



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



Optimalita včelích pláství a související problémy

Optimality of honeycombs and related problems

Bakalářská práce

Autor: **Barbora Bumbálková**

Vedoucí práce: **prof. Mgr. David Krejčířík, Ph.D. DSc.**

Akademický rok: 2021/2022

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student:	Barbora Bumbálková
Studijní program:	Aplikace přírodních věd
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Studijní zaměření:	Aplikované matematicko-stochastické metody
Název práce (česky):	Optimalita včelích pláství a související problémy
Název práce (anglicky):	Optimality of honeycombs and related problems

Pokyny pro vypracování:

- 1) Výskyt struktur tvořených pravidelnými šestiúhelníky u včelích společenstev a jinde v přírodě. Biologické a fyzikální příklady.
- 2) Matematické vysvětlení. Spojité a diskrétní isoperimetrické nerovnosti. Problém dláždění v rovině.
- 3) Od geometrických dat ke spektrálním. Faber-Krahnova nerovnost, Bossel-Dannersovo rozšíření a Bareketina hypotéza.
- 4) Spektrální problémy související s optimalitou včelí plástve. Cheegerovy a jiné shluky.

Doporučená literatura:

- 1) D. Bucur, I. Fragalà, Proof of the honeycomb asymptotics for optimal Cheeger clusters. Adv. Math. 350, 2019, 97-129.
- 2) P. Freitas, D. Krejčířík, The first Robin eigenvalue with negative boundary parameter. Adv. Math. 280, 2015, 322-339.
- 3) T. C. Hales, The Honeycomb Conjecture. Discr. Comput. Geom. 25, 2001, 1-22.
- 4) A. Henrot, Shape optimization and spectral theory. De Gruyter, Warsaw, 2017.

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

doc. Mgr. David Krejčířík, Ph.D. DSc.
KM FJFI ČVUT, Trojanova 13, 12000 Praha 2

Jméno a pracoviště konzultanta:

Datum zadání bakalářské práce: 31.10.2020

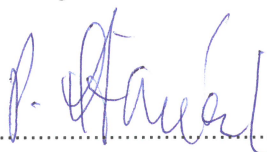
Datum odevzdání bakalářské práce: 7.7.2021

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

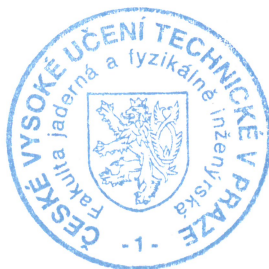
V Praze dne 30.10.2020



.....
garant oboru



.....
vedoucí katedry




.....
děkan

Poděkování:

Chtěla bych zde poděkovat svému školiteli prof. Mgr. Davidu Krejčířkovi, Ph.D. DSc., za ochotu, vstřícnost a odborné i lidské zázemí při vedení mé bakalářské práce.

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracovala samostatně a uvedla jsem všechnu použitou literaturu.

V Praze dne 7. července 2022

Barbora Bumbálková

Název práce:

Optimalita včelích pláství a související problémy

Autor: Barbora Bumbálková

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Aplikované matematicko-stochastické metody

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: prof. Mgr. David Krejčířík, Ph.D. DSc., KM FJFI ČVUT Trojanova 13 12000 Praha 2

Abstrakt: Tato bakalářská práce se zabývá problematikou optimality včelích pláství. Jsou zde nastíněny a matematicky vysvětleny dvě části tohoto geometrického problému, a to isoperimetrická nerovnost a dláždění v rovině. Tato problematika je dále rozvíjena ve spektrální teorii, ze které je v práci věnována největší pozornost Faber-Krahnově nerovnosti.

Klíčová slova: Isoperimetrická nerovnost, dláždění v rovině, voštinová domněnka, Faber-Krahnova nerovnost, Cheegrovy shluky

Title:

Optimality of honeycombs and related problems

Author: Barbora Bumbálková

Abstract: This bachelor thesis deals with the problem of optimality of honeycombs. Two parts of this problem are outlined and mathematically explained here, namely isoperimetric inequality and paving the plane. The problem is further developed in the spectral theory, of which the most attention is paid to Faber-Krahn inequality.

Key words: Isoperimetric inequality, paving the plane, honeycomb conjecture, Faber-Krahn inequality, Cheeger clusters

Obsah

Úvod	7
1 Výskyt struktur tvořených pravidelnými šestiúhelníky v přírodě	8
1.1 Včelí plástve	8
1.2 Další příklady v přírodě	9
2 Isoperimetrická nerovnost	10
2.1 Královna Didó	10
2.2 Obsahy rovinných útvarů	10
2.2.1 Obsah čtyřúhelníku	10
2.2.2 Obsah trojúhelníku	12
2.2.3 Obsah n -úhelníku	12
2.2.4 Obsah kruhu	13
2.3 Diskrétní isoperimetrická nerovnost	14
2.3.1 Isoperimetrická úloha pro trojúhelníky	14
2.3.2 Isoperimetrická úloha pro čtyřúhelníky	15
2.3.3 Isoperimetrická úloha pro n -úhelníky	16
2.4 Isoperimetrická vlastnost kruhu	17
3 Dláždění v rovině	19
3.1 Trocha historie	19
3.2 Pravidelné dláždění	19
3.3 Optimalita včelích pláství	21
4 Od geometrických dat ke spektrálním	23
4.1 Vibrující membrány	24
4.1.1 Resonanční frekvence obdélníku	24
4.2 Faber-Krahnova nerovnost	25
4.2.1 Schwarzova symetrizace	26
4.2.2 Faber-Krahnova nerovnost	26
4.3 Diskrétní Faber-Krahnova nerovnost	26
4.3.1 Steinerova symetrizace	27
4.3.2 Diskrétní Faber-Krahnova nerovnost	27
4.4 Robinovy okrajové podmínky	28
4.5 Cheegrovy shluky	29
Závěr	31

Úvod

Jak je známo, buňky včelích pláství mají tvar pravidelných šestiúhelníků. Pravidelné hexagony můžeme vidět ale i u jiných příkladů z přírody. Proč tomu tak je? A opravdu včely staví plástve z šestiúhelníků? Cílem této práce je popsat a matematicky vysvětlit tyto přírodní a fyzikální jevy a nastínit související problémy ve spektrální teorii.

V přírodě se struktury tvořené pravidelnými šestiúhelníky vyskytují velmi často. První kapitola představí hlavní příklady v přírodě a hlavní motivaci této práce, což je struktura včelích pláství, která se stala inspirací v mnoha různých odvětvích.

Druhá kapitola se věnuje problému isoperimetrické nerovnosti, která je důležitá k nalezení vhodných geometrických útvarů pro stavbu včelích pláství, aby byl zajištěn co největší obsah jednotlivých buněk. Ukážeme si diskrétní isoperimetrické nerovnosti pro různé mnohoúhelníky, které říkají, že pravidelný n -úhelník má ze všech n -úhelníků největší obsah. Závěr kapitoly je věnován isoperimetrické vlastnosti kruhu.

Ve třetí kapitole je rozebrána druhá podmínka při stavbě včelích pláství, a to použití co nejmenšího množství stavebního materiálu. To vede na problematiku dláždění v rovině, což znamená vyplnění prostoru rovinnými útvary tak, aby nevznikaly mezery mezi nimi nebo se nepřekrývaly. Dále je zde uvedena matematická formulace domněnky včelích pláství (Honeycomb conjecture).

V poslední kapitole se přesuneme od geometrických dat ke spektrálním, kde si ukážeme související problémy s předchozími. Je zde zmíněna Faber-Krahnova nerovnost, která ukazuje, že kruh minimalizuje první vlastní číslo Laplaceova operátoru s Dirichletovými okrajovými podmínkami. Dále, stejně jako u isoperimetrické nerovnosti, existuje diskrétní Faber-Krahnova nerovnost pro trojúhelníky a čtyřúhelníky. Ukážeme si problematiku při optimalizaci prvního vlastního čísla Laplaceova operátoru pro jiné okrajové podmínky, což vede na Bossel-Dannersovu nerovnost. Na závěr jsou zde zmíněny Cheegrovy shluky, které souvisí s optimalitou včelích pláství.

Kapitola 1

Výskyt struktur tvořených pravidelnými šestiúhelníky v přírodě

Než se dostaneme k matematickému popisu problému optimality včelích pláství, ukážeme si alespoň pár příkladů z přírody, kde můžeme struktury tvořené šestiúhelníky vidět.

1.1 Včelí plástve

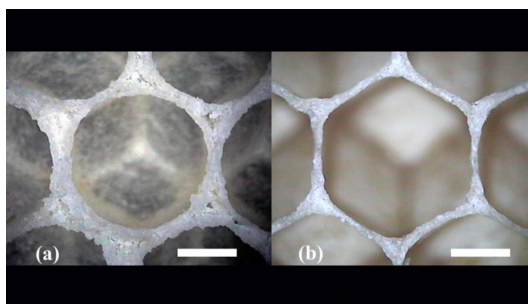
Hlavní motivací této práce, jak název napovídá, je struktura včelích pláství (viz obr. 1.1, [1]). Plástve jsou snad nejznámějším příkladem, kde se v přírodě vyskytují pravidelné šestiúhelníky. Strukturou včelích pláství se již zabývaly spousty matematiků a vědců a je také inspirací pro mnoha odvětví, jako je architektura, chemické inženýrství, medicína a další. Plástve mají skvělé vlastnosti, které jsou dány jejich strukturou, tvarem a použitým materiálem, a ty jsou příčinou využití v jiných oborech.

Plástev je tvořena buňkami, které mají tvar šestiúhelníků. Včely do těchto buněk kladou larvy a také je využívají pro zásoby medu a pylu. Pro své zásoby chtějí včely získat co největší prostor a při tvorbě spotřebovat co nejméně stavebního materiálu. Tyto dvě záležitosti jsou motivací pro následující dva problémy – isoperimetrická nerovnost a dláždění v rovině.



Obrázek 1.1: Včelí plástev

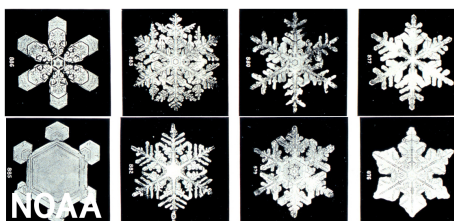
Opravdu však včely staví buňky pláství ve tvaru šestiúhelníku? Skupina čínských a britských inženýrů sledovala proces stavění včelích pláství. Vědci zjistili, že včely z vosku tvoří válcovité buňky, které odpovídají rotační symetrii jejich těla. Až po pár sekundách se buňky přemění na šestiúhelníkové (viz obr. 1.2). Při stavbě buněk je použit vosk, který teče, je plastický a tvárný. Působením povrchového napětí v místě dotyku sousedních buněk pak dochází k přeměně válcovitých buněk na šestiúhelníkové [2].



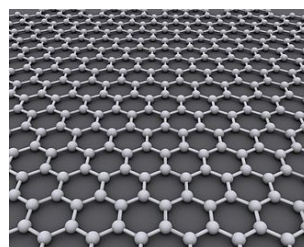
Obrázek 1.2: přeměna buňky plástve z válcovité do šestiboké struktury (foto: B. L. Karihaloo, K. Zhang and J. Wang)

1.2 Další příklady v přírodě

Kromě včelích pláství lze v přírodě najít i jiné příklady struktur s pravidelnými šestiúhelníky. Struktura tvořená hexagony je typická pro tvar sněhových vloček (obr. 1.3, [3]). Sněhová vločka je seskupením molekul vody, které se spojí do tvaru šestiúhelníku. Ledové krystalky pak od tohoto základu rostou dál. Dalším příkladem je jeden z nejpevnějších materiálů a tím je grafen. Tvoří ho vrstva atomů uhlíku uspořádaných do tvaru šestiúhelníků (obr. 1.4, [4]).



Obrázek 1.3: Tvar vloček



Obrázek 1.4: Struktura grafenu

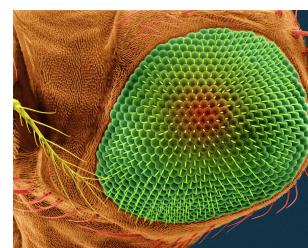
Viditelnější známky pravidelných šestiúhelníků nese například struktura ananasu (1.5) či povrch hadí kůže (1.6), kde struktura šupin zajišťuje pokrytí celého těla hada. Dalším příkladem může být složené oko hmyzu (1.7). Méně známým příkladem jsou jikry neapolských ryb.



Obrázek 1.5: Struktura ananasu



Obrázek 1.6: Struktura hadí kůže



Obrázek 1.7: Struktura složeného oka hmyzu

Kapitola 2

Isoperimetrická nerovnost

U včelích pláství je důležité využít co nejmenšího množství materiálu pro získání co největšího obsahu buňky. Jinými slovy je zapotřebí najít rovinný útvar s největším obsahem za daného obvodu.

2.1 Královna Didó

Pojem isoperimetrie má dlouhou a bohatou historii, která vznikla s problémem královny Didó. Podle pověsti byla dcerou tyrského krále a po jeho smrti měla vládnout společně s jejím bratrem Pygmaliónem. Ten však zabil jejího manžela Sychaea a chtěl získat jeho poklady. Didó však s poklady uprchla do Afriky.

Vylodila se na severoafrickém pobřeží, kde chtěla od místního krále koupit půdu. Ten jí chtěl prodat jen tak velké území, které je možné ohraničit kouskem býčí kůže. Didó volskou kůži rozřezala na úzké pásy a svázala je v jeden dlouhý. Rovné pobřeží využila jako část hranice a kůži pak položila ve tvaru půlkružnice, aby získala co největší plochu území. Na tomto území bylo vybudováno město Kartágo a Didó se stala jeho první královnou.

2.2 Obsahy rovinných útvarů

V další podkapitole budeme řešit isoperimetrické úlohy, ke kterým potřebujeme znát obsahy rovinných útvarů, abychom je následně mohli porovnat. V této části uvedeme a dokážeme vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku, čtyřúhelníku, obecného n -úhelníku a kruhu.

2.2.1 Obsah čtyřúhelníku

Věta 2.2.1 (Bretschneiderův vzorec, [5]). *Pro obsah libovolného čtyřúhelníku $ABCD$ o stranách a, b, c, d a vnitřních úhlech α, γ při vrcholech A a C platí*

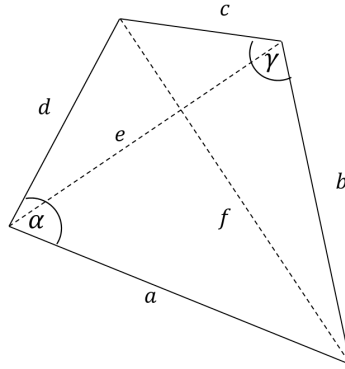
$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right)}, \quad (2.1)$$

kde s je poloviční obvod čtyřúhelníku.

Důkaz. Čtyřúhelník si lze rozdělit na dva trojúhelníky. Úhlopříčky čtyřúhelníku označme e a f , viz obr. 2.1.

Obsah se tedy vypočítá jako

$$S = \frac{ad \cdot \sin \alpha}{2} + \frac{bc \cdot \sin \gamma}{2},$$



Obrázek 2.1: Obrázek k důkazu věty 2.2.1

po úpravě

$$2S = ad \cdot \sin \alpha + bc \cdot \sin \gamma. \quad (2.2)$$

Ze vzorce (2.2) je vidět, že obsah čtyřúhelníku je závislý i na volbě úhlů α a γ . Jejich vzájemnou závislost lze vyjádřit pomocí kosinové věty. Pro délku úhlopříčky f platí

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha$$

$$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma$$

a porovnáním obou rovnic dostaneme podmínku

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = f^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma, \quad (2.3)$$

která vyjadřuje závislost délek stran na úhlech α, γ .

Po umocnění rovnic (2.2) a (2.3) dostaneme

$$4S^2 = (ad)^2 \sin^2 \alpha + (bc)^2 \sin^2 \gamma + 2abcd \sin \alpha \sin \gamma$$

$$(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 4(ad)^2 \cos^2 \alpha + 4(bc)^2 \cos^2 \gamma - 8abcd \cos \alpha \cos \gamma,$$

rovnice sečteme a upravíme. Použijeme vzorce $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x + y)$, $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$:

$$16S^2 = 4a^2d^2 + 4b^2c^2 - 8abcd(\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma) - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2$$

$$16S^2 = [2(ad + bc) + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)] \cdot [2(ad + bc) - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)] - 8abcd - 8abcd \cos(\alpha + \gamma)$$

Výrazy v hranatých závorkách lze upravit podle vzorce $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$:

$$16S^2 = [(a + d)^2 - (b - c)^2] \cdot [(b + c)^2 - (a - d)^2] - 8abcd(\cos(\alpha + \gamma) + 1)$$

Na závěr opět využijeme vzorec $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ a goniometrický vzorec $\cos^2\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) = \frac{1 + \cos(\alpha + \gamma)}{2}$. Nakonec dosadíme $s = l/2 = (a + b + c + d)/2$.

$$16S^2 = (a + d - b + c)(a + d + b - c)(b + c - a + d)(b + c + a - d) - 16abcd \cos^2\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right)$$

$$S^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - abcd \cos^2\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right)$$

□

Bretschneiderův vzorec platí pro libovolný konvexní čtyřúhelník. Jeho jedním speciálním případem je vzorec pro výpočet obsahu tětívového čtyřúhelníku, tedy takového, kterému lze opsat kružnice.

Věta 2.2.2 (Brahmaguptův vzorec, [6]). *Necht' máme konvexní tětívový čtyřúhelník o stranách a, b, c, d . Pak pro jeho obsah platí*

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}, \quad (2.4)$$

kde s je polovina obvodu čtyřúhelníku.

Důkaz. Tětívový čtyřúhelník má takovou vlastnost, že protilehlé úhly čtyřúhelníku dávají dohromady 180° , tj. $\alpha + \gamma = 180^\circ$. Dosazením do (2.1) dostaneme $S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, jelikož $\cos 90^\circ = 0$. \square

2.2.2 Obsah trojúhelníku

Dalším speciálním případem Bretschneiderova vzorce pro libovolný konvexní čtyřúhelník je Heronův vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku.

Věta 2.2.3 (Heronův vzorec). *Necht' je dán obecný trojúhelník ABC o stranách a, b, c . Pak pro obsah trojúhelníku platí*

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad (2.5)$$

kde s je poloviční obvod trojúhelníku, tj.

$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Důkaz. Důkaz vychází z Brahmaguptova vzorce (2.4) pro čtyřúhelník. Dosadíme $d = 0$, ze čtyřúhelníku se tak stane trojúhelník a dostaneme

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

\square

2.2.3 Obsah n -úhelníku

Věta 2.2.4. *Necht' je dán obecný n -úhelník, jehož strany se neprotínají. Pak pro jeho obsah platí*

$$S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k+1})(y_k + y_{k+1}), \quad (2.6)$$

kde (x_k, y_k) značí souřadnice vrcholů n -úhelníku a x_{n+1} a y_{n+1} jsou shodné s x_1 a y_1 .

Důkaz. Nejprve ukážeme, že se oba výrazy v (2.6) rovnají:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k+1})(y_k + y_{k+1}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (x_k y_k - x_{k+1} y_{k+1} + x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k).$$

Poslední rovnost platí, jelikož se členy $x_k y_k$ a $x_{k+1} y_{k+1}$ v sumě od sebe všechny odečtou ($x_{n+1} y_{n+1} = x_1 y_1$).

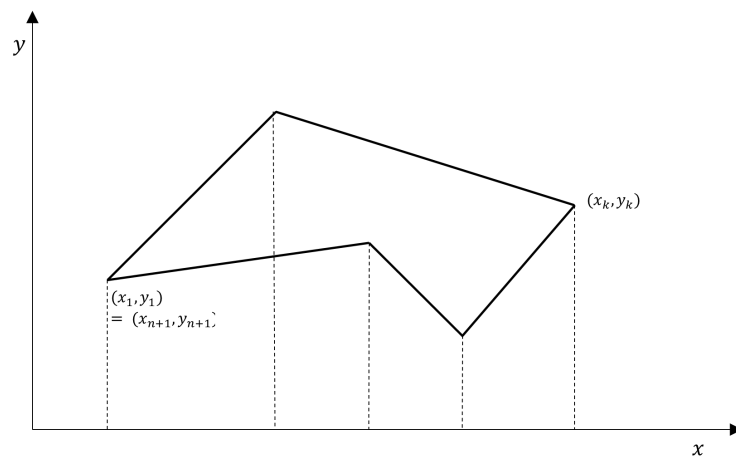
Stačí už tedy jen ukázat první rovnost. Obsah n -úhelníku vypočteme pomocí n lichoběžníků, které dostaneme, spustíme-li z vrcholů n -úhelníku kolmice na osu x , jak je znázorněno na obrázku 2.2. Obsah jednoho lichoběžníku se vypočítá pomocí vzorce:

$$S_k = \frac{1}{2}(x_k - x_{k+1})(y_k + y_{k+1}),$$

kde člen $(x_k - x_{k+1})$ má buď kladné nebo záporné znaménko podle toho, zda se pohybujeme po horní části n -úhelníku či po dolní. Po vysčítání všech obsahů těchto lichoběžníků dostaneme obsah celého n -úhelníku:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k+1})(y_k + y_{k+1}),$$

□



Obrázek 2.2: Obrázek k důkazu obsahu n -úhelníku

2.2.4 Obsah kruhu

Nejprve ukážeme obecný vzorec pro výpočet obsahu ohraničeného uzavřenou křivkou, ze kterého pak vypočítáme obsah kruhu.

Věta 2.2.5. *Nechť $c(t) = (x(t), y(t))$, kde $t \in [a, b]$ je jednoduchá uzavřená kladně orientovaná křivka, která je po částech spojitě diferencovatelná. Pak pro obsah ohraničený touto křivkou platí*

$$S = - \int_a^b x'(t)y(t)dt = \int_a^b x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))dt. \quad (2.7)$$

Důkaz. Rovnost mezi prvním a druhým výrazem ukážeme metodou per partes

$$\int_a^b x(t)y'(t)dt = [x(t)y(t)]_a^b - \int_a^b x'(t)y(t)dt,$$

kde první člen je roven 0, jelikož pro uzavřenou křivku platí $x(a) = x(b)$ a $y(a) = y(b)$. Poslední výraz plyne ze dvou předchozích

$$2S = \int_a^b x(t)y'(t)dt - \int_a^b x'(t)y(t)dt$$

$$S = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))dt.$$

Zbývá ukázat první rovnost. Na křivce $c(t)$ můžeme zvolit n bodů, tak, že $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$ a $a = b$. Obsah ohraničený křivkou $c(t)$ lze aproximovat obsahem n -úhelníku o vrcholech $c(t_k) = (x(t_k), y(t_k))$, $k = 0, \dots, n$. Pro obsah n -úhelníku platí

$$S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [(x(t_k) - x(t_{k+1}))(y(t_k) + y(t_{k+1}))] = - \sum_{k=1}^n \left[(x(t_{k+1}) - x(t_k)) \frac{1}{2} (y(t_k) + y(t_{k+1})) \right] \doteq \\ \doteq - \sum_{k=1}^n \left[\frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{t_{k+1} - t_k} \cdot \frac{y(t_k) + y(t_{k+1})}{2} \right].$$

Limitním přechodem pro $n \rightarrow +\infty$ dostaneme

$$S \doteq - \int_a^b x'(t)y(t)dt$$

□

Podle vzorce (2.7) lze vypočítat obsah kruhu. Máme parametrizovanou křivku $c(t) = ((x(t), y(t)))$, kde $x(t) = r \cdot \cos t$, $y(t) = r \cdot \sin t$ a $t \in [-\pi, \pi]$. Potom dostáváme

$$S = \int_{-\pi}^{\pi} r^2 \cdot \sin^2 t = 2 \int_0^{\pi} r^2 \cdot \sin^2 t = r^2 [t - \sin(t)\cos(t)]_0^{\pi} = \pi r^2.$$

Poznámka. Stejně jako v důkazu předchozí věty bychom obsah kruhu mohli aproximovat obsahem pravidelného n -úhelníku a limitním přechodem $n \rightarrow +\infty$ bychom dostali stejný výsledek.

2.3 Diskrétní isoperimetrická nerovnost

Didó správně uhodla, že rozloží-li býčí kůži k hranici (danou pobřežím) do tvaru půlkružnice, dostane největší obsah. Bez hranice by největší obsah dostala, pokud by utvořila kruh. Než si však ukážeme isoperimetrickou nerovnost, která říká, že ze všech uzavřených křivek o daném obvodu má právě kruh největší obsah, podíváme se na tzv. diskrétní isoperimetrickou nerovnost, která se týká mnohoúhelníků.

Diskrétní isoperimetrickou úlohou pro n -úhelníky je myšlena úloha: ze všech n -úhelníků se stejným obvodem l najděte ten, který ohraničuje maximální plochu. V této části ukážeme, že pravidelný mnohoúhelník má při daném obvodu největší obsah.

2.3.1 Isoperimetrická úloha pro trojúhelníky

Nejprve si ukážeme nejjednodušší případ isoperimetrické úlohy pro n -úhelníky, tím je nalezení takového trojúhelníku, který mezi všemi trojúhelníky bude mít největší obsah.

K důkazu isoperimetrické nerovnosti budeme potřebovat vztah mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

Věta 2.3.1 (AG-nerovnost). *Necht' jsou čísla x_1, \dots, x_n nezáporná a $n \in \mathbb{N}$. Pak platí*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (2.8)$$

a rovnost nastává právě tehdy, když jsou všechna x_k , $k = 1, \dots, n$ stejná.

Věta 2.3.2 ([7]). Označíme-li obvod trojúhelníku l a jeho obsah S , pak platí

$$S \leq \frac{l^2}{12\sqrt{3}} \quad (2.9)$$

a rovnost nastává pouze tehdy, je-li trojúhelník rovnostranný.

Důkaz. Pro výpočet obsahu trojúhelníku o stranách a, b, c je použit Heronův vzorec (2.5), tedy $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde $s = l/2$. Chceme maximalizovat obsah S , musíme tedy maximalizovat součin tří kladných čísel $(s-a)(s-b)(s-c)$. Pro součet těchto čísel platí

$$(s-a) + (s-b) + (s-c) = 3s - (a+b+c) = 3s - 2s = s = l/2.$$

Využitím AG-nerovnosti dostaneme

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leq \left(\frac{s}{3}\right)^3,$$

a tedy

$$S^2 \leq s \cdot \left(\frac{s}{3}\right)^3.$$

Úpravou a dosazením $s = l/2$ dostaneme isoperimetrickou nerovnost pro trojúhelníky $S \leq \frac{l^2}{12\sqrt{3}}$. Z AG-nerovnosti plyne, že rovnost nastává právě tehdy, když jsou čísla $(s-a)$, $(s-b)$ a $(s-c)$ stejná, tudíž $a = b = c$ a trojúhelník je rovnostranný. \square

2.3.2 Isoperimetrická úloha pro čtyřúhelníky

Stejně jako pro trojúhelníky si můžeme ukázat isoperimetrickou úlohu pro čtyřúhelníky.

Věta 2.3.3 ([7]). Necht' je dán konvexní čtyřúhelník o stranách a, b, c, d a protilehlých úhlech α, γ . Označme jeho obvod l a obsah S . Potom platí

$$S \leq \frac{l^2}{16} \quad (2.10)$$

a rovnost nastává pouze pro čtverec.

Důkaz. Pro libovolný konvexní čtyřúhelník platí Bretschneiderův vzorec (2.1)

$$S^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \leq (s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

Opět využijeme AG-nerovnost na kladná čísla $(s-a)$, $(s-b)$, $(s-c)$, $(s-d)$. Jejich součet je

$$(s-a) + (s-b) + (s-c) + (s-d) = 4s - (a+b+c+d) = 2s$$

Dostaneme tedy nerovnost

$$S^2 \leq (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) \leq \left(\frac{2s}{4}\right)^4$$

a po dosazení $s = l/2$, úpravě a odmocnění odtud plyne $S \leq \frac{4s^2}{16} = \frac{l^2}{16}$. Navíc z AG-nerovnosti plyne, že rovnost nastane tehdy, jsou-li čísla $(s-a)$, $(s-b)$, $(s-c)$, $(s-d)$ stejná, tzn. $a = b = c = d$. Rovnost v isoperimetrické nerovnosti pro čtyřúhelníky tak nastává, pokud se jedná o čtverec. \square

2.3.3 Isoperimetrická úloha pro n -úhelníky

Nyní můžeme přejít k úloze nalezení n -úhelníku, který ze všech n -úhelníků o stejném obvodu zaujímá největší plochu. Jak nám předchozí dvě úlohy napověděly, mohl by to splňovat pravidelný mnohoúhelník, tj. takový, který má všechny strany stejně dlouhé a vnitřní úhly stejně velké.

Nejprve ukážeme, že existuje n -úhelník s maximálním obsahem ([8]). N vrcholů n -úhelníku odpovídá $2n$ souřadnicím v rovině $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Dále jelikož je dán pevný obvod, ozn. l , tak průměr n -úhelníku nemůže být větší jak l . Uvažujme, že všechny n -úhelníky leží v kruhu $B_l := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq l\}$. Na souřadnice vrcholů lze pohlížet jako na vektor $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in B_l \times \dots \times B_l = (B_l)^n$. B_l je omezená a uzavřená množina, a tedy kompaktní. Kartézský součin kompaktních množin je také kompaktní, tj. $(B_l)^n$ je kompaktní množina. Obsah S lze brát jako funkce $2n$ proměnných $S = S(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$. Pro obsah n -úhelníku platí $S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k)$. S je spojitá funkce, která na kompaktní množině nabývá svého maxima. Dokázali jsme tedy, že existuje nějaký n -úhelník, který má maximální obsah.

Je tedy potřeba zjistit, jaký n -úhelník ze všech n -úhelníků dosahuje maximálního obsahu. To nám říká následující věta.

Věta 2.3.4. *Ze všech konvexních n -úhelníků o pevně daném obvodu l má pravidelný n -úhelník největší obsah.*

Důkaz. Pro důkaz této věty lze nahlédnout do [8]. □

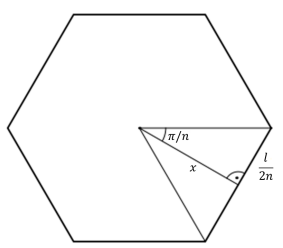
Nyní už můžeme ukázat isoperimetrickou nerovnost pro mnohoúhelníky.

Věta 2.3.5. *Pro každý n -úhelník, který neprotíná sám sebe platí*

$$S \leq \frac{l^2}{4n \tan \frac{\pi}{n}},$$

kde S značí jeho obsah a l obvod. Rovnost nastává právě tehdy, když je n -úhelník pravidelný.

Důkaz. Z věty 2.3.4 víme, že největší obsah ze všech n -úhelníků má pravidelný n -úhelník. Stačí nám tedy vypočítat obsah pravidelného n -úhelníku. Ten si lze rozdělit na n rovnoramenných trojúhelníků takových, že jeden vrchol vždy leží ve středu n -úhelníku (viz obr. 2.3).



Obrázek 2.3: Pravidelný n -úhelník

Nejprve vypočítáme obsah jednoho trojúhelníku, pak už lehce dostaneme obsah celého n -úhelníku.

$$S = n \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x l}{n} \right) \tag{2.11}$$

Velikost x vyjádříme z rovnice $\tan \left(\frac{\pi}{n} \right) = \frac{l}{2nx}$, tedy $x = \frac{l}{2n \tan \frac{\pi}{n}}$ a dosadíme do (2.11):

$$S = n \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{2n^2 \tan \frac{\pi}{n}} \right) = \frac{l^2}{4n \tan \frac{\pi}{n}} \tag{2.12}$$

□

Poznámka. Pro účely v příští kapitole ještě porovnáme obsahy rovnostranného trojúhelníku, čtverce a pravidelného šestiúhelníku při pevně zadané délce obvodu l . Jelikož jsou to pravidelné mnohoúhelníky, jejich obsah S dle diskrétních isoperimetrických nerovností nabývá maxima. Označíme-li obsah rovnostranného trojúhelníku S_3 , čtverce S_4 a pravidelného šestiúhelníku S_6 , tak máme

$$S_3 = \frac{l^2}{12\sqrt{3}}, S_4 = \frac{l^2}{16}, S_6 = \frac{l^2}{24 \tan \frac{\pi}{6}}.$$

Porovnáním zjistíme, že $S_3 < S_4 < S_6$.

2.4 Isoperimetrická vlastnost kruhu

Nyní si ukážeme isoperimetrickou vlastnost kruhu, která uvádí, že mezi všemi uzavřenými křivkami o daném obvodu l má největší obsah kruh.

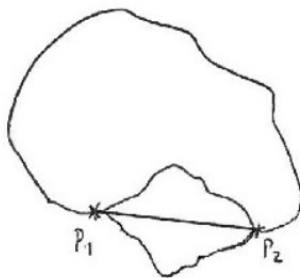
Věta 2.4.1 ([9]). *Necht' Γ je uzavřená křivka v \mathbb{R}^2 o délce l , a necht' S označuje obsah oblasti ohraničené touto křivkou. Pak*

$$S \leq \frac{l^2}{4\pi} \tag{2.13}$$

a rovnost nastává, pokud je Γ kruh.

Ukážeme si důkaz, který provedl švýcarský matematik Jacob Steiner. Všechny jeho důkazy však postrádají důkaz o existenci křivky s maximálním obsahem. Důkaz, že existuje křivka s maximálním obsahem, je uveden v knize [10].

Poznámka. Oblast S musí být konvexní. Pokud by nebyla, tak najdeme dva body na křivce P_1, P_2 , jejichž spojnice je mimo oblast S . Tuto spojnici lze použít jako osu souměrnosti k odrazu křivky Γ mezi těmito dvěma body na druhou stranu. Obvod křivky tak zůstane stejný, ale obsah ohraničený křivkou se zvětší, viz obr. 2.4.



Obrázek 2.4: Podmínka konvexnosti

Důkaz. Mějme křivku Γ , která není kružnicí. Na křivce zvolíme dva body, ozn. A, B . Jeden lze volit libovolně a druhý tak, aby obvod křivky dělil na dvě části Γ_1, Γ_2 , které jsou stejně dlouhé. Spojením bodů A a B rozdělíme oblast S na dvě části S_1 a S_2 ($S_1 + S_2 = S$), které musí být stejně velké. Pokud by nebyly, například $S_1 > S_2$, pak můžeme použít spojici AB jako osu souměrnosti k odrazu oblasti S_1 na druhou stranu, čímž získáme větší plochu a obvod zůstane stále stejný.

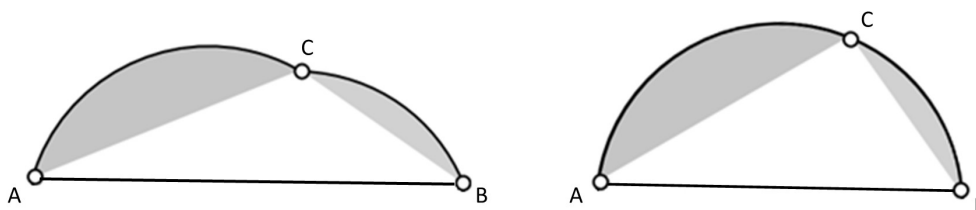
Ukázali jsme, že $S_1 = S_2$. Nyní chceme dokázat, že křivky Γ_1, Γ_2 jsou půlkružnice. Předpokládejme, že Γ_1 není půlkružnice. Pak na této křivce určitě existuje bod C tak, že úhel v trojúhelníku ABC při

vrcholu C není pravý. Nyní ponechme délku AC a CB pevnou a pohybujme body A a B tak, abychom dostali pravý úhel při vrcholu C , viz obr. 2.5 (Změní se nám tak vzdálenost bodů A, B).

Délka křivky Γ_1 zůstala stejná, stejně jako obsah šedých oblastí. Zvětší se nám ale obsah trojúhelníku ABC . Označíme-li γ jako úhel při vrcholu C , pak obsah původního trojúhelníku je roven $ab \sin \gamma$. Po přesunutí vrcholu C tak, aby $\gamma = 90^\circ$ ($\sin 90^\circ = 1$) je obsah nového trojúhelníku roven ab . Pro jejich rozdíl platí

$$ab(1 - \sin \gamma) > 0,$$

tedy nový trojúhelník má větší obsah a tedy i plocha ohraničená nově vzniklou křivkou je větší. Přičemž tato křivka je kružnice, to nám říká Thaletova věta.



Obrázek 2.5: Obrázek k důkazu isoperimetrické nerovnosti

□

Kapitola 3

Dláždění v rovině

V předchozí kapitole se ukázalo, že největší obsah ze všech uzavřených křivek o délce l má kruh, a zároveň ze všech n -úhelníků se stejným obvodem má největší obsah pravidelný n -úhelník.

Tato kapitola se zabývá problémem zvaným dláždění v rovině nebo též teselace. Jedná se o vyplňování prostoru v rovině jedním či více geometrickými útvary tak, aby mezi nimi nevznikaly mezery, nebo se nepřekrývaly.

Je snadné si představit, že při dláždění roviny pomocí kruhů vznikají mezi jednotlivými kruhy mezery a nevyplní se tak celý prostor. Dláždění se tak provádí pomocí mnohoúhelníků.

3.1 Trocha historie

Dlážděním se zabývali již Sumerové (asi 4000 př. n. l.) při stavbě nástěnných dekorací tvořených vzory z hliněných dlaždic. Dále ve starověkém Řecku byly často používány dekorativní mozaikové obklady. Avšak první, kdo tento problém matematicky vysvětlil, byl až Johannes Kepler v roce 1619 ve svém díle *Harmonices Mundi*, ve kterém se věnoval pravidelnému a polopravidelnému dláždění.

Pravidelné dláždění v rovině je takové, kdy prostor vyplňuje jeden stejný pravidelný mnohoúhelník. Pokud je rovina vyplněna dvěma a více druhy pravidelných n -úhelníků, tak se takovému dláždění říká polopravidelné.

Dláždění v rovině dělíme na periodické a aperiodické. Pravidelné i polopravidelné teselace spadají do periodického dláždění. Aperiodické dláždění je takové, při kterém se opakuje konečný počet geometrických útvarů, které neperiodicky vyplňují prostor, tj. žádná část obrazce se neopakuje. Mezi nejznámější příklad aperiodické teselace patří Penroseovo dláždění.

3.2 Pravidelné dláždění

Už v díle *Eukleidovy Základy* řeckého matematika Eukleida se dovídáme, že rovinu lze pokrýt stejnými pravidelnými n -úhelníky o stejné velikosti pouze třemi způsoby: použitím rovnostranných trojúhelníků, čtverců nebo pravidelných šestiúhelníků. Ukážeme si krátký důkaz.

Chceme-li vydláždít rovinu bez mezer, tak součet úhlů setkávajících se vrcholů daného n -úhelníku musí dát 360° . Je tedy nejprve potřeba vypočítat velikost vnitřního úhlu pravidelného n -úhelníku.

Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180° , ve čtverci, který dostaneme sjednocením dvou trojúhelníků, je tedy součet $2 \cdot 180^\circ$. Spojením $(n - 2)$ trojúhelníků vznikne n -úhelník a součet jeho vnitřních

úhlu je tedy $(n - 2) \cdot 180^\circ$. U pravidelných n -úhelníků pak jeden vnitřní úhel má velikost

$$\frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}.$$

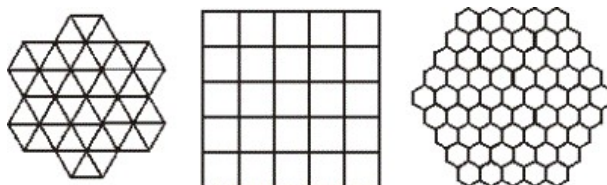
Mají-li se spojit vrcholy k stejných n -úhelníků, pak musí platit

$$k \cdot \frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n} = 360^\circ.$$

Úpravou dostaneme

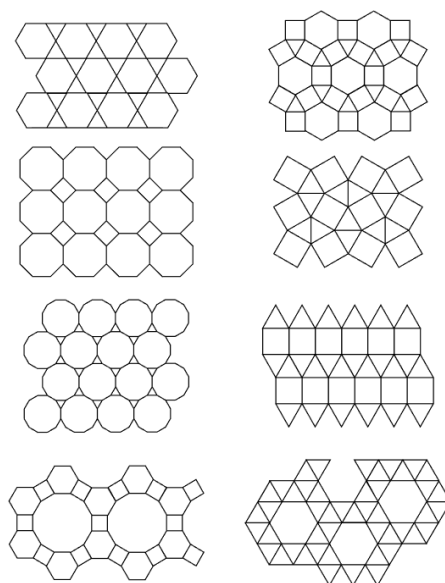
$$k = \frac{2n}{n - 2}.$$

Řešením jsou pouze dvojice $(n, k) = (3; 6), (4; 4), (6; 3)$, a tedy lze spojit buď 6 rovnostranných trojúhelníků, čtyři čtverce nebo 3 pravidelné šestiúhelníky. Tyto druhy dláždění jsou zobrazeny na obr. 3.1.



Obrázek 3.1: Dláždění v rovině pravidelnými n -úhelníky

Pro zajímavost ještě můžeme uvést, že pokud bychom rovinu vyplňovali více druhy pravidelných polygonů, přibude nám 8 dalších možností, viz obr. 3.2 [11]. Toto jsou již zmiňované polopravidelné teselace.



Obrázek 3.2: Dláždění více druhy pravidelných čtyřúhelníků

3.3 Optimalita včelích pláští

V kapitole 3.1 jsme ukázali, že rovinu lze vyplnit rovnostrannými trojúhelníky, čtverci či pravidelnými šestiúhelníky. Dále z poznámky v kapitole 2.3.3 víme, že z těchto tří pravidelných n -úhelníků má šestiúhelník za daného obvodu l největší obsah.

První záznam o domněnce včelích pláští neboli voštinové domněnce (anglicky Honeycomb conjecture) pochází z roku 36 př. n. l. od Marca Terentia Varra, který navázal na práci Eukleida a Zenodora. Varro správně uhodl, že nejlepší způsob, jak rozdělit povrch na části, které mají stejný obsah a co nejmenší celkový obvod, je za použití šestiúhelníků. Nedokázal to však matematicky dokázat. Tuto domněnku dokázal až matematik Thomas C. Hales v roce 1999 v článku [12], ze kterého v této části čerpáme. Ukážeme si pouze formulace voštinové domněnky, pro důkazy lze nahlédnout do [12].

Z rovnice pro výpočet obsahu pravidelného n -úhelníku (2.12) lze vyjádřit obvod šestiúhelníku za jednotkového obsahu jako $l = 2\sqrt[4]{12}$, který ve voštinové domněnce hraje důležitou roli. Necht' $B(0, r)$ je kruh o poloměru r v počátku.

Věta 3.3.1. *Necht' Γ je lokálně konečný graf v \mathbb{R}^2 skládající se z hladkých křivek takový, že $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ má nekonečně mnoho omezených spojených částí o jednotkovém obsahu. Necht' C je sjednocením těchto omezených částí. Pak*

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{obvod}(C \cap B(0, r))}{\text{plocha}(C \cap B(0, r))} \geq \sqrt[4]{12}$$

a rovnost nastává u pravidelné šestiúhelníkové dlaždice.

Tato věta má silnější předpoklady, než je nutné. Uvažujme T_1, \dots, T_k, \dots spočetnou posloupnost disjunktčních podmnožin \mathbb{R}^2 . Předpokládáme, že pro každé i má topologická hranice T_i konečnou jednorozměrnou Hausdorffovu míru \mathcal{H}^1 . To znamená, že T_i je měřitelná a její hranice má konečnou délku. Obecně platí, že jednorozměrná Hausdorffova míra sjednocení $\cup_i \partial T_i$ je nekonečná. Abychom dostali konečný obvod, zkrátíme ho pomocí fixací kompaktní množiny $K \subset \mathbb{R}^2$. Necht' $R_i \subset T_i \cap K$ takové, že $\mathcal{H}^1(\partial R_i \setminus \partial T_i) = 0$. K uvedení voštinové nerovnosti není nutné použití původních buněk T_i , ale může být formulována z hlediska R_i a K , kde připouštíme obsah $(R_i \setminus S(R_i))$ menší než 1.

Věta 3.3.2. *Necht' K je kompaktní množina v rovině obsahující disjunktí měřitelné množiny R_1, R_2, \dots , kde každá R_i má konečnou hranici ∂R_i . Necht' $\alpha_i = \min(1, S(R_i))$ a $\Gamma = \cup_i \partial R_i$. Předpokládejme $\alpha_i > 0$ pro nějaké i . Potom platí*

$$\mathcal{H}^1(\Gamma) > \sqrt[4]{12} \sum \alpha_i.$$

Spojujeme oblasti R_i , dokud součet velikostí jejich ploch je menší než 1. Nezmění se tím $\mathcal{H}^1(\Gamma)$ ani $\sum \alpha_i$. Oblasti R_i lze spojovat, dokud existují alespoň dvě s obsahem od 0 do 1/2. To umožňuje předpokládat, že je konečně mnoho R_1, \dots, R_n . Zafixujme $\alpha_i \in [0, 1]$ pro $i = 1, \dots, n$. Uvažujme optimalizační problém proměnných R_1, \dots, R_n tak, aby se minimalizovalo $\mathcal{H}^1(\cup \partial R_i)$ s omezením, že $S(R_i) \geq \alpha_i$ pro $i = 1, \dots, n$.

Existuje $\Gamma = \Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, které minimalizuje jednorozměrnou Hausdorffovu míru hranice $\cup \partial R_i$.

Věta 3.3.3. *Necht' $0 < \alpha_i \leq 1$ pro $i = 1, \dots, n$ a necht' $A = \sum_i \alpha_i$. Označme l obvod $\Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, pak*

$$l > A \sqrt[4]{12}$$

Tato věta implikuje větu 3.3.1 a 3.3.2. Abychom problém vyřešili, nahradíme rovinný shluk shlukem na plochem torusu, který má výhodu kompaktnosti a nulové Eulerovy charakteristiky.

Necht' $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ je torus o ploše alespoň 1. Rozdělme torus na konečný počet jednoduše spojených oblastí. Předpokládejme, že se hranice skládá z jednoduchých rektifikovatelných křivek, které se setkávají pouze v koncových bodech.

Věta 3.3.4 (Voštinová domněnka na torusu).

$$\text{obvod}(\cup \partial R_i) \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i \sqrt[4]{12} \quad (3.1)$$

a rovnost nastane pouze tehdy, je-li každé R_i pravidelný šestiúhelník a každé $\alpha_i = 1$.

Z této věty plyne věta 3.3.3. V článku [12] je dále dokázaná hexagonální isoperimetrická nerovnost, která implikuje voštinovou domněnku na torusu.

Kapitola 4

Od geometrických dat ke spektrálním

V této kapitole se přesuneme ke spektrální teorii, která má využití v mnoha oblastech matematiky a fyziky. Jedním z příkladů je teorie kmitání a vlnění, které se řídí vlnovou rovnicí

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \quad (4.1)$$

kde $t \in \mathbb{R}$ je čas a $-\Delta$ je Laplaceův operátor v d -rozměrném Euklidovském prostoru: $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_d}^2$, kde $(x_1, \dots, x_d) = x \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Vlnová rovnice je modelem pro vibrující membrány, kterým se v této kapitole budeme věnovat.

Separací prostorových a časových proměnných vlnové rovnice (4.1) dostáváme Helmholtzovu rovnici

$$-\Delta \psi = \lambda \psi, \quad (4.2)$$

kde λ jsou vlastní čísla Laplaceova operátoru a ψ k nim příslušné vlastní funkce. V případě vlnové rovnice vlastní čísla λ jsou úměrné druhým mocninám rezonančních frekvencí pro vibrující systémy.

Vlnová rovnice (4.1) podléhá počátečním podmínkám při $t = 0$. Navíc jelikož jsou prostorové proměnné x obvykle omezené množinou $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, je nutné k vlnové a Helmholtzově rovnici přidat okrajovou podmínku na hranici $\partial\Omega$. Máme tři druhy okrajových podmínek:

- Dirichletovy okrajové podmínky:

$$\psi = 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega, \quad (4.3)$$

které jsou relevantní k vibracím membrány, jejíž hranice je pevně uchycena.

- Neumannovy okrajové podmínky:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega, \quad (4.4)$$

kde n značí vnější normálový jednotkový vektor na hranici $\partial\Omega$. Neumannovy okrajové podmínky odpovídají vibracím membrány v těch částech hranice membrány, které nejsou uchyceny a mohou se pohybovat.

- Robinovy okrajové podmínky:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} + \alpha \psi = 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega, \quad (4.5)$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

V následujících částech budeme uvažovat Dirichletovy okrajové podmínky (4.3) a tedy pevně uchycenou membránu na její hranici.

4.1 Vibrující membrány

Rovinné útvary můžeme interpretovat jako vibrující membrány. Pro speciální pravidelné membrány lze vypočítat jejich základní rezonanční frekvenci. Ukážeme si jednoduchý příklad vibrující membrány obdélníkového tvaru ([13]).

4.1.1 Resonanční frekvence obdélníku

Řešíme vlnovou rovnici (4.1) pro obdélníkovou membránu $\Omega = [0, a] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (4.6)$$

s okrajovými a počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} u(0, y, t) = u(a, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, b, t) &= 0 \\ u(x, y, 0) = f(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) &= g(x, y), \end{aligned}$$

kde $t > 0, 0 < x < a, 0 < y < b$. Rovnici (4.6) řešíme separací proměnných, tedy položíme $u(x, y, t) = A(x)B(y)C(t)$ a dosadíme do vlnové rovnice. Úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} A(x)B(y)C''(t) &= B(y)C(t)A''(x) + A(x)C(t)B''(y) \\ \frac{1}{c^2} \frac{C''(t)}{C(t)} &= \frac{A''(x)}{A(x)} + \frac{B''(y)}{B(y)} = -\lambda. \end{aligned} \quad (4.7)$$

V rovnici (4.7) se rovnají funkce o různých proměnných, proto se obě strany rovnice musí rovnat konstantě $-\lambda$. To vede na dvě rovnice

$$C''(t) + c^2 \lambda C(t) = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{A''(x)}{A(x)} + \frac{B''(y)}{B(y)} = -\lambda. \quad (4.9)$$

První rovnice (4.8) má řešení $C(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$, kde $\omega = c \sqrt{\lambda}$ je úhlová frekvence. Frekvence kmitů vibrující membrány se pak vypočítají podle vzorce

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\lambda}.$$

V rovnici (4.9) opět využijeme separace proměnných.

$$\frac{A''(x)}{A(x)} = -\lambda - \frac{B''(y)}{B(y)} = -\mu. \quad (4.10)$$

Pravá a levá strana rovnice (4.10) jsou funkce závislé na různých proměnných. Mají-li být rovny, musí se rovnat konstantě $-\mu$. Dostaneme dvě rovnice s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} \frac{A''(x)}{A(x)} = -\mu, \quad A(0) = A(a) &= 0 \\ \frac{B''(y)}{B(y)} = -(\lambda - \mu), \quad B(0) = B(b) &= 0. \end{aligned}$$

Jejich řešenímí jsou

$$A_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right), \quad \mu_k = \frac{(k\pi)^2}{a^2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$B_l(y) = \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right), \quad \lambda - \mu_l = \frac{(l\pi)^2}{b^2}, \quad l = 1, 2, 3, \dots,$$

kde $\mu_k, \lambda - \mu_l$ jsou vlastní čísla a $A_k(x), B_l(y)$ k nim příslušné vlastní funkce. Řešení pro λ má tedy tvar

$$\lambda_{kl} = \frac{(k\pi)^2}{a^2} + \frac{(l\pi)^2}{b^2}. \quad (4.11)$$

Nyní dostaneme

$$f_{kl} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{(k\pi)^2}{a^2} + \frac{(l\pi)^2}{b^2}} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{k}{a}\right)^2 + \left(\frac{l}{b}\right)^2}.$$

Stejně jako pro obdélníkovou membránu, lze spočítat rezonanční frekvence dalších speciálních membrán, viz [14]

- pro čtverec o straně a

$$f_{kl} = \frac{c}{2a} \sqrt{k^2 + l^2}, \quad k, l = 1, 2, \dots$$

- pro pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník o ramenech délky $a = 1$

$$f_{kl} = \frac{c}{2} \sqrt{(k+l)^2 + l^2}, \quad k, l = 1, 2, \dots$$

- pro rovnostranný trojúhelník o stranách $a = 1$

$$f_{kl} = \frac{2c}{3} \sqrt{k^2 + l^2 + kl}, \quad k, l = 1, 2, \dots$$

4.2 Faber-Krahnova nerovnost

Isoperimetrická nerovnost ve dvou dimenzích říká, že mezi všemi rovinnými množinami daného obvodu má kruh největší plochu. Přejdeme-li od geometrických veličin ke spektrálním, můžeme se ptát, zda koule nebude extrémální množina při optimalizaci vlastních čísel místo geometrických dat.

V roce 1877 Lord Rayleigh vyslovil domněnku, že mezi všemi rovinnými oblastmi je první vlastní číslo Laplaceho s Dirichletovými okrajovými podmínkami minimální na kruhu. Důkaz provedl až G. Faber v roce 1923 ve dvou dimenzích a o tři roky později byl rozšířen E. Krahnem v jakékoliv dimenzi Euklidovského prostoru. V této kapitole čerpáme z [15].

Definice 1. První vlastní číslo Laplaceho s Dirichletovými okrajovými podmínkami je definováno jako

$$\lambda_1(\Omega) = \min_{v(x) \in H_0^1(\Omega), v \neq 0} \frac{\int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} v(x)^2 dx}, \quad (4.12)$$

kde minima je dosaženo odpovídající vlastní funkcí.

Pro důkaz Faber-Krahnovy nerovnosti budeme potřebovat zdefinovat Schwarzovu symetrizaci a ukázat její vlastnosti.

4.2.1 Schwarzova symetrizace

Definice 2. Pro libovolnou měřitelnou funkci $\omega \subset \mathbb{R}^n$ značíme ω^* kouli o stejném objemu jako ω .

Je-li u nezáporná měřitelná funkce definovaná na měřitelné množině Ω a $u = 0$ na $\partial\Omega$, pak označíme $\Omega(c) = \{x \in \Omega \mid u(x) \geq c\}$ jako úrovnňové množiny.

Schwarzovo přeskupení u je funkce u^* definovaná na Ω^* jako

$$u^*(x) = \sup\{c \mid x \in \Omega(c)^*\}$$

Věta 4.2.1. Necht' u je nezáporná měřitelná funkce definovaná na měřitelné množině Ω a $u = 0$ na $\partial\Omega$. Necht' ψ je libovolná měřitelná funkce definovaná na \mathbb{R}^+ s hodnotami v \mathbb{R} . Potom platí

$$\int_{\Omega} \psi(u(x)) dx = \int_{\Omega^*} \psi(u^*(x)) dx \quad (4.13)$$

Věta 4.2.2 (Pölyova nerovnost). Necht' Ω je otevřená množina a u nezáporná funkce patřící do Sobolevova prostoru $H_0^1(\Omega)$. Potom $u^* \in H_0^1(\Omega^*)$ a

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \geq \int_{\Omega^*} |\nabla u^*(x)|^2 \quad (4.14)$$

4.2.2 Faber-Krahnova nerovnost

Věta 4.2.3. Necht' je dána omezená otevřená množina $D \subset \mathbb{R}^2$ a kruh $B \subset \mathbb{R}^2$ a $|\Omega| = |B|$. Necht' $\lambda_1(\Omega)$ je vlastní číslo úlohy (4.2) s Dirichletovými okrajovými podmínkami na množině Ω a $\lambda_1(B)$ vlastní číslo stejné úlohy na množině B . Potom platí

$$\lambda_1(B) \leq \lambda_1(\Omega)$$

a rovnost nastává, pokud $\Omega = B$.

Důkaz. Necht' Ω je otevřená omezená množina a $\Omega^* = B$ je kruh takový, že $|\Omega| = |B|$. Necht' u_1 značí vlastní funkci příslušnou vlastnímu číslu $\lambda_1(\Omega)$ a u_1^* je její Schwarzovo přerovnění. Potom podle (4.13) a (4.14) dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^*} u_1^*(x) dx &= \int_{\Omega} u_1(x) dx \\ \int_{\Omega^*} |\nabla u_1^*(x)|^2 &\leq \int_{\Omega} |\nabla u_1(x)|^2. \end{aligned}$$

Nyní podle (4.12) máme

$$\lambda_1(\Omega^*) \leq \frac{\int_{\Omega^*} |\nabla u_1^*(x)|^2 dx}{\int_{\Omega^*} u_1^*(x)^2 dx}, \quad \lambda_1(\Omega) = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u_1(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} u_1(x)^2 dx}.$$

Dohromady dostáváme $\lambda_1(\Omega^*) \leq \lambda_1(\Omega)$, a tedy kruh minimalizuje první vlastní číslo.

□

4.3 Diskrétní Faber-Krahnova nerovnost

G. Pölya uvažoval stejný problém minimalizace λ_1 Laplaceova operátoru s Dirichletovými okrajovými podmínkami ve třídě mnohoúhelníků. Obdržel očekávaný výsledek pro trojúhelníky a čtyřúhelníky. Jeho důkaz však nefunguje pro mnohoúhelníky o větším počtu stran.

Důkaz diskrétní Faber-Krahnovy nerovnosti využívá Steinerovy symetrizace.

4.3.1 Steinerova symetrizace

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ je měřitelná množina. Ω' značí projekci Ω do \mathbb{R}^{N-1} : $\Omega' = \{x' \in \mathbb{R}^{N-1} \text{ takové, že existuje } x_N \text{ takové, že } (x', x_N) \in \Omega\}$ a pro $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$ značíme $\Omega(x')$ jako průsečík Ω s $\{x'\} \times \mathbb{R}$: $\Omega(x') = \{x_N \in \mathbb{R} \text{ takové, že } (x', x_N) \in \Omega\}$, $x' \in \Omega'$.

Definice 3. Necht' $\Omega \in \mathbb{R}^N$ je měřitelná množina. Potom množina

$$\Omega^* := \left\{ x = (x', x_N) - \frac{1}{2}|\Omega(x')| < x_N < \frac{1}{2}|\Omega(x')| \right\}$$

je Steinerova symetrizace Ω vzhledem k nadrovině $x_N = 0$.

Definice 4. Necht' u je nezáporná měřitelná funkce na množině Ω , $u = 0$ na $\partial\Omega$, pak značíme $\Omega(c) = \{x \in \Omega | u(x) \geq c\}$ jako úroňové množiny. Potom Steinerova symetrizace u je funkce u^* definovaná na Ω^* jako

$$u^*(x) = \sup\{c | x \in \Omega(c)^*\}.$$

Věta 4.3.1. Necht' u je nezáporná měřitelná funkce definovaná na měřitelné množině $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $u = 0$ na $\partial\Omega$ a necht' u^* je její Steinerova symetrizace na Ω^* , pak $|\Omega| = |\Omega^*|$. Necht' ψ je libovolná měřitelná funkce definovaná na \mathbb{R}^+ s hodnotami v \mathbb{R} . Potom platí

$$\int_{\Omega} \psi(u(x)) dx = \int_{\Omega^*} \psi(u^*(x)) dx. \quad (4.15)$$

Necht' Ω je otevřená množina a funkce u patří do Sobolevova prostoru $W_0^{1,p}(\Omega)$, kde $1 \leq p < +\infty$. Potom $u^* \in W_0^{1,p}(\Omega^*)$ a

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p \geq \int_{\Omega^*} |\nabla u^*(x)|^p \quad (4.16)$$

4.3.2 Diskrétní Faber-Krahnova nerovnost

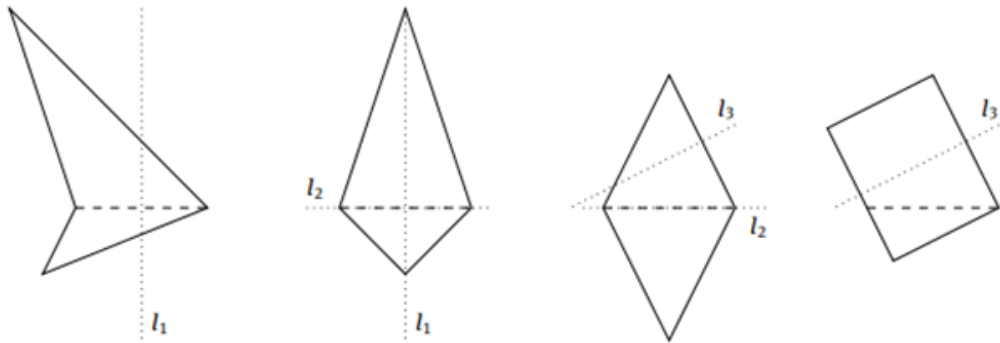
Věta 4.3.2. Mezi všemi trojúhelníky, je λ_1 minimální pro rovnostranný trojúhelník a mezi čtyřúhelníky je λ_1 minimální pro čtverec.

Důkaz. Důkaz je proveden stejným způsobem jako důkaz Faber-Krahnovy nerovnosti s tím rozdílem, že je použita Steinerova symetrizace. Vzhledem k tomu, že Steinerova symetrizace má vlastnosti (4.15) a (4.16), které jsou shodné s vlastnostmi Schwarzovy symetrizace, je jasné, že Steinerova symetrizace snižuje první vlastní číslo. Pro důkaz diskrétní Faber-Krahnovy nerovnosti pro trojúhelníky lze nahlédnout do [15].

Ukážeme si důkaz pro čtyřúhelníky, viz [16]. Využijeme Steinerovu symetrizaci, která je znázorněna na obr. 4.1.

Trojúhelník, který je symetrizován pomocí Steinerovy symetrizace vzhledem k přímkě kolmé na jednu jeho stranu, zůstane opět trojúhelník. Proto čtyřúhelník symetrizovaný vzhledem k jakékoliv přímkě kolmé na diagonálu zůstane opět čtyřúhelník.

Necht' l_1 je libovolná kolmá přímka na diagonálu čtyřúhelníku. Po provedení Steinerovy symetrizace vzhledem k l_1 dostaneme konvexní čtyřúhelník s jednou osou souměrnosti. V dalším kroku Steinerovy symetrizace nyní vzhledem k úhlopříčce l_2 dostaneme kosočtverec. Konečná symetrizace vzhledem k jakékoliv přímkě kolmé na jednu stranu kosočtverce vede na obdélník. Vlastní číslo se při každé symetrizaci zmenšuje.



Obrázek 4.1: Znáornění Steinerovy symetrizace pro čtyřúhelníky

Ještě ukážeme, že čtverec, jako pravidelný obdélník, má nejnižší první Dirichletovo vlastní číslo. Z rovnice (4.11) při řešení vlnové rovnice pro obdélník o stranách délky a a b víme, že

$$\lambda_1 = \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = \pi^2 \left(\frac{1}{2ab} + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^2 \right).$$

Za předpokladu pevně daného obsahu, tj. ab se rovná konstantě, je λ_1 minimální, pokud $a = b$, a tedy jedná-li se o čtverec.

□

4.4 Robinovy okrajové podmínky

V předchozí části jsme uvažovali Dirichletovy okrajové podmínky. Nyní se podíváme na úlohu minimalizace prvního vlastního čísla Laplaceova operátoru s ostatními okrajovými podmínkami. Čerpáme z [17].

Uvažujme úlohu (4.2) s Robinovými okrajovými podmínkami, tj.

$$\begin{aligned} -\Delta\psi &= \lambda\psi & \text{na} & \Omega \\ \frac{\partial\psi}{\partial n} + \alpha\psi &= 0 & \text{na} & \partial\Omega, \end{aligned}$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a n je vnější jednotkový normálový vektor na hranici $\partial\Omega$. Pokud $\alpha \rightarrow +\infty$, tak Robinovy okrajové podmínky přechází v Dirichletovy. Tuto úlohu na minimální první vlastní číslo jsme už vyřešili v kapitole 4.2.2. Je-li $\alpha = 0$, pak Robinovy okrajové podmínky přechází v Neumannovy a tato úloha na hledání minimálního prvního vlastního čísla je triviální, neboť $\lambda_1(\Omega) = 0$ pro všechny množiny Ω .

Definice 5. První vlastní číslo Laplaceova operátoru s Robinovými okrajovými podmínkami je definováno jako

$$\lambda_1^\alpha(\Omega) = \min_{\psi \in W^{0,1}(\Omega), \psi \neq 0} \frac{\int_\Omega |\nabla\psi(x)|^2 dx + \alpha \int_{\partial\Omega} \psi(x)^2 dx}{\int_\Omega \psi(x)^2 dx} \quad (4.17)$$

Následující věta rozšiřuje Faber-Krahnovu nerovnost pro Robinovy okrajové podmínky, kde $\alpha > 0$. Důkaz nejprve provedl M.-H. Bossel ve dvou dimenzích a později D. Daners pro libovolnou dimenzi [18].

Věta 4.4.1 (Bossel-Danners). *Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je omezená otevřená množina s daným objemem a necht' B značí kouli o stejném objemu. Pak pro $\alpha > 0$ koule minimalizuje vlastní číslo Laplaceova operátoru s Robinovými okrajovými podmínkami, tj.*

$$\min_{|\Omega|=konst.} \lambda_1^\alpha(\Omega) = \lambda_1^\alpha(B).$$

Situace se výrazně změní pro $\alpha < 0$. Dalo by se očekávat, že koule bude opět optimalizující množina pro první vlastní číslo. Jelikož pro $\alpha < 0$ dostáváme z (4.17) pro konstantní testovací funkci $\lambda_1^\alpha(\Omega) < 0$, tak dává smysl, aby tentokrát koule první vlastní číslo maximalizovala. Tuto domněnku uvedl Bareket v roce 1977.

Věta 4.4.2 (Bareketova domněnka). *Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je omezená otevřená množina s daným objemem a necht' B značí kouli o stejném objemu. Pak pro každé $\alpha < 0$ platí*

$$\max_{|\Omega|=konst.} \lambda_1^\alpha(\Omega) = \lambda_1^\alpha(B).$$

Tuto domněnku, že koule maximalizuje první vlastní číslo Laplaceova operátoru s Robinovými okrajovými podmínkami pro negativní parametr α se však podařilo vyvrátit, když P. Freitas a D. Krejčířík ukázali na příkladu sférické skořápky (oblasti mezi soustřednými koulemi o různých poloměrech), že první vlastní číslo koule je nižší než první vlastní číslo právě této sférické skořápky o stejném objemu, viz [19].

Věta 4.4.3 (Freitas-Krejčířík). *Je-li dána koule B_r o poloměru r , pak existují kladná čísla r_1, r_2 ($r_1 < r_2$) taková, že pro sférickou skořápku definovanou jako*

$$S_{r_1, r_2} = \{x \in \mathbb{R}^d : r_1 < |x| < r_2\}$$

o stejném objemu jako B_r platí, že $\lambda_1^\alpha(B_r) \leq \lambda_1^\alpha(S_{r_1, r_2})$ pro všechny dostatečně velké záporné α .

Dále Freitas a Krejčířík ukázali, že ve dvou dimenzích existuje mezní hodnota α^* taková, že pro záporné hodnoty α větší než α^* kruh zůstane maximalizátorem prvního vlastního čísla ([19]).

Věta 4.4.4 (Freitas-Krejčířík). *Necht' je dána omezená množina $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ třídy C^2 a kruh B tak, že $|\Omega| = |B|$. Pak existuje konstanta α^* závislá na $|\Omega|$ taková, že $\lambda_1^\alpha(\Omega) \leq \lambda_1^\alpha(B)$ pro $\alpha \in [\alpha^*, 0]$.*

4.5 Cheegrovy shluky

S optimalitou včelích pláství ve spektrální teorii souvisí Cheegrovy shluky. Necht' Ω je otevřená omezená podmnožina \mathbb{R}^2 s Lipschitzovou hranicí a necht' $A_k(\Omega)$ je třída k shluků v Ω myšleno jako rodiny k Borelových množin s konečným obvodem, které jsou obsažené v Ω .

Definice 6. Cheegrova konstanta množiny Ω je definovaná jako

$$h(\Omega) := \inf \left\{ \frac{|\partial E|}{|E|} : E \text{ měřitelná, } E \subseteq \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Uvažujme problém optimálního rozdělení

$$M_k(\Omega) = \inf \left\{ \max_{j=1, \dots, k} h(\Omega_j) : \Omega_j \in A_k(\Omega) \right\}.$$

V článku [20] bylo ukázáno, že v limitě $k \rightarrow +\infty$ je tento problém optimálního rozdělení s kritériem minimalizace největšího z Cheegrových konstant k vzájemně disjunktních buněk řešen šestiúhelníky.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|\Omega|^{1/2}}{k^{1/2}} M_k(\Omega) = h(H),$$

kde H značí pravidelný hexagon s jednotkovým obsahem.

Navíc, je-li Cheegrova konstanta nahrazena prvním vlastním číslem Laplaciánu s Dirichletovými okrajovými podmínkami, dostaneme stejný výsledek.

Závěr

Motivací této práce byla problematika včelích pláství, která vedla na dvě dílčí optimalizační úlohy – maximalizace obsahu buněk a minimalizace použitého stavebního materiálu.

Bylo ukázáno, že ze všech uzavřených křivek o daném obvodu l má kruh největší obsah. Tato vlastnost kruhu je shrnuta v problému zvaném isoperimetrická nerovnost. Jelikož vyplňování roviny kruhy je z hlediska děr mezi nimi neefektivní, bylo potřeba najít jiné vhodné rovinné útvary, které vyplní celý prostor bez vznikajících mezer. To vedlo na tzv. diskretní isoperimetrickou nerovnost, která říká, že ze všech n -úhelníků má největší obsah pravidelný n -úhelník.

Dále bylo dokázáno, že rovinu lze pokrýt stejnými pravidelnými n -úhelníky pouze třemi způsoby: za použití čtverce, rovnostranného trojúhelníku nebo pravidelného šestiúhelníku. Po srovnání těchto obrazců bylo zjištěno, že největší obsah má právě pravidelný šestiúhelník. Tento problém byl shrnut v domněnce včelích pláství.

Při přechodu ke spektrální teorii bylo ukázáno, jak souvisí spektrální problémy s geometrickými. Bylo zjištěno, že kruh je opět optimalizující množina při minimalizaci prvního vlastního čísla Laplaceova operátoru s Dirichletovými okrajovými podmínkami. Ve třídě n -úhelníků pro $n = 3$ a $n = 4$ opět platí dle očekávání, že první vlastní číslo minimalizuje pravidelný n -úhelník, tedy rovnostranný trojúhelník a čtverec. Pro $n \geq 5$ už toto tvrzení neplatí.

Při minimalizaci prvního vlastního čísla Laplaceova operátoru s Robinovými okrajovými podmínkami pro $\alpha > 0$ platí totéž, co pro Dirichletovy podmínky. Pro $\alpha < 0$ by se dalo čekat, že naopak koule bude maximalizovat první vlastní číslo, ale bylo zjištěno, že tomu tak není. Pouze ve dvou rozměrech existuje mezní hodnota taková, že pro záporné α větší než tato mez koule maximalizuje první vlastní číslo.

Na závěr byly zmíněny Cheegrovy shluky, které souvisí s optimalitou včelích pláství tak, že optimální rozdělení k vzájemně disjunktních množin je řešeno pravidelnými šestiúhelníky.

Literatura

- [1] *Včelí plástev*. In: Vysoká škola chemicko-technologická v Praze [online]. [cit. 2022-06-24]. Dostupné z: <https://www.vscht.cz/popularizace/doktorandi-pisou/2019/vceli-plastev-muze-byt-inspiraci-v-tkanovem-inzenyrstvi>
- [2] POPPICK, Laura. *Honeycombs' Surprising Secret Revealed*. Live Science [online]. New York: Future US, July 17, 2013 [cit. 2022-07-07]. Dostupné z: <https://www.livescience.com/38242-why-honeybee-honeycombs-are-perfect.html?cmpid=514629>
- [3] Tvar vložek. In: Meteopress [online]. 2018 [cit. 2022-07-07]. Dostupné z: <https://www.meteopress.cz/vysvetleni/jak-vznikaji-snehove-vlocky>
- [4] Struktura grafenu. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-07-07]. Dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Grafen>
- [5] *Bretschneider's formula*. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation [cit. 2022-06-24]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Bretschneider%27s_formula
- [6] Brahmagupta's formula. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation [cit. 2022-06-24]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta%27s_formula
- [7] KESAVAN, S. From the Triangle Inequality to the Isoperimetric Inequality. Resonance [online]. 2014, 19, 135-148 [cit. 2022-07-07]. Dostupné z: <https://doi.org/10.1007/s12045-014-0017-y>
- [8] BLÅSJÖ, Viktor. *The Isoperimetric Problem*. The American Mathematical Monthly [online]. 2005, 112(6), 526-566 [cit. 2022-07-07]. Dostupné z: <https://doi.org/10.1080/00029890.2005.11920227>
- [9] HEHL, Andreas. *The Isoperimetric Inequality* [online]. Tuebingen, 2013 [cit. 2022-07-06]. Dostupné z: <https://www.math.uni-tuebingen.de>
- [10] SPIVAK, Michael.A *Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 4* [online]. 3rd edition. Houston: Publish or Perish, 1999 [cit. 2022-07-07]. ISBN 9780914098737. Dostupné z: https://kupdf.net/download/michael-spivak-a-comprehensive-introduction-to-differential-geometry-vol-4_58d81785dc0d60e225c34698_pdf
- [11] PROVINSKÝ, Pavel. *Dlaždičky*. Rozhledy matematicko-fyzikální [online]. 2018, 93(3), 1-8 [cit. 2022-07-07]. Dostupné z: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/147459>
- [12] HALES, Thomas C. *The Honeycomb Conjecture*. Discr. Comput. Geom [online]. 2001, 25, 1-22 [cit. 2022-07-07]. Dostupné z: <https://arxiv.org/abs/math/9906042>

- [13] HERMAN, Russell. *Vibrations of Rectangular Membranes*. In: Introduction to Partial Differential Equations [online]. 2022 [cit. 2022-07-06]. Dostupné z: https://math.libretexts.org/Bookshelves/Differential_Equations
- [14] DICKY, Joseph. *Wave approach for the resonances of rectangular and triangular membranes* [online]. 2011 [cit. 2022-07-06]. Dostupné z: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1106.1829>
- [15] HENROT, Antoine. *Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators* [online]. Birkhäuser Basel, 2006 [cit. 2022-07-06]. Dostupné z: <https://doi.org/10.1007/3-7643-7706-2>
- [16] HENROT, Antoine. *Shape optimization and spectral theory* [online]. Varšava: De Gruyter Open Poland, 2017 [cit. 2022-07-06]. Dostupné z: <https://doi.org/10.1515/9783110550887>
- [17] KREJČIŘÍK, David. Geometrical aspects of spectral theory [online]. 2022 [cit. 2022-07-07]. Dostupné z: <http://nsa.fjfi.cvut.cz/david>
- [18] DANERS, Daniel. *A Faber-Krahn inequality for Robin problems in any space dimension*. *Mathematische Annalen* [online]. 2006, 335, 767–785 [cit. 2022-07-07]. Dostupné z: <https://doi.org/10.1007/s00208-006-0753-8>
- [19] FREITAS, Pedro a David KREJČIŘÍK. *The first Robin eigenvalue with negative boundary parameter*. *Advances in Mathematics* [online]. 2015, (280), 322-339 [cit. 2022-07-06]. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.aim.2015.04.023>
- [20] BUKUR, Dorin a Ilaria FRAGALA. Proof of the Honeycomb Asymptotics for Optimal Cheeger Clusters [online]. 30 Jun 2017 [cit. 2022-07-07]. Dostupné z: <https://arxiv.org/abs/1707.00605>

Seznam obrázků

1.1	Včelí plástev	8
1.2	Přeměna buňky plástve z válcovité do šestiboké struktury	9
1.3	Tvar vloček	9
1.4	Struktura grafenu	9
1.5	Struktura ananasu	9
1.6	Struktura hadí kůže	9
1.7	Struktura složeného oka hmyzu	9
2.1	Obrázek k důkazu věty 2.2.1	11
2.2	Obrázek k důkazu obsahu n -úhelníku	13
2.3	Pravidelný n -úhelník	16
2.4	Podmínka konvexnosti	17
2.5	Obrázek k důkazu isoperimetrické nerovnosti	18
3.1	Dlážďení v rovině pravidelnými n -úhelníky	20
3.2	Dlážďení více druhů pravidelných čtyřúhelníků	20
4.1	Znázornění Steinerovy symetrizace pro čtyřúhelníky	28