

Posudek oponenta bakalářské práce Tomáše Hrdiny

Lokalizace spektra diskrétního bilaplaceova operátoru s komplexním potenciálem

Matěj Tušek, 21. července 2022

Předložená bakalářská práce sestává ze třech kapitol. První kapitola je věnována přehledu teorie omezených lineárních operátorů s důrazem na kompaktní a omezené Laurentovy operátory. Rovněž je v ní dokázána jedna z formulací Birmanova-Schwingerova principu, který představuje hlavní technický nástroj dalších kapitol. Jednotlivé poznatky jsou za sebe přehledně a logicky členěny – stejně je tomu i ve zbytku práce. V některých důkazech jsem ale zaznamenal drobnější nedostatky, které vyjmenuji níže. Vedle toho některé části (např. předposlední odstavec na str. 22) obsahují až příliš překlepů, přičemž jejich velkou část by odhalila kontrola za pomoci spell-checku.

Druhá kapitola obsahuje detailní analýzu části výsledků obdržných v článku [1], který pojednává o spektrálních obálkách pro l^1 -poruchu diskrétního laplaciánu. V poslední zcela původní kapitole jsou analogické výsledky obdrženy pro bilaplaceův operátor. Rád bych zdůraznil, že ačkoliv lze téměř doslovně vycházet z postupu představeném v druhé kapitole, některé kroky jsou v případě bilaplaceova operátoru značně komplikovanější. I proto je finální výsledek platný a navíc dokonce optimální jen za předpokladu jisté numericky nevyvrácené hypotézy. Nicméně práce obsahuje i slabší analyticky zcela dokázaný výsledek. Jelikož obdržené formule pro hraniční křivky spektrálních obálek jsou poměrně komplikované, oceňuji zařazení několika obrázků.

Z textu je patrné, že student se s porozuměním seznámil s vybranými tématy z oblasti funkcionální analýzy nad rámec kurzů přednášených na FJFI i s nedávno publikovaným článkem svého školitele. Navíc byl schopen odvodit nové původní netriviální výsledky, které bude možno v budoucnu ještě dále vylepšit a rozšířit třeba až do podoby vědeckého článku. Jedině nezanedbatelný počet překlepů a drobnějších nedostatků tak sráží návrh mého hodnocení na známku **B (velmi dobře)**.

Reference

- [1] O.O. Ibrogimov, F. Štampach, Spectral enclosures for non-self-adjoint discrete Schrödinger operator, *Int. Eq. Op. Theo.* **91** (2019).

Drobné připomínky

Následuje seznam drobných nedostatků určený zejména autorovi. Není nutné jej prezentovat při obhajobě. Překlepy zmiňuji jen v případě, že by mohly bránit pochopení textu.

- Navrhuji vyhnout se vlastní notaci v názvu kapitol.
- Věta pod definicí 1.2.1 není pravdivá.
- V definici bodového spektra má být " $(A - \lambda)$ není injektivní".
- V důkaze druhé implikace věty 1.3.2 by bylo dobré rozepsat, proč $M = \text{Ker}(I - P)$ (díky $P = P^2$).

- Poznamenal bych, že věta 1.8.3 je speciální případ nedokazované formule (1.9).
- V důkaze věty 1.8.4 je asi překlep v přepisu $\text{Ker}(A)$, správně by bylo $\{U^{-1}y : By = 0\}$.
- V důkaze lemmatu 1.9.1 samotná existence inverze $(BA - \lambda)^{-1}$ nestačí k tomu, aby λ nebylo ve spektru BA . Tato inverze musí být omezená.
- V posledním odstavci na str. 27 by měla figurovat **uzavřená** koule.
- V prvním řádkovém vztahu sekce 2.1 je překlep ve znaménku.
- Na str. 29 chybí citace na Žukovského transformaci.
- V závěru důkazu lemmatu 2.2.1 přebývá slovo "konvergentní".
- Notace $z_{1,2}$ se mi jeví nadbytečná až matoucí.
- V sekci 3.3 stojí, že "pro obálky (3.18) není možné optimalitu dokázat"—to však není jasné.

Dotazy k obhajobě

1. V definici 1.4.2 by ještě mělo stát, že A je omezený. Navrhněte neomezený operátor A vyhovující podmínce $\dim(\text{Ran}(A)) < +\infty$!
2. Zdá se, že v důkaze věty 1.4.5 vycházíte z toho, že K^{-1} je omezený. To ale nemusí být pravda. Jak je třeba upravit závěr jmenovaného důkazu?
3. Resolventu pro bilaplacián T^2 lze vyjádřit pomocí resolventy posunutého laplaciánu H jako

$$(T^2 - \lambda)^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left((H - (2 + \sqrt{\lambda}))^{-1} - (H - (2 - \sqrt{\lambda}))^{-1} \right).$$

Nelze toho s výhodou využít při hledání optimálního odhadu pro spektrální obálku?

V Praze dne 21.7. 2022

Ing. Matěj Tušek, Ph.D.