České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Lokalizace spektra diskrétního bilaplaceova operátoru s komplexním potenciálem

Spectral enclosures for the discrete bilaplacian with complex potential

Bakalářská práce

Autor: **Tomáš Hrdina**

Vedoucí práce: **Ing. František Štampach, Ph.D.**

Akademický rok: 2021/2022

Katedra: matematiky | Akademický rok: 2021/2022

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student:	Tomáš Hrdina
Studijní program:	Aplikace přírodních věd
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Studijní zaměření:	Matematické modelování
Název práce (česky):	Lokalizace spektra diskrétního bilaplaceova operátoru s komplexním potenciálem
Název práce (anglicky):	Spectral enclosures for the discrete bilaplacian with complex potential

Pokyny pro vypracování:

1) Seznámte se se základy teorie operátorů a provést shrnutí.
2) Nastudujte metody používané pro lokalizaci spektra z článku [2] a provést shrnutí.
3) Proveďte spektrální analýzu diskrétního bilaplaceova operátoru.
4) Lokalizujte spektrum diskrétního bilaplaceova operátoru s komplexní diagonální poruchou. Výsledky numericky ilustrujte s pomocí vhodného CAS.
5) Diskutujte optimalitu výsledku z bodu 4.

Doporučená literatura:

1) J. Blank, P. Exner, M. Havlíček, Linearní operátory v kvantové fyzice. Karolinum, 1993.
2) O. O. Ibrogimov, F. Štampach, Spectral enclosures for non-self-adjoint discrete Schrödinger operators. Integr. Equ. Oper. Theory 91, 2019, 1-15.
3) B. Cassano, O. O. Ibrogimov, D. Krejčiřík, F. Štampach, Location of eigenvalues of non-self-adjoint discrete Dirac operators. Ann. Henri Poincaré 21, 2020, 2193-2217.
4) I. Gohberg, S. Goldberg, M. A. Kaashoek, Basic classes of linear operators. Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

Ing. František Štampach, Ph.D.
Katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze, Trojanova 13, 120 00 Praha 2, Česká republika

Jméno a pracoviště konzultanta:

Datum zadání bakalářské práce: 31.10.2021

Datum odevzdání bakalářské práce: 7.7.2022

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

V Praze dne 21. října 2021

....
garant oboru

....
vedoucí katedry

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
-1-

....
děkan

Poděkování:
Chtěl bych zde poděkovat svému školiteli Ing. Františku Štampachovi, Ph.D. za věnovaný čas, pečlivost, ochotu, vstřícnost a odborné zázemí při vedení mé bakalářské práce. Dále děkuji RNDr. Petru Blaschkemu, Ph.D. ze Slezské univerzity v Opavě za cenné rady a pomoc při vyjadřování rovnic křivek.

Čestné prohlášení:
Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a uvedl jsem všechnu použitou literaturu.

V Praze dne 7. července 2022 Tomáš Hrdina

Název práce:

Lokalizace spektra diskrétního bilaplaceova operátoru s komplexním potenciálem

Autor: Tomáš Hrdina

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Matematické modelování

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. František Štampach, Ph.D., Katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze

Abstrakt: Studujeme spektrum diskrétního bilaplaceova operátoru T^2 na prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$ a spektrum téhož operátoru porušeného kompaktní diagonální poruchou. Potenciál je generován posloupností $v \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Cílem je nalézt podmnožinu komplexní roviny, která obsahuje celé spektrum porušeného operátoru, neboť v obecném případě může být obtížné spektrum naleznout přesně. S využitím Birmanova–Schwingerova principu byly nalezeny takzvané spektrální obálky a rovněž byla stanovena hypotéza na optimální obálku. Křivky, které tvoří hranice těchto množin jsou závislé pouze na ℓ^1-normě posloupnosti v.

Klíčová slova: Birmanův–Schwingerův princip, diagonální porucha, diskrétní bilaplaceův operátor, Laurentovy operátory, spektrální obálky

Title:

Spectral enclosures for the discrete bilaplacian with complex potential

Author: Tomáš Hrdina

Abstract: We study spectrum of the discrete bilaplacian T^2 on Hilbert space $\ell^2(\mathbb{Z})$ and the spectrum of the operator T^2 perturbed by a compact diagonal operator. The potential is generated by $\ell^1(\mathbb{Z})$ sequence v. The main aim is to find a subset of the complex plain which includes the whole spectrum of perturbed operator, since we can not find it exactly for general potential. Having used the Birman–Schwinger principle we obtained spectral enclosures. Moreover we have a conjecture for an optimal boundary. The boundary curves are dependent only on the ℓ^1-norm of the sequence v.

Key words: Birman-Schwinger principle, diagonal perturbation, discrete bilaplacian, Laurent operators, spectral enclosures

Obsah

Úvod

Laplaceův operátor je významným zástupcem třídy diferenciálních operátorů. Nejčastěji se s ním setkáme jako se sumou druhých parciálních derivací, pro $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definujeme

$$\Delta f(x) = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j, x_j} f(x),$$

a jednodimenzionální případ

$$\Delta f(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}. \tag{1}$$

Tento nalézá významné využití jak ve fyzice klasické, například druhý Newtonův zákon, či vlnová rovnice, tak i ve fyzice kvantové, konkrétně ve Schrödingerově rovnici. Na příslušných funkčních prostorech se jedná o lineární operátor.

Laplaceův operátor lze však zavádět i pro jiné objekty, než jsou funkce definované na $\mathbb{R}^n$. Prvním příkladem je grafový Laplacián. Grafem rozumíme matematickou strukturu skládající se z hran a vrcholů. Můžeme zavést funkci definovanou na vrcholech grafu, označme ji f. Pak jedna z možných definic grafového Laplaciánu je

$$(\Delta f)(v) := \sum_{u:\ \mathrm{dist}(u,v)=1} (f(v) - f(u)), \tag{2}$$

kde $u,\ v$ jsou vrcholy grafu.

A konečně Laplaceův operátor lze zavést také na posloupnostech. Uvažujme posloupnost v definovanou na celých číslech, pak

$$(\Delta v)_n = -v_{n-1} + 2v_n - v_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Zajímavá je souvislost mezi zmíněnými definicemi. Výraz (3) často aproximuje v numerických simulacích výraz (1), a to s přesností druhého řádu. Uvažujeme-li celá čísla jako graf, kde jsou každé dva sousední vrcholy spojené hranou o délce jedna, pak funkce f, definovaná na vrcholech grafu, je posloupnost a za využití vztahu (2) získáme

$$(\Delta f)(n) = (f(n) - f(n+1)) + (f(n) - f(n-1)) = -f(n-1) + 2f(n) - f(n+1),$$

kde $n \in \mathbb{Z}$ je nyní vnímáno jako vrchol grafu, čímž jsme získali obdobu diferenčního výrazu (3).

Tato práce se zabývá studiem spektra diskrétního Laplaceova a bilaplaceova operátoru, které jsou pomocí definice (3) zavedeny na Hilbertově prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$. A především pak lokalizací spektra diskrétního bilaplaceova operátoru s komplexním potenciálem. Jedná se o nesamosdružený omezený lineární operátor. Práce je motivována již známými výsledky, na počátku tisíciletí bylo lokalizováno spektrum spojitého 1D Laplaceova operátoru s potenciálem [5] a v minulých letech bylo zkoumáno spektrum diskrétního Schrödingerova operátoru [1] a diskrétního Diracova operátoru [6] a v neposlední řadě byly odvozeny i výsledky pro operátor bilaplaceův [7], ovšem pouze pro velmi konkrétní volby potenciálů.

My budeme uvažovat potenciál generovaný posloupností z prostoru $\ell^1(\mathbb{Z})$, to zaručuje, jak se přesvědčíme později, že jde o kompaktní operátor. Nalézt spektrum přesně pro libovolný potenciál je velice obtížné, proto se budeme soustředit na vymezení co možná nejmenší podmnožiny komplexní roviny, která obsahuje celé spektrum takto porušeného operátoru a pokusíme se diskutovat optimalitu nalezených množin, které se nazývají spektrální obálky.
Práce je rozdělena do tří částí. Nejprve shrneme nutné znalosti z funkcionální analýzy a spektrální teorie. V druhé části budeme reprodukovat část článku [1] s důrazem na doplnění detailů u výsledků, které zkušení autoři považují za zřejmé, tato část také slouží jako motivace pro část poslední. V té se budeme věnovat problémům popsaným v předchozím odstavci.

Kapitola 1

Teorie

1.1 Základní pojmy

1.1.1 Vektorový prostor

Je-li T těleso, V neprázdná množina a jsou-li zobrazení $(+ : V \times V \longrightarrow V)$ & $(\,\cdot : T \times V \longrightarrow V)$, pak se čtveřice $(X, T, +, \cdot)$ nazývá vektorovým prostorem právě tehdy, když

1. $(\forall x, y \in V)\ (x + y \in V)$,
2. $(\forall \alpha \in T, \forall x \in V)\ (\alpha \cdot x \in V)$,
3. Splňuje axiomy vektorového prostoru, uvedené například v [3].

Operace $\cdot$ se zkráceně zapisuje $\alpha \cdot x \equiv \alpha x$. Jako těleso T budou pro potřeby této práce postačovat komplexní čísla $\mathbb{C}$.

Definice 1.1.1. Zobrazení $\|\cdot\| : V \longrightarrow [0, +\infty)$ se nazývá **norma** na V právě tehdy, když splňuje axiomy normy:

1. $(\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x \in V)\ \ \|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$, (homogenita)
2. $(\forall x, y \in V)\ \ \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$, (trojúhelníková nerovnost)
3. $(\forall x \in V)\ \ \|x\| = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$.

Pro podmínky 1 a 2 v definici normy je nezbytná lineární struktura vektorového prostoru. Je-li na prostoru V zavedena norma, pak dvojici $(V, \|\cdot\|)$ nazýváme normovaný prostor.

Definice 1.1.2. Skalární součin je sesqilineární forma na V s pozitivně definitní diagonálou. Skalární součin dvou prvků vektorového prostoru V značíme $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Tvrzení definice lze shrnout ve třech bodech:

1. $(\forall x, y \in V)\ \ \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
2. $(\forall x, y \in V)\ (\forall \alpha \in \mathbb{C})\ \ \langle x, \alpha y + z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$,
3. $(\forall x \in V)\ (\langle x, x \rangle \ge 0)$ & $(\langle x, x \rangle = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0)$.

Lineární struktura V je opět nutnou podmínkou pro zavedení skalárního součinu. Z těchto podmínek lze snadno odvodit, že zobrazení $V \times V \longrightarrow [0, +\infty)$ definované pro každý prvek x z V jako $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ splňuje axiomy normy. Tedy každý skalární součin indukuje normu a prostory se skalárním součinem se nazývají **pre-Hilbertovy prostory**.

1.1.2 Konvergence a úplnost

Je-li X neprázdná množina, pak se posloupnost v X označuje $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, kde x_n je prvkem X pro každé přirozené číslo n. Na každé takové množině X lze zavést nějakou topologii a na jejím základě limitu, jakožto topologickou vlastnost. Zde však není nutné zajít až k topologické definici, postačí definice pomocí metriky.

Definice 1.1.3. Nechť X je neprázdná množina. Pak zobrazení $\rho: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ nazveme metrikou právě tehdy, když splňuje vlastnosti

1. $(\forall x, y \in V)\ \rho(x, y) = \rho(y, x)$, (symetrie)
2. $(\forall x, y, z \in V)\ \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$, (trojúhelníková nerovnost)
3. $(\forall x, y \in V)\ \rho(y, x) = 0 \Leftrightarrow y = x$.

Definiční vlastnosti implikují nezápornost metriky a dvojici (X, ρ) nazýváme metrický prostor. Pro definici metriky není nezbytná lineární struktura prostoru X, ale metriku lze zavádět i na vektorových prostorech. Je-li V normovaný vektorový prostor, pak norma na tomto prostoru generuje metriku. Platí, že zobrazení $\rho(x, y) := \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in V$ je metrika. Existují metriky, které nejsou generovány žádnou normou.

Definice 1.1.4. Posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v metrickém prostoru X má limitu $x \in X$ právě tehdy, když platí, že $\rho(x_n, x) \longrightarrow 0$ jako číselná posloupnost. V normovaných vektorových prostorech lze toto ekvivalentně formulovat pomocí normy $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$ opět jako číselná posloupnost. Tuto skutečnost označujeme $\lim x_n = x$ a posloupnosti mající limitu nazýváme konvergentními.

Na metrických prostorech lze zavést cauchyovskost.

Definice 1.1.5. Posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v metrickém prostoru X je **cauchyovská** právě tehdy, když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, n_0)(\forall m, n \in \mathbb{N};\ m, n \geq n_0)(\rho(x_n, x_m) < \varepsilon).$$

Ve speciálním případě reálných posloupností je konvergence ekvivalentní s cauchyovskostí, to je tvrzení Bolzano-Cauchyova kriteria. Obecně však platí pouze, že každá konvergentní posloupnost v X je cauchyovská. Platí-li i obrácená ekvivalence, nazýváme takové metrické prostory **úplné**. Normované vektorové prostory které jsou úplné vzhledem k metrice indukované příslušnou normou nazýváme **Banachovy** a úplné pre-Hilbertovy prostory nazýváme **Hilbertovy prostory**. Je možno zavést i jiné typy konvergence.

Definice 1.1.6. Říkáme, že posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve vektorovém prostoru V konverguje slabě k $x \in V$ právě tehdy, když pro každý spojitý lineární funkcionál na V, označme jej φ, platí

$$\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x).$$

Tuto skutečnost označujeme $x_n \xrightarrow{w} x$.

1.2 Omezené lineární operátory a jejich spektrum

V této kapitole uvedeme věty nezbytné pro studium omezených operátorů a jejich spekter. Podrobnější odůvodnění uvedených tvrzení je možno nalézt například v [3], odkud jsem v této části převážně čerpal.

Obecně je lineární zobrazení definováno jako aditivní a homogenní zobrazení mezi dvěma vektorovými prostory. Je-li V vektorový prostor, pak se lineárním operátorem na V rozumí každé lineární zobrazení zobrazující z V do V. Není-li řečeno jinak, předpokládá se, že lineární operátor je definovaný na celém V. Je-li vektorový prostor V normovaný a A je lineární operátor na V, pak se operátor nazývá **omezený** právě tehdy, když

$$(\exists c > 0)\ (\forall x \in V)\ (\|Ax\| \leq c\,\|x\|).$$

Množina omezených a všude definovaných operátorů na V se označuje $\mathscr{B}(V)$ a definujeme-li operace $+$ & $\cdot$ bodově, pak je tato množina vektorovým prostorem. Lze ukázat, že zobrazení, které každému A z $\mathscr{B}(V)$ přiřadí číslo

$$\|A\| := \sup_{x \in V, \|x\|=1} \|Ax\|$$

je norma na $\mathscr{B}(V)$. Taktéž platí, že tato norma je rovna infimu ze všech omezujících konstant c z definice omezenosti operátoru, a tedy platí odhad

$$\forall x \in V : \quad \|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|\,.$$

Odtud plyne, že složení dvou omezených operátorů je také omezený operátor a pro jeho normu platí

$$(\forall x \in V)\ \ \|ABx\| \leq \|A\|\,\|Bx\| \leq \|A\|\,\|B\|\,\|x\| \Longrightarrow \|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|\,.$$

Je-li prostor V úplný, pak i prostor $\mathscr{B}(V)$ je úplný.

Označením $\mathcal{X}$ budeme nadále rozumět komplexní Bannachův prostor. V literatuře [3] se uvažují takzvané uzavřené operátory, které obecně nemusejí být definované na celém prostoru, to ale nyní nepředstavuje problém, protože všechny lineární operátory z prostoru $\mathscr{B}(\mathcal{X})$ jsou uzavřené a definované na celém $\mathcal{X}$, avšak existují i neomezené uzavřené operátory.

Definice 1.2.1. Předpokládejme komplexní Bannachův prostor $\mathcal{X}$ a operátor $A \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$, pak **rezolventní množinu** operátoru A definujeme

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}\ :\ (A - \lambda I)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathcal{X})\}$$

a **spektrum** operátoru A je množina

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Existuje-li inverzní operátor k omezenému operátoru, pak dle věty o uzavřeném grafu je tento také omezený. Číslo λ se v našem případě nachází ve spektru operátoru A právě tehdy, když operátor $A - \lambda I$ není bijekce, to může nastat ve dvou případech. Buď $A - \lambda I$ není injektivní nebo není surjektivní. Na základě toho klasifikujeme spektrum na 3 disjunktní části.

- **Bodové spektrum** σ_p: $\lambda \in \sigma_p \overset{\text{Def}}{\iff}$
  $\mathrm{Ker}(A-\lambda I) \neq \{0\} \iff \exists\, 0 \neq x \in \mathcal{X},\ Ax = \lambda x \iff A$ není injektivní.
- **Spojité spektrum** σ_c: $\lambda \in \sigma_c \overset{\text{Def}}{\iff}$
  $(A-\lambda I)$ je injektivní & není surjektivní & $\overline{\mathrm{Ran}(A-\lambda I)} = \mathcal{X}$.
- **Reziduální spektrum** σ_r: $\lambda \in \sigma_r \overset{\text{Def}}{\iff}$
  $(A-\lambda I)$ je injektivní & není surjektivní & $\overline{\mathrm{Ran}(A-\lambda I)} \neq \mathcal{X}$.

Je zřejmé, že bodové spektrum obsahuje takzvaná **vlastní čísla** operátoru A. Na prostorech s konečnou dimenzí je injektivita ekvivalentní se surjektivitou, proto jsou spojitá a reziduální spektra operátorů na těchto prostorech prázdná, ale obecně tomu tak není. Pro $\lambda \in \rho(A)$ zavádíme **rezolventní funkci** s hodnotami v operátorech

$$R_A : \rho(A) \longrightarrow \mathscr{B}(\mathcal{X}) \quad R_A(\lambda) := (A-\lambda I)^{-1}$$

a operátor $R_A(\lambda)$ nazýváme rezolventou operátoru A v bodě λ.

Věta 1.2.1. *Nechť $A \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$ a $\|I-A\| < 1$ pak existuje $A^{-1} \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$.*

Tato věta je stěžejním tvrzením pro odvození základních vlastností spektra omezeného operátoru, v celé své obecnosti dává dokonce vztah pro výpočet A^{-1}, ten ale nebudeme potřebovat.

Věta 1.2.2. *Spektrum omezeného operátoru je uzavřená množina.*

Věta plyne z obecnějšího pozorování pro uzavřené operátory a je důsledkem toho, že rezolventní množina uzavřeného operátoru je otevřená, pak spektrum jakožto doplněk této množiny, je uzavřené. Jak bylo zmíněno, každý operátor z $\mathscr{B}(\mathcal{X})$ je uzavřený, proto věta platí i v této formě.

Věta 1.2.3. *Nechť $A \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$, pak spektrum leží uvnitř nebo na hranici kruhu s poloměrem $\|A\|$.*

Důkaz. Berme $|\lambda| > \|A\|$, pak operátor $(I-(\lambda)^{-1}A)$ splňuje předpoklady Věty 1.2.1. Opravdu, odhad $\left\|I-(I-(\lambda)^{-1}A)\right\| = \left\|(\lambda)^{-1}A\right\| < 1$, plyne z homogenity normy. Pak $(A-\lambda I)^{-1} = -(\lambda)^{-1}(I-(\lambda)^{-1}A)^{-1}$, tento operátor podle předchozího odhadu leží v $\mathscr{B}(\mathcal{X})$ a z rovnosti tam leží i $(A-\lambda I)^{-1}$, proto nutně $\lambda \in \rho(A)$, to dokazuje tvrzení. □

Spektrum omezeného operátoru je tedy uzavřená a omezená množina, to je při obvyklé topologii na $\mathbb{C}$ ekvivalentní s kompaktností.

Definice 1.2.2. Poloměr nejmenšího kruhu se středem v počátku, v jehož vnitřku leží spektrum nazýváme **Spektrální poloměr** a označujeme ho $r(A)$.

Snadno nahlédneme, že $r(A) = inf\{|\lambda|\ : \lambda \in \sigma(A)\}$ a platí odhad $r(A) \leq \|A\|$.

Následující věty se věnují operátorům na Hilbertových prostorech a jejich speciálním vlastnostem.

Věta 1.2.4. *Nechť $\mathcal{H}$ je Hilbertův prostor, $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, pak existuje právě jeden operátor A^* takový, že $(\forall x, y \in \mathcal{H})$ splňuje rovnost*

$$\langle x, Ay\rangle = \langle A^*x, y\rangle$$

*Tento operátor nazýváme **sdružený operátor** s operátorem A. Pro normy platí $\|A\| = \|A^*\|$.*

Pouze na základě definice lze vyslovit tvrzení o jádru A^*.

Věta 1.2.5. *Nechť* $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, *pak* $\mathrm{Ker}A^* = (\mathrm{Ran}A)^\perp$.

Důkaz. Berme $x \in (\mathrm{Ran}A)^\perp$, to z definice zapišme

$$(\forall\ y \in \mathrm{Ran}A) : (\langle x, y\rangle = 0) \iff (\forall u \in \mathcal{H})(\langle x, Au\rangle = 0) \iff (\forall u \in \mathcal{H})(\langle A^*x, u\rangle = 0) \Leftrightarrow A^*x = 0,$$

to je ekvivalentní s $x \in \mathrm{Ker}A^*$. □

Snadným důsledkem tohoto vztahu je i rovnost $\overline{\mathrm{Ran}A} = (\mathrm{Ker}A^*)^\perp$. Využívá se pouze toho, že $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$.

Na základě dalších vlastností sdruženého operátoru lze rozlišit další třídy operátorů. První z těchto tříd jsou normální operátory, které značíme $\mathcal{N}(\mathcal{H})$

Definice 1.2.3. Nechť $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, pak A je normální $\overset{Def}{\iff}$ $AA^* = A^*A$.

Definice 1.2.4. Nechť $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, pak A je samosdružený $\overset{Def}{\iff}$ $A^* = A$.

Definice 1.2.5. Nechť $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, pak A je unitární $\overset{Def}{\iff}$ $A^* = A^{-1}$.

Z definic lze vidět, že samosdružené i unitární operátory patří do $\mathcal{N}(\mathcal{X})$, dále také, že unitární operátory zachovávají skalární součin, tedy i normu. Navíc je možné dokázat i další vlastnosti spektra. Platí, že reziduální spektrum normálního operátoru je prázdné. Pro naše potřeby však dokážeme pouze slabší tvrzení pro samosdružený operátor. K tomu je zapotřebí ještě několik netriviální pozorování.

Věta 1.2.6. *(Weylovo kriterium). Nechť* $A \in \mathcal{N}(\mathcal{H})$, $\lambda \in \mathbb{C}$. *Pak platí:*

1. $\lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow\ \exists m > 0 : \forall x \in \mathcal{H},\ \|(A - \lambda I)x\| \geq m\,\|x\|$,
2. $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow\ \exists\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ *taková, že* $\forall n \in \mathbb{N} : \|x_n\| = 1\ \&\ \lim_{n\to+\infty} \|(A - \lambda I)x_n\| = 0$.

Věta 1.2.7. *Nechť* $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H}), A = A^*$, *pak* $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Důkaz. Každé komplexní číslo λ lze zapsat pomocí $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ jako $\lambda = \xi + i\eta$. Operátor $(A - \xi I)$ je jistě samosdružený a pro libovolné $x \in \mathcal{H}$, za využití základních identit na Hilbertově prostoru platí

$$\|(A - \lambda I)x\|^2 = \|(A - \xi I)x - i\eta x\|^2 = \|(A - \xi I)x\| + \eta^2\,\|x\|^2 - \underbrace{2Re(i\eta\,\langle x, (A - \xi I)x\rangle)}_{=0} \geq \eta^2\,\|x\|^2\,,$$

jelikož $\forall x \in \mathcal{H}$ je kvadratická forma $\langle x, Ax\rangle$ reálná pro samosdružený operátor. Tímto získáváme tvrzení

$$\forall\lambda \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathcal{H} :\ \|(A - \lambda I)x\| \geq |Im\lambda|\,\|x\|\,.$$

Weylovo kriterium pak dává implikaci $|Im\lambda| \neq 0 \Longrightarrow\ \lambda \in \rho(A)$ a tedy $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. □

Věta 1.2.8. *Nechť* $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H}), A = A^*$, *pak* $\sigma_r(A) = \emptyset$.

Důkaz. Na základě předchozí věty lze uvažovat $\lambda \in \mathbb{R}$. Pro spor předpokládejme $\lambda \in \sigma_r(A)$, z definice to ale implikuje

$$\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \{0\} \;\&\; \overline{\mathrm{Ran}(A - \lambda I)} \neq \mathcal{H},$$

A je samosdružený a tak platí i rovnost $(A - \lambda I)^* = (A - \lambda)$, navíc podle Věty 1.2.5 platí $(\mathrm{Ker}(A - \lambda I))^\perp = \overline{\mathrm{Ran}(A - \lambda I)}$, z toho dostáváme

$$(\mathrm{Ker}(A - \lambda I))^\perp \neq \mathcal{H},$$

vzhledem k tomu, že jádro omezeného operátoru je uzavřené, získáme po přechodu k ortogonálním doplňkům

$$\mathrm{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}.$$

To je spor s tvrzením bezprostředně plynoucím z původního předpokladu. □

1.3 Projektory

Speciálním typem lineárních operátorů jsou **projektory**, které hrají důležitou roli v definicích a důkazech některých později využívaných pojmů a vět. Proto uvedeme alespoň jejich nejzásadnější vlastnosti. Označme Hilbertův prostor opět jako $\mathcal{H}$. V této části opět čerpáme z knih [3],[2]. Stěžejním tvrzením pro tuto část je následující věta.

Věta 1.3.1. *(O ortogonálním rozkladu) Nechť M je uzavřený podprostor $\mathcal{H}$. Potom*

$$\forall x \in \mathcal{H} : \;\exists_1\; u \in M, v \in M^\perp,\; x = u + v.$$

Na základě této věty vyslovme definici ortogonálního projektoru.

Definice 1.3.1. Nechť $M \subset \mathcal{H}$ uzavřený podprostor. Pak zobrazení P_M definované vztahem

$$P(x) = u,\; \forall x = u + v \in M + M^\perp = \mathcal{H},$$

nazýváme ortogonálním projektorem na M.

Lze snadno nahlédnout, že P_M je lineární a platí $\mathrm{Ran}P_M \perp \mathrm{Ker}P_M$. Zobrazení $I - P_M$ je taktéž ortogonální projektor. Odhadem snadno zjistíme, že $\|P_M\| = 1$, pro $M \neq \{0\}$.

Věta 1.3.2. *Operátor P je ortogonální projektor právě tehdy, když $P = P^2 = P^*$.*

Důkaz. Nechť $M \subset\subset \mathcal{H}$ uzavřený a P je OG projektor, pak pro $x = u + v \in M + M^\perp$ platí

$$P(Px) = P(u) = u = Px \iff P = P^2,$$

rovněž pro $y = m + n \in M + M^\perp$ získáme

$$\langle Px, y\rangle = \langle u, m + n\rangle = \langle u, m\rangle + \underbrace{\langle u, n\rangle}_{=0} = \langle u, m\rangle = \langle u, m\rangle + \underbrace{\langle v, m\rangle}_{=0} = \langle u + v, m\rangle = \langle x, Py\rangle\,,$$

tedy $P = P^*$. Naopak, nechť $P = P^2 = P^*$, pak zvolme $M := \mathrm{Ran}P$. Platí $M = \mathrm{Ker}(I - P)$ a M je uzavřený. Pak dle Věty 1.2.5 platí

$$M^\perp = (\mathrm{Ran}P)^\perp = \mathrm{Ker}P^* = \mathrm{Ker}P.$$

Potom pro $u + v \in M + M^\perp$ platí

$$P(u + v) = Pu + Pv = Pu.$$

To dokazuje tvrzení. □

1.4 Kompaktní a Hilbertovy–Schmidtovy operátory

Pro další výsledky je nutné zajít o něco hlouběji do teorie operátorů a definovat kompaktní operátory a jejich speciální podmnožinu, Hilbertovy–Schmidtovy operátory. Jejich znalost je nezbytná pro důkaz Birmanova–Schwingerova principu a ulehčí práci při lokalizaci spekter. U některých operátorů, kterými se budeme zabývat v dalších kapitolách, bude snadné ověřit, že jde o právě o Hilbertovy–Schmidtovy operátory. Uvedeme proto jen několik základních definic, ekvivalentních charakteristik a několik klíčových vlastností. Důkazy složitějších tvrzení je možno najít opět v [3]. Dále vycházíme také z přednášek funkcionální analýzy profesora Šťovíčka na FJFI ČVUT v Praze. Zde opět $\mathcal{H}$ značí Hilbertův prostor.

Definice 1.4.1. Operátor definovaný na celém $\mathcal{H}$, který každou omezenou množinu v $\mathcal{H}$ zobrazí na množinu prekompaktní se nazývá **kompaktní**. Množinu kompaktních operátorů na $\mathcal{H}$ značíme $\mathscr{K}(\mathcal{H})$.

Množina M je prekompaktní právě tehdy, když $\overline{M}$ je kompaktní. Z definice dále plyne, že každý kompaktní operátor je omezený. Kompaktnost operátoru lze ekvivalentně vyjádřit i pomocí konvergence.

Věta 1.4.1. *Operátor A je kompaktní právě tehdy, když každou slabě konvergentní posloupnost zobrazí na posloupnost konvergentní v $\mathcal{H}$.*

Nejprve uveďme první ze specifických podtříd kompaktních operátorů.

Definice 1.4.2. Operátor A takový, že $dim(\mathrm{Ran}A) < +\infty$ se nazývá konečnědimenzionální.

Věta 1.4.2. *Každý konečnědimenzionální operátor je kompaktní.*

Důkaz. Uvažujme libovolnou omezenou množinu $M \subset \mathcal{H}$ a konečnědimenzionální operátor T. Pak TM je omezená podmnožina množiny $\mathrm{Ran}T$, a tedy je sama prekompaktní. To dokazuje tvrzení. □

Lemma 1.4.3. *Uvažujme normovaný vektorový prostor V a v něm prekompaktní množiny A, B. Potom platí:*

1. *Nechť W je normovaný vektorový prostor a zobrazení $f : V \longrightarrow W$ je spojité. Pak $f(A) \subset W$ je prekompaktní,*
2. *Vektorový součet $A + B \subset V$ je prekompaktní množina.*

Důkaz. 1. Platí, $\overline{A}$ je kompaktní a $f(\overline{A})$ je tedy také kompaktní a v tomto případě i uzavřená. Zároveň platí $f(A) \subset f(\overline{A})$ a tedy $\overline{f(A)} \subset \overline{f(\overline{A})} = f(\overline{A})$. Protože uzavřená podmnožina kompaktní množiny je kompaktní, získáváme $\overline{f(A)}$ je kompaktní a tedy $f(A)$ prekompaktní.
2. Kartézský součin kompaktních množin je kompaktní, proto $A \times B$ je prekompaktní. Vektorový součet
$P : V \times V \longrightarrow V$, definovaný $P(A, B) = A + B$ je spojitou operací. Dle 1. bodu je $A + B$ prekompaktní. □

Věta 1.4.4. *$\mathscr{K}(\mathcal{H})$ je podprostorem $\mathscr{B}(\mathcal{H})$.*

Důkaz. Jedná se o důsledek předcházejícího lemma. Pro kompaktní operátory A, B a omezenou množinu $M \subset \mathcal{H}$ je $(A + B)(M) \subset A(M) + B(M)$, přičemž stejná inkluze platí i pro uzávěry. To znamená, že $A + B$ je také kompaktní. Násobení skalárem je triviální. □

Všechny pro tuto práci nezbytné poznatky o kompaktních operátorech uvádí následující věta.

Věta 1.4.5. *Nechť K je kompaktní operátor a $dim\mathcal{H} = +\infty$, pak platí*

1. $\sigma(K) = \{0\} \cup \sigma_p(K)$ *, tedy spektrum obsahuje pouze nulu a vlastní hodnoty.*
2. *Nechť $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, pak AK i KA jsou kompaktní operátory.*
3. $\sigma(K)$ *je nejvýše spočetné a 0 je jediným možným hromadným bodem.*

Úplný důkaz této věty vyžaduje další znalosti, některé dílčí výsledky lze však dokázat snadno, například 2. bod. Uvažujme $M \subset \mathcal{H}$ libovolnou omezenou množinu, pak $A(M)$ je omezená množina a $K(A(M))$ je dle definice prekompaktní, proto KA je kompaktní operátor. Naopak $K(M)$ je prekompaktní z definice a A je spojité, proto $A(K(M))$ je prekompaktní a AK je kompaktní operátor.
Stejně tak, lze snadno ukázat $0 \in \sigma(K)$. Při nekonečné dimenzi prostoru $\mathcal{H}$ není jednotkový operátor I kompaktní, neboť obraz jednotkové koule není je prekompaktní právě tehdy, když je dimenze prostoru konečná. Není-li 0 ve spektru, pak pro kompaktní operátor K existuje K^{-1}. Dle předchozího je však $I = K^{-1}K$ kompaktní, což je spor.

Tvrzení 2. Věty 1.4.5 říká, že množina kompaktních operátorů $\mathscr{K}(\mathcal{H})$, tvoří takzvaný oboustranný ideál v Banachově algebře $\mathscr{B}(\mathcal{H})$. Množina $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ vybavená operacemi sčítání operátorů, násobení komplexním číslem je tedy vektorový prostor $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ navíc vybavený skládáním, které splňuje pro každou dvojici operátorů z $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ nerovnost $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$, tato algebra tedy splňuje obecnou definici Banachovy algebry [3].

Věta 1.4.6. *$\mathscr{K}(\mathcal{H})$ je uzavřený podprostor $\mathscr{B}(\mathcal{H})$. Tedy limita každé konvergentní posloupnosti v operátorové normě je opět kompaktním operátorem.*

Přistupme k definici další speciální podtřídy kompaktních operátorů. Nyní uvažujme separabilní komplexní Hilbertův prostor $\mathcal{H}$ s $dim\mathcal{H} = +\infty$.

Věta 1.4.7. *Nechť $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou ortonormální báze $\mathcal{H}$ a $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, pak $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Ax_n\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \|A^*y_k\|^2$.*

Důkaz. Využitím Parsevalovy rovnosti a Fubiniho–Tonelliho věty získáme

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Ax_n\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle y_k, Ax_n\rangle|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle A^*y_k, x_n\rangle|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \|A^*y_k\|^2 .$$

□

Přímým důsledkem tvrzení je, že řada nezávisí na volbě báze. Důkaz totiž máme pro libovolné dvě ON báze a zároveň platí $A^{**} = A$. To dává dobrý smysl následující definici.

Definice 1.4.3. Nechť $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, pak operátor A je Hilbertův–Schmidtův právě tehdy, existuje ortonormální báze $\mathscr{E} = \{e_k; k \in \mathbb{N}\}$ v $\mathcal{H}$ taková, že A má konečnou Hilbertovu–Schmidtovu normu. Hilbertova-Schmidtova norma je pro omezený operátor A dána vztahem

$$\|A\|_{HS}^2 := \sum_{k\in\mathbb{N}} \|Ae_k\|^2 . \tag{1.1}$$

Množinu Hilbertových–Schmidtových operátorů označujeme $\mathscr{J}_2(\mathcal{H})$.

Není zřejmé, že se skutečně jedná o normu, platí však, že $\mathscr{J}_2$ je Hilbertovým prostorem. Ukážeme však pouze, že jde o vektorový prostor se skalárním součinem, který tuto normu indukuje.

Věta 1.4.8. *Množina $\mathscr{J}_2$ je lineární prostor.*

Důkaz. Nechť $\{x_n\}$ je ortonormální báze. Zřejmě platí ekvivalence

$$A \in \mathscr{J}_2 \Longleftrightarrow \{\|Ax_n\|\} \in \ell^2.$$

Pak pro libovolné $A, B \in \mathscr{J}_2$ platí $\{\|Ax_n\|\}, \{\|Bx_n\|\} \in \ell^2$. Pomocí trojúhelníkové nerovnosti získáme

$$\|(A+B)x_n\| \leq \|Ax_n\| + \|Bx_n\|,$$

přičemž posloupnost $\{\|Ax_n\| + \|Bx_n\|\} \in \ell^2$ a tedy i $\{\|(A+B)x_n\|\} \in \ell^2$. Triviálně platí, že

$$(\forall \alpha \in \mathbb{C}): \ \|\alpha A\|_{HS} = |\alpha| \, \|A\|_{HS} < +\infty,$$

pro každý operátor A z $\mathscr{J}_2$. To dokazuje tvrzení. □

Věta 1.4.9. *Nechť $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou ortonormální báze $\mathcal{H}$ a $A, B \in \mathscr{J}_2$, pak $\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle Ax_n, Bx_n\rangle = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle B^* y_k, A^* y_k\rangle$ a obě řady konvergují absolutně.*

Důkaz. Absolutní konvergenci první řady získáme snadno využitím Cauchy–Schwarzovy nerovnosti nejprve na $\mathcal{H}$ a posléze na ℓ^2.

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle Ax_n, Bx_n\rangle| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|Ax_n\| \, \|Bx_n\| \leq (\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Ax_n\|^2)^{1/2} \sum_{n\in\mathbb{N}} \|Bx_n\|^2)^{1/2} =$$

$$= \|A\|_{HS} \, \|B\|_{HS} < +\infty.$$

Rovnost řad získáme pomocí vtahu $\forall u, v \in \mathcal{H} \ \langle u, v\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle u, x_n\rangle \langle x_n, v\rangle$, kde $\{x_n\}$ je ON báze $\mathcal{H}$, platí

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle Ax_n, Bx_n\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{k\in\mathbb{N}} \langle Ax_n, y_k\rangle \langle y_k, Bx_n\rangle).$$

Pomocí C-S nerovnosti na ℓ^2 lze ukázat že řada absolutně konverguje a tak je možno zaměnit pořadí sum, tím získáme

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} (\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_n, A^* y_k\rangle \langle B^* y_k, x_n\rangle) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle B^* y_k, A^* y_k\rangle .$$

□

Důsledkem této věty je, že součet řady nezávisí na zvolené ON bázi a opět umožňuje vyslovit následující definici.

Definice 1.4.4. $\forall A, B \in \mathscr{J}_2$, pak definujeme pro libovolnou ON bázi $\{x_n\}$

$$\langle A, B\rangle_{HS} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle Ax_n, Bx_n\rangle . \tag{1.2}$$

Snadno se přesvědčíme, že definované zobrazení je skalárním součinem. Podrobně ověříme jen netriviální implikaci $\langle A, A\rangle_{HS} = 0 \Longrightarrow A = 0$. Je-li $0 = \langle A, A\rangle_{HS} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle Ax_n, Ax_n\rangle$, pro libovolnou ON bázi $\{x_n\}$, pak nutně $\langle Ax_n, Ax_n\rangle = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a tedy i $Ax_n = 0$, to implikuje $A/span\{x_n\} = 0$ a ze spojitosti operátoru A již získáváme nulovost A na celém $\mathcal{H}$.

Je zřejmé, že $\langle A, A\rangle_{HS} = \|A\|_{HS}^2$ a tedy Hilbertova–Schmidtova norma je skutečně normou ve smyslu obecné definice. Také je jasné, že $\|A\|_{HS} = \|A^*\|_{HS}$.

Věta 1.4.10. *$\mathscr{J}_2$ je oboustranný *-ideál v $\mathscr{B}(\mathcal{H})$.*

Důkaz. Z definice $\|\cdot\|_{HS}$ plyne, že $A \in \mathscr{J}_2 \iff A^* \in \mathscr{J}_2$. Dále pro libovolnou ON bázi $\{x_n\}$ a $A \in \mathscr{J}_2$, $B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ platí odhad

$$\|BA\|_{HS} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|BAx_n\|^2 \leq \|B\|^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} \|Ax_n\|^2 = \|B\|^2 \|A\|_{HS} \leq +\infty.$$

naopak,

$$\|AB\|_{HS} = \|B^*A^*\|_{HS} < +\infty$$

dle předchozího tvrzení. □

Věta 1.4.11. *$\mathscr{J}_2$ je podprostorem $\mathscr{K}(\mathcal{H})$.*

1.5 Esenciální a diskrétní spektrum

V této části definujeme esenciální spektrum a popíšeme jeho změny způsobené vlivem kompaktních poruch. Jedná se o další klasifikaci spektra na část esenciální a diskrétní, tyto pojmy zavádíme právě proto, že v některých případech poruch se esenciální spektrum zachovává. Existuje minimálně pět různých definic esenciálního spektra. Avšak platí, že pro samosdružené operátory na Hilbertových prostorech se tyto definice shodují, proto zde uvedeme jen jednu z nich. Vycházím zde z knih [9] a [8].

Podobně jako v lineární algebře, lze i na prostorech nekonečné dimenze zavést algebraické a geometrické násobnosti vlastních hodnot. Připomeňme, že algebraická násobnost vlastní hodnoty λ je v konečně rozměrném případě jeho násobnost jakožto kořene charakteristického polynomu $det(A - \lambda I)$. Geometrická násobnost je dimenze podprostoru $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$. Omezme se nyní opět na $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$. V případě geometrické násobnosti, se nic nemění ani v případě nekonečné dimenze.

Definice 1.5.1. Geometrická násobnost vlastní hodnoty $\lambda \in \mathbb{C}$ operátoru A je $\nu_g(\lambda) := dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I))$.

Je-li $\lambda \in \sigma_p(A)$ izolovaným bodem celého spektra, pak lze definovat takzvaný **spektrální projektor**

$$P_\lambda := \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma (A - zI)^{-1} dz, \tag{1.3}$$

kde γ je kladně orientovaná kružnice taková, že $\gamma := \{z : \ |\lambda - z| = \varepsilon\}$, přičemž ε je dostatečně malé tak, že žádný jiný bod spektra neleží ve vnitřku kružnice ani na kružnici. Toho lze dosáhnout právě díky izolovanosti λ. Nejedná se o klasický křivkový integrál, ale o integrál z operátoru, to však nepředstavuje problém, stačí nahradit všechny výrazy, kde se v definici integrálu vyskytuje absolutní hodnota funkce, normou operátoru. Výsledkem je lineární zobrazení, které navíc splňuje $P_\lambda^2 = P_\lambda$, tedy charakteristickou vlastnost projektoru.

Definice 1.5.2. Algebraickou násobností izolované vlastní hodnoty λ je $\nu_a(\lambda) := dim(\mathrm{Ran}(P_\lambda)$.

Definice 1.5.3. Diskrétním spektrem omezeného operátoru A na Hilbertově prostoru rozumíme množinu $\sigma_{\mathrm{disc}}(A) := \{\lambda \in \sigma_p(A) : \ \lambda \text{ je izolovaný bod } \sigma(A) \ \& \ \nu_a(\lambda) < +\infty\}$. **Esenciální spektrum** je $\sigma_{\mathrm{ess}}(A) := \sigma(A) \setminus \sigma_{\mathrm{disc}}(A)$.

Nyní uvedeme větu, která pojednává o zachování esenciálního spektra při kompaktní poruše, jedná se o speciální případ Weylovy věty o esenciálním spektru. Konkrétně ji lze najít v [9] v sekci XIII 4. pod pojmem *lemma* 3.

Věta 1.5.1. *Nechť $H \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ a $V \in \mathscr{K}(\mathcal{H})$ a platí současně*

1. *Vnitřek $\sigma(H)$ v topologii $\mathbb{C}$ je prázdný.*
2. *Každá komponenta souvislosti $\rho(H)$ má neprázdný průnik s $\rho(H+V)$.*

Potom $\sigma_{\mathrm{ess}}(H) = \sigma_{\mathrm{ess}}(H+V)$.

1.6 L^p a ℓ^p prostory

Stěžejním pojmem v této práci jsou Lebesgueovy prostory funkcí L^p a především prostory ℓ^p. Obecně předpokládejme množinu X se $\sigma-$algebrou $\mathcal{M}$ a mírou μ, tuto trojici $(X, \mathcal{M}, \mu)$ nazýváme prostorem s mírou.

Definice 1.6.1. Buď $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $p \in [1, +\infty)$, prostor měřitelných funkcí integrovatelných s p mocninou označíme $\mathcal{L}^p = \{f : X \to \mathbb{C} : \ f \text{ měřitelná}, \int_X |f|^p \, d\mu < +\infty\}$.

Na tomto prostoru lze zavést relaci, takzvanou rovnost skoro všude, označenou $= \ \mu - a.e.$. Dvě funkce f a g se rovnají skoro všude právě tehdy, když se rovnají jejich funkční hodnoty pro všechna x z prostoru X s vyjímkou množiny nejvýše nulové míry. Tato relace je ekvivalencí. Symetrii a reflexivitu zcela jistě splňuje. Transitivita je důsledkem toho, že nejvýše spočetné sjednocení množin nulové míry má opět nulovou míru. Jsou-li funkce $f, g, h : X \to \mathbb{C}$ takové, že $f = g$ skoro všude až na množinu A, $\mu(A) = 0$ a $g = h$ až na množinu B, $\mu(B) = 0$, pak se $f \neq h$ nejvýše na $A \bigcup B$, a tedy $f = h \ \mu - a.e.$.

Definice 1.6.2. Buď $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $p \in [1, +\infty)$, prostor L^p je faktorprostorem prostoru $\mathcal{L}^p$ vzhledem k ekvivalenci $\mu - a.e.$, tedy $L^p := \mathcal{L}^p / \mu - a.e.$. Označujeme $L^p(X, d\mu)$.

Věta 1.6.1. *Buď $(X, \mathcal{M}, \mu)$, pak $\forall p \in [1, +\infty)$ je zobrazení $\|\cdot\| : L^p(X, d\mu) \longrightarrow [0, +\infty)$ definované $(\forall f \in L^p(X, d\mu))$ $\|f\| = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}$ norma na $L^p(X, d\mu)$ a $L^p(X, d\mu)$ je Banachův prostor.*

Poznámka. Pro $p = 2$ je $L^2(X, d\mu)$ Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle f, g \rangle := \int_X \bar{f} g d\mu$.

Pro určitost je možno uvést například $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, dx)$, prostor v Lebesguově smyslu integrovatelných funkcí jedné reálné proměnné a jeho faktorprostor $L^1(\mathbb{R}, dx)$ je prostor tříd ekvivalence těchto funkcí, přičemž ve stejné třídě se nacházejí funkce, které se liší nejvýše na množině míry nula.

1.6.1 Prostory posloupností ℓ^p

Dalším typem prostoru L^p je případ s konkrétní volbou množiny $X := \mathbb{Z}$ a míry $\mu := \mu_c$, kde μ_c je počítací míra, která je definována $(\forall M \subset \mathbb{Z})$ jako počet prvků množiny M. Jako $\sigma-$algebru volíme celé $2^{\mathbb{Z}}$. Všechna zobrazení celých čísel do $\mathbb{C}$ jsou tedy měřitelná.

Definice 1.6.3. Mějme měřitelný prostor $(\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{Z}}, \mu_c)$; pak prostor $\ell^p(\mathbb{Z}) := L^p(\mathbb{Z}, d\mu_c)$.

Zcela v souladu s větou (2.1) lze na prostoru $\ell^p(\mathbb{Z})$ zavést **normu** $(\forall x \in \ell^p(\mathbb{Z}))$ jako $\|x\| = (\int_{\mathbb{Z}} |x|^p d\mu_c)^{1/p}$. Tento výraz je však roven

$$\forall x \in \ell^p(\mathbb{Z}) : \quad \|x\| = (\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_k|^p)^{1/p}. \tag{1.4}$$

Stejně tak platí, že pro $p = 2$ je $\ell^2(\mathbb{Z})$ Hilbertovým prostorem, uvažujeme-li skalární součin

$$\forall x, y \in \ell^2(\mathbb{Z}) : \quad \langle x, y\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \bar{x}_k y_k. \tag{1.5}$$

Posloupnosti definované $\forall n \in \mathbb{Z} : \quad e_n := \{\delta_{nk}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ tvoří ortonormální soubor v $\ell^2(\mathbb{Z})$. Ortonormalitu lze snadno ověřit pomocí vztahů (1.4) a (1.5). Tento soubor je **spočetnou ortonormální bází**. Z definice e_n plyne, že $\quad (\forall n \in \mathbb{Z}) \langle x, e_n\rangle = 0 \implies x = 0$, neboli $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}^{\perp} = \{0\}$. Tato báze se nazývá standardní.

Je-li posloupnost x prvkem prostoru ℓ^p, pak nutná podmínka pro konvergenci řady říká, že $\lim_{n\to+\infty} |x_n|^p = 0$ a současně i $\lim_{n\to-\infty} |x_n|^p = 0$. Nejprve uvažme případ s limitou v $+\infty$, má-li se tato rovnat nule, pak nutně musí existovat index n_+ takový, že

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_+ \ : \ |x_n|^p < 1,$$

stejně tak, musí v případě limity v $-\infty$ existovat index n_- takový, že

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \leq n_- \ : \ |x_n|^p < 1.$$

Položíme-li $n_0 := max\{|n_-|, |n_+|\}$, platí

$$\forall n \in \mathbb{Z}, |n| \geq n_0 \ : \ |x_n|^p < 1.$$

Tedy, až na konečně mnoho vyjímek musí být všechny členy posloupnosti v absolutní hodnotě menší než 1. Zřejmě pak platí, že každá s p mocninou sčítatelná posloupnost je sčítatelná i s libovolnou mocninou $q, \ q > p$, tedy $\ell^p \subset \ell^q$ pro každé $q > p$. Jedná se o přímý důsledek vztahu

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \ (\forall p, q \in \mathbb{R}, q > p \geq 1) \ : \ |z|^p < 1 \Longrightarrow |z|^q < |z|^p.$$

1.7 Základní operátory na $\ell^2(\mathbb{Z})$

Velmi jednoduchými operátory jsou jednotkový operátor I a operátor posunutí S definovaný

$$\forall x \in \ell^2(\mathbb{Z}) : \ (Sx)_n := x_{n-1}.$$

Stěžejním operátorem pro další kroky je diferenční operátor D, který je definovaný

$$\forall x \in \ell^2(\mathbb{Z}) : \ (Dx)_n := x_n - x_{n-1}.$$

Lze ho také zapsat jako $D = I - S$. Z definice normy operátoru platí

$$\|Dx\| = \|Ix - Sx\| \leq \|Ix\| + \|Sx\| = \|x\| + (\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_{n-1}|^2)^{1/2} = 2\,\|x\| \Longrightarrow \|D\| \leq 2.$$

Což implikuje, že operátor D je omezený. Sdružený operátor D^* je také omezený a lze jej vyjádřit

$$(D^*x)_n = x_n - x_{n+1}.$$

Složením D^* a D získáme omezený samosdružený operátor $T := D^*D = DD^*$. Z předchozích vztahů lze vyjádřit

$$(Tx)_n = (D^*Dx)_n = (Dx)_n - (Dx)_{n+1} = -x_{n+1} + 2x_n - x_{n-1}.$$

Samosdruženost plyne snadno z definice

$$T^* = (D^*D)^* = D^*D = T.$$

Pro lineární zobrazení je matice operátoru definována po sloupcích jako obrazy bazických vektorů vyjádřené ve standardní bázi a pro operátor $A \in \mathscr{B}(\ell^2(\mathbb{Z}))$ platí, že prvky jeho matice se dají vyjádřit $A_{n,m} = \langle e_n, Ae_m\rangle$. Takto získáme dvojitě nekonečné matice pro výše zmíněné operátory, vyznačené prvky se nacházejí na pozici $(0, 0)$ a prázdná místa jsou zaplněna nulami,

$$D^* = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & \\ & 1 & -1 & & & \\ & & \boxed{1} & -1 & & \\ & & & 1 & -1 & \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

$$D = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & \\ & -1 & 1 & & & \\ & & -1 & \boxed{1} & & \\ & & & -1 & 1 & \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

$$T = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & -1 & \boxed{2} & -1 & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & & \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Operátor T se nazývá **diskrétní Laplaceův operátor**. Je možné setkat se s různými definicemi Laplaceova operátoru, často se uvádí jako operátor $H := 2I - T$, vyjádřený $He_n = e_{n-1} + e_{n+1}$, případně $\frac{1}{2}T$, ovšem klíčové vlastnosti jsou stejné, dochází zde jen k translaci spektra, což bude náležitě odůvodněno v následující části. Obecně se od Laplaceova operátoru operátoru očekává samosdruženost a nezápornost spektra.

1.8 Laurentovy operátory

Operátory na $\ell^2(\mathbb{Z})$, které mají tu vlastnost, že pro prvky jejich matice A vzhledem ke standardní ON bázi platí, že hodnota prvku $A_{n,m}$ závisí pouze na rozdílu $n - m$, se nazývají **Laurentovy operátory**. To lze ekvivalentně vyjádřit tak, že jak na hlavní diagonále matice, tak i na všech diagonálách pod a nad hlavní diagonálou se nacházejí konstantní posloupnosti. Je zřejmé, že všechny zmíněné operátory na $\ell^2(\mathbb{Z})$ splňují tuto definici. Nadále uvažujme jen omezené Laurentovy operátory. Pro tuto třídu operátorů jsou v [2] odvozeny věty pro nalezení spektra a rezolventy. Využívá se unitární transformace na operátor násobení funkcí na prostoru L^2, kterou je obecně velmi těžké najít, ale pro Laurentovy operátory je takovou transformací diskrétní Fourierova transformace. Existenci transformace zaručuje spektrlní věta.

Uvažujme prostor $L^2([0, 2\pi], dt)$ s klasickou Lebesgueovou mírou a na něm spočetnou ortonormálmí bázi $B = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int} |\ n \in \mathbb{Z}\}$, označíme $f_n(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}$. Dále zavádíme operátor $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow L^2([0, 2\pi], dt)$ plně určený obrazem bazických posloupností v $\ell^2(\mathbb{Z})$

$$Ue_n = f_n \quad (\forall n \in \mathbb{Z}).$$

Pro libovolný prvek z x z $\ell^2(\mathbb{Z})$ lze tedy zapsat

$$(Ux)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}U(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{\langle x, e_n\rangle}_{=x_n} e_n)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n(Ue_n)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{int},$$

kde je využito rozvoje prvku x do Fourierovy řady na Hilbertově prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$ a spojitost operátoru U. Operátor U^{-1} je klasická diskrétní Fourierova transformace, která příslušné funkci přiřadí posloupnost Fourierových koeficientů. Tedy $U^{-1} : L^2([0, 2\pi], dt) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ je definován pro každou funkci f z $L^2([0, 2\pi], dt)$

$$(U^{-1}f)_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-int} f(t)dt.$$

Pro další účely je dobré uvědomit si, že U je izometrie, tedy že zachovává normu, tím pádem i skalární součin. Zobrazuje totiž ortonormální bázi v $\ell^2(\mathbb{Z})$ na ortonormální bázi v $L^2([0, 2\pi], dt)$. Operátor U^{-1} je omezený izomorfismus a z toho jako důsledek věty o otevřeném zobrazení získáváme zmiňovanou spojitost operátoru U. Podrobné odůvodnění lze najít v [2] na straně 50.

Poznamenejme že operátor násobení měřitelnou komplexní funkcí ϕ na prostoru L^2, označme jej například M_ϕ, je dán pro funkci $f \in L^2$

$$(M_\phi f)(t) = f(t)\phi(t)$$

. Matice operátoru M_ϕ vzheldem k bázi $\{f_n\}$ na prtostoru L^2 má konstantní diagonály. Pak ale i matice operátoru $U^{-1}M_\phi U$ vzhledem ke stanadrdní bázi na $\ell^2(\mathbb{Z})$ má konstantí diagonály a jde tak o Laurentův operátor. Podrobné odvození je uvedeno v [2] na straně 136.

Unitární transformací Laurentova operátoru tedy získáme operátor násobení funkcí na $L^2([0, 2\pi], dt)$, jehož spektrální analýza je dobře známá. V plné obecnosti je možno ji najít [3], zde však z větší části vyjdeme z tvrzení uvedených v [2]. Dále uveďme některé vlastnosti operátoru násobení M_ϕ

a základní poznatky z jeho spektrální analýzy.

Mějme měřitelný prostor X a operátor násobení funkcí M_ϕ na $L^2 := L^2(X, d\mu)$, pro měřitelnou komplexní funkci, pak je operátor M_ϕ dobře definován na množině

$$\mathrm{Dom} M_\phi := \{f \in L^2 | \int_X |f|^2 |\phi|^2 \, d\mu < +\infty\}$$

a platí, že množina $Dom M_\phi$ je hustá v L^2. Zde je opět nutné postupovat opatrně, protože operátor nemusí být definovaný na celém prostoru a do hry vstupují definiční obory, které však nehrají v žádném dalším místě této práce roli, proto, je nebudeme podrobněji rozebírat ani v této části, ačkoliv se v jejich důsledku mohou měnit i definice základních pojmů. Abychom se této nepříjemnosti zbavili, přidejme omezující podmínku na funkci ϕ a to $\|\phi\|_\infty < +\infty$, jelikož tento výraz nebyl nikde definovaný, poznamenejme, že implikuje omezenost funkce skoro všude vzhledem k míře μ. Toto umožňuje upravit výraz

$$\int_X |f|^2 |\phi|^2 \, d\mu \leq \|\phi\|_\infty^2 \|f\|^2$$

a z toho plyne odhad

$$\|M_\phi f\| \leq \|\phi\|_\infty \|f\|,$$

získáváme tedy, že $Dom M_\phi = L^2$ **a omezenost operátoru** M_ϕ, tedy můžeme psát $M_\phi \in \mathscr{B}(L^2)$ a pro normu zřejmě platí $\|M_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$. Pro dvě měřitelné funkce ϕ a ψ se $M_\phi = M_\psi$ právě tehdy, když se $\phi = \psi$ *a.e.* . Existuje operátor sdružený a platí, že $M_\phi^* = M_{\overline{\phi}}$, z toho plyne, že samosdruženost je ekvivalentní s tvrzením, že funkce ϕ je reálná. Pokud se omezíme výběrem ϕ na spojité funkce definované na $\mathbb{R}^n$ a uvažujeme příslušný Lebesgueův prostor s Lebesgueovou mírou, pak platí

$$\sigma(M_\phi) = \overline{\mathrm{Ran}(\phi)}. \tag{1.9}$$

Uvažujme funkci $f \in L^2(\mathbb{R}, dx)$, $f \neq 0$, to znamená

$$(\exists\ N \in \mathscr{B}_\mathbb{R}, \mu(N) \neq 0)\ (\forall x \in N,\ f(x) \neq 0),$$

pak $\lambda \in \mathbb{C}$ je dle definice vlastní hodnotou M_ϕ právě tehdy, když

$$\begin{aligned} M_\phi f &= \lambda f, \\ \phi f &= \lambda f, \\ \phi(x) &= \lambda, \end{aligned}$$

pro $x \in N$. Z toho plyne tvrzení

$$\lambda \in \sigma_p(M_\phi) \Longleftrightarrow (\exists\ N \in \mathscr{B}_\mathbb{R}, \mu(N) \neq 0)\ (\forall x \in N,\ \phi(x) = \lambda). \tag{1.10}$$

Pro funkci ϕ omezenou na $[0, 2\pi]$ je tedy operátor M_ϕ opět bez dalšího omezení definičního oboru dobře definovaný na celém prostoru, neboť součin ϕ a funkce z L^2 je opět kvadraticky integrovatelný. Jak bylo ukázáno, jeho vlastnosti jsou spjaty právě s funkcí ϕ.

Každý Laurentův operátor je tedy izometricky izomorfní operátoru násobení funkcí M_ϕ. Přesněji řečeno, pro každý Laurentův operátor A existuje omezená komplexní měřitelná funkce ϕ definovaná na $[0, 2\pi]$ taková, že operátor A je definovaný funkcí ϕ a tuto funkci nazýváme symbolem A. Pojmenování symbol operátoru A se však obvykle používá v případě, že Laurentovy operátory nespojujeme s prvky prostoru $L^2([0, 2\pi], dt)$ ale s funkcemi z prostu

$$L^2(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C} : \oint_{\mathbb{T}} \frac{|f(z)|^2}{iz} dz < +\infty \right\},$$

zde si však dovolím toto označení zaměnit. Činím tak i proto, že tyto dva prostory jsou izomorfní a lze tedy tvrzení platící pro jeden z nich ekvivalentně formulovat i pro druhý. Izomorfismem je zobrazení

$$L^2([0, 2\pi]) \longrightarrow L^2(\mathbb{T}) : \ f(t) \ \longmapsto f(e^{\mathrm{it}}).$$

Dále ukážeme že spektra příslušných Laurentových operátorů a operátorů násobení se shodují.

Věta 1.8.1. *Nechť A je Laurentův operátor se spojitým symbolem $\phi(t)$ a nechť M_ϕ je k němu ve smyslu transformace $M_\phi = UAU^{-1}$ příslušný operátor násobení funkcí, pak platí*

$$\|A\| = \|M_\phi\| = \max_{t \in [0, 2\pi]} |\phi(t)|.$$

Věta 1.8.2. *Nechť A je Laurentův operátor se spojitým symbolem $\phi(t)$, pak A je invertovatelný právě tehdy, když*

$$(\forall t \in [0, 2\pi]) \quad \phi(t) \neq 0,$$

v tom případě je operátor A^{-1} Laurentův a jeho symbolem je funkce $\frac{1}{\phi}$.

Důkaz. Vyjděme ze znalostí o operátoru násobení funkcí $M_{\phi(t)}$, snadno ověříme, že pro operátor násobení spojitou funkcí $\phi(t)$ na $L^2([0, 2\pi])$ je inverzním operátorem operátor násobení funkcí $\frac{1}{\phi(t)}$ a existuje právě tehdy, když $\phi(t) \neq 0$ na $[0, 2\pi]$. A protože platí $A = U^{-1} M_\phi U$, je operátor $A^{-1} = U^{-1} (M_\phi)^{-1} U = U^{-1} M_{1/\phi} U$. Čímž je tvrzení dokázáno. $\square$

Věta 1.8.3. *Nechť A je Laurentův operátor se spojitým symbolem $\phi(t)$ pak*

$$\sigma(A) = \{\phi(t) \mid t \in [0, 2\pi]\}.$$

Důkaz. Operátor $A - \lambda I$ je opět Laurentův. Máme-li Laurentův operátor se symbolem $\phi(t)$, pak pro libovolné komplexní číslo získáme symbol operátoru $A + zI$ jako funkci $\psi(t) = \phi(t) + z$. Operátor $A - \lambda I$ má tedy symbol $\phi(t) - \lambda$ a tento je nenulový a tedy invertovatelný právě tehdy, když $\phi(t) - \lambda \neq 0$ pro každé $t \in [0, 2\pi]$, proto všechna λ splňující tuto podmínku patří do $\rho(A)$ a $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \exists \ t \in [0, 2\pi]; \ \phi(t) = \lambda\}$. Ještě je potřeba ověřit, že invertovaný operátor je omezený. To je dle Věty 1.8.1 ekvivalentní s tvrzením $\sup_{t \in [0,2\pi]} \{\frac{1}{\phi(t) - \lambda}\} < +\infty$. Z předchpozí části důkazu je však zřejmé, že se jedná o supremum funkce spojité na uzavřeném intervalu, toho je tedy nabýváno a je konečné. Tím je věta dokázána. $\square$

Na závěr ještě rozšíříme tvrzení Věty 1.8.3, dané tvrzení totiž nedává odpověď na to, zda se klasifikace spektra při transformaci zachovává, což je vhodné vědět. Ukazuje se, že ano, dokonce je možné provést důkaz i se slabšími požadavky na operátor U, nemusí se nutně jednat o izometrický izomorfismus jakým je Fourierova transformace, ale postačí homeomorfní izomorfismus. Následující tvrzení možno aplikovat i pro U jako Fourierovu transformaci, neboť splňuje předpoklady.

Věta 1.8.4. *Nechť U je homeomorfní izomorfizmus. mezi Hilbertovými prostory $U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$. Dále $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1)$, potom $B := UAU^{-1} \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_2)$ a navíc $\sigma_p(A) = \sigma_p(B)$, $\sigma_c(A) = \sigma_c(B), \sigma_r(A) = \sigma_r(B)$.*

Důkaz. Nejprve dokažme rovnost pro bodová spektra. Postupujme z definice

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}: \ \lambda \in \sigma_p(A) \iff \exists \psi \neq 0, \ \psi \in \mathcal{H}_1 : \ A\psi = \lambda\psi,$$

z předpokladu vajádříme $A = U^{-1}BU$ a dosadíme

$$U^{-1}BU\psi = \lambda\psi$$

nyní označíme $\phi := U\psi \in \mathcal{H}_2$ navíc $\phi \neq 0$, jelikož U je bijekce, pak

$$U^{-1}B\phi = \lambda\psi,$$

aplikací operátoru U zleva

$$B\phi = \lambda\phi,$$

což zančí $\lambda \in \sigma_p(B)$, tedy $\sigma_p(A) = \sigma_p(B)$.

Přistoupíme ke spojitému spektru, pro $\forall \lambda \in \mathbb{C}: \ \lambda \in \sigma_c(A) \iff \operatorname{Ker}(A - \lambda I) = \{0\}$ & $\overline{\operatorname{Ran}(A - \lambda I)} = \mathcal{H}_1$. Z definice je

$$\operatorname{Ker}A = \{x \in \mathcal{H}_1 : \ Ax = 0\} = \{x \in \mathcal{H}_1 : \ U^{-1}B \underbrace{Ux}_{:=y\in\mathcal{H}_2} = 0\} =$$

$$= \left\{U^{-1}y \in \mathcal{H}_1 : \ U^{-1}By = 1\right\} = U^{-1}(\operatorname{Ker}B).$$

Obdobně pro obory hodnot, za využití surjektivity U získáme

$$\operatorname{Ran}A = \{Ax : \ x \in \mathcal{H}_1\} = \{U^{-1}B \underbrace{Ux}_{:=y\in\mathcal{H}_2} : \ x \in \mathcal{H}_1\} =$$

$$= \{U^{-1}By : \ y \in \mathcal{H}_2\} = U^{-1}(\operatorname{Ran}B).$$

Pro zjednodušení zápisu jsme ve výrazu $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ volili $\lambda = 0$, pro nenulové číslo získáme stejný výsledek. Oba postupy lze snadno projít i v opačném směru, proto získáváme klíčové tvrzení

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda I) = \{0\} \iff \operatorname{Ker}(B - \lambda I) = \{0\}. \tag{1.11}$$

Nyní ukážeme ještě následující výrok $\forall D \subset \mathcal{H}_1 : \ \overline{D} = \mathcal{H}_1 \Longrightarrow \overline{UD} = \mathcal{H}_2$. Využijeme charakteristiky hustého množiny v nějakém prostoru pomocí limity.

$$\forall y \in \mathcal{H}_2 : \ U^{-1}y \in \mathcal{H}_1 = \overline{D}$$

díky tomu získáváme

$$\exists x_n \in D : \ x_n \longrightarrow U^{-1}y.$$

Aplikováním spojitého operátoru U při označení $Ux_n := y_n \in UD$, získáme

$$\underbrace{Ux_n}_{y_n} \longrightarrow y.$$

To znamená, že UD je hustý v $\mathcal{H}_2$. Tento postup lze opět obrátit.

Kombinací předchozích tvrzení získáváme pro $\lambda \in \mathbb{C}$ tvrzení

$$\overline{\operatorname{Ran}(A-\lambda I)} = \mathcal{H}_1 \Longleftrightarrow \overline{\operatorname{Ran}(B-\lambda I)} = \mathcal{H}_2. \tag{1.12}$$

Proto $\sigma_c(A) = \sigma_c(B)$ a rovněž $\sigma_r(A) = \sigma_r(B)$. Tím je tvrzení dokázáno. □

Věta nám umožňuje přenášet poznatky získané o spektru operátoru násobení funkcí na spektrum Laurentova operátoru, a to včetně klasifikace spektra.

Podle Věty 1.8.2 je možné snadno najít užitečný vztah pro výpočet inverze Laurentova operátoru A v bodě λ, předpokládejme spojitý symbol operátoru ϕ. Inverzi ztotožníme s dvojitě nekonečnou maticí a její prvek na pozici m, n je z definice

$$(A^{-1})_{m,n} = \langle e_m, A^{-1}e_n\rangle = [U\ je\ izometrie] = \langle Ue_m, UA^{-1}e_n\rangle_{L^2} = \langle f_m, UA^{-1}U^{-1}f_n\rangle_{L^2} =$$

$$= \left\langle f_m, M_{\frac{1}{\phi}} f_n\right\rangle_{L^2} = \left\langle f_m, \frac{f_n}{\phi}\right\rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\overline{e^{imt}}e^{int}}{\phi(t)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i(n-m)t}}{\phi(t)}dt. \tag{1.13}$$

1.9 Birmanův–Schwingerův princip

Klíčovým tvrzením pro přibližnou lokalizaci spektra je Birmanův–Schwingerův princip. Ten umožňuje získat informace o spektru porušeného samosdruženého operátoru zkoumáním spektra takzvaného Birmanova–Schwingerova operátoru. Toto tvrzení má však mnoho různých variant, často je uzpůsobováno s konkrétními operátory, či vysloveno velmi abstraktně [6]. Proto zde celou větu vyslovíme tak aby postačovala pro naše účely a kompletně ji dokážeme. K důkazu bude zapotřebí využít několik pomocných tvrzení. V této části se označením $\mathcal{H}$ rozumí Hilbertův prostor. V podobné, ale obecnější podobě ho lze najít například v [4] pod označením Theorem 1.

Lemma 1.9.1. *Nechť $A, B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, pak platí $\sigma(AB) \setminus \{0\} = \sigma(BA) \setminus \{0\}$*

Důkaz. Uvažujme komplexní číslo $\lambda \neq 0$ takové, že $\lambda \notin \sigma(BA)$, z toho plyne $\exists (BA-\lambda)^{-1}$. Pak ale existuje i $(AB-\lambda)^{-1}$ a tedy $\lambda \notin \sigma(AB)$, což je ekvivalentní s tvrzením lemma. Skutečně platí $(AB-\lambda)^{-1} = \lambda^{-1}(A(BA-\lambda)^{-1}B - 1)$, což snadno ověříme tak, že složením s $(AB-\lambda)$ zleva a následně i z prava získáme operátor I. O tom se snadno přesvědčíme,

$$\begin{aligned}
&(AB-\lambda I)\lambda^{-1}(A(BA-\lambda I)^{-1}B - I) = \\
&= \lambda^{-1}A(BA\underbrace{\quad}_{\pm\lambda I})(BA-\lambda I)^{-1}B - A(BA-\lambda I)^{-1}B - \lambda^{-1}AB + I = \\
&= \lambda^{-1}A(I + \lambda(BA-\lambda I)^{-1})B - A(BA-\lambda I)^{-1}B - \lambda^{-1}AB + I = I,
\end{aligned}$$

naopak obdobně, už však méně podrobně

$$\begin{aligned}
&\lambda^{-1}(A(BA-\lambda I)^{-1}B - I)(AB-\lambda) = \\
&= \lambda^{-1}(A(BA-\lambda I)^{-1}(BA-\lambda I+\lambda I)B) - \lambda^{-1}AB - A(BA-\lambda I)^{-1}B + I \quad = I.
\end{aligned}$$

Tím je tvrzení dokázáno. □

Věta 1.9.2. ***(Birmannův–Schwingerův princip)***
Nechť $L = L^* \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, $V \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ a $A, B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, takové, že $V = AB$, pototm pro $\lambda \in \rho(L)$ platí

1. $\lambda \in \sigma_p(L+V) \Longrightarrow -1 \in \sigma_p(K(\lambda))$, *kde* $K(\lambda) := B(L-\lambda)^{-1}A$.
2. *Je li navíc V kompaktní operátor, pak* $-1 \in \sigma_p(K(\lambda)) \Longrightarrow \lambda \in \sigma_p(L+V)$.

Důkaz. 1: Předpokládejme $\lambda \in \sigma_p(L+V) \Longrightarrow \exists\, 0 \neq \psi \in \mathcal{H}$ takové, že $(L+V)\psi = \lambda\psi \Longleftrightarrow (L-\lambda)\psi = V\psi$. Nyní tuto rovnost přenásobíme zleva $(L-\lambda)^{-1}$, tím získáme $-\psi = (L-\lambda)^{-1}V\psi$ a využijeme $V = AB$.

$$-\psi = (L-\lambda)^{-1}AB\psi \quad /B\psi =: \phi$$

$$-\psi = (L-\lambda)^{-1}A\phi$$

a násobením B zleva obdržíme

$$-\phi = \underbrace{B(L-\lambda)^{-1}A}_{=K(\lambda)}\,\phi,$$

což odpovídá výroku $-1 \in \sigma_p(K(\lambda))$ za předpokladu, že $\phi \neq 0$. To ale platí, předpokládejme $\phi = B\psi = 0$, pak ale i $V\psi = 0$ a $(L+V)\psi = L\psi$, to ale dle předpokladu $\lambda \in \sigma_p(L+V)$ dává rovnost $L\psi = \lambda\psi$ a nastává spor s $\lambda \in \rho(L)$. Tím je první bod dokázán.
2: Zde naopak předpokládejme $-1 \in \sigma_p(K(\lambda))$, to značí, že existuje $0 \neq \phi \in \mathcal{H}$ takové, že $K(\lambda)\phi = -\phi \Longleftrightarrow$
$B(L-\lambda)^{-1}A\phi = -\phi$, je zřejmé, vlastní hodnota -1 leží i v celém $\sigma(K(\lambda))$, a proto z tvrzení 1.9.1 získáváme

$$-1 \in \sigma(B(L-\lambda)^{-1}A) \;\Leftrightarrow\; -1 \in \sigma((L-\lambda)^{-1}\underbrace{AB}_{=V}),$$

toto však platí pouze pro **celá spektra**. Z předpokladu je V kompaktní a dle 2. tvrzení Věty 1.4.5 je operátor $(L-\lambda)^{-1}V$ taktéž kompaktní a z 1. tvrzení této věty plyne

$$-1 \in \sigma_p((L-\lambda)^{-1}V),$$

to je opět ekvivalentní s tvrzením $(\exists\, 0 \neq \psi \in \mathcal{H})$ $(-\psi = (L-\lambda)^{-1}V\psi)$ a násobením $(L-\lambda)$ zleva máme kýženou rovnost

$$-(L-\lambda)\psi = V\psi$$

$$(L+V)\psi = \lambda\psi \iff \lambda \in \sigma_p(L+V).$$

Tím je tvrzení dokázáno. □

Tato věta má jeden stěžejní důsledek, za stejných předpokladů je pro $\lambda \in \rho(L)$ snadné ukázat

$$\|K(\lambda)\| < 1 \Longrightarrow \lambda \notin \sigma_p(L+V).$$

Jde o jednoduchý důsledek tvrzení $\sigma(A) \subset B_{\|A\|}(0)$, které platí pro každý omezený lineární operátor. V případě $\|K(\lambda)\| < 1$ nemůže číslo -1 ležet v bodovém spektru $K(\lambda)$ a z Birmanova–Schwingerova principu tedy nemůže λ ležet v bodovém spektru $(L+V)$. Obměněná implikace dává vtah

$$\lambda \in \sigma_p(L+V) \Longrightarrow \|K(\lambda)\| \geq 1, \tag{1.14}$$

který je nutnou podmínkou pro příslušnost čísla λ k bodovému spektru operátoru $(L+V)$.

Kapitola 2

Spektrální obálky operátoru H_V

V této kapitole budou odvozeny optimální spektrální obálky pro diskrétní Schrödingerův operátor s komplexním potenciálem. Tento operátor označíme $H_V := (2I - T) + V := H + V$, kde $He_n = e_{n+1} + e_{n-1}$ a pro operátor V platí $Ve_n = v_n e_n$, kde $v = \{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je z prostoru $\ell^1(\mathbb{Z})$. Na hlavní diagonále matice operátoru H_V se tedy nachází posloupnost v. Přičtení operátoru $2I$ bylo provedeno kvůli symetrii kolem počátku. Hlavní kroky výpočtu budou obdobné jako v článku [1].

$$H_V = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & 1 & v_{-1} & 1 & & & \\ & & 1 & \boxed{v_0} & 1 & & \\ & & & 1 & v_1 & 1 & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & & \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

2.1 Spektrální nalýza H

Pro aplikaci Birmanova–Schwingerova principu je nejprve nutné nalézt spektrum a rezolventu neporušeného operátoru H. Je zřejmé že se jedná o Laurentův operátor, proto po provedení transformace UHU^{-1}, s U jako diskrétní Fourierovou transformací, získáme operátor násobení funkcí na $L^2([0, 2\pi], dt)$, tedy pro každou bazickou funkci $f_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$ platí

$$UHU^{-1} f_n = UHe_n = U(e_{n-1} - e_{n+1}) = f_{n-1} + f_{n+1}$$

a tedy pro každé t z intervalu $[0, 2\pi]$

$$UHU^{-1} f_n(t) = f_{n-1}(t) + f_{n+1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{\mathrm{i}(n-1)t} + e^{\mathrm{i}(n+1)t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{-\mathrm{i}t} + e^{it})e^{\mathrm{i}nt} = 2\cos(t) f_n(t).$$

Z toho pro každé $f \in L^2([0, 2\pi], dt)$ plyne

$$UHU^{-1} f(t) = UHU^{-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f_n, f\rangle_{L^2} f_n(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f_n, f\rangle_{L^2} \underbrace{UHU^{-1} f_n(t)}_{2\cos(t) f_n(t)} = 2\cos(t) f(t),$$

odtud lze učinit závěr

$$UHU^{-1} = M_{2\cos(\cdot)}.$$

Funkce $2\cos(t)$ je tedy symbolem operátoru H.

Nyní je možno se znalostí vět o spektru Laurentových operátorů snadno určit spektrální vlastnosti. Symbol operátoru H, funkce $2\cos(t)$ je reálná, to implikuje samosdruženost H a tedy platí

$$\sigma_r(H) = 0,$$

přičemž je zcela zřejmé, že funkce $2cos(t)$ není konstantní nikde na tomto intervalu, proto

$$\sigma_p(H) = 0,$$

obor hodnot je interval $[-2, 2]$, tento se dle Věty 1.8.3 shoduje se spektrem a z prázdnosti ostatních částí spektra plyne

$$\sigma(H) = [-2, 2] = \sigma_c(H).$$

Známe-li spektrum, můžeme pro každé komplexní číslo λ mimo interval $[-2, 2]$, nalézt rezolventu operátoru H v bodě λ. K tomu s výhodou využijeme takzvanou Žukovského transformaci. Jde o transformaci z množiny $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ do množiny $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ danou vztahem

$$\lambda(k) = k + \frac{1}{k},$$

která je bijekce mezi těmito dvěma množinami[zdroj]. Je tedy možno každé číslo λ mimo spektrum operátoru H nahradit výrazem $k + k^{-1}$ jednoznačně, přičemž $|k| < 1$, což je v hodné pro budoucí odhady.

Pro každé $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ platí, že symbol operátoru $H - \lambda I$ je funkce $\phi(t) = 2\cos(t) - \lambda$, která je skutečně nenulová na celém $[0, 2\pi]$, to´ je zajištěno tím, že λ neleží ve spektru, a tedy lze najít převrácenou funkci, která je dle Věty 1.8.2 symbolem rezolventy H v bodě λ, má tvar $\psi(t) = \frac{1}{\phi(t)} = \frac{1}{2cos(t)-\lambda}$. Nyní lze dle výsledku (1.13) snadno určit prvky matice operátoru $(H - \lambda I)^{-1}$, předpokládáme-li, že $m \leq n$, pak platí

$$(H-\lambda I)^{-1}_{m,n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(n-m)t}\frac{1}{2cos(t)-\lambda}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{\mathrm{i}(n-m)t}}{e^{it}+e^{-\mathrm{i}t}-\lambda}dt = \begin{bmatrix} z^n = e^{int} \\ dt = \frac{dz}{\mathrm{i}z}\end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathbb{T}}\frac{z^{n-m-1}}{z+z^{-1}-\lambda}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathbb{T}}\frac{z^{n-m}}{z^2-\lambda z+1}dz = \left[\lambda = k+k^{-1}\right] = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathbb{T}}\frac{z^{n-m}}{z^2-(k+k^{-1})z+1}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathbb{T}}\frac{z^{n-m}}{(z-k)(z-k^{-1})}dz = \\
&= \mathrm{Res}(\frac{z^{n-m}}{(z-k)(z-k^{-1})}, z=k) = \lim_{z\to k}\frac{z^{n-m}}{z-k^{-1}} = \frac{k^{n-m}}{k-k^{-1}},
\end{aligned}$$

kde využíváme tvrzení Reziduové věty. Ze symetrie snadno získáme vztah pro každou dvojici celých čísel m a n

$$(H-\lambda I)^{-1}_{m,n} = \frac{k^{|n-m|}}{k-k^{-1}}. \tag{2.2}$$

Podle očekávání vidíme, že hodnota prvku na pozici m, n skutečně závisí pouze na rozdílu $m - n$ a tedy se jedná o Laurentův operátor.

2.2 Nalezení spektrálních obálek

V této sekci nalezneme množiny, mimo které již spektrum operátoru H_V určitě neleží, využijeme toho, že určitá část spektra se zachovává a také, že pomocí B–S principu umíme odhadovat oblasti výskytu vlastních hodnot.

Nejprve je nutné ověřit, že diagonální operátor V, $Ve_n = v_n e_n$ je kompaktní. To lze udělat několika způsoby, je možné snadno nahlédnout, že jde o Hilbertův–Schmidtův operátor a tedy je skutečně kompaktní. O operátoru V lze však ukázat ještě více, patří dokonce do třídy takzvaných jaderných ("trace class") operátorů $\mathscr{J}_1(\ell^2(\mathbb{Z}))$ [3], která je podmnožinou $\mathscr{J}_2(\ell^2(\mathbb{Z}))$. Nyní ale ukážeme kompaktnost V pomocí jiného tvrzení7.

Lemma 2.2.1. *Nechť V je lineární operátor na $\ell^2(\mathbb{Z})$, takový, že jeho matice je $\forall m,n \in \mathbb{Z}$: $V_{m,n} = v_n \delta_{m,n}$. Pak $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ & $\lim_{n\to-\infty} v_n = 0$ právě tehdy, když V je kompaktní operátor.*

Důkaz. Nejprve zjednodušme problém tak, že uvažujeme pouze kladné indexy n. Pro záporné by byla situace naprosto analogická.
1. Buď $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taková, že $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. Dále označme P_n projektor na $span\{e_1, ..., e_n\}$ což je konečnědimenzionální a tedy uzavřený podprostor $\ell^2(\mathbb{N})$ a označme $V_n := VP_n$ s maticí

$$\begin{pmatrix} v_1 & 0 & & & \\ 0 & v_2 & 0 & & \\ & 0 & v_3 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Platí odhad

$$\|V - V_n\| \leq \sup_{k>n} |v_k| \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

a tedy posloupnost V_n konverguje k V v operátorové normě. Podle tvrzení Věty 1.4.5 je V kompaktní operátor, neboť ideál $\mathscr{K}(\ell^2(\mathbb{N}))$ je uzavřený podprostor $\ell^2(\mathbb{N})$ vzhledem k operátorové normě.

2. Naopak, je li V kompaktní diagonální operátor dle dle předpokladu, pak je jeho spektrum $\sigma(V) = \overline{\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$. To ozřejmíme. Platí $\overline{\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}} = \{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup (\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}})'$. Je jasné, že $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \sigma_{\mathrm{p}}(V)$ a z uzavřenosti spektra pak plyne

$$\overline{\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}} \subset \sigma(V).$$

Potřebujeme i opačnou inkluzi. Ukážeme ekvivalentní výrok

$$\lambda \notin \overline{\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}} \Longrightarrow \lambda \in \rho(A).$$

Platí

$$\lambda \notin \overline{\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}} \Longrightarrow (\exists\delta > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(|v_n - \lambda| \geq \delta).$$

Dále snadno ověříme

$$(V - \lambda I) = \mathrm{diag}\{v_1 - \lambda, v_2 - \lambda,\ ...\} \ \&\ (V - \lambda I)^{-1} = \mathrm{diag}\{\frac{1}{v_1 - \lambda}, \frac{1}{v_2 - \lambda},\ ...\},$$

ztotožníme-li operátor s nekonečnou maticí. Pro normu platí

$$\left\|(V-\lambda I)^{-1}\right\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{v_1-\lambda}\right| \leq 1/\delta.$$

Pro každé $\lambda \notin \overline{\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$ existuje omezená inverze a proto $\lambda \in \rho(V)$.

Dle tvrzení Věty 1.4.5 je jediným možným hromadným bodem spektra 0. Množina hromadných bodů $\sigma(V) = \overline{\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$ je určitě neprázdná, neboť konvergentní posloupnost $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je omezená a dle tvrzení dobře známé Bolzano–Weierstrassovy věty má konvergentní podposloupnost a množina $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ má tedy hromadný bod. Tento však nutně musí být nulový dle předchozích poznatků, proto i limita celé posloupnosti je nulová. To dokazuje tvrzení. □

Operátor V lze zapsat jako složení $V = V_{1/2}|V|^{1/2}$, kde $|V|^{1/2} = |v_n|^{1/2}e_n$ a $|V|_{1/2} = sgn(v_n)|v_n|^{1/2}e_n$. Komplexní funkce signum je definována

$$sgn(z) := \begin{cases} \frac{z}{|z|} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}.$$

Birmannův–Schwingerův operátor definujeme

$$V_{1/2}(H-\lambda)^{-1}|V|^{1/2}$$

a jeho matici lze po prvcích zapsat

$$K(\lambda)_{n,m} = |v_n|^{1/2}(H-\lambda I)^{-1}_{n,m}|v_m|^{1/2}sgn(v_m),$$

přičemž po využití Žukovského transformace a vztahu (2.2) lze prvek rezolventní matice na pozici n, m zapsat

$$(H-\lambda)^{-1}_{n,m} = \frac{k^{|n-m|}}{k-k^{-1}}$$

a z definice Žukovského transformace ihned plyne horní odhad

$$\left|\frac{k^{|n-m|}}{k-k^{-1}}\right| \leq \left|\frac{1}{k-k^{-1}}\right|, \tag{2.3}$$

protože číslo k je z jednotkového kruhu. To lze využít k odhadu normy $K(\lambda)$, za použití vztahu (2.3) a Cauchy(ovy)–Schwarzovy nerovnosti platí $\forall\psi \in \ell^2(\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned}
\|K(\lambda)\psi\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}|\sum_{m\in\mathbb{Z}}K(\lambda)_{n,m}\psi_m|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}}(\sum_{m\in\mathbb{Z}}|v_n|^{1/2}|(H-\lambda)^{-1}_{n,m}||v_m|^{1/2}|\psi_m|)^2 \leq \\
&\leq \frac{1}{|k-k^{-1}|^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|v_n|(\sum_{m\in\mathbb{Z}}|v_m|^{1/2}|\psi_m|)^2 \overset{C-S}{\leq} \frac{1}{|k-k^{-1}|^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|v_n|\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\psi_m|^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}|v_k| = \\
&= \frac{\|v\|^2_{\ell^1(\mathbb{Z})}\,\|\psi\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})}}{|(k-k^{-1})^2|}.
\end{aligned}$$

Tím získáváme horní odhad pro normu $K(\lambda)$

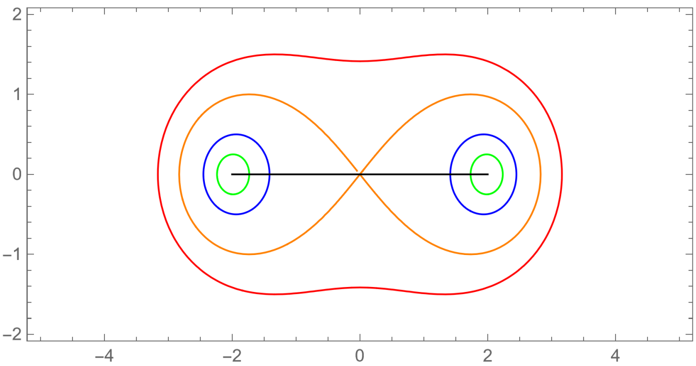
$$\|K(\lambda)\| \leq \frac{\|v\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}}{\sqrt{|\lambda^2-4|}}, \tag{2.4}$$

přičemž využíváme $(k-k^{-1})^2 = \lambda^2 - 4$. Z tohoto odhadu a ze vztahu (1.14) plyne, že vlastní hodnota λ se nemůže nacházet nikde mimo oblast vymezenou vtahem

$$|\lambda^2 - 4| \leq \|v\|^2_{\ell^1(\mathbb{Z})}\,. \tag{2.5}$$

Nebudeme se však soustředit na lokalizaci jednotlivých částí spektra jako v článku [1], neboť to vyžaduje ověření dalších skutečností, které nejsou účelem této kapitoly, jež má posloužit především jako motivace k postupu nalezení obdobných obálek pro operátor T^2. Je jasné, že platí $\sigma(H) = \sigma_{ess}(H)$. Diskrétní spektrum obsahuje pouze vlastní hodnoty s konečnou algebraickou násobností, operátor H však nemá vůbec žádné vlastní hodnoty, proto je $\sigma_{disc}(H) = \emptyset$. Porucha V je kompaktním operátorem a proto můžeme dle Věty 1.5.1 říci, že $\sigma_{ess}(H+V) = \sigma(H) = [-2,2]$. K tomu je zapotřebí ověřit předpoklady. Nejprve, že vnitřek spektra operátoru H v topologii $\mathbb{C}$ je prázdný, to je zřejmé, neboť se jedná o interval $[-2,2]$. Pro ověření druhého je zapotřebí uvědomit si, že operátor $H+V$ je omezený, to plyne okamžitě z trojúhelníkové nerovnosti, spektrum je tedy obsaženo v nějaké kouli a jeho doplněk, tedy rezolventní množina $\rho(H+V)$, je neomezený. Souvislá komponenta rezolventní množiny $\rho(H) = \mathbb{C} \setminus [-2;2]$ má pak zcela určitě s $\rho(H+V)$ neprázdný průnik. Vlivem poruchy se tedy mohou mimo interval $[-2,2]$ objevit pouze izolované vlastní hodnoty s konečnou násobností. V kombinaci s tvrzením (2.5) získáváme tvrzení

$$\sigma(H+V) \subset \left\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus [-2,2] \ : \ |\lambda^2 - 4| \leq \|v\|^2_{\ell^1(\mathbb{Z})}\right\} \cup [-2,2]. \tag{2.6}$$



Obrázek 2.1: Spektrální obálky v komplexní rovině pro $\|v\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \in \{1,2,4,6\}$

2.3 Optimalita

Je přirozené ptát se, zda je takto provedená lokalizace spektra přesná. Ukážeme, že přesnější už být nemůže, neboť se jedná o optimální obálku spektra. Provedeme to tak, že nalezneme operátory V takové, že jejich vlastní hodnoty, které umíme přesně vypočítat, se nacházejí právě na hranici křivky danou rovností $|\lambda^2 - 4| = \|v\|^2_{\ell^1(\mathbb{Z})}$. Ukáže se, že tyto vlastní hodnoty tvoří téměř celou hranici oblasti (2.5) a proto při dané pevné normě $\|v\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}$ již pro obecnou poruchu V nelze tuto oblast zmenšit.

Zvolme nyní $\|v\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}$ libovolně, pevně a uvažujme operátor $\omega\delta$ daný maticí

$$\omega\delta = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & & & \\ & & 0 & \boxed{\omega} & 0 & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

kde ω je komplexní číslo ve tvaru $\omega = \|v\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} e^{it}$ pro $t \in [0, 2\pi)$. Je zřejmé, že operátor $\omega\delta$ je kompaktní a splňuje požadavky kladené na poruchu V v předchozí části. Výhodou je, že snadno nalezneme spektrum operátoru $H + \omega\delta$. Zvážíme-li maticový zápis Birmanova–Schwingerova operátoru pro obecný operátor V, $K(\lambda)_{n,m} = |v_n|^{1/2}(H - \lambda I)^{-1}_{n,m}|v_m|^{1/2}sgn(v_m)$, zjistíme, že se pro $V = \omega\delta$ zjednoduší na

$$K(\lambda)_{n,m} = \begin{cases} \frac{\omega}{k-k^{-1}} & m = n = 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}. \tag{2.7}$$

Birmanův–Schwingerův princip pak přímo implikuje, že číslo $k + k^{-1}$ je vlastní hodnota $H + \omega\delta$ právě tehdy, když k splňuje rovnici

$$\frac{\omega}{k - k^{-1}} = -1. \tag{2.8}$$

Povšimněme si, že každé řešení této rovnice splňuje i rovnici $\left|\frac{\omega}{k-k^{-1}}\right| = 1$, což je vtah, který určuje hranici oblasti (2.5).

Nyní uvažujme libovolný bod z ležící na hranici oblasti (2.5) zároveň předpokládejme, že není z intervalu $[-2, 2]$. Tato skutečnost je vyjádřena rovnicí

$$|z^2 - 4| = \|v\|^2_{\ell^1(\mathbb{Z})},$$

díky vlastnostem Žukovského transformace víme, že pro libovolné $z \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ existuje k takové, že $0 < |k| < 1$ a $z = k + k^{-1}$, dosazením do rovnice získáme

$$|k - k^{-1}|^2 = \|v\|^2_{\ell^1(\mathbb{Z})}.$$

Nyní zkoumejme vlastnosti transformace $w = w(k) = k^{-1} - k$, pro $0 < |k| < 1$, uvažujeme, li $k = ae^{i\theta}$ pro $0 < a < 1$ a $\theta \in [0, 2\pi]$, pak dosazením do vztahu pro $w = w(k)$, získáme

$$w = w(ae^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{1}{a}e^{-\mathrm{i}\theta} - ae^{\mathrm{i}\theta} = (\frac{1}{a} - a)\cos(\theta) - \mathrm{i}(a + \frac{1}{a})\sin(\theta). \tag{2.9}$$

Oborem hodnot této funkce je $\mathbb{C} \setminus [-2i, 2i]$, přičemž i tento interval je možno pokrýt při mírné úpravě transformace, uvažujeme li k na hranic jednotkového kruhu, tedy $k = e^{i\theta}$, získáme

$$e^{-\mathrm{i}\theta} - e^{i\theta} = -2\mathrm{i}\sin(\theta),$$

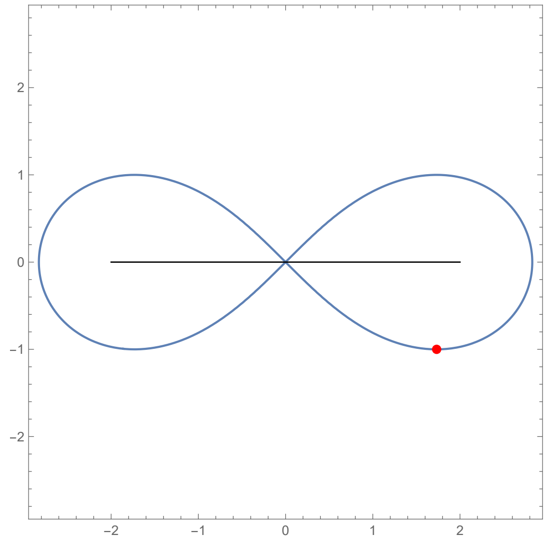
pro jednoznačnost je však nutno volit například $\theta \in [-\pi/2; \pi/2]$. Zvolíme-li nyní pro nalezené k z jednotkového kruhu $\omega := k^{-1} - k$, pak dle předchozího platí

$$|\omega| = |k^{-1} - k| = \|v\|_{\ell^1(\mathbb{Z})},$$

je možné toto číslo zapsat jako $\|v\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} e^{\mathrm{i}t}$, jak již bylo zmíněno, a zároveň splňuje rovnici (2.8). Snadno ověříme, že

$$-1 = \frac{k^{-1} - k}{k - k^{-1}}.$$

Birmannův–Schwingerův princip v tomto případě říká, že číslo $k + k^{-1} = z$ je vlastní hodnotou operátoru $H + \omega\delta$.



Obrázek 2.2: Vlastní hodnota na spektrální obálce pro $\|v\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} = 2$ a $\omega = 2e^{\mathrm{i}\frac{3}{2}\pi}$ v komplexní rovině

Shrňme tedy, čeho jsme dosáhli, pro libovolný bod z na hranici spektrální obálky s vyjímkou intervalu $[-2, 2]$ nalezneme operátor $H_V = H + \omega\delta$ takový, že z je jeho vlastní hodnotou. Problémový interval vstupuje do hry pouze pro normy $\|v\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \in (0, 2]$ a to nejvýše ve dvou bodech komplexní roviny, jak je možno nahlédnout z Obrázku 2.1, přičemž každý z těchto bodů je prvkem esenciálního spektra. Nalezenou obálku již není možno žádným způsobem zmenšit, můžeme tedy tvrdit, že jde o obálku v jistém smyslu optimální. Poznamenejme, že se jedná o poměrně silný požadavek na optimalitu, některým autorům postačuje například najít bod spektra pouze někde na hranici oblasti, či dokonce pouze libovolně blízko hranice.

Kapitola 3

Spektrální obálky pro operátor $T^2 + V$

V této kapitole se budeme věnovat operátoru T^2, provedeme spektrální analýzu a pro potenciál V lokalizaci spektra operátoru $T^2 + V$. Budeme postupovat v souladu s předchozí kapitolou, některé kroky se však značně komplikují. Bude potřeba nahradit Žukovského transformaci a ani odhady pro Birmannův–Schwingerův operátor nejsou již tak přímočaré. Na závěr se pokusíme diskutovat optimalitu nalezených obálek.

Nejprve je nutné operátor T^2 definovat, k tomu využijeme již zmiňovaný diskrétní Laplaceův operátor T. Ten si vyjádřím, narozdíl od původní definice pomocí obrazu libovolného prvku $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$, v řeči posloupností standardní báze. Je zřejmé, že platí

$$Te_n = -e_{n+1} + 2e_n - e_{n-1}, \tag{3.1}$$

z toho okamžitě získáváme předpis pro T^2

$$\begin{aligned} T^2 e_n &= T(Te_n) = T(-e_{n+1} + 2e_n - e_{n-1}) = \\ &= -(-e_{n+2} + 2e_{n+1} - e_n) + 2(-e_{n+1} + 2e_n - e_{n-1}) - (-e_n + 2e_{n-1} - e_{n-2}) = \\ &= e_{n-2} - 4e_{n-1} + 6e_n - 4e_{n+1} + e_{n-2}. \end{aligned}$$

Operátor T^2 nazýváme **diskrétní bilaplaceův operátor**. Z předpisu ihned vidíme tvar jeho matice

$$T^2 = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\ & & 1 & -4 & \boxed{6} & -4 & 1 & & \\ & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Z tvaru matice je zřejmé, že jde o Laurentův operátor. Další vlastnosti jsou opět zcela triviální, platí

$$T^2 \in \mathscr{B}(\ell^2(\mathbb{Z})) \iff \|T^2\| \leq \|T\|^2 < +\infty.$$

Samosdruženost T^2 plyne rovněž ihned z definice a samosdruženosti Laplaceova operátoru

$$(T^2)^* = T^*T^* = TT = T^2.$$

3.1 Spektrální analýza T^2

Nejprve pečlivě prozkoumáme spektrální vlastnosti bilaplaceova operátoru. Využijeme opět jeho příslušnosti k Laurentovým operátorům a provedeme transformaci $M_\phi = UT^2U^{-1}$. Pro libovolnou funkci $f \in L^2([0, 2\pi], dt)$ získáme v souladu s obdobným výpočtem v předchozí kapitole

$$M_\phi f(t) = UT^2U^{-1}f(t) = UT^2U^{-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f_n, f\rangle_{L^2} f_n(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f_n, f\rangle_{L^2} \underbrace{UT^2U^{-1}f_n(t)}_{(2\cos(2t)-8\cos(t)+6)f_n(t)} =$$
$$= (2\cos(2t) - 8\cos(t) + 6)f(t).$$

Pro bazické funkce prostoru $L^2([0, 2\pi], dt)$ $f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}$ totiž platí

$$\begin{aligned} UT^2U^{-1}f_n(t) &= f_{n+2} - 4f_{n+1}(t) + 6 - 4f_{n-1}(t) + f_{n+2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{\mathrm{i}(n+2)t} - 4e^{\mathrm{i}(n+1)t} + 6 - 4e^{\mathrm{i}(n-1)t} + e^{\mathrm{i}(n-2)t}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}nt}(e^{\mathrm{i}2t} + e^{-\mathrm{i}2t} - 4(e^{\mathrm{i}t} - e^{-\mathrm{i}t}) + 6) = (2\cos(2t) - 8\cos(t) + 6)f_n(t). \end{aligned}$$

Proto

$$\phi(t) = 2\cos(2t) - 8\cos(t) + 6$$

je symbolem operátoru T^2.

Oborem hodnot Ranϕ je interval $[0, 16]$, tedy

$$\sigma(T^2) = [0, 16],$$

ze samosdruženosti plyne

$$\sigma_{\mathrm{r}}(T^2) = \emptyset,$$

Navíc derivace funkce ϕ není nulová nikde na množině nenulové míry, proto ϕ není nikde v $(0, 16)$ lokálně konstantní a tedy

$$\sigma_{\mathrm{p}}(T^2) = \emptyset,$$

proto nutně platí

$$\sigma_{\mathrm{c}}(T^2) = \sigma(T^2) = [0, 16].$$

Ještě přesnější představu o vlastnostech funkce poskytne Obrázek 3.1.

Než přistoupíme k výpočtu rezolventy, je nejprve nutné ověřit vlastnosti transformace, které při něm využijeme.

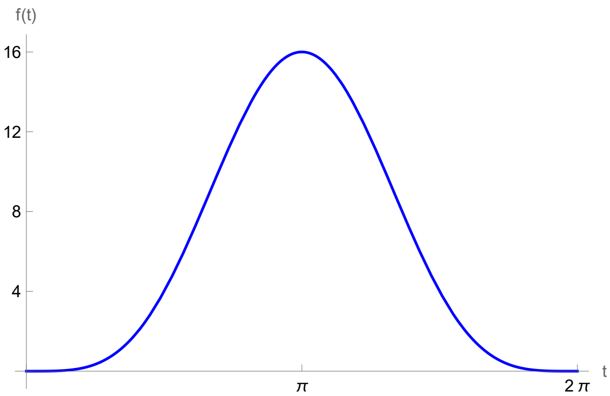
3.1.1 Transformace ζ

Jak se v zápětí přesvědčíme, při výpočtu rezolventy se nabízí využít transformaci

$$\zeta : \underbrace{\{k \in \mathbb{C} :\ \Im(k) > 0 \ \&\ |k| < 1\} \cup (-1, 0)}_{=:\mathbb{D}_+} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus [0, 16], \tag{3.2}$$

danou předpisem

$$\zeta(k) = k^2 - 4k + 6 - 4k^{-1} + k^2 = (k^{1/2} - k^{-1/2})^4. \tag{3.3}$$



Obrázek 3.1: Graf funkce $\phi(t)$

Potřebujeme ověřit, že daná transformace je na $\mathbb{C} \setminus [0, 16]$.

Zkoumejme obor hodnot funkce ζ za využití zápisu 3.3. Nejprve zvolme $k \in \mathbb{D}_+$ a transformaci

$$\zeta_1 : k \longmapsto k^{1/2}.$$

Je zřejmé, že

$$\zeta_1(\mathbb{D}_+) = \{w \in \mathbb{C} : \ \Re(w) \geq 0, \Im(w) > 0, |w| < 1\},$$

navíc je možno každé w získat jednoznačně jako $\sqrt{z}$, pro $z \in \mathbb{D}_+$. Nyní pokračujme transformací

$$\zeta_2 : \ w \longmapsto w - w^{-1}.$$

Platí

$$\zeta_2(\zeta_1(\mathbb{D}_+)) = \{u \in \mathbb{C} : \ \Re(u) \leq 0, \Im(u) > 0, \} \setminus (0, 2\mathrm{i}],$$

to není příliš zřejmé, proto berme $w \in \zeta_1(\mathbb{D}_+)$ a zapišme ho ve tvaru

$$u = re^{\mathrm{i}\theta}, \text{ kde } r \in (0, 1), \theta \in (0, \pi/2],$$

zobrazíme ho ζ_2

$$\zeta_2(re^{\mathrm{i}\theta}) = re^{\mathrm{i}\theta} - \frac{1}{r}e^{-\mathrm{i}\theta} = (r - \frac{1}{r})\cos(\theta) + \mathrm{i}(r + \frac{1}{r})\sin(\theta).$$

Pro zadané hodnoty r, θ je oborem hodnot této funkce právě množina $\{w \in \mathbb{C} : \ \Re(w) \leq 0, \Im(w) > 0, \} \setminus (0, 2\mathrm{i}]$, což jsme chtěli ukázat. Přejdeme-li k jednoznačnosti, je dobré ztotožnit $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ pak

$$\zeta_2(w) = \begin{pmatrix} (r - \frac{1}{r})\cos(\theta) \\ (r + \frac{1}{r})\sin(\theta) \end{pmatrix},$$

pro pevné r a $\theta \in (0, 2\pi]$ se jedná o elipsu v rovině, uvažujeme-li rozsah parametrů jako v transformaci, pak se jedná o její část ležící ve druhém kvadrantu, přitom pro různá r se tyto části neprotínají a každý bod roviny je tak určen jednoznačně. Konečně transformace

$$\zeta_3 : \ u \longmapsto u^4$$

zobrazuje

$$\zeta_3(\zeta_2(\zeta_1(\mathbb{D}_+))) = \mathbb{C} \setminus [0, 16]$$

a to opět jednoznačně, neboť pro každé $v \in \mathbb{C} \setminus [0, 16]$ existuje právě jedno $u \in \zeta_2(\zeta_1(\mathbb{D}_+))$ takové, že $v = u^4$. Nyní si stačí uvědomit, že $\zeta_3 \circ \zeta_2 \circ \zeta_1 = \zeta$, a tedy jde o bijekci mezi definovanými množinami.

3.1.2 Rezolventa

Zvolme $\lambda \in \rho(T^2) = \mathbb{C} \setminus [0, 16]$, symbolem operátoru $(T^2 - \lambda I)^{-1}$ je podle 1.8.2 funkce $\frac{1}{\phi - \lambda}$, dle vztahu (1.13) můžeme vypočítat rezolventu, pro $n \geq m$ je

$$\begin{aligned}
(T^2 - \lambda I)^{-1}_{m,n} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(n-m)t} \frac{1}{(2\cos(2t) - 8\cos(t) + 6) - \lambda} dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{\mathrm{i}(n-m)t}}{(e^{\mathrm{i}(n+2)t} - 4e^{\mathrm{i}(n+1)t} + 6 - 4e^{\mathrm{i}(n-1)t} + e^{\mathrm{i}(n-2)t}) - \lambda} dt = \begin{bmatrix} z = e^{\mathrm{i}t} \\ dt = \frac{dz}{\mathrm{i}z} \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\mathbb{T}} \frac{z^{n-m-1}}{(z^2 - 4z + 6 - 4z^{-1} + z^{-2}) - \lambda} dz.
\end{aligned}$$

Nyní využijeme transformaci ζ jejíž dokázané vlastnosti nám dovolují použít ji v tomto případě, aniž bychom zanedbali nějakou část rezolventní množiny a transformujeme $\lambda = k^2 - 4k + 6 - 4k^{-1} + k^2$. Rozšíříme-li integrand výrazem $\frac{z^2k^2}{z^2k^2}$ získáme

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\mathbb{T}} \frac{z^{n-m+1}k^2}{k^2(z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 1) - z^2(k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 4k + 1)} dz.$$

Zkoumejme nyní jmenovatel integrandu s cílem rozložit ho na součin polynomů nižšího stupně v proměnné z . Není těžké ověřit, že k, k^{-1} jsou kořeny polynomu, algebraickými úpravami pak získáme

$$k^2(z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 1) - z^2(k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 4k + 1) = (z-k)(z-k^{-1})k(z^2k + z(k^2 - 4k + 1) + k).$$

Polynom

$$z^2k + z(k^2 - 4k + 1) + k = k(k - z_1)(k - z_2), \tag{3.4}$$

kde

$$z_{1,2} = \frac{-k^2 + 4k - 1 \pm \sqrt{(k^2 - 4k + 1)^2 - 4k^2}}{2k}. \tag{3.5}$$

Dále volíme označení z_+ pro kořen mimo jednotkový kruh a z_- pro kořen v jednotkovém kruhu, takový vždy existuje plyne ze vztahu $z_1 = \frac{1}{z_2}$, to lze snadno nahlédnout z rozkladu (3.4). Je však potřeba ověřit, že se žádný kořen při zvoleném rozsahu parametru $k \in \mathbb{D}_+$ nenachází přímo na jednotkové kružnici. Kdyby některý z kořenů ležel na jednotkové kružnici, pak tam dle předchozího musí ležet i druhý. Předpokládáme-li, že kořeny leží na jednotkovém kruhu, platí vztah

$$\begin{aligned}
-k(z_+ + z_-) &= k^2 - 4k + 1 \quad \& \quad \left[z_+ := e^{\mathrm{i}t},\ z_- := e^{-\mathrm{i}t}\right], \\
-2k\cos(t) &= k^2 - 4k + 1, \\
0 &= k^2 - 2k(2 - \cos(t)) + 1.
\end{aligned}$$

Tato rovnice má řešení

$$k_\pm = 2 - \cos(t) \pm \sqrt{(2 - \cos(t))^2 - 1}.$$

Aby toto řešení mohlo ležet v $\mathbb{D}_+$, musí být $|k| < 1$, a proto volíme $k := k_-$. Při rozsahu $t \in (-\pi, \pi)$ je pak $k \in (0, 1]$. Interval $(0, 1]$ neleží v $\mathbb{D}_+$, a proto ani jeden z kořenů $z_\pm$ nemůže být na jednotkovém kruhu.

Nevíme, zda je některý z kořenů uvnitř jednotkového kruhu pro všechna $k \in \mathbb{D}_+$, hypotézou je, že jde o kořen z_2, uvažujeme-li standardní větev odmocniny, ale exaktní důkaz zatím nemám. Pro další účely však tato znalost není nutná a vystačíme se vztahem $z_1 = \frac{1}{z_2}$ a nadále budeme využívat značení $z_\pm$ v již zmiňovaném smyslu.

Polynom v integrandu lze tedy rozložit $k^2(z-k)(z-k^{-1})(z-z_-)(z-z_+)$. Integrál pak přechází do podoby

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\mathbb{T}} \frac{z^{n-m+1}}{(z-k)(z-k^{-1})(z-z_-)(z-z_+)} dz$$

z výše popsaných vlastností je zřejmé, že uvnitř jednotkového kruhu leží kořeny k a z_-, při označení integrandu jako $f(z)$ dává Reziduová věta výsledek

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\mathbb{T}} \frac{z^{n-m+1}}{(z-k)(z-k^{-1})(z-z_-)(z-z_+)} dz = \operatorname{Res}(f(z),k) + \operatorname{Res}(f(z),z_-) = \\
&= \lim_{z\to k} \frac{z^{n-m+1}}{(z-k^{-1})(z-z_-)(z-z_+)} + \lim_{z\to z_-} \frac{z^{n-m+1}}{(z-k)(z-k^{-1})(z-z_+)} = \\
&= \frac{k^{n-m+1}}{(k-k^{-1})(k-z_-)(k-z_+)} + \frac{z_-^{n-m+1}}{(z_- - k)\underbrace{(z_- - k^{-1})}_{=-z_-k^{-1}(z_+-k)}(z_- - z_+)} = \\
&= \frac{k}{(k-z_-)(k-z_-^{-1})}\left[\frac{k^{n-m}}{k-k^{-1}} - \frac{z_-^{n-m}}{z_- - z_-^{-1}}\right].
\end{aligned}$$

Poslední úprava byla provedena pro znázornění podobnosti s rezolventou klasického Laplaceova operátoru 2.2. Pro každou dvojici celých čísel m, n získáme vztah

$$(T^2 - \lambda I)^{-1}_{m,n} = \frac{k}{(k-z_-)(k-z_-^{-1})}\left[\frac{k^{|n-m|}}{k-k^{-1}} - \frac{z_-^{|n-m|}}{z_- - z_-^{-1}}\right]. \tag{3.6}$$

3.2 Spektrální obálky

Nyní uvažujme diagonální operátor V, daný posloupností $v = \{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ jako $Ve_n = v_n e_n$ a pokusme se lokalizovat spektrum operátoru T^2+V opět za pomoci Birmanova–Schwingerova principu. Matice operátoru $T^2 + V$ snadno určíme

$$T^2 + V = \begin{pmatrix}
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
& 1 & -4 & 6+v_{-1} & -4 & 1 & & & \\
& & 1 & -4 & \boxed{6+v_0} & -4 & 1 & & \\
& & & 1 & -4 & 6+v_1 & -4 & 1 & \\
& & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots
\end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Operátor V rozložíme $V = |V|_{1/2}|V|^{1/2}$, kde $|V|^{1/2} = |v_n|^{1/2}e_n$ a $|V|_{1/2} = \operatorname{sgn}(v_n)|v_n|^{1/2}e_n$. Birmanův–Schwingerův operátor nyní definujeme

$$V_{1/2}(T^2 - \lambda I)^{-1}|V|^{1/2} \tag{3.8}$$

a jeho matice má tvar

$$K(\lambda)_{n,m} = |v_n|^{1/2}(T^2 - \lambda I)^{-1}_{n,m}|v_m|^{1/2}\mathrm{sgn}(v_m).$$

Je opět nutné odhadnout výraz $|(T^2 - \lambda I)^{-1}_{m,n}|$ shora nezávisle na m, n. Takový odhad prozatím označme $E(k) \in \mathbb{R}$. Platí tedy $\forall m, n \in \mathbb{Z}: \ |(T^2 - \lambda I)^{-1}_{m,n}| \leq E(k)$. Za využití Cauchy–Schwarzovy nerovnosti získáme $\forall \phi \in \ell^2(\mathbb{Z})$:

$$\|K(\lambda)\phi\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\sum_{m\in\mathbb{Z}} K(\lambda)_{n,m}\phi_m|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\sum_{m\in\mathbb{Z}} |v_n|^{1/2}|(T^2 - \lambda I)^{-1}_{n,m}||v_m|^{1/2}|\phi_m|)^2 \leq$$
$$E(k)^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_n|(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |v_m|^{1/2}|\phi_m|)^2 \overset{C-S}{\leq} E(k)^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_n| \sum_{m\in\mathbb{Z}} |\phi_m|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |v_k| =$$
$$= E(k)^2 \, \|v\|^2_{\ell^1(\mathbb{Z})} \, \|\phi\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})} \,,$$

tedy znovu obdobný výraz jako pro diskrétní Laplaceův operátor. Z nerovnosti získáváme odhad

$$\|K(\lambda)\| \leq E(k) \, \|v\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \,. \tag{3.9}$$

Z důsledku Birmanova–Schwingerova principu chceme pro lokalizaci spektra $\|K(\lambda)\| \geq 1$ a oblast výskytu vlastních hodnot je tedy dána vztahem

$$E(k)^{-1} \leq \|v\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \,. \tag{3.10}$$

Mimo tuto se již vlastní hodnota nemůže vyskytnout.

Ještě než přistoupíme ke konkrétním odhadům normy rezolventy, ukažme jednoduchý obecný. Pro Laurentův operátor A se symbolem ψ a komplexní číslo $\lambda \in \rho(A)$ dle (1.13) platí

$$\left|(T^2 - \lambda I)^{-1}_{m,n}\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i(n-m)t}}{\psi(t) - \lambda} dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{e^{i(n-m)t}}{\psi(t) - \lambda}\right| dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{|\psi(t) - \lambda|} dt. \tag{3.11}$$

Je tedy možno volit $E(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{1}{\phi(t) - \lambda}\right| dt$. Tuto možnost odhadu jsme nediskutovali v předchozí kapitole, kde jsme měli snadno k dispozici optimální odhad, v tomto případě však není postup tak jednoduchý.

3.2.1 Odhady absolutní hodnoty rezolventy

Přistupme nyní ke konkrétnímu vyjádření odhadu $E(k)$. Uvedeme dvě možnosti odhadu jednu snadno dokážeme, nepodaří se však dokázat optimalitu obálek, pravděpodobně proto, že nejsou optimální. Jako druhý odhad vyslovíme hypotézu o supremu výrazu $\left|(T^2 - \lambda I)^{-1}_{m,n}\right|$, ale je naopak snadné ukázat optimalitu takových obálek.

Použijeme-li trojúhelníkovou nerovnost získáme okamžitě $\left|(T^2 - \lambda I)^{-1}_{m,n}\right| =$

$$= \left|\frac{k}{(k - z_-)(k - z_-^{-1})} \left[\frac{k^{|n-m|}}{k - k^{-1}} - \frac{z_-^{|n-m|}}{z_- - z_-^{-1}}\right]\right| \leq \left|\frac{k}{(k - z_-)(k - z_-^{-1})}\right| \left[\frac{1}{|k - k^{-1}|} + \frac{1}{\left|z_- - z_-^{-1}\right|}\right], \tag{3.12}$$

kde využíváme $|k|<1$ & $|z_-|<1$. Odhady trojúhelníkovou nerovností nejsou často nejlepší možné, taktéž je tomu i v tomto případě. Kdybychom chtěli ukazovat optimalitu příslušných obálek, nepodaří se to. Proto se nyní budeme snažit najít přesnější odhad.

Zajisté platí

$$|(T^2-\lambda I)^{-1}_{m,n}| \leq \sup_{m,n\in\mathbb{Z}} |(T^2-\lambda I)^{-1}_{m,n}|, \tag{3.13}$$

přičemž supremum nezávisí na indexech m,n. Rozepišme tento výraz konkrétně

$$\sup_{m,n\in\mathbb{Z}} |(T^2-\lambda I)^{-1}_{m,n}| = \sup_{m,n\in\mathbb{Z}} \left| \frac{k}{(k-z_-)(k-z_-^{-1})} \left[\frac{k^{|n-m|}}{k-k^{-1}} - \frac{z_-^{|n-m|}}{z_- - z_-^{-1}} \right] \right| =$$
$$= \left| \frac{k}{(k-z_-)(k-z_-^{-1})(k-k^{-1})(z_- - z_-^{-1})} \right| \sup_{m,n\in\mathbb{Z}} \left| k^{|n-m|}(z_- - z_-^{-1}) - z_-^{|n-m|}(k-k^{-1}) \right|,$$

označíme-li $s := |n-m| \in \mathbb{N}_0$, pak lze problém přeformulovat v řeči jediného parametru

$$\sup_{s\in\mathbb{N}_0} \left| k^s(z_- - z_-^{-1}) - z_-^s(k-k^{-1}) \right|. \tag{3.14}$$

Tento problém jsem podrobil důkladné numerické analýze pomocí sítě bodů pokrývající rozsah k pro transformaci ζ, a přestože jsem si vědom, že taková numerická analýza nikdy nepřinese exaktní důkaz, domnívám se, že supremum je nabýváno pro $s=0$.

Hypotéza 1. *Nechť $k \in \mathbb{D}_+$ a z_- je kořenem polynomu $p(z) = z^2k + z(k^2-4k+1) + k$ uvnitř jednotkového kruhu, pak platí*

$$\sup_{s\in\mathbb{N}_0} \left| k^s(z_- - z_-^{-1}) - z_-^s(k-k^{-1}) \right| = \left| (z_- - z_-^{-1}) - (k-k^{-1}) \right|.$$

Pro toto tvrzení však zatím nemám důkaz.

Na závěr poznamenejme, že třetí možností, jak získat požadovaný odhad je výpočet integrálu (3.11). To vede na úlohu

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{|2\cos(2t)-8\cos(t)+6-\lambda|}dt,$$

tento integrál je opět poměrně složitý a vzhledem k tomu, že máme hypotézu na optimální odhad, nebudeme se zabývat složitým neoptimálním odhadem.

3.2.2 Nalezení křivek

Nyní přistoupíme k samotné lokalizaci spektra. Nejprve ověřme splnění předpokladů Věty 1.5.1 pro zachování esenciálního spektra. Vnitřek $\sigma(T^2)$ v topologii $\mathbb{C}$ je určitě prázdný, neboť spektrum T^2 je interval $[0,16]$. Díky omezenosti operátoru T^2 a kompaktnosti V víme, že spektrum operátoru T^2+V je podmnožinou nějaké omezené koule, a proto komponenta souvislosti operátoru množiny $\rho(T^2)$ má neprázdný průnik s neomezenou množinou $\rho(T^2+V)$. Pak platí

$$\sigma_{\text{ess}}(T^2+V) = \sigma_{\text{ess}}(T^2) = [0,16]. \tag{3.15}$$

Nyní tedy stačí lokalizovat pouze izolované vlastní hodnoty, neboť všechny ostatní body spektra se při poruše V zachovávají. K tomu využijeme vztah (3.10). Nejprve pro odhad trojúhelníkovou nerovností (3.12), získáme

$$\left[\left|\frac{k}{(k-z_-)(k-z_-^{-1})}\right|\left[\frac{1}{|k-k^{-1}|}+\frac{1}{|z_- - z_-^{-1}|}\right]\right]^{-1} \leq \|v\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}, \tag{3.16}$$

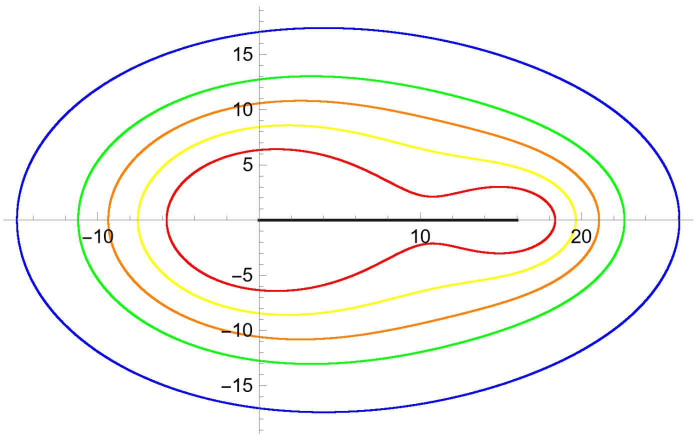
výraz upravíme

$$\left|(k-z_-)(k-z_-^{-1})(k-k^{-1})(z_- - z_-^{-1})\right| \leq |k|(\left|k-k^{-1}\right| + \left|z_- - z_-^{-1}\right|)\,\|v\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}. \tag{3.17}$$

Na základě (3.15) a (3.17) platí $\sigma(T^2+V) \subset$

$$\left\{\lambda := \zeta(k) \in \mathbb{C}\setminus[0,16] \;:\; \frac{\left|(k-z_-)(k-z_-^{-1})(k-k^{-1})(z_- - z_-^{-1})\right|}{|k|(\left|k-k^{-1}\right| + \left|z_- - z_-^{-1}\right|)} \leq \|v\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}\right\} \cup [0,16]. \tag{3.18}$$

Je zřejmé, že oblast určuje výhradně norma posloupnosti $v \in \ell^1(\mathbb{Z})$ na diagonále operátoru V. Pro vybrané volby normy jsou hranice oblastí vyobrazeny na Obrázku 3.2 .



Obrázek 3.2: Spektrální obálky v komplexní rovině při použití trojúhelníkové nerovnosti v komplexní rovině pro $\|v\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \in \{8, 10, 12, 14, 18\}$

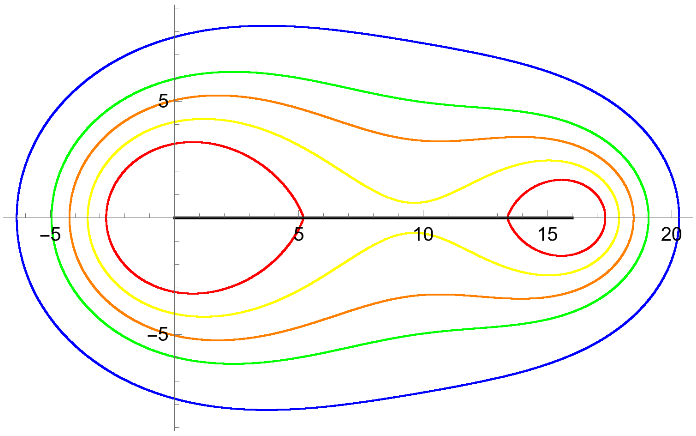
Nyní předpokládejme platnost Hypotézy 1. Stejným způsobem získáme pro odhad pomocí suprema (3.13) výraz

$$\left[\frac{|k|}{|(k-z_-)(k-z_-^{-1})|}\left|\frac{1}{k-k^{-1}} - \frac{1}{z_- - z_-^{-1}}\right|\right]^{-1} \leq \|v\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}$$

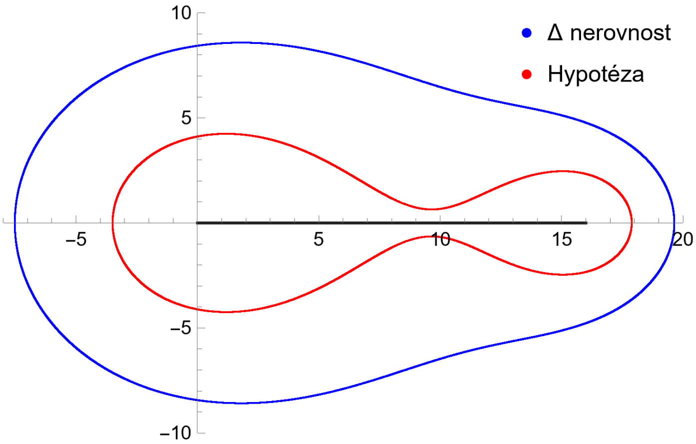
Po úpravě získáme $\sigma(T^2+V) \subset$

$$\left\{\lambda := \zeta(k) \in \mathbb{C}\setminus[0,16] \;:\; \left|\frac{(k-z_-)(k-z_-^{-1})(k-k^{-1})(z_- - z_-^{-1})}{k[(z_- - z_-^{-1}) - (k-k^{-1})]}\right| \leq \|v\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}\right\} \cup [0,16]. \tag{3.19}$$

Vybrané hraniční křivky jsou vykresleny na Obrázku 3.3 a porovnání obálek (3.18) a (3.19) na Obrázku 3.4. Jasně vidíme, že odhady pro druhou variantu jsou přesnější, platí-li Hypotéza 1.



Obrázek 3.3: Spektrální obálky v komplexní rovině při použití hypotézy pro $\|v\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \in \{8, 10, 12, 14, 18\}$



Obrázek 3.4: Porovnání obálek (3.18) a (3.19) při $\|v\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} = 10$

3.2.2.1 Vyjádření křivek v proměnné λ

V této části vyjádříme hraniční křivky množin (3.19) v proměnné λ. Rád bych uvedl, že celá tato sekce je založena na výpočtech Dr. Petra Blaschkeho, avšak případné nepřesnosti vznikly zajisté mojí špatnou interpretací. Křivky jsou sice plně charakterizovány uvedenými rovnicemi, ale nové vyjádření poskytuje lepší představu, neboť je ve formě, v níž se křivky v komplexní rovině obvykle vyjadřují. Předpokládejme nyní, že $z_- = z_2$ v (3.5).

Využijeme definice transformace $\lambda = \zeta(k)$ a získáme

$$\lambda = \zeta(k) = (k^{1/2} - k^{-1/2})^4 = (k + k^{-1} - 2)^2 \implies \pm\sqrt{\lambda} = (k + k^{-1} - 2).$$

Dále vyjádříme následující výrazy, které vystupují v rovnici křivky

$$
\begin{aligned}
z_- - z_+ &= -\sqrt{(k + k^{-1} - 4)^2 - 4} = -\sqrt{(k + k^{-1} - 6)(k + k^{-1} + 2)} = \\
&= -\sqrt{\pm\sqrt{\lambda}(\pm\sqrt{\lambda} - 4)}, \\
(k - z_+)(k - z_-) &= 2(k-1)^2 = 2k(k^{1/2} - k^{-1/2})^2 = \pm 2k\sqrt{\lambda}, \\
(k - k^{-1})^2 &= (k + k^{-1})^2 - 4 = \pm\sqrt{\lambda}(\pm\sqrt{\lambda} + 4) \implies (k - k^{-1}) = -\sqrt{\pm\sqrt{\lambda}(\pm\sqrt{\lambda} + 4)}.
\end{aligned}
$$

Dosadíme do rovnice

$$
\left| \frac{(k - z_-)(k - z_-^{-1})(k - k^{-1})(z_- - z_-^{-1})}{k[(z_- - z_-^{-1}) - (k - k^{-1})]} \right| = \|v\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}
$$

a získáme

$$
\left| \frac{2k\sqrt{\lambda}\sqrt{\pm\sqrt{\lambda}(\pm\sqrt{\lambda} + 4)}\sqrt{\pm\sqrt{\lambda}(\pm\sqrt{\lambda} - 4)}}{k(\sqrt{\pm\sqrt{\lambda}(\pm\sqrt{\lambda} - 4)} - \sqrt{\pm\sqrt{\lambda}(\pm\sqrt{\lambda} + 4)})} \right| = \|v\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} .
$$

Umocníme na druhou a algebraickými úpravami převedeme do tvaru

$$
\left| \frac{2\lambda(\lambda - 16)}{1 - \sqrt{1 - \frac{16}{\lambda}}} \right| = \|v\|^2_{\ell^1(\mathbb{Z})} . \tag{3.20}
$$

Platí tedy

$$
\sigma(T^2 + V) \subset \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, 16] \ : \ \left| \frac{2\lambda(\lambda - 16)}{1 - \sqrt{1 - \frac{16}{\lambda}}} \right| \leq \|v\|^2_{\ell^1(\mathbb{Z})} \right\} . \tag{3.21}
$$

Obdobně by bylo možné vyjádřit i hraniční křivky (3.18), ale tyto se nepodařilo upravit do tak příznivého tvaru.

3.3 Optimalita

Nyní se pokusme diskutovat optimalitu nalezených obálek. Předpokládejme platnost Hypotézy 1 a spektrální obálky (3.19). Zopakujeme postup z předchozí kapitoly, pro každý bod z na hranici obálky s vyjímkou intervalu $[0, 16]$ nalezneme číslo ω a operátor $T^2 + \omega\delta$ takový, že číslo z je jeho vlastní hodnotou. V tom případě můžeme obálku považovat za optimální. Pro obálky (3.18) není možné optimalitu dokázat.

Pro úspornější zápis označme

$$
f(k) := \frac{k}{(k - z_-)(k - z_-^{-1})} \left[\frac{1}{k - k^{-1}} - \frac{1}{z_- - z_-^{-1}} \right] = (T^2 - \lambda I)^{-1}_{0,0} . \tag{3.22}
$$

Dále uvažujme číslo z na hranici oblasti (3.19) a mimo $[0, 16]$, díky vlastnostem transformace ζ můžeme toto z jednoznačně vyjádřit jako $z = k^2 - 4k + 6 - 4k^{-1} + k^2$ pro k z definiční množiny transformace ζ a zároveň platí

$$
|f(k)^{-1}| = \|v\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} . \tag{3.23}
$$

Uvažujme nyní posloupnost v takovou, že $v_n = \omega\delta_{0,n}$ a k ní příslušný operátor $Ve_n = v_n e_n$, který označíme $\omega\delta$. Birmanův–Schwingerův operátor je nyní ve tvaru

$$K(\lambda)_{n,m} = \begin{cases} \omega f(k), & m = n = 0, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \tag{3.24}$$

a podle Birmannova–Schwingerova principu je $z = \zeta(k)$ v bodovém spektru $T^2 + \omega\delta$ právě tehdy, když

$$\omega f(k) = -1.$$

Zvolíme-li nyní $\omega := -f(k)^{-1}$ pak platí

$$\omega f(k) = -f(k)^{-1} f(k) = -1,$$

tedy $\zeta(k) \in \sigma_{\mathrm{p}}(T^2 + \omega\delta)$. Navíc $| - f(k)^{-1}| = \|v\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}$ a proto

$$-f(k)^{-1} = \|v\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t},$$

pro $t \in [0, 2\pi]$.

Je zřejmé, že pro každý bod z na hranici a mimo $[0, 16]$ nalezneme operátor, jež má z jako vlastní hodnotu. Je však nutno míti na paměti, že stále pracujeme s Hypotézou 1. Nevíme tedy s jistotou, zda mimo oblast vymezenou (3.19) neleží nějaké další vlastní hodnoty operátorů s jinými potenciály.

Závěr

V této práci jsme zkoumali spektrum porušeného diskrétního bilaplaceova operátoru T^2. Porucha byla realizována komplexním potenciálem V, který je generován posloupností z prostoru $\ell^1(\mathbb{Z})$. Nejprve jsme se soustředili na spektrální analýzu neporušeného operátoru T^2, jeho spektrum je ryze esenciální, ryze spojité a jedná se o interval $[0, 16]$. Dále jsme zavedli transformaci ζ, která zobrazuje bijektivně horní polovinu jednotkového kruhu s intervalem $(-1, 0)$ na komplexní rovinu bez intervalu $[0, 16]$. Pomocí této jsme nalezli rezolventu operátoru T^2. V obou případech jsme využívali toho, že diskrétní bilaplaceův operátor je Laurentovým operátorem.

S využitím Birmanova–Schwingerova principu jsme nalezli spektrální obálky operátoru $T^2 + V$. K tomu bylo zapotřebí najít co nejlepší odhady výrazu $|(T^2 - \lambda I)^{-1}_{m,n}|$, který nezávisí na indexech m, n. K problému jsme přistoupili dvěma způsoby. Nejprve za využití trojúhelníkové nerovnosti, čímž jsme získali první sadu obálek. Druhou a nejpřesnější možností, jak učinit takové odhady, je nalézt supremum výrazu $|(T^2 - \lambda I)^{-1}_{m,n}|$ přes všechny indexy m, n. Tento problém byl formulován v řeči jediného parametru $s := |m - n|$, při této formulaci byl problém podroben numerické analýze, na jejímž základě jsem stanovil hypotézu, že supremum je nabýváno pro $s = 0$. Bohužel se mi doposud nepodařilo najít analytický důkaz tohoto tvrzení, avšak rád bych ho v budoucnu našel. Jednalo by se totiž o podstatnou vědomost při dokazování optimality nalezených obálek. Hlavním výsledkem práce je za dodatečných předpokladů na platnost vyřčených hypotéz vztah

$$\sigma(T^2 + V) \subset \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, 16] \ : \ \left| \frac{2\lambda(\lambda - 16)}{1 - \sqrt{1 - \frac{16}{\lambda}}} \right| \leq \|v\|^2_{\ell^1(\mathbb{Z})} \right\}.$$

Na závěr jsem diskutoval optimalitu nalezených obálek. Optimalitou se rozumí, že pro každý bod z na hranici spektrální obálky nalezneme potenciál V_z takový, že z je vlastní hodnotou operátoru $T^2 + V_z$. K tomu opět využíváme tvrzení Birmanova–Schwingerova principu. Za předpokladu platnosti stanovené hypotézy je možné najít schéma, kterým pro libovolný bod hranice nalezených množin získáme hledaný potenciál. Jedná pouze o hypotézu, a tedy nevíme, zda nalezené množiny jsou skutečně spektrálními obálkami. Naopak pro obálky získané využitím trojúhelníkové nerovnosti nelze tímto schématem optimalitu dokázat.

Literatura

[1] O. O. Ibrogimov, F. Štampach, *Spectral enclosures for non-self-adjoint discrete Schrödinger operators.* Integr. Equ. Oper. Theory 91, 2019, 1-15.

[2] I. Gohberg, S. Goldberg, M. A. Kaashoek, *Basic classes of linear operators.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.

[3] J. Blank, P. Exner, M. Havlíček, *Linearní operátory v kvantové fyzice.* Karolinum, 1993.

[4] M. Hansmann, D. Krejčiřík, *The abstract Birman-Schwinger principle and spectral stability.* ArXiv, 2022, arXiv:2010.15102.

[5] A. Abramov, A. Aslanyan, E. B. Davies, *Bounds on complex eigenvalues and resonances.* J. Phys. A 34 (2001).

[6] B. Cassano, O. O. Ibrogimov, D. Krejčiřík, F. Štamapch, *Location of eigenvalues of non-self-adjoint discrete Dirac operators.* Annales Henri Poincaré 21, 2020.

[7] S. Kholmatov, M. Pardabaev, *On spectrum of the discrete bilaplacian with zero-range perturbation.* Lobachevskii Journal of Mathematics 42, 2021.

[8] D. E. Edmunds, W. D. Evans, *Spectral theory and differential operators.* Oxford University Press, 1987.

[9] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics, vol. 4. Analysis of operators.* Academic Press, New York, 1978.