

Daniela Opočenská: Kritický exponent balancovaných slov

Vznik kombinatoriky na slovech je spojen se studiem mocnin faktorů nekonečných slov (Axel Thue, 1906). Od počátku až do současné doby je téma mocnin faktorů jedním z nejvíce zkoumaných. Právě tomuto tématu se věnuje i práce Daniely Opočenské. Hlavní pozornost je věnována kritickému exponentu nekonečného slova, který popisuje, jaké maximální mocniny faktorů se v daném nekonečném slově mohou vyskytovat. Hodnota minimálního kritického exponentu nekonečných slov nad abecedou dané velikosti je známá jako domněnka Dejeanové z roku 1972. Tato domněnka říká, že minimální kritický exponent nekonečných slov o d písmenech je roven $\frac{d}{d-1}$ pro $d \geq 5$. Tato domněnka byla dokazována mnoha lidmi a až v roce 2011 byla dokázána kompletně.

Minimální kritický exponent je rovněž studován pro konkrétní třídy nekonečných slov. Tato práce se věnuje studiu minimálního kritického exponentu balancovaných slov. Balancovaná aperiodická slova nad binární abecedou jsou dobře známá sturmovská. I nad vícepísmennými abecedami se dají balancovaná slova konstruovat pomocí sturmovských, konkrétně jejich barvením slovy s konstantními mezerami. Rampersad, Shallit a Vandomme našli v roce 2019 balancovaná slova s minimálním kritickým exponentem nad abecedou o 3 a 4 písmenech. A dále vyslovili domněnku, že minimální kritický exponent balancovaných slov nad abecedou o $d \geq 5$ písmenech je roven $\frac{d-2}{d-3}$. Navíc pro $d \leq 10$ předložili seznam balancovaných slov, o kterých se domnívali, že jejich kritický exponent je roven $\frac{d-2}{d-3}$. Pro $d \leq 8$ potvrdili Baranwal a Shallit, že jde o správné kandidáty.

Zatímco výše zmínění autoři řešili otázku minimálního kritického exponentu hrubou silou – prohledávali prefixy všech balancovaných slov nad danou abecedou – v této práci je popsán algoritmus, který využívá kombinatorických vlastností balancovaných slov (konkrétně znalosti bispeciálů a návratových slov) k výpočtu kritického exponentu a je mnohonásobně rychlejší. Hlavním cílem práce bylo tento algoritmus implementovat. To se podařilo výborně, Daniela použila i optimalizace a různá vylepšení původního algoritmu. Program je rychlý a uživatelsky příjemný. Rovněž implementace je v práci podrobně popsána.

Díky programu jsme byli schopni dokázat, že domněnka platí i pro 9 a 10 písmen a že nalezení kandidátů jsou správná. Ovšem poté se šikovnou prací s programem podařilo Daniele domněnku vyvrátit – najít balancovaná slova, která nad 11 a 12 písmeny nabývala nižší kritický exponent $\frac{d-1}{d-2}$. A nejen to, program nám byl nápomocen také v nalezení nekonečně mnoha abeced (všech se sudým počtem písmen $d \geq 12$), pro která nabývá minimální kritický exponent balancovaných slov nové nižší meze $\frac{d-1}{d-2}$. Poté se k nám přidal A. Shur, který byl schopen ukázat, že mez nemůže být nižší. Zformulovali jsme tedy domněnku novou, že pro $d \geq 11$ je minimální kritický exponent balancovaných slov roven $\frac{d-1}{d-2}$, a dokázali ji pro sudé počty písmen. Tento výsledek je již publikovaný v mezinárodním recenzovaném časopisu (Dvořáková, Opočenská, Pelantová, Shur: *On minimal critical exponent of balanced sequences*, Theoretical Computer Science, **922** (2022), 158–169).

Na bakalářské práci oceňuji celou řadu věcí.

- Kvalitu výsledků: Není obvyklé, aby práce studentky 3. ročníku obsahovala původní výsledky, které by již byly dokonce publikovány. Danielin program a její nápaditá práce s ním nám pomohly nejen vyvrátit stávající domněnku, ale potvrdit domněnku novou pro nekonečně mnoho abeced.
- Kvalitu textu: Autorka má nadání psát srozumitelně, jasně, čtivě a vzornou češtinou. Takže text z mé strany nevyžadoval téměř žádné zásahy.
- Entuziasmus: Daniela se o kombinatoriku na slovech zajímá již od prvního ročníku. Právě tento náskok, talent a nadšený a zároveň nesmírně pečlivý přístup jsou v její nadprůměrné práci zúročeny.
- Ucelenost: Práce obsahuje vše, co je potřeba, k pochopení výpočtu (asymptotického) kritického exponentu. Pro úplnost jsou u většiny tvrzení přidány i důkazy. I u známých důkazů upřednostňovala autorka provést je vlastním postupem bez opisování z literatury a povedlo se jí bez výjimky najít vždy důkazy nejjednodušší možné.

Jsem přesvědčená (a výše jsem důvody vysvětlila), že práce Daniely Opočenské je vynikající, a hodnotím ji známkou **A (výborně)**.