$D = \{0, \dots, M-1\} \times \{0, \dots, N-1\},$$

kde $M, N \in \mathbb{N}$. Získáme tak funkci definovanou pro všechna $[m, n] \in D$ jako

$$u|_D : [m, n] \mapsto u(m, n).$$

Kvantování

Diskretizace oboru hodnot se nazývá kvantování. Souvislý prostor stupňů šedi nahradíme diskrétním prostorem $R = \{0, \dots, B-1\}$, kde B je nějaká mocnina 2. Hodnota 0 reprezentuje černou a hodnota $B-1$ bílou barvu. Hodnotu $u(m, n)$ pak nahradíme vhodným způsobem bodem z množiny R pomocí nějaké funkce $L : u(m, n) \mapsto r_{m,n} \in R$. Takovouto konstrukcí získáme funkci zobrazující D do R definovanou jako

$$u_R|_D : [m, n] \mapsto L(u(m, n)).$$

Tato funkce lze v počítači reprezentovat maticí o velikosti $M \times N$. Jednotlivé prvky této matice se nazývají pixely.

Lineární filtrace

Jedním z představitelů předzpracování obrazu je lineární filtrace. Jsou to metody, které pro nahrazení hodnoty intenzity v daném pixelu $[m_1, m_2]$ vstupního obrazu I používají nějakou lineární kombinaci intenzit okolních pixelů. Výsledkem je výstupní obraz u . Tuto operaci můžeme obecně zapsat pomocí diskrétní konvoluce, kde funkce $K : \langle -n, n \rangle \times \langle -n, n \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$ se nazývá konvoluční maska reprezentující koeficienty lineární kombinace. Operaci můžeme tedy zapsat jako

$$u(m_1, m_2) = (K * I)(m_1, m_2) = \sum_{k=-n}^n \sum_{l=-n}^n K(k, l) I(m_1 - k, m_2 - l). \quad (1.1)$$

Tato operace se v závislosti na volbě konvoluční masky může používat k potlačení šumu, zaostření obrazu či detekci hran. O spojité konvoluci a jejích vlastnostech bude řeč v další kapitole.

Gaussova filtrace

Gaussova filtrace, používající se k odstraňování šumu, je lineární filtrace, kde se za konvoluční masku volí diskrétní náhoda dvourozměrné hustoty Gaussova rozdělení

$$G_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{pro } x, y \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Nyní si uvedeme způsob, jakým můžeme tuto hustotu diskretizovat.

Mějme čtvercovou oblast $S = \langle -n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2} \rangle \times \langle -n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2} \rangle$ tvořenou čtvercovými podoblastmi

$$S_{i,j} = \left\langle i - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2} \right\rangle \times \left\langle j - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right\rangle \quad \text{kde } i, j \in \{-n, \dots, n\}.$$

Diskretizaci funkce (1.2) lze provést tak, že jí aproximujeme funkcí $\tilde{G}_\sigma: S \rightarrow \mathbb{R}$ konstantní na oblastech $S_{i,j}$, po které budeme požadovat při označení $I_{i,j} := \int_{S_{i,j}} G_\sigma(x,y) dx dy$ následující podmínky.

$$\int_S \tilde{G}_\sigma(x,y) dx dy = \sum_{i,j \in \{-n, \dots, n\}} \int_{S_{i,j}} \tilde{G}_\sigma(x,y) dx dy = \sum_{i,j \in \{-n, \dots, n\}} \tilde{G}_\sigma(i,j) = 1 \quad (1.3)$$

$$\frac{\tilde{G}_\sigma(i,j)}{\tilde{G}_\sigma(k,l)} = \frac{I_{i,j}}{I_{k,l}} \quad (1.4)$$

Podmínka (1.3) požaduje zachování normality a podmínka (1.4) požaduje zachování poměrů objemů na daných oblastech $S_{i,j}$. Těmito podmínkami je funkce \tilde{G}_σ jednoznačně určena. Z podmínky (1.4) plyne zachování symetrie, tj.

$$\tilde{G}_\sigma(i,j) = \tilde{G}_\sigma(k,l) \quad \text{pro} \quad i^2 + j^2 = k^2 + l^2.$$

Funkce \tilde{G}_σ je tedy jednoznačně dána diagonálními prvky a jednou půlkou libovolného kvadrantu. Pro $n = 0$ máme triviálně pouze prvek $[0, 0]$, pro $n = 1$ máme předchozí prvek plus prvky $[1, 0]$, $[1, 1]$ a pro $n = 2$ máme prvky předchozí plus prvky $[2, 0]$, $[2, 1]$, $[2, 2]$. Lze snadno vidět, že pro zvolené n máme počet těchto prvků

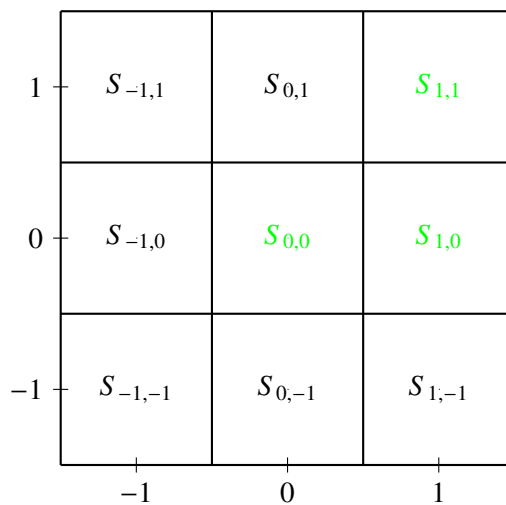
$$1 + 2 + 3 + \dots + (n+1) = \frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

Z podmínky (1.4) máme lineárně nezávislé rovnice

$$\tilde{G}_\sigma(i,j) = \frac{I_{i,j}}{I_{0,0}} \tilde{G}_\sigma(0,0),$$

kde $[i, j]$ jsou výše uvedené body kromě bodu $[0, 0]$. Přidáním jakékoliv jiné rovnice z podmínky (1.4) už získáme rovnice závislé. To nám dává $\frac{(n+2)(n+1)}{2} - 1$ rovnic. Podmínka (1.3) nám dává jednu rovnici a máme tedy stejný počet neznámých jako lineárně nezávislých lineárních rovnic s nenulovou pravou stranou a úloha má tedy jednoznačné řešení.

Úlohu vyřešíme pro $n=1$.



Obrázek 1.1: Znázornění oblasti S pro $n = 1$.

Ze symetrie máme

$$\begin{aligned}\tilde{G}_\sigma(1, 1) &= \tilde{G}_\sigma(1, -1) = \tilde{G}_\sigma(-1, -1) = \tilde{G}_\sigma(-1, 1), \\ \tilde{G}_\sigma(1, 0) &= \tilde{G}_\sigma(0, -1) = \tilde{G}_\sigma(-1, 0) = \tilde{G}_\sigma(0, 1).\end{aligned}$$

Potom z normovací podmínky (1.3) máme

$$4\tilde{G}_\sigma(1, 1) + 4\tilde{G}_\sigma(1, 0) + \tilde{G}_\sigma(0, 0) = 1.$$

Z (1.4) obdržíme

$$\begin{aligned}\tilde{G}_\sigma(1, 0) &= \frac{I_{1,0}}{I_{0,0}}\tilde{G}_\sigma(0, 0), \\ \tilde{G}_\sigma(1, 1) &= \frac{I_{1,1}}{I_{0,0}}\tilde{G}_\sigma(0, 0).\end{aligned}$$

Máme tedy soustavu 3 rovnic o 3 neznámých $\tilde{G}_\sigma(0, 0)$, $\tilde{G}_\sigma(1, 0)$, $\tilde{G}_\sigma(1, 1)$. Řešením je

$$\begin{aligned}\tilde{G}_\sigma(0, 0) &= \frac{I_{0,0}}{I_{0,0} + 4I_{1,1} + 4I_{1,0}}, \\ \tilde{G}_\sigma(1, 0) &= \frac{I_{1,0}}{I_{0,0} + 4I_{1,1} + 4I_{1,0}}, \\ \tilde{G}_\sigma(1, 1) &= \frac{I_{1,1}}{I_{0,0} + 4I_{1,1} + 4I_{1,0}}.\end{aligned}$$

Tyto vzorce budeme využívat v poslední kapitole pro výpočet diskrétní konvoluce s Gaussovým jádrem.

Segmentace

Po předzpracování obrazu přichází na řadu vlastní zpracování. Tím může být například segmentace. Její úspěch může silně záviset na kvalitě předchozího předzpracování. Obecně segmentací míníme proces, při němž se obraz rozdělí na určité podobrazy (pozadí a objekty zájmu) podle určitého kritéria.

Pokud máme tedy obrazovou funkci $u: \Omega = \langle 0, a \rangle \times \langle 0, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ reprezentující náš obraz, tak jeho **segmentací** myslíme dělení množiny M pro $m \in \mathbb{N}$ na podmnožiny I_1, I_2, \dots, I_m splňující pro $i, j \in \{1, \dots, m\}$

1.

$$\bigcup_{k=1}^m I_k = \Omega,$$

2.

$$I_i \cap I_j = \emptyset, \quad \text{kde } i \neq j.$$

3. Všechny podmnožiny I_i a jejich obrazy $u(I_i)$ splňují nějaké kritérium.

Třetí podmínka nám přímo zadává co segmentací v daném obraze myslíme. Tato podmínka může být například v nějakém jednodušším případě jednoprvkovost množin $u(I_i)$, tj. aby v každém segmentu byla pouze jedna konstantní úroveň šedi. Dá se říct, že segmentace může být dána i příslušným segmentačním algoritmem. Pro širší přehled segmentačních technik lze nahlédnout do studijní dokumentace [42], která se segmentací přímo věnuje. My si zde představíme dělení algoritmů a přístup z publikace [4], které vychází ze dvou příkladových obrázků 1.2 a 1.3.



Obrázek 1.2: Příkladový obrázek skládající se ze skoro homogenního pozadí, na kterém je umístěno pět různých objektů.



Obrázek 1.3: Příkladový obrázek skládající se z pravidelného vzoru.

Obrázek 1.2 se skládá z objektů s různorodou vnitřní strukturou umístěných na homogenním pozadí. Intuitivně bychom chtěli mít nějakou stahující se křivku, která se postupně zastaví na hranicích jednotlivých objektů a případně se i podle potřeby roztrhne. Nakonec bychom tím získali hranice těchto objektů a tím i segmentaci tohoto obrazu.

Obrázek 1.3 je složen z oblastí, jež mají každá od pohledu přibližně stejnou úroveň šedi. Nabízí se aproximace tohoto obrázku skoro konstantními segmenty ohraničené nějakou množinou hran, čímž bychom opět získaly hledanou segmentaci.

Mumfordův-Shahův funkcionál

Motivováni intuitivní myšlenkou vyslovenou k obrázku 1.3 mějme počáteční obrazovou funkci u (reprezentující náš obrázek) definovanou na omezené a otevřené podmnožině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a předpokládejme bez újmy na obecnosti například $0 \leq u(x) \leq 1$ pro $x \in \Omega$. Hledáme dvojici (U, K) , kde $K \subset \Omega$ je množina nespojitostí (hran) a U je nějaká skoro konstantní aproximace u na jednotlivých komponentech souvislosti $\Omega \setminus K$. Množina těchto komponent souvislosti a množina K pak tvoří naší hledanou segmentaci. V publikaci [26] Mumford a Shah navrhli hledat tuto dvojici pomocí minimalizace funkcionálu

$$\mathcal{F}(U, K) = \underbrace{\int_{\Omega \setminus K} (U - u)^2 dx}_1 + \alpha \underbrace{\int_{\Omega \setminus K} |\nabla U|^2 dx}_2 + \beta \underbrace{\int_K d\sigma}_3 \geq 0, \quad (1.5)$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ a $\int_K d\sigma$ je délka hran K . Z požadavku minimalizace:

1. člen na pravé straně požaduje, aby U na $\Omega \setminus K$ co nejlépe aproximovala u .
2. člen požaduje, aby U byla na jednotlivých komponentech souvislost množiny $\Omega \setminus K$ co nejvíce konstantní.
3. člen požaduje, aby křivka realizující tuto minimalizaci byla co nejkratší.

Pokud bychom vynechali jakýkoliv tento člen, tak by funkcionál nabýval minima 0. Za vhodné volby U a K můžeme získat nějaká triviální řešení.

Pokud totiž vynecháme první člen a zvolíme identicky $U = 0$ (odtud $K = \emptyset$), tak je druhý i třetí člen automaticky nulový. V případě vynechání druhého členu bereme $U = u$ (odtud zase $K = \emptyset$) a první a poslední člen jsou opět nulové. Pokud v diskrétním případě vynecháme třetí člen a jako K vezmeme hranici všech pixelů a jako U intenzity v daných pixelech, tak z konstantnosti U na jednotlivých pixelech je i druhý člen nulový.

Vyšetřováním matematických vlastností a hledáním netriviálních řešení (1.5) se zabývá publikace [4].

Aktivní kontury

Myšlenka použití pohybujících se křivek k segmentaci obrazu typu jako obrázek 1.2 byla poprvé precizněji formulovaná v práci [19] jako *hadí - model aktivních kontur*. Metoda spočívá v minimalizaci energie křivky ve formě hledání minima funkcionálu. Funkcionál navržený v [19] měl mnoho nedokonalostí. Vylepšení této metody jsou zpracovány v [4]. My se zde v této práci budeme zabývat pouze úlohou o pohybu křivek podle střední křivosti a její vrstevnicovou formulací v další kapitole.

Kapitola 2

Diferenciální rovnice ve zpracování obrazu

V této kapitole si představíme parciální diferenciální rovnice, které hrají roli ve zpracování obrazu. Nejdříve shrneme poznatky o analytickém řešení rovnice vedení tepla na jednorozměrné i na dvourozměrné omezené prostorové oblasti. Ukážeme souvislost mezi konvolucí počátečního obrazu s Gaussovým jádrem a řešením Cauchyovy úlohy rovnice vedení tepla na \mathbb{R}^2 . Představíme si modifikaci rovnice vedení tepla, rovnici Peronovu-Malikovu, podíváme se na úlohy popisující pohyb křivky v rovině a nakonec si ukážeme aproximaci Mumfordova-Shahova funkcionálu eliptickým funkcionálem, pro který lze už snadno odvodit Eulerovy rovnice pro minimalizaci.

2.1 Analytické řešení rovnice difuze

Rovnice vedení tepla (nebo též rovnice difuze) může díky své vlastnosti stahování konvexních křivek do bodu (poprvé popsáno v [16]) sloužit k odstraňování šumu. Modifikací této lineární rovnice jsou dále odvozeny další modely používající se ve zpracování obrazu (například Peronova-Malikova rovnice).

Odvození analytického řešení úlohy vedení tepla na jednorozměrné prostorové oblasti jsme provedli po vzoru [35]. Analytické řešení pro dvourozměrný případ jsme hledali za pomoci [38].

2.1.1 Smíšená úloha pro rovnici vedení tepla na úsečce

Hledáme funkci $u: (0, T) \times (0, a) \rightarrow \mathbb{R}$, která řeší níže uvedenou smíšenou úlohu s Neumannovou okrajovou podmínkou

$$\begin{array}{rcl} \partial_t u(t, x) - D \partial_{xx} u(t, x) & = & f(t, x) \quad \text{na } (0, T) \times (0, a), \\ u(0, x) & = & \varphi(x) \quad \text{na } (0, a), \\ \partial_x u(t, 0) & = & 0 \quad \text{na } (0, T), \\ \partial_x u(t, a) & = & 0 \quad \text{na } (0, T), \end{array} \tag{2.1}$$

kde $D, T, a \in \mathbb{R}^+$. Díky linearitě úlohy, můžeme řešení napsat jako lineární kombinaci řešení dílčích úloh s vhodně zvolenými podmínkami.

Úloha bez pravé strany

Začneme řešením rovnice bez pravé strany f se zachovanou okrajovou a počáteční podmínkou

$$\begin{array}{lcl}
\partial_t u(t, x) - D \partial_{xx} u(t, x) & = & 0 \quad \text{na } (0, T) \times (0, a), \\
u(0, x) & = & \varphi(x) \quad \text{na } (0, a), \\
\partial_x u(t, 0) & = & 0 \quad \text{na } (0, T), \\
\partial_x u(t, a) & = & 0 \quad \text{na } (0, T).
\end{array} \tag{2.2}$$

Úlohu řešíme metodou separace proměnných dle [35] tj. předpokládáme netriviální řešení tvaru

$$u(t, x) = T(t)X(x). \tag{2.3}$$

Dosazením do rovnice získáme následující

$$\frac{1}{D} \frac{\partial_t T}{T}(t) = \frac{\partial_{xx} X}{X}(x) \implies \partial_x \left(\frac{\partial_{xx} X}{X} \right)(x) = 0 = \partial_t \left(\frac{\partial_{xx} X}{X} \right)(x) \implies \left(\frac{1}{D} \frac{\partial_t T}{T}(t) \right) \frac{\partial_{xx} X}{X}(x) = -\lambda \in \mathbb{R}.$$

Tímto získáme dvě obyčejné lineární diferenciální rovnice pro funkce T a X

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{2.4}$$

$$\dot{T}(t) + D\lambda T(t) = 0. \tag{2.5}$$

Pro $\lambda = 0$ dostaneme řešení $X(x) = Ax + B$, $T(t) = C$, kde $A, B, C \in \mathbb{R}$. Dále z okrajové podmínky úlohy (2.2) dostaneme $A = 0$. Celkem tedy máme

$$u(t, x) = CB.$$

Dále budeme možnost $\lambda = 0$ vynechávat a ke konci se k tomuto případu vrátíme. Pro rovnici (2.5) dostaneme obecné řešení

$$T(t) = \tilde{C} e^{-\lambda D t}, \quad \tilde{C} \neq 0. \tag{2.6}$$

Nenulovosti konstanty \tilde{C} vychází z požadavku netriviality řešení (2.3). Pro rovnici (2.4) dostaneme fundamentální systém

$$\left(e^{\sqrt{-\lambda}x}, e^{-\sqrt{-\lambda}x} \right). \tag{2.7}$$

Nejdříve předpokládáme, že $\lambda < 0$ (tzn. $\sqrt{-\lambda} \in \mathbb{R}^+$). Pro obecné řešení

$$X(x) = \tilde{A} e^{\sqrt{-\lambda}x} + \tilde{B} e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

dostaneme z okrajových podmínek úlohy (2.2)

$$(\forall t \in (0, +\infty)) (\partial_x u(t, 0) = T(t)X'(0) = 0),$$

$$(\forall t \in (0, +\infty)) (\partial_x u(t, a) = T(t)X'(a) = 0).$$

Z tvaru (2.6) funkce $T(t)$ je vidět její nenulovost pro $t \in (0, +\infty)$. Potom však

$$X'(0) = 0 = \tilde{A} \sqrt{-\lambda} - \tilde{B} \sqrt{-\lambda} \implies \tilde{A} = \tilde{B},$$

$$X'(a) = 0 = \tilde{A} e^{\sqrt{-\lambda}a} \sqrt{-\lambda} - \tilde{A} e^{-\sqrt{-\lambda}a} \sqrt{-\lambda}.$$

Odsud plyne

$$e^{\sqrt{-\lambda}a} = e^{-\sqrt{-\lambda}a}.$$

Díky ostré monotonii reálné exponenciální funkce dále dostáváme

$$a \sqrt{-\lambda} = -a \sqrt{-\lambda} \implies \lambda = 0.$$

Předpokládali jsme však, že $\lambda < 0$. Pro tuto volbu tedy nesplníme okrajové podmínky.

Dále předpokládáme $\lambda > 0$. Pak fundamentální systém (2.7) zapíšeme jako

$$\left(e^{i\sqrt{\lambda}x}, e^{-i\sqrt{\lambda}x} \right).$$

Z teorie obyčejných lineárních diferenciálních rovnic (viz například [30]) víme, že

$$\left(\frac{e^{i\sqrt{\lambda}x} - e^{-i\sqrt{\lambda}x}}{2i}, \frac{e^{i\sqrt{\lambda}x} + e^{-i\sqrt{\lambda}x}}{2} \right) = (\sin(\sqrt{\lambda}x), \cos(\sqrt{\lambda}x))$$

je také fundamentální systém rovnice (2.4). Z obecného řešení

$$X(x) = A \sin(\sqrt{\lambda}x) + B \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

a z okrajových podmínek úlohy (2.2) opět získáme

$$X'(0) = 0 = A \sqrt{\lambda} \implies A = 0,$$

$$X'(a) = 0 = -B \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}a) \implies \sqrt{\lambda}a = n\pi.$$

Odtud

$$0 \leq \sqrt{\lambda_n} := \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{a}, \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Zde opět nulová λ_n připouštíme. Nakonec dostáváme

$$X_n(x) := X(x) = B_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right). \quad (2.8)$$

Spojením výsledků (2.6) a (2.8) získáme lineárně nezávislá řešení rovnice v prvním řádku (2.2)

$$u_n(t, x) := X_n(x)T_n(t) = C_n e^{-\lambda_n D t} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right),$$

vyhovující okrajovým podmínkám v (2.2). Položíme

$$u(t, x) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n D t} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = \frac{\bar{C}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n D t} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad (2.9)$$

kde

$$C_0 = \frac{\bar{C}_0}{2}.$$

Označíme $C_n = \bar{C}_n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a z počáteční podmínky úlohy (2.2) dostaneme

$$u(0, x) = \frac{\bar{C}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = \varphi(x). \quad (2.10)$$

Položíme-li

$$\bar{C}_n = \frac{2}{a} \int_0^a \varphi(\xi) \cos\left(\frac{n\pi}{a}\xi\right) d\xi \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}_0,$$

víme z teorie Fourierových řad, že rovnost (bodová konvergence) v (2.10) bude na $(0, a)$ splněna například pro $\varphi(x)$ spojitě a po částech spojitě diferencovatelné na $\langle 0, a \rangle$. Potom předpokládané řešení (2.9) úlohy s nulovou pravou stranou můžeme zapsat jako

$$u(t, x) = \int_0^a G(t, x, \xi) \varphi(\xi) d\xi, \quad \text{kde } G(t, x, \xi) = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-\lambda_n D t}}{a} \cos\left(\frac{n\pi}{a}\xi\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right). \quad (2.11)$$

Funkce (2.11) opravdu úlohu (2.2) řeší a důkaz je k nalezení například v [35] nebo podrobněji v [36]. Počáteční podmínka je určitě splněna, ale je potřeba ověřit možnost záměny řady a derivací. Toto se zaručí ukázáním stejnoměrné konvergence řady (2.9) a řady jejích derivací. Tím bude zaručena i možnost provedené záměny integrálu s řadou.

Na otázku jednoznačnosti odpovíme v následujícím textu. Nejdříve si zformulujeme větu, jejíž důkaz můžeme nalézt v [35] nebo moderněji v [14]. Věta je známá pod názvem *princip maxima*.

Věta 2.1.1. *Necht' funkce $u(t, x)$ definovaná a spojitá na $\langle 0, T \rangle \times \langle 0, a \rangle$ vyhovuje rovnici*

$$\partial_t u = D \partial_{xx} u \quad (2.12)$$

na $(0, T) \times (0, a)$. Pak tato funkce $u(t, x)$ nabývá svého maxima i minima buď v počátečním okamžiku $t = 0$, nebo v hraničních bodech $x = 0$ nebo $x = a$.

Pomocí této věty dokážeme následující větu o jednoznačnosti

Věta 2.1.2. *Necht' funkce $u_1, u_2 \in C^3(\langle 0, T \rangle \times \langle 0, a \rangle)$ definované a spojitě na $\langle 0, T \rangle \times \langle 0, a \rangle$ vyhovují úloze*

$\partial_t u(t, x) - D \partial_{xx} u(t, x)$	$= 0$	na $(0, T) \times (0, a)$,
$u(0, x)$	$= \varphi(x)$	na $(0, a)$,
$\partial_x u(t, 0)$	$= 0$	na $(0, T)$,
$\partial_x u(t, a)$	$= 0$	na $(0, T)$.

Potom $u_1 = u_2$ na $\langle 0, T \rangle \times \langle 0, a \rangle$.

Důkaz. Funkce

$$v(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x)$$

určitě z linearitě vyhovuje rovnici 2.12 a má všechny vlastnosti funkcí u_1, u_2 až na to, že $v(0, x) = 0$. Jestliže funkce v řeší (2.12), pak ze záměny parciálních derivací plyne, že i $\partial_x v$ tuto rovnici řeší. Z předchozí věty pak plyne, že $\partial_x v$ nabývá maxima s hodnotou $\partial_x v(0, x)$, $\partial_x v(t, 0)$ a nebo $\partial_x v(t, a)$ pro nějaké $x \in (0, a)$. Jelikož ale

$$\partial_x v(t, 0) = 0,$$

$$\partial_x v(t, a) = 0,$$

$$\partial_x v(0, x) = \frac{d(\varphi(x) - \varphi(x))}{dx} = 0,$$

tak

$$\partial_x v(t, x) = 0 \quad \text{na } (0, T) \times (0, a).$$

Odtud plyne

$$v(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x) = C \in \mathbb{R} \quad \text{na} \quad (0, T) \times (0, a).$$

Poněvadž platí

$$v(0, x) = 0 = C,$$

tak

$$u_1(t, x) = u_2(t, x) \quad \text{na} \quad (0, T) \times (0, a)$$

a ze spojitosti v krajních bodech získáme

$$u_1(t, x) = u_2(t, x) \quad \text{na} \quad \langle 0, T \rangle \times \langle 0, a \rangle.$$

□

Úloha s pravou stranou a s nulovou počáteční podmínkou

Nyní budeme pokračovat řešením rovnice (2.1) teď už s pravou stranou, ale s nulovou počáteční podmínkou

$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) - D \partial_{xx} u(t, x) &= f(t, x) & \text{na} & (0, +\infty) \times (0, a), \\ u(0, x) &= 0 & \text{na} & \langle 0, a \rangle, \\ \partial_x u(t, 0) &= 0 & \text{na} & (0, +\infty), \\ \partial_x u(t, a) &= 0 & \text{na} & (0, +\infty). \end{aligned}$	(2.13)
---	--------

Z linearity, tvaru počátečních a okrajových podmínek úloh (2.2), (2.13) je vidět, že řešení úlohy (2.1) můžeme obdržet jako součet řešení těchto dvou dílčích úloh. Dle [35] (str. 235) budeme opět hledat řešení ve tvaru

$$\tilde{u}(t, x) = \frac{\tilde{u}_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(t) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad (2.14)$$

kde t považujeme za parametr. Do řady stejného tvaru rozvineme i funkci f

$$f(t, x) = \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right),$$

kde

$$f_n(t) = \frac{2}{a} \int_0^a f(t, \xi) \cos\left(\frac{n\pi}{a}\xi\right) d\xi. \quad (2.15)$$

Dosazením těchto dvou rozvoje do rovnice (2.13) získáme

$$\frac{\dot{\tilde{u}}_0(t) - f_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \left[D \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \tilde{u}_n(t) + \dot{\tilde{u}}_n(t) - f_n(t) \right] = 0.$$

Chceme aby takováto řada byla rovna nulové funkci. To splníme položením všech koeficientů 0 a tak získáme

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \left(\dot{\tilde{u}}_n(t) + D \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \tilde{u}_n(t) = f_n(t) \right).$$

Dále z počáteční podmínky úlohy (2.13) obdržíme

$$\tilde{u}(0, x) = \frac{\tilde{u}_0(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(0) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = 0 \implies (\forall n \in \mathbb{N}_0) (\tilde{u}_n(0) = 0).$$

Funkce $\tilde{u}_n(t)$ tedy nalezneme jako řešení lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu

$$\dot{\tilde{u}}_n(t) + p_n \tilde{u}_n(t) = f_n(t) \quad (2.16)$$

s počátečními podmínkami

$$\tilde{u}_n(0) = 0, \quad (2.17)$$

kde $p_n = D\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$. Rovnici (2.16) (kde t přeznačíme na τ) vynásobíme faktorem $e^{p_n\tau}$

$$e^{p_n\tau} \dot{\tilde{u}}_n(\tau) + e^{p_n\tau} p_n \tilde{u}_n(\tau) = e^{p_n\tau} f_n(\tau)$$

a dále pomocí derivace součinu převedeme na

$$\frac{d(e^{p_n\tau} \tilde{u}_n(\tau))}{d\tau} = e^{p_n\tau} f_n(\tau).$$

Zintegrujeme od 0 do t

$$\int_0^t \frac{d(e^{p_n\tau} \tilde{u}_n(\tau))}{d\tau} d\tau = \int_0^t e^{p_n\tau} f_n(\tau) d\tau$$

a z Newtonovy formule získáme

$$e^{p_n t} \tilde{u}_n(t) - e^{p_n 0} \tilde{u}_n(0) = \int_0^t e^{p_n \tau} f_n(\tau) d\tau.$$

Menší úpravou dojdeme k

$$\tilde{u}_n(t) = \int_0^t e^{-p_n(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau.$$

Uvědomíme si, že $p_n = D\lambda_n$. Získané $\tilde{u}_n(t)$ dosadíme zpět do (2.14). Obdržíme

$$\tilde{u}(t, x) = \frac{\int_0^t f_0(\tau) d\tau}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-D\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = \int_0^t \frac{f_0(\tau)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) d\tau.$$

Následným dosazením za $f_n(\tau)$ z (2.15) získáme

$$\tilde{u}(t, x) = \int_0^t \int_0^a \left[\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2e^{-D\lambda_n(t-\tau)}}{a} \cos\left(\frac{n\pi}{a}\xi\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \right] f(\tau, \xi) d\xi d\tau,$$

což dle značení z (2.11) není nic jiného než

$$\tilde{u}(t, x) = \int_0^t \int_0^a G(t-\tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau. \quad (2.18)$$

Jak již bylo řečeno, finální řešení $U(t, x)$ úlohy (2.1) získáme jako součet (2.11) a (2.18)

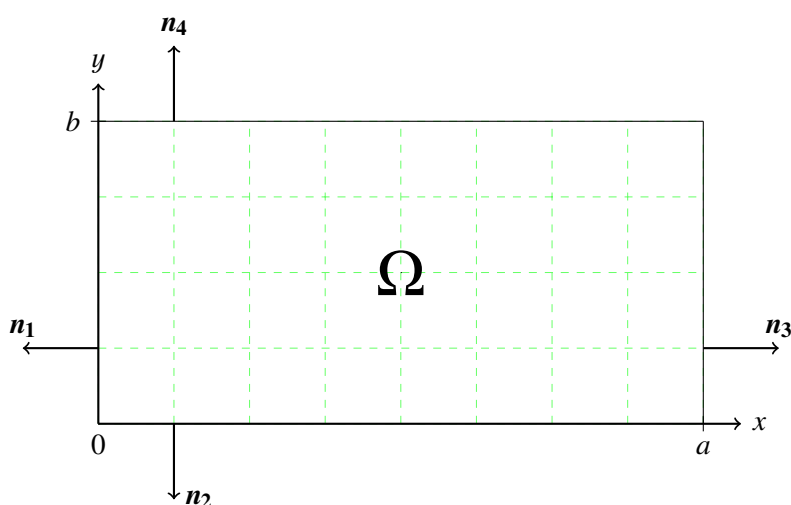
$$U(t, x) = u(t, x) + \tilde{u}(t, x) = \int_0^a G(t, x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^t \int_0^a G(t-\tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau.$$

2.1.2 Smíšená úloha pro rovnici vedení tepla na obdélníku

Nyní zkoumáme úlohu

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x, y) = D \Delta u(t, x, y) & \text{na } (0, T) \times \Omega, \\ u(0, x, y) = \varphi(x, y) & \text{na } \Omega, \\ \partial_n u(t, x, y) = 0 & \text{na } (0, T) \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.19)$$

Množina $\Omega \in \mathbb{R}^2$ je omezená oblast. Vektor \mathbf{n} značí vnější normálu na hranici $\partial\Omega$. Pro jednoduchost bereme jako oblast Ω vnitřek obdélníku. Označíme si tedy $\Omega = (0, a) \times (0, b)$ pro $a, b \in \mathbb{R}^+$. Nyní si pro tento případ rozebereme okrajovou podmínku.



Obrázek 2.1: Grafické znázornění oblasti Ω a vnějších normál \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 , \mathbf{n}_3 a \mathbf{n}_4 na hranici $\partial\Omega$.

Z obrázku 2.1 je vidět, že okrajová podmínka úlohy (2.19) přechází na

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{n}_1} u(t, 0, y) &= \nabla u(t, 0, y) \cdot \mathbf{n}_1 = -\partial_x u(t, 0, y) = 0 & \text{na } (0, T) \times (0, b), \\ \partial_{\mathbf{n}_2} u(t, x, 0) &= \nabla u(t, x, 0) \cdot \mathbf{n}_2 = -\partial_y u(t, x, 0) = 0 & \text{na } (0, T) \times (0, a), \\ \partial_{\mathbf{n}_3} u(t, a, y) &= \nabla u(t, a, y) \cdot \mathbf{n}_3 = \partial_x u(t, a, y) = 0 & \text{na } (0, T) \times (0, b), \\ \partial_{\mathbf{n}_4} u(t, x, b) &= \nabla u(t, x, b) \cdot \mathbf{n}_4 = \partial_y u(t, x, b) = 0 & \text{na } (0, T) \times (0, a), \end{aligned}$$

což můžeme kompaktněji zapsat jako

$$\begin{aligned} \partial_x u(t, 0, y) &= \partial_x u(t, a, y) = 0 & \text{kde } t \in (0, T), y \in (0, b), \\ \partial_y u(t, x, 0) &= \partial_y u(t, x, b) = 0 & \text{kde } t \in (0, T), y \in (0, a). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Opět předpokládáme netriviální řešení ve tvaru

$$u(t, x, y) = T(t)v(x, y) \quad (2.21)$$

a stejným postupem jako v jednorozměrném případě u (2.3) dojdeme ke dvěma lineárním diferenciálním rovnicím

$$\Delta v(x, y) + \lambda v(x, y) = 0, \quad (2.22)$$

$$\dot{T}(t) + D\lambda T(t) = 0. \quad (2.23)$$

Rovnice (2.23) má stejně jako v jednorozměrném případě řešení

$$T(t) = \tilde{C}e^{-\lambda Dt} \quad \text{pro } \tilde{C} \neq 0. \quad (2.24)$$

Rovnici (2.22) řešíme s podmínkami vycházejících z (2.20)

$$\begin{aligned} \partial_x v(0, y) &= \partial_x v(a, y) = 0 \quad \text{pro } y \in (0, b), \\ \partial_y v(x, 0) &= \partial_y v(x, b) = 0 \quad \text{pro } x \in (0, a). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Pro rovnici (2.22) předpokládáme netriviální řešení

$$v(x, y) = X(x)Y(y).$$

Dosazením do (2.22) dostaneme výraz

$$Y(y)\partial_{xx}X(x) + X(x)\partial_{yy}Y(y) + \lambda X(x)Y(y),$$

který jednoduchými úpravami převedeme na

$$\frac{\partial_{xx}X(x) + \lambda X(x)}{X(x)} = -\frac{\partial_{yy}Y(y)}{Y(y)}.$$

Opět ze stejného argumentu jako u jednorozměrného problému se obě strany rovnají společné konstantě nezávislé na x ani na y . Označme ji $\mu \in \mathbb{R}$. Získáme tak dvě obyčejné lineární diferenciální rovnice pro funkce $X(x)$ a $Y(y)$ s podmínkami vycházejících z (2.25)

$$\begin{aligned} Y''(y) + \mu Y(y) &= 0 \quad \text{za podmínky } Y'(0) = Y'(b) = 0, \\ X''(x) + (\lambda - \mu)X(x) &= 0 \quad \text{za podmínky } X'(0) = X'(a) = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Z kapitoly o problému na úsečce již víme, že první z úloh (2.26) má spočetně mnoho řešení tvaru

$$Y_m(y) = A_m \cos(\sqrt{\mu_m}y),$$

kde

$$\mu_m := \mu = \frac{m^2\pi^2}{b^2} \quad \text{kde } m \in \mathbb{N}_0.$$

Pokud zavedeme $\vartheta := \lambda - \mu$, tak víme, že druhá z úloh má spočetně mnoho řešení tvaru

$$X_n(x) = B_n \cos(\sqrt{\vartheta_n}x),$$

kde

$$\vartheta_n := \vartheta = \frac{n^2\pi^2}{a^2} \quad \text{kde } n \in \mathbb{N}_0,$$

odkud vyjádříme, že

$$\lambda_{mn} := \lambda = \vartheta + \mu = \frac{m^2\pi^2}{b^2} + \frac{n^2\pi^2}{a^2} \quad \text{kde } m, n \in \mathbb{N}_0.$$

Funkce X_n a Y_n tvoří vlastní funkce příslušných rovnic. Z konstrukce je vidět, že příslušné operátory už žádné jiné vlastní funkce nemají, tj. jsou to všechny. Z [38] plyne, že (po normalizaci) systém vlastních funkcí X_n , resp. Y_m , tvoří totální množinu prostoru $\mathcal{L}_2((0, a))$, resp. prostoru $\mathcal{L}_2((0, b))$. Odtud i $X_n(x)Y_m(y)$ tvoří totální množinu prostoru $\mathcal{L}_2((0, a) \times (0, b))$ (viz [38]). Definujeme

$$Y_m(y)X_n(x) = A_m B_n \overbrace{\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)}{:= \tilde{v}_{m,n}(x,y)}.$$

Funkce $v_{m,n}$ tvoří vlastní funkce operátoru Δ (za daných okrajových podmínek), jež jsou vzájemně ortogonální. Zároveň můžeme tyto funkce normalizovat pomocí jejich norem pro $m, n \in \mathbb{N}_0$

$$N_{m,n} = \sqrt{\langle \tilde{v}_{m,n}, \tilde{v}_{m,n} \rangle} = \sqrt{\int_{\Omega} \tilde{v}_{m,n}^2(x,y) dx dy} = \begin{cases} \sqrt{\frac{ab}{4}} & \text{pro } m, n > 0, \\ \sqrt{\frac{ab}{2}} & \text{pro } (m=0, n>0) \vee (n=0, m>0), \\ \sqrt{ab} & \text{pro } m, n = 0. \end{cases}$$

Nyní zavedeme soubor funkcí

$$v_{m,n} = \frac{\tilde{v}_{m,n}}{N_{m,n}},$$

které jsou už ortonormální, tj

$$\langle v_{m,n}, v_{\tilde{m},\tilde{n}} \rangle = \int_{\Omega} v_{m,n} v_{\tilde{m},\tilde{n}}(x,y) dx dy = \delta_{m,\tilde{m}} \delta_{n,\tilde{n}} \quad \text{pro } m, n, \tilde{m}, \tilde{n} \in \mathbb{N}_0.$$

Funkce $v_{m,n}$ tvoří všechny vlastní funkce úlohy (2.22). Jak je psáno v [38], každou funkci $f(x,y)$ z definičního oboru úlohy (2.22), lze rozvinout do stejnoměrně konvergentní Fourierovy řady

$$f(x,y) = \sum_{m,n=0}^{+\infty} \langle f, v_{m,n} \rangle v_{m,n}(x,y) \quad (2.27)$$

na $\bar{\Omega} = \langle 0, a \rangle \times \langle 0, b \rangle$.

Dosazením všeho známého do (2.21) obdržíme

$$u_{mn}(t, x, y) := u(t, x, y) = C_{mn} e^{-D\lambda_{mn}t} v_{m,n}(x, y),$$

spočetně mnoho funkcí splňující rovnici (2.19) a okrajové podmínky (2.25). Zavedeme

$$U(t, x, y) := \sum_{m,n=0}^{+\infty} u_{mn}(t, x, y) = \sum_{m,n=0}^{+\infty} C_{mn} e^{-D\lambda_{mn}t} v_{m,n}(x, y).$$

Z počáteční podmínky obdržíme

$$U(0, x, y) = \sum_{m,n=0}^{+\infty} C_{mn} v_{m,n}(x, y) = \varphi(x, y).$$

Požadujeme, aby suma uprostřed byla Fourierův rozvoj funkce $\varphi(x,y)$. O něm víme z (2.27), že pro vhodnou $\varphi(x,y)$ stejnoměrně konverguje. Takže

$$U(t, x, y) = \sum_{m,n=0}^{+\infty} e^{-D\lambda_{mn}t} \langle \varphi, v_{m,n} \rangle v_{m,n}(x, y)$$

představuje předpokládané řešení úlohy (2.19), o kterém víme, že splňuje počáteční podmínku. Podobně jako se ukazovala stejnoměrná konvergence u jednorozměrného případu v [36], [35], by se ukázala i zde v daných proměnných pro řady příslušných derivací. To by nám opět stačilo pro záměnu derivací a řady.

Důkaz věty o jednoznačnosti řešení na n -dimenzionálních omezených oblastech lze nalézt v [32] na straně 176. Věta v této knize tedy pokrývá tuto i předchozí úlohu a mnohem více.

2.1.3 Konvoluce a její vlastnosti

Jak už jsme viděli v první kapitole, konvoluce se ve zpracování obrazu ve své diskrétní podobě používá (v případě gaussovské konvoluční masky) pro odstraňování šumu. Tuto šum odstraňující vlastnost si v následující podsekcí pokusíme odůvodnit pomocí Fourierovy transformace.

Definice 2.1.1. Necht' $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Pak **konvolucí funkcí** f a g označujeme funkci $f * g$ definovanou bodově jako $(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y)dy$.

Nyní si uvedeme vlastnosti takto definované konvoluce.

Tvrzení 2.1.3. *Takto zavedená konvoluce má tyto vlastnosti*

1. $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$
2. $f * g = g * f$
3. $\partial_{x_i}(f * g) = (\partial_{x_i}f * g)$ pro $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ s omezenými parciálními derivacemi.
4. $(f * g) \in C^1$ pro $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ s omezenými parciálními derivacemi.
5. $\mathcal{F}[f * g](\xi) = \mathcal{F}[f](\xi)\mathcal{F}[g](\xi)$ kde \mathcal{F} značí Fourierovu transformaci.

Z bodu 1. je vidět, že se na konvoluci můžeme dívat jako na operátor $*$: $L^1(\mathbb{R}^d) \times L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^d)$. Z bodu 4. zase plyne, že pokud vezmeme nějakou hladkou funkci $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ se všemi parciálními derivacemi omezenými, tak potom konvoluce s libovolnou $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ je také hladká funkce.

2.1.4 Cauchyova úloha pro rovnici vedení tepla v \mathbb{R}^n

Pro funkci $u : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}$ máme nyní úlohu

$$\begin{cases} \partial_t u(t, \mathbf{x}) = D \Delta_n u(t, \mathbf{x}) & \text{na } (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) & \text{na } \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.28)$$

kde $\Delta_n = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$ značí n -rozměrný Laplaceův operátor. Pomocí teorie zobecněných funkcí (viz. například [38]) lze nalézt fundamentální řešení ve tvaru

$$\mathcal{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\sqrt{D\pi t})^n} \exp\left(\frac{-|\mathbf{x}|^2}{4Dt}\right) = \mathcal{E}_t(\mathbf{x}) \quad \text{pro } t > 0.$$

Řešení úlohy (2.28) pak dostaneme jako konvoluci fundamentálního řešení s počáteční podmínkou $\varphi(\mathbf{x})$, tj. jako

$$u(t, \mathbf{x}) = (\mathcal{E}_t * \varphi)(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\sqrt{D\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{-|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{4Dt}\right) \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Pro volbu $n = 2$ obdržíme fundamentální řešení tvaru

$$\mathcal{E}(t, x, y) = \frac{1}{4D\pi t} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4Dt}\right).$$

Z porovnání s (1.2) získáme vztah

$$\sigma^2 = 2Dt.$$

Vidíme tedy, že řešení úlohy (2.28) do času T je ekvivalentní s výpočtem konvoluce Gaussova jádra s rozptylem $2DT$ s funkcí $\varphi(x, y)$. Jelikož je funkce $\mathcal{E}(t, x, y)$ hladká a má omezené všechny parciální derivace (podle x a y), tak konvoluce $(\mathcal{E} * \varphi)$ je také hladká funkce.

Podíváme se, jak může být akce Gaussova jádra reprezentována ve frekvenční oblasti. Provedeme jeho Fourierovu transformaci. Ta je definována jako

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \exp(-i\omega \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{pro } \omega \in \mathbb{R}^2.$$

Lze ukázat, že

$$\mathcal{F}[G_\sigma](\omega) = \exp\left(-\frac{|\omega|^2}{2}\sigma^2\right).$$

Pak z vlastnosti 5 konvoluce máme

$$\mathcal{F}[G_\sigma * \varphi](\omega) = \exp\left(-\frac{|\omega|^2}{2}\sigma^2\right) \mathcal{F}[\varphi](\omega).$$

Vyšší frekvence, které mohou reprezentovat šum (ale i hrany) v obraze, ve funkci φ jsou tedy skrz výraz $\exp\left(-\frac{|\omega|^2}{2}\sigma^2\right)$ utlumovány. Takže konvoluce s G_σ opravdu slouží jako filtr šumu. Toto plyne i z faktu, že rovnice vedení tepla stahuje konvexní rovinné křivky do svého vnitřku (viz [16]).

2.2 Peronova-Malikova rovnice

Odstraňování šumu pomocí řešení rovnice vedení tepla (nebo pomocí gaussovské lineární filtrace) má tu nevýhodu, že rozmazává i hrany. Proto bychom chtěli nějaký model, který by potlačoval v obraze šum a zároveň hrany zachovával. V práci [29] autoři představili model

$$\begin{array}{lll} \partial_t u(t, x, y) & = & \nabla \cdot [D(|\nabla u|) \nabla u](t, x, y) \quad \text{na } (0, +\infty) \times \Omega, \\ u(0, x, y) & = & \varphi(x, y) \quad \text{na } \Omega, \\ \partial_n u(t, x, y) & = & 0 \quad \text{na } (0, +\infty) \times \partial\Omega, \end{array} \quad (2.29)$$

kde $\Omega \in \mathbb{R}^2$ je omezená oblast a $D: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ hladká funkce. Pokud v tomto modelu za D zvolíme konstantní funkci, tak získáme výše uvedenou smíšenou úlohu pro rovnici vedení tepla. Na funkci D nyní naklademe podmínky

$$D(0) = 1, \quad D \text{ je klesající funkce,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} D(x) = 0.$$

Při těchto podmínkách pozorujeme

1. V místech malé velikosti gradientu funkce u dochází k rozmazávání, tak jako u rovnice vedení tepla.
2. Se zvyšujícím gradientem, se tento rozmazávací efekt projevuje méně.
3. Na místech s velmi vysokou (maximální) hodnotou gradientu se funkce D limitně blíží nule a k rozmazávání téměř nedochází.

Tyto a další vlastnosti jsou rigorózně rozebrány v [4]. Funkci D lze pak volit například jako

$$D(s) = \frac{1}{1 + \lambda s^2}, \quad (2.30)$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Tento parametr pak určuje jak je model (2.29) skrz funkci D citlivý k různým hranám v obraze. Pro vyšší hodnoty tohoto parametru jsou zachovány i hrany s čím dál menším gradientem.

Pro tuto úlohu však nebyla dokázána věta o existenci, jednoznačnosti a spojitě závislosti řešení na počátečních podmínkách. Pro souhrn dosavadních teoretických znalostí o této úloze může čtenář nahlédnout například do [39] nebo [40]. Navzdory této špatné podmíněnosti, jsou numerická schémata řešící aproximativně tuto úlohu stabilní.

Úloha (2.29) byla v práci [10] poupravena na

$\partial_t u(t, x, y) = \nabla \cdot [D(\nabla(G_\sigma * u)) \nabla u](t, x, y)$	na $(0, +\infty) \times \Omega,$	(2.31)
$u(0, x, y) = \varphi(x, y)$	na $\Omega,$	
$\partial_n u(t, x, y) = 0$	na $(0, +\infty) \times \partial\Omega,$	

kde pro $x \in \Omega$

$$(G_\sigma * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} G_\sigma(x - \xi) \tilde{u}(\xi) d\xi.$$

Funkce \tilde{u} je rozšířením funkce u na celé \mathbb{R}^2 . Toto rozšíření lze brát buď dodefinováním u na vnějšku Ω nulovou funkcí nebo zrcadlovým periodickým prodloužením (viz [2]). Pro úlohu lze již dokázat větu o existenci, jednoznačnosti a o spojitě závislosti na počáteční podmínce (viz [4]). V práci [20] se autoři zabývali numerickou analýzou schématu pro aproximativní řešení úlohy (2.31) založeném na metodě konečných prvků.

2.3 Pohyb křivek podle střední křivosti

Pohyby křivek (obecně nadploch) podle křivosti mají svůj původ ve fyzice jako Gibbsův-Thomsonův zákon či Youngova-Laplaceova rovnice popisující vztah mezi křivostí bubliny s určitým povrchovým napětím a tlakem uvnitř (viz [28], [21]).

Rovnice odvozené z pohybu podle křivosti a jim příbuzné mají své využití i ve zpracování obrazu. My si zde představíme (přímý) parametrický přístup a (level-set) vrstevnicový přístup.

Sekci začneme několika definicemi.

Definice 2.3.1. Necht' $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Pak

- Spojitou funkci $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazveme **parametricky zadaná křivka**.
- Množinu $\Gamma := \gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ nazveme **stopa křivky** nebo pouze **křivka**.
- Křivku γ splňující $(\forall s_1, s_2 \in I) (\gamma(s_1) = \gamma(s_2) \implies s_1 = s_2)$ nazveme **jednoduchá** na I .
- Křivku γ definovanou pro $a, b \in \mathbb{R}$ na $I = \langle a, b \rangle$ splňující $\gamma(a) = \gamma(b)$ nazveme **uzavřená** na $\langle a, b \rangle$.
- Křivku $\gamma \in C^{(1)}(I)$ splňující $|\gamma'| \neq 0$ na I nazveme **regulární**.
- Křivku $\gamma: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$ uzavřenou na $\langle a, b \rangle$ a jednoduchou na (a, b) nazveme **Jordanova**.

Nechť $\Gamma(t) \subset \mathbb{R}^2$ je v čase $t \in \langle 0, T \rangle$ vyvíjející se regulární křivka. Pak bod $\mathbf{x} \in \Gamma$ je funkce $\mathbf{x}: \langle 0, T \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$. Derivaci tohoto bodu podle času $\dot{\mathbf{x}}(t) =: \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ nazýváme rychlost. Normálovou rychlostí pak myslíme $v(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{N}(t, \mathbf{x})$, kde \mathbf{N} je jednotkový normálový vektor na křivku v bodě \mathbf{x} . Řekneme pak, že se křivka Γ pohybuje podle střední křivosti, pokud splňuje

$$\begin{aligned} v &= -\kappa + F \\ \Gamma(0) &= \Gamma_0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

kde $\kappa = \kappa(t, \mathbf{x})$ je křivost křivky v bodě \mathbf{x} , která se v našem případě rovinné křivky shoduje se střední křivostí. Funkce $F = F(t, \mathbf{x})$ pak představuje nějakou vnější sílu působící v normálovém směru.

Pokud v (2.32) položíme $F = 0$ získáme

$$\begin{aligned} v &= -\kappa \\ \Gamma(0) &= \Gamma_0 \end{aligned}$$

tzv. *curve shortening flow* neboli křivku zkracující pohyb. Tato úloha má tu vlastnost, že pro Γ_0 hladké, regulární, prosté a uzavřené má hladké, regulární a prosté řešení na konečném intervalu, které se postupně vyvíjí v konvexní křivku, která se nakonec v konečném čase stáhne do bodu (viz [18]).

Další publikací zabývající se pohybem podle střední křivosti je například [13].

2.3.1 Parametrický přístup

Odvození parametrické formy rovnice (2.32) provedeme po vzoru [21]. Mějme tedy hladkou vektorovou funkci

$$\mathbf{X}: I_u \times I_t \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

kde $I_u = \langle 0, 1 \rangle$ a $I_t = \langle 0, T \rangle$. Tato funkce nám parametricky zadává křivku $\Gamma(t)$ jako

$$\Gamma(t) = \{ \mathbf{X}(u, t) \mid u \in I_u \}.$$

Na tuto parametrizaci klademe v případě uzavřené křivky podmínky

$$\mathbf{X}(0, t) = \mathbf{X}(1, t), \quad \partial_u \mathbf{X}(0, t) = \partial_u \mathbf{X}(1, t) \quad (2.33)$$

a v případě neuzavřené křivky s pevnými konci klademe podmínky

$$\mathbf{X}(0, t) = \mathbf{X}_0, \quad \mathbf{X}(1, t) = \mathbf{X}_1. \quad (2.34)$$

Regulární křivku $\Gamma(t)$, tj. $|\partial_u \mathbf{X}| \neq 0$, můžeme přirozeně reparametrizovat pomocí její délky

$$L(\Gamma(t)) = \int_0^1 |\partial_u \mathbf{X}| du.$$

Délka úseku křivky mezi body $\mathbf{X}(0, t)$ a $\mathbf{X}(u, t)$ je pak dána jako

$$s(u) = \int_0^u |\partial_{\bar{u}} \mathbf{X}| d\bar{u}.$$

Platí

$$\frac{ds}{du} = |\partial_u \mathbf{X}| > 0. \quad (2.35)$$

Jelikož je tedy funkce s ostře rostoucí, má diferencovatelnou inverzi $s^{-1}(s) =: u(s)$. Označme nyní

$$\mathbf{Y}(s, t) := \mathbf{X}(u(s), t) \quad (2.36)$$

pro $s \in I_s = \langle 0, L(\Gamma) \rangle$. Pak parametrizace X a Y mají stejnou stopu, tj.

$$\Gamma(t) = \{Y(s, t) | s \in I_s\} = \{X(u, t) | u \in I_u\}.$$

Dále z (2.35) a (2.36) plyne

$$\partial_s Y = \partial_u X \frac{du}{ds} = \frac{\partial_u X}{|\partial_u X|}, \quad |\partial_s Y| = 1.$$

V diferenciální geometrii je pro rovinnou křivku definován jednotkový tečný vektor t_Γ a jednotkový normálový vektor n_Γ jako

$$t_\Gamma(s) = \frac{\partial_u X(u(s), t)}{|\partial_u X(u(s), t)|} = \partial_s Y(s, t), \quad n_\Gamma(s) = \frac{\partial_u X^\perp(u(s), t)}{|\partial_u X(u(s), t)|} = \partial_s Y^\perp(s, t), \quad (2.37)$$

kde \perp transformuje daný vektor na kolmý vektor k danému vektoru o stejné normě. Tato transformace ale není ani v rovině dána jednoznačně (jsou dvě možnosti). Dodatečnou podmínkou $\det(n_\Gamma, t_\Gamma) = 1$ již je dána pro $x = [X_1, X_2]^T$ jednoznačně jako $x^\perp = [X_2, -X_1]^T$.

Za těchto předpokladů pro parametrizaci křivky pomocí její délky existuje právě jedna funkce κ_Γ splňující *Frenetovy vzorce* (viz [41])

$$\partial_s n_\Gamma(s) = \kappa_\Gamma(s) t_\Gamma(s), \quad \partial_s t_\Gamma(s) = -\kappa_\Gamma(s) n_\Gamma(s). \quad (2.38)$$

Tato funkce se nazývá křivost křivky. Z (2.37) a (2.38) jí můžeme vyjádřit jako

$$\kappa_\Gamma = \frac{\partial_u X}{|\partial_u X|} \cdot \partial_u \left(\frac{\partial_u X^\perp}{|\partial_u X|} \right) \frac{1}{|\partial_u X|} = -\frac{\partial_u X^\perp}{|\partial_u X|} \cdot \partial_u \left(\frac{\partial_u X}{|\partial_u X|} \right) \frac{1}{|\partial_u X|}.$$

Nyní již můžeme rovnici (2.32) přepsat jako

$$\partial_t X \cdot \frac{\partial_u X^\perp}{|\partial_u X|} = \frac{1}{|\partial_u X|} \partial_u \left(\frac{\partial_u X}{|\partial_u X|} \right) \cdot \frac{\partial_u X^\perp}{|\partial_u X|} + F(t, X).$$

Křivka $\Gamma(t)$ splňující tuto rovnici skrze svojí parametrizaci splňuje i soustavu parciálních diferenciálních rovnic

$$\partial_t X = \frac{1}{|\partial_u X|} \partial_u \left(\frac{\partial_u X}{|\partial_u X|} \right) + F(t, X) \frac{\partial_u X^\perp}{|\partial_u X|},$$

s počáteční podmínkou

$$X(u, 0) = X_0(u),$$

odpovídající té z (2.32) a s okrajovými podmínkami (2.33) nebo (2.34).

Výhodou tohoto přístupu je výpočetní rychlost. Ve srovnání s vrstevnicovou metodou si parametrický přístup poradí i s otevřenými křivkami s pevnými konci (v publikaci [22] je této vlastnosti využito ve zpracování obrazu). Díky dimenzi úlohy, která je nižší než u vrstevnicového přístupu, jsou numerická schémata odvozená z parametrického přístupu mnohem rychlejší, co se týče výpočetního času.

Parametrická metoda si ale, narozdíl od vrstevnicové metody, neumí sama o sobě sobě poradit s topologickými změnami jako je roztržení křivky či sloučení několika křivek. Nicméně vylepšením této metody různými algoritmy lze tento problém obejít.

Aplikaci této rovnice ve zpracování obrazu pro segmentaci můžeme nalézt například v [8] a [22].

2.3.2 Vrstevnicový přístup

Pro danou Jordanovu křivku Γ_0 teď budeme hledat řešení (2.32) pomocí vrstevnic vhodné (tzv. vrstevnicové) funkce $g: (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, určující křivku $\Gamma(t)$ pro $c \in \mathbb{R}$ výrazem

$$\Gamma(t) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid g(t, \mathbf{x}) = c \}. \quad (2.39)$$

Bod $\mathbf{x}(t)$ křivky $\Gamma(t)$ je tedy implicitně dán rovností

$$g(t, \mathbf{x}(t)) = c.$$

Tento výraz zderivujeme podle t a obdržíme tzv. *Hamiltonovu-Jacobiho rovnici*

$$\partial_t g(t, \mathbf{x}(t)) + \nabla g(t, \mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) = 0.$$

Vydělením $|\nabla g| \neq 0$ dospějeme k

$$\frac{\nabla g(t, \mathbf{x}(t))}{|\nabla g(t, \mathbf{x}(t))|} \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) = -\frac{\partial_t g(t, \mathbf{x}(t))}{|\nabla g(t, \mathbf{x}(t))|}. \quad (2.40)$$

Z diferenciální geometrie víme, že (viz [41])

$$\mathbf{N}(t, \mathbf{x}(t)) = \frac{\nabla g(t, \mathbf{x}(t))}{|\nabla g(t, \mathbf{x}(t))|}, \quad \kappa(t, \mathbf{x}(t)) = \nabla \cdot \mathbf{N}(t, \mathbf{x}(t)).$$

Proto z (2.32) plyne že (2.40) můžeme přepsat jako

$$-\frac{\partial_t g(t, \mathbf{x}(t))}{|\nabla g(t, \mathbf{x}(t))|} = \mathbf{N}(t, \mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) = -\kappa(t, \mathbf{x}(t)) + F(t, \mathbf{x}(t)) = -\operatorname{div} \left(\frac{\nabla g(t, \mathbf{x}(t))}{|\nabla g(t, \mathbf{x}(t))|} \right) + F(t, \mathbf{x}(t)).$$

Menší úpravou již dostaneme rovnici pro funkci g

$$\partial_t g(t, \mathbf{x}(t)) = |\nabla g(t, \mathbf{x}(t))| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla g(t, \mathbf{x}(t))}{|\nabla g(t, \mathbf{x}(t))|} \right) - |\nabla g(t, \mathbf{x}(t))| F(t, \mathbf{x}(t)), \quad (2.41)$$

jejíž řešení hledáme v $(0, T) \times \Omega$. Toto řešení svými vrstevnicemi dle (2.39) určuje vývoje příslušných křivek $\Gamma(t)$. V praxi se kvůli možné nulovosti gradientu funkce g rovnice (2.41) regularizuje - člen $|\nabla g|$ se nahrazuje výrazem $|\nabla g|_\epsilon = \sqrt{\epsilon^2 + |\nabla g|^2}$, kde $\epsilon > 0$ (viz [27]).

Výhodou vrstevnicového přístupu je například to, že umožňuje splynutí několika uzavřených křivek v jednu či naopak rozdělení jedné uzavřené křivky na více uzavřených křivek (viz [21]). Tato vlastnost se ve zpracování obrazu hojně využívá. Rovnice (2.41) a její různé modifikace se ve zpracování dají použít jako hrany vylepšující filtr šumu nebo pro segmentaci pomocí aktivních kontur jako je tomu tak například v pracích [15] a [25]. Dimenze úlohy je ale navýšena a s ní výpočetní čas potřebný pro numerické řešení.

Příklady modelů ve zpracování obrazu

Pokud se teď na vstupní obraz I_0 definovaný na omezené oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ budeme dívat jako na hodnotu vrstevnicové funkce (obraz je složen z vrstevnic konstantních hodnot) v $t = 0$ můžeme obdržet model

$$\begin{array}{lcl} \partial_t g(t, \mathbf{x}) & = & |\nabla g(t, \mathbf{x})| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla g(t, \mathbf{x})}{|\nabla g(t, \mathbf{x})|} \right) \quad \text{na } (0, T) \times \Omega, \\ g(0, \mathbf{x}) & = & I_0(\mathbf{x}) \quad \text{na } \Omega, \\ \partial_n g(t, \mathbf{x}) & = & 0 \quad \text{na } (0, T) \times \partial\Omega, \end{array} \quad (2.42)$$

který podobně jako (2.31) slouží k vyhlazování obrazu, ale s několika rozdíly (viz [1]). Tento model v obraze vyhlazuje všechny vrstevnice současně a nezávisle na sobě - v kolmém směru mezi nimi k difuzi nedochází. V publikaci [15] je popsáno numerické schéma řešící regularizovanou verzi (2.42) pomocí metody konečných objemů, které vykazuje velmi dobré chování ve smyslu filtrace šumu a zachování hran.

Předchozí model v obraze všechny vrstevnice v ostřejších místech vyhlazuje a proto nejsou hrany zachovány. Model

$$\begin{array}{lcl} \partial_t g(t, \mathbf{x}) & = & D(|\nabla G_\sigma * g(t, \mathbf{x})|) |\nabla g(t, \mathbf{x})| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla g(t, \mathbf{x})}{|\nabla g(t, \mathbf{x})|} \right) \quad \text{na } (0, T) \times \Omega, \\ g(0, \mathbf{x}) & = & I_0(\mathbf{x}) \quad \text{na } \Omega, \\ \partial_n g(t, \mathbf{x}) & = & 0 \quad \text{na } (0, T) \times \partial\Omega, \end{array} \quad (2.43)$$

navrhnutý v práci [2] se snaží tuto vlastnost eliminovat. Funkce D zde značí hranový detektor z Peronovy-Malikovy rovnice. Tento člen zpomaluje vyhlazování v blízkosti hran.

Vhodnou modifikací vrstevnicové rovnice pomocí Peronova-Malikova hranového detektoru

$$D = D(|\nabla G_\sigma * I_0(\mathbf{x})|)$$

získáme segmentační model

$$\begin{array}{lcl} \partial_t g & = & |\nabla g|_\epsilon \operatorname{div} \left(D(|\nabla G_\sigma * I_0|) \frac{\nabla g}{|\nabla g|_\epsilon} \right) - D(|\nabla G_\sigma * I_0|) |\nabla g|_\epsilon F \quad \text{na } (0, T) \times \Omega, \\ g(0, \mathbf{x}) & = & g_0(\mathbf{x}) \quad \text{na } \Omega, \\ \partial_n g(t, \mathbf{x}) & = & 0 \quad \text{na } (0, T) \times \partial\Omega, \end{array} \quad (2.44)$$

kde I_0 je obraz, který segmentujeme a g_0 počáteční podmínka reprezentující počáteční segmentační křivku. Funkce g_0 lze pro Jordanovu křivku volit jako tzv. *známenková vzdálenostní funkce* (viz. [12]). Nulová vrstevnicová funkce $g(t, \mathbf{x})$ nám pak implicitně zadává v každém t segmentační křivku. Hranový detektor D zajišťuje, aby se vývoj segmentační křivky u hran obrazu I_0 zpomaloval. Citlivost hranového detektoru můžeme opět řídit stejně jako u Peronovy-Malikovy rovnice pomocí parametru λ . Další modely založené na vrstevnicové metodě a jejich aplikace ve zpracování obrazu můžeme nalézt například v [27].

Dalším možným přístupem k pohybu podle střední křivosti je metoda fázového pole. Aplikací tohoto modelu na geometrickou segmentaci obrazu se zabývají například publikace [7], [11] a [34].

2.4 Mumfordův-Shahův funkcional

Tvar funkcionalu

$$\mathcal{F}(U, K) = \int_{\Omega \setminus K} (U - u)^2 dx + \alpha \int_{\Omega \setminus K} |\nabla U|^2 dx + \beta \int_K d\sigma, \quad (2.45)$$

nám neumožňuje odvodit klasické tzv. Eulerovy rovnice. Proto se výraz (2.45) aproximuje posloupností \mathcal{F}_ϵ funkcionalů definovaných na Sobolevových prostorech konvergující k \mathcal{F} ve smyslu Γ -konvergence definované například v [4]. Toto nám zaručuje, že minima funkcionalu v této posloupnosti konvergují k minimu \mathcal{F} .

Těchto aproximací existuje více (viz například [4]). My zde použijeme aproximaci pomocí posloupnosti eliptických funkcionalů tvaru

$$\mathcal{F}_\varepsilon(U, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (U - u)^2 dx + \alpha \int_{\Omega} v^2 |\nabla U|^2 dx + \beta \int_{\Omega} \left(\varepsilon |\nabla v|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} (v - 1)^2 \right) dx, \quad (2.46)$$

navrženou v publikaci [3]. Charakteristická funkce $1 - \chi_K$ množiny hran K je zde aproximována pomocnou funkcí v splňující

$$v(x) \approx 0 \text{ pro } x \in K, \quad v(x) \approx 1 \text{ jinak.} \quad (2.47)$$

Pro funkcionál (2.46) se už Eulerovy rovnice pro Neumannovy okrajové podmínky

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ na } \partial\Omega,$$

snadno odvodí jako

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{F}_\varepsilon}{\delta v}(U, v) &= 2\alpha v |\nabla U|^2 + \frac{\beta}{2\varepsilon} (v - 1) - 2\beta\varepsilon \Delta v = 0, \\ \frac{\delta \mathcal{F}_\varepsilon}{\delta U}(U, v) &= U - u - 2\alpha \nabla \cdot (v^2 \nabla U) = 0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Tento model lze použít pro segmentaci i obnovení obrazu, jak uvidíme v poslední kapitole. Aplikací různých modelů založených na Mumfordově-Shahově funkcionálu s cílem obnovení obrazu se zabývá například publikace [6].

Kapitola 3

Numerické řešení difuzních úloh ve zpracování obrazu

V této kapitole se budeme zabývat tím, jak lze numericky řešit některé výše zmíněné difuzní parciální diferenciální rovnice. Konkrétně si zde představíme řešení smíšených úloh pro rovnice vedení tepla a rovnice Peronovy-Malikovy (2.31) pomocí metody konečných diferencí a naznačíme, jak bychom tyto úlohy mohli řešit metodou přímek.

Metoda konečných diferencí, známa také pod názvem metoda sítí, spočívá v diskretizaci definičního oboru na konečnou síť. Na této síti se pak diferenciální výrazy v řešené rovnici nahradí diferenčními náhradami nejčastěji odvozených z Taylorova rozvoje. Získáme tak soustavu obecně nelineárních rovnic, které již můžeme řešit různými metodami. Metoda přímek spočívá v pouze částečné diskretizaci definičního oboru tak, že získáme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic pro hodnoty v jednotlivých bodech diskretizace. Ty pak můžeme řešit například libovolnou Rungeovou–Kuttovou metodou. V publikaci [7] byla metoda konečných diferencí použita pro řešení nelineárních reakčně-difuzních rovnic k účelu segmentace obrazu a v publikaci [11] byla metoda použita pro segmentaci lékařských snímků z magnetické rezonance. Základy pro použití těchto metod jsou obsaženy v [33] a [37].

Difuzní úlohy lze řešit též metodou konečných prvků (viz například práci [31]) nebo metodou konečných objemů, jako je tomu například v pracích [15], [5].

3.1 Diferenční náhrady a jejich chyby

Nejdříve zavedeme tzv. *Landaův symbol velké O*

Definice 3.1.1. Necht' $\alpha > 0$. Řekneme, že reálná funkce f jedné reálné proměnné je $O(h^\alpha)$ (značíme $f(h) = O(h^\alpha)$) pokud

$$(\exists \varepsilon > 0)(\exists k > 0)(\forall h \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus 0) (|f(h)| \leq K |h^\alpha|)$$

neboli funkce

$$h \mapsto \frac{f(h)}{h^\alpha}$$

je na nějakém okolí nuly omezená.

Mějme $a \in \mathbb{R}^+$ a $N, M \in \mathbb{N}$. Označme

$$h := \frac{a}{N},$$

$$b := Mh.$$

Všechny funkce $\varphi : \langle 0, a \rangle \times \langle 0, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ zúžíme na síť

$$\bar{\omega}_h = \left\{ [ih, jh] \in \mathbb{R}^2 \mid i \in \{0, \dots, N\}; j \in \{0, \dots, M\} \right\}$$

a označíme

$$\varphi_{i,j} := \varphi(ih, jh).$$

Mějme tedy nějakou takovou funkci $u : \langle 0, a \rangle \times \langle 0, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Označme

$$u_1(t) := u(ih + th, jh), \quad u_2(t) := u(ih, jh + th)$$

a necht' $u \in C^3(\langle 0, a \rangle \times \langle 0, b \rangle)$. Pak z Taylorovy věty, Lagrangeova tvaru zbytku a řetězového pravidla plyne

$$u_{i\pm 1, j} = u_1(\pm 1) = u_1(0) \pm u_1'(0) + \frac{u_1''(0)}{2} \pm \frac{u_1'''(\xi_1)}{6} = u_{i,j} \pm \partial_x u_{i,j} h + \frac{\partial_{xx} u_{i,j}}{2} h^2 \pm \frac{\partial_{xxx} u(ih + \xi_1 h, jh)}{6} h^3,$$

$$u_{i, j\pm 1} = u_2(\pm 1) = u_2(0) \pm u_2'(0) + \frac{u_2''(0)}{2} \pm \frac{u_2'''(\xi_2)}{6} = u_{i,j} \pm \partial_y u_{i,j} h + \frac{\partial_{yy} u_{i,j}}{2} h^2 \pm \frac{\partial_{yyy} u(ih, jh + \xi_2 h)}{6} h^3,$$

kde $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$. Odtud dostaneme diferenční náhrady

$$\partial_x u_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + \frac{\overbrace{\partial_{xxx} u(ih + \xi_1 h, jh)}^{= O(h^2)}}{6} h^2, \quad \partial_y u_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h} + \frac{\overbrace{\partial_{yyy} u(ih, jh + \xi_2 h)}^{= O(h^2)}}{6} h^2.$$

Obdobným postupem lze získat

$$\partial_x u_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + O(h), \quad \partial_x u_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} + O(h),$$

$$\partial_y u_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h} + O(h), \quad \partial_y u_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h} + O(h).$$

Pro $u \in C^4(\langle 0, a \rangle \times \langle 0, b \rangle)$ pak dostaneme rozvinutím do 3. řádu a podobným postupem

$$\partial_{xx} u_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2), \quad \partial_{yy} u_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} + O(h^2).$$

Zaveďme funkce

$$\phi(t) := u(ih + th, jh + th),$$

$$\theta(t) := u(ih - th, jh + th).$$

Opět rozvinutím těchto funkcí do 3. řádu získáme obdobným postupem

$$\partial_{xy} u_{i,j} = \frac{u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{4h^2} + O(h^2).$$

3.2 Rovnice vedení tepla na úsečce

Rovnici (2.2) budeme nyní řešit na $(0, T) \times (0, a)$ pro $D = 1$. Tuto oblast pro $N_h, N_\tau \in \mathbb{N}$ diskretizujeme na síť

$$\{[ih, k\tau] \mid i \in \{0, \dots, N_h\}; k \in \{0, \dots, N_\tau\}\} \quad \text{kde} \quad \tau = \frac{T}{N_\tau}, \quad h = \frac{a}{N_h}$$

a $\partial_{xx}u(ih, k\tau)$ nahradíme diferencí

$$\frac{u((i+1)h, k\tau) - 2u(ih, k\tau) + u((i-1)h, k\tau)}{h^2} + O(h^2)$$

a $\partial_t u(ih, k\tau)$ nejjednodušší diferencí

$$\frac{u(ih, (k+1)\tau) - u(ih, k\tau)}{\tau} + O(\tau).$$

Při označení

$$u_i^k := u(ih, k\tau),$$

získáme diferenční explicitní schéma aproximující (2.2)

u_i^{k+1}	$= u_i^k + \frac{\tau}{h^2}(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k)$	pro $k \in \{0, \dots, N_\tau - 1\}, i \in \{1, \dots, N_h - 1\},$	(3.1)
u_i^0	$= \varphi_i$	pro $i \in \{1, \dots, N_h - 1\},$	
u_0^k	$= u_1^k$	pro $k \in \{0, \dots, N_\tau\},$	
$u_{N_h-1}^k$	$= u_{N_h}^k$	pro $k \in \{0, \dots, N_\tau\}.$	

V případě Dirichletovy okrajové podmínky je toto schéma konečných diferencí podmíněně stabilní za podmínky (viz [37], [33])

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}.$$

My zde toto kritérium použijeme i pro numerické řešení rovnice s Neumannovou okrajovou podmínkou.

3.3 Peronova-Malikova rovnice

Rozderivováním výrazu (2.29) obdržíme

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [D(|\nabla(G_\sigma * u)|) \nabla u](t, x, y) &= \left[D(|(G_\sigma * \nabla u)|) (\partial_{xx}u + \partial_{yy}u) \right](t, x, y) \\ &\quad - 2\lambda D^2(|(G_\sigma * \nabla u)|) \left[(G_\sigma * \partial_x u) (\partial_x u (G_\sigma * \partial_{xx}u) + \partial_y u (G_\sigma * \partial_{xy}u)) \right. \\ &\quad \left. + (G_\sigma * \partial_y u) (\partial_x u (G_\sigma * \partial_{xy}u) + \partial_y u (G_\sigma * \partial_{yy}u)) \right](t, x, y) \\ &=: Au(t, x, y). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dosazením diferenčních náhrad ze sekce 3.1 za všechny derivace v (3.2), obdržíme diferenční náhradu s řádem chyby $O(h^2)$. Tento řád chyby odvodíme. Pro tuto sekci budeme používat značení

$$u_{\hat{x}} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}, \quad u_{\hat{y}} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h}.$$

Odvození řádu chyby aproximace operátoru (3.2)

Pro omezené funkce $f, g : \langle 0, a \rangle \times \langle 0, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ dostaneme

$$(f + O(h^2))(g + O(h^2)) = fg + \underbrace{fO(h^2) + gO(h^2) + O(h^2)O(h^2)}_{O(h^2)} = fg + O(h^2). \quad (3.3)$$

Dále si odvodíme řád chyby výrazu $(G_\sigma * u_{\tilde{x}})(ih, jh)$. Ze sekce o Peronově-Malikově rovnici víme, že při této konvoluci se funkce u může na vnějšku $\Omega = \langle 0, a \rangle \times \langle 0, b \rangle$ dodefinovat například nulovou funkcí pomocí funkce \tilde{u} . Potom tedy

$$\begin{aligned} (G_\sigma * \partial_x u)(ih, jh) &= \int_{\mathbb{R}^2} G(ih - y_1, jh - y_2) \partial_x \tilde{u}(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \\ &= \int_{\Omega} G(ih - y_1, jh - y_2) \partial_x u(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = \int_{\Omega} G(ih - y_1, jh - y_2) (u_{\tilde{x}}(y_1, y_2) + O(h^2)) dy_1 dy_2 \\ &= (G_\sigma * u_{\tilde{x}})(ih, jh) + h^2 \int_{\Omega} G(ih - y_1, jh - y_2) \frac{\partial_{xxx} u(y_1 + \xi_1 h, y_2)}{6} dy_1 dy_2 \\ &= (G_\sigma * u_{\tilde{x}})(ih, jh) + O(h^2). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Chyby aproximace výrazů $(G_\sigma * \partial_{xx} u)$, $(G_\sigma * \partial_y u)$, $(G_\sigma * \partial_{yy} u)$ a $(G_\sigma * \partial_{xy} u)$ by se odvodily obdobně.

Nyní se podíváme na výraz $D(|(G_\sigma * \nabla u)|) = \tilde{D}(G * \partial_x u, G * \partial_y u)$, kde

$$\tilde{D}(x_1, x_2) = \frac{1}{1 + \lambda(x_1^2 + x_2^2)}.$$

Definujeme

$$\Psi(t) := \tilde{D}(\overbrace{x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)}^{x_0 + t(x - x_0)}),$$

kde

$$\mathbf{x} = [x, y]^T, \quad \mathbf{x}_0 = [x_0, y_0]^T.$$

Odtud

$$\Psi'(t) = \partial_{x_1} \tilde{D}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(x - x_0) + \partial_{x_2} \tilde{D}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(y - y_0).$$

Použitím Taylorovy věty obdržíme

$$\tilde{D}(x, y) = \Psi(1) = \Psi(0) + \Psi'(\xi) = \tilde{D}(x_0, y_0) + \partial_{x_1} \tilde{D}(\mathbf{x}_0 + \xi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(x - x_0) + \partial_{x_2} \tilde{D}(\mathbf{x}_0 + \xi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(y - y_0).$$

Nyní když zvolíme $\mathbf{x} = [G * \partial_x u, G * \partial_y u]^T$ a $\mathbf{x}_0 = [G * u_{\tilde{x}}, G * u_{\tilde{y}}]^T$ tak z (3.4) získáme

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = [O(h^2), O(h^2)]^T.$$

Odtud již máme

$$D(|(G_\sigma * \nabla u)|) = \tilde{D}(G * \partial_x u, G * \partial_y u) = \tilde{D}(G * u_{\tilde{x}}, G * u_{\tilde{y}}) + O(h^2). \quad (3.5)$$

Nyní aplikací výrazů (3.3), (3.4), (3.5) a diferenčních náhrad ze sekce 3.1 na diferenciální operátor (3.2) získáme jeho diferenční náhradu s chybou řádu $O(h^2)$. Tuto diferenční náhradu nyní označme $A_h u$. Můžeme tedy psát

$$Au(t, x, y) = A_h u(t, x, y) + O(h^2),$$

kde

$$\begin{aligned}
A_h u_{i,j}^k &= \frac{4(u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k - 4u_{i,j}^k)}{4h^2 + \lambda \left[(G_\sigma * (u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k))^2 + (G_\sigma * (u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k))^2 \right]} \\
&\quad - 2\lambda \left[\frac{4h^2}{4h^2 + \lambda \left[(G_\sigma * (u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k))^2 + (G_\sigma * (u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k))^2 \right]} \right]^2 \\
&\quad \cdot \frac{1}{4h^4} \left[(G_\sigma * (u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k)) (u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k) (G_\sigma * (u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k)) \right. \\
&\quad \quad + \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k}{4} (G_\sigma * (u_{i+1,j+1}^k + u_{i-1,j-1}^k - u_{i+1,j-1}^k - u_{i-1,j+1}^k)) \\
&\quad \quad + (G_\sigma * (u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k)) \left(\frac{u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k}{4} (G_\sigma * (u_{i+1,j+1}^k + u_{i-1,j-1}^k - u_{i+1,j-1}^k - u_{i-1,j+1}^k)) \right. \\
&\quad \quad \left. \left. + (u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k) (G_\sigma * (u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k)) \right) \right]. \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Nutno poznamenat, že platí $(G_\sigma * \partial_x u) = (\partial_x G_\sigma * u)$ a v operátoru (3.2) jsme nemuseli výraz $(G_\sigma * \partial_x u)$ a jemu podobné nahrazovat diferencemi. Známe totiž analytický předpis výrazu $\partial_x G_\sigma$. Nicméně my zde i přesto volíme výše uvedený přístup.

Řešení úlohy metodou přímek

Diskretizací úlohy (2.31) v prostorových proměnných získáme

$$\begin{aligned}
\frac{du_{i,j}}{dt}(t) &= A_h u_{i,j}(t) \quad \text{pro } i \in \{1, \dots, N-1\}, j \in \{1, \dots, M-1\}, \\
u_{i,j}(0) &= \varphi_{i,j} \quad \text{pro } i \in \{1, \dots, N-1\}, j \in \{1, \dots, M-1\}, \\
u_{0,j}(t) &= u_{1,j}(t) \quad \text{pro } j \in \{0, \dots, M\}, \\
u_{N,j}(t) &= u_{N-1,j}(t) \quad \text{pro } j \in \{0, \dots, M\}, \\
u_{i,0}(t) &= u_{i,1}(t) \quad \text{pro } i \in \{0, \dots, N\}, \\
u_{i,M}(t) &= u_{i,M-1}(t) \quad \text{pro } i \in \{0, \dots, N\},
\end{aligned} \tag{3.7}$$

což je soustava obyčejných diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou. Jelikož má pravá strana (3.7) spojitě všechny parciální derivace $\partial_{u_{k,l}} L_h u_{i,j}$, víme z věty o existenci a jednoznačnosti řešení, viz například [30], že tato soustava má jednoznačné řešení na nějakém okolí nuly. Tuto soustavu můžeme řešit libovolnou Rungovou-Kuttovou metodou. Při volbě nejjednodušší Rungeovy-Kuttovy metody, Eulerovy, obdržíme explicitní diferenční schéma

$$\begin{aligned}
u_{i,j}((k+1)\tau) &= u_{i,j}(k\tau) + \tau A_h u_{i,j}(k\tau) \quad \text{pro } i \in \{1, \dots, N-1\}, j \in \{1, \dots, M-1\}, \\
u_{i,j}(0) &= \varphi_{i,j} \quad \text{pro } i \in \{1, \dots, N-1\}, j \in \{1, \dots, M-1\}, \\
u_{0,j}(k\tau) &= u_{1,j}(k\tau) \quad \text{pro } j \in \{0, \dots, M\}, \\
u_{N,j}(k\tau) &= u_{N-1,j}(k\tau) \quad \text{pro } j \in \{0, \dots, M\}, \\
u_{i,0}(k\tau) &= u_{i,1}(k\tau) \quad \text{pro } i \in \{0, \dots, N\}, \\
u_{i,M}(k\tau) &= u_{i,M-1}(k\tau) \quad \text{pro } i \in \{0, \dots, N\}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Z (2.29) je vidět, že po volbě $\lambda = 0$ úloha přechází na rovnici vedení tepla ve dvou prostorových dimenzích. Pro tu je toto explicitní schéma podobně jako v jednorozměrném případě stabilní pro Dirichletovu okrajovou podmínku při splnění kritéria (k nahlédnutí například v [37])

$$\frac{2\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}.$$

My se tohoto kritéria budeme držet i při numerickém řešení Peronovy-Malikovy rovnice s Neumannovou okrajovou podmínkou.

3.4 Vrstevnicová rovnice

Regularizovanou verzi rovnice (2.42) budeme nyní řešit na $(0, T) \times (0, a) \times (0, b)$. Tuto oblast pro $N_h, M_h, N_\tau \in \mathbb{N}$ diskretizujeme na síť

$$\{[k\tau, ih, jh] \mid k \in \{1, \dots, N_\tau - 1\}; i \in \{1, \dots, N_h - 1\}; j \in \{1, \dots, M_h - 1\}\},$$

kde

$$\tau = \frac{T}{N_\tau}, \quad h = \frac{a}{N_h}, \quad b = M_h h.$$

Pro lepší manipulaci s konečnými diferencemi zavedeme značení

$$\begin{aligned}
u_{x_{i,j}}^k &:= \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k}{2h}, & u_{y_{i,j}}^k &:= \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k}{2h}, \\
u_{xx_{i,j}}^k &:= \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{h^2}, & u_{yy_{i,j}}^k &:= \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{h^2}, \\
u_{xy_{i,j}}^k &:= \frac{u_{i+1,j+1}^k + u_{i-1,j-1}^k - u_{i-1,j+1}^k - u_{i+1,j-1}^k}{4h^2}, & u_{t_{i,j}}^k &= \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\tau}.
\end{aligned}$$

Proderivováním pravé strany regularizované verze (2.42) obdržíme

$$|\nabla u|_\epsilon \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|_\epsilon} \right) = \frac{\partial_{xx} u ((\partial_y u)^2 + \epsilon^2) + \partial_{yy} u ((\partial_x u)^2 + \epsilon^2) - 2\partial_x u \partial_y u \partial_{xy} u}{(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 + \epsilon^2}.$$

Nahrazením tohoto výrazu výše označenými konečnými diferencemi obdržíme diferenční výraz

$$B_{h_{i,j}}^k = \frac{u_{xx_{i,j}}^k ((u_{y_{i,j}}^k)^2 + \epsilon^2) + u_{yy_{i,j}}^k ((u_{x_{i,j}}^k)^2 + \epsilon^2) - 2u_{x_{i,j}}^k u_{y_{i,j}}^k u_{xy_{i,j}}^k}{(u_{x_{i,j}}^k)^2 + (u_{y_{i,j}}^k)^2 + \epsilon^2}.$$

Levou stranu rovnice (2.42) nahradíme nejjednodušší konečnou diferencí

$$\partial_t u_{i,j}^k \approx \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\tau}.$$

Neumannovu okrajovou podmínku opět nahradíme konečnými diferencemi 1. řádu. Získáme tak explicitní schéma

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{k+1} &= u_{i,j}^k + \tau B_{h,i,j}^k \quad \text{pro } k \in \{0, \dots, N_\tau - 1\}, i \in \{1, \dots, N_h - 1\}, j \in \{1, \dots, M_h - 1\}, \\ u_{i,j}^0 &= I_{i,j} \quad \text{pro } i \in \{1, \dots, N_h - 1\}, j \in \{1, \dots, M_h - 1\}, \\ u_{0,j}^k &= u_{1,j}^k \quad \text{pro } k \in \{0, \dots, N_\tau\}, j \in \{0, \dots, M_h\}, \\ u_{N,j}^k &= u_{N-1,j}^k \quad \text{pro } k \in \{0, \dots, N_\tau\}, j \in \{0, \dots, M_h\}, \\ u_{i,0}^k &= u_{i,1}^k \quad \text{pro } k \in \{0, \dots, N_\tau\}, i \in \{0, \dots, N_h\}, \\ u_{i,M}^k &= u_{i,M-1}^k \quad \text{pro } k \in \{0, \dots, N_\tau\}, i \in \{0, \dots, N_h\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Úloha (2.43) má pouze navíc na pravé straně Peronovu-Malikovu funkci D . Její hodnoty v bodech naší sítě budeme značit jako $D_{i,j}^k$. Získáme tak numerické schéma

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{k+1} &= u_{i,j}^k + \tau D_{i,j}^k B_{h,i,j}^k \quad \text{pro } k \in \{0, \dots, N_\tau - 1\}, i \in \{1, \dots, N_h - 1\}, j \in \{1, \dots, M_h - 1\}, \\ u_{i,j}^0 &= I_{i,j} \quad \text{pro } i \in \{1, \dots, N_h - 1\}, j \in \{1, \dots, M_h - 1\}, \\ u_{0,j}^k &= u_{1,j}^k \quad \text{pro } k \in \{0, \dots, N_\tau\}, j \in \{0, \dots, M_h\}, \\ u_{N,j}^k &= u_{N-1,j}^k \quad \text{pro } k \in \{0, \dots, N_\tau\}, j \in \{0, \dots, M_h\}, \\ u_{i,0}^k &= u_{i,1}^k \quad \text{pro } k \in \{0, \dots, N_\tau\}, i \in \{0, \dots, N_h\}, \\ u_{i,M}^k &= u_{i,M-1}^k \quad \text{pro } k \in \{0, \dots, N_\tau\}, i \in \{0, \dots, N_h\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Pravou stranu rovnice (2.44) při označení $D := D(|\nabla G_\sigma * I_0|)$ opět proderivujeme a dostaneme

$$D \frac{\partial_{xx} u ((\partial_y u)^2 + \epsilon^2) + \partial_{yy} u ((\partial_x u)^2 + \epsilon^2) - 2\partial_x u \partial_y u \partial_{xy} u}{(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 + \epsilon^2} + \partial_x D \partial_x u + \partial_y D \partial_y u - DF \sqrt{(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 + \epsilon^2}.$$

Nahrazením parciálních derivací výše označenými konečnými diferencemi získáme obdobný diferenční výraz

$$C_{h,i,j}^k = D_{i,j}^k B_{h,i,j}^k + D_{x_{i,j}}^k u_{x_{i,j}}^k + D_{y_{i,j}}^k u_{y_{i,j}}^k - D_{i,j}^k F_{i,j}^k \sqrt{(u_{x_{i,j}}^k)^2 + (u_{y_{i,j}}^k)^2 + \epsilon^2}.$$

Stejným způsobem tak opět obdržíme explicitní numerické schéma

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{k+1} &= u_{i,j}^k + \tau C_{h,i,j}^k \quad \text{pro } k \in \{0, \dots, N_\tau - 1\}, i \in \{1, \dots, N_h - 1\}, j \in \{1, \dots, M_h - 1\}, \\ u_{i,j}^0 &= u_{0i,j} \quad \text{pro } i \in \{1, \dots, N_h - 1\}, j \in \{1, \dots, M_h - 1\}, \\ u_{0,j}^k &= u_{1,j}^k \quad \text{pro } k \in \{0, \dots, N_\tau\}, j \in \{0, \dots, M_h\}, \\ u_{N,j}^k &= u_{N-1,j}^k \quad \text{pro } k \in \{0, \dots, N_\tau\}, j \in \{0, \dots, M_h\}, \\ u_{i,0}^k &= u_{i,1}^k \quad \text{pro } k \in \{0, \dots, N_\tau\}, i \in \{0, \dots, N_h\}, \\ u_{i,M}^k &= u_{i,M-1}^k \quad \text{pro } k \in \{0, \dots, N_\tau\}, i \in \{0, \dots, N_h\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.5 Mumfordův-Shahův funkcionál

Pro numerické řešení Eulerových rovnic (2.48) jsme použili volně dostupnou implementaci [17] v Pythonu. Autor uvádí, že Eulerovy rovnice pro minimalizaci odvodil po vzoru [6]. Námi odvozené rovnice (2.48) jsou s kódem autora [17] ve shodě.

Soustava (2.48) se zde řeší schématem alternujících proměnných a metodou konjugovaných gradientů. Rovnice (2.48) se řeší střídavě. Pro zafixované U se řeší první rovnice metodou konjugovaných gradientů. Získá se minimalizované v . Poté se shodně řeší druhá rovnice pro zafixované v . Tento postup se opakuje daný počet iterací. Algoritmus lze popsat pseudokódem

Algoritmus 1

```
1:  $U = u, v = \mathbf{0}, n = \#$  iterací  
2:  $i = 0$   
3: while  $i < n$  do  
4:   první z rovnic (2.48) řešíme pro  $v$   
5:   druhou z rovnic (2.48) řešíme pro  $U$   
6:    $i+ = 1$   
7: end while  
8: return  $U, v$   
9:
```

V následující kapitole si ukážeme aplikaci tohoto modelu na obrazová data. A to jak za účelem segmentace, tak i za účelem obnovení obrazu.

Kapitola 4

Výpočetní studie

V této kapitole si představíme vlastní numerické výsledky. Pomocí experimentálního řádu konvergence ověříme teoretický řád konvergence daných diferenčních schémat z předchozí kapitoly u lineárních úloh se známým řešením. Dále zde aplikujeme smíšenou úlohu vedení tepla na obdélníku, Peronovu-Malikovu rovnici, tři zmíněné modely (dva pro obnovu a jeden pro segmentaci obrazu) vycházející z vrstevnicové rovnice na testovací obrázky pomocí metody konečných diferencí. Nakonec zde demonstrujeme aplikaci eliptické aproximace Mumfordova-Shahova funkcionálu pomocí volně dostupné implementace [17] na obrazová data za účelem obnovy a segmentace obrazu. Vlastní implementace byly napsány v jazyce Python.

4.1 Rovnice vedení tepla

4.1.1 Jednorozměrný případ

Na konkrétní úloze s Neumannovou okrajovou podmínkou

$$\begin{array}{rcll} \partial_t u(t, x) - D \partial_{xx} u(t, x) & = & 0 & \text{na } (0, 0.1) \times (0, 1), \\ u(0, x) & = & \cos(\pi x) & \text{na } (0, 1), \\ \partial_x u(t, 0) & = & 0 & \text{na } (0, 0.1), \\ \partial_x u(t, a) & = & 0 & \text{na } (0, 0.1), \end{array}$$

s analytickým řešením

$$v(t, x) = \exp(-\pi^2 t) \cos(\pi x) \quad \text{na } \langle 0, 0.01 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$$

a na konkrétní úloze s Dirichletovou okrajovou podmínkou

$$\begin{array}{rcll} \partial_t u(t, x) - D \partial_{xx} u(t, x) & = & 0 & \text{na } (0, 0.1) \times (0, 1), \\ u(0, x) & = & \sin(\pi x) & \text{na } (0, 1), \\ u(t, 0) & = & 0 & \text{na } (0, 0.1), \\ u(t, a) & = & 0 & \text{na } (0, 0.1), \end{array}$$

s analytickým řešením

$$v(t, x) = \exp(-\pi^2 t) \sin(\pi x) \quad \text{na } \langle 0, 0.01 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle,$$

si pro vhodné normy $\|\cdot\|$ ověříme teoretické řády konvergence diferenčního schématu (3.1). Toto ověření provedeme pomocí experimentálního řádu konvergence

$$EOC = \frac{\ln(\|v - u_{h_1}\|/\|v - u_{h_2}\|)}{\ln(h_1/h_2)},$$

kde u_{h_1}, u_{h_2} jsou řešení úlohy (3.1) pro prostorové kroky $h_1 > h_2$ a v analytické řešení. U úlohy s Dirichletovou podmínkou jsme ve schématu (3.1) jen upravili členy odpovídající okrajové podmínce. Pro výpočet odchylky numerického řešení od analytického jsme použili normy

$$\|u\|_p = \left(\sum_{i=1}^{N_h} \sum_{k=1}^{N_\tau} h\tau |u_i^k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|u\|_\infty = \max_{\substack{i \in \{0, \dots, N_h\} \\ k \in \{0, \dots, N_\tau\}}} |u_i^k|,$$

pro $p = 1$ a pro $p = 2$.

V tabulce 4.1 je vidět, že experimentální řád konvergence EOC opravdu odpovídá teoretickému řádu konvergence $O(h^2)$. Nicméně v tabulce 4.2 je vidět, že experimentální řád konvergence EOC pro Neumannovu okrajovou podmínku odpovídá přibližně pouze 1. To je způsobeno volbou náhrady derivace v okrajové podmínce s řádem chyby $O(h)$. Pokud ale Neumannovu okrajovou podmínku nahradíme diferencí

$$\partial_x u_i^k = \frac{-u_{i+2}^k + 4u_{i+1}^k - 3u_i^k}{2h} + O(h^2),$$

tak z tabulky 4.3 je vidět již odpovídající experimentální řád konvergence s hodnotou 2.

N_h	h	$\ \cdot\ _1$		$\ \cdot\ _2$		$\ \cdot\ _\infty$		CPU čas
		Error	EOC	Error	EOC	Error	EOC	
10	0.1	1.995×10^{-4}	-	7.526×10^{-4}	-	4.294×10^{-3}	-	0.00197
20	0.05	4.860×10^{-5}	2.037	1.837×10^{-4}	2.035	1.063×10^{-3}	2.015	0.00596
40	0.025	1.207×10^{-5}	2.010	4.564×10^{-5}	2.009	2.650×10^{-4}	2.004	0.00897
80	0.0125	3.013×10^{-6}	2.002	1.139×10^{-5}	2.002	6.620×10^{-5}	2.001	0.02194
160	0.00625	7.530×10^{-7}	2.001	2.847×10^{-6}	2.001	1.655×10^{-5}	2.000	0.12016
320	0.003125	1.880×10^{-7}	2.000	7.120×10^{-7}	2.000	4.136×10^{-6}	2.000	0.80738
640	0.0015625	4.700×10^{-8}	2.000	1.780×10^{-7}	2.000	1.034×10^{-6}	2.000	6.47349

Tabulka 4.1: Chyba numerického řešení $Error$ v příslušných normách a EOC s volbou $\tau = 0.4h^2$ pro úlohu s Dirichletovou okrajovou podmínkou.

N_h	h	$\ \cdot\ _1$		$\ \cdot\ _2$		$\ \cdot\ _\infty$		CPU čas
		Error	EOC	Error	EOC	Error	EOC	
10	0.1	3.895×10^{-3}	-	1.608×10^{-2}	-	1.069×10^{-1}	-	0.00199
20	0.05	1.762×10^{-3}	1.145	7.300×10^{-3}	1.140	5.064×10^{-2}	1.078	0.00698
40	0.025	8.310×10^{-4}	1.084	3.461×10^{-4}	1.077	2.450×10^{-2}	1.047	0.01297
80	0.0125	4.026×10^{-4}	1.045	1.683×10^{-4}	1.040	1.203×10^{-2}	1.026	0.03889
160	0.00625	1.981×10^{-4}	1.024	8.297×10^{-5}	1.021	5.960×10^{-3}	1.014	0.12570
320	0.003125	9.822×10^{-5}	1.012	4.119×10^{-5}	1.010	2.966×10^{-3}	1.007	0.81858
640	0.0015625	4.890×10^{-5}	1.006	2.052×10^{-5}	1.005	1.479×10^{-3}	1.004	6.34606

Tabulka 4.2: Chyba numerického řešení $Error$ v příslušných normách a EOC s volbou $\tau = 0.4h^2$ pro úlohu s Neumannovou okrajovou podmínkou s náhradou derivace v okrajové podmínce řádu $O(h)$.

N_h	h	$\ \cdot\ _1$		$\ \cdot\ _2$		$\ \cdot\ _\infty$		CPU čas
		<i>Error</i>	<i>EOC</i>	<i>Error</i>	<i>EOC</i>	<i>Error</i>	<i>EOC</i>	
10	0.1	3.538×10^{-4}	-	1.389×10^{-3}	-	8.734×10^{-3}	-	0.00100
20	0.05	6.786×10^{-5}	2.382	2.626×10^{-4}	2.403	1.629×10^{-3}	2.423	0.00599
40	0.025	1.448×10^{-5}	2.229	5.546×10^{-5}	2.243	3.360×10^{-4}	2.277	0.00897
80	0.0125	3.313×10^{-6}	2.127	1.262×10^{-5}	2.136	7.508×10^{-5}	2.162	0.02795
160	0.00625	7.900×10^{-7}	2.068	3.000×10^{-6}	2.072	1.766×10^{-5}	2.088	0.13138
320	0.003125	1.930×10^{-7}	2.035	7.310×10^{-7}	2.037	4.275×10^{-6}	2.046	0.92343
640	0.0015625	4.800×10^{-8}	2.018	1.800×10^{-7}	2.019	1.051×10^{-6}	2.024	6.80589

Tabulka 4.3: Chyba numerického řešení *Error* v příslušných normách a *EOC* s volbou $\tau = 0.4h^2$ pro úlohu s Neumannovou okrajovou podmínkou s náhradou derivace v okrajové podmínce řádu $O(h^2)$.

4.1.2 Dvourozměrný případ

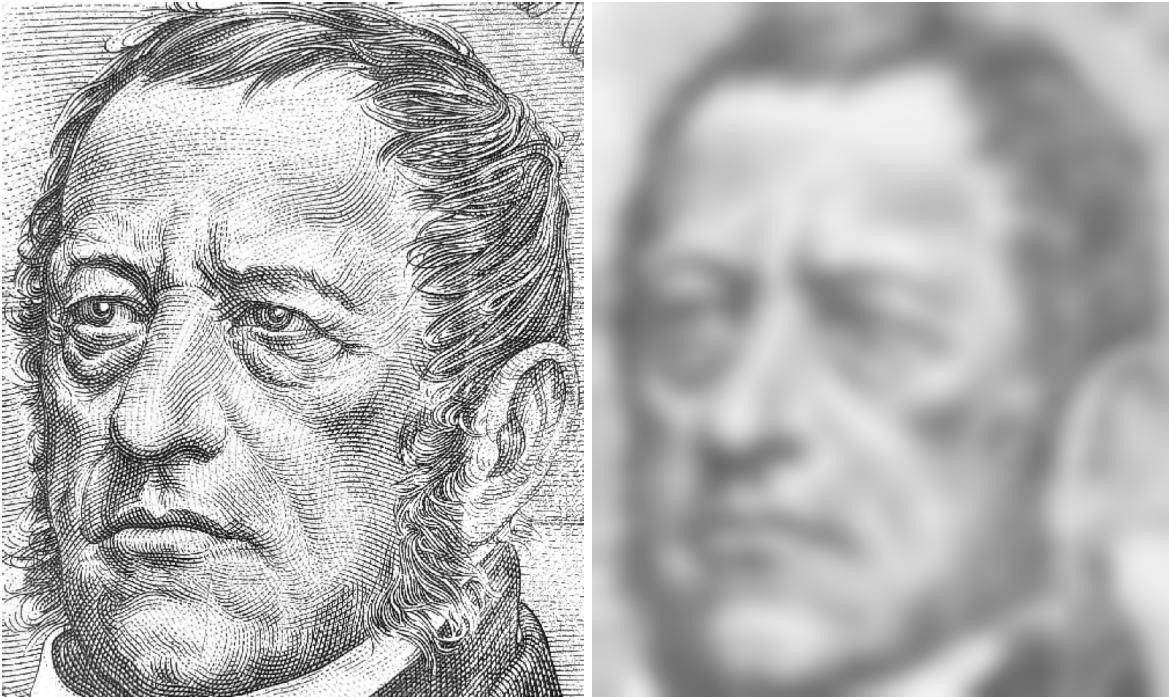
Nyní si ukážeme numerické řešení rovnice

$$\begin{array}{l}
 \partial_t u(t, x, y) = \Delta u(t, x, y) \quad \text{na } (0, T) \times \Omega, \\
 u(0, x, y) = I_0(x, y) \quad \text{na } \Omega, \\
 \partial_n u(t, x, y) = 0 \quad \text{na } (0, T) \times \partial\Omega,
 \end{array} \tag{4.1}$$

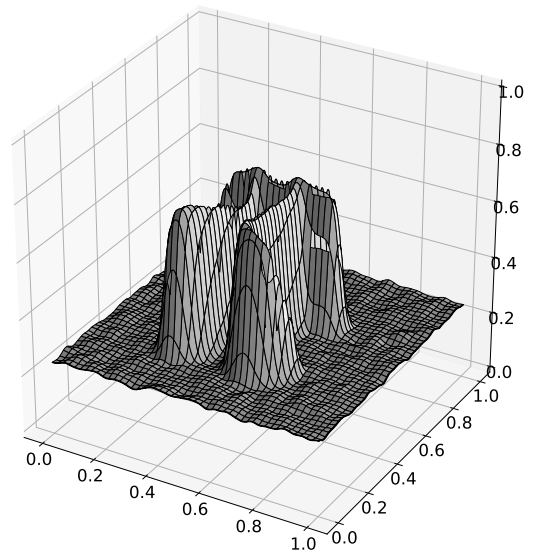
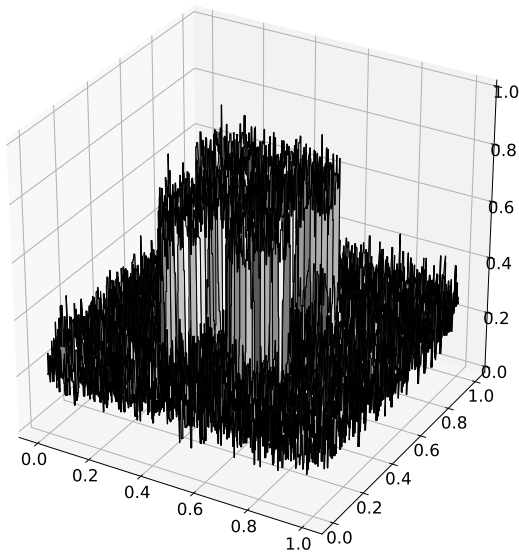
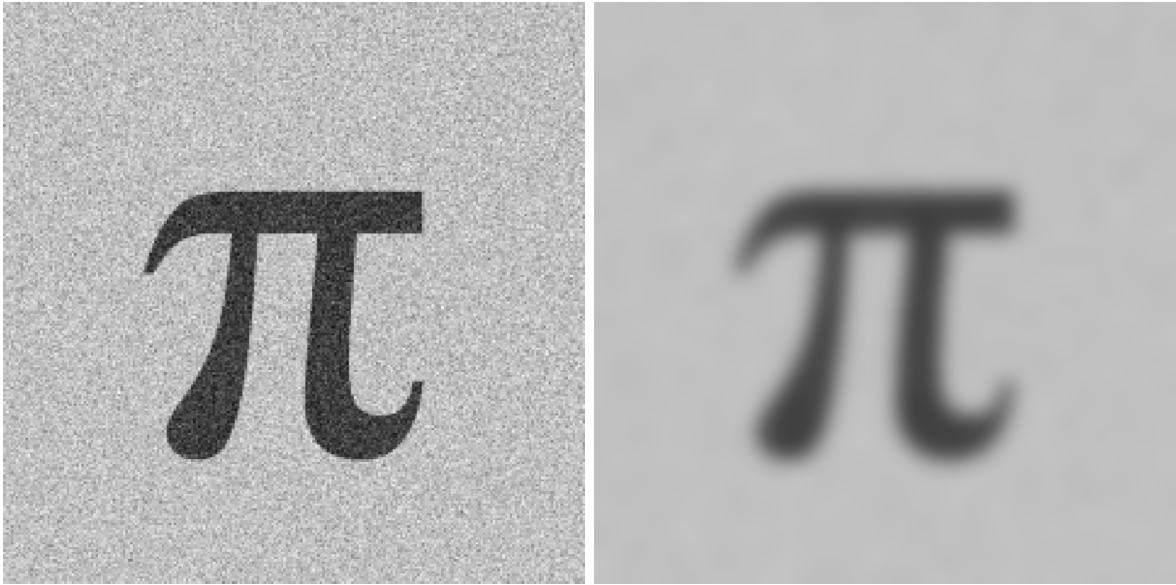
kde za počáteční podmínku I_0 budeme brát testovací obrázky. Oblast $\Omega = (0, 1) \times (0, b)$ volíme tak, že b vždy dopočteme tak, abychom zachovali původní poměry obrázku. Úlohu řešíme explicitním schématem (3.8) pro $\lambda = 0$. Pro naše dva obrázky 4.2, 4.1 volíme shodné parametry

$$T = 0.00015, \quad \tau = 6 \times 10^{-7}, \quad h = \frac{1}{600}. \tag{4.2}$$

Můžeme pozorovat efekt izotropní difuze, to znamená stejné rozmazávání obrázku ve všech směrech. Informace o hranách se pomalu vytrácí.



Obrázek 4.1: Rovnice vedení tepla (4.1) aplikovaná na počáteční podmínku nalevo s řešením s parametry (4.2) napravo v čase $t = 0.00015$. Na této bitmapové reprezentaci, oborem hodnot funkce u je zde diskrétní prostor odstínů šedi, je možno pozorovat homogenní rozmazání.



Obrázek 4.2: Rovnice vedení tepla (4.1) aplikovaná na počáteční podmínku nalevo s řešením s parametry (4.2) napravo v čase $t = 0.00015$. Nahoře je obrázek znázorněn jako bitmapa - oborem hodnot funkce u je zde diskretní prostor odstínů šedi. Dole je obrázek reprezentován grafem funkce dvou proměnných zobrazující do $\langle 0, 1 \rangle$. Hodnota 1 odpovídá černé a hodnota 0 bílé. Na dolním grafu je názorněji vidět geometrická skladba obrázku. Obzvláště je patrná hustota zašumění.

4.2 Peronova-Malikova rovnice

V této sekci si ukážeme řešení Peronovy-Malikovy rovnice

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x, y) = \nabla \cdot [D(|\nabla(G_\sigma * u)|) \nabla u](t, x, y) & \text{na } (0, T) \times \Omega, \\ u(0, x, y) = I_0(x, y) & \text{na } \Omega, \\ \partial_n u(t, x, y) = 0 & \text{na } (0, T) \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.3)$$

kde za počáteční podmínku I_0 budeme brát testovací obrázky. Opět budeme oblast $\Omega = (0, 1) \times (0, b)$ volit tak, že b vždy dopočteme tak, abychom zachovali původní poměry obrázku. Úlohu řešíme explicitním schématem (3.8). Příslušně konvoluce ve schématu počítáme pomocí té diskretní s diskretní náhradou dvoudimenzionální hustoty Gaussova rozdělení reprezentovanou maticí 3×3 tak, jak jsme si odvodili v první kapitole (viz vzorec (1.1) a konec podsekcce o Gaussově filtraci). Numerické schéma jsme ještě algoritmicky vylepšili proměnlivým parametrem $\lambda = \lambda(t)$ ve funkci (2.30) tak, že v časovém kroku k se tento parametr λ volí podmínkou

$$\lambda = \min \{ \lambda_{ini} \alpha^k, \lambda_{max} \},$$

kde $\alpha \in (1, +\infty)$, $\lambda_{ini} \geq 0$ a $\lambda_{max} \geq \lambda_{ini}$.

Parametry

$$\tau = 6 \times 10^{-7}, \quad h = \frac{1}{600}, \quad (4.4)$$

volíme shodně pro všechny testovací obrázky.

Parametry

$$\sigma = 0.001, \quad \lambda_{ini} = 1 \times 10^{-5}, \quad \alpha = 1.8, \quad \lambda_{max} = 0.08, \quad (4.5)$$

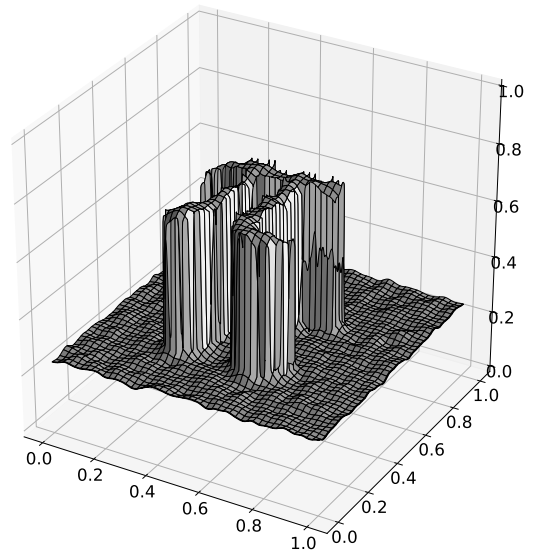
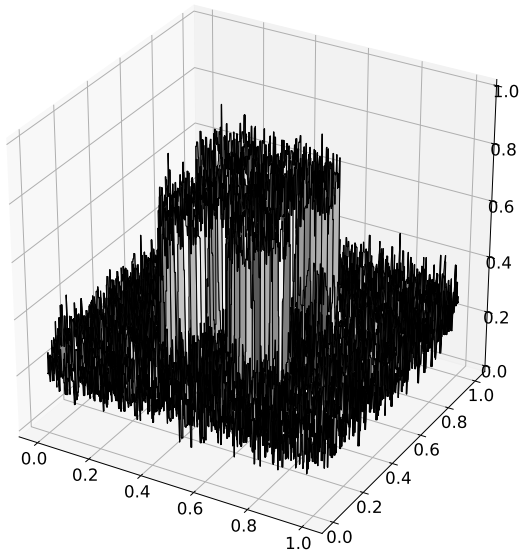
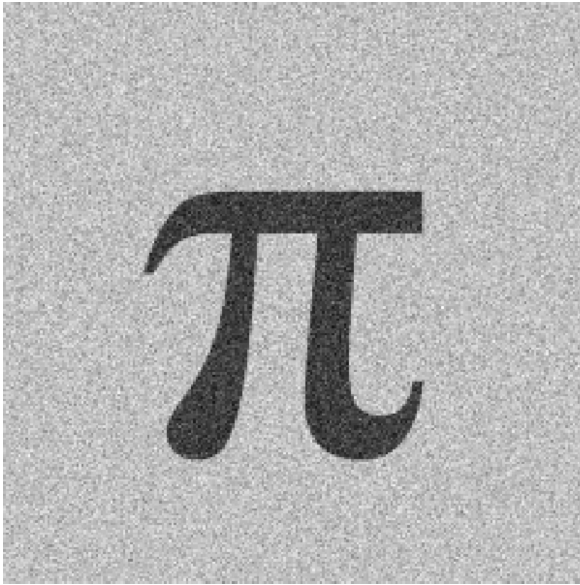
volíme shodně pro obrázky s obličejí 4.6, 4.7 a 4.8. Po řadě pro obrázky 4.3, 4.4 a 4.5 volíme parametry

$$\sigma = \frac{1}{600}, \quad \lambda_{ini} = 5 \times 10^{-5}, \quad \alpha = 1.4, \quad \lambda_{max} = 0.008, \quad (4.6)$$

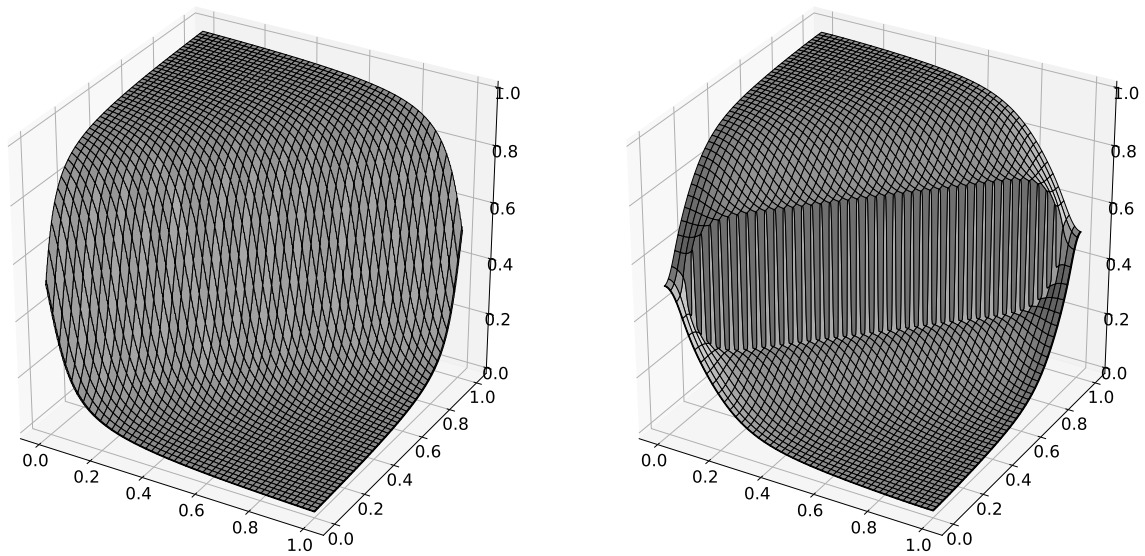
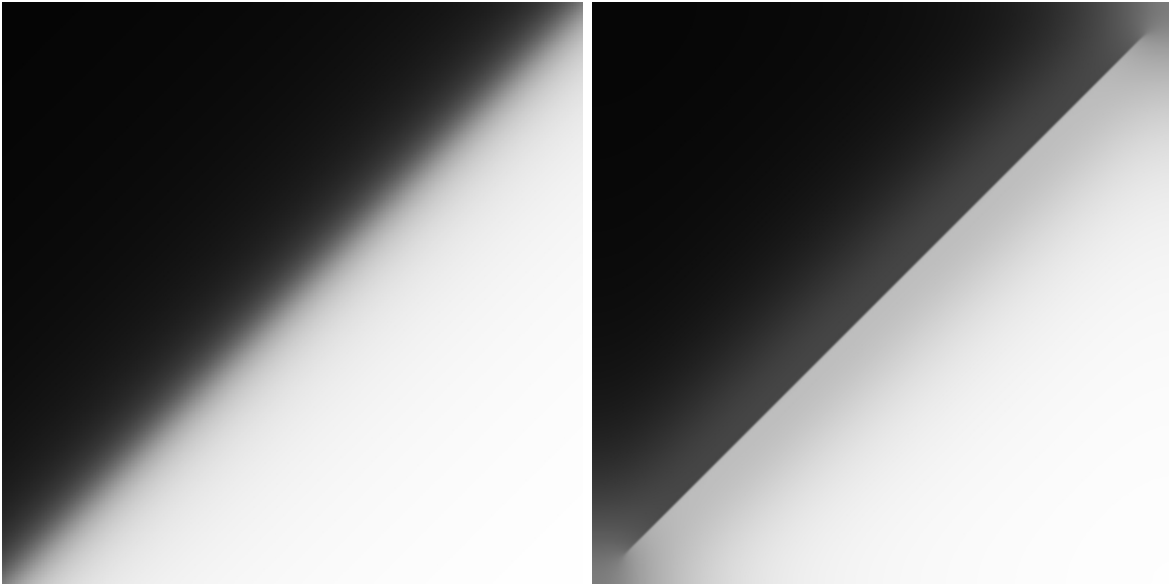
$$\sigma = \frac{1}{600}, \quad \lambda_{ini} = 0.03, \quad \alpha = 1, \quad \lambda_{max} = 0.03, \quad (4.7)$$

$$\sigma = \frac{1}{600}, \quad \lambda_{ini} = 0.05, \quad \alpha = 1, \quad \lambda_{max} = 0.05. \quad (4.8)$$

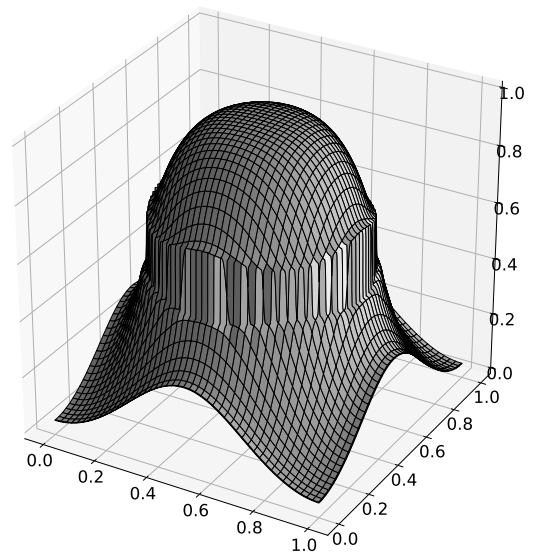
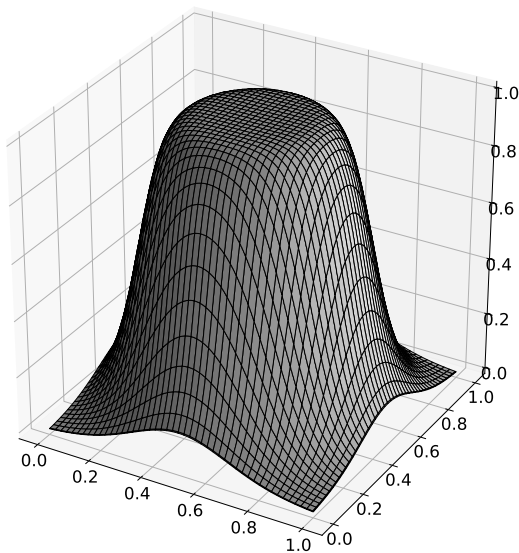
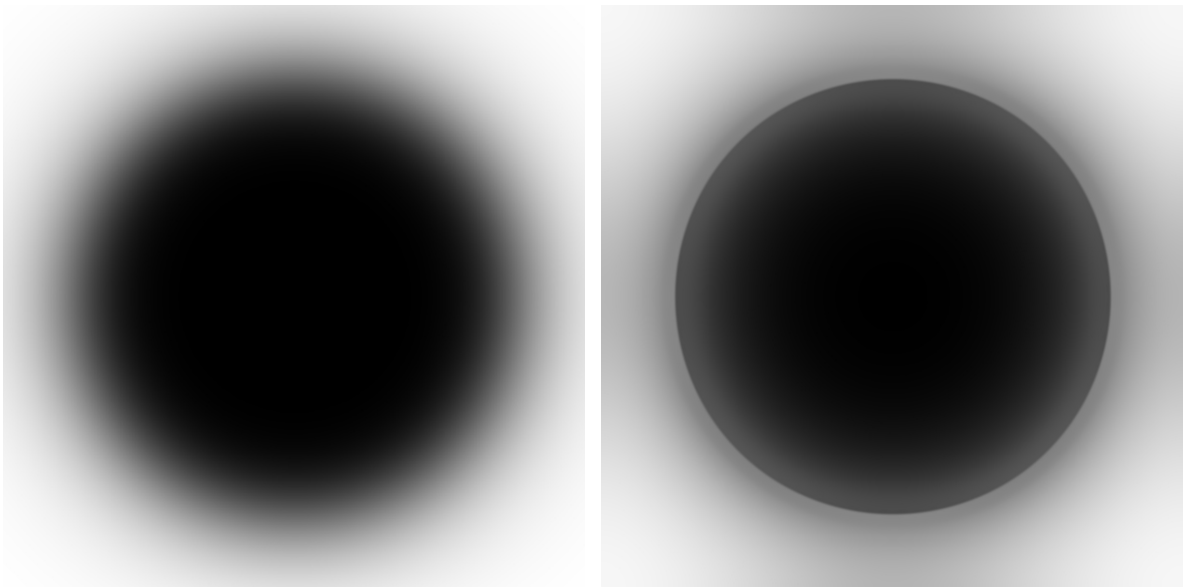
Je možno pozorovat nehomogenní vyhlazování. Na obrázcích 4.4 a 4.5 můžeme pozorovat hrany zaostřující vlastnost Peronovy-Malikovy rovnice. Na obrázku 4.3 můžeme tuto vlastnost pozorovat zároveň s vyhlazováním šumu. Na obrázcích s obličejí 4.6, 4.7 a 4.8 můžeme pozorovat odstranění čar se zachováním rysů tváře.



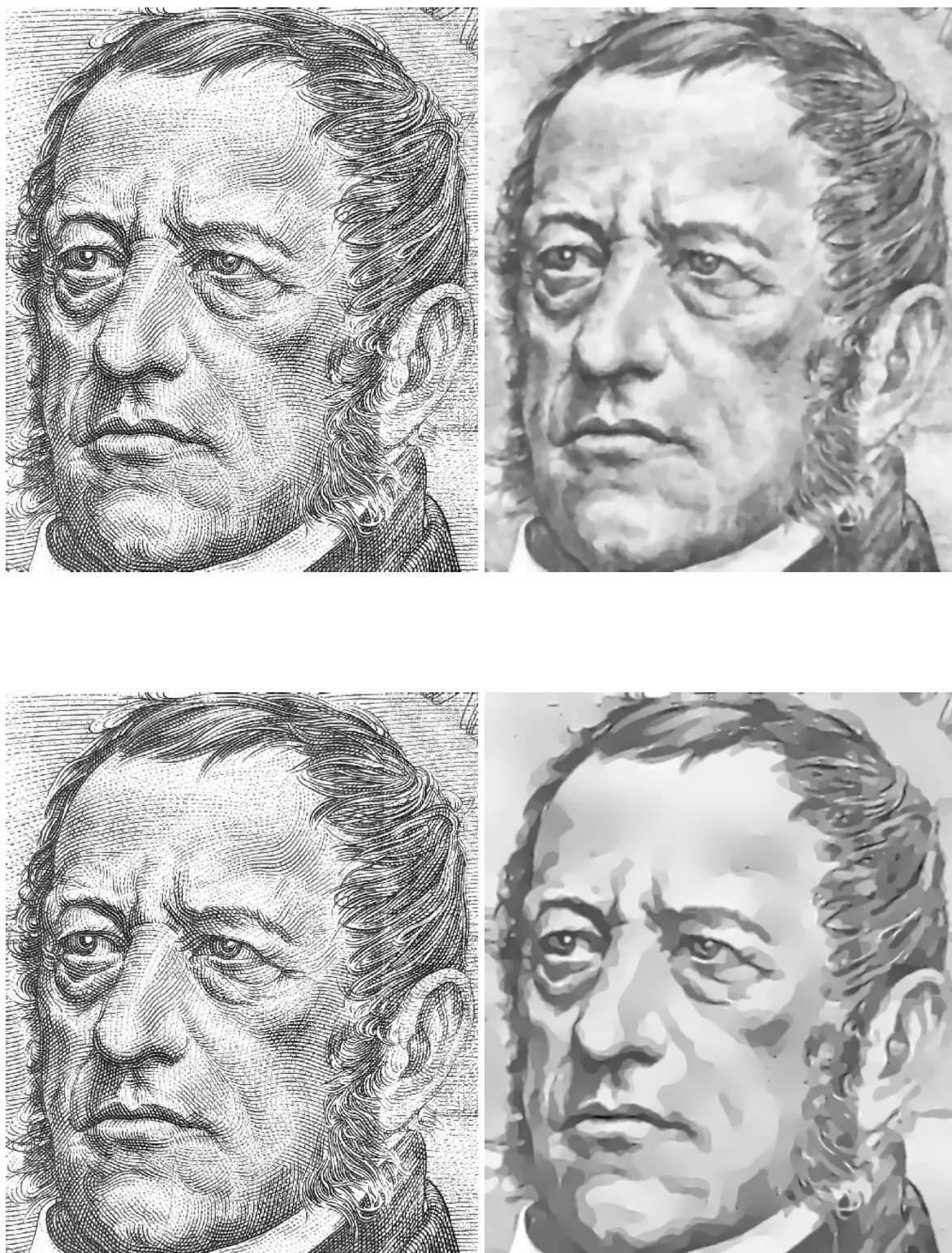
Obrázek 4.3: Peronova-Malikova rovnice (4.3) aplikovaná na počáteční podmínku nalevo s řešením pro parametry (4.4) a (4.6) napravo pro $t = 0.0015$. Nahoře je obrázek znázorněn jako bitmapa - oborem hodnot funkce u je zde diskrétní prostor odstínů šedi. Dole je obrázek reprezentován grafem funkce dvou proměnných zobrazující do $\langle 0, 1 \rangle$. Hodnota 1 odpovídá černé a hodnota 0 bílé. Na dolním grafu je názorněji vidět geometrická skladba obrázku. Obzvláště je patrná hustota zašumění.



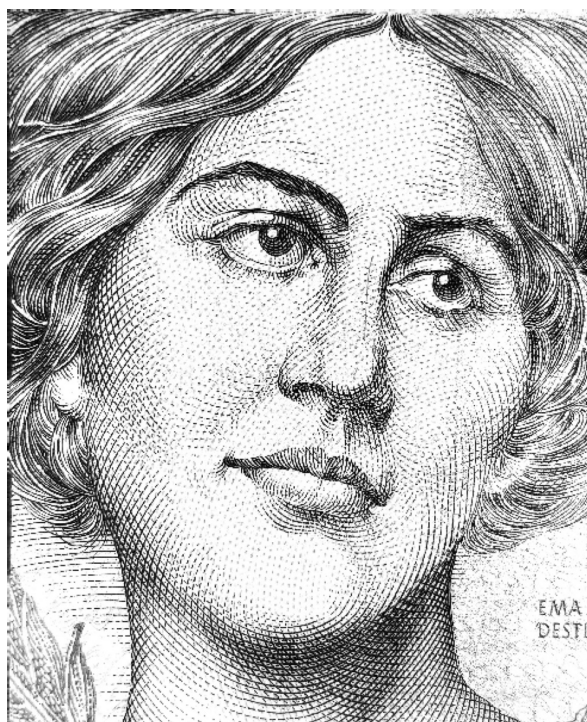
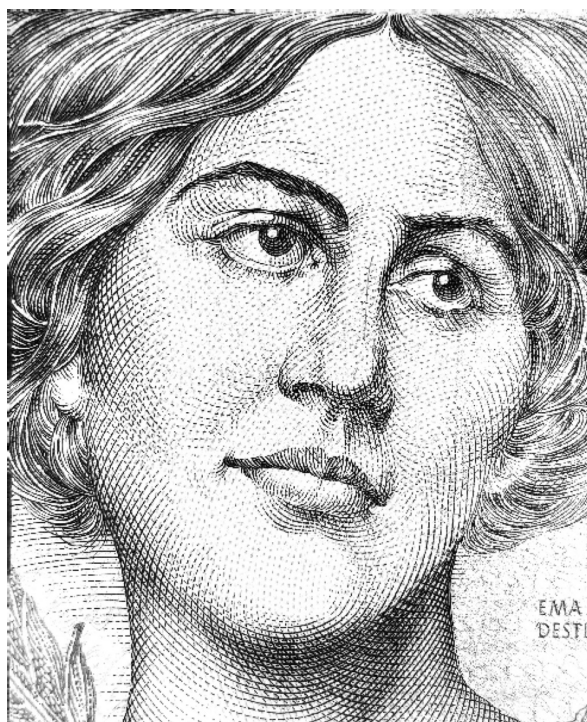
Obrázek 4.4: Peronova-Malikova rovnice (4.3) aplikovaná na počáteční podmínku nalevo s řešením pro parametry (4.4) a (4.7) napravo pro $t = 0.004$. Nahoře je obrázek znázorněn jako bitmapa - oborem hodnot funkce u je zde diskrétní prostor odstínů šedi. Dole je obrázek reprezentován grafem funkce dvou proměnných zobrazující do $\langle 0, 1 \rangle$. Hodnota 1 odpovídá černé a hodnota 0 bílé. Na dolním grafu je názorněji vidět geometrická skladba obrázku. Na místech, kde má původní obrázek největší hodnotu gradientu dochází k vytváření skoro skokové funkce.



Obrázek 4.5: Peronova-Malikova rovnice (4.3) aplikovaná na počáteční podmínku nalevo s řešením pro parametry (4.4) a (4.8) napravo pro $t = 0.004$. Nahoře je obrázek znázorněn jako bitmapa - oborem hodnot funkce u je zde diskretní prostor odstínů šedi. Dole je obrázek reprezentován grafem funkce dvou proměnných zobrazující do $\langle 0, 1 \rangle$. Hodnota v 1 odpovídá černé a hodnota 0 bílé. Na dolním grafu je názorněji vidět geometrická skladba obrázku. Na místech, kde má původní obrázek největší hodnotu gradientu dochází k vytváření skoro skokové funkce.



Obrázek 4.6: Peronova-Malikova rovnice (4.3) aplikovaná na počáteční podmínku nalevo s řešením pro parametry (4.4) a (4.5) napravo. Nahoře napravo je řešení pro $t = 0.0000402$ a dole napravo pro $t = 0.0004$. Můžeme pozorovat odstranění drobných čar a zároveň zachování rysů obličeje v celkem ostré podobě.



Obrázek 4.7: Peronova-Malikova rovnice (4.3) aplikovaná na počáteční podmínku nalevo s řešením pro parametry (4.4) a (4.5) napravo. Nahoře je řešení pro $t = 0.0000402$ a dole pro $t = 0.0004$. Můžeme pozorovat odstranění drobných čar a zároveň zachování rysů obličeje v celkem ostré podobě.



Obrázek 4.8: Peronova-Malikova rovnice (4.3) aplikovaná na počáteční podmínku nalevo s řešením pro parametry (4.4) a (4.5) napravo. Nahoře je řešení pro $t = 0.0000402$ a dole pro $t = 0.0004$. Můžeme pozorovat odstranění drobných čar a zároveň zachování rysů obličeje v celkem ostré podobě.

4.3 Vrstevnicová rovnice

V této sekci si nejdříve ukážeme řešení vrstevnicové rovnice

$$\begin{cases} \partial_t u(t, \mathbf{x}) &= |\nabla u(t, \mathbf{x})| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u(t, \mathbf{x})}{|\nabla u(t, \mathbf{x})|} \right) & \text{na } (0, T) \times \Omega, \\ u(0, \mathbf{x}) &= I_0(\mathbf{x}) & \text{na } \Omega, \\ \partial_n u(t, \mathbf{x}) &= 0 & \text{na } (0, T) \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.9)$$

kde za počáteční podmínku I_0 budeme brát testovací obrázky. Opět budeme oblast $\Omega = (0, 1) \times (0, b)$ volit tak, že b vždy dopočteme tak, abychom zachovali původní poměry obrázku. Úlohu řešíme explicitním schématem (3.9). Nastavení

$$\tau = 6 \times 10^{-7}, \quad h = \frac{1}{600}, \quad (4.10)$$

stejně jako u Peronovy-Malikovy rovnice volíme shodně pro všechny testovací počáteční podmínky.

Na obrázcích 4.9 a 4.10 můžeme vždy na levé straně vidět počáteční podmínku a na pravé straně výsledek řešení vrstevnicové rovnice (4.9) v daný čas t . Zejména u obrázku 4.9 můžeme pozorovat silné stahování vrstevnic ve směru vnitřních normál, které má za následek deformaci hran původního obrázku.

Model

$$\begin{cases} \partial_t u(t, \mathbf{x}) &= D(|\nabla G_\sigma(t, \mathbf{x})|) |\nabla u(t, \mathbf{x})| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u(t, \mathbf{x})}{|\nabla u(t, \mathbf{x})|} \right) & \text{na } (0, T) \times \Omega, \\ u(0, \mathbf{x}) &= I_0(\mathbf{x}) & \text{na } \Omega, \\ \partial_n u(t, \mathbf{x}) &= 0 & \text{na } (0, T) \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.11)$$

již má tuto vlastnost silně potlačenou díky výskytu funkce

$$D(s) = \frac{1}{1 + \lambda s^2}.$$

Parametr λ volíme způsobem popsaným v předchozí sekci. Úlohu řešíme explicitním schématem (3.10). Na obrázcích 4.11 a 4.12 můžeme na levé straně vidět počáteční podmínku a na pravé straně výsledek řešení modifikované vrstevnicové rovnice (4.11) v čase t pro parametry

$$\sigma = 0.001, \quad \lambda_{ini} = 1 \times 10^{-5}, \quad \alpha = 1.2, \quad \lambda_{max} = 0.08. \quad (4.12)$$

Segmentační model

$$\begin{cases} \partial_t u &= |\nabla u|_\epsilon \operatorname{div} \left(D(|\nabla G_\sigma * I_0|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|_\epsilon} \right) - D(|\nabla G_\sigma * I_0|) |\nabla u|_\epsilon F & \text{na } (0, T) \times \Omega, \\ u(0, \mathbf{x}) &= u_0(\mathbf{x}) & \text{na } \Omega, \\ \partial_n u(t, \mathbf{x}) &= 0 & \text{na } (0, T) \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.13)$$

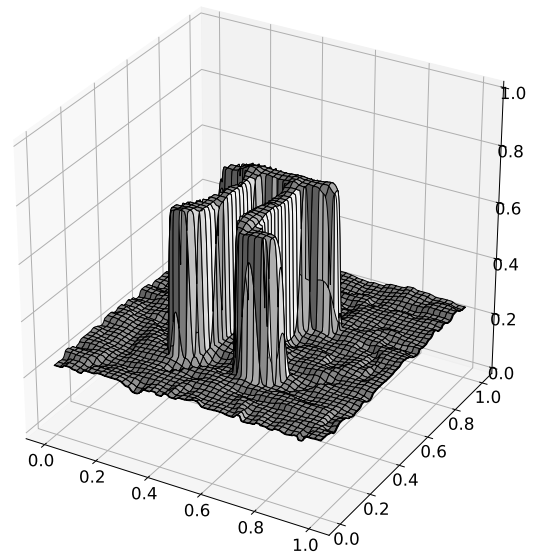
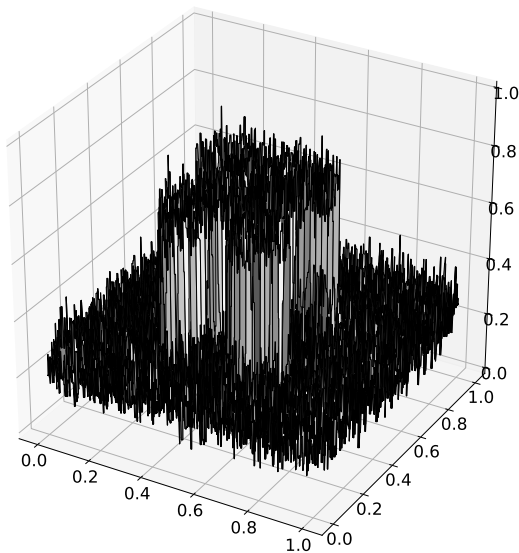
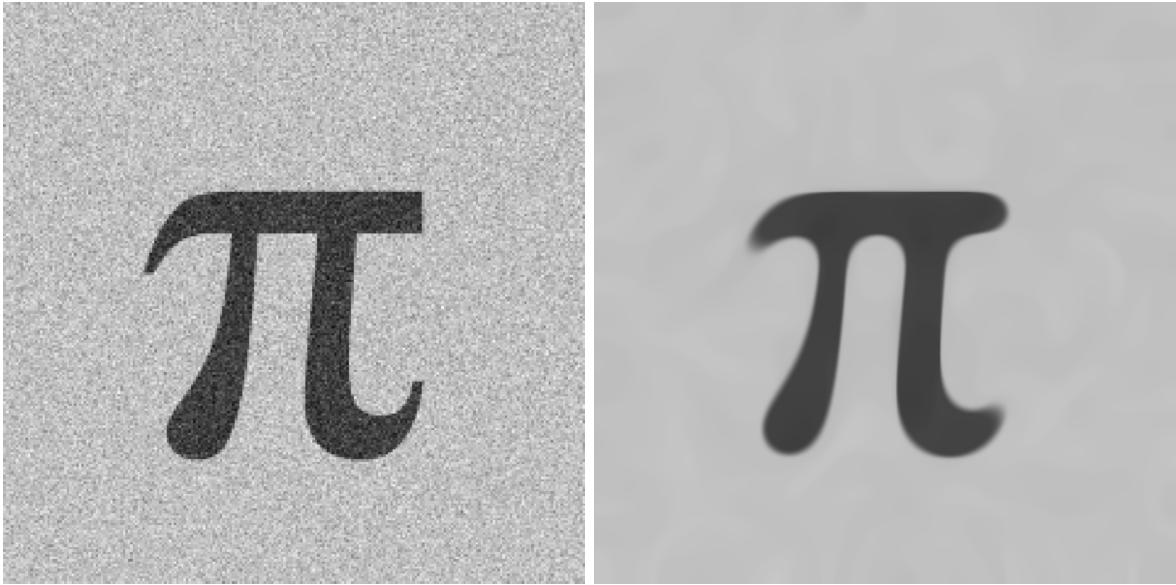
řešíme numerickým explicitním schématem (3.11). Na obrázcích 4.14, 4.15 vidíme nahoře vlevo počáteční podmínku $u_0(\mathbf{x})$ reprezentovanou nulovou vrstevnicí $\{\mathbf{x} | u_0(\mathbf{x}) = 0\}$ modře a černobíle segmentovaný obrázek I_0 . Ve zbylých kvadrantech je řešení rovnice (4.13) pro zmíněná nastavení s parametry

$$\tau = 9 \times 10^{-7}, \quad h = \frac{1}{350}, \quad \sigma = 0.01, \quad \lambda = 0.002, \quad \epsilon = 0.01, \quad F = 15, \quad (4.14)$$

pro obrázek 4.14 a s parametry

$$\tau = 9 \times 10^{-7}, \quad h = \frac{1}{300}, \quad \sigma = 0.01, \quad \lambda = 0.005, \quad \epsilon = 0.005, \quad F = 3, \quad (4.15)$$

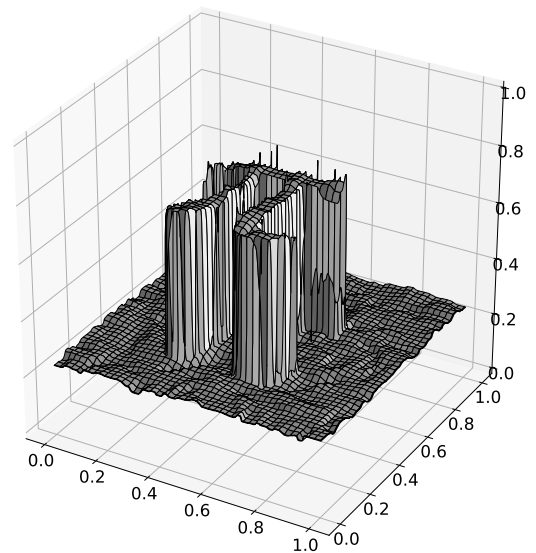
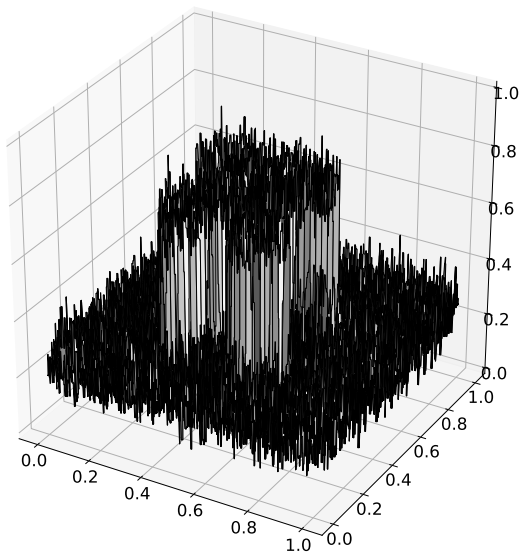
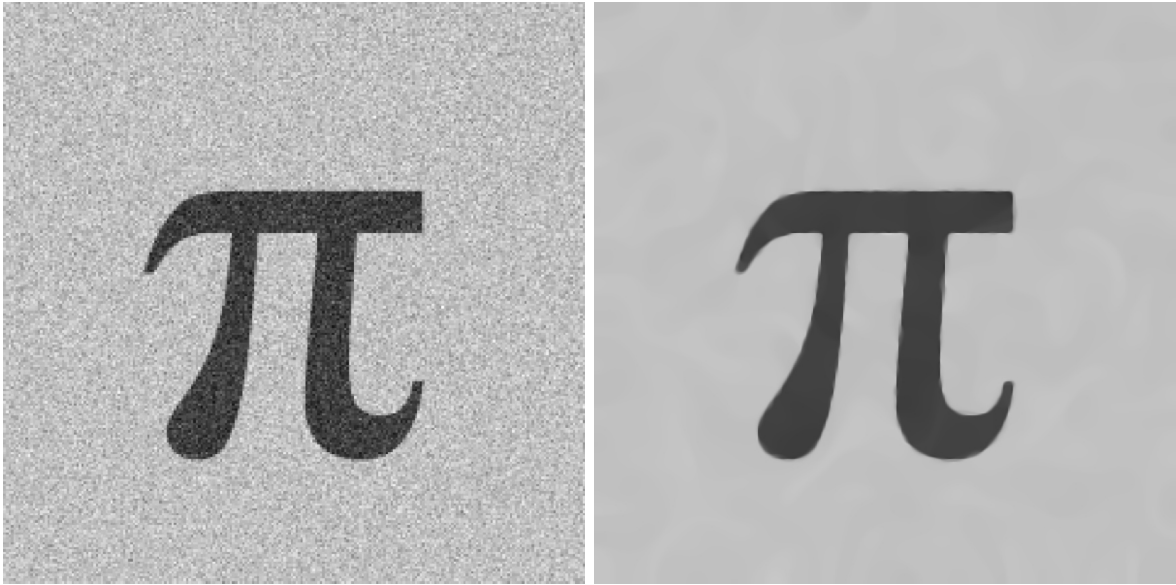
pro obrázek 4.15. Jako konvoluci zde používáme řešení rovnice vedení tepla (4.1) v čase $t = \frac{\sigma^2}{2}$, protože se počítá se segmentovaným obrázkem I_0 pouze jednou a nemusíme se obávat velkého navýšení výpočetního času.



Obrázek 4.9: Vrstevnicová rovnice (4.9) aplikovaná na počáteční podmínku nalevo s řešením pro parametry (4.10) a $t = 0.0005$ napravo. Nahoře je obrázek znázorněn jako bitmapa - oborem hodnot funkce u je zde diskretní prostor odstínů šedi. Dole je obrázek reprezentován grafem funkce dvou proměnných zobrazující do $\langle 0, 1 \rangle$. Hodnota 1 odpovídá černé a hodnota 0 bílé. Na dolním grafu je názorněji vidět geometrická skladba obrázku. Na horním pravém obrázku je patrné stahování vrstevnic (tedy i hran) do směru vnitřní normály.



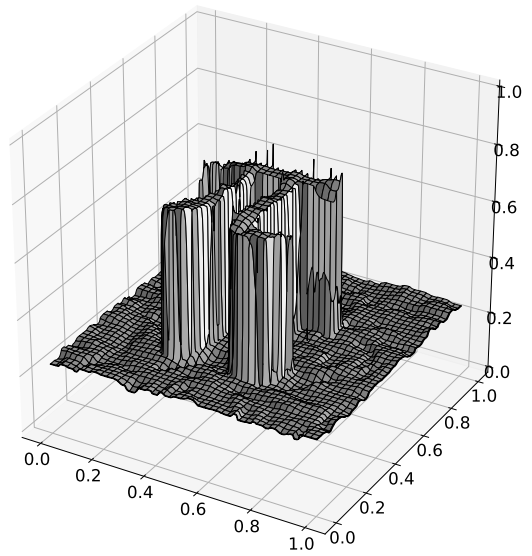
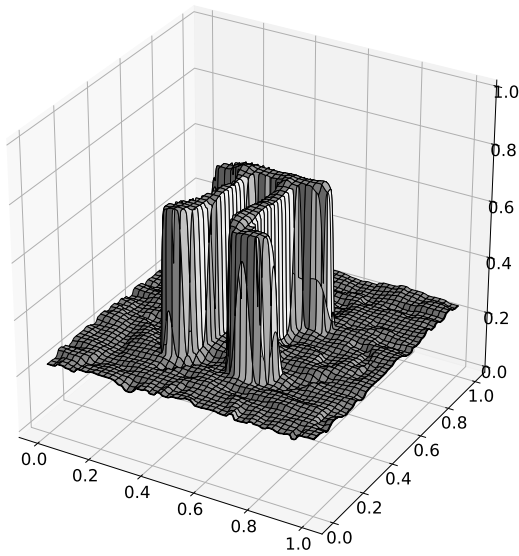
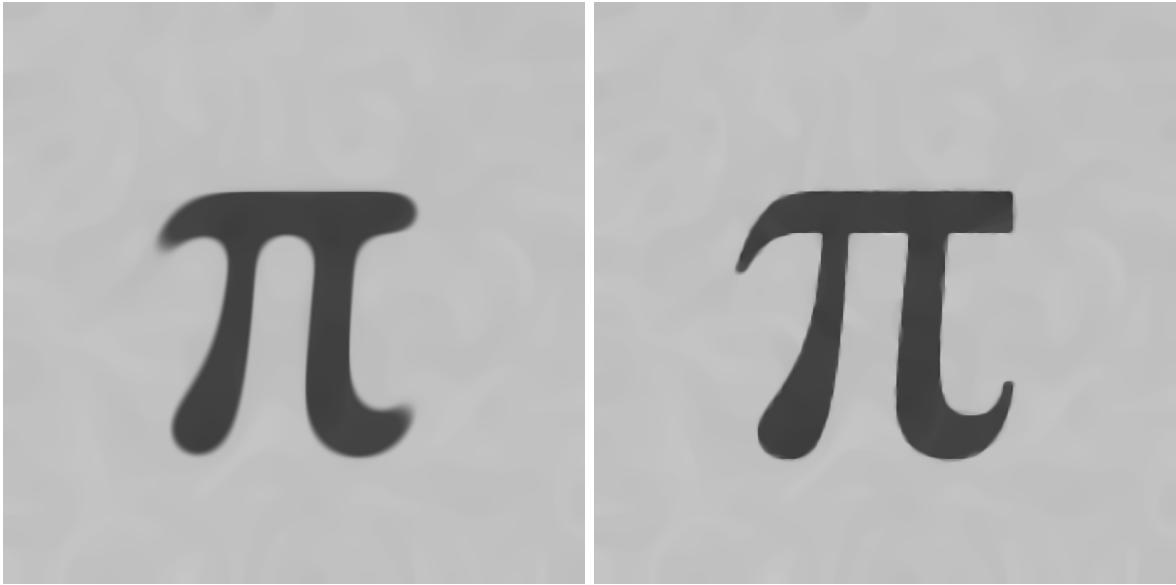
Obrázek 4.10: Vrstevnicová rovnice (4.9) aplikovaná na počáteční podmínku nalevo s řešením pro parametry (4.10) napravo. Nahoře je pak řešení pro $t = 2.28 \times 10^{-5}$ a dole pro $t = 1.15 \times 10^{-4}$.



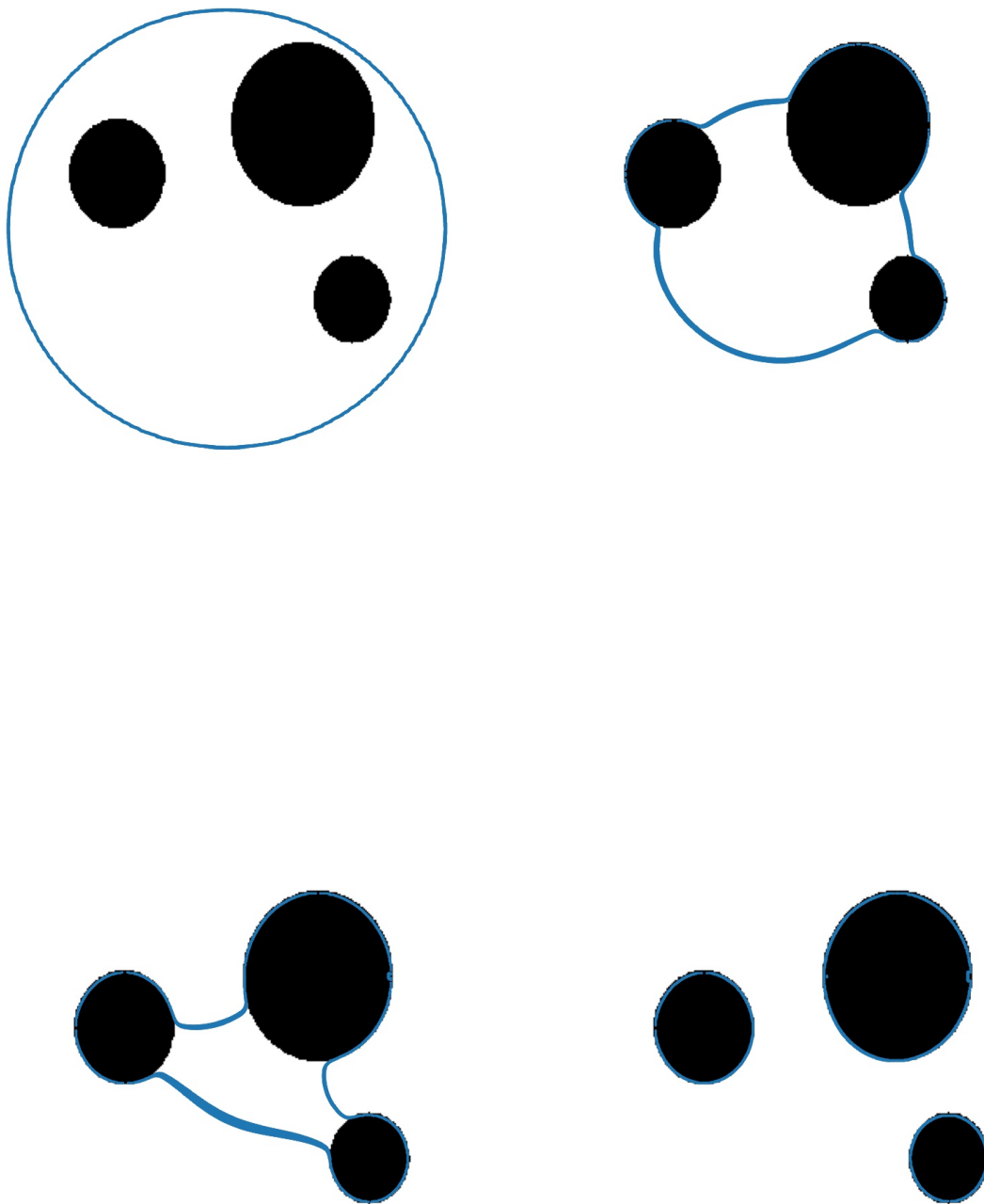
Obrázek 4.11: Modifikovaná vrstevnicová rovnice (4.11) aplikovaná na počáteční podmínku nalevo s řešením pro parametry (4.10), (4.12) a $t = 0.0005$ napravo. Nahoře je obrázek znázorněn jako bitmapa - oborem hodnot funkce u je zde diskrétní prostor odstínů šedi. Dole je obrázek reprezentován grafem funkce dvou proměnných zobrazující do $\langle 0, 1 \rangle$. Hodnota 1 odpovídá černé a hodnota 0 bílé. Na dolním grafu je názorněji vidět geometrická skladba obrázku. Oproti rovnici (4.9) k deformaci hran dochází výrazně méně.



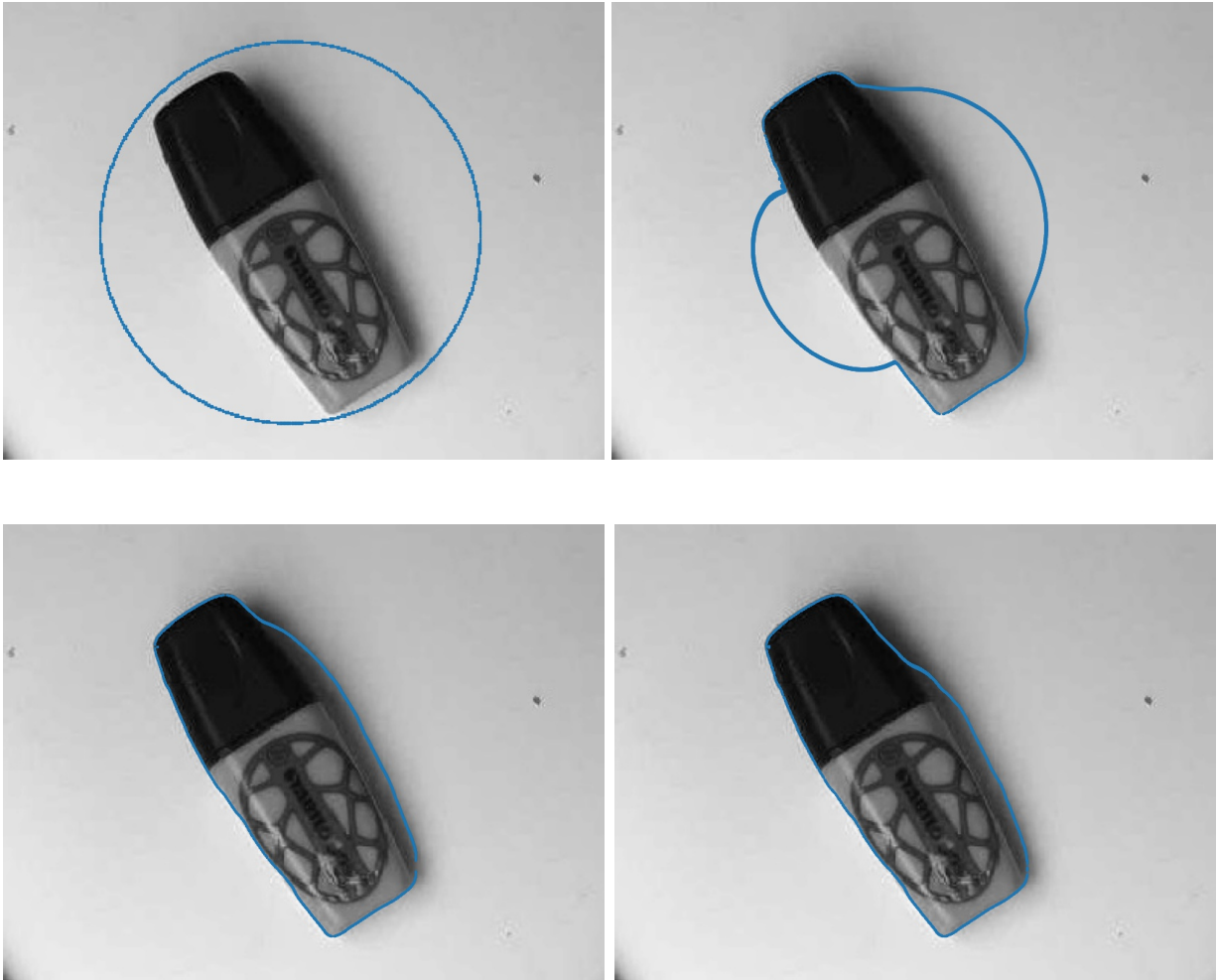
Obrázek 4.12: Modifikovaná vrstevnicová rovnice (4.9) aplikovaná na počáteční podmínku nalevo s řešením pro parametry (4.10), (4.12) napravo. Nahoře je pak řešení pro $t = 1.51 \times 10^{-4}$ a dole pro $t = 1 \times 10^{-3}$.



Obrázek 4.13: Srovnání pravých stran obrázků 4.9 a 4.11. Nalevo je řešení rovnice (4.9) pro parametry (4.10) a napravo je řešení rovnice (4.11) pro parametry (4.10), (4.12). Obě řešení jsou pro stejné $t = 0.0005$. Tento obrázek demonstruje vliv funkce D (která je oproti rovnici (4.9) vložena do rovnice (4.11)) na zachování hran počátečního obrázku.



Obrázek 4.14: Segmentační model vrstevnicové rovnice (4.13) aplikovaný na počáteční podmínku nahoře vlevo s řešením pro parametry (4.14) ve zbylých částech. Nahoře napravo je řešení pro $t = 0.00875$, dole nalevo pro $t = 0.0175$ a dole napravo pro $t = 0.02625$. Můžeme pozorovat úspěšné obeptnutí třech různě velkých kruhů segmentační křivkou. Na tomto obrázku je dále vidět schopnost vrstevnicové rovnice segmentační křivku roztrhnout.



Obrázek 4.15: Segmentační model vrstevnicové rovnice (4.13) aplikovaný na počáteční podmínku nahoře vlevo s řešením pro parametry (4.15) ve zbylých částech. Nahoře napravo je řešení pro $t = 0.018$, dole nalevo pro $t = 0.039$ a dole napravo pro $t = 0.06$. Můžeme pozorovat obepnutí segmentovaného objektu segmentační křivkou. Pozorujeme však předčasné zastavení křivky ve stínu objektu. Tento problém by mohl být předmětem další analýzy v navazující práci.

4.4 Mumfordův-Shahův funkcionál

Funkcionál

$$\mathcal{F}_\varepsilon(U, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (U - u)^2 dx + \alpha \int_{\Omega} v^2 |\nabla U|^2 dx + \beta \int_{\Omega} \left(\varepsilon |\nabla v|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} (v - 1)^2 \right) dx \quad (4.16)$$

minimalizujeme pro vstupní obrázek u řešením Eulerových rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{F}_\varepsilon}{\delta v}(U, v) &= 2\alpha v |\nabla U|^2 + \frac{\beta}{2\varepsilon} (v - 1) - 2\beta \varepsilon \Delta v = 0, \\ \frac{\delta \mathcal{F}_\varepsilon}{\delta U}(U, v) &= U - u - 2\alpha \nabla \cdot (v^2 \nabla U) = 0, \end{aligned} \quad (4.17)$$

pomocí volně dostupné implementace [17]. Minima označíme U_{min} a v_{min} . Parametry α, β a ε můžeme ovlivňovat výsledek minimalizace.

Na obrázku 4.16 jsme dosáhli pro parametry

$$\alpha = 100, \beta = 0.5, \varepsilon = 0.01 \quad \text{a} \quad \alpha = 30, \beta = 0.5, \varepsilon = 0.01$$

podobných výsledků jako u Peronovy-Malikovy rovnice a vrstevnicové rovnice, ale s více výraznými artefakty. U obrázku 4.17 bylo cílem rozdělit strukturovaný počáteční obrázek u na skoro po částech konstantní obrázek U_{min} . Zvolením parametrů

$$\alpha = 1000, \beta = 0.1, \varepsilon = 0.01,$$

jsme se tomu přiblížili.

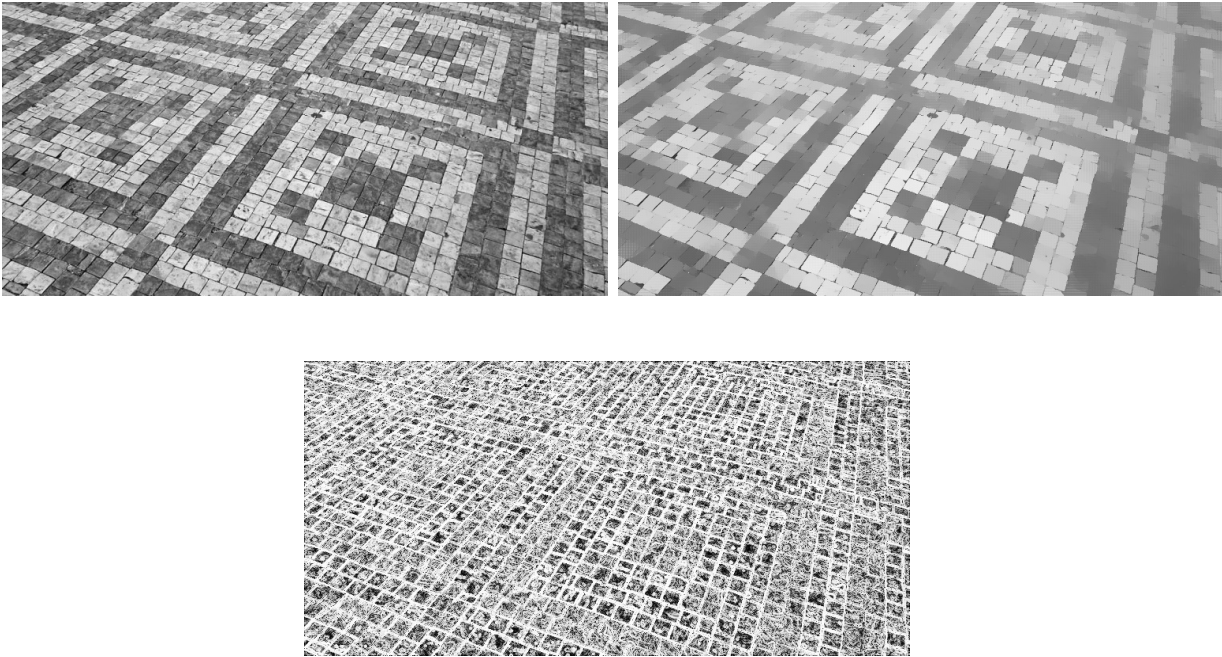
U obrázku 4.18 bylo cílem nalézt u počátečního obrazu u funkci v_{min} aproximující hrany daného obrazu. Tohoto jsme vhodným zvolením parametrů

$$\alpha = 1000, \beta = 0.1, \varepsilon = 0.01,$$

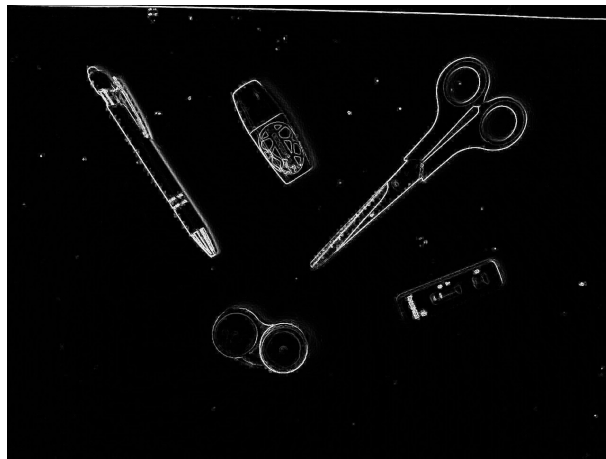
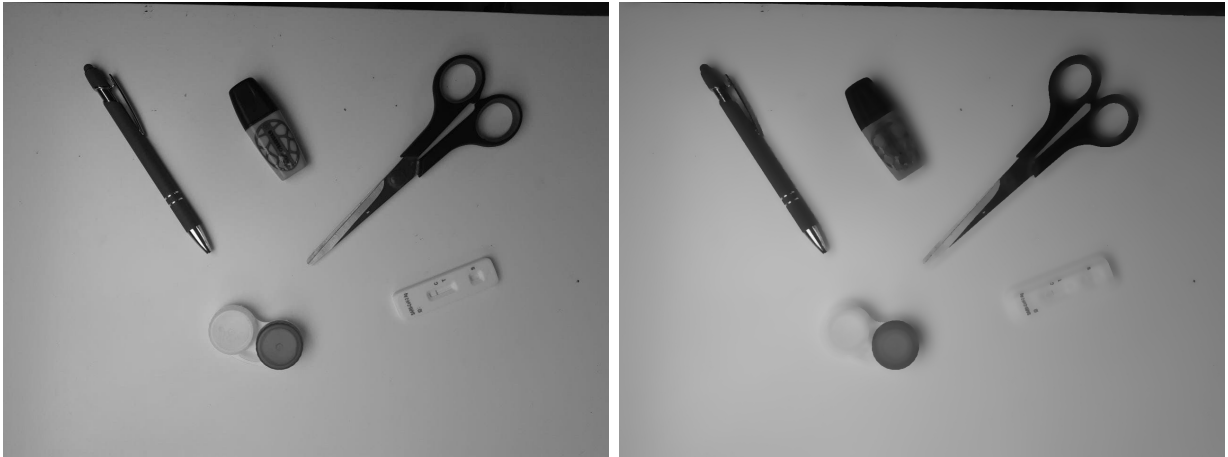
vizuálně dosáhli.



Obrázek 4.16: Výsledek minimalizace funkcionálu (4.16) s počátečním obrázkem u nalevo. Napravo nahore je výsledek minimalizace U_{min} pro parametry $\alpha = 100, \beta = 0.5, \varepsilon = 0.01$. Napravo dole je výsledek minimalizace U_{min} pro parametry $\alpha = 30, \beta = 0.5, \varepsilon = 0.01$. Oproti vrstevnicové rovnici a Peronově-Malikově rovnici zde dochází k výrazné tvorbě artefaktů.



Obrázek 4.17: Výsledek minimalizace funkcionálu (4.16) s počátečním obrázkem u nalevo nahoře. Na-pravo nahoře je výsledek minimalizace U_{min} pro parametry $\alpha = 1000, \beta = 0.1, \varepsilon = 0.01$. Dole je výsledek minimalizace v_{min} aproximující hrany v U_{min} (viz (2.47)).



Obrázek 4.18: Výsledek minimalizace funkcionálu (4.16) s počátečním obrázkem u nalevo nahoře. Napravo nahoře je výsledek minimalizace U_{min} pro parametry $\alpha = 1000$, $\beta = 0.01$, $\varepsilon = 0.01$. Dole je výsledek minimalizace v_{min} aproximující hrany v U_{min} (viz (2.47)).

Závěr

Cílem práce se bylo seznámit s postupy při zpracování digitálního obrazu s důrazem na difuzní procesy, seznámit se s problematikou numerického řešení parabolických parciálních diferenciálních rovnic a na základě získaných informací vyzkoušet konkrétní úlohu degenerované difuze pro použití ve zpracování obrazu.

V první kapitole jsme si stručně uvedli některé postupy zpracování obrazu. V další kapitole jsme nejprve odvodili analytické řešení smíšené úlohy pro rovnici vedení tepla na úsečce a obdélníku. Dále jsme zde představili nelineární parciální diferenciální rovnici Peronovu-Malikovu vycházející ze zmíněné lineární úlohy. Nakonec jsme si uvedli rovnice vycházející z úlohy o pohybu křivky podle její střední křivosti a Eulerovy rovnice pro minimalizaci aproximace Mumfordova-Shahova funkcionálu.

Ve třetí kapitole jsme se seznámili s problematikou numerického řešení vybraných úloh pomocí metody konečných diferencí. V závěrečné kapitole jsme představili vlastní numerické výsledky. Pomocí experimentálního řádu konvergence jsme u lineárních úloh se známým řešením ověřili teoretický řád konvergence daných diferenčních schémat z předchozí kapitoly. Na úplném konci jsme aplikovali smíšenou úlohu vedení tepla na obdélníku, Peronovu-Malikovu rovnici, tři modely vycházející z vrstevnicové rovnice a aproximaci Mumfordova-Shahova funkcionálu na testovací obrázky.

Literatura

- [1] L. ALVAREZ, F. GUICHARD, P.-L. LIONS, J. M. MOREL, *Axioms and fundamental equations of image processing*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 123 (1993), pp. 199–257.
- [2] L. ALVAREZ, P. L. LIONS, J. M. MOREL, *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. ii*, SIAM Journal on numerical analysis, 29 (1992), pp. 845–866.
- [3] L. AMBROSIO, V. M. TORTORELLI, *Approximation of functional depending on jumps by elliptic functional via t -convergence*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 43 (1990), pp. 999–1036.
- [4] G. AUBERT, P. KORNPORST, *Mathematical Problems in Image Processing, Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*, Springer, New York, 2002.
- [5] M. BALAŽOVJECH, P. FROLKOVIČ, R. FROLKOVIČ, K. MIKULA, *Semi-implicit second order accurate finite volume method for advection-diffusion level set equation*, in Finite Volumes for Complex Applications VII-Elliptic, Parabolic and Hyperbolic Problems, J. Fuhrmann, M. Ohlberger, C. Rohde, eds., vol. 78, Cham, 06 2014, Springer International Publishing, pp. 479–487.
- [6] L. BAR, N. SOCHEN, N. KIRYATI, *Semi-blind image restoration via mumford-shah regularization*, IEEE Transactions on Image Processing, 15 (2006), pp. 483–493.
- [7] M. BENEŠ, V. CHALUPECKÝ, K. MIKULA, *Geometrical image segmentation by the Allen–Cahn equation*, Applied Numerical Mathematics, 51 (2004), pp. 187–205.
- [8] M. BENEŠ, M. KIMURA, P. PAUŠ, D. ŠEVČOVIČ, T. TSUJIKAWA, S. YAZAKI, *Application of a curvature adjusted method in image segmentation*, Bulletin of the Institute of Mathematics. Academia Sinica. New Series, 3 (2008), pp. 509–523.
- [9] A. BOVIK, *Image & Video Processing*, Academic Press, Boston, 2000.
- [10] F. CATTÉ, P.-L. LIONS, J. M. MOREL, T. COLL, *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 29 (1992), pp. 182–193.
- [11] R. CHABINIOK, R. MÁČA, M. BENEŠ, J. TINTĚRA, *Segmentation of MRI data by means of nonlinear diffusion*, Kybernetika, 49 (2013), pp. 301–318.
- [12] J. CHUDÝ, *Zpracování obrazu pomocí degenerovaných parabolických parciálních diferenciálních rovnic*, diplomová práce, FJFI ČVUT v Praze, 2015.
- [13] K. DECKELNICK, G. DZIUK, C. M. ELLIOTT, *Computation of geometric partial differential equations and mean curvature flow*, Acta Numerica, 14 (2005), p. 139–232.

- [14] L. C. EVANS, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 2010.
- [15] R. EYMARD, A. HANDLOVIČOVÁ, K. MIKULA, *Non-diffusive numerical scheme for regularized mean curvature flow level set equation in image processing*, vol. 2, 11 2010, pp. 748 – 753.
- [16] M. GAGE, R. S. HAMILTON, *The heat equation shrinking convex plane curves*, Journal of Differential Geometry, 23 (1986), pp. 69 – 96.
- [17] J. GILDENBLAT, *Ambrosio-tortorelli-minimizer*. <https://github.com/jacobgil/Ambrosio-Tortorelli-Minimizer>, 2015.
- [18] M. A. GRAYSON, *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, J. Differential Geometry, 26 (1987), pp. 285–314.
- [19] M. KASS, A. WITKIN, D. TERZOPOULOS, *Snakes: Active contour models*, International Journal of Computer Vision, 1 (1988), p. 321–331.
- [20] J. KAČUR, K. MIKULA, *Solution of nonlinear diffusion appearing in image smoothing and edge detection*, Applied Numerical Mathematics, 17 (1995), pp. 47–59.
- [21] M. KOLÁŘ, *Motion of Curves with the Application to Dislocation Dynamics*, disertační práce, FJFI ČVUT v Praze, 2018.
- [22] M. KOLÁŘ, S. YAZAKI, *Comparison study of image segmentation techniques by curvature-driven flow of graphs*, JSIAM Letters, 13 (2021), pp. 48 – 51.
- [23] H. KRIM, A. B. HAMZA, *Geometric methods in signal and image analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2015.
- [24] R. MALLADI, *Geometric Methods in Bio-Medical Image Processing*, 01 2002.
- [25] K. MIKULA, *Numerical solution, analysis and application of geometrical nonlinear diffusion equations*, Publishing House of the Slovak University of Technology, Bratislava, 2006.
- [26] D. MUMFORD, J. SHAH, *Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 42(5) (1989), pp. 577–685.
- [27] R. MÁČA, *Application of degenerate diffusion methods in medical image processing*, disertační práce, FJFI ČVUT v Praze, 2017.
- [28] T. OBERHUBER, *Numerical Solution of Willmore Flow*, disertační práce, FJFI ČVUT v Praze, 2009.
- [29] P. PERONA, J. MALIK, *Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 12 (1990), pp. 629–639.
- [30] L. S. PONTRJAGIN, *Obyknovennyje differencialnyje uravnenija*, Nauka, Moskva, 1965.
- [31] T. PREUSSER, M. RUMPF, *An adaptive finite element method for large scale image processing*, Journal of Visual Communication and Image Representation, 11 (2000), pp. 183–195.
- [32] M. H. PROTTER, H. F. WEINBERGER, *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice-Hall, 1967.
- [33] A. A. SAMARSKIJ, *Theory of Difference Schemes*, Marcel Dekker Inc., New York, 2001.

- [34] P. STRACHOTA, M. BENEŠ, M. GROTTADAUREA, *Computational Investigation and Assessment of Numerical Schemes for Anisotropic Diffusion Equations*, COE Lecture Note, 36 (2012), pp. 73–83. Faculty of Mathematics, Kyushu University Fukuoka.
- [35] A. N. TICHONOV, A. A. SAMARSKIJ, *Rovnice matematické fyziky*, Academia, Praha, 1955.
- [36] N. VAN DER MEER, *Matematické modelování v elektrokardiologii*, bakalářská práce, FJFI ČVUT v Praze, 2020.
- [37] E. VITÁSEK, *Numerické metody*, SNTL, Praha, 1987.
- [38] V. S. VLADIMIROV, *Equations of Mathematical Physics*, Marcel Dekker Inc., New York, 1971.
- [39] J. WEICKERT, *Anisotropic Diffusion in Image Processing*, ECMI Series. Teubner, Stuttgart, 1998.
- [40] M. WIELGUS, *Perona-Malik equation and its numerical properties*, bakalářská práce, Faculty of Mathematics, Informatics and Mechanics, University of Warsaw, 2010.
- [41] D. ŠEVČOVIČ, *Qualitative and quantitative aspects of curvature driven flows of planar curves*, in Topics on partial differential equations, 2007.
- [42] M. ŠPANĚL, V. BERAN, *Obrazové segmentační techniky, Přehled existujících metod*. 2006 [cit. 2021-12-14]. Dostupné z: <http://www.fit.vutbr.cz/~spanel/segmentace/>.