



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



Superpoissonovské stavy balančního částicového systému

Super-Poisson states of balanced particle system

Bakalářská práce

Autor: **Jiří Nábělek**
Vedoucí práce: **Doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.**
Akademický rok: 2021/2022

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student:	Jiří Nábělek
Studijní program:	Aplikace přírodních věd
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Studijní zaměření:	Aplikované matematicko-stochastické metody
Název práce (česky):	Superpoissonovské stavy balančního částicového systému
Název práce (anglicky):	Super-Poisson states of balanced particle system

Pokyny pro vypracování:

- 1) Proveďte důkladnou bibliografickou rešerši oblasti balančních částicových systémů (BČS) a jejich aplikací při modelování dopravního proudění.
- 2) Pro generátory BČS, zavedené prostřednictvím repulzivního silového působení, odvoďte některé omezující podmínky pro jejich statistické charakteristiky.
- 3) Dokažte, že některé varianty BČS nepřipouštějí superpoissonovské stavy.
- 4) Definujte a analyzujte BČS s generátorem z distribuční rodiny GIG. Stanovte uzavřené formule pro kompresibilitu a deflekcí BČS s GIG-generátorem.
- 5) Stanovte podmínky, za nichž je BČS s GIG-generátorem superpoissonovský.
- 6) Detekujte superpoissonovské stavy v dopravních datech a pokuste se tato data statisticky popsat některou ze zavedených odhadovacích metod.

Doporučená literatura:

- 1) L. Li., X.M. Chen, Vehicle headway modeling and its inferences in macroscopic/microscopic traffic flow theory: A survey. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* 76, 2017, 170–188.
- 2) M. Krbálek, F. Šeba, M. Krbálková, Super-random states in vehicular traffic - detection & explanation. *Physica A* 585, 2022, 126418.
- 3) S. Mitra, S. Washington, On the nature of over-dispersion in motor vehicle crash prediction models. *Accident Analysis and Prevention* 39, 2007, 459–468.
- 4) V. Pánek, Statistická kompresibilita v systémech se středně dosahovými potenciály. Výzkumný úkol FJFI ČVUT 2021, školitel doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.
- 5) M. Krbálek, Equilibrium distributions in thermodynamical traffic gas. *J. Phys. A: Math. Theor.* 40 5813, 2007, 1-10.
- 6) M. Krbálek, M. Krbálková, 3s-Unification for Vehicular Headway Modeling. In 'SPMS 2018' Proceedings, Dobřichovice 2018, 2018, 1-14.

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze, Trojanova 13, 120 00 Praha 2

Jméno a pracoviště konzultanta:

Datum zadání bakalářské práce: 31.10.2021

Datum odevzdání bakalářské práce: 7.7.2022

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

V Praze dne 21. října 2021

.....
garant oboru

.....
vedoucí katedry



.....
děkan

Poděkování:

Rád bych poděkoval především svému školiteli docentu Mgr. Milanu Krbálkovi, Ph.D., a to nejen za velké množství cenných rad a za poskytnutí velmi kvalitního odborného zázemí, ale také za trpělivost, vstřícnost a pozitivní přístup po celou dobu naší spolupráce. Díky patří i celé mojí rodině, především rodičům za psychickou a materiální podporu během celého bakalářského studia.

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a uvedl jsem všechnu použitou literaturu.

V Praze dne 7. července 2022

Jiří Nábělek

Název práce:

Superpoissonovské stavy balančního částicového systému

Autor: Jiří Nábělek

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Aplikované matematicko-stochastické metody

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.

Abstrakt: Práce pojednává o vlastnostech super-poissonovských systémů a jejich detekci v dopravních datech. Úvodní část práce shrnuje známé poznatky stochastického modelování dopravních systémů. Součástí této práce je zavedení modelu termodynamického plynu a balančních částicových systémů. V hlavní části práce jsou vysloveny a dokázány obecné vlastnosti repulzivního balančního částicového systému a následně i vlastnosti balančních částicových systémů zadaných konkrétně generátorem z třídy zobecněných inverzních Gaussových rozdělení. Poslední část práce se zaměřuje na analýzu prostorových světlostí a detekci super-poissonovských stavů v naměřených datech.

Klíčová slova: Vehicle headway modeling, balanční částicové systémy, statistická kompresibilita, zobecněné inverzní Gaussovo rozdělení

Title:

Super-Poisson states of balanced particle system

Author: Jiří Nábělek

Abstract: This thesis discusses the properties of super-poisson systems and their detection in traffic data. The introductory part of the thesis summarizes the known findings of stochastic modelling of traffic flow. This thesis includes the introduction of a thermodynamic gas model and balanced particle systems. In the main part of the thesis, general properties of the repulsive balanced particle systems and, consequently, properties of balancing particle systems derived specifically by a generator from the class of generalized inverse Gaussian distributions are stated and proved. The last part of the thesis focuses on the analysis of spatial clearances and the detection of super-Poisson states in measured data.

Key words: Vehicle headway modeling, balanced particle systems, statistical compressibility, generalized inverse Gaussian distribution

Obsah

Úvod	8
1 Obecné statistické vlastnosti dopravní mikrostruktury	9
1.1 Veličiny dopravního makropopisu	9
1.2 Veličiny dopravního mikropopisu	10
1.3 Empirické průběhy headway distribucí a jejich obecné vlastnosti	11
1.4 Třída balancovaných hustot	12
2 Termodynamický dopravní plyn	15
2.1 Definice dopravního plynu na úsečce	15
2.2 Rozbor obecných vlastností silového potenciálu $\varphi(x)$	15
2.3 Zavedení a rozbor základních neznámých v modelu	17
2.3.1 Hamiltonián termodynamického dopravního plynu	17
2.3.2 Stochastická rezistivita a její interpretace	18
2.4 Řešení modelu až k obecnému tvaru headway distribuce	19
2.4.1 Homogenní plyn s krátkodosahovým potenciálem	19
2.5 Rozbor obecného tvaru headway distribuce	20
3 Balanční částicový systém jako matematická realizace dopravního modelu	22
3.1 Definice systému a zavedení náhodných proměnných v modelu	22
3.2 Elementární známé poznatky a teoremy	24
3.3 Charakteristiky 1. a 2. druhu a jejich vlastnosti	24
3.3.1 Charakteristiky 1. řádu	25
3.3.2 Charakteristiky 2. řádu	26
3.4 Klasifikace částicového systému podle úrovně stochastické kompresibility	27
3.4.1 Kompresibilita poissonovského systému	27
3.4.2 Kompresibilita Diracova systému	28
3.4.3 Klasifikace systémů podle kompresibility	29
4 Repulzivní varianty balančního částicového systému a jejich matematické zákonitosti	30
4.1 BČS s repulzivním potenciálem	30
4.2 Obecné vlastnosti repulzivního BČS	32
4.2.1 Omezující podmínky pro statistické veličiny repulzivního BČS	32
4.2.2 Mezní hodnoty náhodných veličin	34
4.3 BČS zadaný generátorem ze třídy GIG	35
4.3.1 Necentrální momenty GIG rozdělení	36
4.3.2 Vlastnosti parametrizace GIG rozdělení	38

4.4	Kompresibilita GIG rozdělení pro $\alpha \in \mathbb{R}^+$	41
4.5	Fázový diagram	41
4.6	Podmínka superpoissonovskosti	43
5	Superpoissonovské stavy v reálných dopravních systémech	44
5.1	Datové vzorky a metody jejich akvizice	44
5.1.1	Unifikační procedura	44
5.1.2	Výstup analýzy rozestupů	45
5.2	Detekce super-poissonovských stavů v dopravních systémech	51
5.2.1	Výpočet statistické rigidity systému	52
5.2.2	Výpočet statistické kompresibility	52
5.2.3	Detekované super-poissonovské stavy	52
	Závěr	55

Úvod

Vehicle headway modeling je disciplína aplikované matematické statistiky, která se zabývá popisem a vlastnostmi chování řidičů v dopravě. Z porozumění chování řidičů s pochopením dopravního proudu je možné získat lepší odhad rozmístění vozidel na vozovce, lépe odhadnout kapacitu vozovky a předvídat problematické úseky dopravní komunikace. Tato disciplína dále nalézá svůj užitek při projektování nových komunikací nebo křižovatek a také může být v budoucnu klíčová v oblasti autonomního řízení dopravy.

V úvodních třech kapitolách jsou uvedeny základní pojmy a postupy statistického modelování dopravy. V první kapitole práce zavedeny potřebné základní pojmy týkající se popisu a vlastností dopravní mikrostruktury. Po zavedení potřebných pojmů jsou diskutovány empirické průběhy headway distribucí s následným zavedením třídy balancovaných hustot. V další kapitole je představen model termodynamického dopravního plynu, který představuje jisté propojení matematického modelování dopravy s oborem termodynamické a statistické fyziky. V kapitole zkoumající tento model jsou uvedeny výsledné tvary hustot pravděpodobnosti pro prostorové světlosti několika základních variant systému. Celé řešení ovšem práce již nezmiňuje. Poslední kapitola rešeršní části shrnuje poznatky o balančních částicových systémech. Zmíněná kapitola dále zahrnuje zavedení modelu, vyslovení jeho elementárních vlastností a potřebné statistické charakteristiky 1. a 2. řádu.

Hlavní tvůrčí část pojednává o obecných vlastnostech repulzivního balančního částicového systému. V práci jsou vysloveny a dokázány omezující podmínky pro statistické veličiny a mezní hodnoty náhodných veličin repulzivních balančních částicových systémů. Dále práce zkoumá vlastnosti parametrizace GIG rozdělení s cílem určit nutné podmínky pro parametry, aby byl umožněn vznik superpoissonovských stavů v systému daném GIG rozdělením. V závěrečné kapitole je rozebrán postup analýzy dopravních dat a následně i její výstupy. Analýza dopravních dat v této práci se zaměřuje na prostorové světlosti a na detekci superpoissonovských stavů v dopravních systémech.

Kapitola 1

Obecné statistické vlastnosti dopravní mikrostruktury

Matematické modelování dopravy běžně pracuje s veličinami, které popisují jednak vlastnosti jednotlivých částic systému, a rovněž i vlastnosti systému jako celku. Veličiny rozdělujeme na veličiny dopravního makropopisu, což jsou veličiny charakterizující dopravní tok jako celek. Naopak veličiny dopravního mikropopisu vyhodnocují vlastnosti jednotlivých částic. Proved' me korektní zavedení jednotlivých veličin.

1.1 Veličiny dopravního makropopisu

Základní fázové proměnné popisující stav dopravního souboru jsou:

1. Dopravní hustota $\rho(\xi, \tau)$,
2. Dopravní intenzita $I(\xi, \tau)$,
3. Průměrná rychlost dopravního proudění $V(\xi, \tau)$.

Abychom tyto veličiny mohli řádně definovat, budeme potřebovat nejprve zavést pojem vyhlazený počet částic [9].

Definice 1.1.1. Necht' funkce $\alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau), \dots, \alpha_M(\tau)$ značí pozice bezrozměrných vozidel v čase τ , kde $M \in \mathbb{N}$ je počet sledovaných vozidel. Dále uvažujme, že sledovaná vozidla jedou v jednom pruhu a že platí $\alpha_1(\tau) < \dots < \alpha_M(\tau)$. Necht' $p(x | \sigma) \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R})$ je libovolná hustota pravděpodobnosti s nulovou střední hodnotou a směrodatnou odchylkou σ . Pak vyhlazený počet částic definujeme jako

$$N(\xi, \tau) := \int_{-\infty}^{\xi} \sum_{k=1}^M p(y - \alpha_k(\tau) | \sigma) dy.$$

Poznámka. Za generující hustotu pravděpodobnosti je v drtivé většině případů příhodné zvolit normální rozdělení a pak definice vyhlazeného počtu částic přechází do tvaru

$$N(\xi, \tau) := \int_{-\infty}^{\xi} \sum_{k=1}^M \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y - \alpha_k(\tau))^2}{2\sigma^2}} dy.$$

Definice 1.1.2. Necht' $N(\xi, \tau)$ značí vyhlazený počet částic, pak dopravní hustotu $\rho(\xi, \tau)$ a dopravní intenzitu $I(\xi, \tau)$ definujeme jako

$$\rho(\xi, \tau) := \frac{\partial N(\xi, \tau)}{\partial \xi}, \quad I(\xi, \tau) := -\frac{\partial N(\xi, \tau)}{\partial \tau}.$$

Poznámka. Rovnice pro dopravní hustotu a intenzitu můžeme ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$\rho(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^M p(\xi - \alpha_k(\tau) | \sigma),$$

$$I(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^M \frac{d\alpha_k(\tau)}{d\tau} p(\xi - \alpha_k(\tau) | \sigma) = \sum_{k=1}^M v_k(\tau) p(\xi - \alpha_k(\tau) | \sigma).$$

kde $v_k(\tau)$ představuje rychlost částice k v čase τ .

Poznámka. Z předpokladu spojitě diferencovatelnosti hustoty pravděpodobnosti do 2. řádu plyne záměnnost derivací $N(\xi, \tau)$, tzn.

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 N(\xi, \tau)}{\partial \xi \partial \tau} = \frac{\partial^2 N(\xi, \tau)}{\partial \tau \partial \xi} = -\frac{\partial I}{\partial \xi}. \quad (1.1)$$

Rovnice (1.1) je alternativou rovnice kontinuity pro dopravní systémy. Veličiny dopravního makropopisu představují způsob, jak charakterizovat vytíženost dopravní komunikace. V kapitole zabývající se analýzou dat využijeme dopravní hustotu k pomyslnému rozdělení dat do skupin s podobnou hustotou, a tudíž i podobnými rozestupy mezi vozidly.

1.2 Veličiny dopravního mikropopisu

Klíčové veličiny pro popis dopravní mikrostruktury jsou časový a prostorový odstup vozidel. Tyto veličiny jsou výstupem měření detektorů na komunikaci.

Definice 1.2.1. Uvažujme soubor za sebou jedoucích vozidel na jednoproudé komunikaci, pak

1. Časovým odstupem vozidel rozumíme časový interval mezi detekcí předních, resp. zadních nárazníků za sebou jedoucích vozidel.
2. Prostorovým odstupem vozidel rozumíme prostorovou vzdálenost mezi předními, resp. zadními nárazníky za sebou jedoucích vozidel.

Při analýze naměřených dat se spíše využívá pojmů časová a prostorová světlost. Tyhle veličiny už na rozdíl od časového a prostorového odstupu nezahnují informaci o délce vozidla, které může být proměnlivé.

Definice 1.2.2. Uvažujme soubor za sebou jedoucích vozidel na jednoproudé komunikaci, pak

1. Časovou světlostí rozumíme časový interval mezi detekcí zadního nárazníku prvního vozidla a předního nárazníku druhého vozidla.
2. Prostorovou světlostí rozumíme prostorový rozestup mezi zadním nárazníkem prvního vozidla a předním nárazníkem druhého vozidla v daném čase.

Jako poslední veličinu definujeme okamžitou rychlost.

Definice 1.2.3. Uvažujme soubor za sebou jedoucích vozidel na jednoproudé komunikaci. Okamžitou rychlostí nazveme rychlost vozidla v daném čase.

Poznámka. V praxi se k měření dopravních dat nejčastěji využívají dvousmyčkové indukční detektory. Tyto detektory měří čas průjezdu vozidla ve dvou blízkých bodech. Pak se za okamžitou rychlost bere průměrná rychlost mezi body měření, tzn. (v symbolické rovině)

$$\text{okamžitá rychlost} = \frac{\text{prostorová vzdálenost mezi body detektoru}}{\text{časová délka průjezdu}}.$$

1.3 Empirické průběhy headway distribucí a jejich obecné vlastnosti

Úloha statistického popisu časových nebo prostorových rozestupů vyžaduje použití rozdělení, jejíž vlastnosti by odpovídaly reálnému chování řidičů při jízdě. Při pevně dané hustotě dopravy je malá pravděpodobnost nadměrně velkých rozestupů. Stejně tak je malá pravděpodobnost velice malých rozestupů, a to kvůli snaze řidičů zamezit kolizi s jiným vozidlem. Řidiči přizpůsobují rychlost své jízdy okolním vozidlům a udržují rozestup, který považují za bezpečný a který jim aktuální dopravní vytíženost komunikace dovolí. Hledanou pravděpodobnostní funkcí označíme $g(r) : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$. Jak jsme právě nastínili, tak budeme požadovat, aby funkce klesala limitně v nekonečnu k nule, tzn.

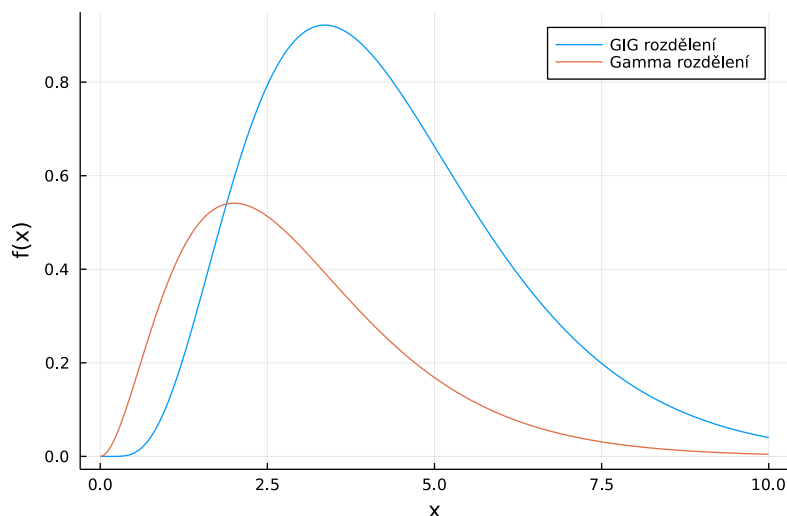
$$\lim_{r \rightarrow +\infty} g(r) = 0.$$

Dále budeme potřebovat matematicky zapsat podmínku malých pravděpodobností pro rozestupy jdoucí limitně k nule. Nebudeme požadovat jako v případě výše, aby $\lim_{r \rightarrow 0^+} g(r) = 0$, ale zvolíme o něco silnější podmínku. Budeme požadovat, aby funkce $g(r)$ měla v bodě $r = 0$ tzv. plató.

Definice 1.3.1. O funkci $g(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ řekneme, že má plató v bodě $c \in \mathbb{R}$, pokud pro každé $m \in \mathbb{N}_0$ platí, že

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{(x - c)^m} = 0.$$

Gamma rozdělení nemá v počátku plató, což je způsobeno malou repulzivní silou zavedenou v příslušném fyzikálním systému. Abychom měli rozdělení s nízkou pravděpodobností výskytu malých rozestupů, bude potřeba zvážit použití jiného rozdělení (viz obrázek 1.3). Tímto hledaným rozdělením bude zobecněné inverzní Gaussovo rozdělení, kterému se budeme podrobněji věnovat v následujících kapitolách.



Obrázek 1.1: Porovnání hustoty GIG a Gamma rozdělení

Definice 1.3.2. Řekneme, že funkce $g(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ je neposunné rozdělení, pokud splňuje

$$\inf(\text{supp}(g)) = 0.$$

Neposunností rozdělení zaručujeme, že funkce $g(r)$ nabývá kladných hodnot pouze v $(0, +\infty)$. Posledním potřebným požadavkem na funkci $g(r)$ je, aby tato funkce byla spojitá.

Definice 1.3.3. Obecnou headway distribucí rozumíme spojité, neposunné rozdělení $g(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ s platěm v počátku, tzn. pro $x = 0$.

Poznámka. Je-li $\inf(\text{supp}(g)) > 0$, pak platí $g(x) = \Theta(x)g(x)$.

1.4 Třída balancovaných hustot

Pro zkoumání a popis dopravních systémů bude užitečné zadefinovat a používat specifickou třídu hustot. Zavedením této třídy se omezíme na hustoty, které mohou posloužit k popisu distribuce světlostí nebo roztečí a které budou splňovat definici obecné headway distribuce 1.3.3.

Definice 1.4.1. Třídou funkcí $g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující axiomy:

1. Axiom kompletnosti: $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$,
2. Axiom nezápornosti: $\text{Ran}(g) \subset \mathbb{R}_0^+$,
3. Axiom částečné spojitosti: $g(x) \in PC(\mathbb{R})$,
4. Axiom integrability: $g(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$,
5. Axiom pozitivnosti nosiče: $\text{supp}(g) \subset \mathbb{R}_0^+$,
6. Axiom balancovanosti: Existuje $\omega > 0$ tak, že platí:

$$\alpha > \omega \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)e^{\alpha x} = +\infty,$$

$$\alpha < \omega \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)e^{\alpha x} = 0,$$

nazveme třídou balancovaných hustot a označíme ji \mathcal{B} .

Pokud funkce $g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje tzv. axiom balancovanosti, tak říkáme, že má funkce $g(x)$ balancovaný chvost.

Definice 1.4.2. Necht' $g(x) \in \mathcal{B}$. Balančním indexem hustoty $g(x)$ nazveme hodnotu $\omega > 0$, která splňuje balanční vlastnost, tzn.

$$\alpha > \omega \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)e^{\alpha x} = +\infty,$$

$$\alpha < \omega \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)e^{\alpha x} = 0.$$

Balanční index hustoty g označíme $\text{inb}(g)$.

Lze si povšimnout, že třída balancovaných hustot je podmnožinou třídy elementárních hustot $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$. Vyslovíme dvě podmínky, které musí být splněny, aby se funkce nacházela ve třídě balancovaných hustot. První věta bude pouze nutnou podmínkou, ale druhá věta udává nutnou i postačující podmínku a tuhle podmínku budeme nazývat balančním kritériem.

Věta 1.4.3. Je-li funkce $g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je balancovanou hustotou, pak platí

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

Věta 1.4.4. Funkce $g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je balancovanou hustotou právě tehdy, když je splněno tzv. balanční kritérium

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln g(x)}{x} \in \mathbb{R}^-.$$

Po prokázání kritérií pro balanční částicové hustoty můžeme pohodlně rozhodnout o rozsáhlosti této třídy. Třída \mathcal{B} je uzavřena na základní operace.

Věta 1.4.5. Necht' $f(x), g(x)$ jsou libovolné funkce z třídy balancovaných hustot \mathcal{B} , pak pro $\forall \alpha > 0$ a $\forall \beta \in \mathbb{R}$ platí:

1. $f(x) + \alpha g(x) \in \mathcal{B}$,
2. $x^\alpha g(x) \in \mathcal{B}$,
3. $g(\alpha x) \in \mathcal{B}$,
4. $f(x) \cdot g(x) \in \mathcal{B}$, pokud $f(x), g(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$,
5. $\forall \beta < \text{inb}(f) : e^{\beta x} f(x) \in \mathcal{B}$.

Dále pro indexy balancovaných hustot $f(x), g(x)$ platí:

1. $\text{inb}(\alpha f) = \text{inb}(f)$,
2. $\text{inb}(f + g) = \min\{\text{inb}(f), \text{inb}(g)\}$,
3. $\text{inb}(x^\alpha f) = \text{inb}(f)$,
4. $\text{inb}(e^{\beta x} f(x)) = \text{inb}(f) - \beta$, pokud $\beta < \text{inb}(f)$,
5. $\text{inb}(f \cdot g) = \text{inb}(f) + \text{inb}(g)$,
6. $\text{inb}(f(\alpha x)) = \alpha \cdot \text{inb}(f)$.

Populárně řečeno, všechny balancované hustoty obsahují ve svém předpisu výraz $e^{-\varkappa x}$, aby mohly splňovat axiom balancovanosti. Můžeme tedy zavést pojem jádro balancované hustoty a danou hustotu takhle dostatečně popsat.

Definice 1.4.6. Necht' $g(x) \in \mathcal{B}$ a $\text{inb}(g) = \varkappa$. Funkci $h(x) := g(x)e^{\varkappa x}$ nazveme balančním jádrem hustoty $g(x)$.

Poznámka. Příklady balančních jader základních hustot:

Název hustoty	Balanční jádro hustoty	Parametrická oblast
Exponenciální hustota	$A \Theta(x)$	$A > 0$
Erlangova hustota	$\Theta(x)x^n$	$n \in \mathbb{N}$
Gamma hustota	$\Theta(x)x^\alpha$	$\alpha > -1$
Polynomická hustota	$\Theta(x)\frac{x^n}{1+x^n}$	$n \in \mathbb{N}$
Jednparametrická GIG hustota	$\Theta(x)e^{-\frac{\beta}{x}}$	$\beta > 0$
Dvoupametrická GIG hustota	$\Theta(x)x^\alpha e^{-\frac{\beta}{x}}$	$\beta > 0, \alpha \in \mathbb{R}$
Superhyperbolická hustota	$\Theta(x)x^\alpha e^{-\frac{\beta}{x^\gamma}}$	$\beta > 0, \alpha \in \mathbb{R}, \gamma > 1$

Tabulka 1.1: Tabulka základních balančních jader.

Kapitola 2

Termodynamický dopravní plyn

Model termodynamického plynu je jedním se základních metodik popisu mikroskopických vlastností dopravního proudu. Již v předchozí kapitole jsme diskutovali, že naší snahou bude nalézt hustotu, která by aproximativně popisovala rozdělení roztečí a světlostí vozidel. Abychom mohli tvar této hustoty analyticky odvodit, tak bude potřeba převést model termodynamického plynu z termodynamické a statistické fyziky na úlohu popisu dopravy.

2.1 Definice dopravního plynu na úsečce

Jako ideální úlohu si zvolme jednoproudou komunikaci bez jakýchkoliv křižovatek nebo odboček. Dále modelujme jednotlivá vozidla na komunikaci jako množinu částic na úsečce. Tuto množinu o N částicích (resp. o jejich lokace) můžeme postupně označit jako x_1, x_2, \dots, x_N . Toto pořadí indexů bude v našem modelu vždy zachováno, jelikož vozidla nemají možnost se předjíždět a tím měnit pořadí na vozovce. Kromě lokace částic označme v_1, v_2, \dots, v_N rychlosti jednotlivých částic. Jelikož naše pozorování omezujeme na volitelnou část vozovky délky L , budeme dále klást požadavek na periodicitu okrajových podmínek, které jsou tímto dány jako:

$$x_{k+N}(t) = x_k(t) + L, \quad v_{k+N}(t) = v_k(t), \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

Chování jedoucích vozidel můžeme dále charakterizovat pomocí tzv. socio-dynamických sil působících mezi jednotlivými vozidly. Zavedením těchto sil budeme schopni charakterizovat snahu řidičů zabránit střetu s jiným vozidlem. Dále nám zmíněný popis umožní využít nástrojů statistické fyziky a využít přiblížení pomocí modelu částicového plynu k popisu situací na dopravních komunikacích.

2.2 Rozbor obecných vlastností silového potenciálu $\varphi(x)$

Zavedme nejprve sílu $F(r)$, která je závislá pouze na vzdálenosti mezi vozidly. Na tuto sílu můžeme z praktického hlediska klást podmínky na její limitní hodnoty. Následující podmínky korespondují s představou reálného chování řidičů při jízdě:

1. $F(r)$ je klesající funkce.
2. S klesající vzdáleností bude naopak síla růst nad všechny meze, a to kvůli snahy řidičů zamezit srážce, tzn.

$$\lim_{r \rightarrow 0_+} F(r) = +\infty.$$

3. S rostoucí vzdáleností částic bude síla, kterou mezi sebou působí, klesat k nule. Řidiči neberou tolik v potaz velmi vzdálená vozidla, tzn.

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} F(r) = 0.$$

Zároveň se silovým popisem můžeme zavést i silový potenciál $\varphi(r)$. Stejně jako ve fyzikálních disciplínách platí mezi silou a silovým potenciálem vztah:

$$\mathbf{F} = -\nabla(\varphi).$$

Pokud uvažujeme pohyb vozidel na jednoproudové vozovce, který můžeme chápat jako pohyb v jednodimenzionálním prostoru, pak se vztah mezi silou a silovým potenciálem redukuje na:

$$F(r) = -\frac{d\varphi}{dr} \iff \varphi(r) = -\int_0^r F(s)ds + c.$$

Zavedme základní členění interakčních potenciálů: K popsání vzájemného působení dvou vybraných

$\varphi(r)$	γ	Název potenciálu
$-\ln(r)$	1	logaritmický potenciál
$\frac{1}{\gamma-1}r^{1-\gamma}$	(0, 1)	mocninový potenciál
$\frac{1}{r}$	2	hyperbolický potenciál
$\frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma-1}$	(1, 2)	subhyperbolický potenciál
$\frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma-1}$	> 2	superhyperbolický potenciál

Tabulka 2.1: Tabulka základních interakčních potenciálů.

vozidel jsme využili potenciál, který se označuje jako dvoutělesový. Pomocí dvoutělesového potenciálu můžeme podobně jako ve fyzice vyjádřit celkovou potenciální energii souboru jako:

$$U = \sum_{k=1}^N \varphi_k = \sum_{k=1}^N \sum_{i \in I_k} \varphi_{ki}(r_{ik}). \quad (2.1)$$

V heterogenních systémech se mohou potenciály lišit pro různé dvojice vozidel, ale v častěji užívaných homogenních systémech jsou tyto potenciály stejné, a tudíž v jejich značení budeme vynechávat indexaci. Pozastavme se ještě nad otázkou dosahu zavedeného potenciálu. Ptáme se kolik předchozích vozidel řidič zohledňuje při svém rozhodování. Pro řidiče je klíčové reagovat na několik nejbližších vozidel. Klasifikujme tedy potenciály do následujících skupin:

1. **Dlouho-dosahový potenciál:** k -té vozidlo interaguje se všemi ostatními vozidly.
2. **Krátko-dosahový potenciál:** k -té vozidlo interaguje pouze se dvěma nejbližšími vozidly.
3. **Lokálně-dosahový potenciál:** k -té vozidlo interaguje pouze s vozidly, které se nacházejí v jeho okolí $U_\epsilon(x_k)$.
4. **Středně-dosahový potenciál:** k -té vozidlo interaguje s nejbližšími m vozidly

V této práci se budeme zabývat především systémy popsány třemi potenciály. Následující tabulka shrnuje názvy příslušných potenciálů a jejich generátory. Systému s hyperbolickým potenciálem ještě pro zjednodušení rozdělíme na dvě varianty. V rámci těchto variant systému budeme počítat se zobecněnou inverzní Gaussovu hustotu, kterou řádně definujeme a budeme zkoumat v dalších kapitolách.

Název potenciálu	Potenciál	Generátor	Název distribuce
Bezinterakční	0	$A\Theta(x)e^{-\lambda x}$	Exponenciální
Logaritmický	$-\ln(r)$	$A\Theta(x)x^\beta e^{-\lambda x}$	Gamma
Hyperbolický	$\frac{1}{x}$	$A\Theta(x)e^{-\frac{\beta}{x}}e^{-\lambda x}$	GIG
Logaritmicko-hyperbolický	$\frac{1}{x}$	$A\Theta(x)x^\alpha e^{-\frac{\beta}{x}}e^{-\lambda x}$	dvouparametrický GIG

Tabulka 2.2: Tabulka základních generátorů systému.

2.3 Zavedení a rozbor základních neznámých v modelu

Pro odvození hustoty pravděpodobnosti rozdělení termodynamického dopravního plynu budeme (podobně jako ve statistické fyzice) potřebovat znát hamiltonián $H(\mathbf{v}, \mathbf{r})$ systému, což představuje energetický popis systému.

2.3.1 Hamiltonián termodynamického dopravního plynu

Celkovou potenciální energii zkoumaného systému jsme již určili rovnicí (2.1). Poslední chybějící funkcí potřebnou k sestavení hamiltoniánu je celková kinetická energie systému. Určíme ji podobně jako ve fyzikálních modelech termodynamického plynu. Lišit se bude v našem chápání klidového stavu systému. Pro dopravní systémy to bude stav, ve kterém se všechna vozidla pohybují optimální rychlostí. Systém, ve kterém se všechna vozidla pohybují stejnou rychlostí a zároveň mají stejnou hmotnost, nazýváme homogenní a všechny ostatní systémy nazýváme heterogenní. Držme se prozatím popisu heterogenních systémů. Označme m_k hmotnosti a v_k rychlosti jednotlivých částic. Dále necht' w_k představuje optimální rychlost částic, pak kinetická energie systému je dána jako

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2} (v_k - w_k)^2. \quad (2.2)$$

Kombinací rovnic (2.1) a (2.2) dostáváme hamiltonián systému v obecném tvaru

$$H(r_{11}, r_{21}, \dots, r_{NN}, v_1, v_2, \dots, v_N) = \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2} (v_k - w_k)^2 + \sum_{k=1}^N \sum_{i \in I_k} \varphi_{ki}(r_{ik}). \quad (2.3)$$

Pro homogenní systémy lze výsledný hamiltonián zjednodušit, jelikož pro takový systém zavádíme optimální rychlost w a identickou hmotnost všech částic m . Tedy uvažujeme, že

$$\forall k \in \{1, \dots, N\} : w_k = w \wedge m_k = m.$$

Podobně budou schodné dvoutělesové potenciály působící mezi částicemi, tzn.

$$\forall (i, k) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, N\} : \varphi_{ik}(r) = \varphi(r).$$

Tím dostáváme hamiltonián pro homogenní systém ve tvaru

$$H = \sum_{k=1}^N \frac{m}{2} (v_k - w)^2 + \sum_{k=1}^N \sum_{i \in I_k} \varphi(r_{ik}).$$

V další iteraci zjednodušování se můžeme při popisu dopravních systémů omezit na krátkodosahový potenciál a hmotnost všech částic položit rovnou jedné, což umožňuje zapsat hamiltonián v poměrně jednoduchém tvaru

$$H = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} (v_k - w)^2 + \sum_{k=1}^N \varphi(r_k).$$

2.3.2 Stochastická rezistivita a její interpretace

Ve finální hustotě pravděpodobnosti rozdělení dále vystupuje veličina zvaná stochastická rezistivita β . Už z názvu vyplývá, že hovoříme o míře rezistivity systému vůči náhodnému chování. Pro lepší představu demonstrujeme význam stochastické rezistivity v termodynamické fyzice. Zde je rezistivita závislá především na termodynamické teplotě T částicového systému a je dána vztahem

$$\beta = \frac{1}{K_{\beta} T},$$

kde K_{β} představuje tzv. Boltzmannovu konstantu. Intuitivně se bude s klesající teplotou ustalovat i poloha částic. Kdybychom dosáhli až teoretické absolutní nuly, tak by poloha částic byla neměnná a mluvili bychom o deterministickém stavu. Stochastická rezistivita vůči náhodnosti v systému s klesající teplotou tudíž poroste do nekonečna, tzn.

$$\lim_{T \rightarrow 0} \beta(T) = +\infty.$$

Naopak se zvyšující se teplotou bude pozice částic v systému stále více náhodně fluktuovat, tudíž systém bude daleko méně odolný vůči náhodným jevům. Pro systém s teplotou blízkou nekonečnu mluvíme o poissonovském systému, který se vyznačuje nulovou stochastickou rezistivitou, tzn.

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \beta(T) = 0.$$

Po krátkém rozebrání stochastické rezistivity v termodynamické fyzice se nyní vraťme k modelu dopravního plynu. Stejně jako v termodynamice budeme podle stochastické rezistivity dělit stavy systému na

1. deterministické stavy: míra náhodnosti systému je nulová, neboli $\beta \rightarrow +\infty$,
2. sub-poissonovské stavy: míra náhodnosti systému je konečná a nenulová, neboli $\beta \in (0, +\infty)$,
3. poissonovské stavy: míra náhodnosti systému je nekonečná, neboli $\beta = 0$.

Rezistivita v dopravních systémech je závislá na hustotě dopravy. Ačkoliv tato závislost je méně přímočará než v termodynamických systémech, i tak lze získat představu o významu této veličiny v dopravě. Při zvyšující se hustotě dopravy je řidič nucen více sledovat okolní vozidla a podle nich popřípadě přizpůsobovat svou jízdu, čímž je způsobena větší závislost mezi pohyby jednotlivých vozidel a náhodnost systému klesá. Při houstnoucí dopravě je na řidiči, aby přijímal a vyhodnocoval více vjemů, čímž je na mozek řidiče kladena větší zátěž. S množstvím vjemů roste čas potřebný k řešení dopravních situací a možnosti reakcí řidiče jsou mnohdy značně omezené. Tyto všechny aspekty se promítají do stochastické rezistivity a tyto nároky na mozek řidiče jsou často označovány pojmem mentální stres. Míra mentálního stresu je popsána stochastickou rezistivitou systému, která klesá se snižující se hustotou a stoupá se zvyšující se hustotou.

2.4 Řešení modelu až k obecnému tvaru headway distribuce

Z termodynamické a statistické fyziky známe základní tvar hustoty rozdělení částic. Do tohoto vztahu dosazujeme za hamiltonián rovnici (2.3), čímž dostáváme obecný tvar hustoty pravděpodobnosti pro model dopravního plynu.

$$P(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = \frac{1}{Z_N(L)} e^{-\beta H(\mathbf{v}, \mathbf{r})}.$$

Partiční suma představuje normalizační podmínku určenou tak, aby integrál hustoty pravděpodobnosti přes celý stavový prostor byl roven jedné. Omezením se pouze na model krátkodosahového částicového plynu na kružnici délky L dostaneme upravený tvar hustoty pravděpodobnosti, kde Diracova funkce zajišťuje, že popisujeme rozložení částic pouze na úsečce délky L , tzn. součet rozestupů částic musí být roven délce úsečky.

$$P(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = \frac{1}{Z_N(L)} e^{-\beta H(\mathbf{v}, \mathbf{r})} \delta(L - \|\mathbf{r}\|_1) \Theta(\mathbf{r}),$$

kde $\|\mathbf{r}\|_1 = \sum_{k=1}^N r_k$ je síťová norma vektoru.

2.4.1 Homogenní plyn s krátkodosahovým potenciálem

Omezme se nyní znovu pouze na homogenní krátkodosahový potenciál, což v praxi znamená, že řidič při vyhodnocování situace na vozovce posuzuje pouze dvě okolní vozidla a že odlišnosti v hmotnosti jednotlivých vozidel jsou zanedbatelné. Pak lze integrací přes ostatní proměnné přímo získat hustotu pravděpodobnosti pro rychlost k -tého vozidla. Jedná se o výpočet marginální hustoty z hustoty sdružené.

$$q(v_k) = \int_{\mathbf{R}^N} \int_{\mathbf{R}^{2N-1}} P(\mathbf{v}, \mathbf{r}) dv_1 \dots dv_{k-1} dv_{k+1} \dots dv_N d\mathbf{r} = A e^{-\frac{\beta}{2}(v_k - w)^2}.$$

Jak vyplývá z tvaru hustoty pravděpodobnosti rychlosti, rychlost má normální rozdělení se střední hodnotou w a rozptylem $\frac{1}{\beta}$, kde w už jsme dříve zavedli jako optimální rychlost. Můžeme tedy určit normalizační konstantu a zapsat hustotu ve finálním tvaru.

$$q(v) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} e^{-\frac{\beta}{2}(v-w)^2}.$$

Dále zaměříme naši pozornost na určení pravděpodobnosti prostorových světlostí mezi vozidly v konstantním čase, což je jedna z klíčových veličin pro popis dopravního systému. Podobně jako při určování hustoty pravděpodobnosti rychlosti, vypočteme i marginální hustotu prostorových rozestupů a to tak, že provedeme integraci přes zbylé proměnné.

$$P(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{R}^N} P(\mathbf{v}, \mathbf{r}) d\mathbf{v} = \frac{1}{Z_N(L)} e^{-\beta \sum_{k=1}^N \varphi(r_k)} \delta(L - \|\mathbf{r}\|_1) \Theta(\mathbf{r}).$$

Tímto jsme se dostali až k obecnému tvaru hustoty pravděpodobnosti pro všechny prostorové světlosti. Dalším krokem bude určit rozdělení pravděpodobnosti pro konkrétní prostorovou světlost, značenou jako r_1 .

$$\begin{aligned} g(r_1) &= \int_{\mathbf{R}^{N-1}} P(\mathbf{r}) d(r_2, r_3, \dots, r_N) = \frac{1}{Z_N(L)} \int_{\mathbf{R}^{N-1}} e^{-\beta \sum_{k=1}^N \varphi(r_k)} \delta(L - \|\mathbf{r}\|_1) \Theta(\mathbf{r}) d(r_2, r_3, \dots, r_N) = \\ &= \frac{1}{Z_N(L)} \Theta(r_1) e^{-\beta \varphi(r_1)} \int_{\mathbf{R}^{N-1}} e^{-\beta \sum_{k=2}^N \varphi(r_k)} \delta\left(L - r_1 - \sum_{k=2}^N r_k\right) \Theta(r_2, r_3, \dots, r_N) d(r_2, r_3, \dots, r_N). \end{aligned}$$

Integrál vzniklý v poslední úpravě můžeme interpretovat jako partiční sumu systému s počtem částic $N - 1$ na úseku délky $L - r_1$, tzn.

$$Z_{N-1}(L - r_1) = \int_{\mathbf{R}^{N-1}} e^{-\beta \sum_{k=2}^N \varphi(r_k)} \delta\left(L - r_1 - \sum_{k=2}^N r_k\right) \Theta(r_2, r_3, \dots, r_N) d(r_2, r_3, \dots, r_N).$$

Hustotu pravděpodobnosti obecné prostorové světlosti r lze tedy zapsat v kompaktním tvaru pomocí partičních sum následovně.

$$g(r) = \Theta(r) \frac{Z_{N-1}(L - r)}{Z_N(L)} e^{-\beta \varphi(r)}. \quad (2.4)$$

Výpočet rozdělení prostorových světlostí pro jednotlivé potenciály není příliš přímočarý kvůli Diracově funkci vystupující v partiční sumě. Uvedeme si pouze řešení pro jednotlivé varianty systému. Všechna řešení budou uvedena pro škálovanou verzi systému, kde položíme $L = N$. Tento krok provedeme na úkor obecnosti, ale umožní nám to výsledná řešení zapsat ve zjednodušeném tvaru. Pro systémy skládající se z velkého počtu částic se ovšem negativní vliv tohoto kroku ztrácí.

1. Bezinterakční varianta systému o počtu částic N

$$g(r) = \Theta(r) \frac{N-1}{N} \left(1 - \frac{r}{N}\right)^{N-2}.$$

2. Nerezistivní varianta systému o velkém počtu částic

$$g(r) = \Theta(r) e^{-r}.$$

3. Systém s logaritmickým potenciálem o velkém počtu částic

$$g(r) = \Theta(r) \frac{(\beta + 1)^{\beta+1}}{\Gamma(\beta + 1)} r^\beta e^{-(\beta+1)r}.$$

Rozdělení prostorových světlostí pro systém s hyperbolickým potenciálem bude předmětem dalšího zkoumání, proto si jej v kapitole 4 rozebereme detailněji i s odvozením.

2.5 Rozbor obecného tvaru headway distribuce

V této kapitole krátce nahlédneme na matematickou interpretaci obecného tvaru headway distribuce, kterou jsme již určili jako rovnost (2.4). V předcházející kapitole jsme si již nastínili, že obecné rozdělení prostorových světlostí $g(r)$ musí splňovat podmínky:

1. $g(r) \in C(\mathbb{R}^+)$,
2. $g(r) \in \mathcal{B}$,
3. $g(r)$ má v bodě $r = 0$ plató.

Zmíněné podmínky se opírají o analýzu dat naměřených pomocí indukčních dvojsmyček. Naměřená data totiž ukazují, že je nutné, aby hledaná distribuce měla v bodě $r = 0$ plató. Tato podmínka zaručuje extrémně nízkou pravděpodobnost malých rozestupů mezi vozidly, což odpovídá chování řidičů, kteří se většinou malým rozestupům vyhýbají v zájmu bezpečnosti. Za pevně dané hustoty dopravy musí dále

funkce $g(r)$ klesat limitně k nule pro $r \rightarrow +\infty$. Při nízké hustotě dopravy je možné připustit vyšší pravděpodobnost pro větší rozestupy, ale i přesto není možné dosáhnout libovolně velkých rozestupů mezi vozidly na úseku komunikace konečné délky. Nenulové hodnoty hustoty pravděpodobnosti $g(r)$ má dále smysl definovat pouze na kladné poloose a taktéž by se mělo jednat o spojitou funkci s oborem hodnot $Ran(g) \subset \mathbb{R}_0^+$.

Z rovnosti (2.4) také vyplývá obecný tvar balančních částicových systémů, kterými se budeme zabývat v dalších kapitolách. Naším bodem zájmu bude především balanční částicový systém s repulzivním potenciálem, jenž splňuje všechny výše zmíněné podmínky a koresponduje i s modelem termodynamického plynu. K obdržení zmíněného balančního částicového systému s repulzivním potenciálem z rovnosti (2.4) je pouze potřeba šikovně zvolit potenciál systému. Touto problematikou se budeme zabývat v kapitole 4.

Kapitola 3

Balanční částicový systém jako matematická realizace dopravního modelu

Naším cílem v této kapitole bude zformulovat matematický popis dopravního modelu jako alternativu modelu termodynamického plynu z kapitoly předchozí. Již jsme položili základy zmíněného alternativního popisu, a to v sekci 1.4.

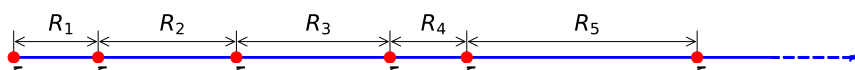
3.1 Definice systému a zavedení náhodných proměnných v modelu

Uvažujeme podobně jako u termodynamického plynu systém bezrozměrných částic umístěných na polopřímce s referenční částicí v počátku. Jednotlivé proměnné modelu považujeme za náhodné veličiny. Na tyto veličiny budeme muset ještě naklást další podmínky, ale ty zmíníme později. Shrňme v následujících definicích tři základní popisy dopravního modelu a značení náhodných veličin figurujících v popisech.

Definice 3.1.1. Mějme spočetnou množinu částic umístěných na polopřímce $M = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots\}$. Jednotlivé prvky množiny M označíme za agenty modelu. Vzdálenost mezi sousedními agenty nazveme rozteč a označíme $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots$, kde $(\mathcal{R}_k)_{k=0}^{+\infty}$ je libovolná posloupnost nezáporných, absolutně spojitých, nezávislých a stejně rozdělených náhodných veličin. Rozteče jsou tedy dány vztahem:

$$\mathcal{R}_k = \rho(\xi_k, \xi_{k+1}),$$

pro $\forall k \in \mathbb{N}_0$, kde ρ je metrika měřící vzdálenost na přímce. Hustotu pravděpodobnosti všech náhodných veličin $(\mathcal{R}_k)_{k=0}^{+\infty}$ budeme nazývat generátorem částicového systému a označíme ji symbolem $h(x)$ (viz obrázek 3.1).



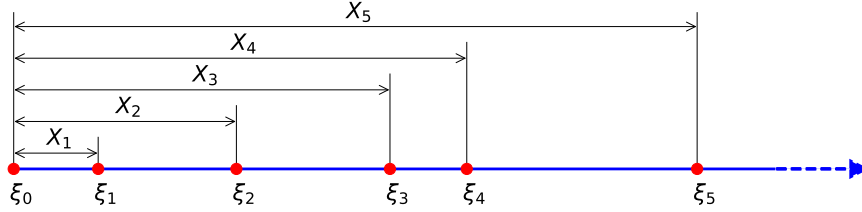
Obrázek 3.1: Znárodnění popisu pomocí roztečí

Definice 3.1.2. Mějme spočetnou množinu částic umístěných na polopřímce $M = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots\}$. Jednotlivé prvky množiny M označíme za agenty modelu. Vzdálenost agenta od referenční částice ξ_0 nazveme

multirozteč a označíme $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots$, kde $(\mathcal{X}_k)_{k=0}^{+\infty}$ je libovolná posloupnost nezáporných, absolutně spojitých, nezávislých a stejně rozdělených náhodných veličin. Multirozteče jsou tedy dány vztahem:

$$\mathcal{X}_k = \rho(\xi_0, \xi_{k+1}),$$

pro $\forall k \in \mathbb{N}_0$, kde ρ je metrika měřící vzdálenost na přímce (viz obrázek 3.2).



Obrázek 3.2: Znázornění popisu pomocí multiroztečí

Definice 3.1.3. Mějme spočetnou množinu částic umístěných na polopřímce $M = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots\}$. Pak zavádíme systém náhodných veličin s parametrem $L > 0$, který popisuje počet částic ležících na intervalu $(0, L)$ za referenční částicí a nazýváme ho intervalová četnost. Intervalové četnosti s parametrem $L > 0$ značíme \mathcal{N}_L .

Za pomoci definovaných pojmů zavedeme tři varianty částicových systémů. Jednotlivé varianty se budou lišit v podmínkách, které bude posloupnost roztečí muset splňovat.

Definice 3.1.4. Obecným částicovým systémem rozumíme posloupnost multiroztečí $(\mathcal{X}_k)_{k=0}^{\infty}$ zavedených předpisem

$$\mathcal{X}_k = \sum_{m=0}^N \mathcal{R}_m,$$

kde $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots$ je libovolná posloupnost nezáporných a absolutně spojitých náhodných veličin.

Definice 3.1.5. Nezávislým částicovým systémem rozumíme posloupnost multiroztečí $(\mathcal{X}_k)_{k=0}^{\infty}$ zavedených předpisem

$$\mathcal{X}_x = \sum_{m=0}^k \mathcal{R}_m,$$

kde $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots$ je libovolná posloupnost nezáporných, absolutně spojitých, nezávislých a stejně rozdělených náhodných veličin. Hustotu pravděpodobnosti všech náhodných veličin $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots$ označíme $h(x)$ a budeme ji nazývat generátorem částicového systému.

Definice 3.1.6. Balančním částicovým systémem rozumíme posloupnost multiroztečí $(\mathcal{X}_k)_{k=0}^{\infty}$ zavedených předpisem

$$\mathcal{X}_x = \sum_{m=0}^k \mathcal{R}_m,$$

kde $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots$ je libovolná posloupnost nezáporných, absolutně spojitých, nezávislých a stejně rozdělených náhodných veličin. Hustotu pravděpodobnosti všech náhodných veličin $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots$ označíme $h(x) \in \mathcal{B}$ a budeme ji nazývat generátorem částicového systému.

Definice obecného 3.1.4 a nezávislého 3.1.5 částicového systému tvoří jisté mezistupně v zavedení balančního částicového systému 3.1.6. Ve zbytku práce budeme pracovat pouze s balančními částicovými systémy. Dále lze předpokládat, že chování různých řidičů bude v mnoha situacích podobné, a proto budeme dále uvažovat, že rozteče a multirozteče jsou stejně rozdělené nezávislé náhodné veličiny (i.i.d.).

3.2 Elementární známé poznatky a teoremy

Vyslovme pár základních vlastností týkajících se zavedených proměnných balančního částicového systému. Tyto vlastnosti uvedeme bez důkazu [10].

Věta 3.2.1. Necht' $h(x) \in \mathcal{B}$ je generátorem BČS, pak pro zavedený popis platí:

$$\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots \sim h(x),$$

$$\mathcal{X}_k = \sum_{m=0}^k \mathcal{R}_m \sim \ast_{m=0}^k h(x).$$

Věta 3.2.2. V balančním částicovém systému $h(x) \in \mathcal{B}$ platí:

1. $\mathbb{E}(\mathcal{R}_k) = \varkappa$
2. $\mathbb{E}(\mathcal{X}_k) = (k + 1)\varkappa$ kde $\varkappa = \mu_1(h)$

Zavedli jsme tři způsoby popisu modelu a bude pro nás klíčové umět mezi těmito popisy přecházet. Zformulujme dvě následující věty, které tuhle problematiku osvětlují.

Věta 3.2.3. Necht' $(\mathcal{X}_k)_{k=0}^{+\infty}$ je posloupnost multiroztečí dané distribučními funkcemi $(G_k)_{k=0}^{+\infty}$, pak pro popis pomocí intervalových frekvencí platí

$$\mathbb{P}[\mathcal{N}_L = 0] = 1 - G_0(L),$$

$$\mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k] = G_{k-1}(L) - G_k(L).$$

Věta 3.2.4. Necht' $\mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k]$ představuje popis pomocí intervalových frekvencí. Pak pro posloupnost roztečí $(g_k)_{k=0}^{+\infty}$ a posloupnost multiroztečí $(G_k)_{k=0}^{+\infty}$ platí

$$G_k(x) = 1 - \sum_{m=0}^k \mathbb{P}[\mathcal{N}_x = m],$$

$$g_k(x) = -\Theta(x) \sum_{m=0}^k \frac{d\mathbb{P}[\mathcal{N}_x = m]}{dx}.$$

3.3 Charakteristiky 1. a 2. druhu a jejich vlastnosti

Zrekapitulujme si dále statistické charakteristiky, pomocí kterých budeme popisovat balanční částicové systémy (dále jen BČS) a jejich vlastnosti. Statistické charakteristiky lze rozdělit do dvou skupin na charakteristiky 1., resp. 2. řádu podle toho, jestli jsou odvozené od prvních, resp. druhých momentů balančované hustoty.

3.3.1 Charakteristiky 1. řádu

Definice 3.3.1. Mějme balanční částicový systém, pak zavádíme charakteristiky prvního řádu jako:

1. Střední hodnota roztečí: $\mathbb{E}(\mathcal{R}_k) = \int_{\mathbb{R}} xh(x)dx.$
2. Střední hodnota multiroztečí: $\mathbb{E}(\mathcal{X}_k) = \int_{\mathbb{R}} xg_k(x)dx.$
3. Trendová funkce: $\omega(L) = \mathbb{E}(\mathcal{N}_L) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP[\mathcal{N}_L = k].$

Definice 3.3.2. Necht' $\mathcal{X}_k \sim g_k(x)$ jsou multirozteče balančního částicového systému. Pak funkci $r(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$ nazveme shlukovou funkcí balančního částicového systému. Dále označme $s(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} kg_k(x)$ shlukovou funkcí prvního druhu.

Věta 3.3.3. Mějme balanční částicový systém. Pak platí

$$\mathbb{E}(\mathcal{X}_k) = (k + 1)\mathbb{E}(\mathcal{R}_k).$$

Věta 3.3.4. Necht' $r(x)$ je shluková funkce a $s(x)$ je shluková funkce prvního druhu balančního částicového systému. Pak funkce $r(x)$ a $s(x)$ jsou omezené a stejnoměrně konvergují na každém uzavřeném intervalu $\langle 0, L \rangle$.

Věta 3.3.5. Necht' $\omega(x)$ je trendová funkce a $r(x)$ je shluková funkce obecného balančního částicového systému. Pak platí

$$\omega(L) = \int_0^L r(x)dx.$$

Uvedené charakteristiky můžeme poměrně jednoduše transformovat pomocí Laplaceovy transformace. Získané Laplaceovy obrazy nám poslouží k určení dalších vlastností BČS.

3.3.1.1 Laplaceova forma charakteristik 1. řádu

Definujme si označení pro Laplaceovy obrazy generátoru a shlukové funkce BČS. Tohoto značení se budeme držet i nadále v dalších kapitolách.

Definice 3.3.6. Necht' $h(x)$ je generátor a $r(x)$ je shluková funkce balančního částicového systému, pak označme Laplaceovy transformace daných funkcí jako $H(s) := \mathcal{L}[h(x)]$ a $R(s) := \mathcal{L}[r(x)]$.

Dále vyslovme základní vlastnosti funkcí $H(s)$ a $R(s)$.

Věta 3.3.7. Necht' $h(x)$ je generátor a $r(x)$ je shluková funkce balančního částicového systému a $H(s)$, $R(s)$ jsou jim příslušné Laplaceovy obrazy. Pak platí:

1. Řada $\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$ konverguje všude v \mathbb{R} a na každém $\langle 0, L \rangle$ navíc stejnoměrně.
2. $\forall x \in \mathbb{R} : r(x) > 0$ a navíc $r(x) = \Theta(x)r(x)$.
3. Výroky A: $\omega(L) = L$ na \mathbb{R}^+ , B: $r(x) \sim \Theta(x)$ jsou ekvivalentní.
4. $\forall s > 0 : |H(s)| < 1$.
5. $R(s) = \frac{H(s)}{1-H(s)}$.
6. $r(x)$ je omezená na \mathbb{R} a $\lim_{r \rightarrow +\infty} r(x) = 1$.

3.3.2 Charakteristiky 2. řádu

Definice 3.3.8. Mějme balanční částicový systém. Pak zavádíme charakteristiky druhého řádu jako:

1. Rozptyl roztečí: $VAR(\mathcal{R}_k) = \mu_2(h) - 1$.
2. Rozptyl multiroztečí: $VAR(\mathcal{X}_k) = VAR(\sum_{m=0}^k \mathcal{R}_m) = (k+1) VAR(\mathcal{R}_0)$.
3. Frekvenční rozptyl: $\square(L) = VAR(\mathcal{N}_L) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k - \mathbb{E}(L))^2 \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k] = \mathbb{E}(\mathcal{N}_L^2) - \omega^2(L)$.
4. Statistická rigidita: $\Delta(L) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k - L)^2 \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k] = \mathbb{E}(\mathcal{N}_L^2) - 2L\omega(L) + L^2$.

Věta 3.3.9. Necht' $\omega(x)$ je trendová funkce a $r(x)$ je shluková funkce obecného balančního částicového systému. Pak platí

$$\mathbb{E}(\mathcal{N}_L^2) = 2r(L) * \omega(L) + \omega(L).$$

3.3.2.1 Laplaceova forma charakteristik 2. řádu

Pro naše budoucí zkoumání vlastností balančních částicových systémů bude klíčový Laplaceův obraz statistické rigidity.

$$\mathfrak{L}[\Delta(L)] = \mathfrak{L}[\mathbb{E}(\mathcal{N}_L^2)] - 2\mathfrak{L}[L\omega(L)] + \mathfrak{L}[L^2] = 2\frac{R^2(s)}{s} + \frac{R(s)}{s} + 2\frac{sR'(s) - R(s)}{s^2} + \frac{2}{s^3},$$

$$s^3 \mathfrak{L}[\Delta(L)] = 2(1 - sR(s)) + s^2(2R^2(s) + R(s) + 2R'(s)).$$

Dále dosad' me za $R(s) = \frac{H(s)}{1-H(s)}$ a upravme následovně

$$s^3 \mathfrak{L}[\Delta(L)] = 2 + sH(s)\frac{s-2}{1-H(s)} + 2s^2\frac{H'(s) + H^2(s)}{(1-H(s))^2}.$$

Pro obecný balanční částicový systém nemusí být nalezení stochastické rigidity snadnou úlohou, proto se pokusíme o její aproximaci. Funkce $\Delta(L)$ má lineární asymptotu, kterou zapíšeme jako $\chi L + \delta$ a její tvar spočteme pomocí Laplaceovy transformace.

$$s^3 \mathfrak{L}[\chi L + \delta] = \chi s + \delta s^2 \doteq s^3 \mathfrak{L}[\Delta(L)] = 2 + sH(s)\frac{s-2}{1-H(s)} + 2s^2\frac{H'(s) + H^2(s)}{(1-H(s))^2}.$$

Zaved' me si nyní funkci $B(s) := s^3 \mathfrak{L}[\Delta(L)] \doteq \chi s + \delta s^2$ a přepíšme ji do Maclaurinova rozvoje druhého řádu, tzn. $B(s) \doteq B(0) + \frac{B'(0)}{1}s + \frac{B''(0)}{2}s^2 \doteq \chi s + \delta s^2$. Z této úvahy dostáváme tvar lineární asymptoty funkce $\Delta(L)$.

$$\chi = B'(0), \quad \delta = \frac{1}{2}B''(0).$$

Lineární člen určující stoupání asymptoty funkce $\Delta(L)$ nazýváme stochastickou kompresibilitou a konstantní člen nazýváme deflekcí. Závěr úprav shrneme v definici stochastické kompresibility.

Definice 3.3.10. Kompresibilitou balančního částicového systému rozumíme lineární člen asymptoty jeho statistické rigidity.

Při uvažování pouze krátkodosahového potenciálu lze kompresibilitu vypočítat z jednoduššího vztahu, který vyslovíme v následující větě o kompresibilitě a deflekcii, viz [4].

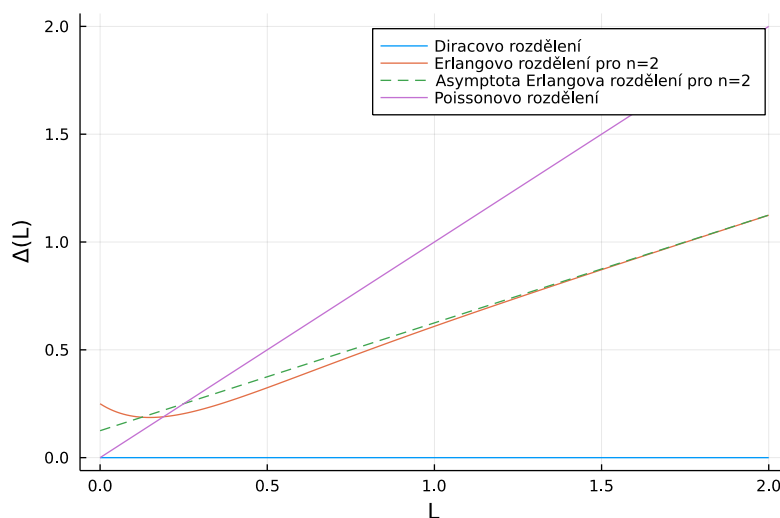
Věta 3.3.11. Ve škálovaném balančním částicovém systému zadaném generátorem $h(x)$ je stochastická kompresibilita rovna rozptylu sousedních roztečí, tj.

$$\chi = \mu_2(h) - 1.$$

Pro příslušnou defleksi navíc platí:

$$\delta = \frac{1}{6} (-4\mu_3(h) - 9\mu_2(h) + 9\mu_2^2(h) + 6).$$

Lineární asymptota stochastické rigidity je velmi důležitou součástí popisu částicových systémů, jelikož hodnota statistické rigidity systému se ke své asymptotě velice rychle přimyká. K demonstraci této vlastnosti využijme Erlangovo rozdělení.



Obrázek 3.3: Aproximace statistické rigidity Erlangova rozdělení s parametrem $n = 2$ pomocí asymptoty

Na využití kompresibility při popisu částicových systému detailněji nahlédneme v následující kapitole.

3.4 Klasifikace částicového systému podle úrovně stochastické kompresibility

Částicové systémy lze rozdělit podle úrovně kompresibility na sub-poissonovské a super-poissonovské. Jako referenční hodnoty při tomto rozdělení nám poslouží kompresibilita Poissonova a Diracova systému. poissonovský systém je považován za nahodilý systém, jelikož jednotliví agenti v poissonovském systému vůbec neinteragují (nazývá se také bezinterakčním BČS), tudíž nelze v takovém systému vy pozorovat jakoukoliv závislost. Naopak Diracův systém je systémem deterministickým, takže nahodilost tohoto systému je nulová. Tímto jsme vytyčili pomyslné hranice a dále určíme hodnoty kompresibility pro poissonovský a Diracův systém. Pro tyto systémy lze kompresibilitu získat přímým výpočtem.

3.4.1 Kompresibilita poissonovského systému

Generátorem poissonovského BČS (neboli bezinterakčního systému) je dán exponenciální funkce:

$$h(x) = A\Theta(x)e^{-\lambda x},$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Určeme nejprve hodnotu normalizační konstanty a parametru λ pro škálovanou variantu systému.

$$\mu_0(h) = \int_{\mathbb{R}} A\Theta(x)e^{-\lambda x} dx = A \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = A \frac{1}{\lambda} \stackrel{!}{=} 1 \implies A = \lambda.$$

$$\mu_1(h) = \int_{\mathbb{R}} \Theta(x)\lambda x e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda} \stackrel{!}{=} 1 \implies \lambda = 1.$$

Generátor škálovaného poissonovského BČS je dán jako: $h(x) = \Theta(x)\lambda e^{-\lambda x}$, kde $\lambda = 1$. Určeme dále druhý necentrální moment.

$$\mu_2(h) = \int_{\mathbb{R}} \Theta(x)\lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{2!}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Následně za použití věty 3.3.11 o kompresibilitě a deflekcii určíme kompresibilitu, kde dosadíme $\lambda = 1$:

$$\chi = \frac{2}{\lambda^2} - 1 = 2 - 1 = 1.$$

3.4.2 Kompresibilita Diracova systému

Generátor Diracova BČS je dán jako:

$$h(x) = A\delta(x-1)e^{-\lambda x},$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Určeme nejprve hodnotu normalizační konstanty a parametru λ pro škálovanou variantu systému.

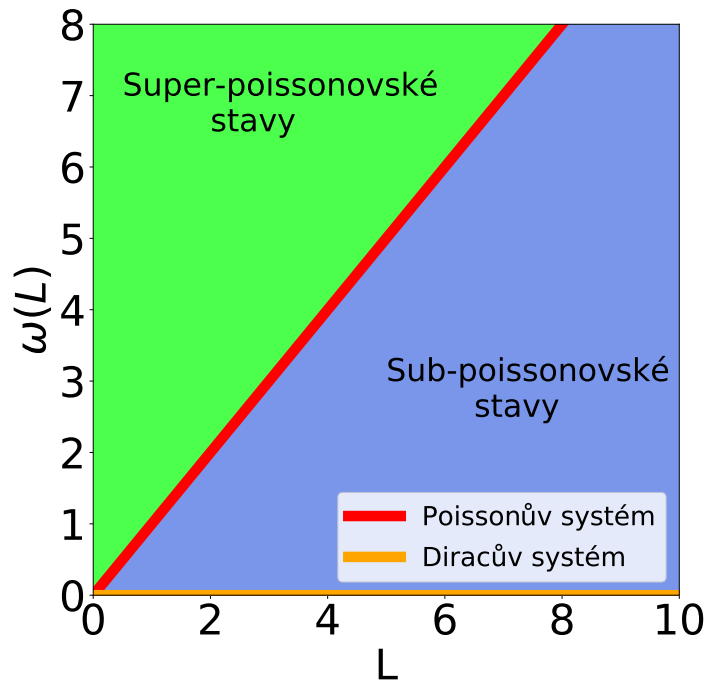
$$\mu_0(h) = \int_{\mathbb{R}} A\delta(x-1)e^{-\lambda x} dx = Ae^{-\lambda x}|_{x=1} = Ae^{-\lambda} \stackrel{!}{=} 1 \implies A = e^{\lambda},$$

$$\mu_1(h) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x-1)e^{\lambda x} x e^{-\lambda x} dx = \int_0^{+\infty} \delta(x-1)x dx = x|_{x=1} = 1.$$

Generátor škálovaného Diracova BČS je dán jako: $h(x) = \delta(x-1)$. Určeme dále druhý necentrální moment.

$$\mu_2(h) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x-1)e^{\lambda x} x^2 e^{-\lambda x} dx = \int_0^{+\infty} \delta(x-1)x^2 dx = x^2|_{x=1} = 1.$$

Následně za použití věty 3.3.11 o kompresibilitě a deflekcii určíme kompresibilitu, kde dosadíme $\lambda = 1$. Odtud $\chi = 0$.



Obrázek 3.4: Klasifikace systémů pomocí kompresibility na sub-poissonovské a super-poissonovské stavy

3.4.3 Klasifikace systémů podle kompresibility

Závěrem tedy je, že kompresibilita systému by se měla pohybovat mezi hodnotou 0 a 1. Z naměřených dat se ovšem ukazuje, že v dopravním provozu nastávají i stavy s kompresibilitou větší než 1 a je tedy možné dosáhnout větší kompresibility, než má poissonovský systém. Systémy splňující $\chi > 1$ nazveme super-poissonovskými a systémy s kompresibilitou v intervalu $(0, 1)$ nazveme sub-poissonovské. Pro systémy s hraničními hodnotami kompresibility, tj. pro $\chi = 0$, resp. $\chi = 1$, budeme nadále používat označení Diracův, resp. Poissonův systém.

Pokud omezíme naši klasifikaci pouze na systémy s krátkodosahovým potenciálem, pak můžeme z věty o kompresibilitě a deflekcii (3.3.11) sestavit tabulku kompresibility pro základní tvary hustot.

Název hustoty	Balanční jádro hustoty	κ	Kompresibilita
Diracova hustota	$\delta(x - 1)$	1	0
Exponenciální hustota	$\Lambda \Theta(x)$	1	1
Erlangova hustota	$\Theta(x)x^n$	1	$\frac{1}{n+1}$
Gamma hustota	$\Theta(x)x^\alpha$	1	$\frac{1}{\beta+1}$
Jednparametrická GIG hustota	$\Theta(x)e^{-\frac{\beta}{x}}$	1	$\frac{\beta+2}{\lambda} - 1$
Dvoupametrická GIG hustota	$\Theta(x)x^\alpha e^{-\frac{\beta}{x}}$	1	$\frac{\alpha+\beta+2}{\lambda} - 1$

Kapitola 4

Repulzivní varianty balančního částicového systému a jejich matematické zákonitosti

4.1 BČS s repulzivním potenciálem

Definice 4.1.1. Necht' potenciál $\varphi(x)$ je spojitá funkce se spojitou první derivací na $(0, +\infty)$ a dále necht' platí:

$$\varphi'(x) \leq 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi'(x) = 0.$$

Pak $\varphi(x)$ nazveme repulzivním potenciálem [6].

V další větě vyslovíme a dokážeme tvrzení, že funkce $g(x)$ s repulzivním potenciálem je nutně funkce z třídy balancovaných funkcí. To nám umožní zkoumat systémy s repulzivním potenciálem bez nutnosti vždy ověřit, jestli se jedná o balanční částicový systém. Taky budeme mít možnost využívat již dříve dokázané vlastnosti BČS.

Věta 4.1.2. Necht' $\varphi(x)$ je spojitě diferencovatelný repulzivní potenciál na intervalu $(0, +\infty)$. Dále necht' splňuje podmínky:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi'(x) = 0$,
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi'(x)}{x} = 0$,
3. $(\exists K > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x > 0) : e^{-\varphi(x)} \leq Kx^n$.

Pak platí:

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = +\infty$,
2. $\varphi(x) \in C(0, +\infty)$,
3. $A\Theta(x)x^\alpha e^{-\beta\varphi(x)}e^{-\lambda x} \in \mathcal{B}[\lambda]$, kde $A \geq 0, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \geq 0, \lambda > 0$.

Důkaz. Dokažme vlastnosti v pořadí kopírující znění věty.

1. Z podmínek daných pro potenciál a charakteru funkce e^x víme, že je splněna nerovnost:

$$\forall x > 0 : 0 \leq e^{-\varphi(x)} \leq Kx^n.$$

Z nerovnosti funkcí a nezápornosti funkce $e^{-\varphi(x)}$ plyne i nerovnost jejich limit, to jest

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0_+} e^{-\varphi(x)} \leq \lim_{x \rightarrow 0_+} Kx^n = 0.$$

Z věty o limitě sevřené funkce platí:

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} e^{-\varphi(x)} = 0.$$

Což nutně znamená, že $\lim_{x \rightarrow 0_+} \varphi(x) = +\infty$.

2. Plyne přímo z předpokladů věty.

3. Platnost tohoto tvrzení ukážeme ověřením axiomů definice balancované hustoty 1.4.1. Ukažme tedy, že funkce $g(x) = A\Theta(x)x^\alpha e^{-\beta\varphi(x)}e^{-\lambda x}$ splňuje pořadí axiomů definice.

1. Axiom kompletnosti:

$\forall x \in \mathbb{R}$ je funkce $g(x)$ řádně definovaná a z toho plyne $Dom(g) = \mathbb{R}$.

2. Axiom nezápornosti:

Funkce $g(x)$ je pro $\forall x \in \mathbb{R}^-$ nulová a pro $\forall x \in \mathbb{R}_0^+$ nabývá pouze nezáporných hodnot, tzn. $Ran(g) \subset \mathbb{R}_0^+$.

3. Axiom částečné spojitosti:

Z 2. bodu důkazu víme, že $\varphi(x) \in C(0, +\infty)$ a z 1. bodu důkazu víme, že $\lim_{x \rightarrow 0_+} \varphi(x) = +\infty$. Z těchto dvou vlastností plyne $e^{-\beta\varphi(x)} \in C(\mathbb{R})$. Podobně jsou na \mathbb{R} spojitě i funkce $e^{-\lambda x}$ a x^α . Jednoduše si rozmyslíme i limitní hodnotu funkce $g(x)$ pro $x = 0$, což je jediný bod, kde by mohla vzniknout nespojitost.

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} A\Theta(x)x^\alpha e^{-\beta\varphi(x)}e^{-\lambda x} = 0.$$

Závěrem je tedy implikace $g(x) \in C(\mathbb{R}) \implies g(x) \in PC(\mathbb{R})$.

4. Axiom integrability:

$$\forall x \in \mathbb{R}_0^+ : e^{-\beta\varphi(x)} \leq 1 \implies \int_{\mathbb{R}} A\Theta(y)x^\alpha e^{-\beta\varphi(y)}e^{-\lambda y} dy \leq \int_{\mathbb{R}} A\Theta(y)x^\alpha e^{-\lambda y} dy = \frac{\alpha!}{\lambda^{\alpha+1}}.$$

Integrál funkce $g(x)$ se nám povedlo shora omezit Lebesgueovskými integrovatelnou funkcí. Ze srovnávacího kritéria Lebesgueova integrálu pak plyne: $g(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

5. Axiom pozitivnosti nosiče:

Funkce $g(x)$ je pro $\forall x \in \mathbb{R}^-$ nulová, tzn. $\text{supp}(g) \subset \mathbb{R}_0^+$.

6. Axiom balancovanosti:

Ukážeme, že pro $\omega = \lambda$ je splněn axiom balancovanosti:

$$\alpha > \lambda \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)e^{\alpha x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} A\Theta(x)x^\alpha e^{-\beta\varphi(x)}e^{(\alpha-\lambda)x} = +\infty.$$

$$\alpha < \lambda \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)e^{\alpha x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} A\Theta(x)x^\alpha e^{-\beta\varphi(x)}e^{(\alpha-\lambda)x} = 0.$$

K výpočtu limit jsme využili vlastnost potenciálu $\varphi(x)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$.

□

Definice 4.1.3. Balančním částicovým systémem s repulzivním potenciálem $\varphi(x)$ budeme rozumět částicový systém, jehož generátor je funkce

$$g(x) = A\Theta(x)x^\alpha e^{-\beta\varphi(x)}e^{-\lambda x},$$

kde $A, \alpha, \beta, \lambda$ jsou libovolné parametry hustoty s omezeními $A \geq 0, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \geq 0, \lambda > 0$.

Povšimněme si, že věta 4.1.2 nám zaručuje, že GIG rozdělení náleží do třídy balancovaných hustot.

4.2 Obecné vlastnosti repulzivního BČS

4.2.1 Omezující podmínky pro statistické veličiny repulzivního BČS

Na úvod vyslovíme tvrzení o některých statistických veličinách repulzivních balančních částicových systémů (BČS), Tato tvrzení nám nadále přijdou vhod v další kapitole, kde se na ně budeme odvolávat při dokazování omezení jednotlivých parametrů BČS zadaného GIG rozdělením.

Věta 4.2.1. Mějme $g(x) \in \mathcal{B}$. Pak pro takovou funkci platí:

$$2\mu_{k+1}(g) < \mu_{k+2}(g) + \mu_k(g).$$

Důkaz. Převěď me všechny momenty funkce $g(x)$ na jednu stranu nerovnosti a upravme.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{R}} x^k g(x) dx - 2 \int_{\mathbb{R}} x^{k+1} g(x) dx + \int_{\mathbb{R}} x^{k+2} g(x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} (x^2 - 2x + 1)x^k g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} (x-1)^2 x^k g(x) dx. \end{aligned}$$

Funkce $g(x)$ je z třídy balancovaných hustot, takže z definice

$$\text{supp}(g) \subset \mathbb{R}_0^+ \implies \forall x \in \mathbb{R}_0^- : g(x) = 0.$$

Dále funkce $(x-1)^2$ je kladná skoro všude v \mathbb{R} a funkce x^k je pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$ kladná na celém \mathbb{R}^+ . Odtud pak platí:

$$(x-1)^2 x^k g(x) > 0 \text{ skoro všude v } \mathbb{R}^+ \implies \int_0^{+\infty} (x-1)^2 x^k g(x) dx > 0.$$

□

Věta 4.2.2. Necht' $\varphi(x)$ je repulzivní potenciál. Pokud $\xi \geq \text{inb}(g)$, pak platí:

$$\xi \int_x^{+\infty} g(y) dy > g(x),$$

pro $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

Důkaz. Uvažujme nerovnost

$$0 > \int_{\mathbb{R}} A\Theta(y)\varphi'(y)e^{-\beta\varphi(y)}e^{-\lambda y}dy. \quad (4.1)$$

Tato nerovnost nutně platí z charakteru funkcí z BČS a definice repulzivního potenciálu, tzn. $\varphi'(x) < 0$ na intervalu $(0, +\infty)$. Označme $\omega = \text{inb}(g)$ a dosad' me tuto hodnotu za parametr λ . Dále pokračujme v úpravách integrálu z nerovnosti (4.1) za použití metody per partes. Odtud

$$\begin{aligned} 0 > \int_{\mathbb{R}} A\Theta(y)\varphi'(y)e^{-\beta\varphi(y)}e^{-\omega y}dy &= \int_x^{+\infty} A\varphi'(y)e^{-\beta\varphi(y)}e^{-\omega y}dy = \left| \begin{array}{l} u = Ae^{-\omega y} \quad v' = \varphi'(y)e^{-\beta\varphi(y)} \\ u' = -A\omega e^{-\omega y} \quad v = -\frac{1}{\beta}e^{-\beta\varphi(y)} \end{array} \right| = \\ &= \left[-A\frac{1}{\beta}e^{-\beta\varphi(y)}e^{-\omega y} \right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} A\omega e^{-\omega y}\frac{1}{\beta}e^{-\beta\varphi(y)}dy = \frac{1}{\beta}g(x) - \frac{\omega}{\beta} \int_x^{+\infty} Ae^{-\omega y}e^{-\beta\varphi(y)}dy = \\ &= \frac{1}{\beta}g(x) - \frac{\omega}{\beta} \int_x^{+\infty} g(y)dy \implies g(x) < \omega \int_x^{+\infty} g(y)dy. \end{aligned}$$

Složená závorka, vzniklá po použití metody per partes, má nulovou horní mez, jelikož limitní hodnota dané funkce v nekonečnu je nulová, což je dáno předpoklady věty a vlastnostmi repulzivního potenciálu. Proto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\beta\varphi(x)} = 1 \wedge \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha+1}e^{-\omega x} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{A}{\beta}x^{\alpha+1}e^{-\beta\varphi(x)}e^{-\omega x} = 0.$$

Po úpravě zůstane pouze dolní mez, kterou můžeme přepsat jako funkční hodnotu funkce g vydělenou parametrem β . Dokázali jsme nerovnost pro $\omega \leq \xi$, takže nerovnost musí platit i pro libovolné $\xi \geq \text{inb}(g)$, čili

$$g(x) < \omega \int_x^{+\infty} g(y)dy \leq \xi \int_x^{+\infty} g(y)dy.$$

Čímž jsme získali dokazovanou nerovnost. □

Věta 4.2.3. Necht' $\varphi(x)$ je repulzivní potenciál. Pokud $\xi \geq \text{inb}(g)$, pak $\xi\mu_{k+1}(g) > (k+1)\mu_k(g)$, kde $g(x)$ je BČS s repulzivním potenciálem.

Důkaz. Využijme nerovnost (4.1), která je znovu splněna z charakteru funkcí z BČS a předpokladu, že funkce $\varphi'(x)$ je záporná na intervalu $(0, +\infty)$, což plyne přímo z definice repulzivního potenciálu. Označme $\omega = \text{inb}(g)$ a dosad' me tuto hodnotu za parametr λ . Dále pokračujme v úpravách integrálu z nerovnosti (4.1) za použití metody per partes.

$$\begin{aligned} 0 > \int_{\mathbb{R}} A\Theta(x)\varphi'(x)x^{k+1}e^{-\beta\varphi(x)}e^{-\omega x}dx &= \int_0^{+\infty} A\varphi'(x)x^{k+1}e^{-\beta\varphi(x)}e^{-\omega x}dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = Ax^{k+1}e^{-\omega x} \quad v' = \varphi'(x)e^{-\beta\varphi(x)} \\ u' = A(k+1-\omega x)e^{-\omega x} \quad v = -\frac{1}{\beta}e^{-\beta\varphi(x)} \end{array} \right| = \left[-A\frac{1}{\beta}x^{k+1}e^{-\beta\varphi(x)}e^{-\omega x} \right]_0^{+\infty} + \\ &+ \int_0^{+\infty} A(k+1-\omega x)x^k e^{-\omega x}\frac{1}{\beta}e^{-\beta\varphi(x)}dx = \frac{k+1}{\beta} \int_0^{+\infty} Ax^k e^{-\beta\varphi(x)}e^{-\omega x}dx - \\ &- \frac{\omega}{\beta} \int_0^{+\infty} Ax^{k+1}e^{-\omega x}e^{-\beta\varphi(x)}dx = \frac{k+1}{\beta}\mu_k(g) - \frac{\omega}{\beta}\mu_{k+1}(g) \implies \\ &\implies (k+1)\mu_k(g) < \omega\mu_{k+1}(g). \end{aligned}$$

Složená závorka vzniklá po použití per partes je nulová, jelikož limitní hodnoty dané funkce v obou mezích jsou nulové, což je dáno předpoklady věty a vlastnostmi repulzivního potenciálu. Proto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\beta\varphi(x)} = 1 \wedge \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{k+1} e^{-\omega x} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{A}{\beta} x^{k+1} e^{-\beta\varphi(x)} e^{-\omega x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} e^{-\beta\varphi(x)} = 0 \wedge \lim_{x \rightarrow 0_+} x^{k+1} e^{-\omega x} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0_+} -\frac{A}{\beta} x^{k+1} e^{-\beta\varphi(x)} e^{-\omega x} = 0.$$

Rozdělením zbylého integrálu můžeme následně vzniklé integrály přepsat jako $\mu_k(g)$ a $\mu_{k+1}(g)$. Dokázali jsme nerovnost pro $\omega \leq \xi$, takže nerovnost musí platit i libovolné $\xi \geq \text{inb}(g)$. Tímto dostáváme dokazovanou nerovnost

$$(k+1)\mu_k(g) < \omega\mu_{k+1}(g) \leq \xi\mu_{k+1}(g).$$

□

4.2.2 Mezní hodnoty náhodných veličin

Věta 4.2.4. Mějme obecný generátor BČS daný vztahem $g(x) = A\Theta(x)x^\alpha e^{-\beta\varphi(x)} e^{-\lambda x}$ a necht' potenciál $\varphi(x)$ dále splňuje podmínky:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow 0_+} \varphi(x) = +\infty$,
2. $\varphi(x) \in C^1(0, +\infty)$,
3. $\varphi'(x) < 0$,
4. $\mu_0(g) = 1$ a $\mu_1(g) = 1$.

Pak $\lambda > \alpha + 1$, $\mu_2(g) < 2$ a $A \geq \frac{(\alpha+1)^{\alpha+1}}{\alpha!}$.

Důkaz. Dokažme nejprve tvrzení, že $\lambda > \alpha + 1$, jelikož v další části důkazu bude potřeba tohoto tvrzení využít. Využijme nerovnost (4.1), která je znovu splněna z charakteru funkcí z BČS a z 3. předpokladu věty. Dále pokračujme v úpravách integrálu z nerovnosti (4.1) za použití metody per partes, konkrétně

$$\begin{aligned} 0 > \int_{\mathbb{R}} A\Theta(x)\varphi'(x)x^{\alpha+1} e^{-\beta\varphi(x)} e^{-\lambda x} dx &= \int_0^{+\infty} A\varphi'(x)x^{\alpha+1} e^{-\beta\varphi(x)} e^{-\lambda x} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = Ax^{\alpha+1} e^{-\lambda x} \\ u' = A(\alpha+1-\lambda x)x^\alpha e^{-\lambda x} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} v' = \varphi'(x)e^{-\beta\varphi(x)} \\ v = -\frac{1}{\beta} e^{-\beta\varphi(x)} \end{array} \right| = \left[-A\frac{1}{\beta} x^{\alpha+1} e^{-\beta\varphi(x)} e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} + \\ &+ \int_0^{+\infty} A(\alpha+1-\lambda x)x^\alpha e^{-\lambda x} \frac{1}{\beta} e^{-\beta\varphi(x)} dx = \frac{\alpha+1}{\beta} \int_0^{+\infty} Ax^\alpha e^{-\lambda x} e^{-\beta\varphi(x)} dx - \\ &-\frac{\lambda}{\beta} \int_0^{+\infty} Ax^{\alpha+1} e^{-\lambda x} e^{-\beta\varphi(x)} dx = \frac{\alpha+1}{\beta} \mu_0(g) - \frac{\lambda}{\beta} \mu_1(g) = \frac{\alpha+1}{\beta} - \frac{\lambda}{\beta} \implies \lambda > \alpha + 1. \end{aligned}$$

Složená závorka vzniklá po použití metody per partes je nulová, jelikož limitní hodnoty v obou mezích jsou nulové, což je dáno předpoklady věty a vlastnostmi repulzivního potenciálu. Dále

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\beta\varphi(x)} = 1 \wedge \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha+1} e^{-\lambda x} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{A}{\beta} x^{\alpha+1} e^{-\beta\varphi(x)} e^{-\lambda x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} e^{-\beta\varphi(x)} = 0 \wedge \lim_{x \rightarrow 0_+} x^{\alpha+1} e^{-\lambda x} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0_+} -\frac{A}{\beta} x^{\alpha+1} e^{-\beta\varphi(x)} e^{-\lambda x} = 0.$$

V poslední úpravě jsme využili 4. předpokladu věty. Tímto jsme docílili první dokazované nerovnosti.

Vyslovme dále následující tvrzení, které platí z monotonie funkce e^x .

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in (0, +\infty) : x^\alpha e^{-\beta\varphi(x)} e^{-\lambda x} > x^\alpha e^{-\beta\varphi(x)} e^{-(\lambda+\epsilon)x} > 0, \quad (4.2)$$

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in (0, +\infty) : x^\alpha e^{-\beta\varphi(x)} e^{-\lambda x} > x^\alpha e^{-(\beta+\epsilon)\varphi(x)} e^{-\lambda x} > 0. \quad (4.3)$$

Z věty o monotónii Lebesgueova integrálu musí kromě nerovností (4.2) a (4.3) platit i nerovnosti mezi integrály jednotlivých funkcí. Při pevně zvolených $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \geq 0, \lambda > 0$ a pro všechna $\epsilon > 0$ platí

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\beta\varphi(x)} e^{-\lambda x} dx > \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\beta\varphi(x)} e^{-(\lambda+\epsilon)x} dx > 0, \quad (4.4)$$

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\beta\varphi(x)} e^{-\lambda x} dx > \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-(\beta+\epsilon)\varphi(x)} e^{-\lambda x} dx > 0. \quad (4.5)$$

Z toho vyplývá, že $\mu_2(g)$ může nabývat nejvyšší možné hodnoty pro co nejmenší přípustné parametry β, λ . V první části důkazu jsme dokázali, že za daných předpokladů je $\lambda > \alpha + 1$ a z definice repulzivního BČS je parametr $\beta \in \mathbb{R}^+$. Uvažujme krajní případ a to $\beta_0 = 0$ a $\lambda_0 = \alpha + 1$. Pokud dokazované nerovnosti platí pro tento případ, pak z nerovností (4.4) a (4.5) vyplyne dokazovaná nerovnost. Určeme nejprve normalizační konstantu pro tento krajní případ.

$$\begin{aligned} 1 &\stackrel{!}{=} \int_{\mathbb{R}} A\Theta(x)x^\alpha e^{-\beta_0\varphi(x)} e^{-\lambda_0 x} dx = \int_0^{+\infty} Ax^\alpha e^{-\beta_0\varphi(x)} e^{-\lambda_0 x} dx \leq \int_0^{+\infty} Ax^\alpha e^{-(\alpha+1)x} dx = A \frac{\alpha!}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \\ &\implies A \geq \frac{(\alpha+1)^{\alpha+1}}{\alpha!}. \end{aligned}$$

Zde dostáváme dokazovanou nerovnost pro normalizační konstantu. Následně provedeme podobnou úpravu pro druhý necentrální moment:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} A\Theta(x)x^{\alpha+2} e^{-\beta_0\varphi(x)} e^{-\lambda_0 x} dx &= \int_0^{+\infty} Ax^{\alpha+2} e^{-\beta_0\varphi(x)} e^{-\lambda_0 x} dx \leq \int_0^{+\infty} Ax^{\alpha+2} e^{-(\alpha+1)x} dx = A \frac{(\alpha+2)!}{(\alpha+1)^{\alpha+3}} = \\ &= \frac{\alpha+2}{\alpha+1} = 1 + \frac{1}{\alpha+1}, \end{aligned}$$

kde jsme v posledním kroku dosadili již vypočtenou normalizační konstantu. Dále je potřeba zdůvodnit oprávněnost dosazení. Normalizační konstanta totiž roste s rostoucím α zatímco $\mu_2(g)$ s rostoucím α klesá. Již ze získaného výsledku $\mu_2(g) = 1 + \frac{1}{\alpha+1}$ je patrné, že μ_2 klesá rychleji než A roste. Pro jiné hodnoty β, λ budou nerovnosti zachovány díky nerovnostem (4.4) a (4.5). □

4.3 BČS zadaný generátorem ze třídy GIG

Zavedme nyní balanční částicový systém s hyperbolickým potenciálem.

Definice 4.3.1. Zobecněným inverzním Gaussovým rozdělením (zkráceně GIG = generalized inverse Gaussian distribution) rozumíme funkci tvaru

$$h(x) = A\Theta(x)x^\alpha e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x},$$

kde $A, \alpha, \beta, \lambda$ jsou libovolné parametry hustoty s omezeními $A \geq 0, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \geq 0, \lambda > 0$.

Pro počáteční zjednodušení budeme nejprve uvažovat systém s parametrem $\alpha = 0$, jenž nazveme jedno-parametrickou GIG hustotou. Až posléze nás bude zajímat i zobecněná varianta GIG rozdělení s parametrem $\alpha \neq 0$, které nazveme dvouparametrickým.

4.3.1 Necentrální momenty GIG rozdělení

Než se pustíme do vyčíslování necentrálních momentů, definujeme třídu speciálních, tzv. Macdonaldových funkcí. Během počítání jednotlivých momentů pro GIG rozdělení budeme potřebovat řešit modifikace integrálu

$$\int_{\mathbb{R}} A\Theta(x)x^\alpha e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x} dx. \quad (4.6)$$

Tento integrál nemá analytické řešení, takže jej budeme zapisovat právě pomocí Macdonaldových funkcí.

4.3.1.1 Macdonaldovy funkce

Definice 4.3.2. Macdonaldovou funkcí řádu $a \in \mathbb{R}$ rozumíme funkci $K_a(x)$ zavedenou předpisem

$$x^a K_a(x) = 2^{a-1} \int_0^{+\infty} y^{a-1} e^{\frac{x^2}{4y}} e^{-y} dy, \quad (x > 0).$$

Řešení integrálu (4.6) je pak

$$\int_{\mathbb{R}} A\Theta(x)x^\alpha e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x} dx = 2A \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda}).$$

Pro tuto třídu funkcí uved' me ještě rekurentní vztahy

$$K_{a-1}(x) - K_{a+1}(x) = -\frac{2a}{x} K_a(x), \quad K'_a(x) = -K_{a-1}(x) - \frac{a}{x} K_a(x), \quad (4.7)$$

$$K_{a-1}(x) + K_{a+1}(x) = -2K'_a(x), \quad K'_a(x) = -K_{a+1}(x) + \frac{a}{x} K_a(x), \quad (4.8)$$

jež budou důležité při snaze zjednodušit některé výrazy.

4.3.1.2 Systém s jednoparametrickým GIG jádrem

Jak jsme již zmínili v tabulce 1.1, jádro jednoparametrického GIG rozdělení je dáno vztahem:

$$g(x) = A\Theta(x)e^{-\frac{\beta}{x}},$$

což znamená, že jednoparametrickou GIG distribuci můžeme zapsat následovně:

$$h(x) = A\Theta(x)e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x}.$$

Před samotným určením druhého necentrálního momentu bude potřeba nejprve přejít ke škálované variantě balančního částicového systému, tzn. k variantě systému splňující $\mu_0(h) = \mu_1(h) = 1$. Vyjádřeme tedy nejprve normalizační konstantu škálované varianty jednoparametrického GIG rozdělení

$$\begin{aligned} \mu_0(h) &= \int_{\mathbb{R}} A\Theta(x)e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x} dx = A \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x} dx = 2A \sqrt{\frac{\beta}{\lambda}} K_1(2\sqrt{\beta\lambda}) \stackrel{!}{=} 1 \\ \implies A &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\beta} K_1(2\sqrt{\beta\lambda})}. \end{aligned}$$

Následně podobným postupem s dosazením za normalizační konstantu určíme škálovací podmínku pro λ . Tato podmínka je tvaru:

$$\begin{aligned}\mu_1(h) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\beta}K_1(2\sqrt{\beta\lambda})} \Theta(x) x e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x} dx = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\beta}K_1(2\sqrt{\beta\lambda})} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x} dx = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\beta}K_1(2\sqrt{\beta\lambda})} 2 \frac{\beta}{\lambda} K_2(2\sqrt{\beta\lambda}) = \frac{\sqrt{\beta} K_2(2\sqrt{\beta\lambda})}{\sqrt{\lambda} K_1(2\sqrt{\beta\lambda})} \stackrel{!}{=} 1.\end{aligned}$$

Tímto se dostáváme ke škálované variantě jednoparametrického GIG rozdělení:

$$h(x) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\beta}K_1(2\sqrt{\beta\lambda})} \Theta(x) e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x}.$$

Určeme dále hledaný druhý necentrální moment:

$$\begin{aligned}\mu_2(h) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\beta}K_1(2\sqrt{\beta\lambda})} \Theta(x) x^2 e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x} dx = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\beta}K_1(2\sqrt{\beta\lambda})} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x} dx = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\beta}K_1(2\sqrt{\beta\lambda})} 2 \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{3}{2}} K_3(2\sqrt{\beta\lambda}) = \frac{\beta K_3(2\sqrt{\beta\lambda})}{\lambda K_1(2\sqrt{\beta\lambda})}.\end{aligned}$$

Poslední výraz upravíme za pomoci dosazení rovnice vzniklé z prvního momentu a rekurentního vztahu (4.7) pro Macdonaldovy funkce. Odtud pak

$$\begin{aligned}\mu_2(h) &= \frac{\beta K_3(2\sqrt{\beta\lambda})}{\lambda K_1(2\sqrt{\beta\lambda})} = \frac{\beta}{\lambda} \frac{K_1(2\sqrt{\beta\lambda}) + \frac{4}{2\sqrt{\beta\lambda}} K_2(2\sqrt{\beta\lambda})}{K_1(2\sqrt{\beta\lambda})} = \frac{\beta}{\lambda} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\beta\lambda}} \frac{K_2(2\sqrt{\beta\lambda})}{K_1(2\sqrt{\beta\lambda})}\right) = \\ &= \frac{\beta}{\lambda} \left(1 + \frac{2}{\beta} \left(\frac{\sqrt{\beta} K_2(2\sqrt{\beta\lambda})}{\sqrt{\lambda} K_1(2\sqrt{\beta\lambda})}\right)\right) = \frac{\beta}{\lambda} \left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) = \frac{\beta+2}{\lambda}.\end{aligned}$$

Následně, pokud uvažujeme balanční částicový systém s krátkodosahovým potenciálem, můžeme využít větu 3.3.11 o kompresibilitě a defleksi a určit kompresibilitu jednoparametrického GIG rozdělení

$$\chi = \frac{\beta+2}{\lambda} - 1.$$

4.3.1.3 Systém s dvouparametrickým GIG jádrem

V tabulce 1.1 bylo zmíněno, že jádro dvouparametrického GIG rozdělení je dáno vztahem:

$$h(x) = A \Theta(x) x^\alpha e^{-\frac{\beta}{x}},$$

což znamená, že jednoparametrickou GIG distribuci můžeme zapsat následovně:

$$h(x) = A \Theta(x) x^\alpha e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x}.$$

Před samotným určením druhého necentrálního momentu bude potřeba nejprve znovu přejít ke škálované variantě balančního částicového systému, tzn. k variantě systému splňující $\mu_0(h) = \mu_1(h) = 1$. Vyjádřeme tedy nejprve normalizační konstantu škálované varianty dvouparametrického GIG rozdělení

$$\mu_0(h) = \int_{\mathbb{R}} A \Theta(x) x^\alpha e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x} dx = 2A \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda}) \stackrel{!}{=} 1 \implies A = \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \frac{1}{2K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})}.$$

Následně podobným postupem s dosazením za normalizační konstantu určíme škálovací podmínku pro λ . Tato podmínka je tvaru:

$$\begin{aligned}\mu_1(h) &= \int_{\mathbb{R}} A\Theta(x)x^{\alpha+1}e^{-\frac{\beta}{x}}e^{-\lambda x}dx = \frac{\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{2K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \int_0^{+\infty} x^{\alpha+1}e^{-\frac{\beta}{x}}e^{-\lambda x}dx = \\ &= \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \frac{1}{K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha+2}{2}} K_{\alpha+2}(2\sqrt{\beta\lambda}) = \frac{\sqrt{\beta} K_{\alpha+2}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\sqrt{\lambda} K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \stackrel{!}{=} 1.\end{aligned}$$

Tímto se dostáváme ke škálované variantě dvouparametrického GIG rozdělení:

$$h(x) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{2K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \Theta(x)x^{\alpha}e^{-\frac{\beta}{x}}e^{-\lambda x}.$$

Určeme dále hledaný druhý necentrální moment:

$$\begin{aligned}\mu_2(h) &= \int_{\mathbb{R}} A\Theta(x)x^{\alpha+2}e^{-\frac{\beta}{x}}e^{-\lambda x}dx = \frac{\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{2K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \int_0^{+\infty} x^{\alpha+2}e^{-\frac{\beta}{x}}e^{-\lambda x}dx = \\ &= \frac{\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha+3}{2}} K_{\alpha+3}(2\sqrt{\beta\lambda}) = \frac{\beta K_{\alpha+3}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\lambda K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})}.\end{aligned}$$

Poslední výraz upravíme za pomoci dosazení rovnice vzniklé z prvního momentu a rekurentního vztahu (4.7) pro Macdonaldovy funkce. Odtud pak

$$\begin{aligned}\mu_2(h) &= \frac{\beta K_{\alpha+3}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\lambda K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} = \frac{\beta K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda}) + \frac{2(\alpha+2)}{2\sqrt{\beta\lambda}} K_{\alpha+2}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\lambda K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} = \frac{\beta}{\lambda} \left(1 + \frac{\alpha+2}{\sqrt{\beta\lambda}} \frac{K_{\alpha+2}(2\sqrt{\beta\lambda})}{K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})}\right) = \\ &= \frac{\beta}{\lambda} \left(1 + \frac{\alpha+2}{\beta} \frac{\sqrt{\beta} K_{\alpha+2}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\sqrt{\lambda} K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})}\right) = \frac{\beta}{\lambda} \left(\frac{\beta + \alpha + 2}{\beta}\right) = \frac{\beta + \alpha + 2}{\lambda}.\end{aligned}$$

Následně, pokud uvažujeme balanční částicový systém s krátkodosahovým potenciálem, můžeme využít větu 3.3.11 o kompresibilitě a defleksi a určit kompresibilitu dvouparametrického GIG rozdělení

$$\chi = \frac{\beta + \alpha + 2}{\lambda} - 1.$$

4.3.2 Vlastnosti parametrizace GIG rozdělení

Věta 4.3.3. Necht' $g(x) = A\Theta(x)x^{\alpha}e^{-\beta\varphi(x)}e^{-\lambda x}$, kde $\varphi(x)$ je hyperbolický potenciál. Necht' dále $\mu_0(g) = \mu_1(g) = 1$. Pak platí následující nerovnosti:

1. $\alpha + \beta - \lambda + 2 > 0$,
2. $\alpha + \beta - \lambda + 1 < 0$.

Důkaz. Dokažme nejprve první a až následně druhou nerovnost.

1. První vlastnost mezi parametry vyplývá z nerovnosti $\mu_2(g) > 1$. Tu dokážeme za využití věty 4.2.1.

$$\mu_2(g) > 2\mu_1(g) - \mu_0(g) = 2 - 1 = 1.$$

Když si nyní rozepíšeme tvar druhého necentrálního momentu pro GIG distribuci, dostaneme dokazovanou nerovnost, neboť

$$1 < \mu_2(g) = \frac{\beta + \alpha + 2}{\lambda} \implies \alpha + \beta - \lambda + 2 > 0.$$

2. Upravme nejprve integrál z nerovnosti (4.1) pomocí metody per partes takto

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} A\Theta(x)\varphi'(x)x^{\alpha+1}e^{-\beta\varphi(x)}e^{-\lambda x}dx = \int_0^{+\infty} A\varphi'(x)x^{\alpha+1}e^{-\beta\varphi(x)}e^{-\lambda x}dx = \\ & = \left| \begin{array}{l} u = Ax^{\alpha+1}e^{-\lambda x} \\ u' = A(\alpha+1-\lambda)x^{\alpha}e^{-\lambda x} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} v = \varphi'(x)e^{-\beta\varphi(x)} \\ v = -\frac{1}{\beta}e^{-\beta\varphi(x)} \end{array} \right| = \left[-A\frac{1}{\beta}x^{\alpha+1}e^{-\beta\varphi(x)}e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} + \\ & + \int_0^{+\infty} A(\alpha+1-\lambda)x^{\alpha}e^{-\lambda x}\frac{1}{\beta}e^{-\beta\varphi(x)}dx = \frac{\alpha+1}{\beta} \int_0^{+\infty} Ax^{\alpha}e^{-\lambda x}e^{-\beta\varphi(x)}dx - \\ & - \frac{\lambda}{\beta} \int_0^{+\infty} Ax^{\alpha+1}e^{-\lambda x}e^{-\beta\varphi(x)}dx = \frac{\alpha+1}{\beta} - \frac{\lambda}{\beta}. \end{aligned}$$

Dále ukážeme, že pro GIG rozdělení platí nerovnost

$$-1 > \int_{\mathbb{R}} A\Theta(x)\varphi'(x)x^{\alpha+1}e^{-\beta\varphi(x)}e^{-\lambda x}dx.$$

Dosaďme za hyperbolický potenciál $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ a za jeho derivaci $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Zjevně platí

$$-1 > - \int_{\mathbb{R}} A\Theta(x)x^{\alpha-1}e^{-\frac{\beta}{x}}e^{-\lambda x}dx \Leftrightarrow 1 < \int_{\mathbb{R}} A\Theta(x)x^{\alpha-1}e^{-\frac{\beta}{x}}e^{-\lambda x}dx.$$

K důkazu využijeme modifikace nerovnosti 4.2.1, jejíž platnost si ukážeme:

$$\int_{\mathbb{R}} A\Theta(x)x^{\alpha-1}e^{-\frac{\beta}{x}}e^{-\lambda x}dx > 2 \int_{\mathbb{R}} A\Theta(x)x^{\alpha}e^{-\frac{\beta}{x}}e^{-\lambda x}dx - \int_{\mathbb{R}} A\Theta(x)x^{\alpha+1}e^{-\frac{\beta}{x}}e^{-\lambda x}dx.$$

Převědeme všechny integrály na jednu stranu nerovnice a upravíme takto

$$0 < \int_{\mathbb{R}} A\Theta(x)(x^{\alpha-1} - 2x^{\alpha} + x^{\alpha+1})e^{-\frac{\beta}{x}}e^{-\lambda x}dx = \int_{\mathbb{R}} A\Theta(x)(1-x)^2x^{\alpha-1}e^{-\frac{\beta}{x}}e^{-\lambda x}dx.$$

Z charakteru funkcí vystupujících v integrálu můžeme s jistotou říct, že integrál musí být nutně kladný, jelikož integrovaná funkce nemůže být na celém $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ nulová, tak ani nemůže nastat rovnost. Čímž jsme tuto nerovnost dokázali a z ní nám plyne:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} A\Theta(x)x^{\alpha-1}e^{-\frac{\beta}{x}}e^{-\lambda x}dx & > 2 \int_{\mathbb{R}} A\Theta(x)x^{\alpha}e^{-\frac{\beta}{x}}e^{-\lambda x}dx - \int_{\mathbb{R}} A\Theta(x)x^{\alpha+1}e^{-\frac{\beta}{x}}e^{-\lambda x}dx = \\ & = 2\mu_0(g) - \mu_1(g) = 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

Nyní jsme ukázali, že pro GIG rozdělení platí:

$$\begin{aligned} -1 > \int_{\mathbb{R}} A\Theta(x)\varphi'(x)x^{\alpha+1}e^{-\beta\varphi(x)}e^{-\lambda x}dx & = \frac{\alpha+1}{\beta} - \frac{\lambda}{\beta}, \\ \implies \alpha + \beta - \lambda + 1 & < 0- \end{aligned}$$

Vynásobení nerovnice parametrem β je možné bez problémů, jelikož definice GIG rozdělení pro tento parametr nepřipouští záporné hodnoty.

□

Věta 4.3.4. Necht' $g(x) = A\Theta(x)x^\alpha e^{-\beta\varphi(x)}e^{-\lambda x}$ a $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ je potenciál škálované GIG distribuce, pak je funkce $\lambda(\beta)$ rostoucí pro $\beta \in (0, +\infty)$.

Důkaz. Rozepišme si podmínku škálovatelnosti GIG distribuce

$$\frac{\sqrt{\beta} K_{\alpha+2}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\sqrt{\lambda} K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \stackrel{!}{=} 1.$$

Z vlastností Macdonaldovy funkce víme, že je tato funkce rostoucí jednak s rostoucím argumentem a také rostoucím parametrem α . Využijme teorii implicitních funkcí a spočítejme derivaci funkce $\lambda(\beta)$ zadanou implicitní rovnicí výše

$$F(\lambda, \beta) = \frac{\sqrt{\beta} K_{\alpha+2}(2\sqrt{\beta\lambda})}{\sqrt{\lambda} K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} - 1 = 0,$$

$$\lambda'(\beta) = -\frac{\frac{\partial F(\beta, \lambda(\beta))}{\partial \beta}}{\frac{\partial F(\beta, \lambda(\beta))}{\partial \lambda}}.$$

Upravme nejprve následující výraz za pomoci rekurentních vztahů (4.7) pro Macdonaldovy funkce. Odtud

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\frac{K_{\alpha+2}(y(x))}{K_{\alpha+1}(y(x))} \right)}{\partial x} &= \frac{\frac{\partial K_{\alpha+2}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} K_{\alpha+1} - K_{\alpha+2} \frac{\partial K_{\alpha+1}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}}{K_{\alpha+1}^2} = \\ &= \frac{\left(-K_{\alpha+1} - \frac{\alpha+2}{y} K_{\alpha+2} \right) K_{\alpha+1} - K_{\alpha+2} \left(-K_{\alpha+2} + \frac{\alpha+1}{y} K_{\alpha+1} \right) \frac{\partial y}{\partial x}}{K_{\alpha+1}^2} = \\ &= \left(-1 - \frac{2\alpha+3}{y} \frac{K_{\alpha+2}}{K_{\alpha+1}} + \left(\frac{K_{\alpha+2}}{K_{\alpha+1}} \right)^2 \right) \frac{\partial y}{\partial x} = \left(-1 - \frac{2\alpha+3}{y} K_{\alpha, \beta, \lambda} + K_{\alpha, \beta, \lambda}^2 \right) \frac{\partial y}{\partial x} = K'_{\alpha, \beta, \lambda}. \end{aligned}$$

V předchozích úpravách jsme výraz $\frac{K_{\alpha+2}(x)}{K_{\alpha+1}(x)}$ pro $x = 2\sqrt{\beta\lambda}$, který je funkcí proměnných β a λ , označili jako $K_{\alpha, \beta, \lambda}$. Ovšem hodnotu $K_{\alpha, \beta, \lambda}$ lze určit z implicitní rovnice, tzn. $K_{\alpha, \beta, \lambda} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\beta}}$. Spočítejme dále parciální derivace funkce F a dosad' me do nich za $K_{\alpha, \beta, \lambda}$. Odtud pak

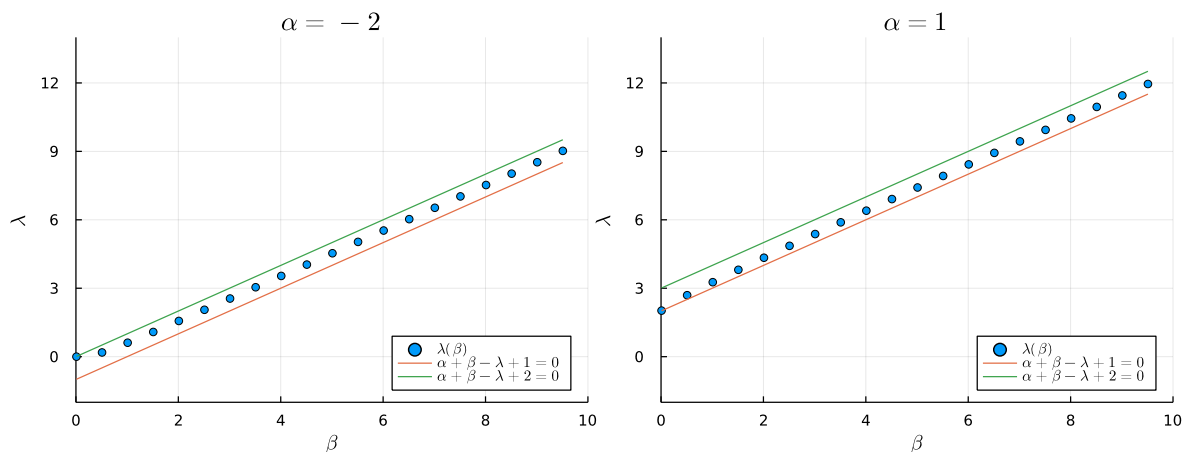
$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\beta, \lambda(\beta))}{\partial \beta} &= -1 - \frac{\alpha+1}{\sqrt{\beta\lambda}} K_{\alpha, \beta, \lambda} + K_{\alpha, \beta, \lambda}^2 = -1 - \frac{\alpha+1}{\beta} + \frac{\lambda}{\beta}, \\ \frac{\partial F(\beta, \lambda(\beta))}{\partial \lambda} &= \frac{\beta}{\lambda} \left(-1 - \frac{\alpha+4}{2\sqrt{\beta\lambda}} K_{\alpha, \beta, \lambda} + K_{\alpha, \beta, \lambda}^2 \right) = \frac{\beta}{\lambda} \left(-1 - \frac{\alpha+2}{\beta} + \frac{\lambda}{\beta} \right). \end{aligned}$$

Hledanou derivaci tedy určíme jako:

$$\lambda'(\beta) = -\frac{-1 - \frac{\alpha+1}{\beta} + \frac{\lambda}{\beta}}{\frac{\beta}{\lambda} \left(-1 - \frac{\alpha+2}{\beta} + \frac{\lambda}{\beta} \right)} = -\frac{\lambda}{\beta} \cdot \frac{\alpha + \beta - \lambda + 1}{\alpha + \beta - \lambda + 2} > 0.$$

Finální nerovnost jsme určili z nerovností dokázaných ve větě 4.3.3 a z nerovnosti $\lambda > 0$, kterou nám udává definice GIG rozdělení. Tímto jsme ukázali, že je funkce $\lambda(\beta)$ rostoucí. □

Pro demonstraci platnosti vět 4.3.3 a 4.3.4 jsme provedli numerický výpočet k nalezení hodnot funkce $\lambda(\beta)$. Výsledek výpočtu je vyobrazen na obrázku 4.1.



Obrázek 4.1: Numericky spočítané hodnoty funkce $\lambda(\beta)$

4.4 Kompresibilita GIG rozdělení pro $\alpha \in \mathbb{R}^+$

Snadno ověříme, že potenciál $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ škálované distribuce GIG splňuje předpoklady věty 4.2.4 a že pro GIG rozdělení tedy platí $\mu_2 \leq 2$ pro $\alpha \geq 0$. Omezme naše úvahy pouze na model s krátkodosahovým potenciálem. Z věty 3.3.11 o kompresibilitě a deflekcí určíme kompresibilitu GIG rozdělení pro nezáporný parametr α ve tvaru

$$\chi = \mu_2 - 1 \leq 1.$$

Z této nerovnosti plyne, že GIG rozdělení pro $\alpha \geq 0$ nemůže popisovat super-poissonovské stavy.

Zkoumejme tedy po zbytek kapitoly, jak se GIG rozdělení chová pro záporné hodnoty parametru α a jaká je fyzikální interpretace této skutečnosti. Upravme jádro GIG rozdělení následovně

$$x^\alpha e^{-\frac{\beta}{x}} = e^{-(-\ln x^\alpha + \frac{\beta}{x})} \implies \varphi(x) = -\ln x^\alpha + \frac{\beta}{x}.$$

Touto úpravou jsme získali silový potenciál. Spočtěme dále pomocí vztahu $F(x) = -\frac{d\varphi}{dx}$ pro výpočet síly ze silového potenciálu sílu působící mezi jednotlivými částicemi, tj.

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\alpha}{x} - \frac{\beta}{x^2} \implies F(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2}.$$

Kdybychom uvažovali pouze kladný parametr α , znamenalo by to, že mezi částicemi působí pouze odpudivé síly. Z naměřených dat lze ukázat, že super-poissonovské stavy v dopravním provozu opravdu vznikají. Právě jsme ukázali, že takový stav lze popsat pouze záporným parametrem α , což znamená, že se v dopravě místy mezi jednotlivými vozidly vyskytují i přitažlivé síly.

4.5 Fázový diagram

V předcházející kapitole ve větě 4.3.3 jsme ukázali omezení pro parametry škálovaného GIG rozdělení. Naším cílem bude zobrazit závislost klasifikace BČS na parametrech α, β . Projděme nejprve hodnoty

parametrů, které má vůbec smysl uvažovat, jelikož z dokázaných vět budeme schopni tuto množinu omezit.

Z definice GIG rozdělení 4.3.1 víme, že parametr λ musí být kladné číslo. Taktéž jsme dokázali, že pro GIG rozdělení platí nerovnosti:

1.

$$\alpha + \beta - \lambda + 2 > 0 \implies \alpha + \beta + 2 > \lambda,$$

2.

$$\alpha + \beta - \lambda + 1 < 0 \implies \alpha + \beta + 1 < \lambda.$$

$$\implies \alpha + \beta + 1 < \lambda < \alpha + \beta + 2.$$

Z první nerovnosti a vlastnosti $\lambda > 0$ z definice GIG rozdělení můžeme říct, že $\alpha + \beta > -2$, což nám omezuje množinu hodnot parametrů, kterou budeme uvažovat. Bez splnění téhle nerovnosti není možné GIG rozdělení škálovat.

Podobným způsobem můžeme omezit hodnoty druhého momentu GIG rozdělení. Z dřívějších kapitol víme, že pro GIG rozdělení $g(x) = A\Theta(x)x^\alpha e^{-\frac{\beta}{x}}e^{-\lambda x}$ platí:

$$1 = \frac{\alpha + \beta + 2}{\alpha + \beta + 2} \leq \mu_2(g) = \frac{\beta + \alpha + 2}{\lambda} \leq \frac{\alpha + \beta + 2}{\alpha + \beta + 1} = 1 + \frac{1}{\alpha + \beta + 1}.$$

Dále za předpokladu, že počítáme s krátkodosahovým potenciálem, můžeme z věty 3.3.11 určit omezení kompresibility GIG rozdělení.

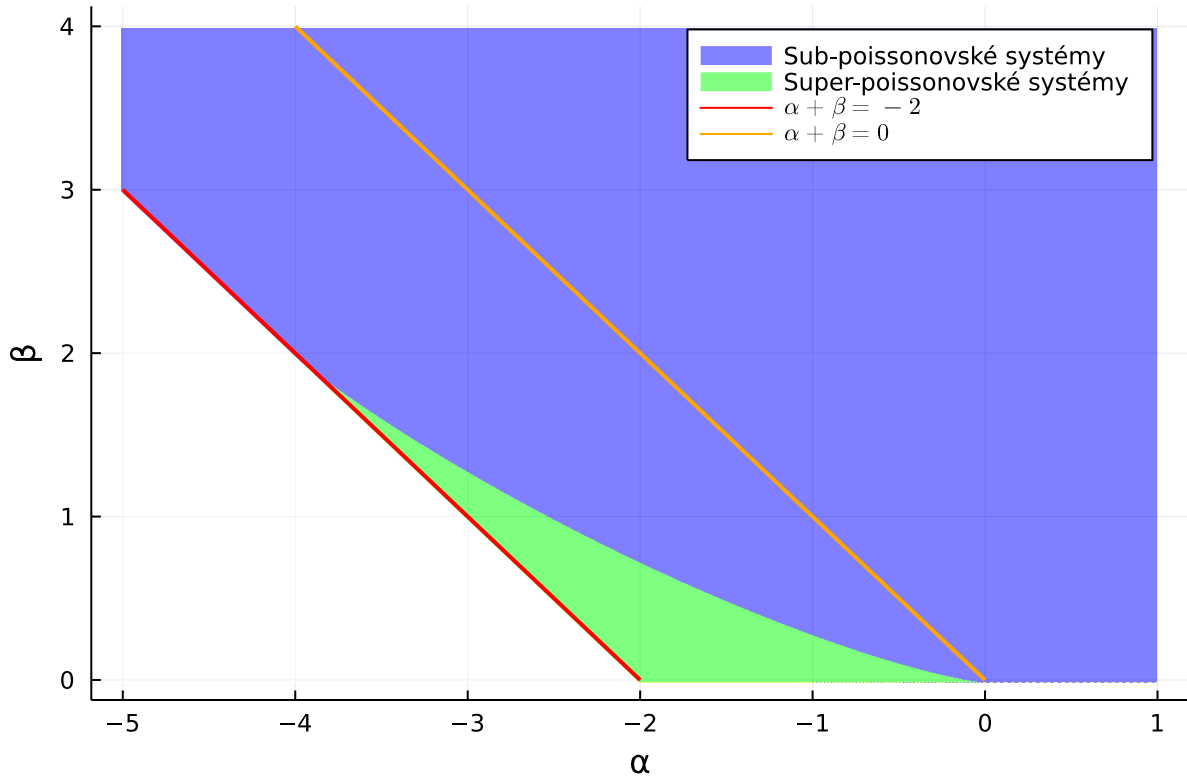
$$0 = \frac{\alpha + \beta + 2}{\alpha + \beta + 2} - 1 \leq \chi = \frac{\beta + \alpha + 2}{\lambda} - 1 \leq \frac{\alpha + \beta + 2}{\alpha + \beta + 1} - 1 = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}.$$

Rozeberme možné hodnoty výrazu $\frac{1}{\alpha + \beta + 1}$ pro $\alpha \in \mathbb{R}^-$, protože varianta s kladným parametrem α již byla diskutována v kapitole 4.4, kde jsme ukázali, že pro tyto hodnoty s jistotou mluvíme o systému sub-poissonovském.

Nechť je tedy $\alpha \in \mathbb{R}^-$, pak platí:

1. Pro $\alpha + \beta > 0$ můžeme s jistotou říct, že kompresibilita daného systému je menší než 1, a tedy se jedná o subpoissonovský systém.
2. Pro $\alpha + \beta \in (-1, 0)$ už může kompresibilita nabývat hodnot vyšších než jedna a daný systém může být i superpoissonovský.
3. Pro $\alpha + \beta \in (-2, -1)$ nelze z nerovnosti výše odhadnout kompresibilitu systému.

Ukázali jsme, pro které hodnoty parametrů jsme schopni jednoznačně rozhodnout o stavu systému. Problematické hodnoty jsou: $\alpha + \beta \in (-2, 0)$ a pro určení stavu systémů s těmito parametry budeme muset sáhnout po numerických metodách. Pro konkrétně zvolené hodnoty α, β nalezneme normalizační konstantu A a hodnotu $\lambda(\beta)$ tak, aby bylo splněno $\mu_0(g) = \mu_1(g) = 1$, tzn. abychom získali škálovanou verzi systému. Následně, pokud znovu uvažujeme krátkodosahový potenciál, můžeme z věty 3.3.11 určit kompresibilitu jako: $\chi = \mu_2(g) - 1$. Tímto postupem můžeme vykreslit graf 4.2, který ukazuje, pro jaký výběr parametrů získáváme super-poissonovský systém s GIG rozdělením. Do grafu jsou dále zaneseny přímký, které demonstrují výše zmíněné omezení pro parametry super-poissonovských systémů.



Obrázek 4.2: Fázový diagram kompresibility systému

4.6 Podmínka superpoissonovskosti

Shrňme dosud získané poznatky o podmínkách pro super-poissonovské stavy. Pro vznik super-poissonovského stavu musí parametr α nabývat pouze záporných hodnot (viz kapitola 4.4). Dále musí být z kapitoly 4.5 splněno, že $\alpha + \beta \in (-2, 0)$. O parametru $\lambda(\beta)$ můžeme říct, že se nachází v omezeném intervalu $\lambda(\beta) \in (\alpha + \beta + 1, \alpha + \beta + 2)$ a dle definice 4.3.1 musí tento parametr být kladný.

Kapitola 5

Superpoissonovské stavy v reálných dopravních systémech

Pro měření rozestupů a rychlostí vozidel v dopravním proudu existuje více metod. Některé jsou poměrně náročné na analýzu výstupní dat, např. při pořízení video záznamu komunikace je pak potřeba využít metod zpracování obrazu. Dále lze k měření použít i ultrazvukové nebo infračervené senzory. Pokud je cílem analyzovat rozsáhlou množinu dat, je nejvhodnější použít k měření dvousmyčkové indukční detektory.

Indukční smyčkové detektory se umísťují pod vozovku a indukují magnetické pole, které je po průjezdu vozidla porušeno, a tím se vytvoří datový záznam. Pod vozovku se takové detektory umísťují dva s určitým rozestupem, aby bylo možné určit i průměrnou rychlost vozidla v daném úseku mezi detektory.

5.1 Datové vzorky a metody jejich akvizice

5.1.1 Unifikační procedura

Dopravní proud se v určitých situacích vyznačuje značnými nehomogenitami. Běžně se provádí třístupňová unifikační procedura, která nám umožní data roztrždit podle hustot, abychom zabránili míchání vzorků s rozdílnými statistickými vlastnostmi. V dalších podkapitolách shrneme části unifikační proceduru v pořadí, ve kterém tyto kroky i provedeme.

5.1.1.1 Vzorkovací fáze

Celý datový soubor, který obsahuje L datových záznamů, rozdělíme na menší podmnožiny o M záznamech. Abychom dosáhli homogenity v těchto podmnožinách, tak volíme M vzorků zaznamenaných chronologicky. Zavádíme tedy množiny

$$S_i = \{(r_k, t_k, v_k, l_k) \in \mathbb{R}^4 : k = i \cdot M + 1, i \cdot M + 2, \dots, i \cdot M\}.$$

pro $i \in \{j \in \mathbb{N}_0 : j < \frac{L}{M}\}$, kde proměnné r_k, t_k, v_k, l_k představují informace o k -tém vozidle a to pořadí jeho délku, čas průjezdu detektorem, průměrnou rychlost a jízdní pruh. Pro analýzu dat v této práci použijeme $M = 50$.

5.1.1.2 Škálovací fáze

Rozteče, popřípadě světlosti vzorků v jednotlivých podmnožinách S_i přeškálujeme, abychom zaručili, že jejich střední hodnota bude rovna jedné. Škálovanou veličinu získáme jako

$$y_k = \frac{z_k \cdot M}{\sum_{z_k \in S_i} z_k}.$$

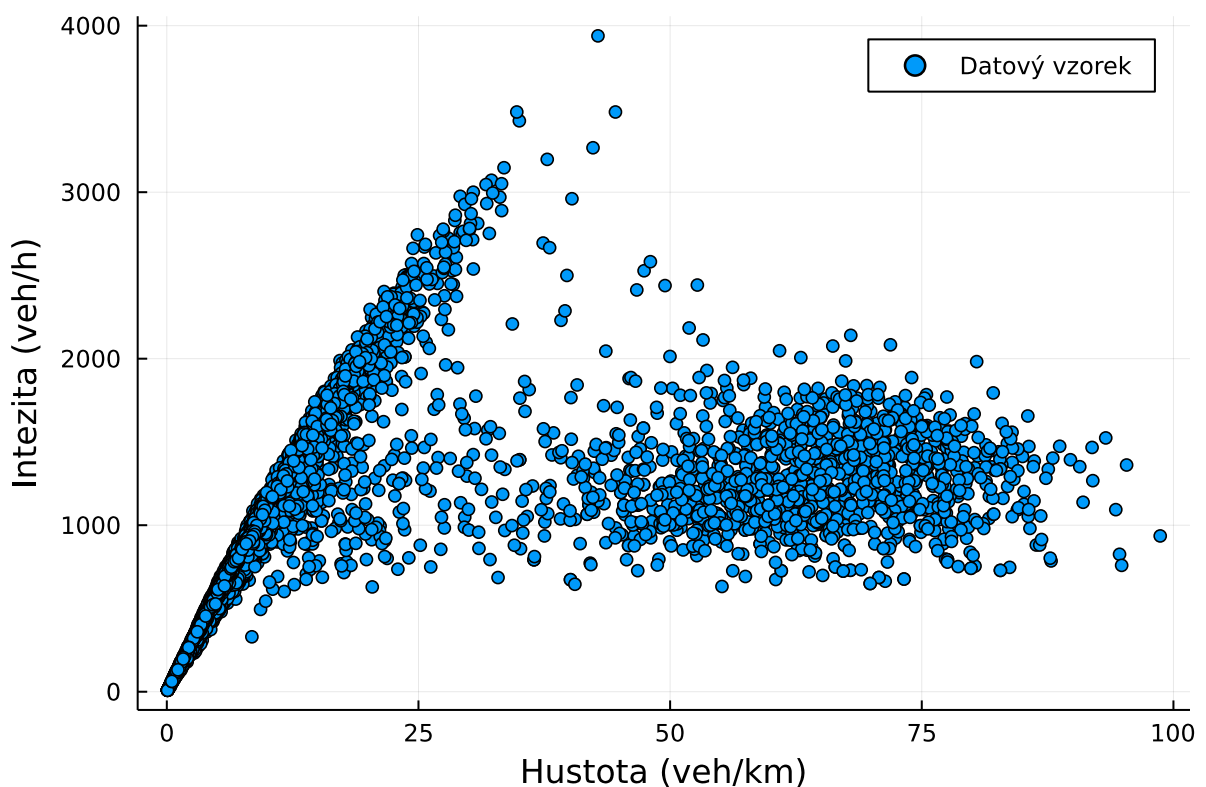
kde $z_k \in S_i$ je prvek podmnožiny a zavedeme nový systém podmnožin celého souboru $\tilde{S}_i = \{y_k : z_k \in S_i\}$.

5.1.1.3 Segmentační fáze

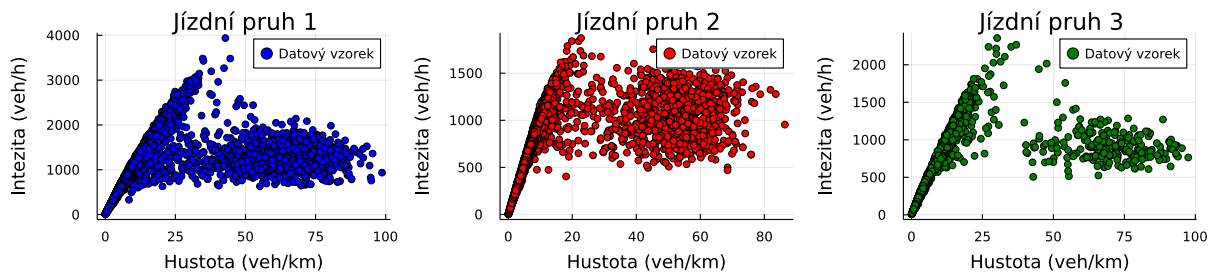
Pro každou škálovanou podmnožinu \tilde{S}_i vypočteme hledané fázové proměnné. V této analýze dat budeme počítat intenzitu a hustotu provozu.

5.1.2 Výstup analýzy rozestupů

Pomocí Unifikační procedury jsme spočítali hustotu a intenzitu jednotlivých vzorků. Grafické znázornění této závislosti pro 1. jízdní pruh můžete vidět na obrázku 5.1 a pro všechny jízdní pruhy na obrázku 5.2.

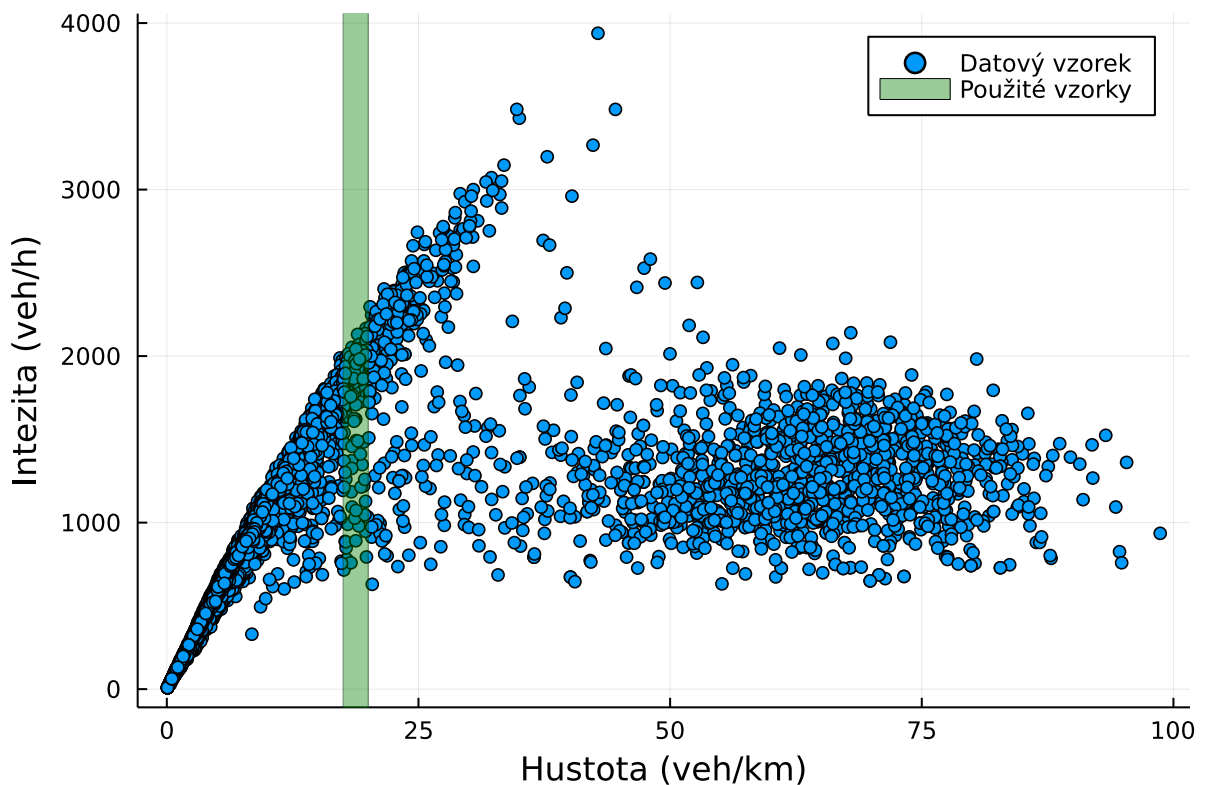


Obrázek 5.1: Graf závislosti intenzity na hustotě pro jednotlivé vzorky pro 1. jízdní pruh



Obrázek 5.2: Graf závislosti intenzity na hustotě vzorků

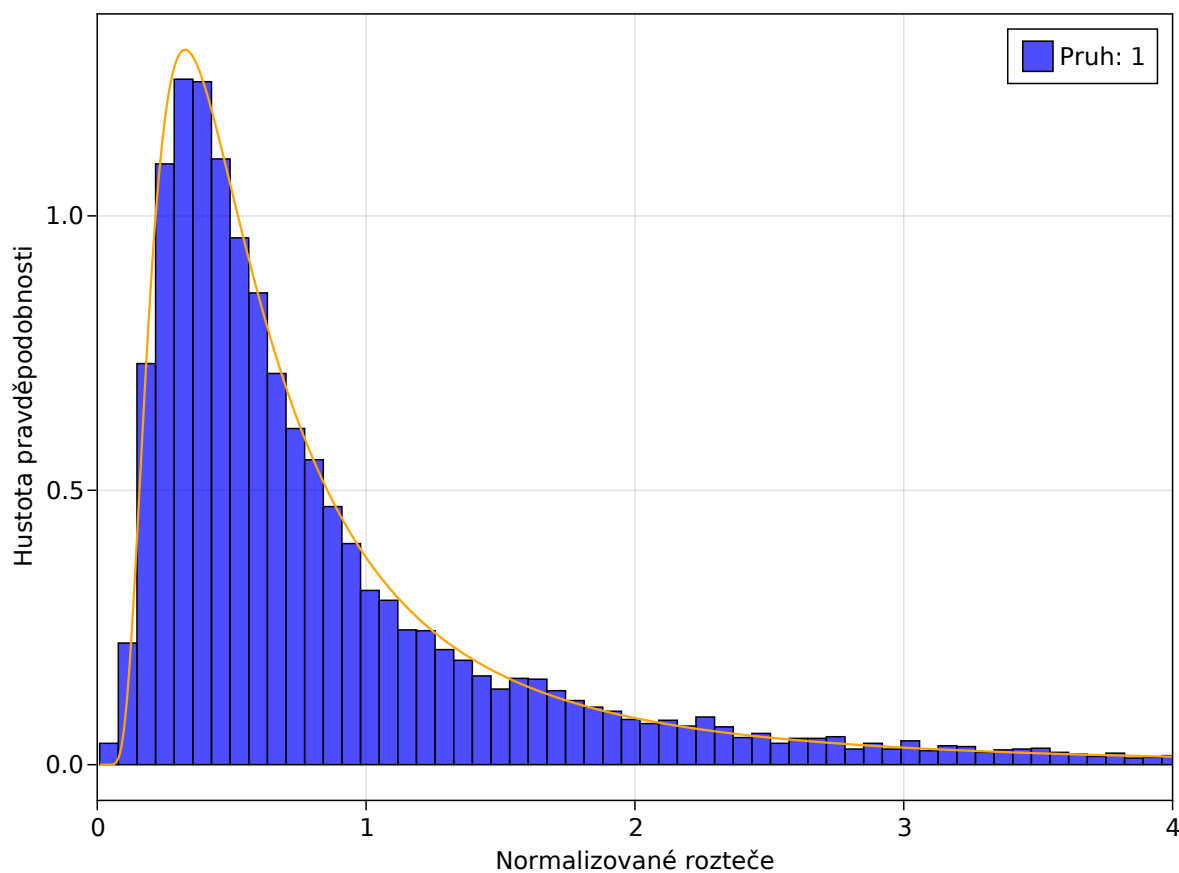
Budeme chtít porovnávat pouze vzorky naměřené za podobných podmínek, aby se systém dal považovat za homogenní, což je pro analýzu rozestupů klíčové. V těchto případech se omezíme na zpracování rozestupů při hustotě v určitém rozmezí. Bez tohoto omezení bychom porovnávali rozestupy při velmi odlišných hustotách dopravy a získávali bychom rozestupy s velmi odlišnými hodnotami. Jako příklad vezmeme datové vzorky s hustotou $\rho \in (17.5, 20)$. Příklad výběru prvků znázorňuje obrázek 5.3.



Obrázek 5.3: Graf závislosti intenzity na hustotě vzorků se znázorněním vybraných prvků.

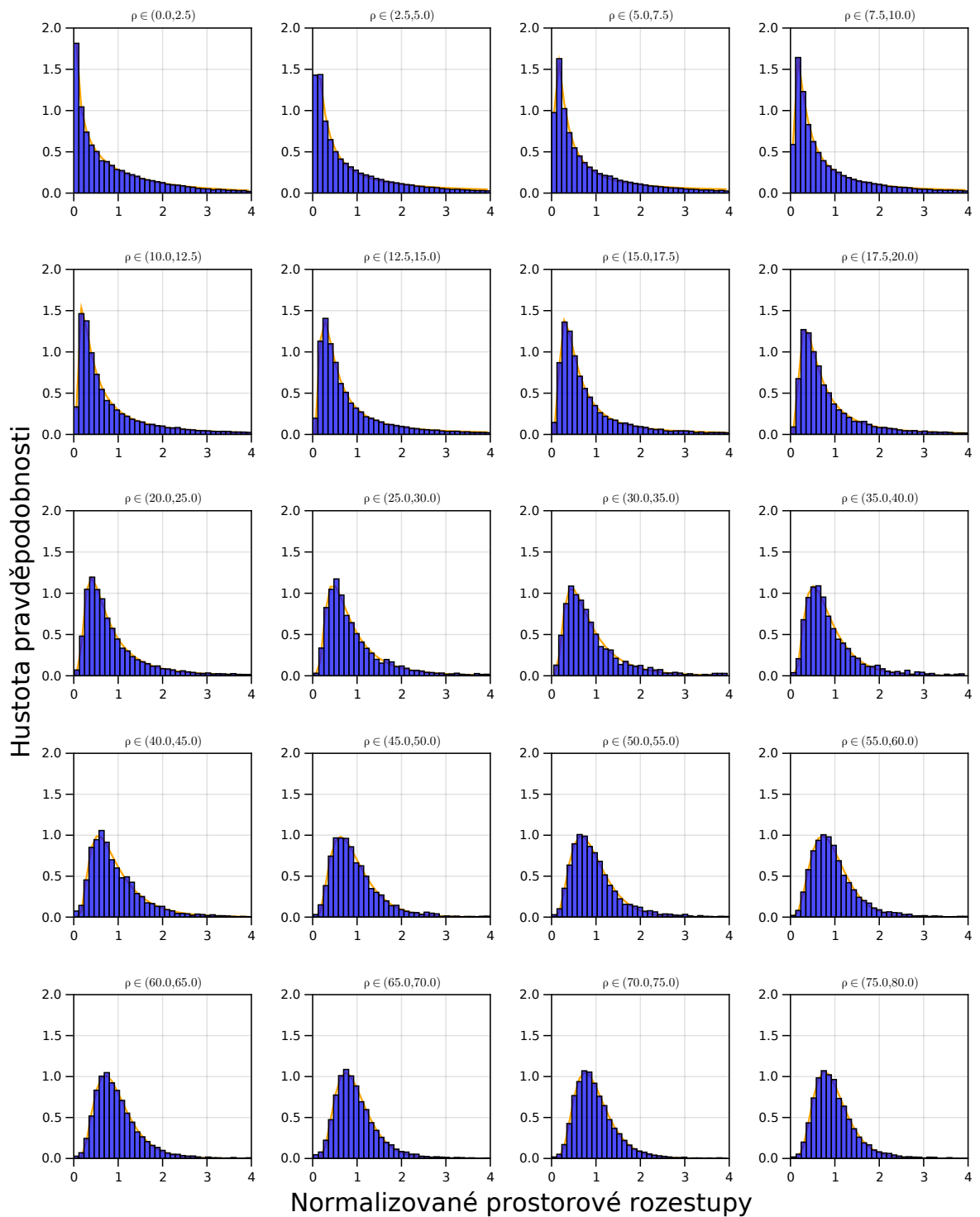
Dále pro hustotní pásmo $\rho \in (17.5, 20)$ vykreslíme histogram. Pro histogram navíc ještě provedeme normalizaci, aby obdržení výstup představoval hustotu pravděpodobnosti. Histogram pro 1. jízdní pruh v našem příkladu je vykreslen na obrázku 5.4. Histogram proložíme GIG rozdělením, abychom na reálných dopravních datech demonstrovali, že GIG rozdělení je vhodné rozdělení pro popis hustoty pravděpodob-

nosti prostorových a časových světlostí. K tomuto účelu jsem využil funkci knihovny LsgFit.jl jazyku Julia, která hledá nejlepší možné proložení jako minimum součtu středních kvadratických odchylek.

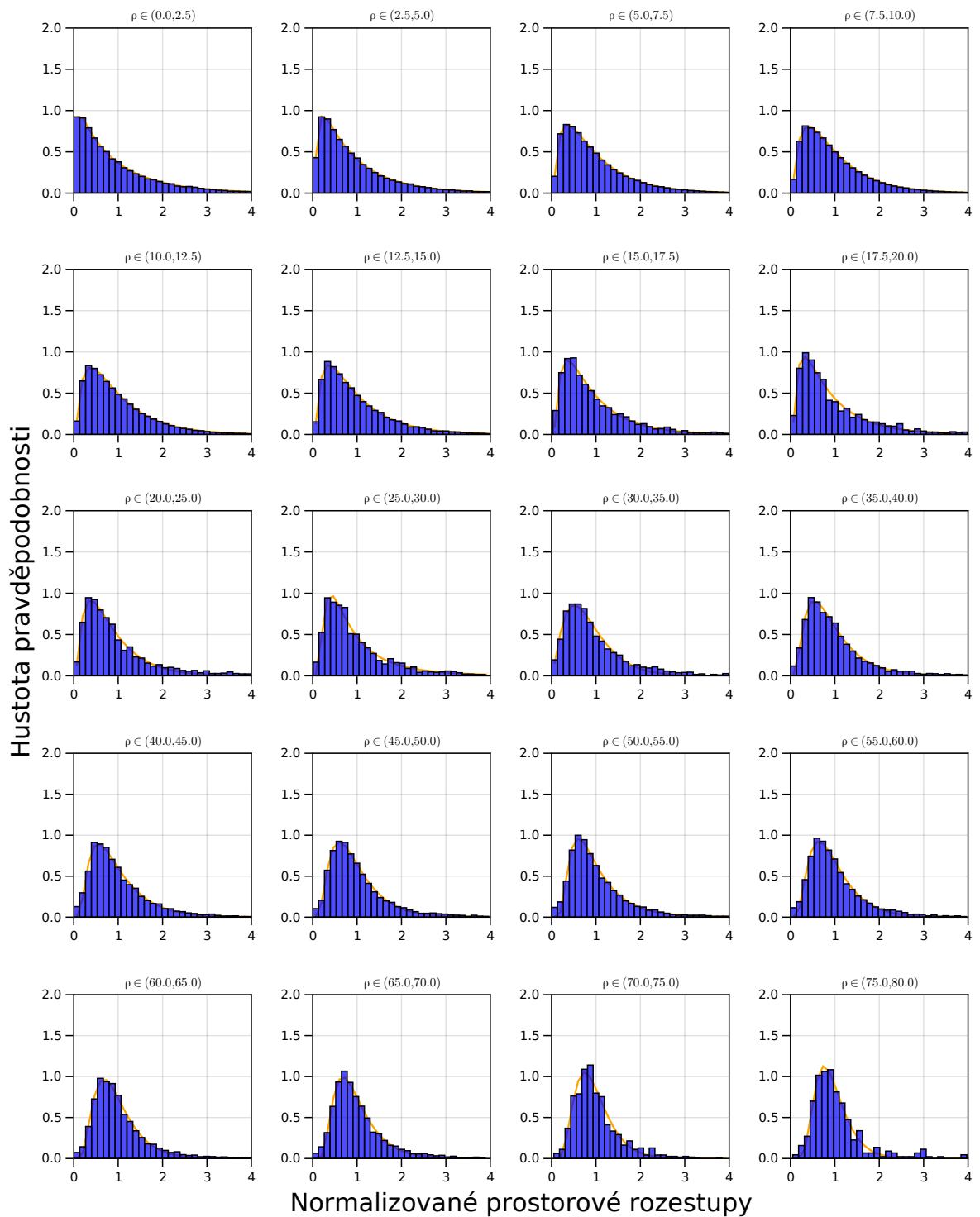


Obrázek 5.4: Histogram normalizovaných roztečí s proložení GIG hustotou v 1. jízdním pruhu z dopravních dat o hustotě $\rho \in (17.5, 20)$

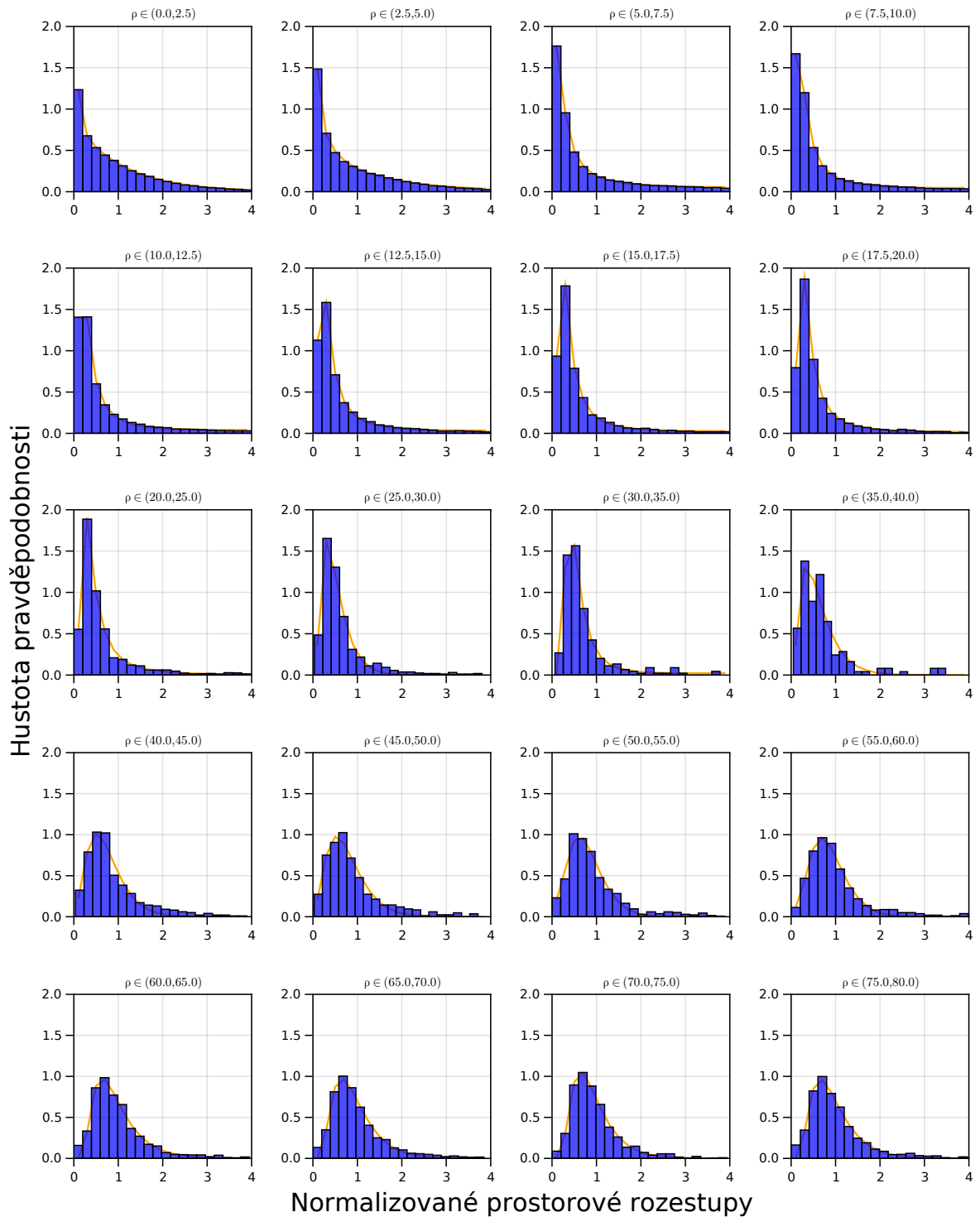
Proved' me analogický proces i pro ostatní rozmezí hustoty. Při nižších hustotách dopravy budeme volit rozmezí analyzovaných prvků kratší než pro hustoty vyšší. Na následujících grafech budeme demonstrovat histogramy pro jednotlivé jízdní pruhy tříproudové komunikace.



Obrázek 5.5: Histogram reprezentující závislost hustoty pravděpodobnosti výskytu škálovaných roztečí (osa y) na hodnotách škálovaných roztečí (osa x) v 1. jízdním pruhu z dopravních dat o různé hustotě. Jednotlivé histogramy jsou proloženy GIG rozdělením.

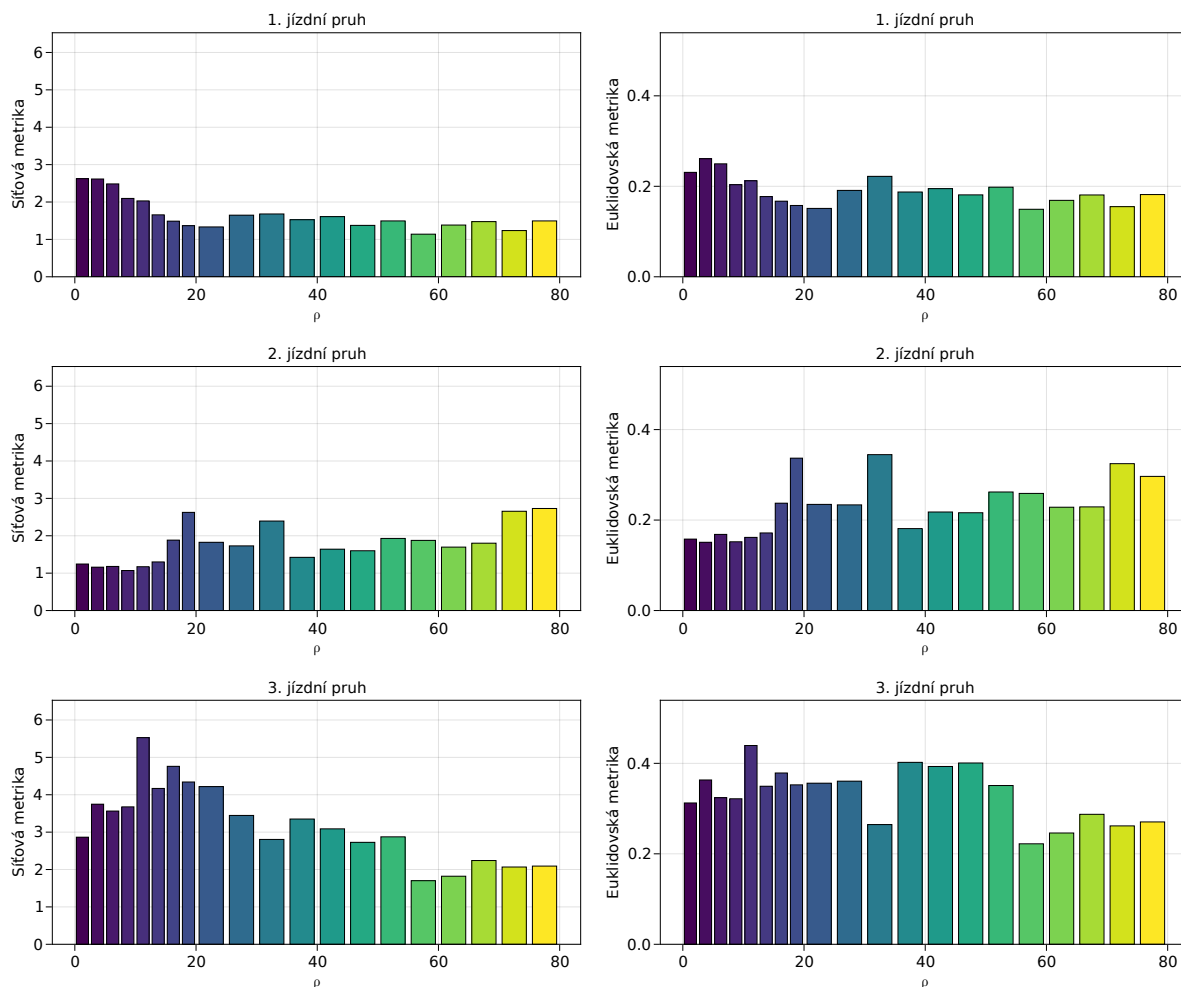


Obrázek 5.6: Histogram reprezentující závislost hustoty pravděpodobnosti výskytu škálovaných roztečí (osa y) na hodnotách škálovaných roztečí (osa x) v 2. jízdním pruhu z dopravních dat o různé hustotě. Jednotlivé histogramy jsou proloženy GIG rozdělením.



Obrázek 5.7: Histogram reprezentující závislost hustoty pravděpodobnosti výskytu škálovaných roztečí (osa y) na hodnotách škálovaných roztečí (osa x) ve 3. jízdním pruhu z dopravních dat o různé hustotě. Jednotlivé histogramy jsou proloženy GIG rozdělením.

Pro ověření kvality proložení dopravních dat GIG rozdělením spočítáme rozdíl reálných dat od GIG rozdělení pomocí síťové a Euklidovské metriky. Pro dopravní data i GIG rozdělení nejprve určíme empirickou distribuční funkci a budeme měřit vzdálenost pro tyto dvě křivky. Intervaly hustot, pro které budeme vzdálenost počítat, zachováme stejné jako při vykreslování prostorových světlostí. Jednotlivé vzdálenosti budou reprezentovány pomocí sloupcového grafu 5.8. Můžeme si především povšimnout, že v 2. jízdním pruhu pro $\rho \in (75, 80)$ vzniká výrazně vyšší odchylka mezi daty a proložením než pro ostatní intervaly hustot (obrázek 5.8). Vyšší odchylka je způsobena absencí dat pro dané hustotní pásmo.



Obrázek 5.8: Odchylka histogramu z reálných dat a proložené GIG distribuce v závislosti na hustotě dopravy. Grafy v prvním sloupci počítají odchylku pomocí síťové metriky a grafy v druhém sloupci počítají odchylku pomocí Euklidovské metriky

5.2 Detekce super-poissonovských stavů v dopravních systémech

Systém nazýváme super-poissonovský, pokud hodnota jeho kompresibility překročí hraniční hodnotu jedna. Kompresibilitu systému určíme ze statistické rigidity, což vyplývá přímo z příslušné definice.

5.2.1 Výpočet statistické rigidity systému

Statistickou rigidity spočítáme přímo z definice 3.3.8.

$$\Delta(L) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k - L)^2 \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k]. \quad (5.1)$$

Vždy je potřeba pro fixní délku intervalu L určit hodnotu intervalové frekvence. Vyberme dopravní data z pevně zvoleného intervalu hustot a určíme přímočarým výpočtem hodnotu multiroztečí. Následně na pomyslnou úsečku s vyznačenými multiroztečemi za sebe položíme intervaly délky L . Na jednotlivých intervalech získáme rozdílné počty agentů, a právě tento počet označujeme jako intervalovou frekvencí \mathcal{N}_L .

Uvedený postup naznačíme ještě v tabulce 5.1. Označme $S_{\mathcal{X}}$ jako množinu multiroztečí a K jako počet měření v množině $S_{\mathcal{X}}$. Statistickou rigidity určíme jako:

Pořadí intervalu délky L	Počet vozidel v k -tém intervalu délky L	Kvadratická odchylka počtu vozidel od délky intervalu
k	n	$(n - L)^2$
$k = 1$	$n_1 = \#\{x \in S_{\mathcal{X}} : x \in (0, L)\}$	$(n_1 - L)^2$
$k = 2$	$n_2 = \#\{x \in S_{\mathcal{X}} : x \in (L, 2L)\}$	$(n_2 - L)^2$
$k = 3$	$n_3 = \#\{x \in S_{\mathcal{X}} : x \in (2L, 3L)\}$	$(n_3 - L)^2$
\vdots	\vdots	\vdots
$k = K$	$n_K = \#\{x \in S_{\mathcal{X}} : x \in ((K - 1)L, KL)\}$	$(n_K - L)^2$

$$\Delta(L) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (n_K - L)^2$$

Tabulka 5.1: Tabulka znázorňující schéma výpočtu statistické rigidity.

$$\Delta(L) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (n_K - L)^2.$$

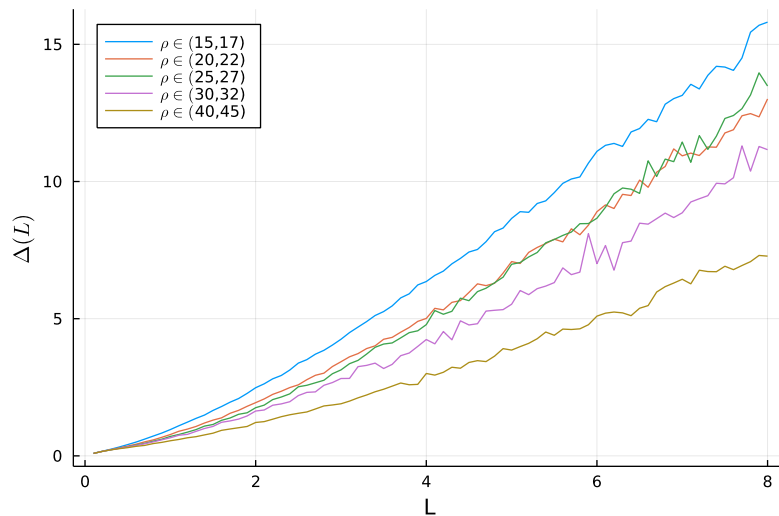
Již v dřívější fázi zpracování dat jsme provedli škálování systému, kde střední vzdálenost vozidel je rovna jedné, tzn. střední počet částic na intervalu délky L musí být číslo blízké hodnotě L .

5.2.2 Výpočet statistické kompresibility

V systémech s pevně danou hustotou dopravy budeme postupně určovat lineární asymptotu statistické rigidity. Z definice kompresibility 3.3.10 víme, že kompresibilita je dána jako lineární člen asymptoty statistické rigidity. Budeme tedy v systémech s pevně danou hustotou dopravy postupně určovat lineární asymptotu statistické rigidity, abychom následně mohli detekovat super-poissonovské stavy (stavy s kompresibilitou vyšší než jedna).

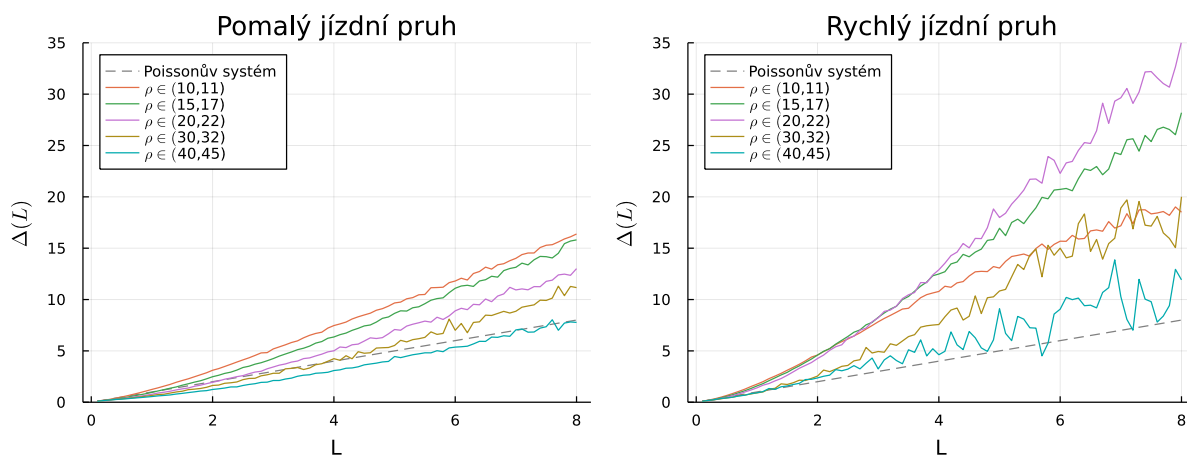
5.2.3 Detekované super-poissonovské stavy

Spočítanou statistickou rigidity prostorových rozestupů pro pomalý (1. jízdní) pruh znázorňuje obrázek 5.9. Rychlé změny statistické rigidity pro vyšší hodnoty L ovlivňuje množství dat pro daný hustotní interval.



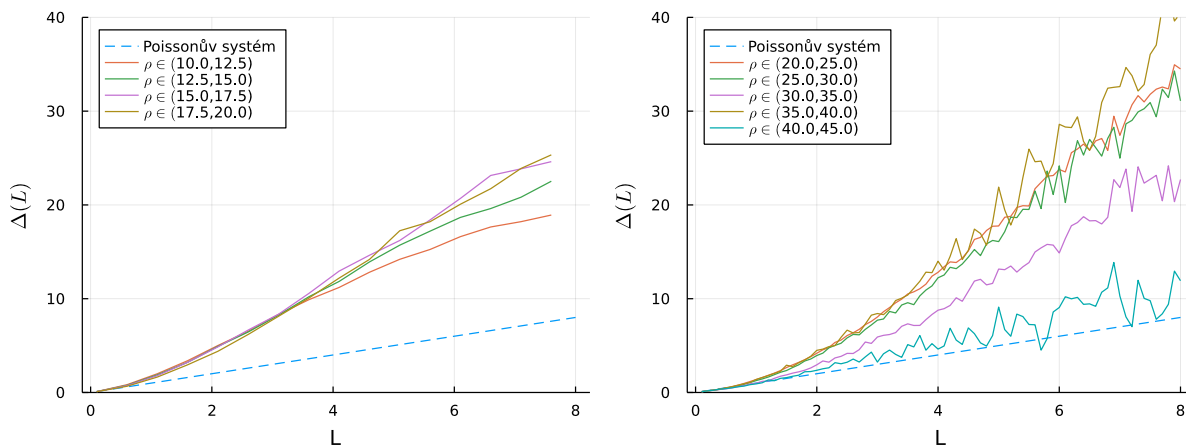
Obrázek 5.9: Statistická rigidita pro vybrané hustoty dopravy v 1. jízdním pruhu

Proved' me analýzu statistické rigidity pro jednotlivé hustoty dopravy. Jako referenční data zvolme data z pomalého pruhu (1. jízdní pruh) a rychlého pruhu (3. jízdní pruh). Jak lze vidět na obrázku 5.10, statistická rigidita v pomalém pruhu dosahuje nižších hodnot než v pruhu rychlém.



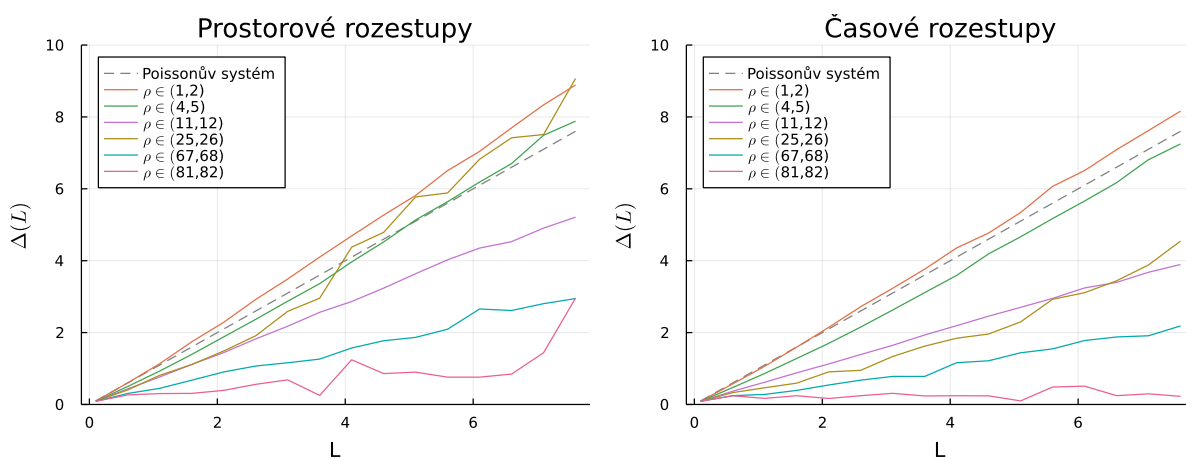
Obrázek 5.10: Porovnání statistické rigidity pro vybrané hustoty dopravy v 1. a 3. jízdním pruhu

Zaměříme se nakonec na dopravní data o pevně dané hustotě s kompresibilitou vyšší než jedna, tzn. na super-poissonovské systémy. Ukažme obrázek 5.11 statistické rigidity z rychlého (3. jízdního) pruhu o dopravních hustotách o hustotách $\rho \in (10, 45)$.



Obrázek 5.11: Statistická rigidita pro vybrané hustoty dopravy ve 3. jízdním pruhu

Udělejme ještě srovnání statistické rigidity prostorových a časových rozestupů. Časové rozestupy nejsou na rozdíl od prostorových zatíženy systematickou chybou. Data o prostorových rozestupech nám totiž měření neposkytne přímo a je potřeba je dopočítat. Prostorové rozestupy počítáme jako časovou světlost vynásobenou průměrnou rychlostí vozidla při průjezdu detektorem, přičemž předpokládáme, že vozidla udržují stálou průměrnou rychlost. Na obrázku 5.12 vidíme podobných závěr jako v článku [11].



Obrázek 5.12: Porovnání statistické rigidity prostorových a časových rozestupů pro vybrané hustoty v pomalém jízdním pruhu

Právě způsob počítání prostorových rozestupů způsobuje, že detekujeme super-poissonovské stavy ve více případech než u časových rozestupů. Shrňme, při kterých hustotách jsme v jednotlivých jízdních pružích detekovali super-poissonovské stavy, přičemž jsme se při analýze zaměřili především na rychlý jízdní pruh, ve kterém jsme primárně předpokládali vznik těchto stavů:

1. jízdní pruh: $\rho \in (1, 2)$, $\rho \in (4, 5)$, $\rho \in (11, 12)$, $\rho \in (25, 26)$, $\rho \in (30, 32)$
2. jízdní pruh: $\rho \in (1, 2)$, $\rho \in (4, 5)$, $\rho \in (25, 26)$
3. jízdní pruh: pro hustotní pásma v intervalu $(1, 45)$

Závěr

V rešeršní části práce jsme shrnuli důležité pojmy pro disciplínu matematického modelování dopravy a klíčové statistické charakteristiky spojené s touto disciplínou. V kapitole 1 jsme uvedli obecné vlastnosti dopravní mikrostruktury včetně zavedení veličin dopravního makropopisu a mikropopisu. V kapitole 2 jsme diskutovali model termodynamického dopravního plynu. Zmínili jsme řešení modelu až k obecnému tvaru headway distribuce. V kapitole 3 jsme shrnuli poznatky o balančních částicových systémech, zavedli jsme model BČS a vyslovili jeho elementární vlastnosti a potřebné statistické charakteristiky 1. a 2. řádu.

V kapitole 4 jsme nahlédli na nové teoretické poznatky oblasti týkající se repulzivních potenciálů. Věty ukazující mezní hodnoty statistických veličin pro repulzivní BČS nám umožnily vyslovit tvrzení pro BČS zadaný generátorem ze třídy GIG, že super-poissonovské stavy mohou nastat pouze pro systémy s parametrem $\alpha \in \mathbb{R}^-$. Tuhle skutečnost jsme následně fyzikálně interpretovali, což nás dovedlo k závěru, že v super-poissonovských stavech vzniklých v dopravním systému nemohou působit mezi vozidly pouze odpuzivé síly, ale nutně zde působí i síly přitažlivé. Populárně řečeno se v těchto super-poissonovských stavech objevují řidiči, kteří se snaží dojet předchozí vozidlo. V poslední části kapitoly 4 jsme za pomoci numerických metod našli množinu parametrů α, β dvouparametrického GIG rozdělení, které mají kompresibilitu vyšší než jedna, tzn. jedná se o super-poissonovský systém s generátorem z třídy GIG. Výsledky numerické metody jsme pro jistou množinu α, β podložili nerovnostmi omezujícími hodnotu statistické rigidity.

V závěrečné kapitole jsme se zaměřili na analýzu dopravních dat naměřených pomocí dvousmyčkových indukčních detektorů. V analýze jsme ukázali, že hustota pravděpodobnosti prostorových světlostí lze aproximovat GIG rozdělením. Ve druhé části kapitoly 5 jsme spočítali statistickou rigiditu a rozhodli jsme, pro která hustotní pásma mohou v jednotlivých pruzích vzniknout super-poissonovské stavy. Závěrem zkoumání hodnot statistické rigidity pro dopravní data je, že nejvyšší hodnoty statistické rigidity vznikají v rychlém jízdním pruhu pro hustoty dopravy v intervalu $\rho \in (20, 40)$. Z prostorových světlostí jsme detekovali super-poissonovské stavy ve všech jízdních pruzích, přičemž v rychlém jízdním pruhu tyto stavy vznikaly pro největší interval hustot.

Literatura

- [1] L. Li., X.M. Chen, *Vehicle headway modeling and its inferences in macroscopic/microscopic traffic flow theory: A survey*. Transportation Research Part C: Emerging Technologies 76, 2017, 170–188.
- [2] M. Krbálek, F. Šeba, M. Krbálková, *Super-random states in vehicular traffic - detection & explanation*. Physica A 585, 2022, 126418.
- [3] S. Mitra, S. Washington, *On the nature of over-dispersion in motor vehicle crash prediction models*. Accident Analysis and Prevention 39, 2007, 459–468.
- [4] V. Pánek, *Supernáhodné stavy termodynamického dopravního plynu a jejich matematické vlastnosti*. Bakalářská práce, FJFI ČVUT 2020, školitel doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.
- [5] V. Pánek, *Statistická kompresibilita v systémech se středně dosahovými potenciály*. Výzkumný úkol, FJFI ČVUT 2021, školitel doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.
- [6] Pánek V., *Statistické vlastnosti termodynamického částicového plynu s kombinovaným potenciálem*, Diplomová práce, FJFI ČVUT v Praze (školitel doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.), 2022.
- [7] M. Krbálek, *Equilibrium distributions in thermodynamical traffic gas*. J. Phys. A: Math. Theor. 40 5813, 2007, 1-10.
- [8] M. Krbálek, M. Krbálková, *3s-Unification for Vehicular Headway Modeling*. In ‘SPMS 2018’ Proceedings, Dobřichovice 2018, 2018, 1-14.
- [9] M. Krbálková, *Statistické vlastnosti dopravní mikrostruktury*. Seminární práce Technické aplikace fyziky, Pardubice 2019, 2019, 1-19.
- [10] M. Krbálek, J. Vacková, *Matematické modelování dopravy*. Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2022, 2022, 1-248
- [11] Milan Krbálek, Petr Šeba, *Spectral rigidity of vehicular streams (random matrix theory approach)*. J. Phys. A: Math. Theor. 42 345001, 2009, 1-10.