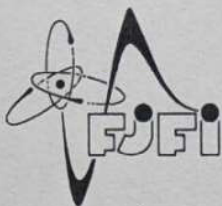


České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
Katedra fyzikální elektroniky

Numerické modelování průběhu svazku v otevřeném rezonátoru

Bakalářská práce

Autor práce: **František Novák**
Vedoucí práce: **Ing. Milan Frank, Ph.D.**
Konzultanti: **Ing. David Vyhlídal, Ph.D.**
Školní rok: **2021/2022**



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA JADERNÁ A FYZIKÁLNĚ INŽENÝRSKÁ
Katedra fyzikální elektroniky

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

<i>Student:</i>	František Novák
<i>Studijní program:</i>	Aplikace přírodních věd
<i>Obor:</i>	Fyzikální elektronika
<i>Akademický rok:</i>	2021/2022
<i>Název práce:</i> <i>(česky)</i>	Numerické modelování průběhu svazku v otevřeném rezonátoru
<i>Název práce:</i> <i>(anglicky)</i>	Numerical modelling of a beam in an optical resonator

Cíl práce:

Navrhněte a naprogramujte funkční software pro numerické modelování průběhu svazku v otevřeném rezonátoru včetně grafického uživatelského rozhraní. Využijte ABCD maticového formalismu pro výpočet základních parametrů Gaussovského svazku uvnitř stabilního rezonátoru. Výsledky numerického modelu detailně srovnajte s komerčně dostupnými programy.

Pokyny pro vypracování

- 1) Seznamte se ABCD maticovým počtem a jeho základními vlastnostmi v geometrické optice a Gaussovské optice.
- 2) Seznamte se s Gaussovským svazkem, jeho vlastnostmi a šířením v optickém prostředí popsaném ABCD maticí.
- 3) Naprogramujte jádro programu pro šíření svazku uvnitř optického rezonátoru.
- 4) Výpočetní jádro programu vsad'te do uživatelsky přívětivého grafického rozhraní.
- 5) Dosažené výsledky srovnajte s komerčně dostupnými programy.
- 6) Výsledky zpracujte do bakalářské práce o rozsahu cca 30-40 stran.

Doporučená literatura:

1. Hodgson N., Weber H., Laser resonators and beam propagation, 2. vydání, New York: Springer, 2005.
2. Bélanger P. A., Beam propagation and the ABCD ray matrices, Optics Letters 16, 4, 196 – 198, 2001.
3. Koechner W., Solid state laser engineering, 6. vydání. New York: Springer, 2006.
4. Hanson S. G., Jakobsen M. L., Yura H. T., Linear Canonical Transforms: Complex-Valued ABCD Matrices and Speckle Metrology, New York: Springer, 397-428 2016.
5. Alda J., Encyclopedia of Optical Engineering: Laser and Gaussian beam propagation and transformation, New York: Marcel Dekker, 999-1013 2003.

Jméno a pracoviště vedoucího práce:

Ing. Milan Frank, Ph.D.

Katedra fyzikální elektroniky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze

Jméno a pracoviště konzultanta:

Ing. David Vyhlídal, Ph.D.

Katedra fyzikální elektroniky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze

Datum zadání: 17. října 2021

Datum odevzdání: 7. červenec 2022

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

Přiděti práce

Garant oboru

[Signature]

Vedoucí katedry



[Signature]
Děkan

V Praze dne 17.10.2021

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškerou použitou literaturu.

V Praze dne 29. 6. 2022

.....

František Novák

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval všem, kteří mi s mojí prací pomohli či mě při vypracování této práce podporovali. Chtěl bych vyjádřit vděčnost mojí rodině, zejména mé mámě a mému bratru, poté mému vedoucímu práce Ing. Milanu Frankovi, Ph.D., zvláště za jeho trpělivost a ochotu pomoci v jakoukoliv dobu, a nakonec mému konzultantovi Ing. Davidu Vyhlídalovi, Ph.D. za jeho pomoc při řešení problémů během tvorby programu v grafickém programovacím prostředí LabVIEW.

Název práce: **Numerické modelování průběhu svazku v otevřeném rezonátoru**

Autor: František Novák

Studijní program: Aplikace přírodních věd

Obor: Fyzikální elektronika

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. Milan Frank, Ph.D.
KFE FJFI ČVUT v Praze

Abstrakt: V bakalářské práci je popsán autorem vytvořený program v grafickém programovacím prostředí LabVIEW pro modelování průběhu svazku v otevřeném rezonátoru a srovnán s komerčně dostupným programem reZonator. V teoretické části této práce jsou představeny pojmy ABCD formalismus a gaussovský svazek, na jejichž principu je program postaven. Také je v teoretické části vysvětlen efekt termální čočky a prahová podmínka pro stabilní mode-locking - v programu jsou tyto jevy zpracovány jako přídatné funkce.

Klíčová slova: ABCD formalismus, gaussovský svazek, příčný mód, otevřený rezonátor, prahový vnitrorezonátorový výkon pro pasivní mode-locking, termální čočka, módy vyšších řádů.

Title: **Numerical modelling of a beam in an optical resonator**

Author: František Novák

Branch of study: Application of Natural sciences

Specialisation: Physical electronics

Type of thesis: Bachelor thesis

Supervisor: Ing. Milan Frank, Ph.D.

DPE FNSPE CTU in Prague

Abstract: The bachelor's thesis describes the program created by the author in the graphical programming environment LabVIEW for modeling the beam propagation in an optical resonator and compared with the commercially available program reZonator. The theoretical part of this work introduces the concepts of ABCD formalism and Gaussian beam, on the principle of which the program is based. The theoretical part also explains the effect of the thermal lens and the threshold condition for stable mode-locking - in the program, these phenomena are processed as additional functions.

Key words: ABCD formalism, Gaussian beam, transverse mode, open resonator, critical intracavity pulse power, thermal lensing, high order modes.

Obsah

1	Teoretická část	3
1.1	ABCD formalismus	3
1.1.1	Vektor paprsku	3
1.1.2	Přenosová matice	4
1.1.3	Odvození přenosových matic základních optických elementů	5
1.1.4	Odvození přenosových matic složitějších optických elementů	8
1.1.5	Přenosová matice brewsterovského krystalu	10
1.1.6	Dělení krystalu	11
1.1.7	Oběhová matice otevřeného rezonátoru	12
1.1.8	ABCD zákon	13
1.1.9	Výhody a nevýhody ABCD formalismu	14
1.2	Gaussovský svazek	15
1.2.1	Původ gaussovského svazku	15
1.2.2	Šíření gaussovského svazku volným prostorem	17
1.2.3	Šíření gaussovského svazku optickým systémem	19
1.2.4	Gaussovský svazek jako fundamentální příčný mód optického rezonátoru	20
1.3	Módy vyšších řádů	21
1.3.1	Gauss-Laguerrovy módy	21
1.3.2	Gauss-Hermitovy módy	22
1.4	Termální čočka	24
1.5	Prahová podmínka pro stabilní pasivní mode-locking	25
2	Použité nástroje	27
2.1	LabVIEW	27
3	Praktická část	28
3.1	Základní okno programu	28
3.2	Základní funkce programu	28
3.3	Pokročilé funkce programu	32
3.4	Nástroje grafu	37
3.5	Příklad	40
4	Diskuze	47
5	Závěr	49

Úvod

Důležitou součástí laseru je otevřený rezonátor. Vznikne vhodným umístěním zrcadel tak, aby světlo bylo přivedeno do aktivního prostředí víckrát, čímž dojde k většímu zesílení záření, než kdyby záření prošlo aktivním prostředím jen jednou. Tak nám vzniká zařízení, které dokáže po určitou dobu udržet optické záření uvnitř omezeného prostoru, což je definice optického rezonátoru. V případě konečných rozměrů zrcadel tvořících optický rezonátor hovoříme o otevřeném rezonátoru.

Známe spočetné množství řešení ustálené vlnové rovnice v rezonátoru pro danou frekvenci záření - příčné módy. Základní příčný mód šířící se uvnitř stabilního otevřeného rezonátoru je ten, jehož rozdělení intenzity se řídí dle Gaussova rozdělení. Jeho poloměr se mění v závislosti na parametrech hraničních zrcadel či jiných vložených optických elementů a na poloze v rezonátoru. Změnou poloměru se mění intenzita gaussovského svazku. Znat intenzitu světelného svazku je nesmírně důležité - každý optický element vložený do otevřeného rezonátoru lze při vysokých hodnotách intenzity světelného svazku zničit, dálepak intenzita svazku je nepostradatelná pro činnost nelineárních krystalů, saturovatelného absorbéru, apod. kdy se v závislosti na dopadající intenzitě světla mění koeficient transmise či dochází k nelineárním parametrickým jevům, jejichž vznik je úzce spjatý s vysokou intenzitou dopadajícího záření.

Cílem této bakalářské práce je vybudovat na teoretickém základu program, který bude modelovat průběh svazku v otevřeném rezonátoru včetně graficky přívětivého uživatelského rozhraní. Program by měl obsahovat navíc i funkce, kterými ostatní volně dostupné programy pro modelování svazku v otevřeném rezonátoru nedisponují.

Formulace cílů

Pro splnění cíle formulovaného v úvodu bude třeba splnění následujících dílčích kroků:

1. Seznámit se s ABCD maticovým počtem a jeho základními vlastnostmi v geometrické optice.
2. Seznámit se s Gaussovským svazkem, jeho vlastnostmi a šířením v optickém prostředí popsaném ABCD maticí.
3. Naprogramovat jádro programu pro šíření svazku uvnitř stabilního optického rezonátoru a následně ho vsadit do uživatelsky přívětivého grafického rozhraní.
4. Srovnat nový program s komerčně volně dostupnými programy.

1 Teoretická část

1.1 ABCD formalismus

1.1.1 Vektor paprsku

ABCD maticový počet je formalismus, který nám umožňuje velmi elegantně a jednoduše popsat šíření světla skrze různé optické elementy v přiblížení geometrické optiky [1].

Protože v geometrické optice neřešíme interferenční a difrakční jevy, popisujeme v ní šíření světla pomocí paprsků. Paprsky definujeme jako křivky $\vec{r}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, jejichž tečný vektor má stejný směr jako vektor lokálního vlnového čísla [1] (jsou to integrální křivky vektorového pole lokálních vlnových čísel), což znamená, že jsou vždy kolmé na vlnoplochu.

Zabýváme se nyní šířením paprsků v homogenním prostředí. V homogenním prostředí se paprsky šíří podél přímky [2] - pro popis paprsků, čili přímek v prostoru nás zajímají 2 úhly, které jsou svírány průměty paprsků do dvou navzájem kolmých rovin se samotným paprskem. Roviny jsou definovány jednou osou souřadného systému a optickou osou. Optická osa je přímka definovaná středem symetrie prvního elementu a je kolmá vůči jeho čelnímu povrchu a jeden bod, kterým přímka/paprsek prochází. Většinou zavedeme souřadný systém právě podle optické osy, kterou ztotožníme s osou z.

Prochází-li paprsek optickým elementem, což může být jak čočka, tak rozhraní dvou homogenních prostředí o různých indexech lomu, dochází ke změně úhlu, pod kterým se paprsek šíří, a radiusvektoru. ABCD formalismem lze tyto změny vypočítat, navíc ABCD formalismus zohledňuje fakt, že při reálném pozorování nás ani tolik nezajímá šířka optických elementů, tj. dráha kterou paprsek urazí, tu si snadno změříme sami, ale pouze výsledný směr paprsku po průchodu elementem a poloha v rovině kolmé k optické ose, proto na začátku a po průchodu optickým elementem popíšeme paprsek vektorem ¹ (obrázek 1):

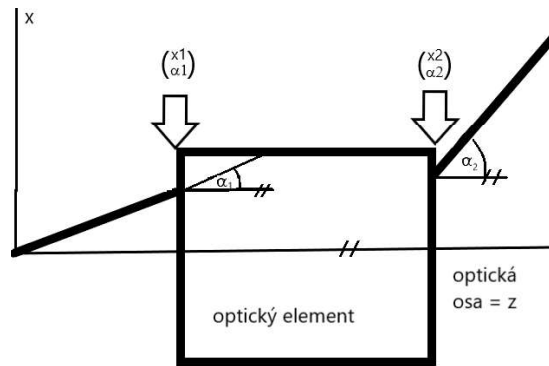
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (1)$$

Nyní přidáme předpoklad, že se ani souřadnice, ani úhly mezi rovinami navzájem neovlivňují, a to zejména při průchodu optickým elementem. Můžeme rozdělit čtyřsložkový vektor výše na dva dvousložkové vektory:

$$\vec{v}_{xz} = \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \vec{v}_{yz} = \begin{pmatrix} y \\ \beta \end{pmatrix} \quad (2)$$

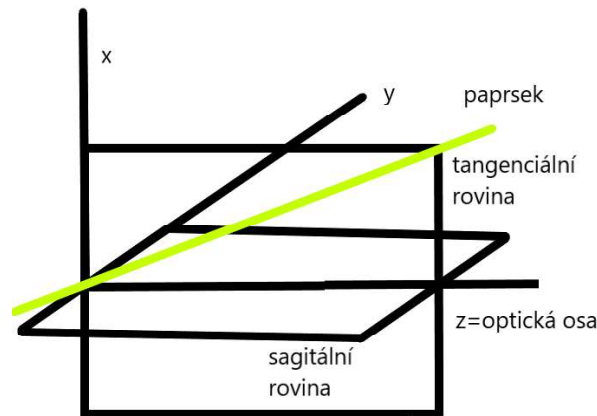
Do budoucna budeme potřebovat znát pojmy tangenciální a sagitální roviny. Tangenciální rovina je rovina definovaná paprskem a optickou osou, sagitální rovina je

¹Samozřejmě můžeme popsat i v případě nezanedbatelně tlustého elementu paprsek uvnitř - stačí optický element rozdělit na dva elementy.



Obrázek 1: Idea popsaní paprsku pro jednodimenzionální případ.

na ni kolmá [3] - viz obrázek 2. Obecně neplatí, že tangenciální rovina, respektive sagitální je totožná s rovinou xz, respektive yz, avšak po zbytek textu budeme tento fakt předpokládat.



Obrázek 2: Zavedení tangenciální a sagitální roviny.

1.1.2 Přenosová matice

Začneme jednoduchým příkladem optického elementu, a to volného prostoru o délce L . Protože je volný prostor rotačně symetrický, budeme se zabývat jen tím, co se s paprskem děje v tangenciální rovině. Tento případ se redukuje na geometrickou úlohu. Pro naše zjednodušení budeme počítat, že úhel α je velmi malý (literatura uvádí menší než 2° [4], avšak v praxi nelpí-li se příliš na přesnosti stačí i menší než 10° až 15°) - hovoříme o takzvaném paraxiálním přiblížení, a tedy lze použít aproximaci $\alpha = \sin \alpha = \tan \alpha$. Vektor paprsku po průchodu volným prostorem vypočítáme dle rovnic:

$$x_2 = x_1 + L \tan \alpha_1 \approx x_1 + L\alpha_1 \quad (3)$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 \quad (4)$$

Vztahy (3) a (4) lze zapsat maticově:

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \mathbb{M}_{VP} \vec{v}_1 \quad (5)$$

Matici \mathbb{M}_{VP} nazveme přenosovou maticí volného prostoru. Pro každý lineární optický element lze sestavit matici $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ tak, aby výstupní vektor paprsku, který dostaneme působením matice na vstupní vektor paprsku - viz vztahy (6), (7) a (8), odpovídal reálnému fyzikálnímu jevu. [2] Sestavenou matici pojmenujeme přenosovou maticí daného optického elementu.

$$x_2 = Ax_1 + B\alpha_1 \quad (6)$$

$$\alpha_2 = Cx_1 + D\alpha_1 \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

1.1.3 Odvození přenosových matic základních optických elementů

Přenosová matice normálního rozhraní

Podobně jako v případě volného prostoru lze odvodit přenosovou matici rozhraní prostředí \mathbb{M}_R o indexech lomu n_1 a n_2 . Ze znalosti Snellova zákona lomu [1] sestavíme rovnice pro změnu vektoru paprsku, kde opět využijeme paraxiální aproximaci:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \\ \alpha_2 &= \frac{n_1}{n_2} \alpha_1 \end{aligned}$$

Což opět lze maticově přepsat:

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \mathbb{M}_R \vec{v}_1 \quad (9)$$

Přenosová matice sféricky zakřiveného rozhraní

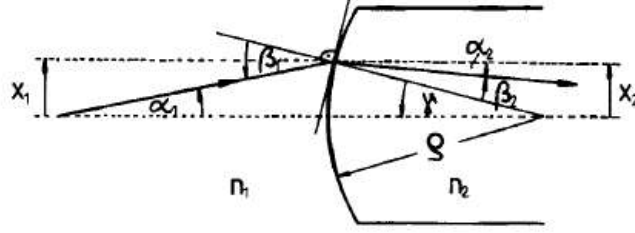
O trochu náročnější je odvození přenosové matice sféricky zakřiveného rozhraní s poloměrem křivosti ρ a indexy lomu n_1 a n_2 . Opět platí rotační symetrie, tedy se znovu budeme zabývat pouze tangenciální rovinou. Pomocí podobnosti trojúhelníků a schématu na obrázku 3 odvodíme následující rovnice:

$$x_2 = x_1 \quad (10)$$

$$\alpha_2 = \frac{n_1 - n_2}{n_2 \rho} x_1 + \frac{n_1}{n_2} \alpha_1 \quad (11)$$

Po převedení rovnic do maticového zápisu nám vyjde přenosová matice sféricky zakřiveného rozhraní:

$$\mathbb{M}_{SZR} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 \rho} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \quad (12)$$



Obrázek 3: Sféricky zakřivené rozhraní.[2]

Skládání optických elementů; přenosová matice indexového prostředí s kolmými hranami a tenké čočky

Máme-li n optických elementů, skrze které paprsek prochází v pořadí od 1. do n -tého, lze z nich pomocí ABCD formalismu vytvořit jeden element. Protože platí rekurentní vztah

$$\vec{v}_a = \mathbb{M}_{a-1} \vec{v}_{a-1}, \quad (13)$$

lze dokázat indukcí platnost následující vztahu:

$$\vec{v}_{n+1} = \mathbb{M}_n \mathbb{M}_{n-1} \dots \mathbb{M}_1 \vec{v}_1 = \mathbb{M} \vec{v}_1, \quad (14)$$

což znamená, že jsme našli přenosovou matici soustavy n optických elementů, která vznikla prostým vynásobením matic mezi sebou při náležitě zachovaném pořadí. Tohoto jevu můžeme ihned využít při odvození matice přenosu indexového prostředí délky L o indexu lomu n_2^2 , které je umístěno v prostředí o indexu lomu n_1 . Tento pro nás z hlediska ABCD formalismu neznámý optický element se může rozložit na tři již známé elementy - rozhraní, volný prostor, rozhraní. Paprsek totiž při vstupu do indexového prostředí projde rozhraním okolní prostředí - indexové prostředí, poté se bude šířit indexovým prostředím, což je ekvivalentní se šířením ve volném prostoru a při opuštění indexového prostředí projde rozhraním indexové prostředí - okolní prostředí. Maticově zapsáno:

$$\mathbb{M}_K = \mathbb{M}_{R2} \mathbb{M}_{VP} \mathbb{M}_{R1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_2}{n_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{Ln_1}{n_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Při násobení přenosových matic je nutné dát pozor na správné pořadí. Přenosová matice elementu, kterým prochází paprsek jako poslední, bude při násobení první, a naopak přenosová matice elementu, kterým paprsek prochází jako první, bude při násobení poslední. Logika násobení je v působení matic elementů na vektor paprsku.

Podobně odvodíme přenosovou matici tenké čočky (tenké = zanedbatelné tloušťky), protože se jedná o dvě sféricky zakřivená rozhraní s poloměry zakřivení ρ_1, ρ_2 s indexy lomu okolního prostředí n_1 a prostředí materiálu čočky n_2 . Stejným postupem jako výše odvodíme, že pro vypuklé sféricky zakřivené rozhraní je přenosová matice identická jako

²Na tomto místě je třeba upozornit, že v této bakalářské práci se matice indexového prostředí užívá hlavně v případě krystalu s kolmými hranami.

pro kulové sféricky zakřivené rozhraní. Posléze nám vyjde přenosová matice

$$\mathbb{M}_{T\check{C}} = \mathbb{M}_{SZR2}\mathbb{M}_{SZR1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2-n_1}{n_1\rho_2} & \frac{n_2}{n_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1-n_2}{n_2\rho_1} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

kde f je parametr čočky, který se nazývá ohnisková vzdálenost, a je roven:

$$f = \left[\frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \right]^{-1} \quad (17)$$

Přenosová matice funguje i v případě rozptylky ohnisková vzdálenost, záleží zde jen na znaménkové konvenci [5].

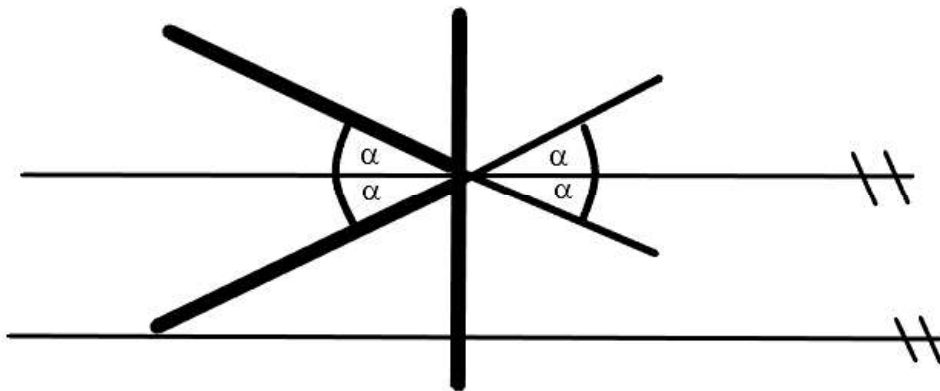
Přenosová matice rovinného a sférického zrcadla

Předposledním elementem, který si odvodíme, je rovinné zrcadlo. Z obrázku 4 vyplývají rovnice:

$$x_2 = x_1 \quad (18)$$

$$\alpha_2 = -\alpha_1 \quad (19)$$

Provedeme transformaci osy z (optické osy) - její otočení o 180° , tedy převrácení:



Obrázek 4: Interakce paprsku a rovinného zrcadla

$z_{new} = -z_{old}$. Pro naše účely je jednodušší, aby směr paprsku určoval orientaci osy z , než aby osa z určovala směr paprsku. Provedením této transformace dostaneme rovnice:

$$x_2 = x_1 \quad (20)$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 \quad (21)$$

Tedy přechodová matice plošného zrcadla je ve tvaru

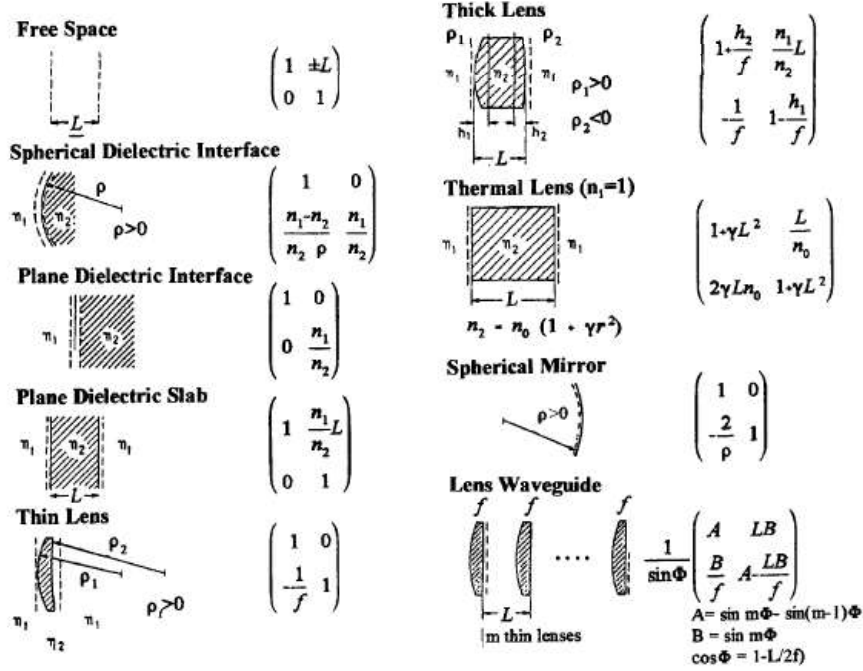
$$\mathbb{M}_{PZ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}, \quad (22)$$

kde \mathbb{I} je jednotková matice.

Podobným postupem zavedeme matici sférického zrcadla s poloměrem křivosti zrcadla ρ . [2]

$$\mathbb{M}_{SZ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Další příklady



Obrázek 5: Příklady přenosových matic [2].

1.1.4 Odvození přenosových matic složitějších optických elementů

Přenosová matice zkoseného rozhraní

Při generování laserového záření pevnolátkovým laserem s rezonátorem, jehož čela krystalu jsou kolmá k optické ose, může být problém parazitního odrazu od čel krystalu. V praxi se tento problém řeší zkosením čel. Při odvození přenosové matice zkoseného krystalu začneme s odvozením přenosové matice zkoseného rozhraní. Zaprvé si musíme uvědomit, že zde již jsou rozdílné přenosové matice v tangenciální a sagitální rovině - v sagitální rovině se jedná o normální rozhraní, zkosení se projevuje v tangenciální. Platí:

$$\mathbb{M}_{ZR-S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \quad (24)$$

V tangenciální rovině se projevuje zkosení. Opět učiníme trik s transformací souřadnic. Otočíme osy x a z o úhel zkosení tak, aby osa z byla totožná s normálovou osou zkoseného čela jak před rozhraním, tak za ním. (viz obrázek 6, před rozhraním pootočíme o úhel souřadné osy o úhel α , po něm o β , který je definovaný $\beta = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \alpha\right)$. Tím pádem platí rovnice:

$$\cos \alpha x_2 = \cos \beta x_1$$

$$n_1 \sin(\alpha + \alpha_1) = n_1 \sin \alpha \cos \alpha_1 + n_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha = n_2 \sin(\beta + \alpha_2)$$

Druhou rovnici zjednodušíme paraxiální aproximací pro úhly α_1 a α_2 .

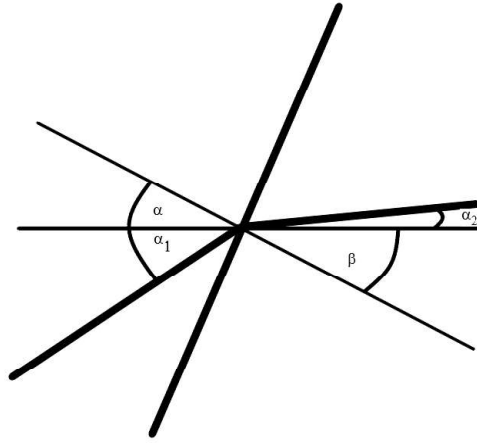
$$n_1 \sin \alpha + n_1 \alpha_1 \cos \alpha = n_2 \sin \beta + n_2 \alpha_2 \cos \beta = n_1 \sin \alpha + n_2 \alpha_2 \cos \beta$$

Na obou stranách nám vzniknou identické členy, které můžeme odečíst, tím již získáme rovnice:

$$x_2 = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} x_1$$

$$\alpha_2 = \frac{n_1 \cos \alpha}{n_2 \cos \beta} \alpha_1$$

Přenosová matice pro tangenciální rovinu zkoseného rozhraní vypadá následovně:



Obrázek 6: Zkosené rozhraní

$$\mathbb{M}_{ZR-T} = \begin{pmatrix} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} & 0 \\ 0 & \frac{n_1 \cos \alpha}{n_2 \cos \beta} \end{pmatrix} \quad (25)$$

Přenosová matice zkoseného krystalu

Odvození přenosové matice zkoseného krystalu o úhlu zkosení α (obě dvě stěny krystalu jsou rovnoběžně zkosené), délce L a indexu lomu n je již velmi jednoduché, využijeme opět relace 14. Paprsek při průchodu zkoseným krystalem nejdříve projde zkoseným rozhraním, poté volným prostorem, následně opět zkoseným rozhraním, kde se však „prohodí“ úhly α a β . Při výpočtu počítáme s tím, že krystal je umístěn ve vzduchu či vakuu, tedy index lomu okolního prostředí je roven jedné [6].

$$\mathbb{M}_{ZK-T} = \begin{pmatrix} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} & 0 \\ 0 & \frac{n \cos \beta}{1 \cos \alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1 \cos \alpha}{n \cos \beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{nL \cos \alpha^2}{n^2 - \sin^2 \alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

V sagitální rovině je situace mnohem jednodušší, jednoduchou úvahou dojdeme k matici indexového rozhraní s kolmými hranami.

$$\mathbb{M}_{ZK-S} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (27)$$

1.1.5 Přenosová matice brewsterovského krystalu

Zmíňme si jeden významný úhel zkosení - Brewsterův úhel. Brewsterův úhel zkosení způsobí, že se složka polarizace p nebude vůbec odrážet. V případě, že zacházíme s lineárně polarizovaným světlem, které obsahuje pouze složku p , pak bude rozhraní dokonale průhledné [1]. Díky této vlastnosti zamezíme vzniku parazitního odrazu od čel krystalu. Vztah pro Brewsterův úhel pro rozhraní mezi prostředními o indexech lomu n_1 a n_2 , vychází z Fresnelových vzorců pro obecný dopadový úhel, viz [1]:

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (28)$$

Pokusme se nyní pro $n_1=1$ a $n_2=n$ najít vyjádření sinu a cosinu Brewsterova úhlu. Nejdříve umocněme vztah (28) na druhou a upravme ho pomocí goniometrických identit.

$$\tan^2 \theta_B = \frac{\sin^2 \theta_B}{\cos^2 \theta_B} = \frac{\sin^2 \theta_B}{1 - \sin^2 \theta_B} = n^2$$

Na levé straně již máme jen sinus brewsterova úhlu, není problém ho tedy vyjádřit³:

$$\sin \theta_B = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} \quad (29)$$

Analogickým postupem vypočítáme cosinus:

$$\cos \theta_B = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} \quad (30)$$

Dosadíme-li vztahy (29), (30) do matice zkoseného krystalu (26), dostanu přenosovou matici brewsterovsky zkoseného krystalu o délce L a indexu lomu n :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{n^3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (31)$$

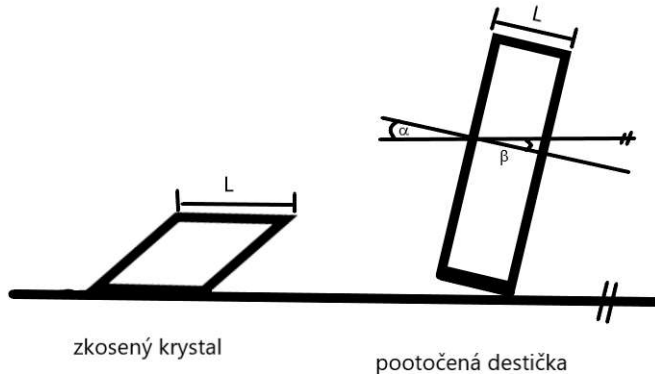
Přenosová matice brewsterovsky zkoseného krystalu v sagitální rovině je stejná jako v případě obecně zkoseného krystalu.

Přenosová matice pootočené destičky

K ucelení našich poznatků by bylo vhodné zavést ještě tzv. pootočenou destičku - je to útvar, jež je ze stejného materiálu jako krystal, má tvar kvádříku a byla pootočená o úhel α . Je charakterizována svoji tloušťkou L , indexem lomu n a úhlem pootočení. Rozdíl mezi zkoseným krystalem a pootočenou destičkou je nejlépe vidět na obrázku 7.

Je zřejmé, že při výpočtu přenosové matice destičky se postupuje stejně jako při

³Odmocnění není problém učinit, jelikož předpokládáme úhel od nuly od $\frac{\pi}{2}$, a n i $n^2 + 1$ jsou evidentně kladné výrazy z fyzikální podstaty



Obrázek 7: Zkosený krystal vs. pootočená destička

výpočtu zkoseného krystalu, jen se nenásobí maticí volného prostoru o délce L , ale maticí volného prostoru o efektivní délce $L_{ef} = \frac{L}{\cos \beta}$. Upravme efektivní délku:

$$L_{ef} = \frac{L}{\cos \beta} = \frac{L}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}} = \frac{nL}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}$$

Takto upravenou efektivní délku dosadíme do matic zkoseného krystalu v tangenciální a sagitální rovině. Vyjde nám o trochu složitější výraz:

$$\mathbb{M}_{PD-T} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n^2 L \cos \alpha^2}{(n^2 - \sin^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$\mathbb{M}_{PD-S} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (33)$$

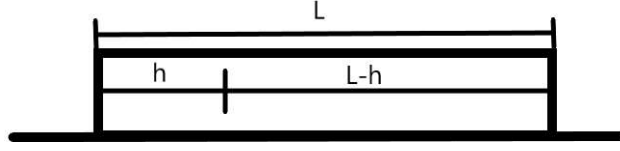
Podobně se bude postupovat v případě brewsterovsky pootočené destičky, jen za $\sin \alpha$ se poté ještě dosadí (29). Vyjdou přenosové matice v tangenciální a sagitální rovině:

$$\mathbb{M}_{BPD-T} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{L\sqrt{n^2+1}}{n^4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$\mathbb{M}_{BPD-S} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{L\sqrt{n^2+1}}{n^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (35)$$

1.1.6 Dělení krystalu

Občas nás zajímá u nezanedbatelně tlustých elementů vektor paprsku uvnitř optického elementu. V tom případě se musí element rozdělit na pravou a levou část. Důležitým parametrem dělení krystalu či jiných nezanedbatelně tlustých elementů je délka h , která označuje vzdálenost mezi dělícím bodem a levou hranou (viz obrázek 8). Začneme s nejjednodušším případem, tj. dělením volného prostoru o délce L . Volný prostor



Obrázek 8: Dělení krystalu a zavedení parametru h

se rozdělí na dva volné prostory, kde jeden má délku h , druhý $L-h$. Zapišeme-li to matematicky:

$$\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L-h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (36)$$

Nyní mějme krystal s kolmými hranami o indexu lomu n_2 zasazený v prostředí o indexu lomu n_1 a pokusme se zjistit přechodovou matici levé části. Idea je trochu složitější, jelikož jde o složené působení přenosových matic elementů na vektor paprsku, nejdříve matice rozhraní, poté matice volného prostoru o délce h . Přenosovou matici levé části získáme jejich vynásobením.

$$\mathbb{M}_{KL} = \mathbb{M}_{VP} \mathbb{M}_{R1} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{hn_1}{n_2} \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \quad (37)$$

Matici pravé části vypočítáme stejným způsobem. Opět jde o složené působení matic na vektor paprsku, tentokrát nejdříve maticí volného prostoru o délce $L-h$, poté maticí rozhraní při odchodu paprsku z krystalu:

$$\mathbb{M}_{KR} = \mathbb{M}_{R2} \mathbb{M}_{VP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_2}{n_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L-h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L-h \\ 0 & \frac{n_2}{n_1} \end{pmatrix} \quad (38)$$

Analogicky budeme postupovat v případě zkoseného krystalu v tangenciální rovině:

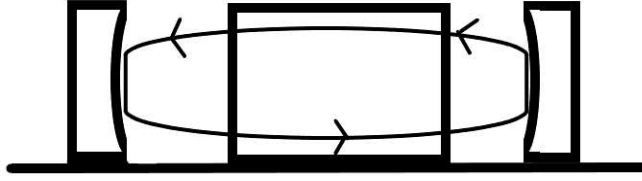
$$\mathbb{M}_{ZKL-T} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} & \frac{h \cos \alpha}{n \cos \beta} \\ 0 & \frac{1}{n} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \end{pmatrix} \quad (39)$$

$$\mathbb{M}_{ZKR-T} = \begin{pmatrix} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} & 0 \\ 0 & \frac{n \cos \beta}{1 \cos \alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L-h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} & (L-h) \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \\ 0 & \frac{n \cos \beta}{1 \cos \alpha} \end{pmatrix} \quad (40)$$

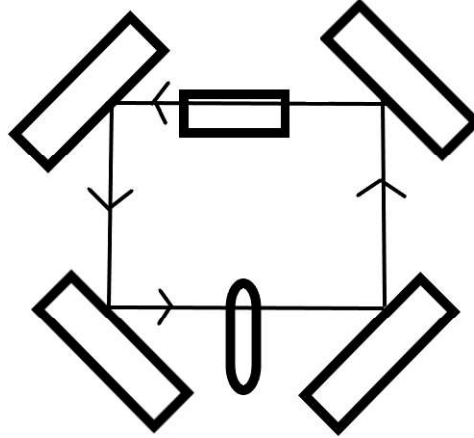
Protože se pro paprsek bude chovat zkosený krystal v sagitální rovině stejně jako krystal s kolmými čely, potom přenosové matice levé a pravé části v sagitální rovině budou stejné jako pro krystal s kolmými hranami. Pro přenosové matice částí brewsterovsky zkoseného krystalu stačí dosadit brewsterův úhel do matic částí obecně zkoseného krystalu.

1.1.7 Oběhová matice otevřeného rezonátoru

Jak uvidíme později v kapitole o Gaussově svazku, je nutné znát oběhovou matici rezonátoru - působí-li na vektor paprsku, pak výsledkem bude vektor paprsku po



Obrázek 9: Stojato-vlnný rezonátor



Obrázek 10: Kruhový rezonátor

průchodu rezonátorem. Její vypočítání závisí na druhu rezonátoru. Známe základní dva druhy rezonátoru: stojato-vlnný a kruhový (obrázky 9 a 10) [7]:

Oběhovou matici rezonátoru získáme pronásobením přenosových matic optických elementů v pořadí, v jakém jimi paprsek při jednom oběhu projde. Tvar oběhové matice však také závisí v jaké výsledné poloze, tj. u jakého optického elementu chceme vektor paprsku znát. Nechť má rezonátor n optických elementů, potom matici oběhu paprsku pro i -tý element sestavíme, když si uvědomíme, že paprsek při oběhu, který skončí u i -tého elementu, kde $i \in \hat{n}$, projde nejdříve $(i+1)$. elementem, pak $(i+2)$., ..., n -tým, $n-1$... až i -tým. Matematicky zapsáno:

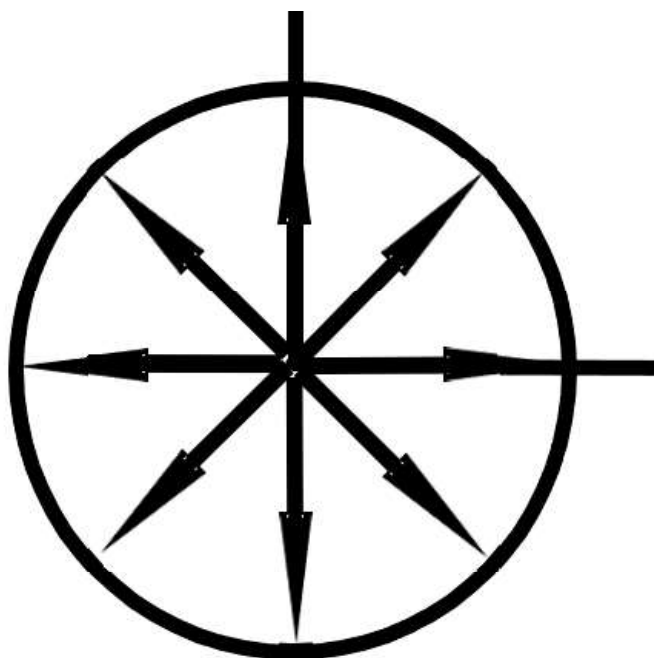
$$M^{(i)} = M_i M_{i+1} \cdots M_n M_{n-1} \cdots M_{i+1} \quad (41)$$

V případě kruhového rezonátoru je situace poněkud jednodušší, jak plyne z obrázku 10 oběhovou matici i -tého elementu, kde $i \in \hat{n}$, sestavíme následovně:

$$M^{(i)} = M_i M_{i-1} \cdots M_1 M_n M_{n-1} \cdots M_{i+1} \quad (42)$$

1.1.8 ABCD zákon

V této kapitole rozšíříme ABCD formalismus o jeho aplikaci na sférické vlny [8]. Doposud nám přenosové matice přinesli znalost o poloze a úhlu šíření paprsku po průchodu danými optickými elementy. Možnosti aplikace na šíření sférických vln dosáhneme snadno - víme totiž, že sférická vlna je ekvivalentní šíření paprsků ze zdroje sférické vlny



Obrázek 11: Šíření sférické vlny vyjádřené pomocí paprsků

všemi možnými směry. (viz obrázek 11). Při průchodu optickým elementem dochází k transformaci sférické vlny na sférickou vlnu o jiném poloměru křivosti. Je zřejmé, že v paraxiálním zobrazení lze napsat tento vztah mezi složkami vektoru paprsku a poloměrem křivosti:

$$R_1 = \frac{x_1}{\alpha_1} \quad (43)$$

Podělením rovnic (6) a(7) získáme rovnici

$$R_2 = \frac{x_2}{\alpha_2} = \frac{Ax_1 + B\alpha_1}{Cx_1 + D\alpha_2}, \quad (44)$$

ze které drobnou úpravou odvodíme vztah, který nazveme ABCD zákonem:

$$R_2 = \frac{AR_1 + B}{CR_1 + D}, \quad (45)$$

1.1.9 Výhody a nevýhody ABCD formalismu

Na závěr kapitoly zhodnotíme ABCD formalismus. Mezi výhody ABCD formalismu nepochybně patří skládání optických elementů v jeden pomocí součinu matic a celková jeho jednoduchost. Mezi nevýhody naopak patří jistá míra nepřesnosti, jež je způsobená paraxiální aproximací, která byla užita při odvození matic rozhraní. Další nevýhodou je nezohlednění jevů jako jsou interference a difrakce, protože ABCD formalismus poskytuje pouze informace o šíření paprsku světla, nikoliv o fázi či amplitudě.

1.2 Gaussovský svazek

1.2.1 Původ gaussovského svazku

Než dojdeme k definici gaussovského svazku, připomeňme si několik pojmů z teorie elektromagnetického pole. Z Maxwellových rovnic lze odvodit pro vakuum vlnovou rovnici⁴ [9]:

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (46)$$

Řešení vlnové rovnice lze zapsat v Dalambertově tvaru [1]:

$$E(x, y, z, t) = E(\omega t - \vec{k}\vec{r}), \quad (47)$$

kde ω je úhlová frekvence, \vec{k} je vlnový vektor. Obě tyto veličiny jsou navzájem spojeny obecnou disperzí relací:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (48)$$

Jakákoliv funkce splňující (47) je řešením, dvě řešení jsou pro nás však obzvlášť zajímavá - rovinná a sférická vlna (λ je vlnová délka):

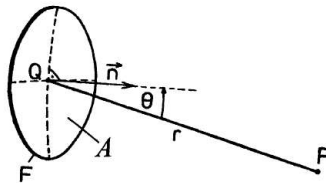
$$E(\vec{r}, t) = E_0 \exp(i\omega t - i\vec{k}\vec{r}) \quad (49)$$

$$E(\vec{r}, t) = E_0 \frac{\lambda}{r} \exp(i\omega t - ikr) \quad (50)$$

Vztah pro sférickou vlnu nám exaktně popisuje šíření ve vakuu bez překážek. Problémem však zůstává jev zvaný difrakce, tj. šíření jen jisté části elektrického pole [2]- např. šíření elektrického pole po průchodu kruhovou aperturou. Pro popis jevu difrakce využijeme Huygensův princip, který tvrdí: *Šíření elektrického pole z určité vymezené plochy lze popsat tak, že každý bod považujeme za zdroj sférické vlny o amplitudě původního pole v daném bodě.* [2]. Abychom získali kompletní tvar elektrického pole je třeba zdroje sečíst. Uvažujme situaci zobrazenou na obrázku 12. Pak pole v bodě P popíšeme pomocí vztahu

$$E(P) = \frac{i}{\lambda} \exp(i\omega t) \int_A E_1(Q) \frac{\exp(-ikr)}{r} dA, \quad (51)$$

který nazveme Kirchhoffovým integrálem. Pokusme se nyní zjednodušit Kirchhoffův



Obrázek 12: Difrakce na kruhové apertuře [2]

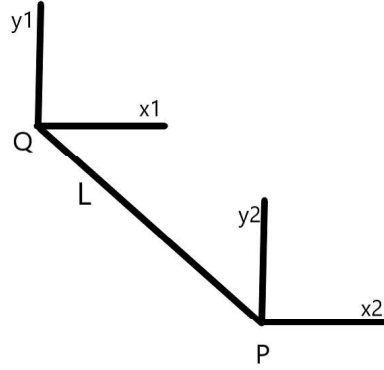
integrál na tvar, který půjde lépe počítat. První krok, který učiníme, je zavedení dvou

⁴Pro jednoduchost předpokládáme že elektrické pole má jen jednu nenulovou složku.

souřadných systémů - první bude rovina (x_1, y_1) , která je totožná s rovinou apertury, a druhá je rovina (x_2, y_2) , která obsahuje bod P, v němž pozorujeme elektrické pole, a která je rovnoběžná s rovinou (x_1, y_1) . Vzdálenost mezi rovinami je L (Vše je lépe vidět na obrázku (13)). Nyní vyjádříme vzdálenost r pomocí souřadných systémů:

$$r = \sqrt{L^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = L\sqrt{1 + \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{L^2}} \quad (52)$$

Za předpokladu, že výrazy $\frac{x_1^2}{L}$ a $\frac{y_1^2}{L}$ jsou velmi malé ,tj. L je mnohem větší v porovnání



Obrázek 13: Zavedení souřadných soustav

se vzdáleností bodu, ve kterém měříme elektrické pole, od osy z, pak lze vztah výše rozvést do Taylorova polynomu prvního řádu:

$$r = L - \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{L} + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2L} + \frac{x_2^2 + y_2^2}{2L} \quad (53)$$

Dosazením (53) do Kirchhoffova integrálu dostáváme nový, Fresnelův integrál:

$$E(P) = \frac{i}{\lambda L} \exp(i\omega t - ikL) \int_A E_1(Q) \exp \left[-ik \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{L} + \frac{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2}{2L} \right) \right] dx_1 dy_1 \quad (54)$$

Na tomto místě je třeba zodpovědět otázku, proč r v jmenovateli integrandu Kirchhoffova integrálu bylo aproximováno hruběji, než r v exponentu. Způsobil to fakt, že při difrakci má na konečnou amplitudu intezity na stínítku v závislosti na její poloze mnohem větší vliv fáze, než amplituda v apertuře [1]. Zatímco vzdálenost bude vždycky kladná, způsobí dělení amplitudy pouze zmenšení intezity na kladnou hodnotu, komplexní exponenciála, jejíž periodicitu integrování nezmění, může výslednou intezitu klidně vynulovat.

Pro zjednodušení práce s výrazem (54) položíme $t=0$. Tuto úpravu můžeme provést, protože výraz $\exp(i\omega t)$ působí předvídatelnou periodickou změnu v intervalu $[-1;1]$, kterou snadno ve výsledku zohledníme.

Dosud jsme pracovali se šířením elektrického pole ve vakuu bez jakýchkoliv optických elementů. Pro tento účel nám bohatě stačil Kirchhoffův integrál či jeho aproximace.

Při započítání optických elementů vyjádřených ABCD maticemi se Kirchoffův integrál změní ve vztah [2]

$$E(P) = s \int_A E_1(Q) \exp \left[-ik \frac{\pi}{\lambda B} (Ax_1^2 + Dx_2^2 - 2x_1x_2 + Ay_1^2 + Dy_2^2 - 2y_1y_2) \right] dx_1 dy_1, \quad (55)$$

který nazveme Collinsův integrál (s je komplexní konstanta, $s = \frac{i}{\lambda B} \exp[-ikL]$). Pro otevřený rezonátor s maticí oběhu $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ platí, že elektrické pole by se mělo po průchodu rezonátorem reprodukovat až na velikost amplitudy (proto se v následující rovnici vyskytl korekční faktor γ):

$$\gamma E_1(Q) = s \int_A E_1(Q) \exp \left[-ik \frac{\pi}{\lambda B} (Ax_1^2 + Dx_2^2 - 2x_1x_2 + Ay_1^2 + Dy_2^2 - 2y_1y_2) \right] dx_1 dy_1 \quad (56)$$

Dosadíme-li do vztahu (56) vlnu, jejíž příčné rozdělení odpovídá gaussovskému rozdělení [2]

$$E_1(x_1, y_1) = E_0 \exp \left[-\frac{ik}{2q_1} (x_1^2 + y_1^2) \right], \quad (57)$$

kde q_1 je komplexní číslo, pak dostaneme opět gaussovské rozdělení, jehož podoba je následující:

$$E_2(x_2, y_2) = \frac{E_0}{A - \frac{B}{q_1}} \exp \left[-\frac{ik}{2q_2} (x_2^2 + y_2^2) \right] \quad (58)$$

Toto je klíčové zjištění, znamená to, že jedním z možných řešení příčného módu elektromagnetického pole uvnitř otevřeného rezonátoru je gaussovský svazek, protože po průchodu rezonátorem se nezmění předpis pro rozdělení elektrické intenzity, tedy se změní o konstantu, ale obecný tvar zůstane stejný. Parametr q_2 je ve výrazu (58) roven :

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (59)$$

Tento vztah je důležitý pro celou další kapitolu a nazveme jej zobecněným ABCD zákonem.

1.2.2 Šíření gaussovského svazku volným prostorem

Průřez symetrickým gaussovským svazkem v rovině kolmé k šíření svazku v místě $z=0$ je gaussovské rozdělení popsané vztahem

$$E_1(x, y) = E_0 \exp \left[\frac{(x^2 + y^2)}{w_0^2} \right], \quad (60)$$

kde w_0 je parametr nazvaný krček neboli kaustika, jehož význam si vysvětlíme později. V porovnání se vztahem (57) dostaneme, že

$$q_1 = \frac{ik}{2w_0^2} = i \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = iz_0. \quad (61)$$

Dosadíme-li do zobecněného ABCD zákona parametry matice volného prostoru, jež v případě šíření z počátku ve směru osy z má tvar $\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pak pro změnu parametru q v závislosti na z platí následující vztah:

$$q(z) = q_1 + z = iz_0 + z \quad (62)$$

Přepíšeme-li vhodně vztah výše a zavedeme-li proměnné R a w , vyjde:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - \frac{i\lambda}{\pi w(z)^2}, \quad (63)$$

$$R(z) = z_0 \left[\frac{z}{z_0} + \frac{z_0}{z} \right]; \quad w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2} \quad (64)$$

Gaussovský svazek lze pak ve vzdálenosti z od počátku s pomocí parametrů w a R napsat v podobě:

$$E(x, y) = \frac{E_0}{1 - i\frac{z}{z_0}} \exp \left[-\frac{ik}{2} \frac{x^2 + y^2}{R(z)} \right] \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w(z)^2} \right] \quad (65)$$

R je poloměr křivosti plochy konstantní fáze. Spočítáme-li nyní intenzitu elektrické vlny dle vztahu [2]

$$I = \frac{1}{2} n c_0 \epsilon_0 |E|^2, \quad (66)$$

kde n je index lomu, c_0 je rychlost světla ve vakuu a ϵ_0 je permitivita vakua, pak nám vyjde pro intenzitu:

$$I = \frac{1}{2} n c_0 \epsilon_0 \frac{E_0^2}{1 + \frac{z^2}{z_0^2}} \exp \left[-2 \frac{x^2 + y^2}{w(z)^2} \right] \quad (67)$$

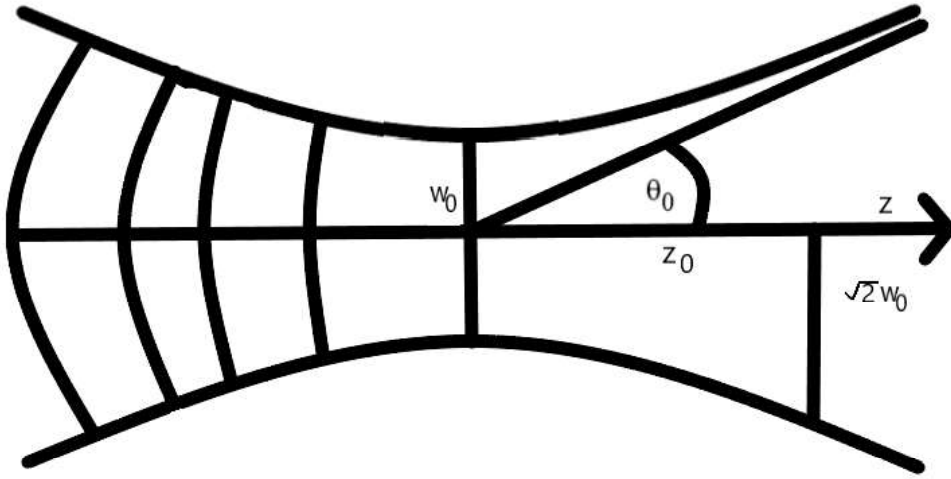
Z tohoto vztahu lze usoudit význam proměnné w . Je to poloměr svazku, definovaný jako *vzdálenost od středu svazku, na které intenzita klesne na hodnotu $1/e^2$ maximální hodnoty* [10].

Ve vztahu (64) jsme zavedli z_0 . Je to charakteristický parametr každého Gaussova svazku - jmenuje se Rayleighova vzdálenost, na které pro poloměr svazku svazku platí $w = \sqrt{2} w_0$ (viz obrázek 14). Spočtěme nyní limitu podílu $w(z)$ a z pro veliká z :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{w(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{w_0 z \sqrt{\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z_0^2}}}{z} = \frac{w_0}{z_0} = \frac{\lambda}{\pi w_0} = \tan \theta_0 \quad (68)$$

Limita konverguje a je konstantní. To lze interpretovat tak, že svazek diverguje ve velkých vzdálenostech pod konstantním úhlem θ_0 . Limita (68) sice hovoří pouze o tangensu úhlu, nicméně protože se vždy jedná o velmi malé úhly, lze užít aproximaci $\tan \theta_0 \approx \theta_0$ a napsat vztah, který se nazývá BPP - „beam parameter product“:

$$w_0 \theta_0 = \frac{\lambda}{\pi}. \quad (69)$$



Obrázek 14: Šíření gaussovského svazku

V laserové technice se koriguje vztah (69) členem M^2 - parametr kvality svazku, pro který platí, že je větší než 1, protože součin parametrů svazku je většinou větší než jen λ/π . Korigovaný vztah je tedy:

$$w_0\theta_0 = M^2 \frac{\lambda}{\pi} \quad (70)$$

1.2.3 Šíření gaussovského svazku optickým systémem

Mějme optický systém popsáný maticí $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Nechť je před vstupem do systému popsán gaussovský svazek parametrem q_1 , pro který platí:

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{R_1} - i \frac{\lambda}{\pi w_1^2}$$

Nechť je po průchodu optickým systémem popsán gaussovský svazek parametrem q_2

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{R_2} - i \frac{\lambda}{\pi w_2^2}$$

Aplikací zobecněného ABCD zákona (59) dostaneme následující transformační vztahy [2]:

$$w_2^2 = A^2 w_1^2 + 2AB \frac{w_1^2}{R_1} + B^2 \theta_1^2 \quad (71)$$

$$\theta_2^2 = C^2 w_1^2 + 2CD \frac{w_1^2}{R_1} + D^2 \theta_1^2 \quad (72)$$

$$R_2 = \frac{w_2^2}{\sqrt{w_2^2 \theta_2^2 - \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2}} \quad (73)$$

1.2.4 Gaussovský svazek jako fundamentální příčný mód optického rezonátoru

Jak již bylo řečeno výše, po dosažení gaussovského svazku do Collinsova integrálu nám opět vyjde gaussovský svazek, byť s parametrem q_2 určeným zobecněným ABCD zákonem. Zabýváme-li se otázkou, zda by mohl být gaussovský svazek fundamentálním příčným módem stabilního optického rezonátoru, pak by, za předpokladu, že jsme za A,B,C,D parametry v Collinsově integrálu dosadili parametry oběhové matice rezonátoru, mělo platit, že $q_1=q_2$, tedy

$$q = \frac{Aq + B}{Cq + D},$$

což lze přepsat do tvaru kvadratické rovnice:

$$B\frac{1}{q^2} + (D - A)\frac{1}{q} + C = 0 \quad (74)$$

Protože vstupní a výsledný vektor paprsku jsou v prostředí o stejném indexu lomu, pak pro zachování velikosti vektoru paprsku musí platit (tj. vynásobím-li vektor ABCD maticí, nezmění se jeho velikost - důvody zachování velikosti vyplývají z Liouvillova teorému [2]):

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = AD - BC = 1 \quad (75)$$

Vyřešíme kvadratickou rovnici (74) s pomocí (75). Vyjde nám:

$$\frac{1}{q} = \frac{D - A}{2B} \pm \frac{\sqrt{(A - D)^2 + 4AD - 4}}{2B}$$

Avšak parametr $\frac{1}{q}$ by měl vycházet dle předchozí teorie jako komplexní číslo - protože první člen je rozhodně reálný (členy ABCD matic jsou vždy reálné), pak lze imaginárnosti dosáhnout pouze v druhém členu - budeme předpokládat, že výraz pod odmocninou je záporný. Dále, abychom mohli srovnat výsledný kořen kvadratické rovnice s (63), čímž získáme podrobnější informace o gaussovském svazku v rezonátoru (například o jeho poloměru), musíme zredukovat dva kořeny na jeden, tedy \pm změníme na $-$. Dostaneme následující vztah

$$\frac{1}{q} = \frac{D - A}{2B} - i \frac{\sqrt{1 - \frac{(A+D)^2}{4}}}{B}, \quad (76)$$

s podmínkou

$$\frac{|A + D|}{2} < 1, \quad (77)$$

kteřou nazveme podmínkou stability rezonátoru⁵. Pokud není rezonátor stabilní, pak se rezonátorem gaussovský svazek nešíří. Srovnáním vztahů (63) a (76), získáme vyjádření parametrů w a R .

$$R = \frac{2B}{D - A} \quad (78)$$

⁵Stejnou podmínku bychom dostali aplikací Sylvestrova teorému [2].

$$w = \frac{\lambda}{\pi} \frac{2|B|}{\sqrt{4 - (A + D)^2}} \quad (79)$$

Tím jsme odvodili to, že má-li se šířit gaussovský svazek optickým rezonátorem, musí být rezonátor stabilní (zde stačí ověřit stabilitu v jednom elementu, protože pak bude rezonátor stabilní všude, detailní odůvodnění v [2]) a v každém bodě musí parametry R a w splňovat vztahy (78) a (79) příslušných oběhových matic rezonátoru pro daný bod. Vztah pro w je pro nás důležitý - většina programů pro výpočet parametrů gaussova svazku v otevřeném rezonátoru, včetně programu vytvořeného v této bakalářské práci, počítá v napříč rezonátorem právě pomocí tohoto vztahu - pro každý element se vypočítá matice oběhu, volný prostor a jiné nezanedbatelně tlusté elementy se rozdělí na určitý počet částí, tak jak bylo popsáno v kapitole o dělení krystalu, opět se spočítá matice oběhu a tímto způsobem lze vypočítat průběh w v celém rezonátoru.

Pro úplnost dodejme, že ke vztahu stability rezonátoru a gaussovského svazku jakožto základního příčného módu, se přistupuje i opačně, tedy že rezonátor je stabilní, pokud se jím šíří gaussovský svazek.

1.3 Módy vyšších řádů

V předchozích kapitolách bylo řečeno, že gaussovský svazek je řešení Collinsova integrálu (56). Existují však i další možná řešení, která záleží na rozměrech optických elementů, která z řešení se budou nejvíce projevat. Možná řešení Collinsova integrálu lze rozdělit do dvou skupin dle symetrie, kterou mají optické elementy: Gauss-Laguerrovy módy pro kruhovou symetrii a Gauss-Hermitovy módy pro čtvercovou symetrii.

1.3.1 Gauss-Laguerrovy módy

V případě kruhové symetrie optických elementů pozorujeme v rezonátoru mimo základní gaussovský mód i tzv. Gauss-Laguerrovy módy. Každý mód je charakterizován dvojicí čísel (p,l). Matematicky lze popsat Gauss-Laguerrovy módy pomocí vztahu [2]:

$$E_{pl}(r, \varphi) = E_0 \left[\frac{\sqrt{2}r}{w_0} \right]^l L_p^{(l)} \left(\frac{2r^2}{w_0^2} \right) \exp \left[-\frac{r^2}{w_0^2} \right] \cos(l\varphi), \quad (80)$$

kde w_0 je poloměr gaussovského svazku v základním módu - brzy uvidíme, že základní mód je stejný jak v kruhové symetrii, tak v čtvercové symetrii a $L_p^{(l)}$ je Laguerrovův polynom řádu (p;l). Pro praktické účely není třeba znát obecný vzorec, stačí jen znát prvních několik řádů [2]:

$$\begin{aligned} L_0^{(l)}(t) &= 1 \\ L_1^{(l)}(t) &= l + 1 - t \\ L_2^{(l)}(t) &= \frac{1}{2}(l+1)(l+2) - (l+2)t + \frac{t^2}{2} \\ L_3^{(l)}(t) &= \frac{1}{6}(l+1)(l+2)(l+3) - (l+2)(l+3)\frac{t}{2} + (l+3)\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} \end{aligned} \quad (81)$$

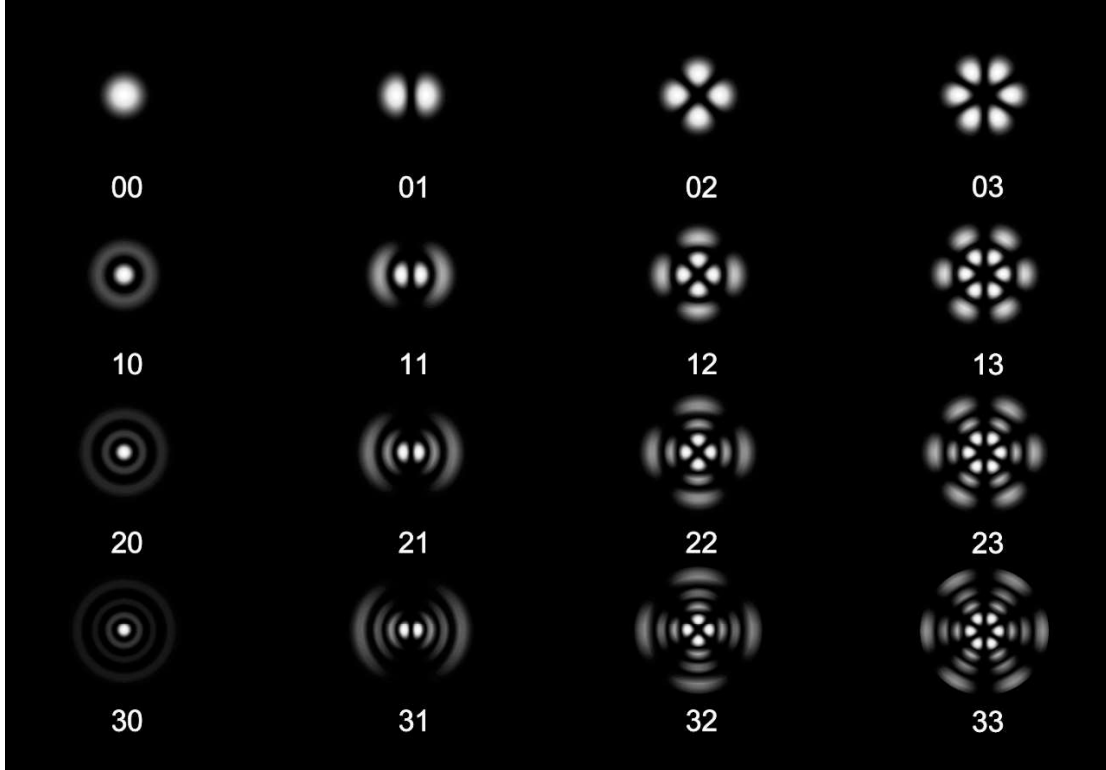
Efektivní poloměr svazku řádu (p;l) [2] vypočítáme pomocí vztahu [2]:

$$w_{pl} = w_0 \sqrt{2p + l + 1} \quad (82)$$

Jeho divergenci:

$$\theta_{pl} = \theta_0 \sqrt{2p + l + 1} \quad (83)$$

Ze vztahů 82 a 83 vyplývá, že se efektivně zvětší i BPP - „beam parameter product“.



Obrázek 15: Několik prvních Laguerre-gaussových módů [11].

1.3.2 Gauss-Hermitovy módy

Hovoříme-li o případě, kdy elementy mají čtvercovou symetrii, pak jsou v rezonátoru generovány Gauss-Hermitovy módy s řády, které jsou označeny dvojicí čísel (m;n). Mód popíšeme funkcí [2]:

$$E_{mn}(x, y) = E_0 H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w_0} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{w_0} \right) \exp \left[-\frac{(x^2 + y^2)}{w_0^2} \right] \quad (84)$$

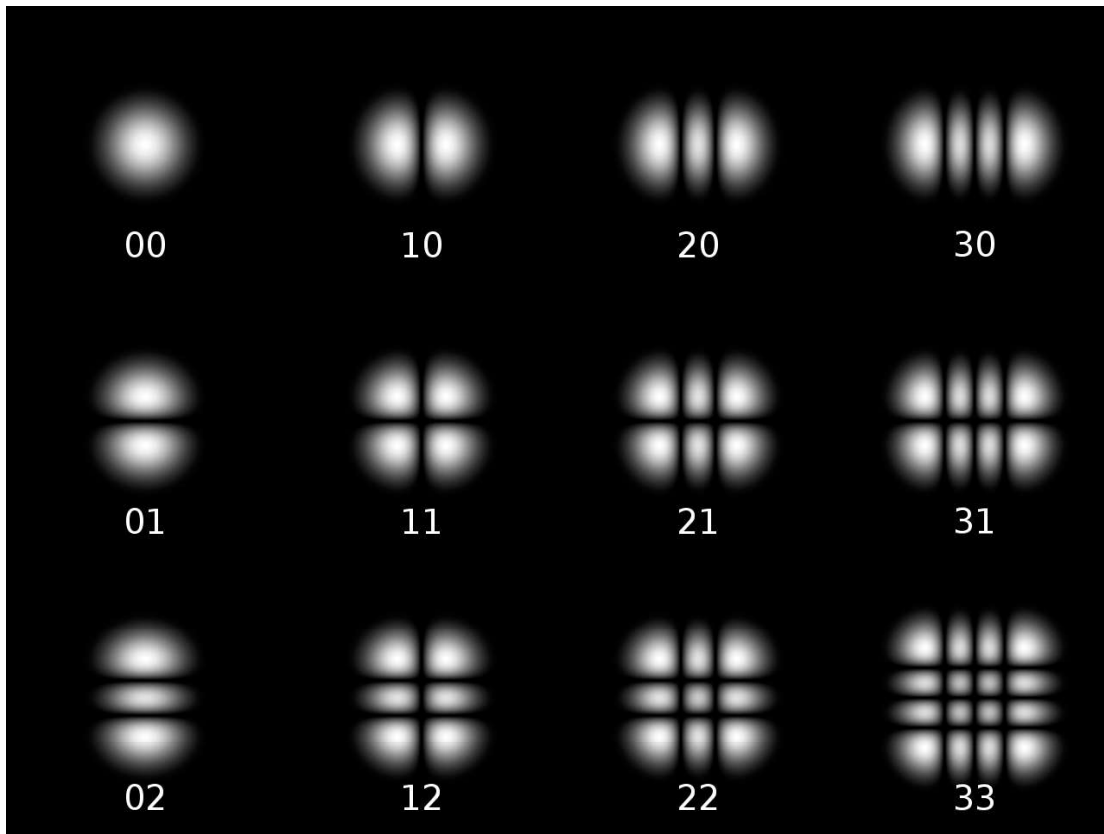
Ve výrazu (84) se vyskytnou Hermitovy polynomy. Podobně jako u Laguerrových polynomů nemusíme znát jejich obecný předpis, stačí opět znát jen několik prvních 40.

$$\begin{aligned} H_0(t) &= 1 \\ H_1(t) &= 2t \\ H_2(t) &= 4t^2 - 2 \\ H_3(t) &= 8t^3 - 12t \end{aligned} \quad (85)$$

Je vidět, že vztah pro E_{00} je stejný jak ve čtvercové, tak v kruhové symetrii, je to čistý gaussovský svazek, tj. jedná se o základní příčný mód, jak jsme si ho zavedli v předchozích kapitolách.

Co se týče efektivního poloměru svazku pro Gauss-Hermitovy polynomy, musíme zde rozlišovat poloměru ve směru osy x a osy y (stále předpokládáme šíření záření ve směru osy z)⁶.

$$\begin{aligned} w_x &= w_0 \sqrt{2m + 1} \\ w_y &= w_0 \sqrt{2n + 1} \end{aligned} \tag{86}$$

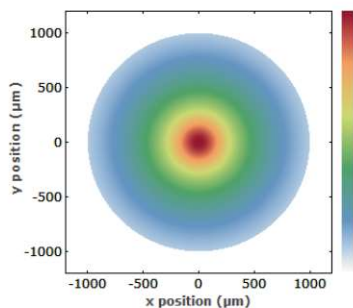


Obrázek 16: Několik prvních Gauss-Hermitových módů [11].

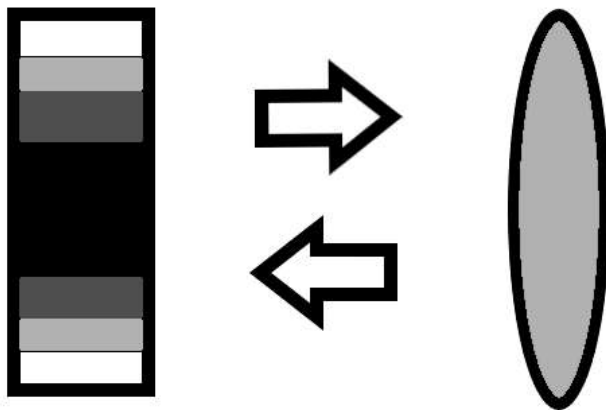
⁶Také stále předpokládáme stigmatický svazek, podobné vzorce by šly odvodit i pro jednoduše astigmatický svazek

1.4 Termální čočka

Termální čočka je doprovodný jev zahřátí aktivního média. Vlivem gaussovského rozdělení intenzity příčného módu laserového svazku dochází, obzvláště v případě záření s vysokým středním výkonem, k zahřátí aktivního média v příčném průřezu a vzniká tak termická čočka (pojmenování „termální čočka“ zavádíme proto, že dochází k zakřivení záření jako u čočky; ono zakřivení je způsobeno tím, že index lomu materiálu závisí na teplotě, materiál se díky zahřátí nehomogenně roztahuje, tepelná vodivost je konečná, tedy teplo se nestačí odvést chlazením atd. [12]).



Obrázek 17: Profil teploty na příčném řezu aktivním prostředím. [12]



Obrázek 18: Idea ekvivalence mezi nerovnoměrným rozdělením indexu lomu a homogenním prostředím s nestejnou délkou. V hranolu s nerovnoměrně rozděleným indexem lomu se části světelného svazku pohybují s různou rychlostí, tzn. optická dráha se v závislosti na poloze liší -tím vzniká ekvivalence se homogenním prostředím s nestejnou délkou [13]

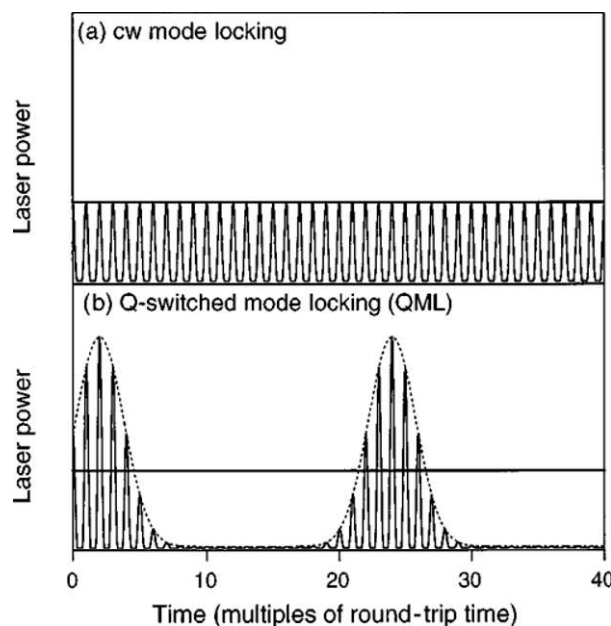
Ohniskovou vzdálenost vzniklé čočky spočítáme dle zjednodušeného vztahu [14]:

$$\frac{1}{f} = \frac{\frac{dn}{dT}}{2\kappa A} P, \quad (87)$$

kde $\frac{dn}{dT}$ je termo-optický koeficient, κ je tepelná vodivost materiálu, A je průřez osvětlené oblasti - spočte se jako obsah kruhu s poloměrem gaussovského svazku laserového záření, a P je střední výkon laserového záření.

1.5 Prahová podmínka pro stabilní pasivní mode-locking

Při generování krátkých impulsů v režimu pasivního mode-lockingu pomocí saturevatelného absorbéru dochází k tzv. q-spínanému mode-lockingu. Při něm na rozdíl od stabilního mode-lockingu dochází sice ke generování impulsů, jejichž amplituda je ohraničena q-spínanou obálkou [15] (graficky znázorněno na obrázku 19), nicméně délku mají stejnou jak v případě stabilního mode-lockingu. Špičkový výkon q-spínaných mode-lockingových impulsů může zapříčinit poškození elementů uvnitř rezonátoru a tudíž je tento jev nežádoucí.



Obrázek 19: Stabilní vs. q-spínaný mode-locking [15]

Ke generaci q-spínaných mode-lockingových impulsů dochází z důvodu nedostatečného vnitrorezonátorového výkonu. Při dostatečném vnitrorezonátorovém výkonu vzniklé laserové záření saturuje, jak aktivní prostředí, tak saturevatelný absorbér, tedy se bude konat mode-locking (saturevatelný absorbér může synchronizovat módy) a bude stabilní (to zajistí saturace aktivního prostředí). Pokud je vnitrorezonátorový výkon menší než určitá hodnota - nazvěme ji prahovým vnitrorezonátorovým výkonem, pak dochází sice k saturaci absorbéru, tj. dochází ke generaci mode-lockingových impulsů, ale nedochází k saturaci aktivního média, tedy zesílení průchozích impulsů není omezeno koncentrací aktivních iontů, ale dodaným čerpacím výkonem. Impulsy jsou nejdříve v aktivním prostředí neomezeně zesilovány - v této fázi mají generované mode-lockingové impulsy vysoký špičkový výkon, ale po určité době již impulsy vyčerpají množství dodaného čerpacího výkonu, aktivní prostředí nezesiluje a impulsy vlivem ztrát v rezonátoru ztrácejí svoji energii a po určité době zaniknou. Impulsy se začnou generovat až v dalším čerpacím „období“.

Prahový vnitrorezonátorový výkon stabilního mode-lockingu získáme ze vztahu [15]

$$P^2 > F_{sat,AM} F_{sat,SA} \Delta R \frac{A_{ef,AM} A_{ef,SA}}{\tau^2}, \quad (88)$$

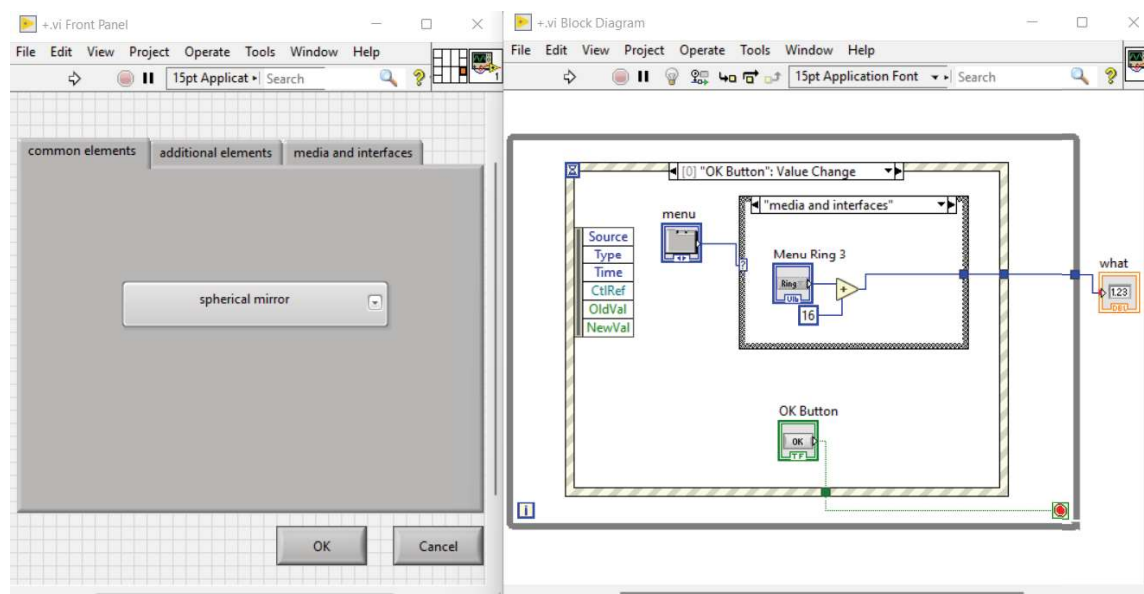
kde $F_{sat,AM}$ je saturační hustota energie aktivního média, $F_{sat,SA}$ je saturační hustota energie saturevatelného absorbéru, ΔR je saturační hloubka, $A_{ef,AM}$ a $A_{ef,SA}$ jsou účinné plochy aktivního média, respektive saturevatelného absorbéru a τ je doba oběhu rezonátoru.

2 Použité nástroje

2.1 LabVIEW

Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench či LabVIEW je grafické programovací prostředí vytvořené firmou NI (National Instrument). Jeho první spuštění se odehrálo v roce 1986. [16]

LabVIEW umožňuje vytvořit program (v LabVIEW ho nazýváme VI soubor) i s jeho grafickým rozhraním. Jeden VI soubor se skládá z „front panelu“ a „block diagramu“ (obrázek 20). Ve front panelu se tvoří pomocí tlačítek, páček, přepínačů atd. grafické rozhraní, zatímco v block diagramu (což je obdoba vývojového prostředí) samotný program - na rozdíl od klasických vývojových prostředí není zdrojový kód reprezentován textem, ale pomocí grafických struktur - tím je zajištěna větší přehlednost.



Obrázek 20: Grafické programovací prostředí LabVIEW - front panel (vlevo) a block diagram (vpravo)

Největším přínosem prostředí LabVIEW je jeho schopnost sběru a analýzy dat z široké palety měřících přístrojů (např. osciloskop).

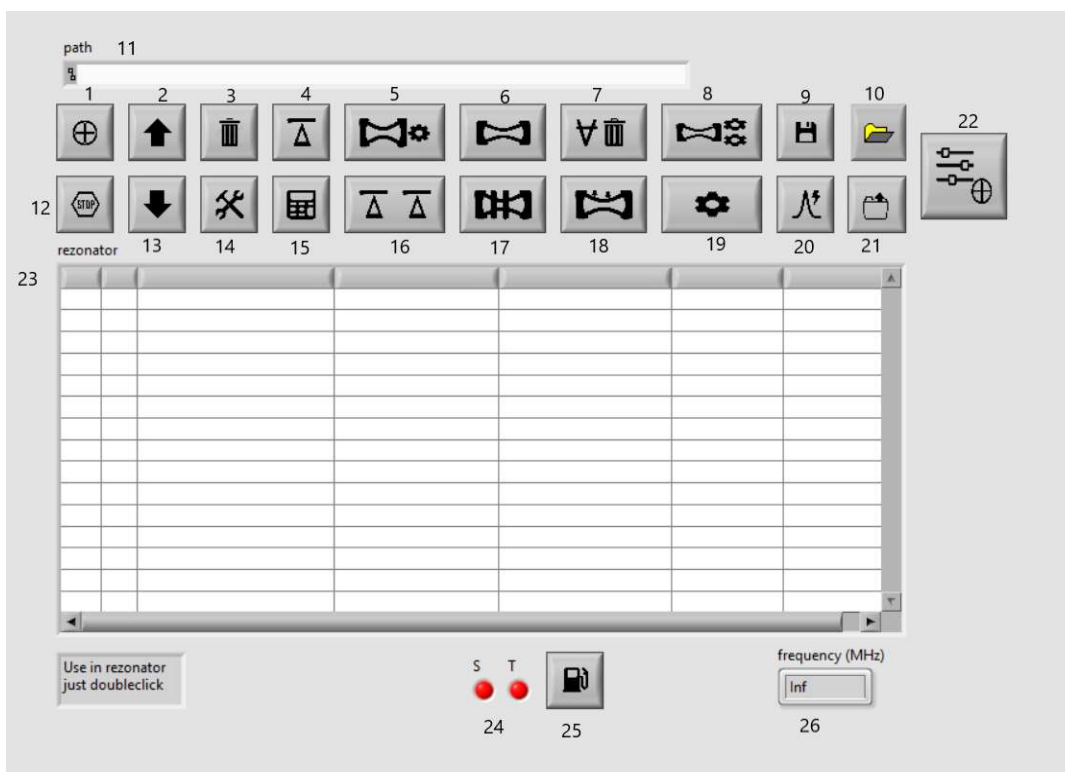
LabVIEW v sobě obsahuje rozsáhlou matematickou knihovnu. Je zastoupena každá elementární operace. Pro náš program bylo podstatné, že v matematické knihovně se vyskytují i operace z lineární algebry, tedy i součin matic a jiné s maticovým počtem úzce související operace. ABCD formalismus jde v prostředí LabVIEW dobře do programu implementovat.

3 Praktická část

Nyní se seznámíme s výsledným programem bakalářské práce, který byl vytvořen na základě poznatků vysvětlených v teoretické části.

3.1 Základní okno programu

Po otevření programu uživatel uvidí základní okno programu:



Obrázek 21: Úvodní obrazovka s očíslovanými tlačítky

Celému oknu dominuje list optických elementů rezonátoru (na obrázku s číslem 23). Pod ním se nachází kontrola stability (24) a indikátor opakovací frekvence rezonátoru (25). Funkce jednotlivých tlačítek jsou uvedeny v tabulce 1 a budou podrobněji popsány v následujících podkapitolách.

3.2 Základní funkce programu

Přidat element

Klikneme-li na tlačítko přidat element (1), objeví se okno se seznamem dostupných elementů, které jsou rozděleny na tři hlavní skupiny: běžné elementy, mimořádné elementy a média a rozhraní.

Běžné elementy: sférické zrcadlo, volný prostor, indexové prostředí s kolmými hranami (vůči optické ose), rovinné zrcadlo, tenká čočka, zkosený krystal, pootočená

1	Přidat element
2	Přesunout element o jedno pole vzhůru
3	Odstranit element
4	Stabilita rezonátoru v závislosti na jednom parametru
5	Poloměr svazku v závislosti na jednom parametru
6	Poloměr svazku napříč optickým rezonátorem
7	Odstranit všechny elementy
8	Poloměr svazku v závislosti na dvou parametrech
9	Uložit soubor
10	Uložit soubor jako
11	Indikátor cesty souboru
12	Ukončit program
13	Přesunout element o jedno pole dolů
14	Upravit element
15	Výpočet parametrů šíření gaussovského svazku
16	Stabilita rezonátoru v závislosti na dvou parametrech
17	Poloměr svazku napříč vybraným elementem
18	Poloměr svazku na tenkých elementech
19	Nastavení
20	Výpočet prahového vnitrorezonátorového výkonu pro stabilní mode-locking
21	Načíst soubor
22	Přidat jednoparametrický měnič
25	Výpočet překryvu laserového svazku s čerpacím svazkem

Tabulka 1: Popis tlačítek programu

destička, brewsterovsky zkosený krystal a brewsterovsky pootočená destička.

Mimořádné elementy: uživatelem zadaná přenosová matice elementu, který se chová totožně v tangenciální a sagitální rovině, uživatelem zadané přenosové matice tangenciální a sagitální roviny nesymetrického elementu, termální čočka, tlustá čočka, tangenciální cylindrická čočka a sagitální cylindrická čočka.

Média a rozhraní: prostor naplněný médiem, kolmé rozhraní, brewsterovsky natočené rozhraní, natočené rozhraní a sféricky zakřivené rozhraní.

Po výběru elementu a kliknutí na tlačítko „OK“, v případě elementů s parametry (například index lomu, délka, úhel natočení) se objeví další okno, ve kterém jsou uživatelem parametry zadány. Element se automaticky přidá automaticky na konec listu optických elementů.

Přesunout element o jedno pole vzhůru

Po výběru elementu z listu dvojklikem a následném kliknutí na tlačítko přesunout element o jedno pole vzhůru (2) si vybraný element vymění svoji pozici s elementem o jedno pole výš.

Přesunout element o jedno pole dolů

Po výběru elementu listu dvojklikem a následném kliknutí na tlačítko přesunout element o jedno pole dolů (13) si vybraný element vymění svoji pozici s elementem o jedno pole níž.

Ukončit program

Po kliknutí na tlačítko ukončit program (12) se program ukončí. Pozor, fce není spojená s uložením, tedy veškerá neuložená data budou ztracena.

Odstranit element

Po výběru elementu z listu dvojklikem a následném kliknutí na tlačítko odstranit element (3) bude vybraný element odstraněn z listu.

Upravit element

Po výběru elementu z listu dvojklikem a následném kliknutí na tlačítko upravit element (14) se objeví stejná po sobě následující okna pro výběr elementu a úpravu jeho parametrů jako v případě přidání elementu. Po vyplnění bude vybraný element nahrazen zadaným elementem.

Odstranit všechny elementy

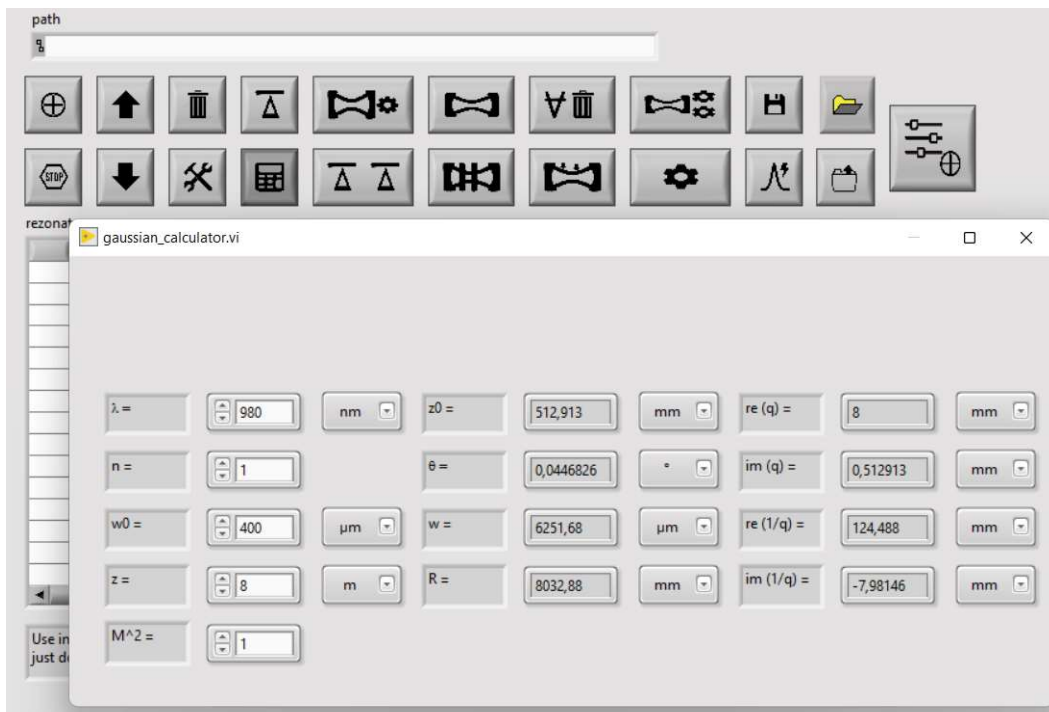
Po kliknutí na tlačítko odstranit všechny elementy (7) budou všechny elementy odstraněny z listu.

Výpočet parametrů šíření gaussovského svazku

Po kliknutí na tlačítko výpočet parametrů gaussovského svazku se otevře okno zobrazené na obrázku 22. V závislosti na zadaných vstupních parametrech gaussovského svazku - vlnová délka záření, index lomu prostředí, ve kterém se svazek šíří, poloměr svazku v krčku, parametr kvality a na zadané vzdálenosti od krčku program vypočítá parametry šíření gaussovského svazku - Rayleighova vzdálenost, úhel divergence a poloměr křivosti plochy konstantní fáze.

Nastavení

Po kliknutí na tlačítko nastavení (19) se zobrazí okno (viz obrázek 23), ve kterém uživatel zadá vlnovou délku záření uvnitř rezonátoru (v základním nastavení je zvolená



Obrázek 22: Podokno pro výpočet parametrů šíření gaussovského svazku

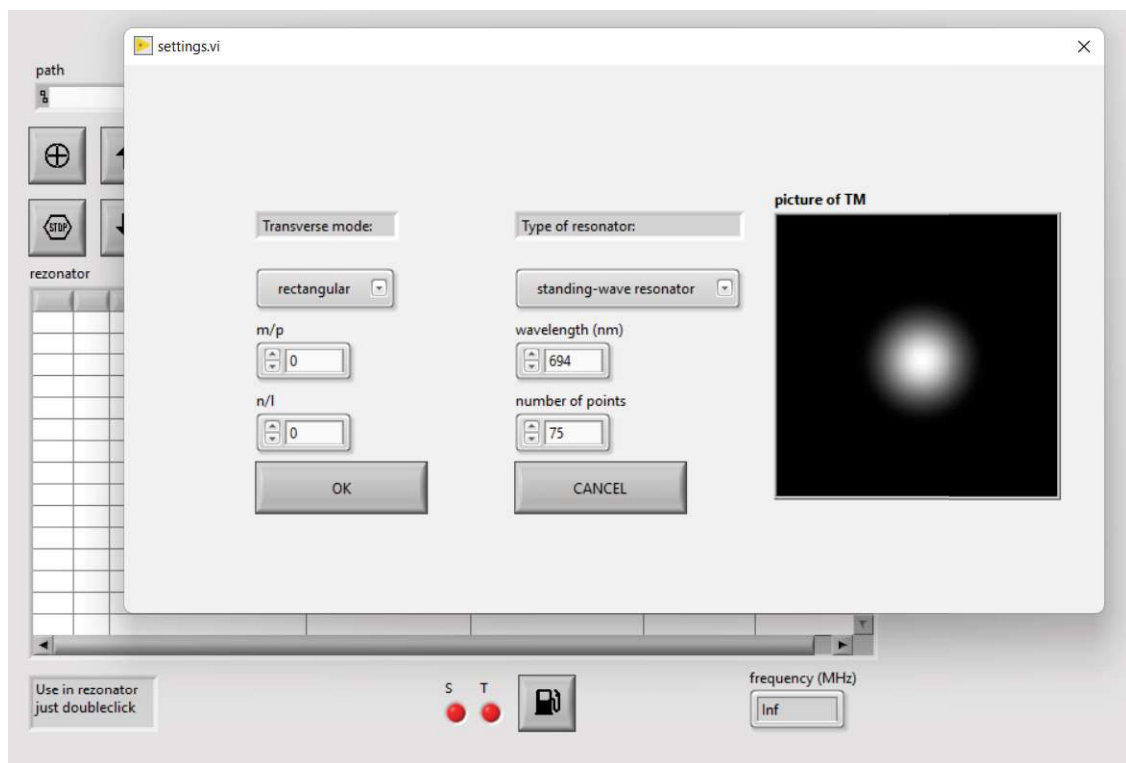
$\lambda = 694 \text{ nm}$), o jaký druh rezonátoru se jedná, tj. zda-li se jedná o rezonátor stojatovlnný či kruhový a s jakým počtem bodů chce vykreslovat grafy, tedy s jakou přesností bude uživatel chtít znát výsledky, které mu program poskytne. Zároveň si uživatel v tomto okně zvolí příčný mód svazku, který chce pozorovat.

Uložit soubor jako

Po kliknutí na tlačítko uložit soubor jako (10) se zobrazí okno, ve kterém uživatel vyplní kam a pod jakým jménem chce uživatel rezonátor jako textový soubor uložit. Cesta k textovému souboru se zobrazí na indikátoru 11.

Uložit soubor

Po kliknutí na tlačítko uložit soubor (9) se můžou stát dvě události. Pokud je indikátor cesty souboru (11) prázdný, pak tlačítko bude fungovat stejně jako tlačítko uložit soubor jako (10). Pokud ale bude v indikátoru cesta k souboru, potom se daný soubor přepíše tak, že v něm bude zaznamenána aktuální konstelace rezonátoru, jak je uveden v programu.



Obrázek 23: Podokno pro nastavení základních parametrů gaussovského svazku uvnitř rezonátoru

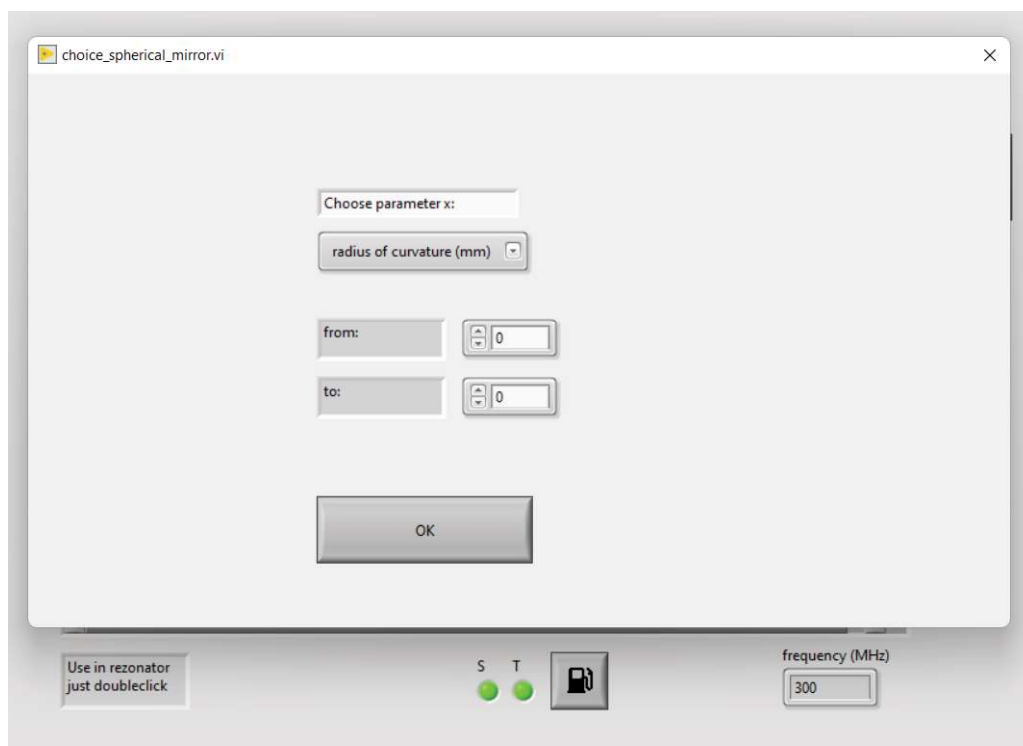
3.3 Pokročilé funkce programu

Stabilita rezonátoru v závislosti na jednom parametru

Po výběru elementu z listu dvojklikem a následném kliknutí na tlačítko stabilita rezonátoru v závislosti na jednom parametru (4) se zobrazí okno (viz obrázek 24), ve kterém uživatel zvolí parametr vybraného elementu, v jehož závislosti chce zkoumat stabilitu a v jakém intervalu jeho hodnot chce stabilitu rezonátoru počítat. Stabilitu v závislosti na parametru nelze počítat, pokud vybraným elementem je rovinné zrcadlo či kterékoliv rozhraní. Po kliknutí na tlačítko „OK“ se zobrazí graf s vypočtenými hodnotami stability v závislosti na zvoleném parametru. V grafu jsou vyznačené hranice stability.

Poloměr svazku v závislosti na jednom parametru

Po výběru elementu z listu dvojklikem a následném kliknutí na tlačítko poloměr svazku v závislosti na jednom parametru (5) se zobrazí okno stejné jako při výpočtu stability v závislosti na jednom parametru (viz obrázek 24). Opět platí, že poloměr svazku v závislosti na parametru nelze počítat, pokud vybraným elementem je rovinné zrcadlo či kterékoliv rozhraní. Po kliknutí na tlačítko „OK“ se zobrazí okno s seznamem optických elementů v rezonátoru, z nichž si uživatel vybere, u kterého chce poloměr svazku počítat, následně se zobrazí graf (viz obrázek 25) s vypočtenými hodnotami poloměru svazku v závislosti na zvoleném parametru. V grafu je k přesnému odečtu



Obrázek 24: Podokno pro výpočet stability v závislosti na jednom parametru

hodnot poloměru k dispozici kurzor.

Poloměr svazku na tenkých elementech

Po kliknutí na tlačítko poloměr svazku na tenkých elementech (18) se uživateli zobrazí okno s listem, ve kterém jsou uvedeny poloměry svazku na všech tenkých elementech.

Poloměr svazku napříč optickým rezonátorem

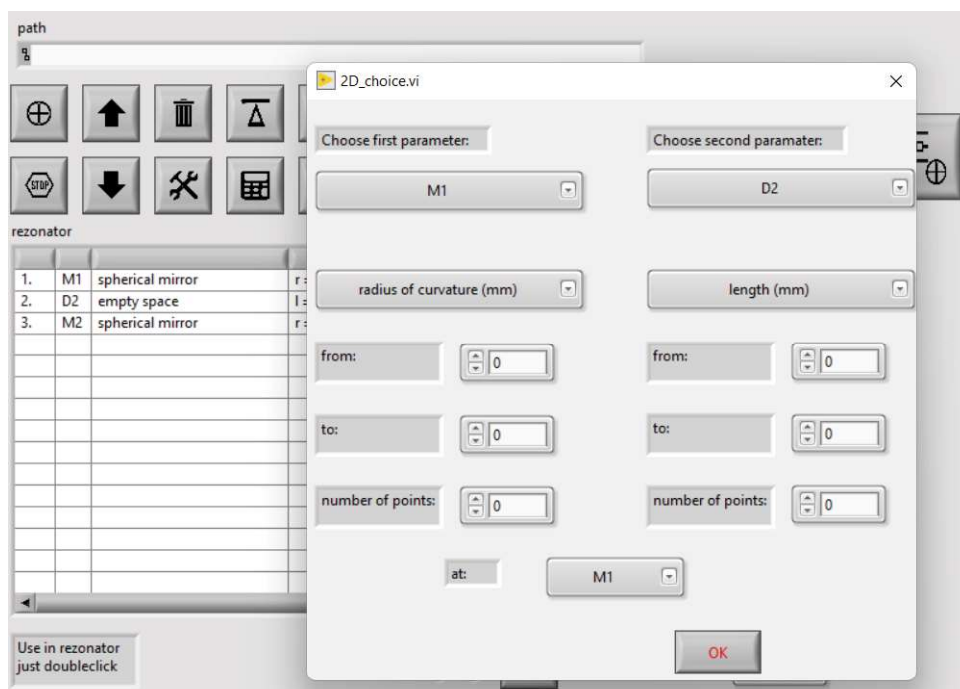
Po kliknutí na tlačítko poloměr svazku napříč optickým rezonátorem (6) se uživateli zobrazí graf závislosti poloměru laserového svazku napříč všemi optickými elementy. V grafu jsou vyznačeny hranice jednotlivých elementů a k dispozici jsou dva kurzory - jeden pro poloměr v tangenciální rovině, druhý v sagitální (viz obrázek 26).

Poloměr svazku napříč vybraným elementem

Po výběru elementu dvojklikem z listu a následném kliknutí na tlačítko poloměr svazku napříč vybraným elementem nastanou v závislosti na tom, zda se jedná o zanedbatelně tlustý element, mohou stát dvě situace. V případě, že se jedná o tenký element pak vzniklá situace bude naprosto stejná jako v případě, že bylo stisknuto tlačítko poloměr svazku na tenkých elementech (18). Pokud byl vybrán zanedbatelně tlustý element, pak se objeví graf závislosti poloměru svazku na pozici v elementu.

Poloměr svazku v závislosti na dvou parametrech

Po kliknutí na tlačítko poloměr svazku v závislosti na dvou parametrech (8) se zobrazí okno (viz obrázek 27), ve kterém uživatel zadá 2 parametry, na nichž chce znát závislost poloměru svazku. Vymezí jejich hranice a zadá počet bodů, pro kolik hodnot má být pro daný parametr vypočítaný poloměr. Toto není nastavitelné v nastavení z důvodu, že pro základní hodnotu v nastavení by tato funkce byla programem počítána příliš pomalu, doporučuje se uživateli, aby součin počtu bodů u obou parametrů nepřesáhl hodnotu 200. Také uživatel vybere, u kterého elementu chce poloměr nechat vypočítat. Po kliknutí na tlačítko „OK“, se zobrazí 3D graf, který lze přepnout na dvouosý barevný graf, kde je se hodnota poloměru určuje pomocí barevné legendy.



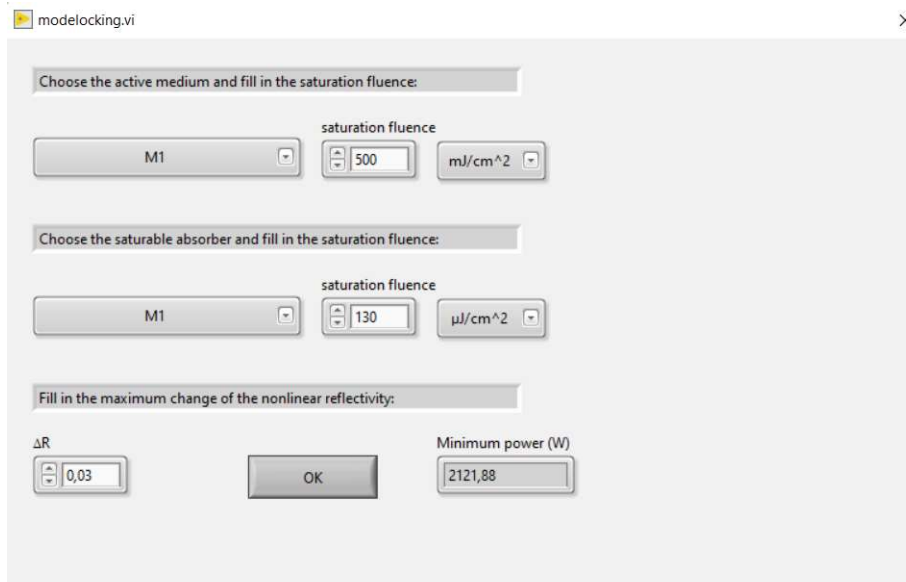
Obrázek 27: Okno pro výběr dvou parametrů pro výpočet poloměru svazku na nich závislém.

Stabilita rezonátoru v závislosti na dvou parametrech

Po kliknutí na tlačítko stabilita rezonátoru v závislosti na dvou parametrech (16) se zobrazí okno stejně jako v předchozí funkci (obrázek 27), ve kterém uživatel zadá opět 2 parametry, na nichž chce znát závislost poloměru svazku. Vymezí jejich hranice a zadá počet bodů, pro kolik hodnot má být pro daný parametr vypočítaný poloměr. Tentokrát uživatel nevybírání polohu, kde se bude počítat stabilita, neboť pokud je rezonátor stabilní v jednom bodě, pak bude stabilní v celém rezonátoru. Po kliknutí na tlačítko „OK“, se zobrazí dvouosý barevný graf, kde je se hodnota poloměru určuje pomocí barevné legendy a který lze přepnout na 3D graf. Bílá místa v dvouosém grafu znamenají, že v nich je rezonátor nestabilní.

Výpočet prahového vnitrorezonátorového výkonu pro stabilní mode-locking

Po kliknutí na tlačítko výpočet prahového vnitrorezonátorového výkonu pro stabilní mode-locking (20) se otevře okno, které je zobrazeno na obrázku 28. Zde uživatel vybere, které elementy v rezonátoru reprezentují aktivní médium a saturevatelný absorber, zadá jejich saturační hustoty energie a hloubku modulace saturevatelného absorberu. Po kliknutí na tlačítko „OK“ se mu zobrazí výsledek na indikátoru vpravo od tlačítka „OK“.



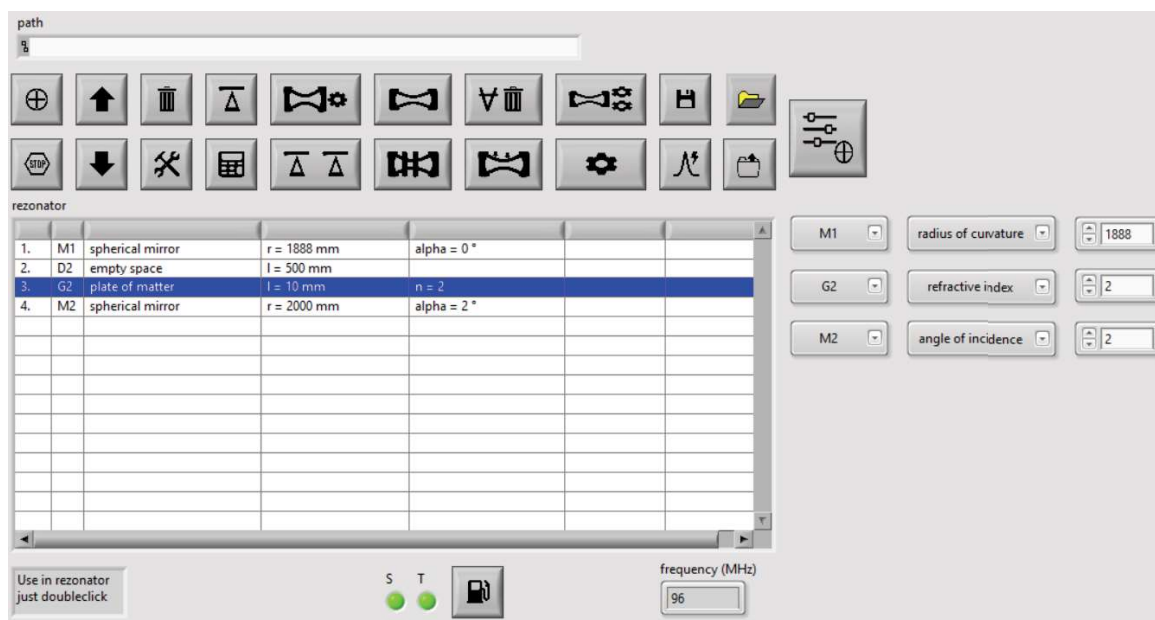
Obrázek 28: Okno pro výpočet prahového vnitrorezonátorového výkonu pro stabilní mode-locking

Přidat jednoparametrický měnič

Po kliknutí na tlačítko přidat jednoparametrický měnič (22) se na úvodní obrazovce uživateli umožní změnit jeden vybraný parametr při chodu programu - objeví se tzv. jednoparametrický měnič. Změna jednoho parametru je zde jednodušší než pomocí tlačítka upravit element. V případě, že uživatel má za běhu programu otevřený buď graf poloměru svazku napříč rezonátorem, nebo napříč elementem, či list vypočítaných poloměrů svazku na tenkých elementech, pak se dle zadané hodnoty v měniči graf upraví. Při opětovném kliknutí na tlačítko 22 se objeví další jednoparametrický měnič (viz obrázek 29), který lze používat paralelně s prvním měničem. Celkově lze vygenerovat osm jednoparametrických měničů.

Výpočet překryvu laserového svazku s čerpacím svazkem

Po kliknutí na tlačítko výpočet překryvu laserového svazku s čerpacím svazkem se zobrazí okno se dvěma kartami - jedna karta umožňuje uživateli vypočítat překryv při podélném čerpání laserovou diodou skrz zrcadlo přes čočku v závislosti na její vzdálenosti od diody a zrcadla. Uživatel musí dovyplnit její ohniskovou vzdálenost,



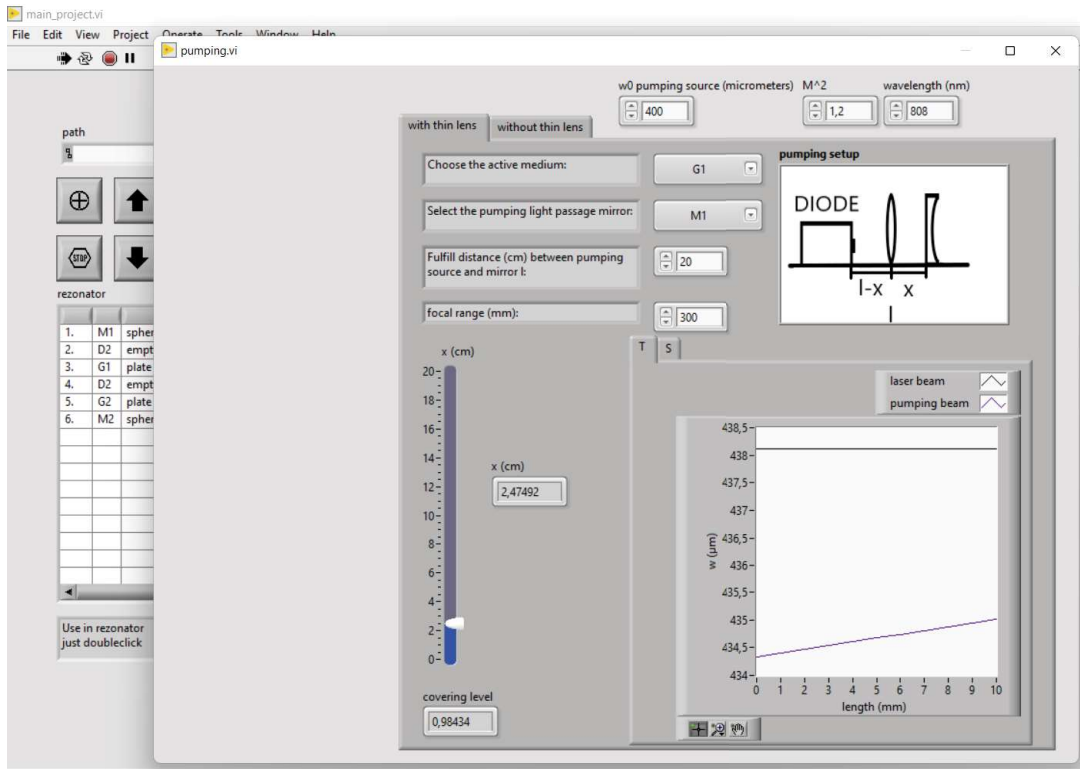
Obrázek 29: Jednparametrické měniče

poloměr krčku čerpacího svazku, parametr kvality čerpacího svazku a jeho vlnovou délku. (viz obrázek 30)

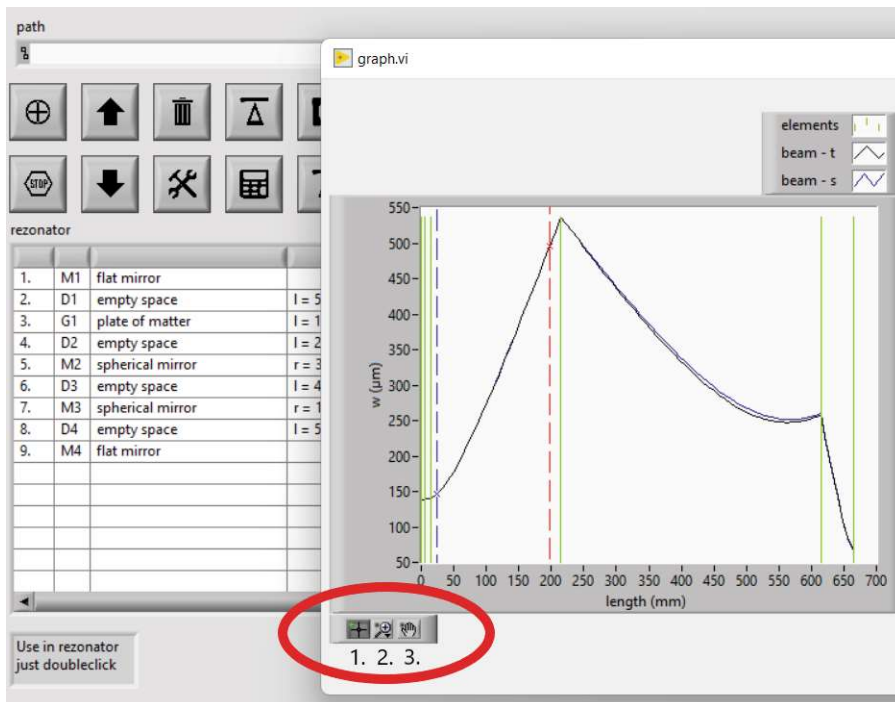
Druhá karta poskytuje uživateli výpočet překryvu bez čočky mezi diodou a zdrojem v závislosti na vzdálenosti zdroje od krajního zrcadla. (viz obrázek 31).

3.4 Nástroje grafu

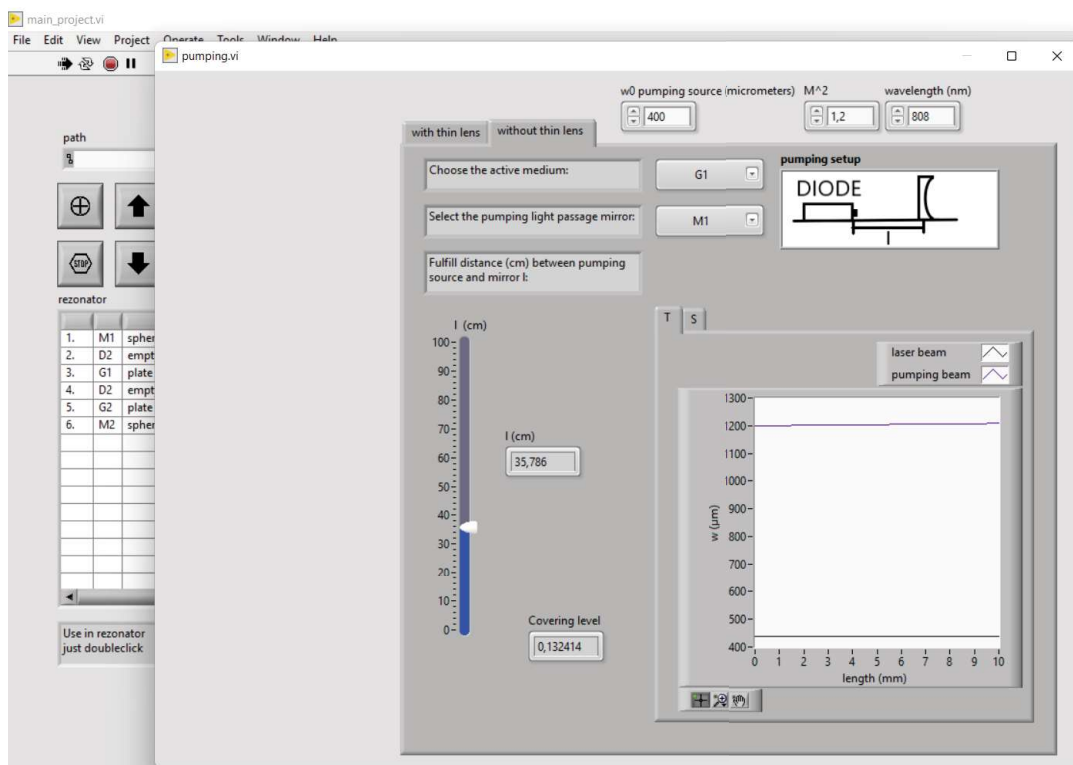
Každý 2D graf má ve svém levém dolním rohu nástroje - sadu tří tlačítek, pomocí nichž může uživatel programu detailně analyzovat vykreslený graf (viz obrázek 32).



Obrázek 30: Výpočet překryvu svazku s čočkou mezi krajním zrcadlem a laserovou diodou.

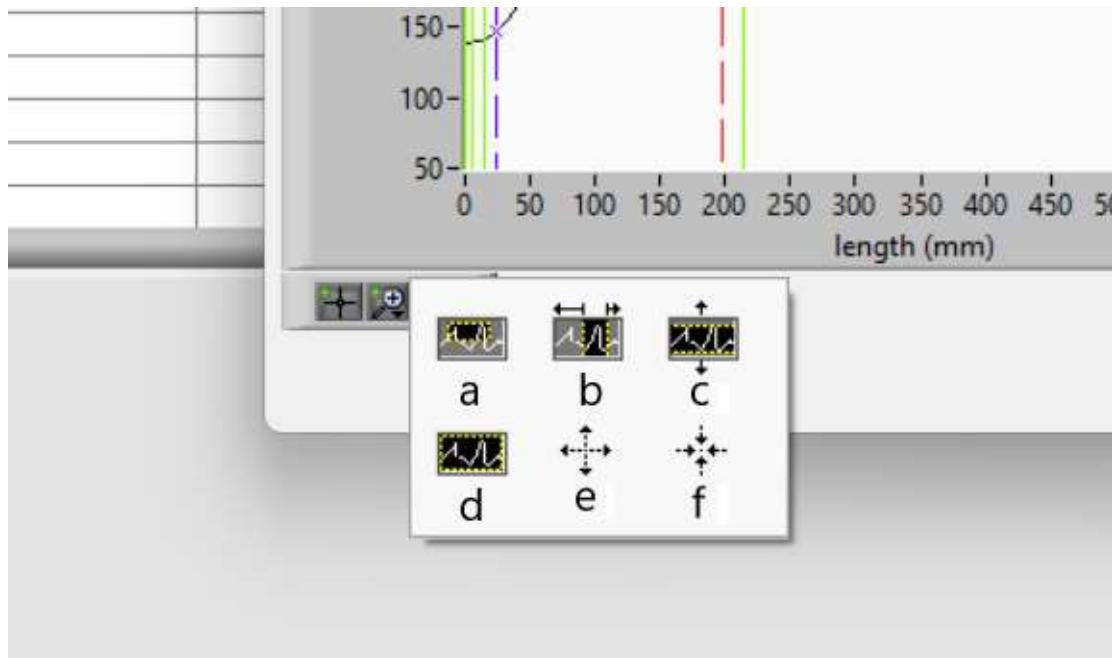


Obrázek 32: Graf s vyznačenou paletou nástrojů s očíslovanými tlačítky.



Obrázek 31: Výpočet překryvu čerpacího svazku bez čočky mezi krajním zrcadlem a laserovou diodou

Tlačítko 1 slouží pro manipulaci s kurzory. Po kliknutí na tlačítko 2 vyskočí nabídka znázorněná na obrázku 33 s 6 tlačítky. Tlačítko *a* vytvoří uživateli možnost označit pomocí myši určitou část grafu, která bude následně zvětšena. Tlačítka *b* a *c* fungují stejně jako *a* avšak oblast je buď v horizontální (v případě tlačítka *c*) nebo ve vertikální ose (v případě tlačítka *b*) neomezená, tj. obsahuje celou šíři zobrazeného grafu a uživateli umožňuje definovat pouze šířku respektive výšku oblasti. Tlačítko *d* slouží k návratu do základního zobrazení grafu, tj. křivka je zobrazena tak, aby její mezní hodnoty byly na krajích okna. Tlačítko *e*, respektive *f* slouží k zvětšení, respektive ke zmenšení v místě, na které bylo kliknuto myší.



Obrázek 33: Zobrazená nabídka po kliknutí na tlačítko 2 v nástrojích grafu.

3.5 Příklad

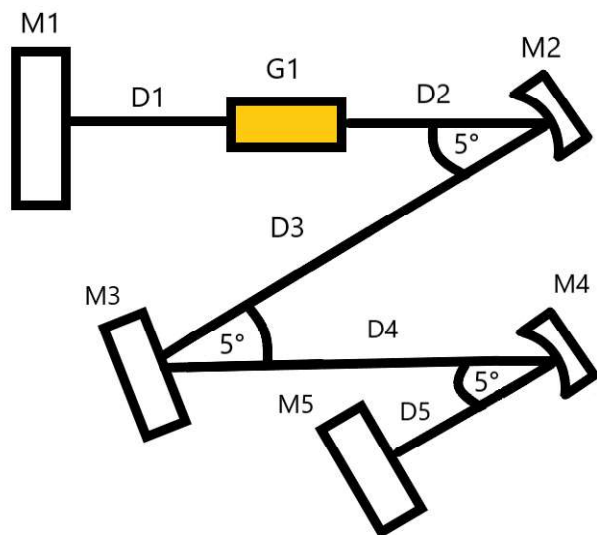
V této kapitole vyřešíme praktický příklad dvěma způsoby - jednak programem vytvořeným v rámci této bakalářské práce, jednak programem reZonator, který je komerčně dostupný [17] a běžně užívaný.

Zadání:

Mějme rezonátor zobrazený na obrázku 34 s elementy: M_1 , M_3 , M_5 - rovinná zrcadla, M_2 - kulové zrcadlo duté s poloměrem křivosti 200 mm, M_4 - kulové zrcadlo duté s poloměrem křivosti 100 mm, D_1 - volný prostor o délce 2 mm, D_2 - volný prostor o délce 104 mm, D_3 - volný prostor o délce 400 mm, D_4 - volný prostor o délce 700 mm, D_5 - volný prostor o délce 53 mm a G_1 - aktivní médium Nd:YVO₄, o délce 10 mm. ($\lambda = 1064$ nm, $n=1,94$ [18]) Vypracujte následující úkoly:

1. Určete, jak se bude vyvíjet poloměr základního příčného módu v aktivní médiu.
2. Určete, jak se bude vyvíjet poloměr základního příčného módu v celém rezonátoru.
3. Určete, pro jaký rozsah délek D_2 bude rezonátor stabilní.
4. Určete, pro jaký rozsah poloměru křivosti a úhlu natočení M_2 bude rezonátor stabilní.
5. Určete, jak se bude vyvíjet poloměr základního příčného módu na elementu M_1 v závislosti na délkách volných prostorů D_2 a D_3 .

6. Určete, jak se bude vyvíjet poloměr příčného módu TEM_{21} s kruhovou symetrií v celém rezonátoru.
7. Najděte vzdálenost spojné čočky s ohniskovou vzdáleností 15 mm od zrcadla M1 tak, aby svazek emitovaný laserovou diodou měl co nejlepší překryv se svazkem základního příčného módu uvnitř rezonátoru. Laserová dioda pracuje na absorpční vlnové délce krystalu Nd:YVO₄ $\lambda = 808$ nm [18], je ve vzdálenosti 100 mm od zrcadla M1 a její svazek má následující vlastnosti: M^2 je roven 8 a poloměr svazku v krčku je 200 μ m.
8. Určete prahový vnitrorezonátorový výkon, aby bylo dosaženo stabilního mode-lockingu. Uvažujte satureovatelný absorbér SAM od firmy BATOP na zrcadle M5 se zanedbatelnou délkou, s hloubkou modulace 0,012 a se saturační hustotou energie 90 μ J/cm² [19]. Saturační hustota energie Nd:YVO₄ je 133 mJ/cm². Předpokládejte, že veškeré vyšší módy jsou v rezonátoru eliminovány.



Obrázek 34: Příkladový otevřený rezonátor

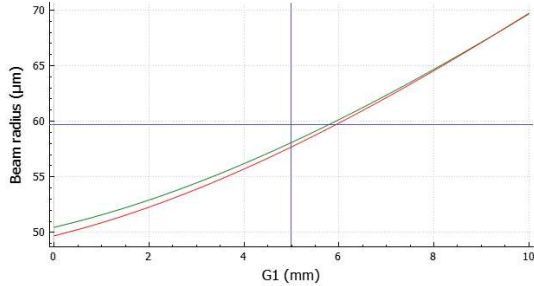
Řešení - srovnání programu reZonator s programem bakalářské práce

ReZonator: Nejprve jsme nastavili, že se bude jednat o stojato-vlnný rezonátor, poté jsme zadali do programu jednotlivé optické elementy s jejich parametry a upravili jsme vlnovou délku svazku na 1064 nm.

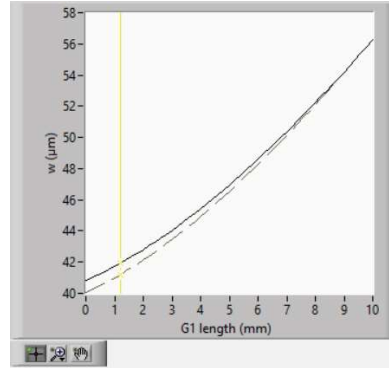
Program bakalářské práce: V nastavení byla zadána vlnová délka 1064 nm, zadali jsme, že se budeme zajímat o základní příčný mód a nastavili jsme počet bodů, ve kterých se budou počítat data do grafů, na 100. Poté jsme zadali do seznamu všechny optické elementy rezonátoru.

1. *ReZonator:* Po sestavení rezonátoru v programu jsme v nabídce funkce „Caustic“ vybrali element G1. Zobrazil se graf, který je na obrázku 35.

Program bakalářské práce: Po označení aktivního média v listu elementů, jsme spustili funkci „Poloměr svazku napříč vybraným elementem“, která zobrazila graf (viz obrázek 36).



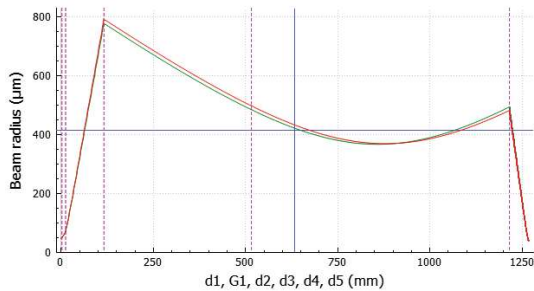
Obrázek 35: Průběh poloměru základního příčného módu v aktivním médiu - řešení úlohy 1 v programu reZonator.



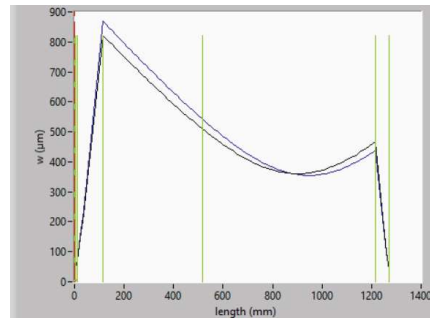
Obrázek 36: Průběh poloměru základního příčného módu v aktivním médiu - řešení úlohy 1 v programu bakalářské práce.

2. *reZonator*: Klikli jsme na tlačítko „Multirange Caustic“ a v nabídce jsme označili všechny elementy. Následně se zobrazil graf, jež je na obrázku 37.

Program bakalářské práce: Spuštěním funkce „Poloměr svazku napříč optickým rezonátorem“ se zobrazil graf, který je na obrázku 38.



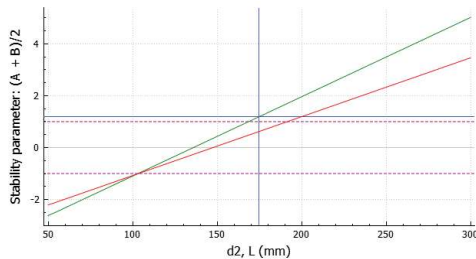
Obrázek 37: Průběh poloměru základního příčného módu v celém rezonátoru - řešení úlohy 2 v programu reZonator.



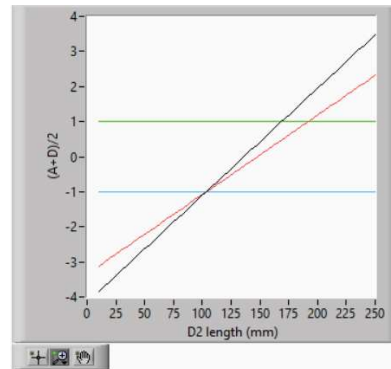
Obrázek 38: Průběh poloměru základního příčného módu v celém rezonátoru - řešení úlohy 2 v programu bakalářské práce.

3. *reZonator*: Po kliknutí na tlačítko „Stability Map“ jsme vybrali element D2 a zadali největší možný rozsah. Následně se zobrazil graf závislosti stability na délce D2, ze kterého jsme určili menší rozsah délek D2, tak abychom se přiblížili úseku, ve kterém je rezonátor stabilní, a také abychom zpřesnili hranice úseku. Tento menší rozsah délek jsme opětovně zadali do programu a vyšel nám graf, který je zobrazen na obrázku 39, ze kterého vyplývá, že rezonátor je stabilní pro interval délky D2 [100; 175] mm.

Program bakalářské práce: Uplatnili jsme stejný postup jako v případě programu reZonator. Vyšel graf, který je zobrazen na obrázku 40, ze kterého lze vyčíst, že rezonátor je stabilní, pokud délka elementu D2 se nachází v intervalu [103; 169] mm. Interval šlo určit přesněji, díky lepšímu nástroji zvětšování grafu, který program poskytuje.



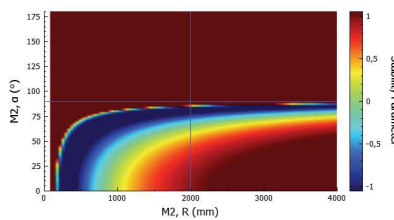
Obrázek 39: Mapa stability rezonátoru v závislosti na délce D2 - řešení úlohy 3 v programu reZonator.



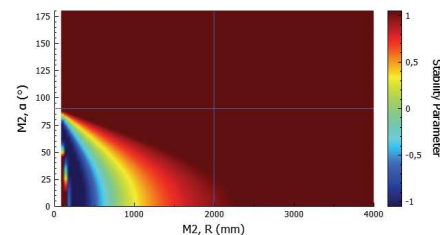
Obrázek 40: Mapa stability rezonátoru v závislosti na délce - řešení úlohy 2 v programu bakalářské práce.

4. *ReZonator:* V menu funkce „2D Stability Map“ jsme zadali parametry poloměr křivosti M2 a úhel natočení M2. Zobrazila se mapy stability, které jsou k vidění na obrázcích 41 a 42, ze kterých lze určit oblasti stability.

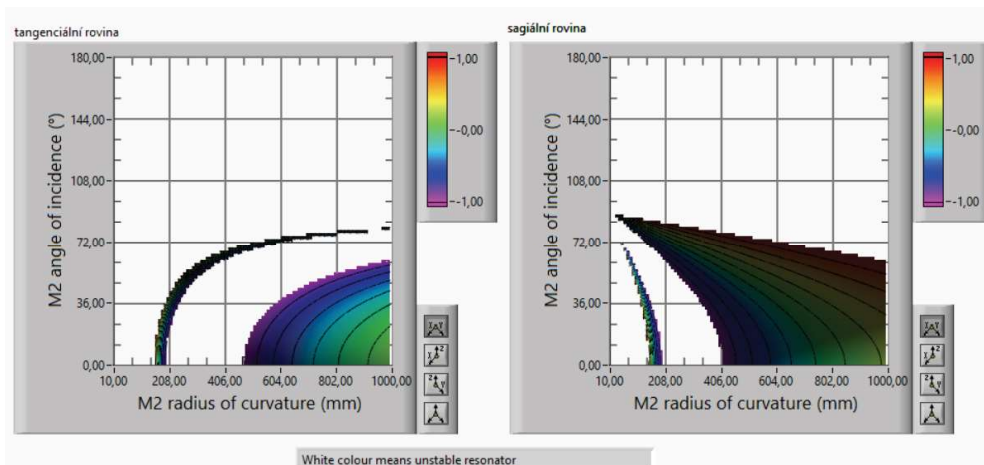
Program bakalářské práce: Po kliknutí na tlačítko „Stabilita rezonátoru v závislosti na dvou parametrech“ se zobrazilo okno, ve kterém byl zadán co nejširší rozsah obo parametrů, které byly zadány. Následně se zobrazil výsledný graf, který je zobrazen na obrázku 43.



Obrázek 41: 2D mapa stability rezonátoru v tangenciální rovině v závislosti na poloměru křivosti a úhlu natočení M2 - řešení úlohy 4 v programu reZonator.



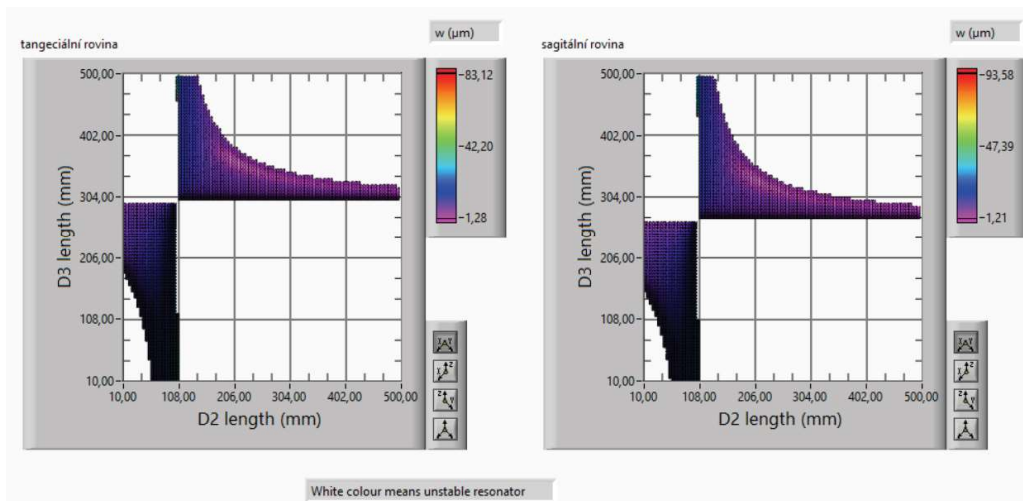
Obrázek 42: 2D mapa stability rezonátoru v sagitální rovině v závislosti na poloměru křivosti a úhlu natočení M2 - řešení úlohy 4 v programu reZonator.



Obrázek 43: 2D mapa stability rezonátoru v závislosti na poloměru křivosti a úhlu natočení M2 - řešení úlohy 4 v programu bakalářské práce.

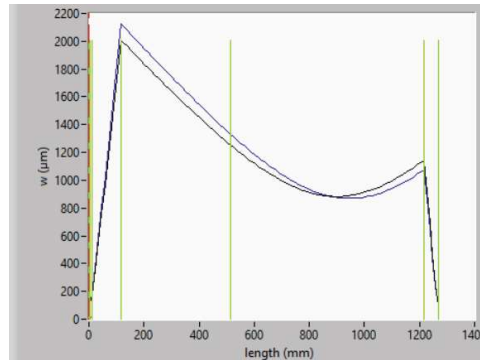
Ostatní úlohy nelze pomocí jedné funkce v programu reZonator udělat.

5. *Program bakalářské práce:* Po spuštění funkce „Poloměr svazku v závislosti na dvou parametrech“ jsme v menu vyplnili, o které parametry (ze zadání) se bude jednat a na kterém paramteru chceme poloměr svazku zkoumat. Poté se zobrazil graf (viz obrázek 44).



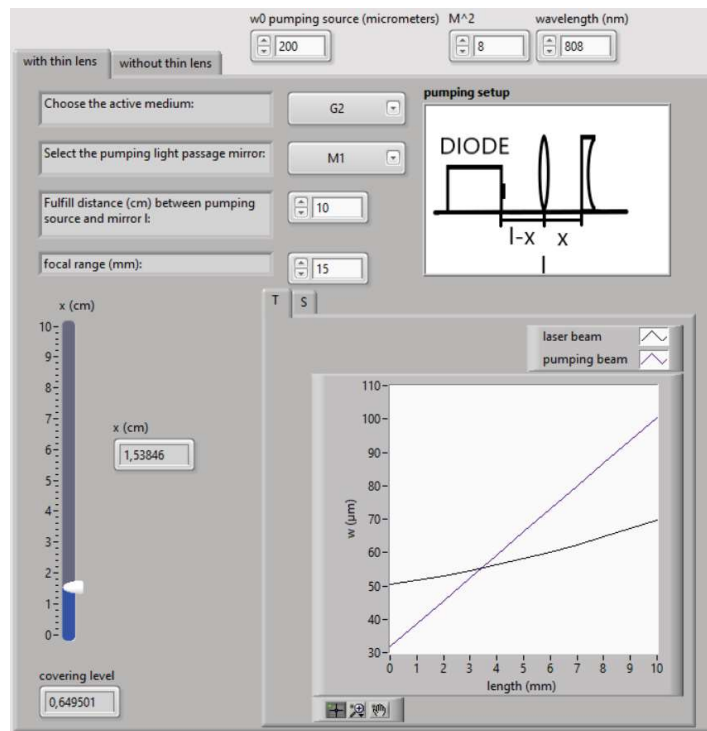
Obrázek 44: 2D mapa poloměru svazku na elementu M1 v závislosti na délkách volných prostorů D2 a D3 - řešení úlohy 5 v programu bakalářské práce.

6. *Program bakalářské práce:* V nastavení byl zadán mód TEM_{21} v kruhové symetrii. Následně po kliknutí na tlačítko „Poloměr svazku napříč optickým rezonátorem“ se zobrazil graf na obrázku 45.



Obrázek 45: Průběh poloměru módu TEM_{21} v kruhové symetrii v celém rezonátoru - řešení úlohy 6 v programu bakalářské práce.

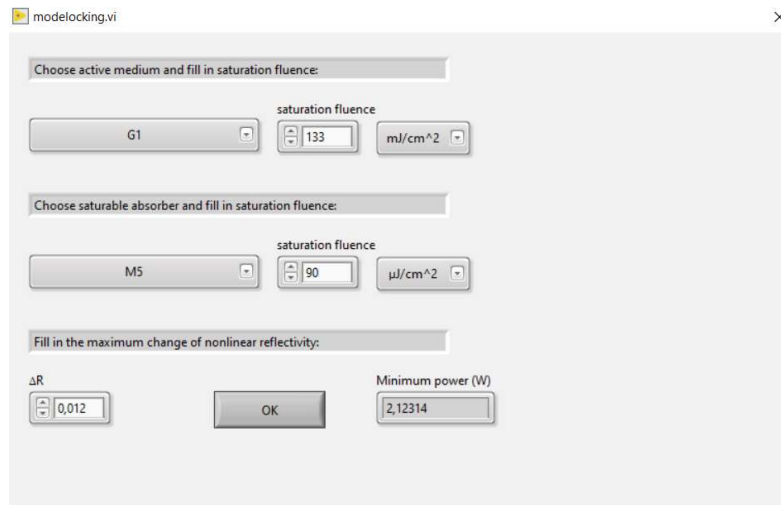
7. *Program bakalářské práce:* Před samotným úkolem jsme nastavili opět TEM_{00} v nastavení. Spuštěním funkce „Výpočet překryvu laserového svazku s čerpacím svazkem“ se objevilo okno, ve kterém jsme rozevřeli kartu „with thin lens“. Zadali jsme poloměr čerpacího svazku v krčku, jeho M^2 , ohniskovou vzdálenost čočky, vzdálenost diody od hraničního zrcadla a samotné hraniční zrcadlo. Přesouváme kurzor v levém dolním rohu okna jsme našli vzdálenost čočky od hraničního zrcadla, při které je překryv největší. Bylo to 1,5 cm.



Obrázek 46: Hledání umístění čočky pro co nejlepší překryv čerpacího svazku se základním příčným módem - řešení úlohy 7 v programu bakalářské práce.

8. *Program bakalářské práce:* Po spuštění funkce „Výpočet prahového vnitrore-

zonátorového výkonu pro stabilní mode-locking“ jsme vyplnili hodnotu hloubky modulace, saturační hustoty energie saturevatelného absorbéru a aktivního média a kliknuli na tlačítko „OK“. Hodnota prahového čerpacího výkonu byla stanovena programem na 2,1 W.



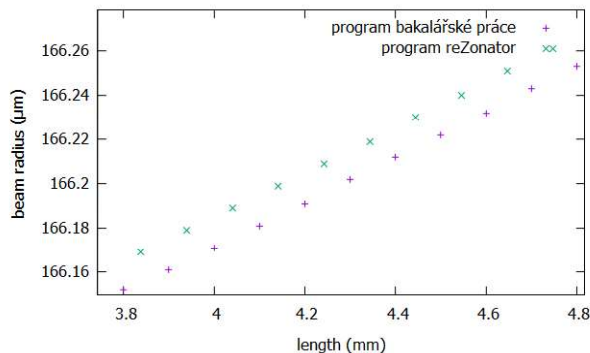
Obrázek 47: Výpočet prahového vnitrozónátorového výkonu - řešení úlohy 7 v programu bakalářské práce.

4 Diskuze

V této sekci srovnáme jednak na základě příkladu z předchozí kapitoly, jednak i na základě jiných zkušeností komerčně volně dostupný program reZonator a program této bakalářské práce.

Z příkladu řešeného v předchozí kapitole jednoznačně vyplývají funkční omezení programu reZonator - zde narážíme na úlohy 5 až 8. Úlohy 5, 6 a 8 nejsou řešitelné v programu reZonator. Úloha 7 by teoreticky řešit šla, kdybychom spustili program reZonator ve dvou oknech - v prvním bychom nastavili „single-pass resonator“, zadali optické elementy čerpací aparatury společně s hraničním zrcadlem a elementy rezonátoru, jimiž čerpací svazek projde; v druhém bychom nastavili „standing-wave resonator“ a zadali optické elementy samotného rezonátoru. Porovnáním hodnot poloměru svazků v aktivním médiu bychom si udělali obrázek o překryvu, pro posun čočky v rámci čerpací aparatury by bylo vždy zapotřebí změnit data o volných prostorech mezi čočkou, diodou a hraničním zrcadlem. Tento postup je ale v praxi těžkopádný, navíc tímto postupem bychom nezískali přesnou hodnotu překryvu.

Co se týče přesnosti výpočtu, relativní odchylka programu bakalářské práce od programu reZonator se pro stabilní rezonátory pohybuje řádově kolem tisícín procenta. Program tedy dosahuje celkem dobré přesnosti, jak je koneckonců vidět na grafu 48 - zde byl nastaven příklad výše tak, aby byl dostatečně vzdálen od hranic nestability.



Obrázek 48: Poloměr svazku v aktivním médiu - program bakalářské práce x reZonator

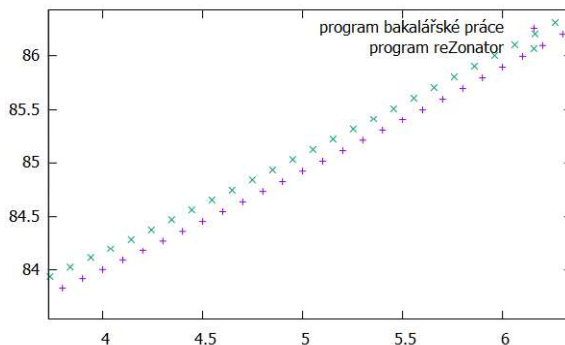
Přesnost ovšem klesá v okamžiku, kdy se rezonátor blíží k hranici nestability - pozorujeme pak při výpočtu poloměru svazku relativní odchylku od vypočtených dat z programu reZonator (viz obrázek 49) v řádech setin procent. Pokles přesnosti lze odůvodnit větší mírou zaokrouhlování programu bakalářské práce a tím pádem i vzniku větší nepřesnosti při počítání poloměru [20]. Toto je potřeba zohlednit při analýze grafů z příkladů výše, protože daný rezonátor v příkladu se právě na hranicích stability pohybuje.

Program bakalářské práce oproti programu reZonator dokáže vytvořit graf závislosti poloměru svazku na určitém elementu na dvou parametrech. Efektivita je trochu limi-

toována tím, že grafy nelze přiblížit a chybí kursory - ty se dají použít v programovacím prostředí LabVIEW jen v jistých typech 3D grafů (ne v případě obrysového grafu), ale jsou uživatelsky nepřívětivé. Naproti tomu v programu reZonator lze v případě obrysového grafu stability graf přiblížit a oddálit (pomocí kolečka myši) a kurzor je též k dispozici. Avšak nepochybnou výhodou programu bakalářské práce jsou oblasti nestability. Zatímco v reZonatoru kvůli spojitému spektru legendy nelze přesně vidět, ve které oblasti je rezonátor nestabilní, v programu bakalářské práce je pro oblasti nestability vyhrazena bílá barva.

Porovnáme-li seznam optických elementů, které jsou uživateli k dispozici, program reZonator jich nabízí více. Nicméně v praxi elementy navíc, kterými reZonator disponuje (např. médium GRIN), uživatel často nevyužije.

Listu optických elementů v programu reZonator chybí možnost upravit element - je sice možné změnit jeho parametry, ale není možné ho vyměnit za jiný. Zde je potřeba nejdříve daný element odstranit a poté přidat nový. V případě programu bakalářské práce je funkce upravit element k dispozici. Na druhou stranu program reZonator má hezké grafické zpracování optických elementů pod jejich listem.



Obrázek 49: Poloměr svazku v části aktivního média - program bakalářské práce x reZonator

5 Závěr

Seznámil jsem se s ABCD maticovým počtem a jeho základními vlastnostmi v geometrické optice - v teoretické části jsem nejprve poznal základní princip ABCD formalismu, definoval jsem si, co je to vektor paprsku, odvodil jsem si přenosové matice optických elementů, jež jsou hojně využívány v optických rezonátorech. Seznámil jsem se s největší výhodou ABCD formalismu - skládání optických elementů převedené na prosté násobení matic. Také jsem odvodil ABCD zákon pro šíření sférických vln. Nakonec jsem byl obeznámen i se stinnými stránkami ABCD formalismu - zejména nutnost předpokladu paraxiálního přiblížení a nemožnost aplikace na difrakční a interferenční jevy.

Seznámil jsem se s Gaussovským svazkem, jeho vlastnostmi a šířením v optickém prostředí popsaném ABCD maticí - objasnil jsem si původ Gaussova svazku jakožto řešení Collinsova integrálu aplikovaného na matici oběhu otevřeného rezonátoru. Zdefinoval jsem si základní parametry Gaussova svazku: poloměr svazku, divergence svazku, BPP - „beam parameter product“, poloměr zakřivení. Odvodil jsem si vztahy pro výpočet změn parametrů Gaussova svazku po průchodu prostředím popsaném ABCD maticí. Seznámil jsem se také s módy vyšších řádů v rezonátoru.

Naprogramoval jsem jádro programu pro šíření svazku uvnitř optického rezonátoru a vsadil jsem ho do uživatelsky přívětivého grafického rozhraní. Pracoval jsem v grafickém programovacím prostředí LabVIEW, které také umožňuje zasazení do grafického rozhraní.

Srovnal jsem vytvořený program s komerčně volně dostupným programem reZonator. V úlohách, které jsou schopny vyřešit oba dva programy mají každý své výhody a nevýhody, avšak program bakalářské práce dokáže navíc vyřešit úlohy: výpočet prahového vnitřního výkonu pro generaci stabilního pasivního mode-lockingu, výpočet poloměru svazku na daném optickém elementu, výpočet překryvu čerpacího svazku s laserovým svazkem v aktivním médiu pro dvě možné čerpací sestavy a výpočet poloměru svazku pro módy vyšších řádů.

Konstatuji tedy, že všechny body zadání byly splněny.

Reference

- [1] J. Schmidt, *Útržky z VOAFu*. 2021.
- [2] N. Hodgson and H. Weber, *Laser Resonators and Beam Propagation: Fundamentals, Advanced Concepts, Applications*, vol. 108. Springer, 2005.
- [3] ZEMAX, “Understanding tangential/sagittal in opticstudio and how to rotate rays.” <https://support.zemax.com/hc/en-us/articles/1500005488921-Understanding-tangential-sagittal-in-OpticStudio-and-how-to-rotate-rays>, Mar 2021. Online; accessed 2-April-2022.
- [4] I. Vyšín and J. Říha, *Paprsková a vlnová optika*. Univerzita Palackého v Olomouci, 2012.
- [5] J. Reichl, “Encyklopedie fyziky.” <http://fyzika.jreichl.com/main/article/view/474-konvence-znamenek-a-znaceni>, 2006. [Online; accessed 17-June-2022].
- [6] J. Mikulčák, B. Klimeš, J. Široký, V. Šůla, and F. Zemánek, *Matematické fyzikální a chemické tabulky pro střední školy*. Prometheus, 4. ed., 2008.
- [7] R. Paschotta, “Ring resonators.” <https://www.rp-photonics.com/ring-resonators.html>, Oct 2021. [Online; accessed 13-May-2022].
- [8] “Transfer matrices and abcd law.” http://www.optique-ingenieur.org/en/courses/OPI_ang_M01_C03/co/Contenu_04.html. [Online; accessed 20-June-2022].
- [9] P. Kulhánek, *TF4: Teorie elektromagnetického pole*, vol. 2020. AGA, 1 ed., 2020.
- [10] V. Kubeček, *Laserová technika 1, část I. Otevřené rezonátory*. 2021.
- [11] “Transverse mode.” https://en.wikipedia.org/wiki/Transverse_mode, Jun 2022. [Online; accessed 5-May-2022].
- [12] R. Paschotta, “Thermal lensing.” <https://www.rp-photonics.com/thermal-lensing.html>, Nov 2021. [Online; accessed 28-April-2022].
- [13] V. Kubeček, “Laserové systémy 2012(12las).” <https://people.fjfi.cvut.cz/kubecvac/LASYS%202012.htm>, 2012. [Online; accessed 11-April-2022].
- [14] W. Koechner, *Solid state laser engineering*. Springer, 1996.
- [15] C. Hönninger, R. Paschotta, F. Morier-Genoud, M. Moser, and U. Keller, “Q-switching stability limits of continuous-wave passive mode locking,” *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 16, pp. 46–56, Jan 1999.
- [16] Wikipedia contributors, “Labview — Wikipedia, the free encyclopedia.” <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=LabVIEW&oldid=1085394140>, 2022. [Online; accessed 12-May-2022].

- [17] N.I.Chunosov, “Download.” <http://www.rezonator.orion-project.org/?page=dload>, Feb 2022. [Online; accessed 18-September-2021].
- [18] R. Paschotta, “Vanadate lasers.” https://www.rp-photonics.com/vanadate_lasers.html, Oct 2021. [Online; accessed 11-May-2022].
- [19] BATOP, “Sam - 1064 nm.” <https://www.batop.de/products/saturable-absorber/saturable-absorber-mirror/saturable-absorber-mirror-1064nm.html>, Feb 2022. [Online; accessed 17-June-2022].
- [20] T. Oberhuber, “Tomas oberhuber’s homepage.” <https://geraldine.fjfi.cvut.cz/~oberhuber/node/num>. [Online; accessed 22-June-2022].