



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ
V PRAZE

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Ing. Niels van der Meer
E-mail: meer.nielsvd@gmail.com

V Praze 9. srpna 2022

**Posudek oponenta k bakalářské práci Dominika Žurka s názvem
*Dynamika šíření signálu v excitovatelném prostředí***

Předkládaná práce se zabývá matematickým modelováním šíření signálu v excitovatelném prostředí a studiem reakčně-difuzních rovnic. Vlastní text práce o rozsahu 63 stran je členěn na úvod, čtyři číslované kapitoly a závěr. Seznam literatury obsahuje 47 řádně ocitovaných zdrojů.

První kapitola je úvodem do problematiky z lékařského pohledu. Je zde stručně popsána anatomická struktura srdce a její souvislost se vznikem a šířením signálu zodpovědného za srdeční kontrakce. Závěr kapitoly je věnován poruchám srdečního rytmu a jejich projevům. Autor si při zpracování této tematiky musel nastudovat lékařskou literaturu a základy (elektro)fyzologie si na studenta nelékařského oboru osvojil v nadstandardním rozsahu.

Ve druhé kapitole se autor zabývá matematickým popisem šíření signálu. Představuje nejdůležitější matematické modely této oblasti, mezi něž patří model Hodgkinův–Huxleyho a FitzHughův–Nagumův. Části, kde jsou odvozeny nejdůležitější vztahy a rovnice, jsou podány srozumitelně i pro čtenáře, který se v dané oblasti nepohybuje. Zajímavým přídatkem je závěrečný odstavec o současném vývoji, který tyto modely zasazuje do moderního kontextu.

Třetí kapitola je věnována studiu vlastností reakčně-difuzních rovnic. Nejdříve je odvozeno analytické řešení rovnice vedení tepla s pravou stranou i bez ní. Důkazy jsou srozumitelné a až na chybu v rovnosti (3.7), kde u výrazu T'' přebývá jedna čárka pro derivaci, jsem neobjevil žádné další nesrovnalosti. V další části kapitoly se autor zabývá principy maxima a teorií invariantních regionů, které mohou zajistit existenci globálního řešení těchto rovnic. Zřejmě nejdůležitějším výstupem této kapitoly je důkaz existence slabého řešení nelineární reakčně-difuzní rovnice, což nepochybně obnášelo pochopení alespoň základů teorie Sobolevových prostorů, která se nachází mimo rámec bakalářského studia na FJFI. Dokázána je i jednoznačnost slabého řešení.

Závěrečná kapitola obsahuje numerické výsledky z algoritmů, které pan Žurek sám implementoval v jazyce *Python*. Autor postupně představuje výsledky výpočtů z různých úloh od difuzní rovnice (v jedné dimenzi i ve dvou dimenzích) přes Allenovu–Cahnovu rovnici až po FitzHughův–Nagumův model. Tato kapitola je poměrně obsáhlá a pokrývá široké spektrum úloh. Kvalitativní výpočty jsou doplněny o kvantitativní analýzu, kde je prověřen řád konvergence použitého numerického schématu. S ohledem na téma práce jsou zřejmě nejhodnotnější výsledky týkající se FHN modelu, kde autor naznačuje, že jeho dalším cílem je rozšíření těchto výsledků.

V zadání práce dostal autor za úkol zjistit možnosti matematického popisu šíření signálu v excitovatelném prostředí, diskutovat současné trendy v této oblasti a prostudovat základy teorie nelineárních PDR. Toto zadání autor nepochybně splnil v plné šíři a v některých oblastech ho splnil i nad rámec bakalářského studia.

Do diskuze v rámci obhajoby předkládám následující otázky:

1. Jaká byla časová náročnost výpočtů 3 a 4 v sekci 4.1, kde při určování řádu konvergence počítáte až s 25 600 časovými kroky?
2. Zajímavým přínosem jsou výsledky týkající se rovnice vedení tepla ve dvou dimenzích. Jak jste postupoval při implementaci explicitního schématu? Použil jste pro uložení hodnot p_{ij}^k lineární indexování vzhledem k i a j nebo jste zvolil jinou metodu? Pro zajímavost prosím uveďte i časovou náročnost těchto výpočtů (sekce 4.2).

Odborná i grafická úroveň této práce dle mého názoru odpovídá nárokům kladeným na bakalářskou práci, a mnohdy je i převyšuje. Její jazyk je až na několik překlepů a povětšinou drobných chyb na dobré úrovni. Jediná výtká, kterou bych v oficiální části posudku zmínil, se týká symbolů, které autor při sázení textu zapomněl obklopit symbolem dolaru (\$). Tento překlep se v práci objevuje poměrně často (např. na stranách 13, 16, 17 i dále).

Protože však zmiňované nedostatky nebrání porozumění ani výrazně nesnižují kvalitu práce, navrhuji hodnotit tuto bakalářskou práci známkou **A–výborně** a doporučuji ji k obhajobě.

Ing. Niels van der Meer

Dodatek

Následuje několik komentářů a tipů pro autora, které již neovlivňují mé hodnocení bakalářské práce (tedy A–výborně) a kterými není nutné se zabývat u obhajoby. Jedná se spíše o připomínky pravopisného a typografického charakteru, které mohou ještě zvýšit kvalitu jeho další práce. Autorovi jsem zaslal text jeho práce s poznámkami a vyznačenými místy, kde (podle mého názoru) byla chyba nebo nedostatek.

- Chybějící čárky ve větách jsou vyznačeny na patřičných místech v dokumentu.
- Strana 7, řádek 7: Věta by neměla začínat číslicí nebo symbolem. Navrhuji např. *Zdroj [6] uvádí...* apod.
- Strana 7, konec předposledního odstavce: *implantován* místo *implementován*.
- Strana 11, řádek 4: Česky psaný text by se měl řídit českou typografií, která používá desetinnou čárku (nikoli tečku). Správně tedy *17,9 milionu* (ne *milionů*). Desetinné tečky jsou zde použity v celé práci. Při použití balíku `siunitx` lze psaní desetinné čárky zautomatizovat příkazem `\sisetup{output-decimal-marker={,}}`.
- Spojovník (-) vs. pomlčka (–). Spojovník je krátká vodorovná čárka a používáme ho např. při dělení slov nebo v těsných slovních spojeních (*černo-bílý*, *reakčně-difuzní*). Nezaměňujeme ho s pomlčkou (v L^AT_EXu ji lze napsat pomocí dvou spojovníků za sebou (--)), která se píše např. mezi příjmeními různých osob (*FitzHughův–Nagumův model*), přičemž obě příjmení skloňujeme. Na straně 24 by tedy mělo stát *Sturmova–Liouvilleova (úloha)*.
- Častým nešvarem je spojení „funkce $f(x, t)$ “, „funkce $p(x, t)$ “ apod., které se objevuje napříč textem. Výraz $f(x, t)$ je ve skutečnosti funkční hodnota (tedy číslo), nikoli funkce samotná. Správně bychom tedy měli psát „funkce f , funkce p “, případně „funkce $f = f(x, t)$ “ nebo „funkce $(x, t) \mapsto f(x, t)$ “. Toto zneužití notace je ovšem i v literatuře tak časté, že ho v zásadě nelze považovat za chybu.
- Strana 29, 9. řádek zdola: Nekonzistentní použití symbolu \mathbb{R}^n .
- Strana 30, věta 3.4: Myslím, že jste chtěl napsat „ $p_{ini} \rightarrow 0$ pro $|x| \rightarrow \infty$ “. Navíc je v této větě nutné předpokládat existenci *omezeného* invariantního regionu (kvůli větě 14.4 ve Smollerovi, kde je předpokládána omezenost řešení v L^∞ normě).
- Psaní indexů: Podle tradičních typografických pravidel se matematické proměnné píší *kurzívou* a vše ostatní (včetně konstant, např. Eulerovo číslo e) klasickým písmem. Zkratka „ini“ značí *initial* a nejedná se o součin proměnných i a n , takže bychom měli psát p_{ini} , nikoli p_{ini} . Toho lze v kódu docílit takto: `$p_{\mathrm{ini}}`. Vyplatí se pro často se opakující výrazy udělat zkratku pomocí `\newcommand`. Ponechám na autorovi, zda bude „stojatě“ psát písmeno „d“ v integrálu $\int f(x) dx$ (používám `\newcommand{\dd}{\mathrm{d}}`) nebo v diferenciálním operátoru $\frac{d}{dx}$ (doporučuji balík `esdiff`). O správném psaní těchto výrazů se vedou vášnivé debaty a literatura v něm není konzistentní.
- Rovnice (3.43): V hranaté závorce na druhém řádku by mělo být $\partial_x p$, nikoli p (per partes).
- Definice 3.2 a 3.3: Spojení „pro $\forall \varphi \in C_0^\infty$ “ doporučuji rozepisovat slovně, tj. „pro každou funkci $\varphi \in C_0^\infty$ “.

- Rovnost (3.55): Parsevalova rovnost dává do souvislosti *kvadrát* normy a sumu *kvadrátů* skalárních součinů. Není mi ale jasné, odkud plyne závěrečný stejnoměrný odhad pomocí konstanty K . Myslím, že tato poznámka by měla zaznít až poté, co odvodíte odhad pro posloupnost (p_m) pomocí Sobolevovy nerovnosti (s. 36).
- Strana 53, úloha (4.27): Podle obrázku 4.16 by v tomto výpočtu měla být nastavena okrajová podmínka $\mu_2 = 1$, vy uvádíte $\mu_2 = 0$.
- Poznámka ke colormapě `jet` použité v sekcích 4.1 a 4.2: Zvažte použití jiné colormapy, protože `jet` (dříve výchozí v MATLABu) má několik nedostatků. Může vytvářet struktury, které v datech vůbec nejsou, a není vhodná pro barvoslepé lidi. Alternativy viz například na <https://colorcet.com> a <https://www.kennethmoreland.com/color-advice/>.

Na závěr bych poznamenal, že správné tvary slov a informace o českých pravopisných jevech lze snadno najít v *Internetové jazykové příručce* na adrese <https://prirucka.ujc.cas.cz>.