



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE  
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



# Matematické modelování proudění krve v cévách

## Mathematical modeling of blood flow through vessels

Bakalářská práce

Autor: **Jan Bureš**  
Vedoucí práce: **doc. Ing. Radek Fučík, PhD.**  
Konzultant: **MUDr. Mgr. Radomír Chabiniok, Ph.D.**  
Akademický rok: 2021/2022



## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student:	Jan Bureš
Studijní program:	Aplikace přírodních věd
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Studijní zaměření:	Matematické modelování
Název práce (česky):	Matematické modelování proudění krve v cévách
Název práce (anglicky):	Mathematical modeling of blood flow through vessels

### Pokyny pro vypracování:

- 1) Z dostupné literatury a konzultací s odborníky se seznámte s matematickým modelováním proudění v cévách s ohledem na problematiku paliativních napojení systémových žil do plicní cirkulace.
- 2) Sestavte a popište matematický model proudění krve v cévách.
- 3) Seznámte se s možnostmi numerického řešení daného matematického modelu s využitím mřížkové Boltzmannovy metody.
- 4) Pokuste se navrhnout a implementovat numerické schéma pro řešení proudění newtonovské tekutiny pro případ vhodně zvoleného, dvourozměrného zjednodušení uvažovaného modelu.

Doporučená literatura:

- 1) T. Krüger, et al., The lattice Boltzmann method. Springer International Publishing, 2017.
- 2) Z. Guo, S. Chang, Lattice Boltzmann method and its application in engineering. Vol. 3. World Scientific, 2013.
- 3) C. Peskin, The immersed boundary method. Acta Numerica 11, 2002.
- 4) Y. Delorme, K. Anupindi, A.-E. Kerlo, D. Shetty, M. Rodefeld, J. Chen, S. Frankel, Large eddy simulation of powered Fontan hemodynamics. Journal of Biomechanics 46, 2013, 408-422.
- 5) E. Rubtsova, A. Markov, S. Selishchev, J.H. Karimov, D. Telyshev, Mathematical modeling of the Fontan blood circulation supported with pediatric ventricular assist device. Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering 24, 2021, 653-662.
- 6) C. Wang, K. Pekkan, D. de Zélicourt, M. Horner, A. Parihar, A. Kulkarni, A. P. Yoganathan, Progress in the CFD modeling of flow instabilities in anatomical total cavopulmonary connections. Annals of Biomedical Engineering 35, 2007, 1840-1856.

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

Ing. Radek Fučík, Ph.D.

Katedra matematiky, FJFI ČVUT v Praze, Trojanova 13, 120 00 Praha 2

Jméno a pracoviště konzultanta:

MUDr. Mgr. Radomír Chabiniok, Ph.D.

Pediatric Cardiac MR Imaging Lab, Division of Pediatric Cardiology, University of Texas Southwestern Medical Center, 5323 Harry Hines Boulevard Dallas, Texas, USA,  
Radomir.Chabiniok@UTSouthwestern.edu

Datum zadání bakalářské práce: 31.10.2021

Datum odevzdání bakalářské práce: 7.7.2022

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

V Praze dne 21. října 2021

.....  
garant oboru

.....  
vedoucí katedry



.....  
děkan

*Poděkování:*

Chtěl bych zde poděkovat především svému školiteli doc. Ing. Radku Fučíkovi, PhD. za nesmírnou pečlivost, ochotu, trpělivost a odborné zázemí při vedení mé bakalářské práce. Dále děkuji svému konzultantovi MUDr. Mgr. Radomíru Chabiniokovi, Ph.D. za zájem a cenné připomínky týkající se medicínské problematiky této práce.

*Čestné prohlášení:*

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a uvedl jsem všechnu použitou literaturu.

V Praze dne 7. července 2022

Jan Bureš



*Název práce:*

**Matematické modelování proudění krve v cévách**

*Autor:* Jan Bureš

*Obor:* Matematické inženýrství

*Zaměření:* Matematické modelování

*Druh práce:* Bakalářská práce

*Vedoucí práce:* doc. Ing. Radek Fučík, PhD., Katedra matematiky, FJFI ČVUT v Praze Trojanova 13, 120 00 Praha 2

*Konzultant:* MUDr. Mgr. Radomír Chabiniok, Ph.D., Pediatric Cardiac MR Imaging Lab, Division of Pediatric Cardiology, University of Texas Southwestern Medical Center 5323 Harry Hines Boulevard Dallas, Texas, USA

*Abstrakt:* Tato práce se zabývá matematickým modelováním proudění nestlačitelné newtonovské tekutiny se zaměřením na modelování proudění krve v cévách. Hlavním cílem je implementace metody integrace tenzoru napětí pro výpočet síly ve dvourozměrném modelu a implementace různých okrajových podmínek pro tělesa se zakřivenou hranicí. Jsou představeny matematické modely proudění nestlačitelné newtonovské a neneutronovské tekutiny vhodné pro modelování proudění krve. K řešení matematického modelu je zvolena mřížková Boltzmannova metoda, která je stručně popsána. Praktická část demonstruje výsledky numerických simulací prováděných na testovací úloze, které jsou porovnány s referenčními hodnotami dostupnými z literatury. Dále je demonstrován implementovaný modul sloužící k diskretizaci křivek a následnému generování různých geometrií. Implementace metody integrace tenzoru napětí a okrajových podmínek byla úspěšná, získané výsledky odpovídají referenčním hodnotám.

*Klíčová slova:* interpolační okrajové podmínky, modelování proudění krve, mřížková Boltzmannova metoda, odporový koeficient, tenzor napětí, vztakový koeficient

*Title:*

**Mathematical modeling of blood flow through vessels**

*Author:* Jan Bureš

*Abstract:* This thesis deals with mathematical modeling of Newtonian incompressible fluid with focus on modeling of blood flow through vessels. The main goal is to implement force computation using stress integration method for 2D model and to implement various boundary conditions suitable for objects with curved boundary. The mathematical model of both Newtonian incompressible and non-Newtonian fluid is presented. The reader is introduced to the lattice Boltzmann method, which is later employed to solve the mathematical model. In the following part of the thesis the results of numerical simulations on a benchmark problem are presented and compared with the reference values from literature. The implemented module used to discretize curves and to generate different geometries is presented in the last part. The implementation of the stress integration method was successful, the obtained results are in accordance with the reference values.

*Key words:* drag coefficient, interpolated boundary conditions, lattice Boltzmann method, lift coefficient, modeling of blood flow, stress tensor





# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>10</b>
<b>1 Matematický model cévního proudění</b>	<b>12</b>
1.1 Rovnice proudění tekutin . . . . .	12
1.2 Tenzor napětí . . . . .	13
1.3 Klasifikace tekutin . . . . .	13
1.4 Empirické modely proudění krve . . . . .	14
1.5 Předpoklady modelu v této práci . . . . .	15
<b>2 Numerické metody</b>	<b>17</b>
2.1 Mřížková Boltzmannova metoda . . . . .	17
2.1.1 Bezrozměrné jednotky . . . . .	18
2.1.2 Definice a diskretizace výpočetní oblasti . . . . .	19
2.1.3 Makroskopické veličiny . . . . .	21
2.1.4 Količní operátory . . . . .	22
2.1.5 Výpočet síly v LBM pomocí integrace tenzoru napětí . . . . .	24
2.1.6 Počáteční podmínky . . . . .	28
2.1.7 Okrajové podmínky . . . . .	28
2.1.8 Algoritmus LBM . . . . .	32
2.2 Poznámky k implementaci . . . . .	33
2.2.1 Generování vstupních dat a struktura kódu . . . . .	33
2.2.2 Implementace interpolačních okrajových podmínek . . . . .	35
<b>3 Numerické výsledky</b>	<b>37</b>
3.1 Definice testovací úlohy . . . . .	37
3.2 Základní úloha . . . . .	40
3.3 Analýza lokálního výpočtu tenzoru napětí . . . . .	43
3.4 Analýza interpolačních okrajových podmínek . . . . .	46
3.5 Aproximace objektu mnohoúhelníkem . . . . .	52
3.6 Analýza rozložení působící síly . . . . .	54
3.7 Shrnutí výsledků numerických simulací . . . . .	57
<b>Závěr</b>	<b>58</b>

# Úvod

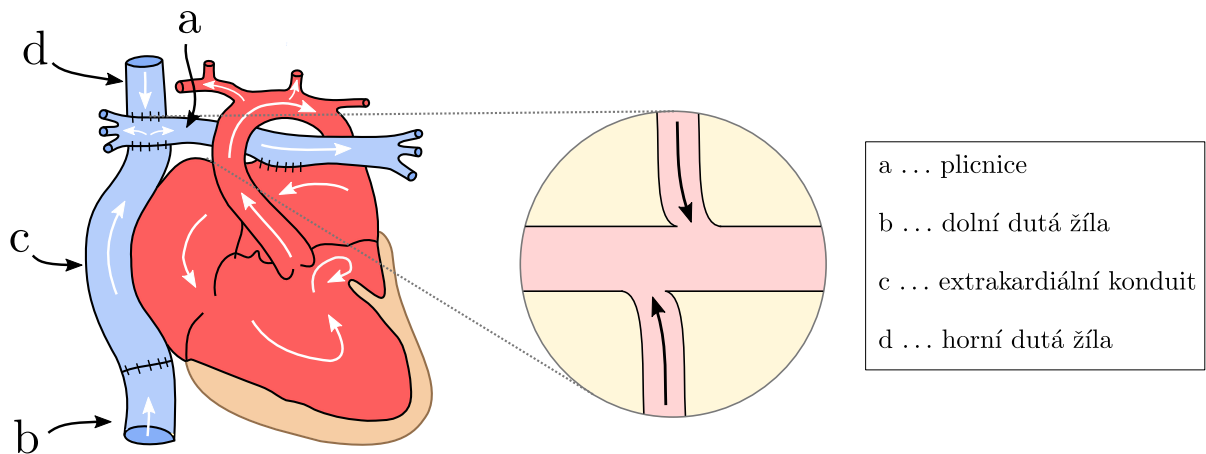
Tato bakalářská práce se zabývá matematickým modelováním proudění tekutin se zaměřením na modelování proudění krve v cévách. Schopnost modelovat a analyzovat proudění krve v cévách může být klíčová zejména v oblasti klinické medicíny, kde informace získané z matematického modelu mohou asistovat lékařům při plánování a provádění zdravotních výkonů. Matematické modelování představuje způsob, jak studovat komplexní biologické procesy v různých fyziologických stavech a jak následně získat informace, které by mnohdy bylo obtížné získat pouze na základě reálných dat. Lze ho tak v mnoha ohledech považovat za efektivní způsob, díky kterému lze například sledovat charakteristiky, které pomocí testování *in vivo* (v živém organismu) měřit nelze [1].

Jedním z konkrétních příkladů, kde modelování proudění krve může najít své uplatnění, je tzv. úplné kavopulmonální spojení (anglicky *total cavopulmonary connection*, dále jen TCPC). TCPC se provádí u dětí, u nichž je diagnostikována tzv. funkčně jediná komora, tj. u pacientů se závažnou vrozenou srdeční vadou, kvůli které je jejich srdce schopno efektivně využít pouze jednu funkční komoru, a u nichž nelze chirurgicky zajistit fungující dvoukomorovou cirkulaci [2]. Jedná se o operaci, při které je horní dutá žíla (*vena cava superior*, ozn. *d* na obr. 1) chirurgicky napojena na plicnici. Také dolní dutá žíla (*vena cava inferior*, ozn. *b* na obr. 1) je napojena přímo na plicnici (*arteria pulmonalis*, ozn. *a* na obr. 1) a to zpravidla pomocí tzv. extrakardiálního konduitu (ozn. *c* na obr. 1), neboli mimosrdečního kanálu, vytvořeného z cévní protézy [1, 3].

TCPC umožňuje vytvořit funkční oběh krve, vzniklý systém cirkulace je však specifický a je citlivý na vícero faktorů, které nežádoucím způsobem přispívají ke ztrátě energie v systému. To postupně vede k celkovému selhání systému. Jedná se zejména o vlivy turbulentního proudění a kolize proudů, ke kterým dochází například ve vyústění horní a dolní duté žíly do plicnice. Právě problematika optimálního napojení extrakardiálního konduitu za účelem minimalizace ztráty energie, ale i ostatní zmíněné faktory, mezi něž patří například i interakce tekutiny se stěnou, mohou být předmětem matematického modelování [2, 4, 5].

TCPC je jen jedním konkrétním příkladem, který může být podrobněji zkoumán, stejné techniky lze však uplatnit v mnoha jiných problémech, například při zkoumání tzv. Fallotovy tetralogie či v jiných případech, kdy je nějakým způsobem narušena cirkulace krve [6].

Struktura práce je následující. První kapitola se zabývá matematickým modelem proudění tekutin. Druhá kapitola se věnuje použitému numerickému modelu založeném na mřížkové Boltzmannově metodě (anglicky *lattice Boltzmann method*, dále jen LBM). Poslední kapitola představuje výsledky provedených numerických simulací. Nejprve je testována základní implementace metody integrace tenzoru napětí (anglicky *stress integration*) pro výpočet síly na úloze uvedené v [7]. Dále jsou testovány různé metody lokálního výpočtu tenzoru napětí převzaté z [8], [9] a [10]. Poté je zkoumán vliv použití různých okrajových podmínek na hranici obtékaného tělesa se zakřivenou geometrií. Dále je demonstrováno a testováno nahrazení obtékaného tělesa se zakřivenou hranicí pomocí tělesa se zjednodušenou, po částech lineární hranicí. Na závěr jsou v modelové úloze využity implementované metody a je představen směr, kterým se bude ubírat další výzkum.



Obrázek 1: Schéma úplného kavopulmonálního spojení. Zvětšená část zobrazuje místo napojení mimosrdečního kanálu.

K řešení úloh byla využita metoda LBM implementovaná v kódu, který je vyvíjený na katedře matematiky FJFI ČVUT v Praze. Dle potřeb této práce byl kód upraven. Výhodou LBM je možnost masivní paralelizace na GPU (grafických procesorech), díky čemuž výpočty trvají řádově kratší dobu, než u standardních numerických metod využívaných k modelování proudění tekutin. Motivací pro využití LBM v medicíně tedy může být právě výpočetní rychlost této numerické metody, díky níž by se v budoucnu mohla rychlost výpočtů ideálně blížit až k časům zpracování klinických dat v praxi při vyšetření.

# Kapitola 1

## Matematický model cévního proudění

V této kapitole popíšeme základní vztahy týkající se dynamiky kontinua, které jsou relevantní pro tuto práci. Představíme rovnice popisující proudění ve volném prostředí. Dále popíšeme klasifikaci tekutin, zejména pak rozdíl mezi newtonovskou a nenewtonovskou tekutinou. Na závěr demonstrováme příklady modelů, jež lze použít k popisu proudění krve.

### 1.1 Rovnice proudění tekutin

Na tekutinu budeme nyní pohlížet jako na tzv. kontinuum, tedy ji budeme považovat za dokonale spojitou. Rovnice popisující dynamiku kontinua vychází ze zákonů zachování hmoty, hybnosti a energie. Dále jsou tyto rovnice spjaty s vlastnostmi zkoumaného prostředí.

Předpokládáme, že zkoumaný systém je izotermální. Makroskopický popis dynamiky tekutin pak lze vyjádřit pomocí soustavy parciálních diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1.1a)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g}, \quad (1.1b)$$

kde  $\otimes$  je vnější součin, který po složkách definujeme jako  $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})_{ij} = u_i u_j$ ,  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Všechny veličiny v soustavě parciálních diferenciálních rovnic (1.1) jsou obecně funkcemi času  $t$  [s] a polohy  $\mathbf{x}$  [m]. Další veličiny v (1.1) značí postupně

$\rho$ [kg m <sup>-3</sup> ]	hustotu tekutiny,
$\mathbf{u}$ [m s <sup>-1</sup> ]	vektor makroskopické rychlosti,
$\mathbf{T}$ [kg m <sup>-1</sup> s <sup>-2</sup> ]	úplný tenzor napětí.

Jednou z dalších důležitých veličin je tlak  $p$  [Pa], který za dodatečného předpokladu konstantní teploty v systému můžeme dle [11] vyjádřit jako

$$p = c_s^2 \rho, \quad (1.2)$$

kde  $c_s$  [m s<sup>-1</sup>] značí rychlost zvuku v dané tekutině.

## 1.2 Tenzor napětí

Pro rozlišení mezi newtonovskou a neneutronovskou tekutinou je důležitý pojem tenzoru napětí. Zavedeme nejdříve dynamický tenzor napětí  $\mathbf{T}_\mu = (\sigma_{ij}^\mu)$  [kg m<sup>-1</sup> s<sup>-2</sup>], kde  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Pomocí  $\mathbf{T}_\mu$  můžeme po složkách popsat působení viskózních sil  $\mathbf{F}_\mu$  na hranici objemu  $\partial\Omega$  vztahem

$$F_{\mu,i} = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{T}_\mu \mathbf{n})_i dS = \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}^\mu n_j dS, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (1.3)$$

kde  $\mathbf{n}$  značí normálový vektor povrchu. Podoba  $\mathbf{T}_\mu$  závisí obecně pouze na vlastnostech konkrétní tekutiny.

Do působení dynamickému tenzoru napětí můžeme zahrnout i tlak  $p$ , díky čemuž můžeme zavést úplný tenzor napětí vztahem

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}_\mu, \quad (1.4)$$

kde  $\mathbf{I}$  je jednotkový tenzor [12].

Tlakovou sílu  $\mathbf{F}_p$  působící na hranici  $\partial\Omega$  můžeme po složkách vyjádřit vztahem

$$F_{p,i} = - \int_{\partial\Omega} p n_i dS, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (1.5)$$

kde  $\mathbf{n}$  opět značí normálový vektor povrchu. Spojíme-li (1.5) se vztahy (1.3) a (1.4), můžeme celkovou sílu  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_\mu + \mathbf{F}_p$  působící na hranici vyjádřit po složkách pomocí úplného tenzoru napětí vztahem

$$F_i = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{T}\mathbf{n})_i dS, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (1.6)$$

## 1.3 Klasifikace tekutin

### Newtonovské tekutiny

Jak již bylo zmíněno výše, dynamický tenzor napětí se odvíjí pouze od vlastností zkoumaných tekutin, které pak můžeme rozlišovat právě dle tvaru  $\mathbf{T}_\mu$ . Mnoho běžných tekutin (např. voda, vzduch, glycerol) lze považovat za newtonovské tekutiny. Pro takové tekutiny platí, že složky dynamického tenzoru napětí jsou lineárně závislé na prostorových derivacích rychlosti. Konkrétně platí vztahy

$$\sigma_{ii}^\mu = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (1.7a)$$

$$\sigma_{ij}^\mu = \sigma_{ji}^\mu = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad i \neq j, \quad (1.7b)$$

kde  $\mu$  [kg m<sup>-1</sup> s<sup>-1</sup>] označuje dynamickou viskozitu,  $\mathbf{u}$  [m s<sup>-1</sup>] makroskopickou rychlost,  $\lambda$  [kg m<sup>-1</sup> s<sup>-1</sup>] je tzv. druhý viskózní koeficient a  $\mathbf{x}$  [m] je vektor polohy [12]. Pro newtonovské tekutiny je  $\mathbf{T}_\mu$  zjevně symetrický tenzor. Zavedeme-li

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T], \quad (1.8)$$

lze dynamický tenzor napětí ekvivalentně přepsat do tvaru

$$\mathbf{T}_\mu = 2\mu\mathbf{D} + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}. \quad (1.9)$$

S použitím tzv. Stokesovy hypotézy [13], která tvrdí, že  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ , přejde vztah (1.9) do tvaru

$$\mathbf{T}_\mu = 2\mu\mathbf{D}. \quad (1.10)$$

## Nenewtonovské tekutiny

V rámci této práce se omezíme pouze na práci s newtonovskou tekutinou, nicméně krev může v určitých případech vykazovat i nenewtonovské chování, proto zde pro úplnost krátce popíšeme i nenewtonovské tekutiny.

Už bylo zmíněno, že složky dynamického tenzoru napětí newtonovské tekutiny jsou lineárně závislé na prostorových derivacích rychlosti. Pro nenewtonovské tekutiny pak platí, že složky  $\mathbf{T}_\mu$  jsou obecně nelineární funkce stavových veličin.

Důležitou veličinou pro popis nenewtonovského (ale i newtonovského) chování je smyková rychlost (anglicky *shear rate*)  $\dot{\gamma}$  [ $\text{s}^{-1}$ ], která je definována podle [12] jako

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2}\|\mathbf{D}\|_F, \quad (1.11)$$

kde  $\|\cdot\|_F$  značí Frobeniovu maticovou normu definovanou pro obecnou matici  $\mathbf{A}$  s rozměry  $m \times n$  jako

$$\|\mathbf{A}\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}. \quad (1.12)$$

## Zobecněné newtonovské tekutiny a jejich modely

Zavádíme dále zobecněné newtonovské tekutiny, mezi které můžeme velkou část nenewtonovských tekutin zařadit. Pro tuto třídu tekutin platí vztah

$$\tau = \eta\dot{\gamma}, \quad (1.13)$$

kde  $\tau$  [ $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$ ] značí smykové napětí a  $\eta = \eta(\dot{\gamma})$  je zdánlivá viskozita, která je obecně nelineární funkcí  $\dot{\gamma}$  nebo i jiných veličin. Poznamenejme, že pro newtonovské tekutiny platí

$$\tau = \mu\dot{\gamma}. \quad (1.14)$$

## 1.4 Empirické modely proudění krve

Klíčové pro matematický model je pak správně zvolený vztah výpočtu  $\eta$  tak, aby v sobě zahrnoval případné nenewtonovské chování zkoumané tekutiny. Existuje mnoho empirických modelů využívaných pro popis  $\eta$ , za zmínku pak stojí zejména Cassonův a Carreaův-Yassudův model [14]. Oba tyto modely se využívají k popisu proudění krve v nenewtonovském režimu.

Cassonův model zavádí pro zdánlivou viskozitu vztah

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{1}{\dot{\gamma}} [k_0(c) + k_1(c)]^2, \quad (1.15)$$

kde  $k_0(c)$  a  $k_1(c)$  jsou funkce závislé na tzv. hematokrytu  $c$ , neboli na poměru objemu červených krvinek a celkového objemu krve. Nevýhodou Cassonova modelu je, že není dobře definovaný pro nulovou smykovou rychlost, jelikož

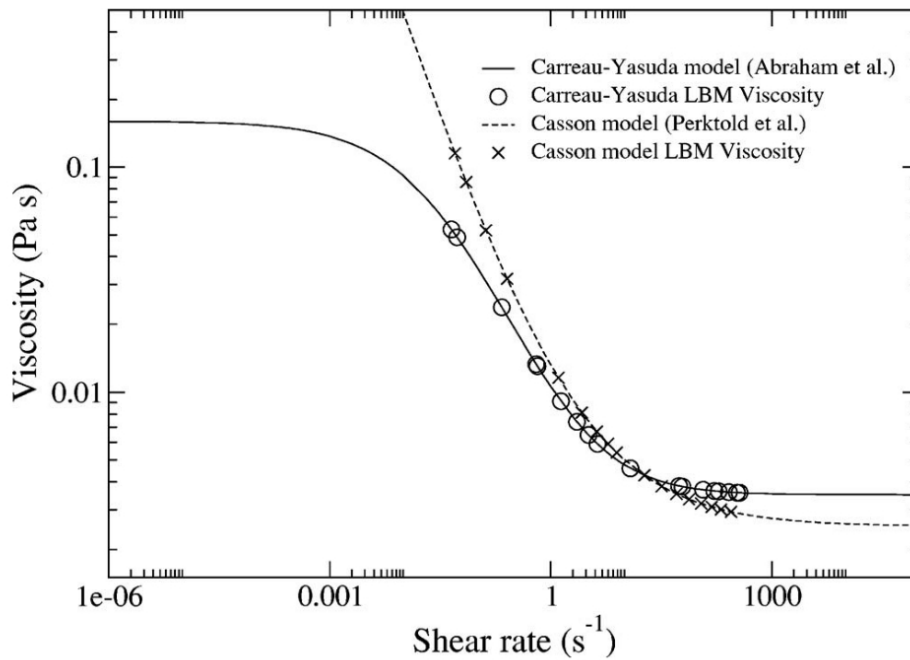
$$\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0^+} \eta(\dot{\gamma}) = +\infty. \quad (1.16)$$

Naproti tomu Carreaův-Yassudův model zavádí

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty) [1 + (\epsilon \dot{\gamma})^a]^{\frac{n-1}{a}}. \quad (1.17)$$

Parametry  $\epsilon, a, n$  jsou zde konstanty, které jsou určeny empiricky. Dále pak platí  $\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \eta(\dot{\gamma}) = \eta_0$ ,  $\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow \infty} \eta(\dot{\gamma}) = \eta_\infty$ , což odpovídá tomu, že pro vysoké, resp. nízké hodnoty smykové rychlosti se tekutina chová jako newtonovská s viskozitou  $\eta_\infty$ , resp.  $\eta_0$ . Parametry  $\epsilon, a, n$  pak ovlivňují chování modelu mezi hraničními hodnotami viskozity [14].

Srovnání obou modelů je zobrazeno na obr. 1.1.



Obrázek 1.1: Srovnání Cassonova a Carreaova-Yassudova modelu, převzato z [14].

## 1.5 Předpoklady modelu v této práci

V této kapitole jsme uvedli vztahy, které jsou stěžejní pro sestavení matematického modelu proudění krve. Zdůrazněme, že v rámci této práce budeme předpokládat dodatečné podmínky, díky kterým se systém rovnic (1.1) zjednoduší, a nebude tak nezbytné využít všechny výše uvedené vztahy. Přesto jsme však vztahy uvedli pro úplnost, jelikož předmětem budoucího zkoumání bude právě i studium modelu za jiných předpokladů, například za předpokladu neneutronovské tekutiny.

Konkrétně v rámci naší práce předpokládáme, že teplota uvažovaného systému je v čase konstantní (systém je izotermální) a že na něj nepůsobí vnější síly. Navíc o zkoumané tekutině budeme předpokládat, že je nestlačitelná, newtonovská a s konstantní dynamickou viskozitou.

Celkem tedy systém předpokládáme, že platí:

- $\theta = konst.$  (izotermální),
- $\mathbf{g} = \mathbf{0}$  (bez vnějších sil),
- $\rho = konst.$  (nestlačitelná tekutina),
- $\sigma_{ij}$  určeno vztahy (1.7) (newtonovská tekutina),
- $\mu = konst.$  (konstantní dynamická viskozita).



## Kapitola 2

# Numerické metody

V této kapitole nejdříve popíšeme mřížkovou Boltzmannovu metodu, což je numerická metoda využitá pro simulace v této práci. Druhá část kapitoly je kapitoly pak věnována poznámkám k implementaci a popisu diskretizace křivek.

### 2.1 Mřížková Boltzmannova metoda

Mřížková Boltzmannova metoda (anglicky *lattice Boltzmann method*, dále jen LBM) je numerická metoda sloužící k simulaci tekutin vyvinutá na konci dvacátého století. LBM narozdíl od jiných metod využívá tzv. mezoskopického popisu tekutiny, v kterém předpokládáme složení tekutiny z jednotlivých částic, jež popisujeme pomocí jednočásticových distribučních funkcí hustoty  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$  [ $\text{kg s}^3 \text{m}^{-6}$ ]. Jednočásticová distribuční funkce udává hustotu částic vyskytujících se v okolí  $\mathbf{x}$ , v čase  $t$  a s mikroskopickou rychlostí  $\boldsymbol{\xi}$  [8]. Mezoskopický popis lze chápat jako mezistupeň mezi makroskopickým popisem, který nahlíží na tekutinu jako na celek, a mezi popisem mikroskopickým, v kterém je stav systému odvozen ze znalosti stavů všech částic v něm obsažených.

Výše uvedená distribuční funkce  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$  splňuje Boltzmannovu transportní rovnici

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^3 F_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i} = C(f), \quad (2.1)$$

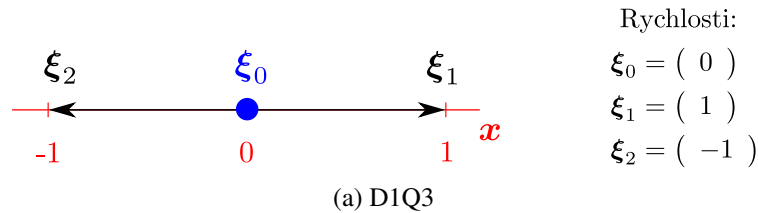
kde  $\frac{1}{m}\mathbf{F}$  [ $\text{m s}^{-2}$ ] je vektor zrychlení působení vnějších sil (uvažujeme stejnou hmotnost  $m$  [ $\text{kg}$ ] pro všechny částice systému) a  $C(f)$  [ $\text{kg s}^2 \text{m}^{-6}$ ] je kolizní operátor, který bude více rozebrán později v sekci 2.1.4. Boltzmannova transportní rovnice (2.1) představuje fyzikální základ pro LBM.

Numerické schéma LBM můžeme odvodit pomocí diskretizace Boltzmannovy transportní rovnice (2.1). Diskretizace prostoru je provedena pomocí ekvidistantní mřížky (anglicky *lattice*), tj. všechny sousední uzly v mřížce jsou od sebe vzdáleny o stejnou vzdálenost. Diskretizace prostoru rychlostí se odvíjí od volby rychlostního modelu, který označujeme  $DdQq$ , kde  $d$  a  $q$  značí dvě hlavní charakteristiky:

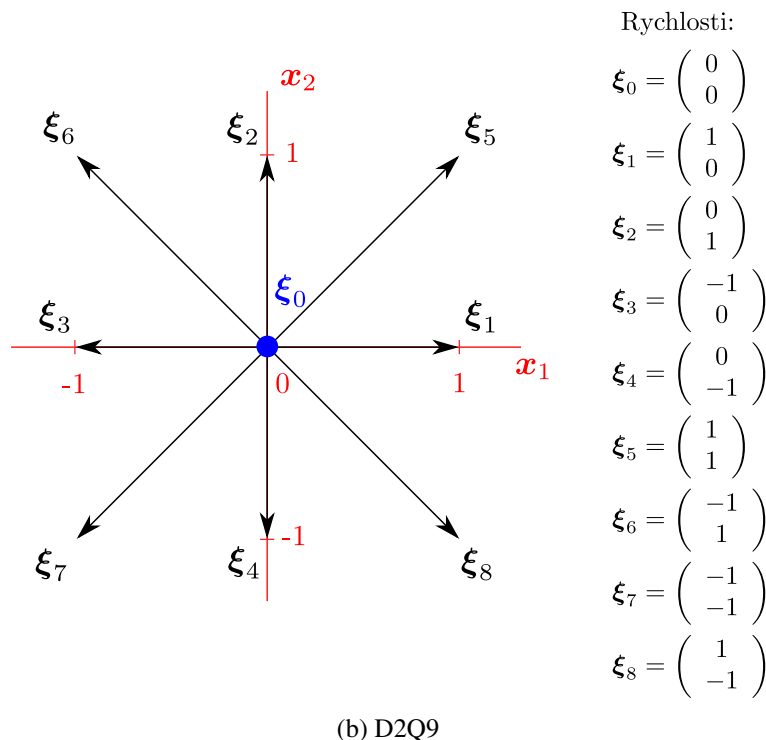
$d$  - dimenzi uvažovaného prostoru,

$q$  - počet navzájem různých směrů, podél nichž se může informace po mřížce šířit.

Každému z možných směrů pohybu pak přísluší diskrétní distribuční funkce  $f_i$ ,  $i \in \{0, \dots, q-1\}$ . Příklady některých používaných rychlostních modelů v různých dimenzích jsou k nahlédnutí na obr. 2.1. V této práci budeme uvažovat rychlostní model D2Q9.



Rychlosti:  
 $\xi_0 = ( 0 )$   
 $\xi_1 = ( 1 )$   
 $\xi_2 = ( -1 )$



Rychlosti:  
 $\xi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$   
 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$   
 $\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$   
 $\xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$   
 $\xi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$   
 $\xi_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$   
 $\xi_6 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$   
 $\xi_7 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$   
 $\xi_8 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Obrázek 2.1: Příklady rychlostních modelů pro jednu a dvě dimenze.

### 2.1.1 Bezrozměrné jednotky

Pro diskretizaci rovnice (2.1) je výhodné přejít od fyzikálních jednotek k jednotkám bezrozměrným, ve kterých následně probíhají simulace LBM. Jak již bylo zmíněno, k diskretizaci je využita pravidelná mřížka, bezrozměrné jednotky proto v našem případě budeme nazývat mřížkové jednotky (anglicky *lattice units*). Postupně popíšeme konverzní vztahy mezi fyzikálními a mřížkovými jednotkami pro prostorový krok  $\Delta l$  [m], časový krok  $\Delta t$  [s], složky rychlosti  $u_i$  [ $\text{m s}^{-1}$ ] a kinematickou viskozitu  $\nu$  [ $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ]. Všechny veličiny v mřížkových jednotkách budeme dále značit pravým horním indexem  $L$ .

Zdůrazněme, že fyzikální principy jsou nezávislé na volbě soustavy jednotek. Pro konzistentní přechod k bezrozměrným jednotkám je nutné dodržet zákon podobnosti pro dynamiku tekutin, viz [15]. Dle něj jsou dva systémy ekvivalentní, je-li zachována velikost relevantních bezrozměrných veličin, mezi něž patří např. Reynoldsovo číslo, které je definováno vztahem

$$\text{Re} = \frac{l_0 u_0}{\nu} = \frac{l_0^2}{t_0 \nu}, \quad (2.2)$$

kde  $\nu$  je kinematická viskozita a dále  $l_0$  [m],  $t_0$  [s] a  $u_0$  [ $\text{m s}^{-1}$ ] jsou po řadě charakteristická délka, cha-

rakteristický čas a charakteristická rychlost. Hodnoty těchto veličin volíme v souladu s danou fyzikální úlohou. Jako  $l_0$  nejčastěji volíme rozměr výpočetní oblasti,  $u_0$  je pak typicky maximální či průměrná rychlost tekutiny v oblasti [8]. Pro  $t_0$  platí vztah

$$t_0 = \frac{l_0}{u_0}. \quad (2.3)$$

Konverzní vztahy pro  $\Delta l^L$  [-], respektive  $\Delta t^L$  [-] mají následující podobu:

$$\Delta l = \frac{l_0}{l_0^L} \Delta l^L, \quad (2.4a)$$

$$\Delta t = \frac{t_0}{t_0^L} \Delta t^L. \quad (2.4b)$$

Pro zjednodušení se často pokládá  $\Delta l^L = \Delta t^L = 1$ , viz [8], poté vztahy (2.4) přejdou v

$$l_0^L = \frac{l_0}{\Delta l}, \quad (2.5a)$$

$$t_0^L = \frac{t_0}{\Delta t}, \quad (2.5b)$$

což jsou převodní vztahy, které jednoznačně určují charakteristickou délku a charakteristický čas v LBM. S využitím vztahů (2.5) lze odvodit převodní vztah pro složky rychlosti ve tvaru

$$u_i = \frac{\Delta l}{\Delta t} u_i^L, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.6)$$

kde  $u_i^L$  značí složky vektoru bezrozměrné rychlosti.

Z podmínky zachování velikosti  $Re$  při přechodu mezi soustavami v kombinaci s již zmiňovanou volbou  $\Delta l^L = \Delta t^L = 1$  pak plyne konverzní vztah pro  $\nu$  ve tvaru

$$\nu = \frac{\Delta l^2}{\Delta t} \nu^L. \quad (2.7)$$

Ze vztahu (2.7) můžeme vidět, že pro danou síť s prostorovým krokem  $\Delta l$  je časový krok  $\Delta t$  svázán s hodnotou  $\nu^L$ .

V této kapitole budeme dále pracovat výhradně s veličinami v mřížkových jednotkách, upustíme tedy od rozlišování pomocí speciálního označení a nebudeme používat horní index  $L$ , ačkoliv budeme bezrozměrný popis uvažovat. Pokud to bude kontext vyžadovat, odlišíme dále veličiny ve fyzikálních jednotkách horním indexem  $F$ .

### 2.1.2 Definice a diskretizace výpočetní oblasti

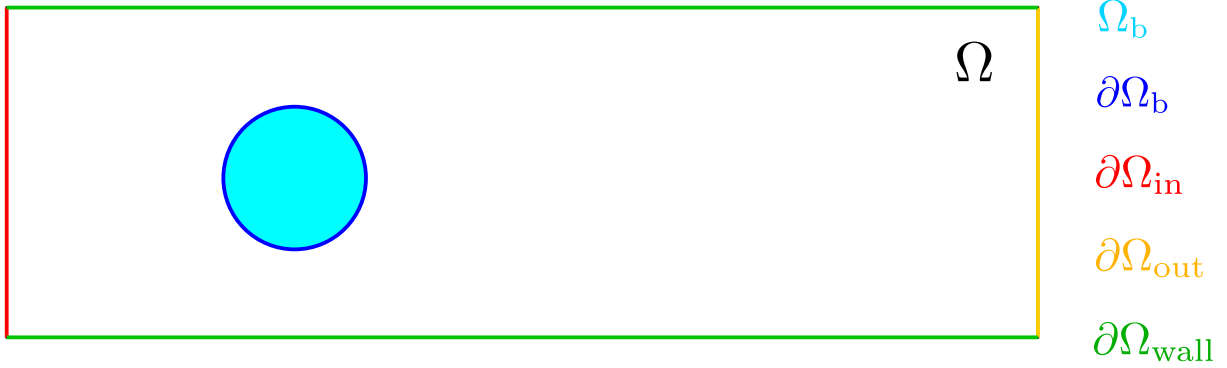
Výpočetní oblast v této práci bude představovat oblast  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Těleso umístěné ve výpočetní oblasti budeme značit  $\Omega_b$ . Platí tedy  $\Omega_b \subset \Omega$ . Časový interval, na kterém budeme úlohu vyšetřovat budeme značit  $\mathcal{I}$ , přičemž  $\mathcal{I} = \langle 0, T \rangle \subset \mathbb{R}$ , kde  $T > 0$ . Veškeré vztahy popisující dynamiku tekutin v kapitole 1 jsou platné v  $\mathbb{R}^3$ , nicméně v rámci této práce budeme jeden z rozměrů uvažovat jako jednotkový a omezíme se tak pouze na 2D úlohy. Platnost rovnic popisujících dynamiku tekutin však zůstává nezměněna. Hranici oblasti  $\Omega$  budeme značit  $\partial\Omega$  a budeme ji vnímat jako uzávěr disjunktního sjednocení jednotlivých částí hranice, viz obr. 2.2.

Konkrétně rozdělíme hranici jako

$$\partial\Omega = \overline{\partial\Omega_{\text{in}} \cup \partial\Omega_{\text{out}} \cup \partial\Omega_{\text{wall}}}, \quad (2.8)$$

přičemž platí, že

$$\partial\Omega_{\text{in}} \cap \partial\Omega_{\text{out}} \cap \partial\Omega_{\text{wall}} = \emptyset. \quad (2.9)$$



Obrázek 2.2: Definice výpočetní oblasti  $\Omega$ , jejíž hranice  $\partial\Omega$  je disjunktně rozdělena na tři části  $\partial\Omega_{\text{in}}$ ,  $\partial\Omega_{\text{out}}$  a  $\partial\Omega_{\text{wall}}$ . V oblasti se dále nachází těleso  $\Omega_b$  s hranicí  $\partial\Omega_b$ .

Diskretizaci výpočetní oblasti  $\Omega$  provedeme pomocí ekvidistantní izotropické mřížky ve tvaru

$$\hat{\Omega} = \{ \mathbf{x}_{i,j} = (i\Delta l, j\Delta l)^T \mid i \in \{1, \dots, N_x - 1\}, j \in \{1, \dots, N_y - 1\} \}, \quad (2.10a)$$

$$\bar{\hat{\Omega}} = \{ \mathbf{x}_{i,j} = (i\Delta l, j\Delta l)^T \mid i \in \{0, \dots, N_x\}, j \in \{0, \dots, N_y\} \}, \quad (2.10b)$$

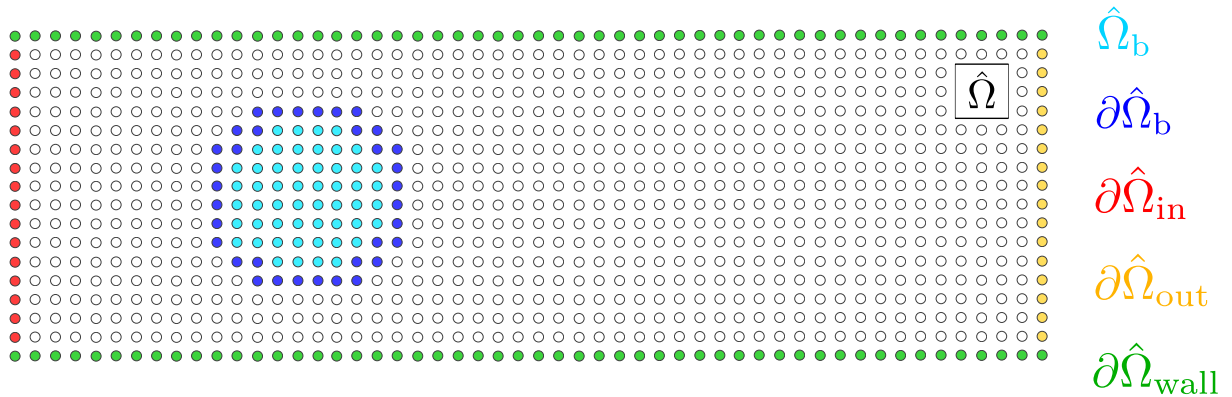
kde  $\Delta l$  je prostorový krok. Množinu uzlů diskretizujících hranici výpočetní oblasti zavádíme jako

$$\partial\hat{\Omega} = \bar{\hat{\Omega}} \setminus \hat{\Omega}, \quad (2.11)$$

a obdobně jako v (2.8) pro ni budeme uvažovat tvar

$$\partial\hat{\Omega} = \partial\hat{\Omega}_{\text{in}} \cup \partial\hat{\Omega}_{\text{out}} \cup \partial\hat{\Omega}_{\text{wall}}, \quad (2.12)$$

viz obr. 2.3.



Obrázek 2.3: Definice diskretizované výpočetní oblasti  $\hat{\Omega}$ , jejíž hranice  $\partial\hat{\Omega}$  je disjunktně rozdělena na tři části  $\partial\hat{\Omega}_{\text{in}}$ ,  $\partial\hat{\Omega}_{\text{out}}$  a  $\partial\hat{\Omega}_{\text{wall}}$ . V oblasti se dále nachází diskretizovaná oblast reprezentující těleso  $\hat{\Omega}_b$  s hranicí  $\partial\hat{\Omega}_b$ .

Dále definujeme časový krok

$$\Delta t = \frac{T}{N_t}, N_t \in \mathbb{N} \quad (2.13)$$

a časový interval  $\mathcal{I}$  diskretizujeme jako

$$\hat{\mathcal{I}} = \{t_i = i\Delta t \mid i \in \{0, \dots, N_t - 1\}\}. \quad (2.14)$$

Diskretizací získáme diskrétní formu rovnice (2.1) ve tvaru

$$f_k(\mathbf{x} + \Delta t \boldsymbol{\xi}_k, t + \Delta t) = f_k(\mathbf{x}, t) + C_k(\mathbf{x}, t) + S_k(\mathbf{x}, t), \quad k \in \{0, \dots, q-1\}, \forall \mathbf{x} \in \hat{\Omega}, \forall t \in \hat{\mathcal{I}}, \quad (2.15)$$

kde  $C_k$  je diskrétní kolizní operátor a  $S_k$  je diskrétní silový člen, jejichž podoba závisí na zvoleném typu mřížkové Boltzmannovy metody. Rovnice (2.15) se nazývá mřížková Boltzmannova rovnice (anglicky *lattice Boltzmann equation*).

Po zavedení tzv. postkolizní distribuční funkce  $f_k^*$  vztahem

$$f_k^*(\mathbf{x}, t) = f_k(\mathbf{x}, t) + C_k(\mathbf{x}, t) + S_k(\mathbf{x}, t), \quad k \in \{0, \dots, q-1\}, \forall \mathbf{x} \in \hat{\Omega}, \forall t \in \hat{\mathcal{I}}, \quad (2.16)$$

můžeme rovnici (2.15) přepsat ve tvaru

$$f_k(\mathbf{x} + \Delta t \boldsymbol{\xi}_k, t + \Delta t) = f_k^*(\mathbf{x}, t), \quad k \in \{0, \dots, q-1\}, \forall \mathbf{x} \in \hat{\Omega}, \forall t \in \hat{\mathcal{I}}. \quad (2.17)$$

Počáteční a okrajové podmínky budou dále podrobně rozebrány v sekci 2.1.6, resp. v sekci 2.1.7.

### 2.1.3 Makroskopické veličiny

Nyní představíme vztahy pro výpočet některých makroskopických veličin jako je hustota  $\rho$  a makroskopická rychlost  $\mathbf{u}$ . Výpočtu tlaku je pak věnována následující sekce. Vztahy pro výpočet těchto veličin lze odvodit pomocí obecných momentů diskrétních distribučních funkcí a mají tvar

$$\rho = \sum_{k=0}^{q-1} f_k, \quad (2.18a)$$

$$\rho \mathbf{u} = \sum_{k=0}^{q-1} f_k \boldsymbol{\xi}_k + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{g}, \quad (2.18b)$$

kde  $\mathbf{g}$  je diskrétní silový člen a  $c_s$  je rychlost zvuku v mřížkových jednotkách. Popis výpočtu makroskopických veličin je uveden např. v [8]. Tyto vztahy jsou pak v jednom z kroků algoritmu LBM použity pro výpočet a aktualizaci hodnot makroskopických veličin, viz sekce 2.1.8.

#### 2.1.3.1 Tlak v LBM

Pomocí zákona podobnosti lze ukázat, že rovnice udávající vztah pro výpočet tlaku při přechodu k mřížkovým jednotkám nabývá stejného tvaru jako v (1.2). Pro výpočet tlaku můžeme psát

$$p = c_s^2 \rho, \quad (2.19)$$

přičemž v námi uvažovaném modelu D2Q9 platí  $c_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

Získali jsme tedy vztah pro výpočet tlaku v bezrozměrných jednotkách, nicméně z rovnic (1.1) v kombinaci s předpokladem izotermálního systému vyplývá, že pro naše výpočty je relevantní pouze

gradient tlaku. Vztah pro výpočet tlaku lze tedy s jistotou použít pro výpočet jeho změny, jeho referenční hodnota nehraje v našem modelu žádnou roli při řešení dynamiky systému.

Nyní popíšeme, jak výpočty tlaku ze simulace spojit se skutečnou celkovou fyzikální hodnotou tlaku. Nejdříve provedeme rozklad bezrozměrné hustoty ve tvaru

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad (2.20)$$

kde  $\rho_0$  značí průměrnou hodnotu hustoty  $\rho$  a  $\rho'$  je v čase proměnná odchylka od průměru (fluktuační). Zdůrazněme, že ačkoliv v našem modelu uvažujeme nestlačitelnou tekutinu, hodnota LBM hustoty  $\rho$  se může z principu mřížkové Boltzmannovy metody měnit, proto má tato dekompozice smysl. Pro fyzikální hodnotu tlaku provedeme obdobnou dekompozici ve tvaru

$$p^F = p_0^F + p'^F, \quad (2.21)$$

kde opět  $p_0^F$  značí průměrnou hodnotu tlaku ve fyzikálních jednotkách a  $p'^F$  je v čase proměnná odchylka od průměrné hodnoty (fluktuační). Vyjádříme nyní  $p'^F$  vztahem

$$p'^F = K_p c_s^2 \rho', \quad (2.22)$$

kde člen  $K_p$  představuje konverzní faktor pro tlak při přechodu k fyzikálním jednotkám, pro který platí vztah

$$K_p = \rho^F \left( \frac{\Delta l^F}{\Delta t^F} \right)^2, \quad (2.23)$$

kdy uvažujeme již zmiňovanou volbu  $\Delta l = \Delta t = 1$ .

Celkem pak tedy můžeme tlak ve fyzikálních jednotkách vyjádřit jako

$$p^F = p_0^F + \rho^F \left( c_s \frac{\Delta l^F}{\Delta t^F} \right)^2 \rho', \quad (2.24)$$

kde  $\rho'$  získáme pomocí (2.20). Tímto dostáváme možnost počítat hodnotu tlaku ve fyzikálních jednotkách. Znovu však upozorníme, že stěžejní je hodnota gradientu tlaku, a že hodnota parametru  $p_0^F$  představující referenční hodnotu tlaku výpočty v LBM nijak neovlivňuje. Celý postup je detailně popsán v [8].

## 2.1.4 Kolizní operátory

V LBM existuje několik způsobů, jak zavést diskretní kolizní operátor. Tyto různé varianty aproximace pak dávají za vznik různým typům LBM, mezi něž patří například SRT-LBM [16], MRT-LBM [17], CLBM [18], ELBM [19] nebo CuLBM [16]. V této práci se omezíme pouze na využití typu CLBM, pro úplnost však rozebereme i typ SRT-LBM, který vychází přímo z Bhatnagarova–Grossova–Krookova (BGK) spojitého fyzikálního modelu [8].

### 2.1.4.1 SRT-LBM

Jako první uvedeme variantu SRT-LBM (z anglického *Single Relaxation Time*), která patří k nejjednodušším ze všech typů LBM. Použitá aproximace má tvar

$$C_k^{SRT}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\Delta t}{\tau} (f_k(\mathbf{x}, t) - f_k^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)), \quad k \in \{1, 2, \dots, q-1\}, \quad (2.25)$$

kde  $\tau$  je relaxační čas, který vyjadřuje, jak rychle systém spěje do lokální rovnováhy. Ta je určena pomocí rovnovážné distribuční funkce  $f_k^{\text{eq}}$  a představuje stav, kdy se lokální veličiny v čase nemění.

Relaxační čas  $\tau$  je svázán s kinematickou viskozitou  $\nu$  vztahem

$$\nu = c_s^2 \left( \tau - \frac{\Delta t}{2} \right). \quad (2.26)$$

V SRT-LBM aproximujeme silový člen  $S_k$  jako

$$S_k = w_k \Delta t \left( 1 - \frac{\Delta t}{2\tau} \right) \left( \frac{\xi_k - \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{\xi_k \cdot \mathbf{u}}{c_s^4} \xi_k \right) \cdot \mathbf{g}, \quad (2.27)$$

kde  $w_k$  jsou váhy specifické pro daný rychlostní model [8].

### 2.1.4.2 CLBM

Jako druhý typ uvedeme Centrální LBM (CLBM, anglicky *Central LBM*). Narozdíl od SRT-LBM využívá CLBM celkem  $q$  relaxačních časů. Také kolizní krok je v CLBM realizován jinak - ke kolizi zde dochází v prostoru centrálních momentů distribučních funkcí  $f_k$ .

Omezíme se pro názornost a jednoduchost zápisu pouze na rychlostní model D2Q9. Definujme dále multiindex  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T \in \mathbb{N}_0^2$ . Centrální momenty definujeme vztahem

$$k_{(\alpha_1, \alpha_2)} = \sum_{k=0}^8 f_k (\xi_{k,1} - u_1)^{\alpha_1} (\xi_{k,2} - u_2)^{\alpha_2}, \quad (2.28)$$

kde  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$  je makroskopická rychlost.

Označme dále  $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_8)^T$  a  $\mathbf{f}^{\text{eq}} = (f_0^{\text{eq}}, f_1^{\text{eq}}, \dots, f_8^{\text{eq}})^T$ . Postkolizní distribuční funkci můžeme pak vyjádřit vztahem

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{K}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{K} (\mathbf{f}^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)), \quad (2.29)$$

kde  $\mathbf{K}$  je matice přechodu z prostoru distribučních funkcí do prostoru centrálních momentů a dále matice  $\mathbf{S}$  je diagonální ve tvaru

$$\mathbf{S} = \text{diag} \left( \frac{\Delta t}{\tau_0}, \frac{\Delta t}{\tau_1}, \dots, \frac{\Delta t}{\tau_8} \right), \quad (2.30)$$

pro relaxační časy  $\tau_i$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, 8\}$ .

Matici přechodu  $\mathbf{K}$  volíme tak, aby platilo

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{K} \mathbf{f} = \begin{pmatrix} k_{(0,0)} \\ k_{(1,0)} \\ k_{(0,1)} \\ k_{(1,1)} \\ k_{(2,0)} + k_{(0,2)} \\ k_{(2,0)} - k_{(0,2)} \\ k_{(2,1)} \\ k_{(1,2)} \\ k_{(2,2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ 0 \\ k_{(1,1)} \\ k_{(2,0)} + k_{(0,2)} \\ k_{(2,0)} - k_{(0,2)} \\ k_{(2,1)} \\ k_{(1,2)} \\ k_{(2,2)} \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

kde jsme pro první tři složky využili vztahy

$$k_{(0,0)} = \rho, \quad (2.32a)$$

$$k_{(1,0)} = \sum_{k=0}^8 f_k(\xi_{k,1} - u_1) = 0, \quad (2.32b)$$

$$k_{(0,1)} = \sum_{k=0}^8 f_k(\xi_{k,2} - u_2) = 0. \quad (2.32c)$$

Zaved' me dále vektor  $\boldsymbol{\kappa}^{\text{eq}}$  pomocí matice  $\mathbf{K}$  a  $\mathbf{f}^{\text{eq}}$ , bude pro něj dle [18] platit

$$\boldsymbol{\kappa}^{\text{eq}} = \mathbf{K}\mathbf{f}^{\text{eq}} = (\rho, 0, 0, 0, 2\rho c_s^2, 0, 0, 0, \rho c_s^4)^T. \quad (2.33)$$

Násobením (2.29) maticí  $\mathbf{K}$  zleva dostaneme vztah

$$\boldsymbol{\kappa}^*(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{S}(\boldsymbol{\kappa}^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}, t)), \quad (2.34)$$

kde uvažujeme  $\boldsymbol{\kappa}^* = \mathbf{K}\mathbf{f}^*$ .

Za předpokladu izotropní viskozity lze volit relaxační časy jako

$$\tau_4 = \tau_5 = \tau, \quad (2.35)$$

kde pro  $\tau$  bude podobně jako v SRT-LBM modelu platit

$$\nu = c_s^2 \left( \tau - \frac{\Delta t}{2} \right). \quad (2.36)$$

Ke zlepšení numerické stability CLBM volíme dále

$$\tau_3 = \tau_6 = \tau_7 = \tau_8 = 1. \quad (2.37)$$

Pro implementaci byla využita kaskádová varianta CLBM [18]. Důvodem pro tento název je fakt, že obecné momenty nižšího řádu jsou použity k výpočtům momentů vyšších řádů.

### 2.1.5 Výpočet síly v LBM pomocí integrace tenzoru napětí

V praktické části této práce budou zkoumány hodnoty odporového koeficientu, k jehož výpočtu je potřeba znát sílu působící na těleso. Proto v následující části rozebereme, jakým způsobem lze sílu pomocí LBM počítat. Existují dva standardní způsoby - metoda výměny hybnosti a metoda integrace tenzoru napětí, viz [20]. V praktické části bude k výpočtu síly použita pouze metoda integrace tenzoru napětí, kterou podrobně popíšeme, detaily ohledně metody výměny hybnosti lze najít například v [20]. Dále uvažujme oblast  $\Omega$  a těleso  $\Omega_b \subset \Omega$  a zkoumejme sílu, kterou tekutina v oblasti působí na těleso.

Metoda integrace tenzoru napětí (anglicky *stress integration method*) je přímo založena na vztahu (1.6). Zapišeme-li tento vztah ve smyslu diskrétní mřížky, integrál přejde v sumu přes konečný počet uzlů a pro  $i$ -tou složku síly  $\mathbf{F}$  dostaneme vztah ve tvaru

$$F_i(t) = \sum_{\mathbf{x} \in \partial\Omega_b} \Delta s(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) n_j(\mathbf{x}), \quad i \in \{1, 2\}, \quad (2.38)$$

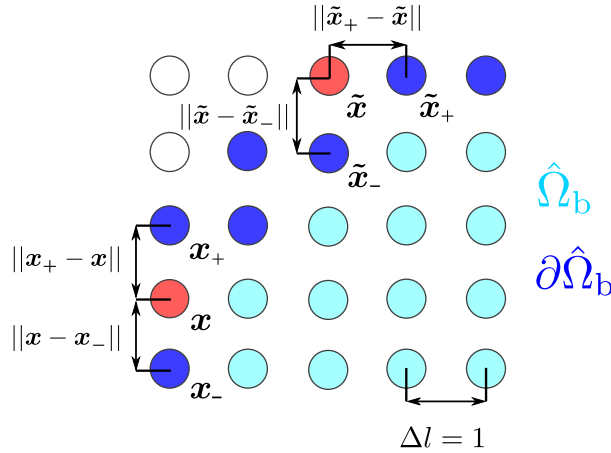
kde  $\Delta s(\mathbf{x})$  představuje náhradu křivkového elementu  $dS$  (viz (1.6)) v bodě  $\mathbf{x}$ ,  $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$  představuje složky diskrétního úplného tenzoru napětí v bodě  $\mathbf{x}$  a v čase  $t$ , dále pak  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  představuje jednotkový vnější



normálový vektor hranice tělesa vypočtený v bodě  $\mathbf{x} \in \partial\hat{\Omega}_b$ . Je-li  $\mathbf{x}_-$ , resp.  $\mathbf{x}_+$  levý, resp. pravý sousední bod bodu  $\mathbf{x}$  ve směru parametrizace  $\hat{\Omega}_b$ , pak  $\Delta s(\mathbf{x})$  spočteme jako

$$\Delta s(\mathbf{x}) = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_-\| + \|\mathbf{x}_+ - \mathbf{x}\|}{2}. \quad (2.39)$$

V námi uvažovaném nastavení bude při volbě  $\Delta l = 1$  pro všechny  $\mathbf{x} \in \partial\hat{\Omega}_b$  platit  $\Delta s(\mathbf{x}) = 1$ , jak je schématicky znázorněno na obr. 2.4.



Obrázek 2.4: Ilustrace významů a možných pozic bodů  $\mathbf{x}_-$  a  $\mathbf{x}_+$  a znázornění vzdáleností sousedních bodů a jejich vztahu k  $\Delta l$  v námi uvažovaném nastavení. Všechny výrazy v normách budou rovny jedné, proto bude platit pro všechny body  $\Delta s(\mathbf{x}) = 1$ .

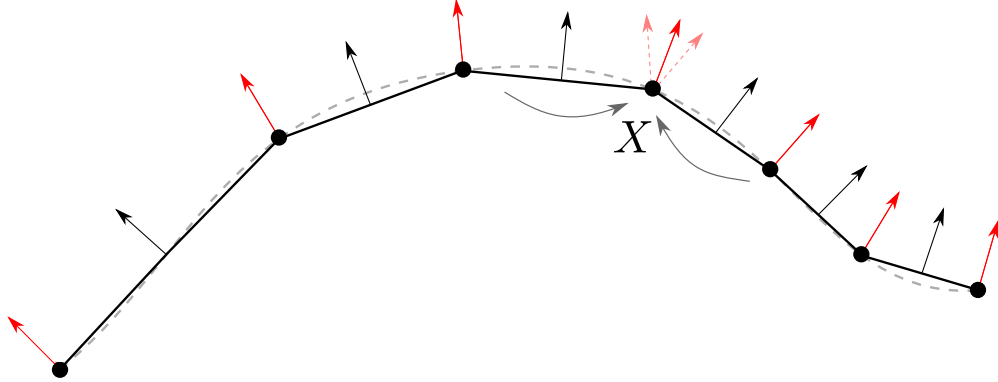
Vztah (2.38) se skládá ze dvou hlavních částí, a to z výpočtu úplného tenzoru napětí a z výpočtu normálového vektoru v diskretním nastavení LBM. Výpočet jednotkového normálového vektoru v diskretní mřížce je přímočarý, pokud máme k dispozici analytický popis hranice obtékaného tělesa. Normálový vektor v zadaném bodě pak nalezneme metodami matematické analýzy. V případě, že nemáme k dispozici analytický popis, popíšeme křivku množinou lagrangeovských bodů  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(s)$ , kde  $s$  značí parametrickou souřadnici lagrangeovského bodu. Křivku dále nahradíme po částech lineární aproximací, kdy dva sousední lagrangeovské body spojíme úsečkou. Normálové vektory v bodech podél úsečky pak spočteme jako kolmice na tyto úsečky. Normálové vektory v lagrangeovských bodech určíme jako průměr normálových vektorů ze sousedních lagrangeovských bodů. Konstrukce je schématicky vyobrazena na obr. 2.5.

Jako další rozebereme možné způsoby, jak přistoupit k výpočtu  $\sigma_{ij}$ .

### 2.1.5.1 Aproximace diferencí

Jako základní aproximaci parciálních derivací ze vztahů (1.7) lze použít náhradu pomocí diference. Uvažujme diferencovatelnou funkci  $g = g(\mathbf{x}, t)$ . Pro jednoduchost označme parciální derivace funkce  $g$  dle příčných směrů jako

$$\partial_i g(\mathbf{x}, t) := \partial_{x_i} g(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial g(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i}, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (2.40)$$



Obrázek 2.5: Ilustrace konstrukce normálových vektorů u obecné křivky bez zadaného analytického předpisu.

Poté zavádíme pro parciální derivaci ve směru  $x_i$  aproximaci

$$\partial_i g(\mathbf{x}, t) \approx \begin{cases} 0 & \text{pro } \mathbf{x} + \Delta t \xi_i \in \hat{\Omega}_b, \mathbf{x} - \Delta t \xi_i \in \hat{\Omega}_b, \\ \frac{g(\mathbf{x}, t) - g(\mathbf{x} - \Delta t \xi_i, t)}{\Delta l} & \text{pro } \mathbf{x} + \Delta t \xi_i \in \hat{\Omega}_b, \mathbf{x} - \Delta t \xi_i \notin \hat{\Omega}_b, \\ \frac{g(\mathbf{x} + \Delta t \xi_i, t) - g(\mathbf{x}, t)}{\Delta l} & \text{pro } \mathbf{x} + \Delta t \xi_i \notin \hat{\Omega}_b, \mathbf{x} - \Delta t \xi_i \in \hat{\Omega}_b, \\ \frac{g(\mathbf{x} + \Delta t \xi_i, t) - g(\mathbf{x} - \Delta t \xi_i, t)}{2\Delta l} & \text{pro } \mathbf{x} + \Delta t \xi_i \notin \hat{\Omega}_b, \mathbf{x} - \Delta t \xi_i \notin \hat{\Omega}_b, \end{cases} \quad i \in \{1, 2\}. \quad (2.41)$$

Volbou  $g = u_1$ , resp.  $g = u_2$ , pak dostaneme podle vztahu (2.41) aproximace pro parciální derivace  $\partial_j u_i(\mathbf{x}, t)$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$ .

V kombinaci se vztahem (1.6) a za použití (2.41) platí pro aproximaci dynamického tenzoru napětí

$$\sigma_{ij}^\mu(\mathbf{x}, t) = \mu \left( \partial_j u_i(\mathbf{x}, t) + \partial_i u_j(\mathbf{x}, t) \right), \quad i, j \in \{1, 2\}. \quad (2.42)$$

Pro dynamickou viskozitu  $\mu$  dále platí vztah

$$\mu = \rho \nu, \quad (2.43)$$

můžeme tedy celkem pro úplný tenzor napětí psát

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = -\delta_{ij} \rho c_s^2 + \sigma_{ij}^\mu(\mathbf{x}, t), \quad i, j \in \{1, 2\}, \quad (2.44)$$

kde jsme pro tlak využili vztah (2.19).

### 2.1.5.2 Lokální výpočet

#### Aproximace dynamického tenzoru napětí

Z (2.1) lze pomocí Chapmanova-Enskogova asymptotického rozvoje distribuční funkce určit explicitní vyjádření složek dynamického a úplného tenzoru napětí, viz [21]. Bud' dále  $\tau$  relaxační čas zave-

dený v sekci 2.1.4. Dále definujeme rovnovážnou distribuční funkci ve tvaru

$$f_k^{\text{eq}} = \rho w_k \left( 1 + \frac{\boldsymbol{\xi}_k \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\boldsymbol{\xi}_k \cdot \mathbf{u})^2}{2c_s^4} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2c_s^2} \right), \quad k \in \{0, \dots, q-1\}, \quad (2.45)$$

kde  $w_k$  představují váhy specifické pro vybraný rychlostní model. Konkrétně pro model D2Q9 platí

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{4}{9}, \\ w_1 &= w_2 = w_3 = w_4 = \frac{1}{9}, \\ w_5 &= w_6 = w_7 = w_8 = \frac{1}{36}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Pro dynamický tenzor napětí pak platí vztah

$$\sigma_{ij}^\mu(\mathbf{x}, t) = \left( 1 - \frac{\Delta t}{2\tau} \right) \sum_{k=0}^{q-1} f_k^{\text{neq}}(\mathbf{x}, t) \xi_{k,1} \xi_{k,2}, \quad (2.47)$$

kde  $f_k^{\text{neq}}$  je nerovnovážná distribuční funkce definovaná jako  $f_k^{\text{neq}} = f_k - f_k^{\text{eq}}$ . Úplný tenzor napětí splňuje vztah (2.44), kde pro  $\sigma_{ij}^\mu$  využijeme (2.47).

### Aproximace úplného tenzoru napětí

Pomocí Chapmanova-Enskogova asymptotického rozvoje je také možné odvodit explicitní vztah přímo pro složky úplného tenzoru napětí. V tomto odvození jsou tedy zahrnuty i diagonální členy obsahující tlak. Pro složky úplného tenzoru dle tohoto odvození platí tvar

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\rho c_s^2}{2\tau} \delta_{ij} - \left( 1 - \frac{\Delta t}{2\tau} \right) \sum_{k=0}^{q-1} f_k (\xi_{k,1} - u_1)(\xi_{k,2} - u_2), \quad (2.48)$$

detaillnější odvození je k nahlédnutí v [22].

### Aproximace úplného tenzoru napětí za použití modifikované rovnovážné funkce

Poslední model, na jehož základě je odvozen vztah pro výpočet úplného tenzoru napětí, je založen na využití rozdílného tvaru rovnovážné distribuční funkce. V tomto případě je uvažován tvar

$$f_k^{\text{eq}} = w_k \left( \rho + \frac{\boldsymbol{\xi}_k \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\boldsymbol{\xi}_k \cdot \mathbf{u})^2}{2c_s^4} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2c_s^2} \right). \quad (2.49)$$

Lze ukázat, že při odvození pomocí rovnovážné funkce ve tvaru (2.49) platí pro úplný tenzor napětí vztah

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\rho c_s^2}{2\tau} \delta_{ij} - \left( 1 - \frac{\Delta t}{2\tau} \right) \sum_{k=0}^{q-1} f_k (\xi_{k,1} - u_1)(\xi_{k,2} - u_2) - \left( \frac{3\rho}{c_s^2} - 1 \right) u_1 u_2, \quad (2.50)$$

detaily odvození lze najít v [23].

### 2.1.5.3 Označení způsobů výpočtu

V praktické části budeme využívat výše popsané způsoby pro výpočet tenzoru napětí, proto pro snadnější orientaci v textu zavedeme stručná označení pro tyto různé způsoby. Tato označení jsou uvedeny v tab. 2.1. Názvy byly zavedeny dle jmen autorů článků, z kterých byly vztahy pro výpočet převzaty.

Název metody výpočtu	Označení
Aproximace diferencí	Diference
Aproximace dynamického tenzoru napětí [20]	Mei
Aproximace úplného tenzoru napětí [9]	Inamuro
Aproximace úplného tenzoru napětí za použití modifikované $f^{\text{eq}}$ [23]	Suzuki

Tabulka 2.1: Stručná označení použitých metod lokálního výpočtu tenzoru napětí ze sekce 2.1.5.2.

### 2.1.6 Počáteční podmínky

Uvažujme nyní oblast definovanou vztahem (2.10). K nastavení počáteční podmínky využijeme rovnovážnou distribuční funkci  $f^{\text{eq}}$ . Definujeme počáteční rozložení  $\rho$  a  $\mathbf{u}$  jako  $\rho_{\text{ini}}$ , resp.  $\mathbf{u}_{\text{ini}}$ . Poté pro každý uzel  $\mathbf{x} \in \hat{\Omega}$  v čase  $t = 0$  bude platit

$$f_k(\mathbf{x}, 0) = f_k^{\text{eq}}(\rho_{\text{ini}}(\mathbf{x}), \mathbf{u}_{\text{ini}}(\mathbf{x})), \quad k \in \{0, 1, \dots, q-1\}. \quad (2.51)$$

Jednoznačnou výhodou tohoto přístupu je jeho malá náročnost na implementaci a čas výpočtu. Nevýhodou je však fakt, že nemusí být zcela konzistentní s předepsanými okrajovými podmínkami, viz [8].

Existuje i přesnější přístup, jak předepsat počáteční podmínky, např. viz [8]. Implementačně je však tento přístup složitější, proto bude v této práci pro jednoduchost použit pouze předpis pomocí (2.51).

### 2.1.7 Okrajové podmínky

V této sekci popíšeme několik okrajových podmínek, které budou následně využity v praktické části této práce.

#### 2.1.7.1 Odtoková okrajová podmínka

Jako první rozebereme okrajovou podmínku, kterou budeme předepisovat na odtokové části hranice  $\partial\hat{\Omega}_{\text{out}}$ . Podmínku budeme předepisovat v souladu s [16] a uvažujeme rychlostní model D2Q9.

Uzly na hranici  $\partial\hat{\Omega}_{\text{out}}$  postrádají uzly, ze kterých by došlo k převzetí hodnoty distribuční funkce ve směrech  $\xi_k$ ,  $k \in \{3, 6, 7\}$ . Jednoduchou metodou, jak tento problém vyřešit a efektivně tak oblast uzavřít, je nahradit chybějící distribuční funkce hodnotami z uzlů z předechozí vrstvy, tj. zkopírovat distribuční funkce z příslušných sousedních uzlů ve směru od hranice do oblasti.

Tato podmínka odpovídá předepsání nulové derivace těchto distribučních funkcí v normálovém směru  $\mathbf{n}$  k hranici, tj. platí

$$\nabla f_k \cdot \mathbf{n} = 0, \quad k \in \{3, 6, 7\}, \quad (2.52)$$

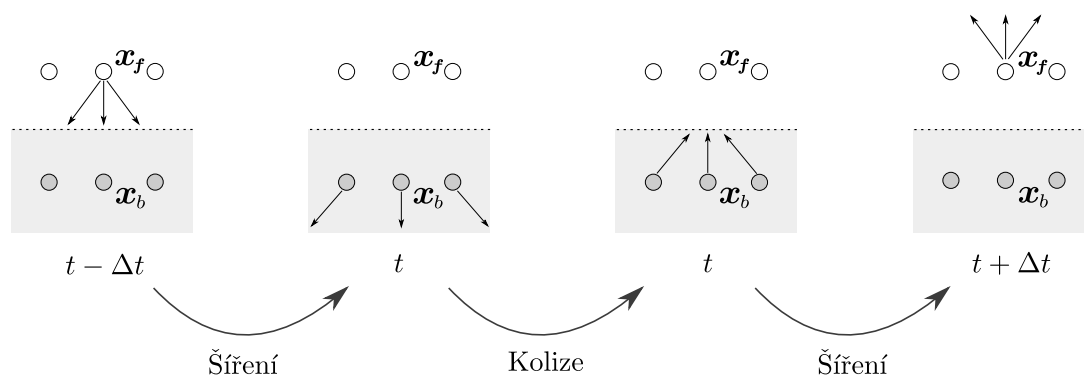
kde indexy odpovídají označení rychlostí v obr. 2.1.

### 2.1.7.2 Bounce-back okrajová podmínka

Bounce-back okrajová podmínka patří v LBM mezi nejběžněji používané okrajové podmínky simulující chování tekutiny na hranici s pevnou látkou. I přesto, že se jedná o jednu z prvních takových navržených okrajových podmínek, je stále velice populární, a to zejména díky jednoduchosti implementace. Na rozhraní tekutiny a rigidní látky předpokládáme neklouzavou (anglicky *no-slip*) okrajovou podmínku, tj. uvažujeme, že je zde rychlost tekutiny nulová. Tento předpoklad bounce-back okrajová podmínka splňuje. Podrobně je tato okrajová podmínka rozebrána v [8].

Jak název této okrajové podmínky napovídá, její hlavní princip je takový, že uvažujeme odraz hypotetických částic narážejících na rigidní pevnou látku zpět do směrů, ze kterých původně na rozhraní doputovaly. Bounce-back okrajová podmínka může být realizována dvěma různými způsoby, které jsou nazývány:

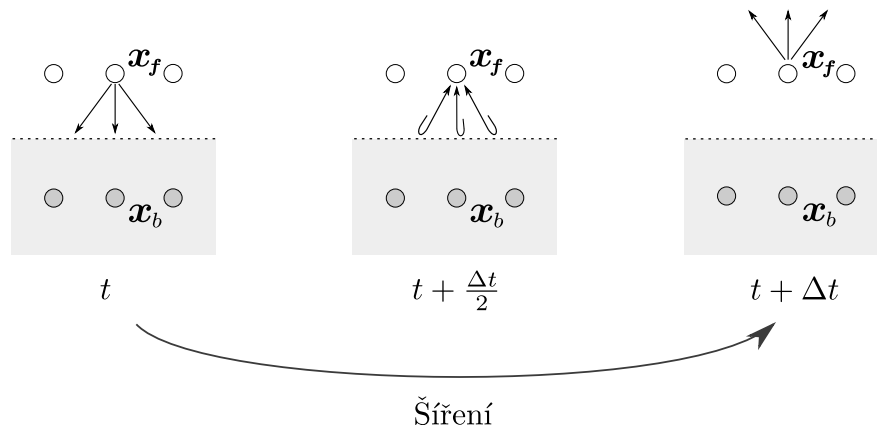
- **Fullway bounce-back**, při kterém je uvažováno, že hypotetické částice při odrazu doputují až do uzlů pevné látky, kde je jejich směr v dalším kroku šíření obrácen, viz obr. 2.6,



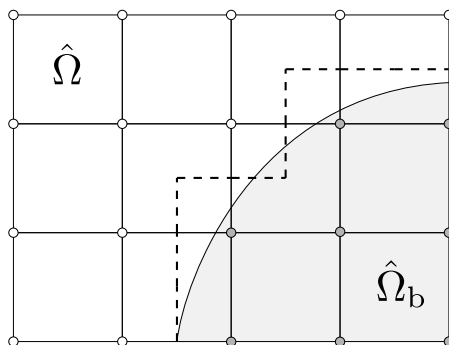
Obrázek 2.6: Schématické znázornění fullway bounce-back okrajové podmínky. Šipky představují směr šíření hypotetické částice, oblast s šedou barvou představuje pevné těleso a čárkovaná hranice odpovídá pozici rozhraní.

- **Halfway bounce-back**, při kterém je uvažováno, že hypotetické částice při odrazu doputují pouze do poloviny vzdálenosti mezi uzlem tekutiny a látky, přičemž jejich směr je obrácen během jednoho kroku šíření, viz obr. 2.7.

I přesto, že se názvy typů této okrajové podmínky liší, v obou přístupech je uvažováno, že se rozhraní nachází v polovině vzdálenosti mezi uzly tekutiny a pevné látky, viz obr. 2.8. Tato skutečnost nepůsobí problémy při modelování proudění okolo rovných zdí, které jsou rovnoběžné s použitou mřížkou. Pro zakřivené hranice nerovnoběžné s mřížkou však metoda bounce-back dává za vznik "schodovitému" tvaru hranice, a tedy neposkytuje vhodnou aproximaci skutečné pozice rozhraní, viz obr. 2.8.



Obrázek 2.7: Schématické znázornění half-way bounce-back okrajové podmínky. Šipky představují směr šíření hypotetické částice, oblast s šedou barvou představuje pevné těleso a čárkovaná hranice odpovídá pozici rozhraní.



Obrázek 2.8: "Schodovitý" tvar hranice vznikající při použití bounce-back okrajové podmínky.

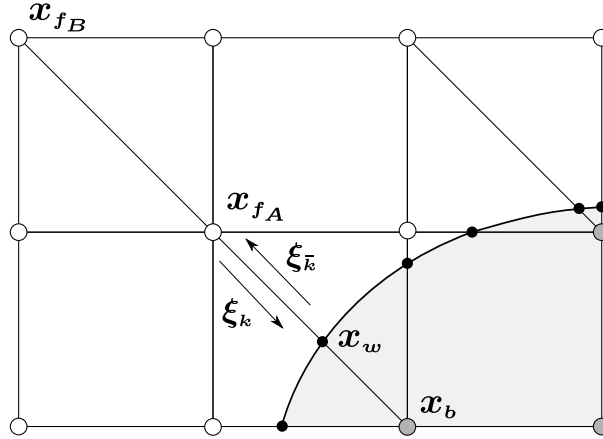
### 2.1.7.3 Bouzidiho interpolační okrajová podmínka

Bouzidiho okrajová podmínka uvažující reálný tvar pevné překážky byla poprvé navržena v [24]. V tomto schématu je pro výpočet distribuční funkce aplikována interpolace, pro jejíž popis definujeme bezrozměrný parametr  $\Theta$  vztahem

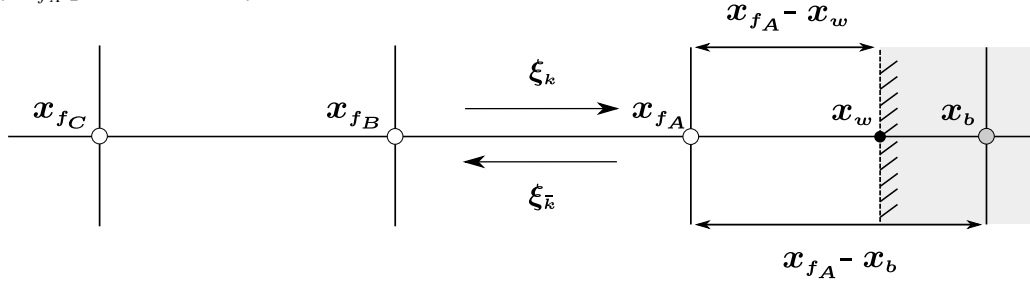
$$\Theta = \frac{\|\mathbf{x}_{f_A} - \mathbf{x}_w\|}{\|\mathbf{x}_{f_A} - \mathbf{x}_b\|}, \quad (2.53)$$

kde  $\mathbf{x}_f$  je uzel tekutiny na hranici,  $\mathbf{x}_b = \mathbf{x}_{f_A} + \Delta t \boldsymbol{\xi}_k$  je uzel pevné překážky a dále  $\mathbf{x}_w$  je bod na reálné hranici objektu tak, jak je ilustrováno na obr. 2.9 a obr. 2.10.

Uvažujme dále nulovou rychlost v hraničních bodech. Tvar pro výpočet distribuční funkce pomocí Bouzidiho schématu závisí na hodnotě parametru  $\Theta$ . K odvození můžeme použít lineární nebo kvadratickou interpolaci [24].



Obrázek 2.9: Schématické znázornění Bouzidiho interpolační podmínky. Černé body na skutečné hranici tělesa (šedá oblast) představují pozice všech bodů  $\mathbf{x}_w$ , které slouží k výpočtu parametru  $\Theta$  pro různé body tekutiny  $\mathbf{x}_{fA}$  pro různé směry.



Obrázek 2.10: Ilustrace významu bodů  $\mathbf{x}_{fB}$  a  $\mathbf{x}_{fC}$  v jedné dimenzi. Dále je ilustrován význam členů vyskytujících se ve výpočtu parametru  $\Theta$ .

Při použití lineární interpolace má Bouzidiho okrajová podmínka tvar

$$\begin{aligned} \Theta < \frac{1}{2} : \quad f_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{fA}, t + \Delta t) &= 2\Theta f_k^*(\mathbf{x}_{fA}, t) + (1 - 2\Theta) f_k^*(\mathbf{x}_{fB}, t), \\ \Theta \geq \frac{1}{2} : \quad f_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{fA}, t + \Delta t) &= \frac{1}{2\Theta} f_k^*(\mathbf{x}_{fA}, t) + \frac{2\Theta - 1}{2\Theta} f_k^*(\mathbf{x}_{fA}, t), \end{aligned} \quad (2.54)$$

kde index  $\bar{k}$  splňuje  $\xi_{\bar{k}} = -\xi_k$ .

Situace, kdy  $\Theta < 1/2$  může být interpretována tak, že je reálná hranice blíže uzlu pevného tělesa. Naopak pro  $\Theta \geq 1/2$  platí, že je skutečná hranice blíže uzlu tekutiny.

Použitím kvadratické interpolace získáme pro Bouzidiho okrajovou podmínku tvar

$$\begin{aligned} \Theta < \frac{1}{2} : \quad f_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{fA}, t + \Delta t) &= \Theta(1 + 2\Theta) f_k^*(\mathbf{x}_{fA}, t) + (1 - 4\Theta^2) f_k^*(\mathbf{x}_{fB}, t) - \Theta(1 - 2\Theta) f_k^*(\mathbf{x}_{fC}, t), \\ \Theta \geq \frac{1}{2} : \quad f_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{fA}, t + \Delta t) &= \frac{1}{\Theta(2\Theta + 1)} f_k^*(\mathbf{x}_{fA}, t) + \frac{2\Theta - 1}{\Theta} f_k^*(\mathbf{x}_{fA}, t) - \frac{2\Theta - 1}{2\Theta + 1} f_k^*(\mathbf{x}_{fB}, t), \end{aligned} \quad (2.55)$$

kde význam bodu  $\mathbf{x}_{fC}$  je ilustrován na obr. 2.10.

Je snadné nahlédnout, že Bouzidiho okrajová podmínka zobecňuje halfway bounce-back podmínku, pro kterou by platilo  $\Theta = 1/2$ .

### 2.1.7.4 Sjedenená interpolační okrajová podmínka

Bouzidiho interpolační schéma používá dva různé vzorce na základě hodnoty parametru  $\Theta$ . V [25] však bylo odvozeno interpolační schéma, které oba případy sjednocuje v jeden společný tvar pro všechny hodnoty  $\Theta$ . Opět lze pro jeho odvození využít lineární nebo kvadratickou interpolaci. Při použití lineární interpolace má tato sjedenená okrajová podmínka tvar

$$f_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{f_A}, t + \Delta t) = \frac{1}{1 + \Theta} \left[ \Theta f_k(\mathbf{x}_{f_A}, t) + (1 - \Theta) f_k(\mathbf{x}_{f_B}, t) + \Theta \tilde{f}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{f_A}, t) \right]. \quad (2.56)$$

Použitím kvadratické interpolace získáme pro sjedenenou okrajovou podmínku tvar

$$f_{\bar{k}}(\mathbf{x}_f, t + \Delta t) = \frac{1}{(1 + \Theta)(2 + \Theta)} \left[ \Theta(1 + \Theta) f_k(\mathbf{x}_{f_A}, t) + 2(1 - \Theta^2) f_k(\mathbf{x}_{f_B}, t) - \Theta(1 - \Theta) f_k(\mathbf{x}_{f_C}, t) + 2\Theta(2 + \Theta) \tilde{f}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{f_A}, t) - \Theta(1 + \Theta) \tilde{f}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{f_B}, t) \right]. \quad (2.57)$$

### 2.1.7.5 Označení okrajových podmínek

V praktické části budeme testovat jednotlivé okrajové podmínky popsané v rámci této kapitoly. Bude zkoumán jejich vliv při předepsání na hranici obtékaného tělesa. Proto podobně jako pro různé způsoby výpočtu tenzoru napětí zavedeme pro pozdější snazší orientaci v textu stručná označení testovaných podmínek podle tab. 2.2.

Název okrajové podmínky	Označení
Full-way bounce-back okrajová podmínka	Bounce-back
Bouzidiho okrajová podmínka s lineární interpolací	Bouzidi 1
Bouzidiho okrajová podmínka s kvadratickou interpolací	Bouzidi 2
Sjedenená okrajová podmínka s lineární interpolací	Sjedenená 1
Sjedenená okrajová podmínka s kvadratickou interpolací	Sjedenená 2

Tabulka 2.2: Stručná označení použitých okrajových podmínek ze sekce 2.1.7 testovaných na hranici obtékaného tělesa.

### 2.1.8 Algoritmus LBM

V několika krocích nyní shrneme samotný algoritmus LBM. Vývojový diagram algoritmu je k nahlédnutí na obr. 2.11.

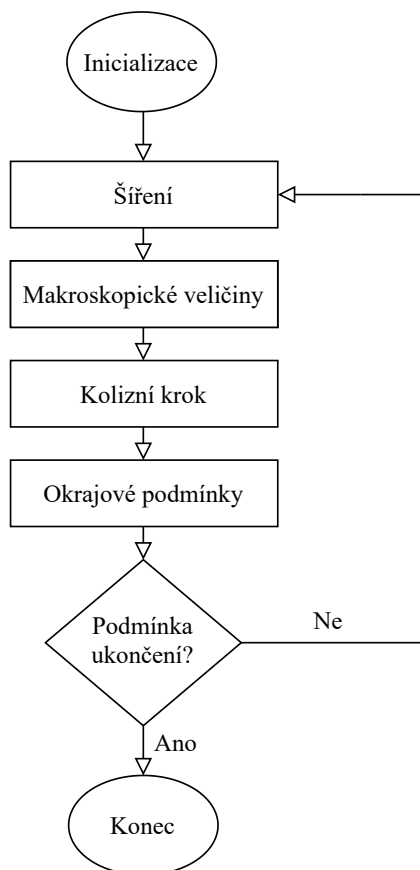
1. **Inicializace:** Nastavení počátečních podmínek v mřížce, viz sekce 2.1.6.
2. **Cyklus:** Kroky se opakují, dokud není splněna podmínka ukončení, která je zadána uživatelem.
  - (a) **Šíření:** Propagace postkolizních distribučních funkcí  $f_k^*$  v příslušných směrech  $\xi_k$ .
  - (b) **Výpočet hodnot makroskopických veličin:** Výpočet makroskopických veličin pomocí vztahů (2.18).



(c) **Kolize:** Výpočet postkolizního stavu distribuční funkce pomocí (2.17).

(d) **Řešení okrajových podmínek:** Řešení okrajových podmínek diskutovaných v sekci 2.1.7.

### 3. Konec algoritmu.



Obrázek 2.11: Vývojový diagram algoritmu LBM.

## 2.2 Poznámky k implementaci

V této sekci popíšeme některé části kódu, které byly v rámci této práce implementovány. Nejprve rozebereme obecnou strukturu kódu a popíšeme generátor vstupních dat, který byl v rámci práce implementovaný. Následně popíšeme příklad realizace jedné z interpolačních okrajových podmínek popsanych v sekci 2.1.7.

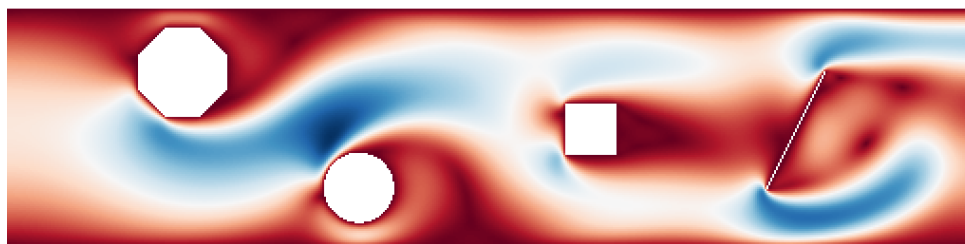
### 2.2.1 Generování vstupních dat a struktura kódu

V rámci této práce budeme uvažovat pouze úlohy, ve kterých je hranice obtékaného tělesa nepohyblivá. Veškeré charakteristiky týkající se geometrie lze pak určit již před samotným spuštěním simulace. Z tohoto důvodu bylo navrženo schéma, ve kterém jsou nejprve vygenerována vstupní data nutná pro simulaci a až následně jsou spuštěny samotné numerické výpočty využívající tato data. Úloha je popsána uživatelem pomocí parametrů, kterými jsou rozměry výpočetní oblasti a rozlišení diskretní mřížky využití v LBM.

V programovacím jazyce Python byl implementován modul `DataGenerator`, který obsahuje třídy reprezentující různé geometrické objekty, které je možné následně v numerické simulaci využít. Jmenovitě byly implementovány následující třídy:

- `Line` - třída reprezentující úsečku,
- `Polygon` - třída reprezentující pravidelný mnohoúhelník,
- `Circle` - třída reprezentující kruh,
- `SVGCurve` - třída reprezentující křivku, která byla vytvořena ve formátu SVG (z anglického *Scalable Vector Graphics* [26]).

Pro generování úseček při práci se třídami `Line`, `Polygon` a `SVGCurve` byl bez použití externích knihoven implementován Bresenhamův algoritmus [27]. Tento algoritmus patří k základním algoritmům pro vykreslování úseček do rasterové mřížky a byl zvolen za účelem dosažení co nejvíce přesné projekce objektu na diskretní mřížku. Různé geometrické útvary, které je možné generovat, jsou k nahlédnutí na obr. 2.12.



Obrázek 2.12: Příklady objektů, které lze generovat a následně využít v numerické simulaci. Vizualizace simulace je realizována pomocí knihovny SDL. Barevná škála vyjadřuje velikost rychlosti (od červené barvy po modrou) tekutiny, která dané objekty obtéká jako řešení LBM.

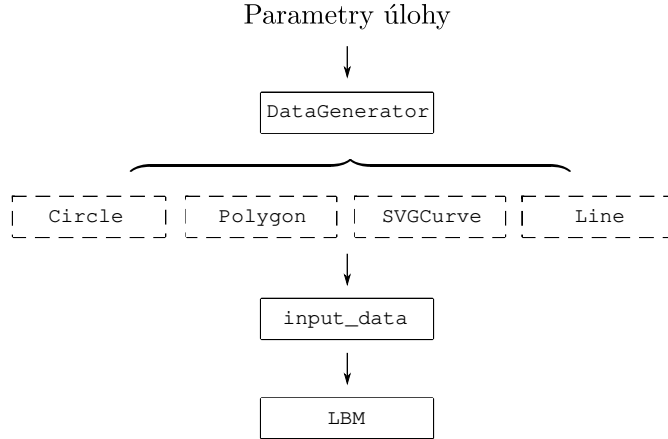
V rámci generování vstupních dat je nejprve každému uzlu mřížky přiřazen jeho typ. Rozlišujeme mezi typy reprezentující tekutinu, hranici tělesa a vrstvu uzlů tělesa bezprostředně sousedících s jeho hranicí. U tříd `Polygon` a `Circle` zavádíme dále typ uzlu reprezentující vnitřek tělesa. V uzlech hranice tělesa jsou poté vypočteny veličiny, které mohou být použity pro výpočet síly pomocí metody integrace tenzoru napětí a při výpočtu interpolačních okrajových podmínek, tj. jednotkové normálové vektory a parametry  $\Theta$ , viz (2.53). Výpočet parametru  $\Theta$  je blíže rozebrán v sekci 2.2.2.

Pro každý uzel mřížky jsou následně jeho typ, hodnoty normálového vektoru a hodnoty parametru  $\Theta$  uloženy do textového souboru `input_data`. Tento soubor je dále předán programu realizujícímu numerický výpočet dané úlohy pomocí LBM. Jak již bylo zmíněno v úvodu práce, pro numerické řešení byl využit kód vyvíjený na katedře matematiky FJFI ČVUT v Praze, který slouží k řešení Navierových-Stokesových rovnic pro newtonovskou nestlačitelnou tekutinu. Program je implementovaný v jazyce C++ a využívá paralelizace na GPU s využitím platformy CUDA. V kódu jsou jako typy LBM implementovány varianty CLBM a SRT. Pro účely této práce byla v kódu provedena řada úprav, zejména pak:

- implementace metody integrace tenzoru napětí pro výpočet síly pomocí difference,
- implementace různých způsobů lokálního výpočtu tenzoru napětí,

- implementace interpolačních okrajových podmínek,
- výpočet sledovaných veličin a jejich následný výpis do souborů.

Schéma kódu je k nahlédnutí na obr. 2.13.



Obrázek 2.13: Schéma ilustrující propojení modulu DataGenerator a programu, který realizuje numerický výpočet pomocí LBM.

## 2.2.2 Implementace interpolačních okrajových podmínek

V této sekci popíšeme, jakým způsobem byly implementovány interpolační okrajové podmínky popsané v sekci 2.1.7. Postup popíšeme pro Bouzidiho okrajovou podmínku s lineární interpolací, analogicky však byly řešeny i ostatní okrajové podmínky, které všechny používají hodnoty parametru  $\Theta$ , viz (2.53). Popíšeme nejdříve výpočet tohoto parametru.

Uvažujme těleso  $\Omega_b$  obtékané tekutinou. Parametr  $\Theta$  je nutné vypočítat ve všech bodech  $\mathbf{x} \in \partial\hat{\Omega}_b$ . V každém takovém bodě je pak nutné vypočítat hodnotu  $\Theta$  pro každý ze směrů možného šíření kromě směru odpovídajícímu  $\xi_0$ . V rámci modelu D2Q9 tedy celkem určíme 8 hodnot pro každý bod hranice, označme je  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_8$ , kde číslo indexu odpovídá příslušnému směru, viz obr. 2.1b. Zdůrazněme, že průsečík  $\mathbf{x}_w$  s hranicí nemůže existovat pro každý ze směrů (viz obr. 2.9). Ve směrech, pro které tento průsečík neexistuje, parametr  $\Theta_i$  nedefinujeme a provádíme v nich standardní šíření z okolních uzlů. Z implementačních důvodů pro tyto směry pokládáme  $\Theta_i = -1$ .

Pro určitost dále uvažujme, že v daném směru průsečík  $\mathbf{x}_w$  existuje, a že analytický popis hranice obtékaného tělesa  $\partial\Omega_b$  splňuje vazbu

$$\phi(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_b. \quad (2.58)$$

S použitím značení z obr. 2.9 parametrizujme úsečku spojující body  $\mathbf{x}_{f_A} = (x_{f_A}, y_{f_A})$  a  $\mathbf{x}_b = (x_b, y_b)$  jako

$$\begin{aligned} x &= s x_{f_A} + (1 - s) x_b, \\ y &= s y_{f_A} + (1 - s) y_b, \end{aligned} \quad (2.59)$$

kde  $s \in (0, 1)$ . Dále dosazením (2.59) do rovnice vazby (2.58) získáme hodnotu  $s$ . Je snadné nahlédnout, že získaná hodnota  $s$  odpovídá hledané hodnotě parametru  $\Theta_i$ , a není tedy nutné explicitně počítat souřadnice bodu  $\mathbf{x}_w$  a použít vztah (2.53).

Výše popsany postup lze využít pro libovolný tvar hranice popsany vazbou, přičemž v rámci implementace musí být tato vazba explicitně určená. V úlohách v kapitole 3 za vazbu  $\phi$  volíme rovnici kružnice.

Jak již bylo zmíněno, v rámci implementace jsme pro směry, pro které neexistuje průsečík s hranicí, položili  $\Theta_i = -1$ . Dále jsme hodnotu  $\Theta_i$  použili k určení typu šíření v daném směru. Pro  $\Theta_i < 0$ , tj.  $\Theta_i = -1$ , provádíme standardní šíření, pro hodnoty  $0 \leq \Theta_i \leq 1$  pak zvolíme vzorec na základě hodnoty  $\Theta_i$  v souladu se vztahy pro Bouzidiho okrajovou podmínku. Funkce `f_bouzidi_1`, která realizuje Bouzidiho okrajovou podmínku s lineární interpolací, je k nahlédnutí v příkladu kódu 2.1. Podotkneme, že v příkladu kódu 2.1 označuje  $(x_s, y_s)$  bod, ze kterého by do bodu  $\mathbf{x}_{fA}$  bylo provedeno standardní šíření v příslušném směru. Dále metoda `SD.cdf()` slouží k získání hodnoty postkolizní distribuční funkce pro daný směr a uzel. Zbylé části kódu odpovídají značení ze vztahu pro Bouzidiho okrajovou podmínku (2.54).

```

1  template< typename LBM_DATA >
2  CUDA_HOSTDEV static dreal f_bouzidi_1( LBM_DATA &SD, dreal theta, int k,
3    int kpruh, didx xfA, didx yfA, didx xfB, didx yfB, didx xs, didx ys )
4  {
5    // Standardni sireni:
6    if (theta < 0) {
7        return SD.cdf( kpruh, xs, ys );
8    }
9    // Bouzidi pro theta < 0.5, (2.54):
10   else if (theta < 0.5) {
11       return (1.0 - 2.0 * theta) * SD.cdf( k, xfB, yfB ) +
12          (2.0 * theta) * SD.cdf( k, xfA, yfA );
13   }
14   // Bouzidi pro theta >= 0.5, (2.54):
15   else {
16       return (1.0 - 0.5 / theta) * SD.cdf( kpruh, xfA, yfA ) +
17          (0.5 / theta) * SD.cdf( k, xfA, yfA );
18   }
19 }

```

Příklad kódu 2.1: Funkce realizující Bouzidiho okrajovou podmínku s lineární interpolací.

## Kapitola 3

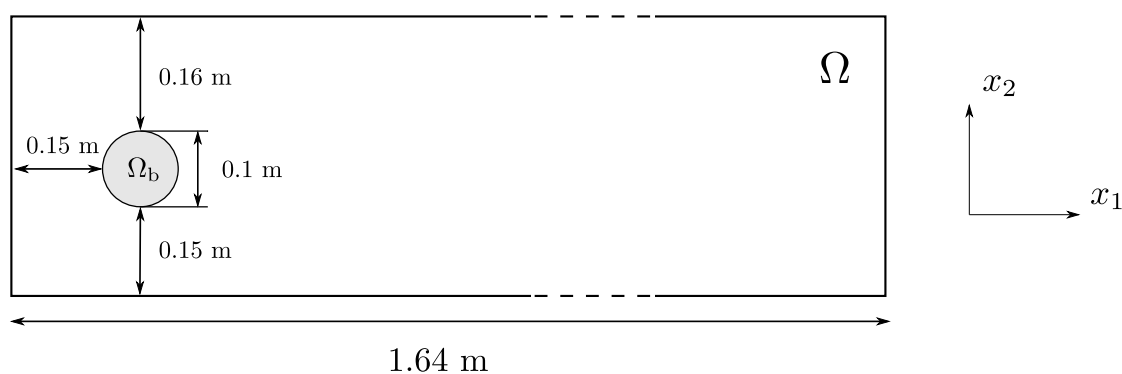
# Numerické výsledky

V této kapitole uvedeme výsledky provedených numerických simulací. Bude k nim využita mřížková Boltzmannova metoda popsaná v kapitole 2.1 a bude uvažován matematický model popsaný v kapitole 1.

Hlavním cílem numerických simulací je ověřit správnost implementace výpočtu síly pomocí integrace tenzoru napětí, viz sekce 2.1.5. Postupně ověříme základní implementaci s využitím diferencí, dále pak využijeme vztahy pro lokální výpočet úplného tenzoru napětí. Předmětem zkoumání bude dále vliv volby okrajové podmínky volené na hranici obtékaného tělesa v souvislosti se zakřivenou geometrií hranice. Poté prozkoumáme vliv nahrazení hranice tělesa po částech lineární křivkou pomocí množiny lagrangeovských bodů. Na závěr na modelové úloze demonstrujeme implementované metody a představíme další směr navazujícího výzkumu.

### 3.1 Definice testovací úlohy

Kromě poslední numerické simulace využijeme ve všech simulacích k ověření testovací úlohu a referenční hodnoty převzaté z [7]. Uvažujeme dvourozměrnou oblast  $\Omega$  s rozměry  $(0; 4H) \times (0; H)$ , kde  $H = 0,41$  m, v níž je umístěné rigidní těleso  $\Omega_b$  ve formě kruhu o poloměru  $r = 0,05$  m, viz obr. 3.1.



Obrázek 3.1: Schéma výpočetní oblasti s umístěným kruhem, testovací úloha převzatá z [7].

Pro porovnání budeme využívat hodnoty bezrozměrných koeficientů odporu  $c_D$  a vztlaku  $c_L$  a jejich vypočtené hodnoty budeme porovnávat s referenčními hodnotami z [7]. Bezrozměrné koeficienty odporu,

resp. vztlaku jsou definované vztahy

$$c_D = \frac{2F_1}{\rho U_\infty^2} D, \quad (3.1a)$$

$$c_L = \frac{2F_2}{\rho U_\infty^2} D, \quad (3.1b)$$

kde  $\mathbf{F}$  je vektor celkové síly působící na těleso,  $U_\infty$  [ $\text{ms}^{-1}$ ] je charakteristická rychlost a  $D$  je průměr válce. Numerické simulace budeme v souladu s [7] provádět pro dvě různé hodnoty charakteristické rychlosti  $U_\infty = 0,3 \text{ m s}^{-1}$ , resp.  $U_\infty = 1,5 \text{ m s}^{-1}$ , které odpovídají hodnotě  $\text{Re} = 20$ , resp.  $\text{Re} = 100$ . Pro případ  $\text{Re} = 20$  budeme v souladu s [7] hledat časově zprůměrovanou výslednou hodnotu bezrozměrných koeficientů, naopak v případě  $\text{Re} = 100$  budeme hledat maximální hodnotu těchto parametrů vždy v časovém intervalu  $\langle 10 \text{ s}; 25 \text{ s} \rangle$ .

Referenční hodnoty koeficientů uvedené v [7] jsou uvedené v tabulce 3.1.

$U_\infty$	Re	Rozsah koeficientu odporu $c_D$	Rozsah koeficientu vztlaku $c_L$
$0,3 \text{ m s}^{-1}$	20	5,57 – 5,59	0,0104 – 0,0110
$1,5 \text{ m s}^{-1}$	100	3,22 – 3,24	0,9900 – 1,0100

Tabulka 3.1: Hodnoty Reynoldsova čísla a referenční hodnoty  $c_D$  a  $c_L$  pro různé hodnoty  $U_\infty$  uvedené v [7].

Rychlost na vstupu budeme předepisovat parabolickým profilem ve tvaru

$$u_1(\mathbf{x}, t) = 4U_\infty \frac{x_2}{H} \left(1 - \frac{x_2}{H}\right), \quad u_2(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\hat{\Omega}_{\text{in}}. \quad (3.2)$$

Poznamenejme, že v rámci této kapitoly budeme využívat zavedené názvy způsobů výpočtu tenzoru napětí, resp. názvy okrajových podmínek podle tab. 2.1, resp. 2.2. Na závěr uvedeme v tab. 3.2 seznam úloh, které budou v rámci této kapitoly zkoumány.

Úloha	Popis	Strana
3.1	Výpočet odporového koeficientu $c_D$ a vztlakového koeficientu $c_L$ metodou integrace tenzoru napětí s použitím difference.	40
3.2	Výpočet odporového koeficientu $c_D$ a vztlakového koeficientu $c_L$ metodou integrace tenzoru napětí za použití různých způsobů pro výpočet tenzoru napětí.	43
3.3	Výpočet odporového koeficientu $c_D$ a vztlakového koeficientu $c_L$ metodou integrace tenzoru napětí s použitím lokálního výpočtu pro úplný tenzor napětí a s využitím různých interpolačních okrajových podmínek na hranici obtékaného tělesa.	46
3.4	Výpočet odporového koeficientu $c_D$ a vztlakového koeficientu $c_L$ metodou integrace tenzoru napětí s použitím difference a s využitím různých interpolačních okrajových podmínek na hranici obtékaného tělesa.	49
3.5	Výpočet odporového koeficientu $c_D$ metodou integrace tenzoru napětí s použitím difference při po částech lineární aproximaci hranice obtékaného tělesa.	52
3.6	Výpočet a analýza rozložení působení síly podél hranice obtékaných stěn.	54

Tabulka 3.2: Výčet a popis zkoumaných úloh v rámci kapitoly 3.

## 3.2 Základní úloha

### ÚLOHA 3.1: ZÁKLADNÍ IMPLEMENTACE METODY INTEGRACE TENZORU NAPĚTÍ

Nastavení úlohy:

- $\Omega = (0; 1,64 \text{ m}) \times (0; 0,41 \text{ m})$
- $\nu = 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
- $t \in (0; 25 \text{ s})$

Počáteční a okrajové podmínky:

- Na  $\overline{\Omega}$  volíme počáteční podmínku podle sekce 2.1.6.
- Na  $\partial\hat{\Omega}_{\text{in}}$  volíme rychlost podle vztahu (3.2).
- Na  $\partial\hat{\Omega}_{\text{out}}$  volíme odtokovou okrajovou podmínku dle sekce 2.1.7.1.
- Na  $\partial\hat{\Omega}_{\text{wall}}$  a na  $\partial\hat{\Omega}_{\text{b}}$  volíme fullway bounce-back okrajovou podmínku.

Diskretizace a použité metody:

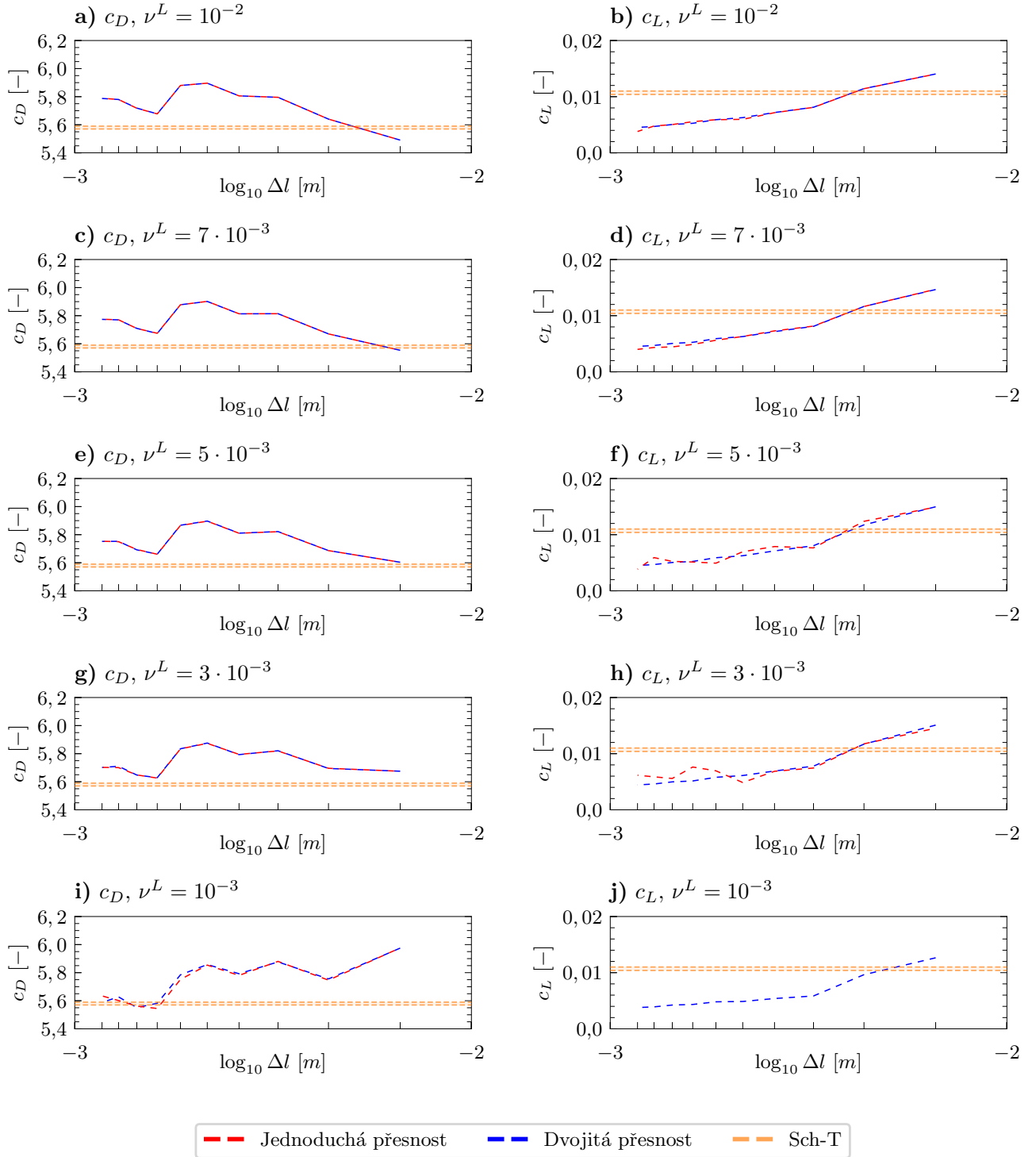
- $\overline{\Omega} = N_x \times N_y$ ,  $N_x = 128i$ ,  $N_y = 32i$ , kde  $i \in \{2, \dots, 11\}$
- $\nu^L \in \{10^{-3}, 3 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-3}, 7 \cdot 10^{-3}, 10^{-2}\}$
- Pro výpočet úplného tenzoru napětí volíme aproximaci pomocí diference podle (2.44).

V této úloze je cílem ověřit základní funkčnost implementace metody integrace tenzoru napětí na základě porovnání numericky získaných hodnot  $c_D$  a  $c_L$  s hodnotami z [7]. Využíváme základní formy výpočtu úplného tenzoru napětí, tj. výpočtu pomocí diference. Dále nezohledňujeme skutečný tvar hranice obtékaného tělesa a na hranici tělesa je předepsána fullway bounce-back okrajová podmínka. Budeme sledovat vliv hodnoty  $\nu^L$  na výsledné hodnoty  $c_D$  a  $c_L$ . Pro každou hodnotu  $\nu^L$  budeme dále diskrétní mřížku postupně zjemňovat a budeme sledovat vliv rozlišení mřížky na hodnoty  $c_D$  a  $c_L$ . V neposlední řadě budeme porovnávat výsledky získané pomocí výpočtů s jednoduchou (32 bitů) a dvojitou (64 bitů) strojovou přesností. Výsledky jsou k nahlédnutí na obr. 3.2 a obr. 3.3.

Implementaci metody integrace tenzoru napětí lze považovat za úspěšnou, jelikož numericky získané hodnoty odpovídají referenčním hodnotám z [7] v uspokojivé míře. Můžeme pozorovat zjevný vliv hodnoty  $\nu^L$  a rozlišení mřížky na hodnoty  $c_D$  a  $c_L$ . Pro úlohu odpovídající  $\text{Re} = 100$  jsou hodnoty bezrozměrných koeficientů vyšší než jsou referenční hodnoty z tab. 3.1. Pro hodnotu  $\nu^L = 10^{-3}$  v úloze odpovídající  $\text{Re} = 20$  výsledné hodnoty  $c_L$  vypočítané v jednoduché strojové z důvodu nestability řádově neodpovídaly referenční hodnotě, proto zde nejsou uvedeny. Ve všech ostatních případech však byly výsledky počítané v jednoduché a dvojitě strojové přesnosti téměř shodné. V dalších úlohách budeme již však pracovat výhradně s dvojitou strojovou přesností.

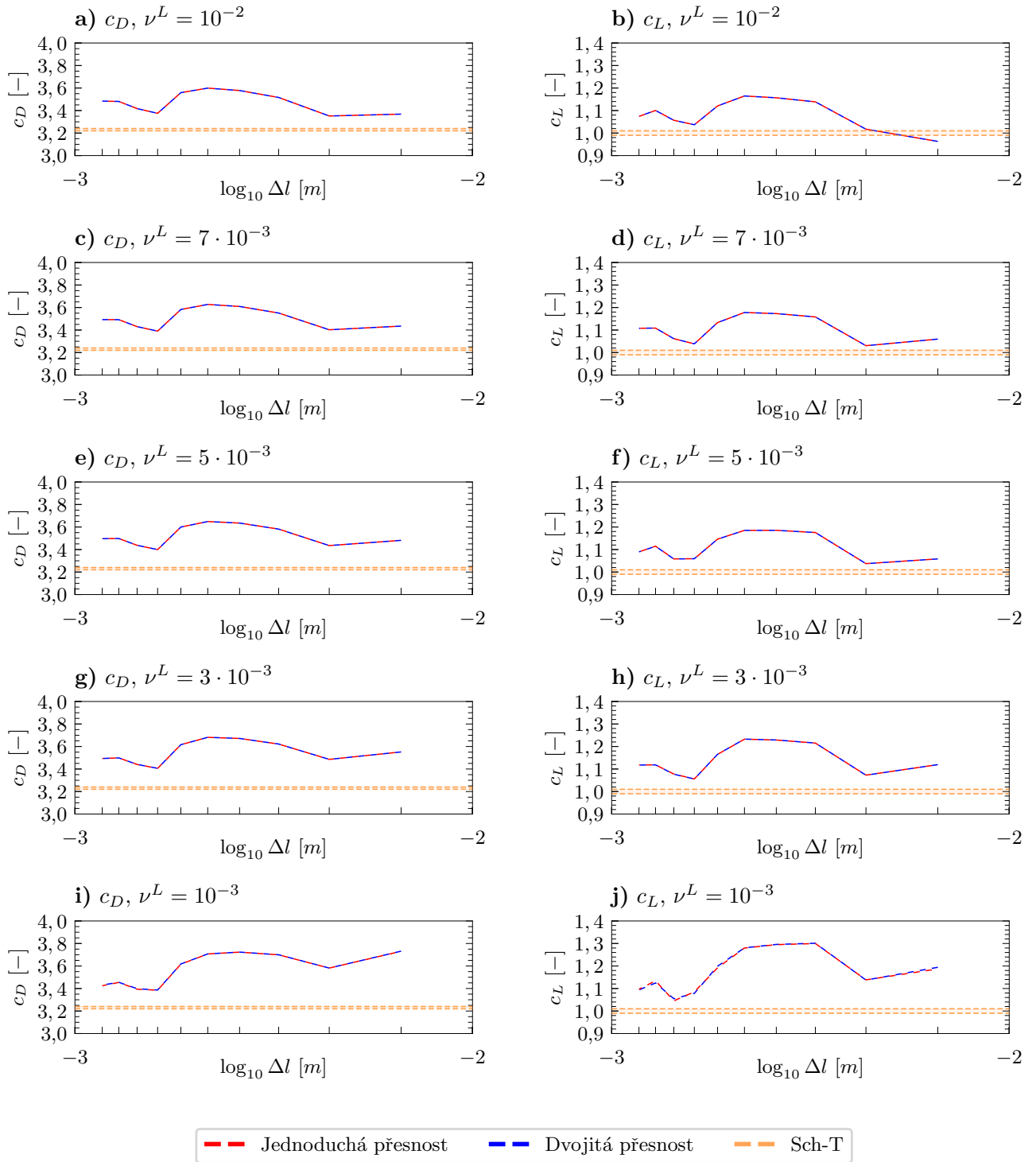


Re = 20



Obrázek 3.2: Grafy průměrných hodnot  $c_D$  a  $c_L$  počítaných v jednoduché a dvojitě přesnosti v závislosti na různé hodnotě  $\nu^L$  a prostorovém kroku  $\Delta l$  diskrétní mřížky  $\hat{\Omega}$  pro úlohu 3.2 s  $U_\infty = 0,3 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\text{Re} = 20$ . Pro výpočet tenzoru napětí byly použity diference a na hranici tělesa byla využita fullway bounce-back okrajová podmínka. Referenční hodnota označená Sch-T odpovídá hodnotě převzaté z [7]. Z důvodu podobnosti hodnot jsou výsledky pro odlišení uvedeny čárkovaně.

Re = 100



Obrázek 3.3: Grafy konečných maximálních hodnot  $c_D$  a  $c_L$  počítaných v jednoduché a dvojitě přesnosti v závislosti na různé hodnotě  $\nu^L$  a prostorovém kroku  $\Delta l$  diskrétní mřížky  $\Omega$  pro úlohu 3.2 s  $U_\infty = 1,5 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\text{Re} = 100$ . Pro výpočet tenzoru napětí byly použity diference a na hranici tělesa byla využita fullway bounce-back okrajová podmínka. Referenční hodnota označená Sch-T odpovídá hodnotě převzaté z [7]. Z důvodu podobnosti hodnot jsou výsledky pro odlišení uvedeny čárkovaně.

### 3.3 Analýza lokálního výpočtu tenzoru napětí

#### ÚLOHA 3.2: LOKÁLNÍ VÝPOČET ÚPLNÉHO TENZORU NAPĚTÍ

Nastavení úlohy:

- $\Omega = (0; 1,64 \text{ m}) \times (0; 0,41 \text{ m})$
- $\nu = 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
- $t \in (0; 25 \text{ s})$

Počáteční a okrajové podmínky:

- Na  $\overline{\Omega}$  volíme počáteční podmínku podle sekce 2.1.6.
- Na  $\partial\hat{\Omega}_{\text{in}}$  volíme rychlost podle vztahu (3.2).
- Na  $\partial\hat{\Omega}_{\text{out}}$  volíme odtokovou okrajovou podmínku dle sekce 2.1.7.1.
- Na  $\partial\hat{\Omega}_{\text{wall}}$  a na  $\partial\hat{\Omega}_{\text{b}}$  volíme fullway bounce-back okrajovou podmínku.

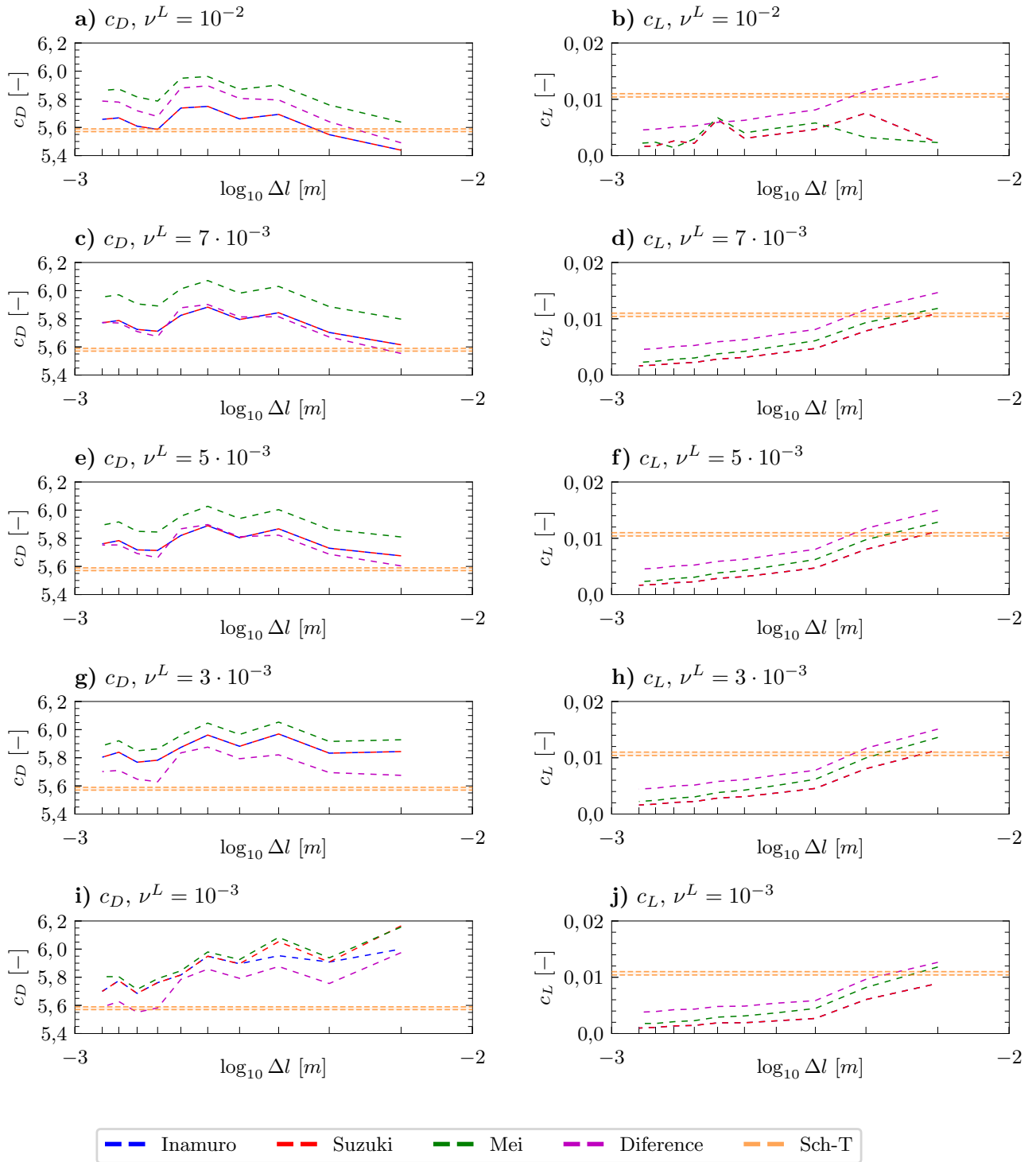
Diskretizace a použité metody:

- $\overline{\hat{\Omega}} = N_x \times N_y$ ,  $N_x = 128i$ ,  $N_y = 32i$ , kde  $i \in \{2, \dots, 11\}$
- $\nu^L \in \{10^{-3}, 3 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-3}, 7 \cdot 10^{-3}, 10^{-2}\}$
- Pro výpočet úplného tenzoru napětí volíme lokální aproximaci pomocí (2.47), (2.48) a (2.50).

V této úloze je cílem otestovat různé způsoby lokálního výpočtu tenzoru napětí, které jsou popsány v sekci 2.1.5.2. Porovnáme výsledky získané pomocí lokálního výpočtu s výsledky získanými v úloze 3.2, kde byly k výpočtu využity diference. Opět nijak nezohledňujeme skutečný tvar hranice obtékaného tělesa a na jeho hranici předepisujeme fullway bounce-back okrajovou podmínku. Podobně jako v úloze 3.2 budeme sledovat vliv hodnoty  $\nu^L$  na výsledné hodnoty  $c_D$  a  $c_L$  a pro každou hodnotu  $\nu^L$  diskrétní mřížku postupně zjemňujeme a budeme opět sledovat vliv rozlišení mřížky na hodnoty  $c_D$  a  $c_L$ . Výsledky jsou k nahlednutí na obr. 3.4.

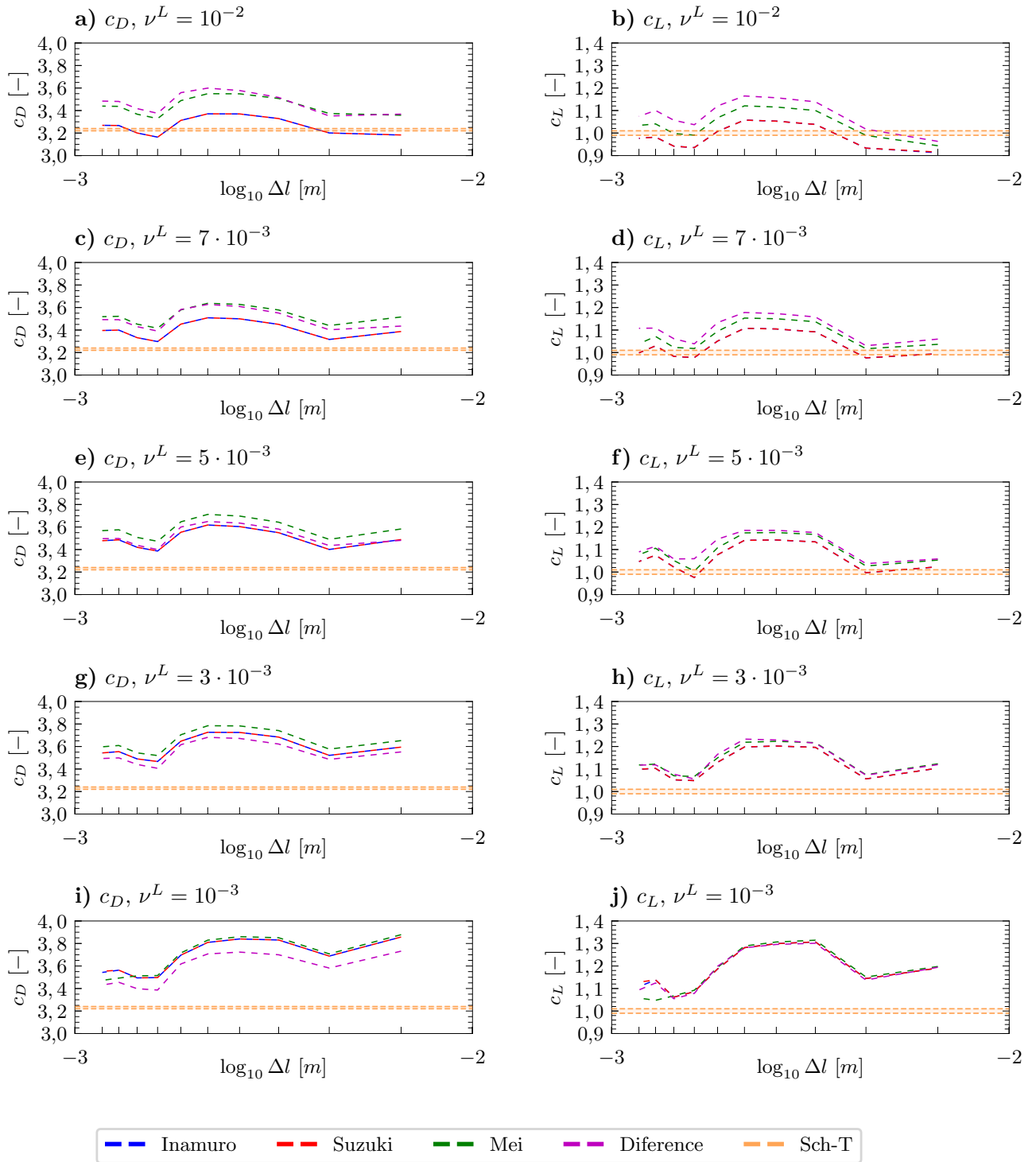
Nelze obecně říci, že by nějaká z testovaných metod lokálního výpočtu tenzoru napětí vedla k lepším výsledkům než metoda diferencí. Lze pozorovat, že se výsledky při aproximaci úplného tenzoru napětí se standardní a modifikovanou rovnovážnou distribuční funkcí výrazně neliší pro žádnou z konfigurací. Při aproximaci dynamického tenzoru napětí dostáváme pro větší hodnoty  $\nu^L$  odlišné výsledky, nicméně se zmenšující se hodnotou  $\nu^L$  se výsledky blíží zbylým metodám pro lokální výpočet tenzoru napětí. Nejdůležitějším pozorováním je, že metody lokálního výpočtu tenzoru napětí při této konfiguraci obecně nepředstavují v případě výpočtu  $c_D$  a  $c_L$  lepší volbu než schéma využívající aproximace pomocí diferencí, což je ukázáno přímým porovnáním hodnot.

Re = 20



Obrázek 3.4: Grafy průměrných hodnot  $c_D$  a  $c_L$  počítaných ve dvojitě přesnosti v závislosti na různé hodnotě  $\nu^L$  a prostorovém kroku  $\Delta l$  diskrétní mřížky  $\hat{\Omega}$  pro úlohu 3.3 s  $U_\infty = 0,2 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\text{Re} = 20$ . Pro výpočet tenzoru napětí byly použity různé způsoby lokálního výpočtu. Na hranici tělesa byla využita fullway bounce-back okrajová podmínka. Referenční hodnota označená Sch-T odpovídá hodnotě převzaté z [7]. Dále byly pro srovnání uvedeny výsledky z úlohy 3.2 obdržené aproximací diferencemi vypočtené dvojitou přesností. Z důvodu podobnosti hodnot jsou výsledky pro odlišení uvedeny čárkovaně.

Re = 100



Obrázek 3.5: Grafy konečných maximálních hodnot  $c_D$  a  $c_L$  počítaných ve dvojitě přesnosti v závislosti na různých hodnotě  $\nu^L$  a prostorovém kroku  $\Delta l$  diskrétní mřížky  $\hat{\Omega}$  pro úlohu 3.3 s  $U_\infty = 1,5 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\text{Re} = 100$ . Pro výpočet tenzoru napětí byly použity různé způsoby lokálního výpočtu. Na hranici tělesa byla využita fullway bounce-back okrajová podmínka. Referenční hodnota označená Sch-T odpovídá hodnotě převzaté z [7]. Dále byly pro srovnání uvedeny výsledky z úlohy 3.2 obdržené aproximací diferencemi vypočtené dvojitou přesností. Z důvodu podobnosti hodnot jsou výsledky pro odlišení uvedeny čárkovaně.

### 3.4 Analýza interpolačních okrajových podmínek

#### ÚLOHA 3.3: VLIV INTERPOLAČNÍCH OKRAJOVÝCH PODMÍNEK PŘI LOKÁLNÍM VÝPOČTU $\sigma_{ij}$

Nastavení úlohy:

- $\Omega = (0; 1,64 \text{ m}) \times (0; 0,41 \text{ m})$
- $\nu = 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
- $t \in (0; 25 \text{ s})$

Počáteční a okrajové podmínky:

- Na  $\bar{\Omega}$  volíme počáteční podmínku podle sekce 2.1.6.
- Na  $\partial\hat{\Omega}_{\text{in}}$  volíme rychlost podle vztahu (3.2).
- Na  $\partial\hat{\Omega}_{\text{out}}$  volíme odtokovou okrajovou podmínku dle sekce 2.1.7.1.
- Na  $\partial\hat{\Omega}_{\text{wall}}$  volíme fullway bounce-back okrajovou podmínku.
- Na  $\partial\hat{\Omega}_{\text{b}}$  volíme postupně okrajovou podmínku Bouzidi 1, Bouzidi 2, Sjednocená 1, Sjednocená 2 (viz legenda v tab. 2.2).

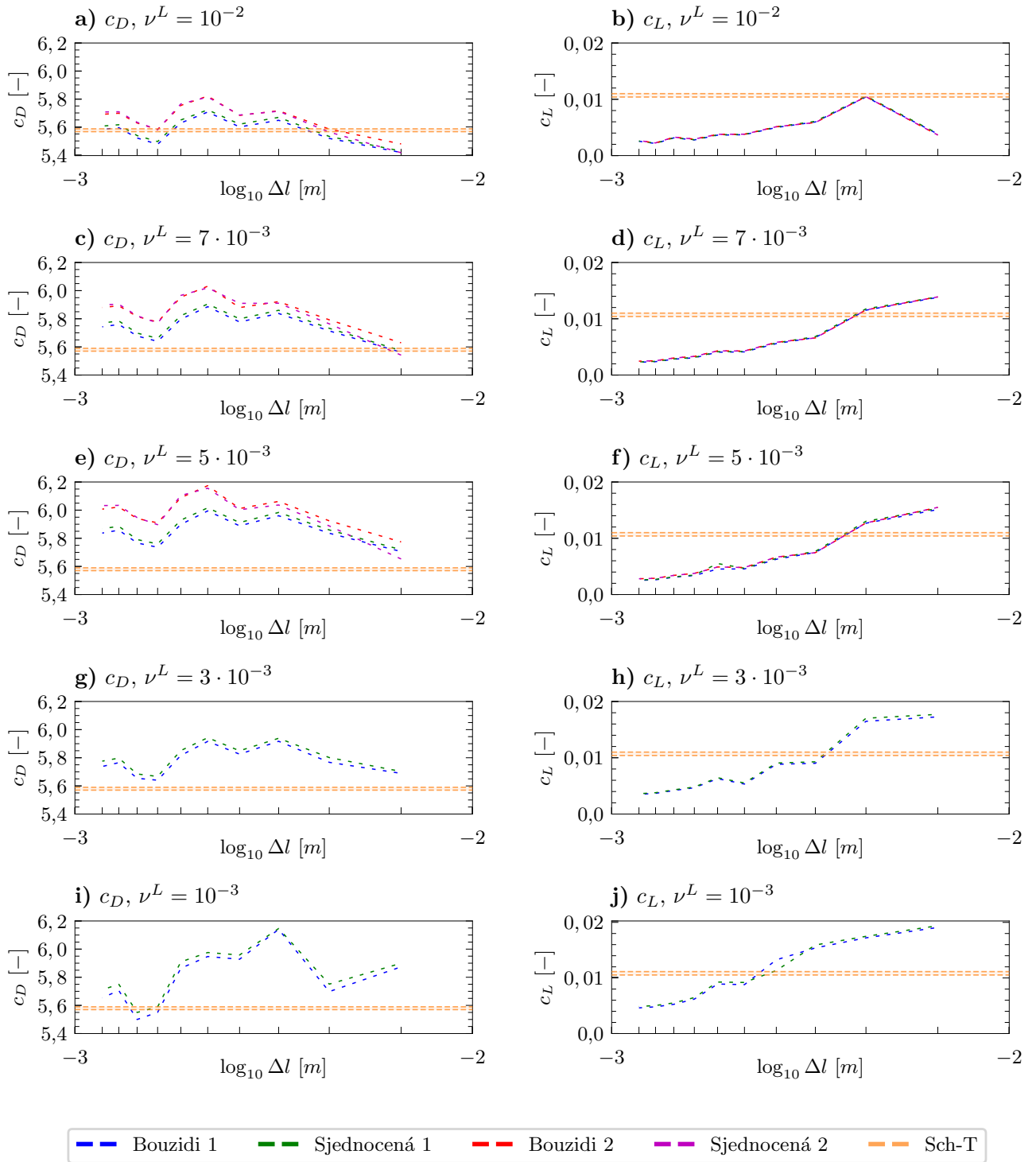
Diskretizace a použité metody:

- $\bar{\Omega} = N_x \times N_y$ ,  $N_x = 128i$ ,  $N_y = 32i$ , kde  $i \in \{2, \dots, 11\}$
- $\nu^L \in \{10^{-3}, 3 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-3}, 7 \cdot 10^{-3}, 10^{-2}\}$
- Pro výpočet úplného tenzoru napětí volíme lokální aproximaci pomocí (2.48).

V této úloze je cílem otestovat vliv volby různých okrajových podmínek na hranici obtékaného tělesa. Pro výpočet úplného tenzoru napětí volíme vztah (2.48), tedy volíme lokální způsob výpočtu tenzoru napětí. Budeme znovu sledovat vliv hodnoty  $\nu^L$  na výsledné hodnoty  $c_D$  a  $c_L$  a pro každou hodnotu  $\nu^L$  diskrétní mřížku budeme postupně zjemňovat a sledovat vliv rozlišení mřížky na hodnoty  $c_D$  a  $c_L$ . Výsledky jsou k nahlédnutí na obr. 3.6 a na obr. 3.7.

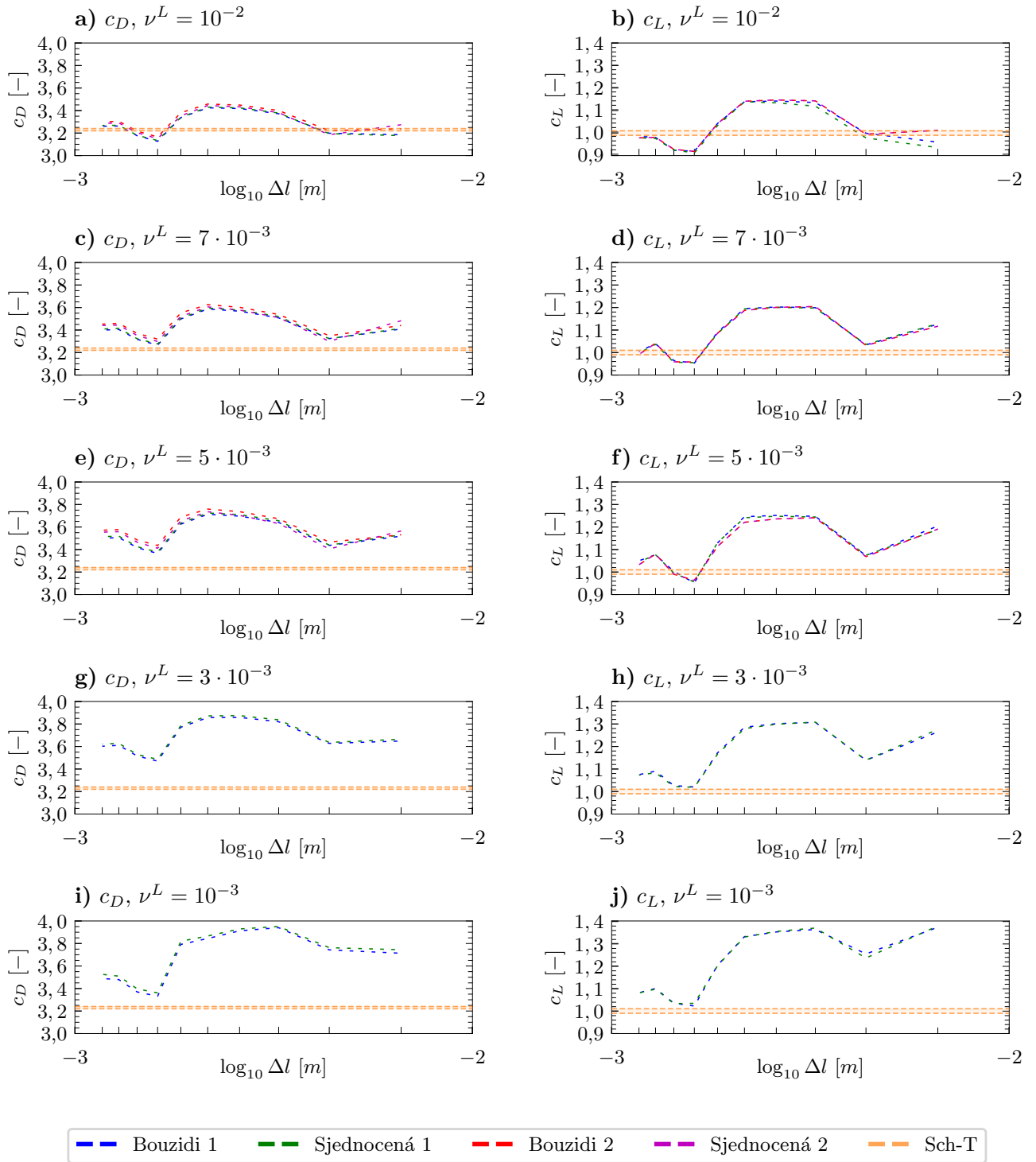
Pro nižší hodnoty  $\nu^L$  výsledky při použití okrajových podmínek s kvadratickou interpolací řádově neodpovídaly referenčním hodnotám, proto je zde neuvádíme. Je možné pozorovat, že se hodnoty získané stejným stupněm interpolace liší jen velmi málo, přičemž platí, že hodnoty získané za použití okrajových podmínek s lineární interpolací jsou obecně blíže k hodnotám referenčním.

Re = 20



Obrázek 3.6: Grafy průměrných hodnot  $c_D$  a  $c_L$  počítaných ve dvojité přesnosti v závislosti na různé hodnotě  $\nu^L$  a prostorovém kroku  $\Delta l$  diskrétní mřížky  $\hat{\Omega}$  pro úlohu 3.4 s  $U_\infty = 0,3 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\text{Re} = 20$ . Pro výpočet tenzoru napětí byl využit vztah (2.48). Na hranici tělesa byly využity různé interpolační okrajové podmínky. Referenční hodnota označená Sch-T odpovídá hodnotě převzaté z [7]. Z důvodu podobnosti hodnot jsou výsledky pro odlišení uvedeny čárkovaně.

Re = 100



Obrázek 3.7: Grafy konečných maximálních hodnot  $c_D$  a  $c_L$  počítaných ve dvojitě přesnosti v závislosti na různé hodnotě  $\nu^L$  a prostorovém kroku  $\Delta l$  diskrétní mřížky  $\tilde{\Omega}$  pro úlohu 3.4 s  $U_\infty = 1,5 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\text{Re} = 100$ . Pro výpočet tenzoru napětí byl využit vztah (2.48). Na hranici tělesa byly využity různé interpolační okrajové podmínky. Referenční hodnota označená Sch-T odpovídá hodnotě převzaté z [7]. Z důvodu podobnosti hodnot jsou výsledky pro odlišení uvedeny čárkovaně.



### ÚLOHA 3.4: VLIV INTERPOLAČNÍCH OKRAJOVÝCH PODMÍNEK ZA POUŽITÍ DIFERENCÍ K VÝPOČTU $\sigma_{ij}$

Nastavení úlohy:

- $\Omega = (0; 1,64 \text{ m}) \times (0; 0,41 \text{ m})$
- $\nu = 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
- $t \in (0; 25 \text{ s})$

Počáteční a okrajové podmínky:

- Na  $\overline{\Omega}$  volíme počáteční podmínku podle sekce 2.1.6.
- Na  $\partial\hat{\Omega}_{\text{in}}$  volíme rychlost podle vztahu (3.2).
- Na  $\partial\hat{\Omega}_{\text{out}}$  volíme odtokovou okrajovou podmínku dle sekce 2.1.7.1.
- Na  $\partial\hat{\Omega}_{\text{wall}}$  volíme fullway bounce-back okrajovou podmínku.
- Na  $\partial\hat{\Omega}_{\text{b}}$  volíme postupně okrajovou podmínku Bouzidi 1, Bouzidi 2, Sjednocená 1, Sjednocená 2 (viz legenda v tab. 2.2).

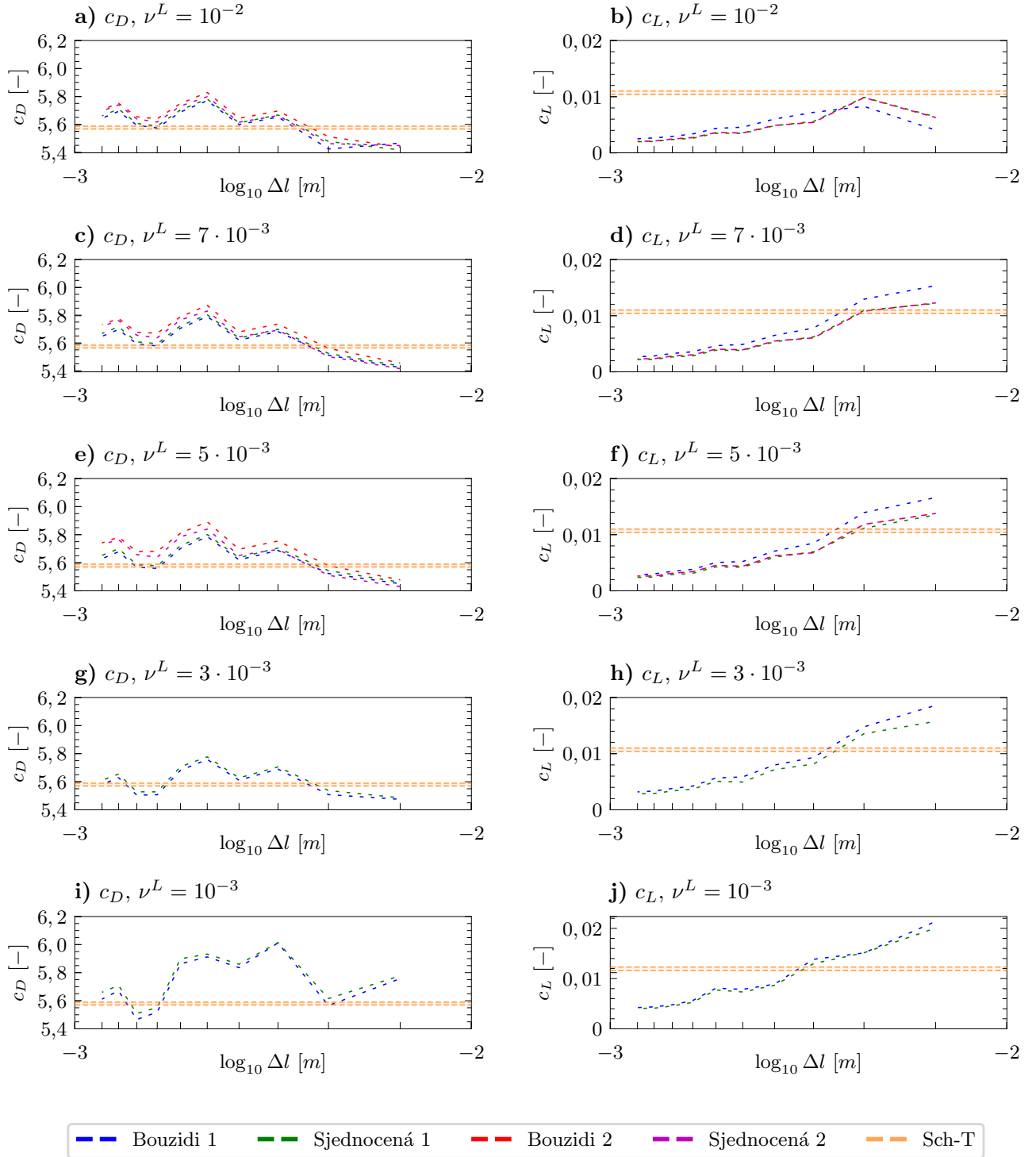
Diskretizace a použité metody:

- $\overline{\Omega} = N_x \times N_y$ ,  $N_x = 128i$ ,  $N_y = 32i$ , kde  $i \in \{2, \dots, 11\}$
- $\nu^L \in \{10^{-3}, 3 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-3}, 7 \cdot 10^{-3}, 10^{-2}\}$
- Pro výpočet úplného tenzoru napětí volíme aproximaci pomocí diference podle (2.44).

Pro výpočet úplného tenzoru napětí narozdíl od úlohy 3.4 volíme vztah aproximaci pomocí diference podle (2.44). Budeme opět sledovat vliv hodnoty  $\nu^L$  na výsledné hodnoty  $c_D$  a  $c_L$  a pro každou hodnotu  $\nu^L$  diskrétní mřížku budeme postupně zjemňovat a sledovat vliv rozlišení mřížky na hodnoty  $c_D$  a  $c_L$ . Výsledky jsou k nahlednutí na obr. 3.8 a na obr. 3.9.

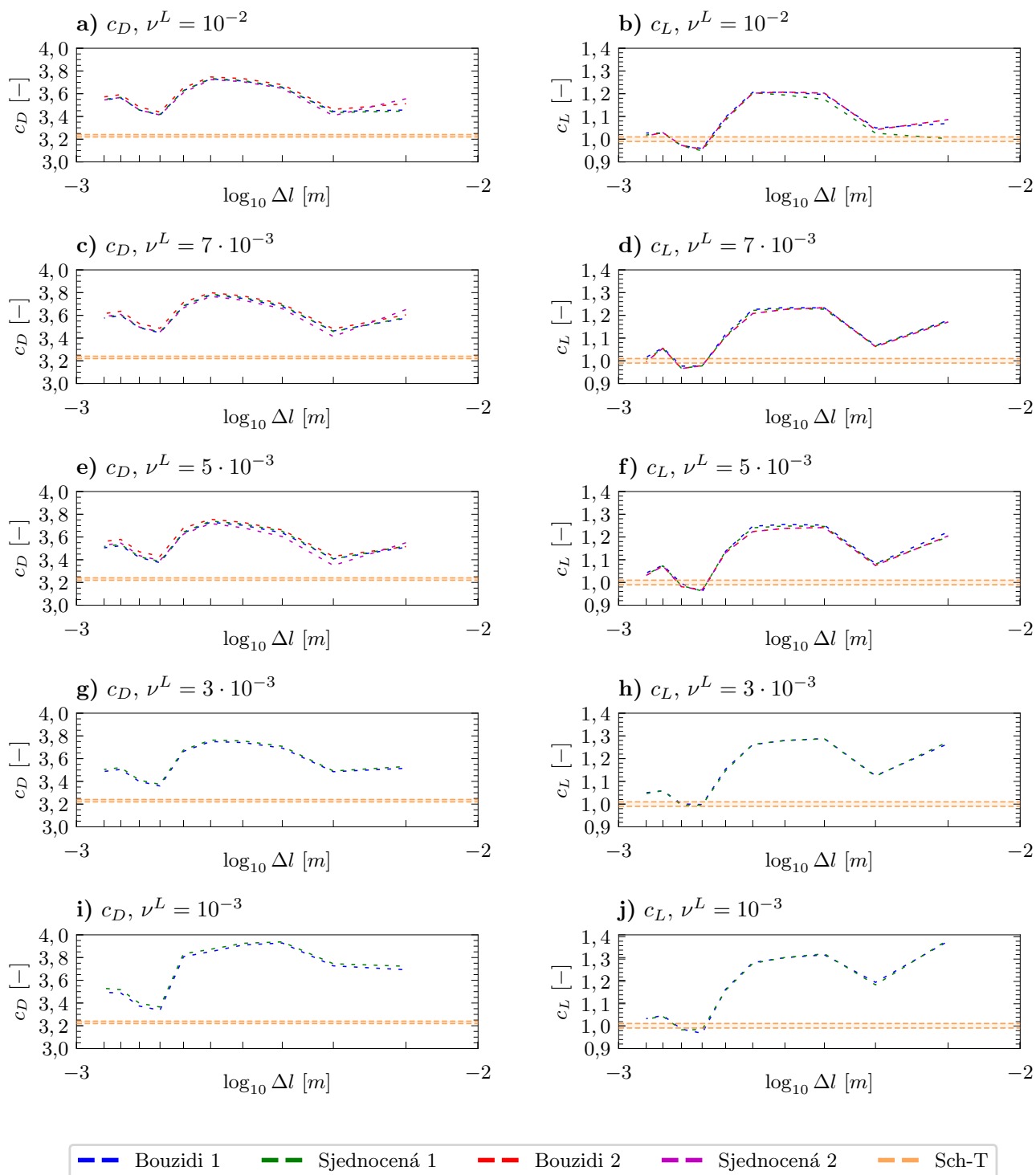
Podobně jako v 3.4, nedocházelo pro nižší hodnoty  $\nu^L$  při použití okrajových podmínek s kvadratickou interpolací ke shodě s referenčním hodnotami. Opět jako v 3.4 je i zde možné pozorovat, že se hodnoty získané stejným stupněm interpolace liší jen velmi málo, přičemž platí, že hodnoty získané za použití okrajových podmínek s lineární interpolací jsou obecně blíže k hodnotám referenčním. V porovnání s výsledky z úlohy 3.4 můžeme vidět, že v tomto případě, zejména pro úlohu odpovídající  $Re = 20$ , byly dosaženy výsledky  $c_D$  blíže k referenčním hodnotám již pro hrubší mřížku a pro nižší hodnotu  $\nu^L$ .

Re = 20



Obrázek 3.8: Grafy průměrných hodnot  $c_D$  a  $c_L$  počítaných ve dvojité přesnosti v závislosti na různé hodnotě  $\nu^L$  a prostorovém kroku  $\Delta l$  diskrétní mřížky  $\hat{\Omega}$  pro úlohu 3.4 s  $U_\infty = 0,3 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\text{Re} = 20$ . Pro výpočet tenzoru napětí byl využit vztah (2.44). Na hranici tělesa byly využity různé interpolační okrajové podmínky. Referenční hodnota označená Sch-T odpovídá hodnotě převzaté z [7]. Z důvodu podobnosti hodnot jsou výsledky pro odlišení uvedeny čárkovaně.

Re = 100



Obrázek 3.9: Grafy konečných maximálních hodnot  $c_D$  a  $c_L$  počítaných ve dvojitě přesnosti v závislosti na různé hodnotě  $\nu^L$  a prostorovém kroku  $\Delta l$  diskrétní mřížky  $\tilde{\Omega}$  pro úlohu 3.4 s  $U_\infty = 1,5 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\text{Re} = 100$ . Pro výpočet tenzoru napětí byl využit vztah (2.42). Na hranici tělesa byly využity různé interpolační okrajové podmínky. Referenční hodnota označená Sch-T odpovídá hodnotě převzaté z [7]. Z důvodu podobnosti hodnot jsou výsledky pro odlišení uvedeny čárkovaně.

### 3.5 Aproximace objektu mnohoúhelníkem

#### ÚLOHA 3.5: APROXIMACE OBTÉKANÉHO TĚLESA POMOCÍ MNOHOÚHELNÍKU

Nastavení úlohy:

- $\Omega = (0; 1,64 \text{ m}) \times (0; 0,41 \text{ m})$
- $\nu = 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
- $t \in (0; 25 \text{ s})$

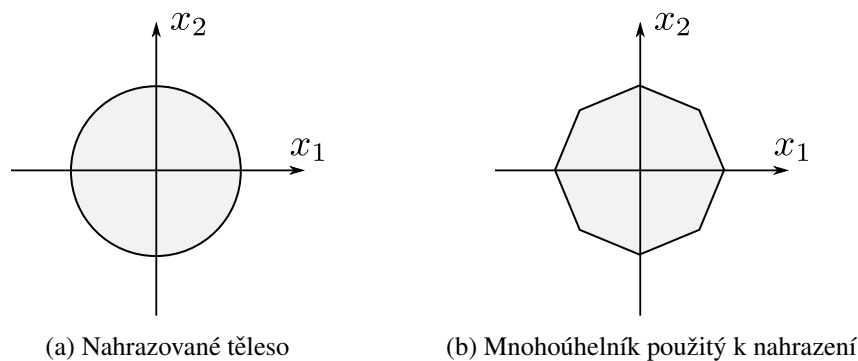
Počáteční a okrajové podmínky:

- Na  $\overline{\Omega}$  volíme počáteční podmínku podle sekce 2.1.6.
- Na  $\partial\hat{\Omega}_{\text{in}}$  volíme rychlost podle vztahu (3.2).
- Na  $\partial\hat{\Omega}_{\text{out}}$  volíme odtokovou okrajovou podmínku dle sekce 2.1.7.1.
- Na  $\partial\hat{\Omega}_{\text{wall}}$  a na  $\partial\hat{\Omega}_{\text{b}}$  volíme fullway bounce-back okrajovou podmínku.

Diskretizace a použité metody:

- $\overline{\hat{\Omega}} = N_x \times N_y$ ,  $N_x = 128i$ ,  $N_y = 32i$ , kde  $i \in \{3, 5, 7\}$
- $\nu^L \in \{10^{-3}, 10^{-2}\}$
- Těleso nahradíme s využitím implementované třídy Polygon popsané v sekci 2.2.1.
- Pro výpočet úplného tenzoru napětí volíme aproximaci pomocí difference podle (2.44).

V této úloze je naším cílem demonstrovat funkčnost třídy Polygon popsané v sekci 2.2.1 a princip nahrazení hranice tělesa pomocí po částech lineární hranice. Tento způsob aproximace hranice je plánováno využít v navazujícím výzkumu pro komplexnější geometrie. Uvažujeme stejnou výpočetní oblast jako na obr. 3.1 s tím rozdílem, že kružnice je nahrazena mnohoúhelníkem. Aproximace mnohoúhelníkem je schematicky zobrazena na obr. 3.10.

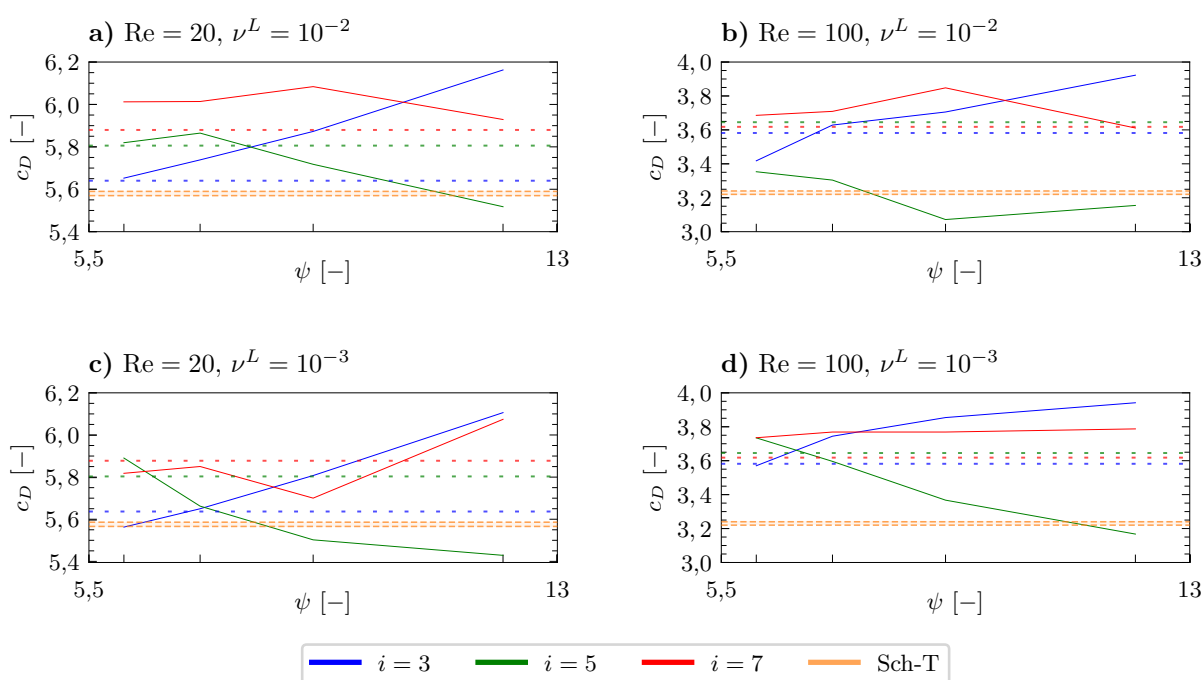


Obrázek 3.10: Znázornění procesu aproximace tělesa mnohoúhelníkem za použití třídy Polygon.

Pro účel této úlohy uvažujme lagrangeovské body, jež jsou uniformně rozloženy na hranici, která je nahrazována. V rámci této úlohy tedy tyto lagrangeovské body tvoří vrcholy pravidelného mnohoúhelníku. Označme  $\Delta x$  vzdálenost mezi dvěma sousedními body a definujme bezrozměrný parametr

$$\psi = \frac{\Delta x}{\Delta l}. \quad (3.3)$$

Se zmenšující se hodnotou  $\psi$  zjevně roste počet bodů, které jsou rozmístěny na hranici objektu. Budeme zkoumat hodnoty  $c_D$  pro různé rolišení mřížky s rozměry  $128i \times 32i$ , kde  $i \in \{3, 5, 7\}$ , v závislosti na hodnotě  $\psi$ , tj. na počtu vrcholů mnohoúhelníku, který aproximuje v této úloze kružnici. Výsledky jsou k nahlédnutí na obr. 3.11.



Obrázek 3.11: Grafy konečných průměrných, resp. maximálních hodnot  $c_D$  počítaných ve dvojitě přesnosti pro různé hodnoty  $\nu^L$  a různé hodnoty prostorového kroku  $\Delta l$  v závislosti na  $\psi$ . Úloha 3.5 má nastavení  $U_\infty = 0,2 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\text{Re} = 20$ , resp.  $U_\infty = 1,5 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\text{Re} = 100$ . Křivky v grafech odpovídají různým rozlišením mřížky s rozměry  $128i \times 32i$  a jsou označeny podle hodnoty parametru  $i$ . Pro výpočet tenzoru napětí byl využit vztah (2.44). Na hranici tělesa byla využita fullway bounce-back okrajová podmínka. Výsledky získané pro různé  $\nu^L$  a  $\text{Re}$  v rámci úlohy 3.2 jsou vždy pro dané  $i$  vyznačeny čárkovaně odpovídající barvou. Referenční hodnota označená Sch-T odpovídá hodnotě převzaté z [7].

Uvádíme zde pouze numericky získané hodnoty  $c_D$ , jelikož numericky získané hodnoty  $c_L$  se v některých případech řádově lišily od referenčních hodnot a nebylo možné je považovat za konzistentní.

Žádná z uvedených aproximací neposkytovala ideální volbu pro náhradu tělesa ve smyslu přiblížení se k referenčním hodnotám. Nicméně cílem úlohy 3.5 bylo pouze demonstrovat funkčnost třídy Polygon a jelikož se získané hodnoty pro různá rozlišení mřížky,  $\nu^L$  a různé hodnoty  $\text{Re}$  neliší od referenčních hodnot výrazným způsobem, byla funkčnost v uspokojivé míře prokázána. Nalezení optimálního počtu bodů pro aproximaci hranice a samotná celková optimalizace procesu aproximace bude pak předmětem budoucího výzkumu.

### 3.6 Analýza rozložení působící síly

#### ÚLOHA 3.6: VÝPOČET A ANALÝZA ROZLOŽENÍ SIL PODÉL OBTÉKANÝCH STĚN

Nastavení úlohy:

- $\Omega = (0; 1,64 \text{ m}) \times (0; 0,41 \text{ m})$
- $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
- $t \in (0; 25 \text{ s})$

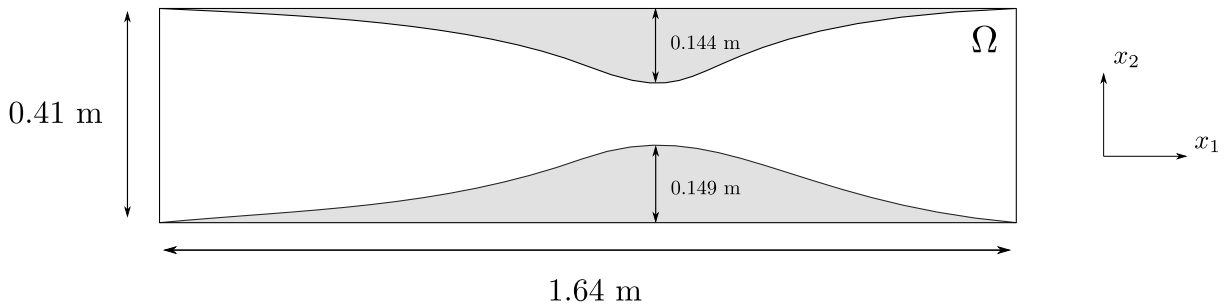
Počáteční a okrajové podmínky:

- Na  $\bar{\Omega}$  volíme počáteční podmínku podle sekce 2.1.6.
- Na  $\partial\hat{\Omega}_{\text{in}}$  volíme rychlost podle vztahu (3.2) s  $U_{\infty} = 0,5 \text{ m s}^{-1}$ .
- Na  $\partial\hat{\Omega}_{\text{out}}$  volíme odtokovou okrajovou podmínku dle sekce 2.1.7.1.
- Na  $\partial\hat{\Omega}_{\text{wall}}$  a na  $\partial\hat{\Omega}_{\text{b}}$  volíme fullway bounce-back okrajovou podmínku.

Diskretizace a použité metody:

- $\bar{\Omega} = N_x \times N_y$ ,  $N_x = 128i$ ,  $N_y = 32i$ , kde  $i \in \{3, 5, 7, 9\}$
- $\nu^L \in \{10^{-3}, 10^{-2}\}$
- Stěny nahradíme s využitím implementované třídy SVGCurve popsané v sekci 2.2.1.
- Pro výpočet úplného tenzoru napětí volíme aproximaci pomocí diference podle (2.44).

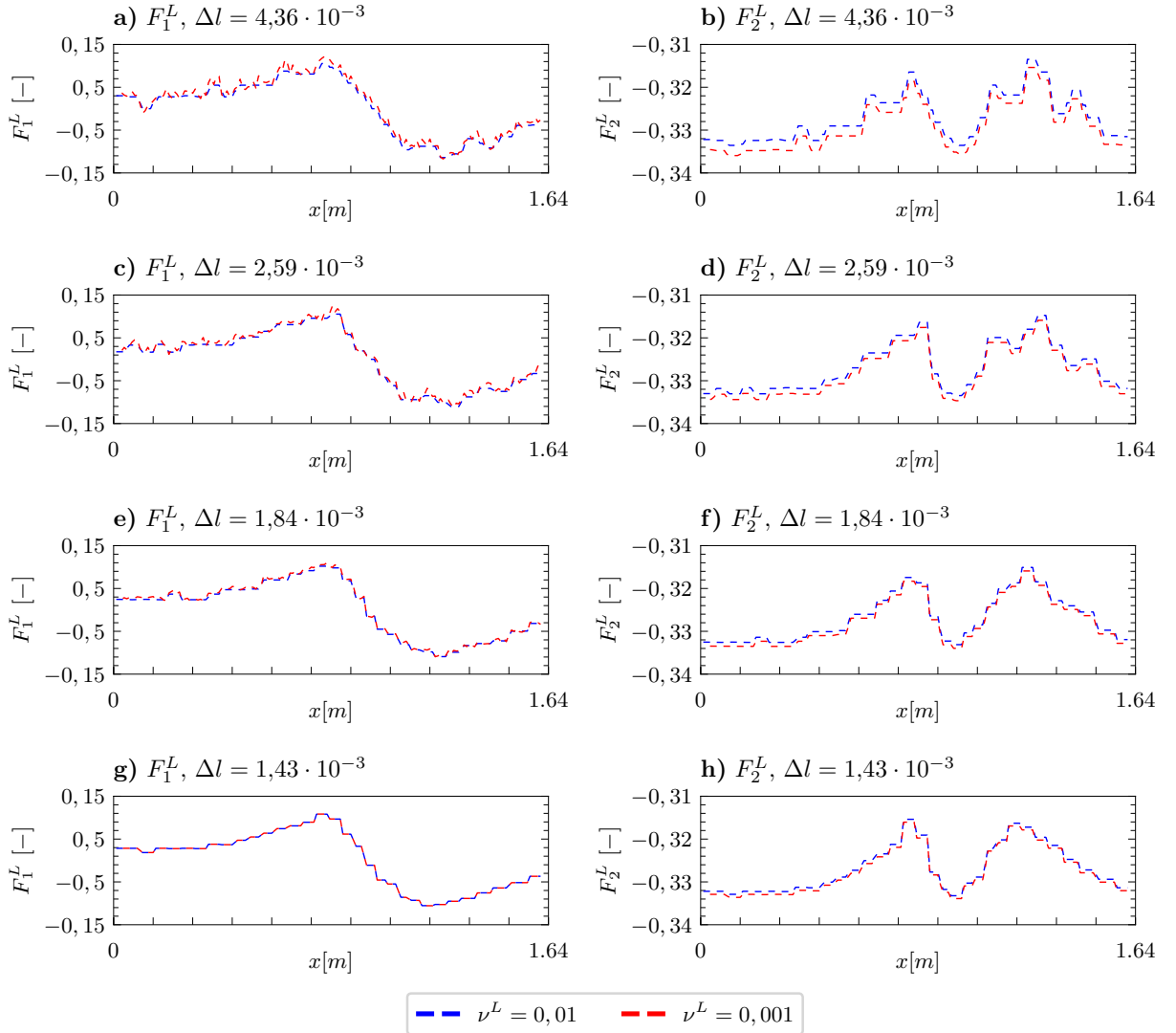
V předchozích úlohách jsme doposud testovali zejména různé okrajové podmínky a způsoby výpočtu tenzoru napětí. Výsledkem vždy byly bezrozměrné koeficienty tlaku a odporu. Ve všech úlohách jsme uvažovali jednoduchou geometrii tělesa ve formě kružnice, resp. mnohoúhelníku. V budoucnu však budou předmětem výzkumu komplexnější geometrie (např. geometrie cévy) a budou zkoumány jiné veličiny, jako je působící síla a její rozložení podél obtékaných stěn. Proto na závěr představíme výpočet síly v modelové úloze, která byla definována za demonstrativním účelem. Budeme uvažovat geometrii reprezentující cévu s částečným asymetrickým zúžením. K předepsání geometrie využijeme třídu SVGCurve. Výpočetní oblast je k nahlédnutí na obr. 3.12.



Obrázek 3.12: Schéma výpočetní oblasti modelové úlohy reprezentující zúženou cévu.

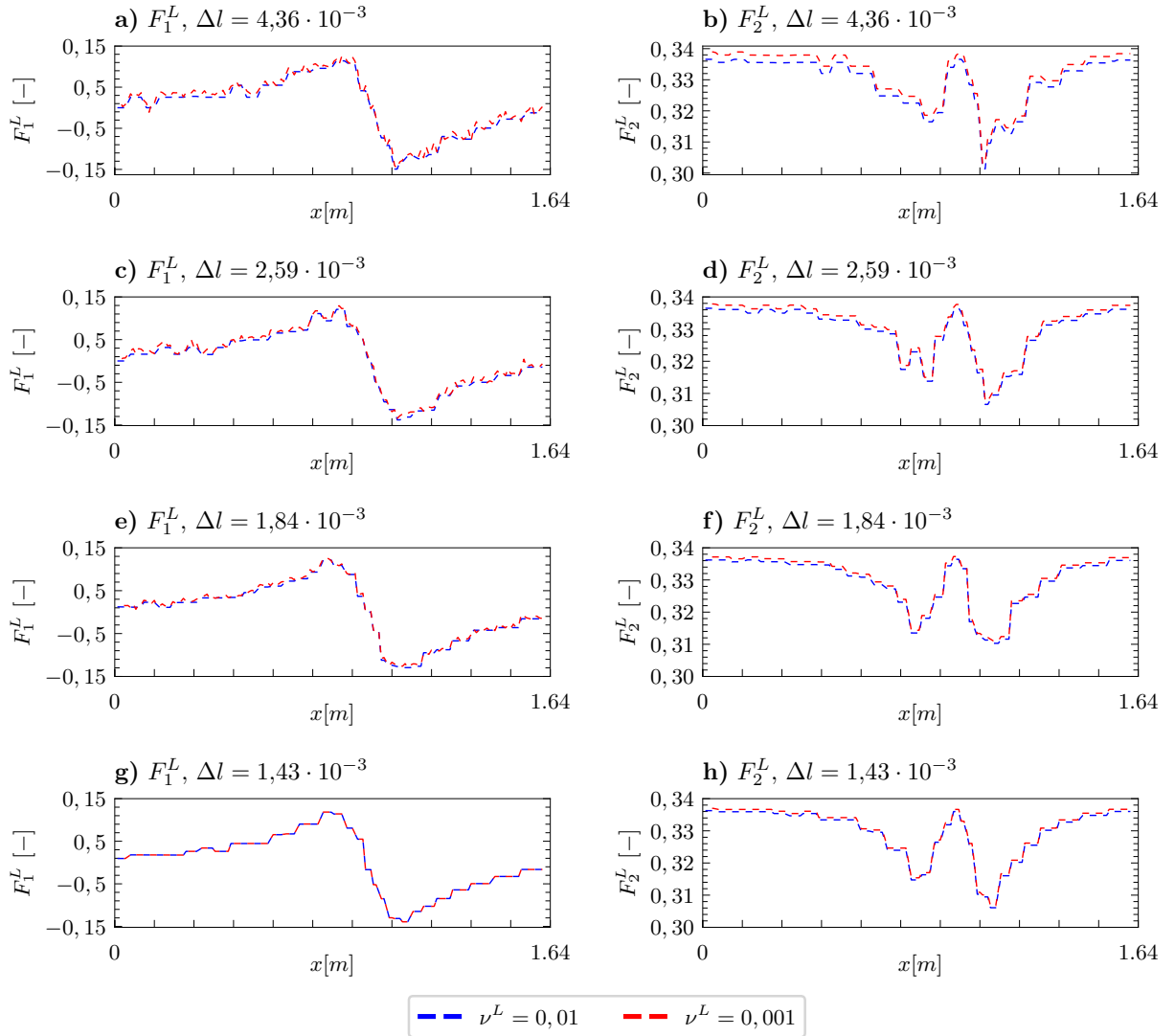
Budeme sledovat rozložení obou složek síly  $F^L$  podél dolní, resp. horní stěny, a budeme zkoumat vliv různých hodnot prostorového kroku a  $\nu^L$ . Nezávisle na prostorovém kroku bude velikost síly zaznamenávána vždy ve stejných pozicích podél stěn. Výsledky jsou pro dolní, resp. horní stěnu k nahlédnutí na obr. 3.13, resp. 3.14.

### Dolní stěna



Obrázek 3.13: Grafy rozložení složek síly podél dolní stěny počítaných ve dvojité přesnosti v závislosti na různých hodnotě prostorového kroku  $\Delta l$  diskrétní mřížky  $\hat{\Omega}$ . Křivky v grafu představují výsledky pro různé hodnoty  $\nu^L$ . Pro výpočet tenzoru napětí byl využit vztah (2.44). Na hranici stěny byla využita fullway bounce-back okrajová podmínka. Z důvodu podobnosti hodnot jsou výsledky pro odlišení uvedeny čárkovaně.

## Horní stěna



Obrázek 3.14: Grafy rozložení složek síly podél horní stěny počítaných ve dvojitě přesnosti v závislosti na různých hodnotě prostorového kroku  $\Delta l$  diskrétní mřížky  $\hat{\Omega}$ . Křivky v grafu představují výsledky pro různé hodnoty  $\nu^L$ . Pro výpočet tenzoru napětí byl využit vztah (2.44). Na hranici stěny byla využita fullway bounce-back okrajová podmínka. Z důvodu podobnosti hodnot jsou výsledky pro odlišení uvedeny čárkovaně.

Z obr. 3.13, resp. 3.14 je možné pozorovat, že se výsledky pro různé hodnoty  $\nu^L$  významně neliší. Pro všechny hodnoty prostorového kroku je vždy zachován tvar rozložení síly podél stěny, se zmenšující se hodnotou prostorového kroku se výsledky zpřesňují. Bylo možné očekávat, že hodnoty  $F_1^L$  budou maximální v oblastech, kde dochází ke zúžení stěn, a naopak že hodnoty  $F_2^L$  budou v těchto místech nabývat minima. To bylo na základě prezentovaných výsledků potvrzeno. Je možné pozorovat, že tvary rozložení síly podél horní a dolní stěny jsou podobné (pro  $F_2^L$  horizontálně symetrické), což je v souladu s nastavením úlohy, jelikož i tvary stěn jsou si podobné.



### 3.7 Shrnutí výsledků numerických simulací

V rámci této kapitoly jsme porovnáním numericky získaných výsledků s referenčními hodnotami  $c_D$ , resp.  $c_L$  z [7] postupně potvrdili správnost implementace metody integrace tenzoru napětí, dále jsme testovali vliv různých způsobů výpočtu tenzoru napětí a vliv různých okrajových podmínek předepsaných na hranici tělesa.

Získané výsledky ukazují, že volba diferenčního schématu k následnému výpočtu tenzoru napětí je pro metodu integrace tenzoru napětí vhodnější než lokální způsoby výpočtu. Dále pak jako nejvhodnější varianty okrajových podmínek na hranici obtékaného tělesa mohou být na základě výsledků označeny Bouzidiho a sjednocená okrajová podmínka, obě s lineární interpolací. Celkem jsme tedy užitím kombinací diferencí a jedné z těchto interpolačních okrajových podmínek dostali nejpřesnější výsledky při použití metody integrace tenzoru napětí.

V další části bylo s použitím vhodné úpravy zvolené testovací úlohy ukázáno, že obtékané těleso lze při použití vhodného způsobu do jisté míry nahradit zjednodušeným tvarem.

V závěrečné úloze jsme na vhodně zvolené úloze demonstrovali nástroje vyvinuté v rámci této práce a ukázali jejich možnou aplikaci, která bude využita během navazujícího výzkumu.

# Závěr

Cílem této práce bylo matematické modelování proudění nestlačitelné newtonovské tekutiny se zaměřením na modelování proudění krve v cévách. Hlavním cílem práce byla implementace metody integrace tenzoru napětí [20] pro výpočet síly pomocí mřížkové Boltzmannovy metody (LBM).

První kapitola je věnována základním vztahům popisujícím dynamiku tekutin. Dále jsou zde představeny základní poznatky týkající se sestavení matematického modelu proudění krve. Na závěr této kapitoly jsou definovány předpoklady, které v rámci této práce klademe na námi použitý model. V druhé kapitole je čtenáři představena použitá numerická metoda, tj. LBM. Jsou zde rozebrány různé typy volby okrajových podmínek, které jsou v rámci práce testovány. Dále je detailně rozebrána metoda integrace tenzoru napětí. Na závěr této kapitoly je popsáno schéma použitého kódu společně s implementovaným modulem, který slouží ke generování různých geometrií, jež lze využít v rámci numerických simulací.

Ve třetí kapitole je nejdříve testována základní implementace metody integrace tenzoru napětí. Dále je na stejné úloze analyzován vliv volby různých okrajových podmínek předepsaných na hranici obtékaného tělesa a také vliv volby různého způsobu výpočtu složek tenzoru napětí. Poté je demonstrována funkčnost modulu sloužícího ke generování geometrie v úloze, kdy po částech lineárně nahradíme hranici obtékaného tělesa. Výsledky všech těchto zmíněných simulací byly porovnány s referenčními hodnotami z [7]. Na závěr třetí kapitoly je v úloze, která reprezentuje model zúžené cévy, analyzováno rozložení síly podél obtékaných stěn. K simulacím byl využit numerický software vyvíjený na Katedře matematiky FJFI ČVUT v Praze, který využívá paralelní implementaci LBM v jazyce C++ s využitím architektury CUDA.

V budoucím výzkumu je v plánu rozšířit použitý matematický model i na nenewtonovské tekutiny. Dále je v plánu zaměřit se na analýzu průtoku krve v geometriích reprezentujících cévy. K tomu bude využit již zmíněný implementovaný modul pro generování geometrie. Mimo jiné je také cílem modelovat silové působení a kolizi proudů, ke které může docházet po provedení úplného kavopulmonálního napojení, jež je blíže popsáno v úvodu této práce. V neposlední řadě je plánováno rozšíření simulací do trojrozměrného prostoru.

# Literatura

- [1] E. Rubtsova, A. Markov, S. Selishchev, J. H. Karimov a D. Telyshev. „Mathematical modeling of the fontan blood circulation supported with pediatric ventricular assist device". *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 24(6):653–662, 2021.
- [2] V. Chaloupecký. „Nemocný s funkčně jedinou srdeční komorou". FN Motol, Praha, 2004. <http://pelikan.lf2.cuni.cz/2003-2004/kveten-cerven2004-12roc-cl6.htm>
- [3] Y. Delorme, K. Anupindi, A.-E. Kerlo, D. Shetty, M. Rodefeld, J. Chen, S. Frankel. „Large eddy simulation of powered Fontan hemodynamics. Journal of Biomechanics". *Journal of Biomechanics*, 46(2):408–422, 2013.
- [4] T. M. J. van Bakel, K. D. Lau, J. Hirsch-Romano, S. Trimarchi, A. L. Dorfman a C. A. Figueroa. „Patient-specific modeling of hemodynamics: Supporting surgical planning in a fontan circulation correction". *Journal of Cardiovascular Translational Research*, 11(2):145–155, 2018.
- [5] C. Wang, K. Pekkan, D. de Zélicourt, M. Horner, A. Parihar, A. Kulkarni, A. P. Yoganathan. „Progress in the CFD modeling of flow instabilities in anatomical total cavopulmonary connections". *Annals of Biomedical Engineering*, 35(2):1840–56, 2007.
- [6] R. Chabiniok, K. Škardová, R. Galabov, P. Eichler, M. Gusseva, et al. „Translational cardiovascular modeling: Tetralogy of fallot and modeling of diseases". In *Modeling Biomaterials*. 2021.
- [7] M. Schäfer, S. Turek, F. Durst, E. Krause a R. Rannacher. „Benchmark computations of laminar flow around a cylinder". s. 547–566, 1996.
- [8] T. Krüger, et al. *The Lattice Boltzmann Method*. Springer International Publishing, 2017.
- [9] T. Inamuro, K. Maeba a F. Ogino. „Flow between parallel walls containing the lines of neutrally buoyant circular cylinders". *International Journal of Multiphase Flow*, 26(12):1981–2004, 2000.
- [10] K. Suzuki, K. Ishizaki a M. Yoshino. „Local force calculations by an improved stress tensor discontinuity-based immersed boundary–lattice boltzmann method". *Physics of Fluids*, 33(4):047104, 2021.
- [11] J. Latt. „Hydrodynamic limit of lattice boltzmann equations". Disertační práce, Université de Genève, 2007.
- [12] Y. A. Cengel a J. M. Cimbala. *Fluid mechanics: Fundamentals and applications*. McGraw-Hill Education, Columbus, OH, 4 edition, 2017.
- [13] J. D. Anderson. *Computational Fluid Dynamics*. McGraw-Hill series in mechanical engineering. McGraw-Hill Professional, New York, NY, 1995.

- [14] J. Boyd, J. M. Buick a S. Green. „Analysis of the casson and carreau-yasuda non-newtonian blood models in steady and oscillatory flows using the lattice boltzmann method". *Physics of Fluids*, 19(9):093103, 2007.
- [15] L. D. Landau a E. M. Lifshits. *Fluid Mechanics*. Elsevier Science, London, England, 2013.
- [16] M. Geier, M. Schönherr, A. Pasquali a M. Krafczyk. „The cumulant lattice boltzmann equation in three dimensions: Theory and validation". *Computers and Mathematics with Applications*, 70(4):507–547, 2015.
- [17] D. D’Humières. „Generalized lattice-boltzmann equations". In *Rarefied Gas Dynamics: Theory and Simulations*, s. 450–458. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1994.
- [18] M. Geier, A. Greiner a J. G. Korvink. „Cascaded digital lattice boltzmann automata for high reynolds number flow". *Physical Review E*, 73(6), 2006.
- [19] I. V. Karlin, A. Ferrante a H. C. Öttinger. „Perfect entropy functions of the lattice boltzmann method". *Europhysics Letters (EPL)*, 47(2):182–188, 1999.
- [20] R. Mei, D. Yu, W. Shyy a L.-S. Luo. „Force evaluation in the lattice boltzmann method involving curved geometry". *Physical Review E*, 65(4), 2002.
- [21] Z. Guo a S. Chang. *Lattice Boltzmann method and its application in engineering*. Advances In Computational Fluid Dynamics. World Scientific Publishing, Singapore, Singapore, 2013.
- [22] T. Inamuro, M. Yoshino a F. Ogino. „Accuracy of the lattice boltzmann method for small knudsen number with finite reynolds number". *Physics of Fluids*, 9(11):3535–3542, 1997.
- [23] K. Suzuki a M. Yoshino. „A stress tensor discontinuity-based immersed boundary-lattice boltzmann method". *Computers and Fluids*, 172:593–608, 2018.
- [24] M. Bouzidi, M. Firdaouss a P. Lallemand. „Momentum transfer of a boltzmann-lattice fluid with boundaries". *Physics of Fluids*, 13(11):3452–3459, 2001.
- [25] D. Yu, R. Mei a W. Shyy. „A unified boundary treatment in lattice boltzmann method". In *41st Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2003.
- [26] J. D. Eisenberg. *SVG Essentials*. O’Reilly Media, Sebastopol, CA, 2002.
- [27] P. Koopman. „Bresenham line-drawing algorithm". *Forth Dimensions*, 8(6):12–16, 1987.