

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vlastnosti obrazů v gravitačním čočkování

Autor: Nicola Trakslová
Vedoucí: Mgr. David Heyrovský, Ph.D.
Akademický rok: 2021/2022
Obor: Matematické inženýrství
Zaměření: Matematická fyzika

ZADÁNÍ1

ZADÁNÍ2

Název práce: **Vlastnosti obrazů v gravitačním čočkování**

Autor: Nicola Trakslová

Obor: Matematické inženýrství

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Mgr. David Heyrovský, Ph.D., Ústav teoretické fyziky, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova

Konzultant: -

Abstrakt:

Při gravitačním čočkování dochází k odklonu paprsků ze vzdáleného zdroje světla vlivem gravitace jiného astrofyzikálního objektu ležícího v jeho popředí. V předložené práci jsme po uvedení základních principů gravitačního čočkování zkoumali vlastnosti jím vytvořených obrazů zdroje. Tyto vlastnosti lze zjistit jednak standardně řešením čočkové rovnice, jednak novou metodou odečtením z diagramu konvergence a shearu čočky (Karamazov a Heyrovský 2022). V této práci jsme sestavili diagramy pro různé jednoduché modely gravitačních čoček a ověřili indikované vlastnosti obrazů na konkrétních příkladech. K porovnání jsme použili nejprve sféricky symetrická rozložení hustoty gravitační čočky: hmotný bod, model Navarro-Frenka-Whitea (NFW), radiálně omezený NFW model, Hernquistův model a izotermální modely. Dále jsme prozkoumali vlastnosti obrazů dvou nesymetrických gravitačních čoček: modelu s konstantní konvergencí a shearem a modelu hmotného bodu s vnější konvergencí a shearem.

Klíčová slova: relativistická astrofyzika, gravitační čočkování, zobrazení astrofyzikálních zdrojů

Title: **Image properties in gravitational lensing**

Author: Nicola Trakslová

Abstract: In gravitational lensing, light rays from a distant light source are deflected due to the gravity of another astrophysical object lying in its foreground. In the presented work, after introducing the basic principles of gravitational lensing, we examined the properties of images of the source created by gravitational lensing. These properties can be determined both by the standard solution of the lens equation and by a new method of extraction from the convergence and shear diagram of the lens (Karamazov and Heyrovský 2022). In this work, we compiled diagrams for various simple models of gravitational lenses and verified the indicated properties of images on specific examples. We compared various spherically symmetric distributions of gravitational lens density: mass point, Navarro-Frenk-White model (NFW), truncated NFW model, Hernquist model, and isothermal models. We also examined the properties of images of two asymmetric gravitational lenses: a model with constant convergence and shear and a model of a mass point with external convergence and shear.

Key words: relativistic astrophysics, gravitational lensing, image of astrophysical sources

Obsah

1	Úvod	13
2	Gravitační čočkování	15
2.1	Princip gravitačního čočkování	15
2.2	Charakteristické veličiny zobrazení čočkou	17
2.3	Vlastnosti obrazů	17
2.4	Numerický výpočet obrazů	21
3	Sféricky symetrické gravitační čočky	23
3.1	Hmotný bod	24
3.1.1	Obrazy bodového zdroje	27
3.1.2	Obrazy kruhového zdroje	30
3.2	Model Navarro-Frenka-Whitea (NFW)	32
3.3	Radiálně omezený NFW model	39
3.4	Hernquistův model	44
3.5	Izotermální modely	48
3.5.1	Singulární model	48
3.5.2	Nesingulární model	50
4	Nesymetrické modely čočky	53
4.1	Model s konstantní konvergencí a shearem	53
4.2	Hmotný bod s vnější konvergencí a shearem	56
5	Závěr	61
	Literatura	63

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracovala samostatně a použila jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd....) uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze

.....

Poděkování

Především děkuji svému vedoucímu Mgr. Davidu Heyrovskému, Ph.D. za jeho trpělivost, spolehlivost a pomoc během vedení práce. Dále bych chtěla poděkovat Bc. Janu Pražákovi za korekturu práce. V neposlední řadě děkuji své rodině a přátelům za podporu během psaní práce.

Nicola Trakslová

Kapitola 1

Úvod

Jedním z astrofyzikálních projevů obecné teorie relativity je efekt známý jako gravitační čočkování. Jeho příčinou je zakřivení paprsků přicházejících od vzdáleného zdroje záření vlivem gravitačního působení mezilehlého objektu, tzv. gravitační čočky. Gravitační čočkou je typicky galaxie, kupa galaxií, nebo i jednotlivá hvězda. Ohyb světla vlivem gravitace pozoroval již Eddington 1919 během zatmění Slunce, což sloužilo jako jedno z prvních potvrzení platnosti obecné teorie relativity.

Efekt gravitačního čočkování poprvé pozorovali Walsh, Carswell a Weymann 1979 identifikací zdvojeného obrazu kvasaru vytvořeného čočkující galaxií, viz Obr. 1.1.



Obrázek 1.1: Snímek kvasaru QSO 0957+561 z Hubbleova teleskopu čočkovaný galaxií YGKOW G1. Zdroj: ESA / Hubble.

Ohyb paprsku při gravitačním čočkování způsobí, že se obraz nachází v jiné poloze na nebi než zdroj. Kromě toho má obraz i další odlišné vlastnosti od zdroje. Obraz může být zvětšený nebo zmenšený, deformovaný v různých směrech nebo zrcadlově převrácený. V případě tzv. silného čočkování lze pozorovat několikanásobné obrazy zdroje (viz Obr. 1.1).

Z hlediska metody pozorování rozlišujeme několik režimů gravitačního čočkování. Hlavní pozornost zde věnujeme již zmíněnému silnému čočkování, při kterém lze observačně rozlišit vícenásobné obrazy zdroje. Dalším režimem gravitačního čočkování je slabé čočkování, ve kterém dochází pouze ke slabé deformaci obrazu zdroje. Statistickou analýzou těchto deformací mnoha zdrojů lze například mapovat rozložení hmoty v čočkujícím objektu, na kosmologické škále pak v celém bližším vesmíru. Třetím důležitým režimem je mikročočkování. V tomto režimu jsou úhlové vzdálenosti mezi vytvořenými obrazy příliš malé na to, aby byly observačně rozlišitelné. Relativním pohybem čočky vůči zdroji však dochází k pozorovatelné časové změně celkového zjasnění obrazů. Tento režim nastává při čočkování hvězd hvězdami nebo kvasarů hvězdnými populacemi.

Detailní popis gravitačního čočkování je popsán např. v knihách Congdon a Keeton 2018, Schneider, Ehlers a Falco 2013, nebo Dodelson 2017. Veškeré informace obsažené v této práci týkající se základních principů gravitačního čočkování jsou čerpány právě z těchto zdrojů.

Vzhledem k často komplikované struktuře čočkujících objektů se matematický popis gravitačních čoček může zdát složitý. Vhodného popisu jejich vlastností však lze většinou dosáhnout pomocí jednoduchých parametrizovaných modelů rozložení jejich hmoty, případně jejich kombinací, viz Keeton 2001. V této práci pracujeme hlavně se sféricky symetrickými modely gravitačních čoček, např. hmotným bodem nebo různými radiálními hustotními profily. Dále studujeme několik jednoduchých modelů bez sférické symetrie, konkrétně model s konstantní konvergencí a shearem a model hmotného bodu s vnější konvergencí a shearem.

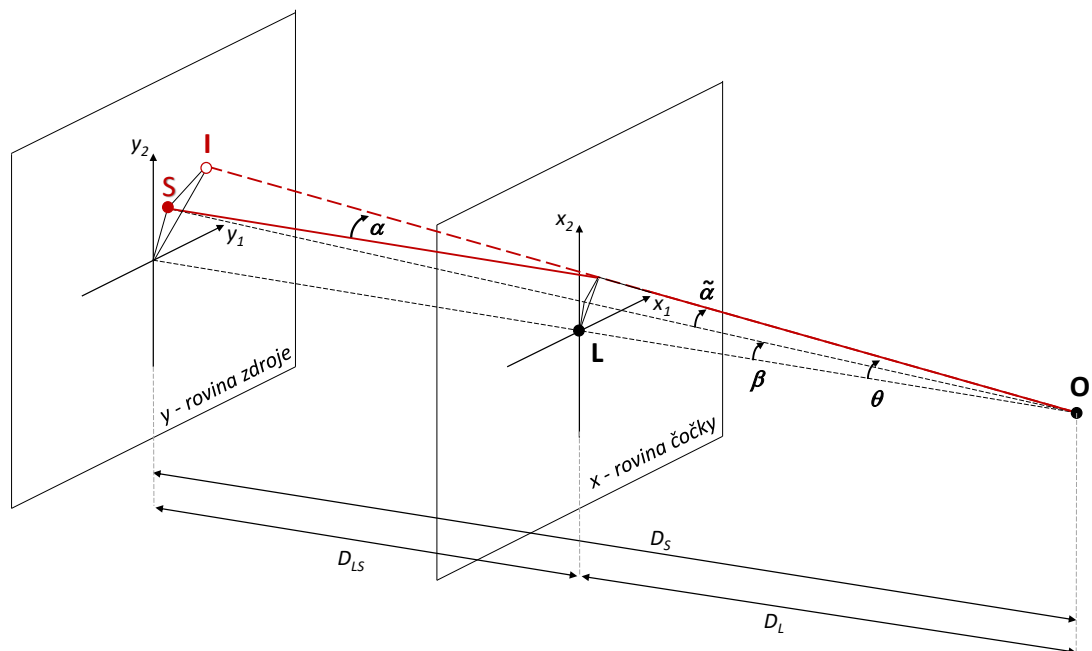
Cílem práce je prozkoumat vlastnosti obrazů v gravitačním čočkování zmíněnými modely gravitačních čoček. Kap. 2 vysvětluje princip gravitačního čočkování, v Kap. 3 se podíváme na vlastnosti čoček se sférickou symetrií a Kap. 4 se zabývá nesymetrickými čočkami. Vlastnosti obrazů určujeme dvěma způsoby: přímým výpočtem z čočkové rovnice a z polohy v tzv. Convergence-Shear diagramu (CS diagramu). CS diagram je graf možných kombinací dvou charakteristických veličin dané gravitační čočky a byl zaveden v článku Karamazov a Heyrovský 2022 k ilustraci vlastností obrazů při čočkování halem temné hmoty galaxie nebo kupy galaxií. Výsledky zjištěné oběma metodami následně porovnáváme.

Kapitola 2

Gravitační čočkování

2.1 Princip gravitačního čočkování

Astrofyzikální zdroj záření S leží na souřadnicích $[y_1, y_2]$ v tzv. rovině zdroje. Tato rovina je kolmá na směr k pozorovateli O a nachází se ve vzdálenosti D_S od pozorovatele. Zdroj S vyzařuje fotony, jejichž trajektorie jsou zakřivovány vlivem gravitačního pole jiného astrofyzikálního objektu L , tzv. gravitační čočky, umístěné mezi pozorovatelem a zdrojem záření ve vzdálenosti D_{LS} od roviny zdroje a D_L od pozorovatele. Pozorovatel tedy vidí obraz I zdroje S zpravidla na jiném místě, než se zdroj nachází. Tento efekt způsobuje tzv. gravitační čočkování a je znázorněn na Obr. 2.1.



Obrázek 2.1: Ohyb paprsku (vyznačený červeně) vlivem gravitačního působení čočky - podle Heyrovský 2021. S značí zdroj paprsku, O pozorovatele, L čočku a I obraz zdroje.

Z trojúhelníku v rovině zdroje na Obr. 2.1 lze v astrofyzikálně relevantním přiblížení malých úhlů odvodit, že platí

$$D_S \boldsymbol{\theta} = D_S \boldsymbol{\beta} + D_{LS} \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}), \quad (2.1)$$

kde jednotlivé členy této rovnice odpovídají vektorům v rovině zdroje. Jednoduchou úpravou získáme tzv. čočkovou rovnici ve tvaru

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta} - \frac{D_{LS}}{D_S} \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}), \quad (2.2)$$

kde odečítaný člen na pravé straně rovnice odpovídá tzv. redukovanému úhlu odklonu $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\theta})$, viz Obr. 2.1.

Čočková rovnice dává do souvislosti polohy obrazů a zdroje. Lze z ní odvodit polohu zdroje $\boldsymbol{\beta}$ ze znalosti polohy obrazu $\boldsymbol{\theta}$. Z čočkové rovnice lze ale vyjádřit i obrácená úloha, kdy znalost polohy zdroje zadaná úhlem $\boldsymbol{\beta}$ nám určí polohu obrazů ležícími pod úhlem $\boldsymbol{\theta}$. Tvar obrácené rovnice a počet jejích řešení jsou závislé na úhlu odklonu $\boldsymbol{\alpha}$, který je daný rozložením hmoty v čočce. Úhel $\boldsymbol{\alpha}$ se dá obecně spočítat jako

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{D_S}{D_{LS}} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \psi(\boldsymbol{\theta}), \quad (2.3)$$

kde $\psi(\boldsymbol{\theta})$ je tzv. čočkový potenciál.

Pro hmotný bod je úhel $\boldsymbol{\alpha}$ dán formulí

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{4GM}{c^2 D_L \theta^2} \boldsymbol{\theta}, \quad (2.4)$$

kde M je hmotnost hmotného bodu, c je rychlost světla, G je gravitační konstanta a θ je velikost vektoru $\boldsymbol{\theta}$. Tento výraz je vyjádřením původního Einsteinova vzorce (Einstein 1936) pro ohyb světla v gravitačním poli, který byl dříve použit pro výpočet odklonu paprsku v gravitačním poli Slunce.

Pro složitější prostorové rozložení hmoty s plošnou hustotou $\Sigma(D_L \boldsymbol{\theta})$ se dá úhel odklonu spočítat z výrazu

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \frac{D_S}{D_{LS}} \int \kappa(\boldsymbol{\theta}') \frac{\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'}{|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'|^2} d^2 \boldsymbol{\theta}', \quad (2.5)$$

kde konvergence

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\Sigma(D_L \boldsymbol{\theta})}{\Sigma_{cr}} \quad (2.6)$$

odpovídá bezrozměrné plošné hustotě, přičemž

$$\Sigma_{cr} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_S}{D_L D_{LS}}, \quad (2.7)$$

je tzv. kritická hustota.

Úhly odklonu pro různé hustotní profily jsou uvedeny v Kap. 3 vždy u popisu příslušného modelu.

2.2 Charakteristické veličiny zobrazení čočkou

Pro bodový zdroj světla stačí vyřešit čočkovou rovnici a z jejího řešení získáme znalost o polohách jeho obrazů. Ve skutečném světě ale žádný zdroj není bodový, proto využíváme zdroje s nenulovými rozměry. Vlastnosti obrazů těchto zdrojů jsou dány Jacobiho maticí přechodu z roviny zdroje do roviny obrazu,

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma \cos 2\varphi & -\gamma \sin 2\varphi \\ \gamma \sin 2\varphi & 1 - \kappa + \gamma \cos 2\varphi \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

kde κ, γ, φ jsou funkcemi 2. parciálních derivací čočkového potenciálu.

Konvergence κ z rovnice (2.6) je zde daná vztahem

$$\kappa = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_2^2} \right), \quad (2.9)$$

kde θ_1, θ_2 jsou složky vektoru $\boldsymbol{\theta}$. Shear γ je definován formulí

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_1^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_2^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right)^2} \quad (2.10)$$

a fázi φ můžeme definovat vztahy

$$[\cos 2\varphi(\boldsymbol{\theta}), \sin 2\varphi(\boldsymbol{\theta})] = \gamma^{-1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_1^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_2^2} \right), \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right]. \quad (2.11)$$

Tyto charakteristické veličiny popisují vliv čočky na vlastnosti vytvořených obrazů.

2.3 Vlastnosti obrazů

Vlastnosti obrazů zdroje jsou ovlivněny gravitačním polem čočky. Mezi tyto vlastnosti patří změna velikosti obrazů, deformace v různých směrech, rozštěpení na více obrazů, změna jasu a zrcadlová inverze.

Inverzní matici k Jacobiho matici přechodu definované vztahem (2.8) lze zapsat ve tvaru

$$A(\boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^{-1} = \frac{1}{[1 - \kappa]^2 - \gamma^2} \begin{pmatrix} 1 - \kappa + \gamma \cos 2\varphi & \gamma \sin 2\varphi \\ \gamma \sin 2\varphi & 1 - \kappa - \gamma \cos 2\varphi \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

který lze rozložit pomocí vlastních čísel

$$\lambda_{\parallel}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{1 - \kappa(\boldsymbol{\theta}) - \gamma(\boldsymbol{\theta})}, \quad \lambda_{\perp}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{1 - \kappa(\boldsymbol{\theta}) + \gamma(\boldsymbol{\theta})} \quad (2.13)$$

vztahem (Karamazov a Heyrovský 2022)

$$A(\boldsymbol{\theta}) = \lambda_{\parallel}(\boldsymbol{\theta}) \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi \end{pmatrix} + \lambda_{\perp}(\boldsymbol{\theta}) \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi \\ -\sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

kde

$$\begin{pmatrix} \cos^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

je projekční maticí na vlastní vektor $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ a

$$\begin{pmatrix} \sin^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi \\ -\sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

je projekční maticí na vlastní vektor $(-\sin \varphi, \cos \varphi)$. Faktor λ_{\parallel} tedy mění velikosti obrazů ve směru rovnoběžném s fází φ a λ_{\perp} ve směru kolmém k fázi φ , tj. ve směru $\varphi + \frac{\pi}{2}$, což můžeme vidět z rovnice (2.14). Dvě části inverzní Jacobiho matice v rovnici (2.14) tedy popisují deformace obrazů ve dvou kolmých směrech.

Zjasnění $A_0(\boldsymbol{\theta})$ obrazu v poloze $\boldsymbol{\theta}$ je rovné jeho zvětšení, které definujeme jako plochu obrazu dělenou plochou infinitesimálního zdroje a je rovno absolutní hodnotě determinantu inverzní Jacobiho matice dané rovnicí (2.12), tedy

$$A_0(\boldsymbol{\theta}) = \left| \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|^{-1} = \frac{1}{|\det J(\boldsymbol{\theta})|} = |\lambda_{\parallel}(\boldsymbol{\theta}) \lambda_{\perp}(\boldsymbol{\theta})|. \quad (2.17)$$

Zjasnění je tedy dané absolutní hodnotou součinu vlastních hodnot matice $A(\boldsymbol{\theta})$. Znaménko tohoto součinu přitom udává paritu obrazu: záporný součin odpovídá zrcadlově převrácenému obrazu. Pokud je zjasnění nekonečné ($A_0 = \infty$), zdroj leží na tzv. kaustice čočky a příslušný obraz leží na tzv. kritické křivce.

Determinant Jacobiho matice z rovnice (2.8) můžeme vyjádřit vztahem

$$\det J(\boldsymbol{\theta}) = [1 - \kappa(\boldsymbol{\theta})]^2 - \gamma^2(\boldsymbol{\theta}). \quad (2.18)$$

Položením $\det J(\boldsymbol{\theta}) = 0$ získáme předpis pro kritické křivky

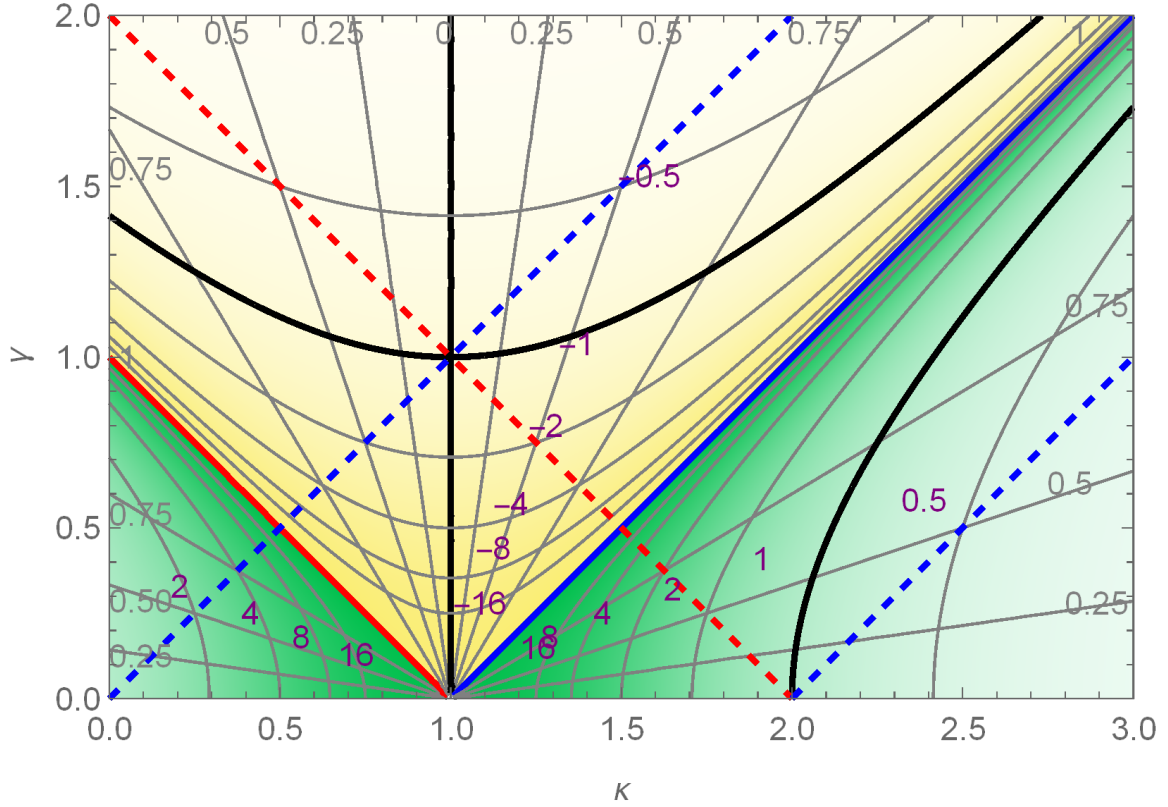
$$\gamma(\boldsymbol{\theta}) = |1 - \kappa(\boldsymbol{\theta})|. \quad (2.19)$$

Podíl vlastních hodnot matice $A(\boldsymbol{\theta})$ naopak udává zploštění obrazu, definované vztahem

$$f(\boldsymbol{\theta}) = 1 - \min \left(\left| \frac{\lambda_{\perp}(\boldsymbol{\theta})}{\lambda_{\parallel}(\boldsymbol{\theta})} \right|, \left| \frac{\lambda_{\parallel}(\boldsymbol{\theta})}{\lambda_{\perp}(\boldsymbol{\theta})} \right| \right). \quad (2.20)$$

Při stejně velkých vlastních hodnotách je zploštění nulové, při jedné nekonečné vlastní hodnotě je zploštění maximální, $f = 1$.

S využitím uvedených vlastností vlastních hodnot a jejich jednoduchých závislostí na κ a γ Karamazov a Heyrovský 2022 ukázali, že kombinace konvergence κ a shearu γ lze vynést do tzv. CS diagramu znázorněného na Obr. 2.2. Z tohoto grafu můžeme vyčíst vlastnosti obrazů zdroje v závislosti na lokálních hodnotách konvergence κ a shearu γ . Hyperbolické kontury jsou dané součinem vlastních hodnot a odpovídají tedy konstantnímu zjasnění A_0 . Přímkové kontury procházející bodem $[1, 0]$ jsou dané podílem vlastních hodnot a odpovídají tedy konstantnímu zploštění obrazu.



Obrázek 2.2: CS diagram podle Karamazov a Heyrovský 2022. Křivky konstantního zjasnění (zvětšení) obrazů jsou hyperboly, vyznačené zde pro vybrané hodnoty zjasnění se znaménkem udávajícím paritu obrazu. Přímky procházející bodem $[1, 0]$ udávají zploštění obrazu f . Červená přímka s hodnotou zploštění 1 má předpis $\gamma = 1 - \kappa$ a odpovídá bodům na tangenciální kritické křivce s maximální deformací v tangenciálním směru φ . Přímky rovnoběžné s ní odpovídají konstantnímu parametru λ_{\parallel} . Modrá přímka s hodnotou zploštění 1 má předpis $\gamma = \kappa - 1$ a odpovídá bodům na radiální kritické křivce s maximální deformací v radiálním směru, tj. ve směru $\varphi + \frac{\pi}{2}$. Přímky rovnoběžné s ní odpovídají konstantnímu parametru λ_{\perp} . Červená a modrá přímka jsou zároveň mezí pro změnu parity. Přerušované přímky značí kombinace zachovávající délku v daném směru, červená pro tangenciální směr a modré pro směr radiální. Zelená výplň značí kombinace $[\kappa, \gamma]$ odpovídající obrazům s kladnou paritou, zatímco žlutá výplň znázorňuje oblast kombinací odpovídající obrazům se zápornou paritou. Sytost barvy udává stejně jako hyperboly zvětšení obrazu.

Jednotlivé modely gravitačních čoček s různým rozložením hmoty mohou nabývat jen některých kombinací konvergence κ a shearu γ . Tyto možné kombinace κ a γ pro každý model tvoří charakteristickou podoblast v CS diagramu. CS diagramy pro vybrané příklady čoček jsou uvedeny v Kap. 3 a Kap. 4 spolu s charakteristikami příslušných modelů.

Nyní shrneme charakteristické vlastnosti oblastí CS diagramu (viz Obr. 2.2) v závislosti na jejich poloze. Zelené oblasti odpovídají kladné paritě, žlutá oblast záporné paritě. Na přímce s předpisem $\kappa = 1$ dochází ke změně úhlové orientace obrazu. Vlevo od této přímky je oblast s tangenciální deformací (dominuje λ_{\parallel}), za-

tímco vpravo s radiální deformací (dominuje λ_{\perp}). V pásu ohraničeném modrými přerušovanými přímkami s předpisy $\gamma = \kappa$ a $\gamma = \kappa - 2$ dochází ke zvětšení v radiálním směru ($|\lambda_{\perp}| > 1$). V oblasti pod červenou přerušovanou přímkou s předpisem $\gamma = 2 - \kappa$ dochází ke zvětšení v tangenciálním směru ($|\lambda_{\parallel}| > 1$). V části CS diagramu pod modrou přerušovanou přímkou $\gamma = \kappa - 2$ a v oblasti nad modrou přerušovanou přímkou $\gamma = \kappa$ a nad červenou přerušovanou přímkou s předpisem $\gamma = 2 - \kappa$ jsou obrazy v obou směrech zmenšené.

Pro zjasnění (zvětšení) obrazu jsou význačnou mezí černé hyperboly, jedna procházející bodem $[0, \sqrt{2}]$ a druhá procházející bodem $[2, 0]$. Oblast CS diagramu pod hyperbolou procházející bodem $[0, \sqrt{2}]$ a současně vlevo od hyperboly procházející bodem $[2, 0]$ odpovídá celkovému zjasnění ($A_0 > 1$). Obrazy nacházející se v této části CS diagramu budou tedy zvětšené. Obrazy ležící v CS diagramu nad hyperbolou procházející bodem $[0, \sqrt{2}]$ nebo vpravo od hyperboly procházející bodem $[2, 0]$ jsou zmenšené, neboť v těchto oblastech zjasnění $A_0 < 1$. Směrem k počátku CS diagramu se zjasnění blíží k hodnotě $A_0 = 1$.

Na přímce s předpisem $\kappa = 1$ nastává speciální situace. Obrazy ležící na této přímce mají stejný tvar jako zdroj, nejsou tedy deformované v žádném směru. Z CS diagramu na Obr. 2.2 lze vidět, že tyto obrazy mají vždy zápornou paritu. V bodě $[1, 0]$ vychází nulová Jacobiho matice $J(\boldsymbol{\theta}) = 0$. Formálně zde dochází k nekonečnému zjasnění v obou směrech. Vlastnosti obrazů v tomto případě je třeba určit vyššími derivacemi čočkové rovnice.

Dalším speciálním případem je bod $[0, 0]$, který většinou odpovídá asymptotické vzdálenosti obrazu od počátku roviny čočky, kde je její vliv zanedbatelný. Obraz v tomto bodě by měl stejný tvar, velikost i paritu jako zdroj. Přibližujeme-li se limitně k bodu $[0, 0]$ v CS diagramu a současně se nacházíme nad modrou přerušovanou přímkou s předpisem $\gamma = \kappa$, obraz je zvětšený v tangenciálním směru, ale zmenšený v radiálním směru. Posouváme-li se limitně k bodu $[0, 0]$ a zároveň se nacházíme pod modrou přerušovanou přímkou s předpisem $\gamma = \kappa$, obraz je zvětšený v tangenciálním i radiálním směru.

Díky zvětšení a zjasnění obrazů při gravitačním čočkování můžeme pozorovat velmi vzdálené objekty ve vesmíru. Dále také pomocí gravitačního čočkování můžeme zjistit hmotnost, nebo dokonce i rozložení hmoty čočky. To lze provést porovnáním vlastností obrazů zdroje pod vlivem gravitační čočky a bez jejího vlivu, s využitím měření charakteristických veličin jako γ a φ . V dalších kapitolách práce (Kap. 3 a Kap. 4) se na tyto vlastnosti podíváme podrobněji a prozkoumáme jejich souvislost s charakteristikami různých modelů čočky.

2.4 Numerický výpočet obrazů

Nalezení analytického řešení poloh obrazů $\boldsymbol{\theta}$ pro danou polohu zdroje $\boldsymbol{\beta}$ je možné pouze ve výjimečných případech. Jedním z nich je případ čočkování hmotným bodem, popsany detailně v Kap. 3.1. Většinou je však nutné čočkovou rovnicí (2.2) řešit numericky. V následujícím popíšeme postup použitý v této práci pro vykreslení obrazů kruhového zdroje. Poloha $\boldsymbol{\beta}$ bodů kruhového zdroje je dána nerovnicí

$$|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0| \leq \beta_r, \quad (2.21)$$

kde $\boldsymbol{\beta}_0$ je poloha středu zdroje a β_r je poloměr zdroje. Dosadíme-li polohu zdroje $\boldsymbol{\beta}$ z čočkové rovnice (2.2), kam za $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta})$ dosadíme úhel odklonu daného modelu, získáme nerovnici

$$\left| \boldsymbol{\theta} - \frac{D_L}{D_{LS}} \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{\beta}_0 \right| \leq \beta_r. \quad (2.22)$$

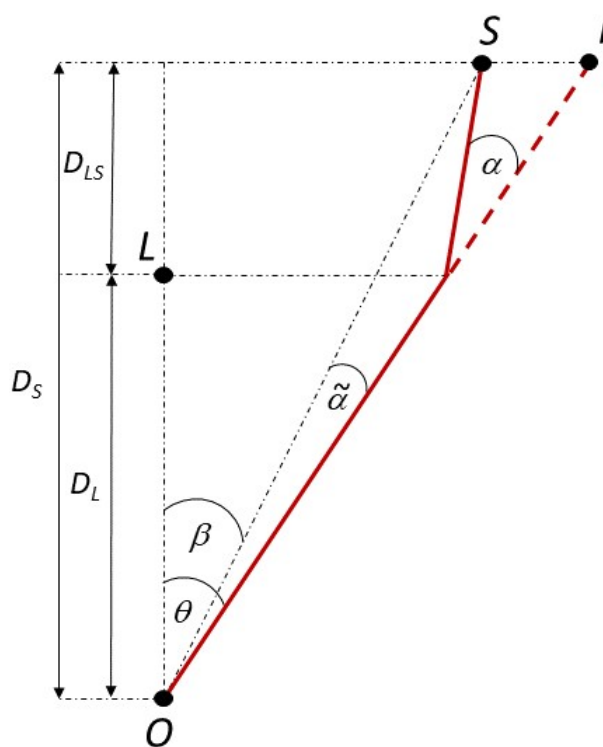
Všechny body $\boldsymbol{\theta}$ v rovině čočky vyhovující nerovnici (2.22) dají dohromady všechny obrazy kruhového zdroje. Pro zdroj jiného tvaru než kruhového se postupuje obdobně, pouze vztah (2.21) se nahradí vztahem pro příslušný tvar.

Příklady zobrazení jednotlivými modely uvedené v Kap. 3 a 4 byly řešeny pomocí programu Wolfram Mathematica. K vykreslení obrazů byla použita funkce RegionPlot, kterou lze vymežit oblast roviny čočky vyhovující vztahu (2.22).

Kapitola 3

Sféricky symetrické gravitační čočky

V této kapitole se budeme věnovat modelům gravitačních čoček se sférickou symetrií. V těchto případech bude geometrie obrazů dána symetrií a paprsek odpovídající obrazu bude ležet v rovině dané polohou zdroje S , středem čočky L a pozorovatelem O . Princip gravitačního čočkování ukázaný na Obr. 2.1 můžeme v případě sféricky symetrických modelů znázornit přímo v rovině SLO , jak je znázorněno na Obr. 3.1.



Obrázek 3.1: Paprsek se ohýbá vlivem sféricky symetrické gravitační čočky v rovině SLO .

S značí zdroj paprsku, O pozorovatele, L střed čočky a I obraz zdroje.

3.1 Hmotný bod

V této kapitole budeme gravitační čočku aproximovat hmotným bodem (tzv. bodová čočka). Tento model je i přes svou jednoduchost přesným popisem situace vně konečných sféricky symetrických rozložení hmoty a výborně odpovídá například čočkování jednotlivými hvězdami v naší galaxii (Paczynski 1996). Prochází-li navíc paprsek v dostatečné vzdálenosti od čočky, dá se i nesymetrické rozložení aproximovat tímto modelem přes multipólový rozvoj.

Úhel odklonu pro bodovou čočku o hmotnosti M jsme uvedli již v Kap. 2 vztahem (2.4). Dosadíme-li tento úhel do čočkové rovnice (2.2), vyjde

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta} - \theta_E^2 \frac{\boldsymbol{\theta}}{\theta^2}, \quad (3.1)$$

kde θ_E značí tzv. Einsteinův poloměr, který je roven

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S}}. \quad (3.2)$$

Úhel odklonu (2.4) dosadíme do rovnice (2.3). Jejím vyřešením získáme čočkový potenciál

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = \theta_E^2 \ln |\boldsymbol{\theta}|. \quad (3.3)$$

Z rovnice (2.6) pak získáme vztah pro konvergenci bodové čočky

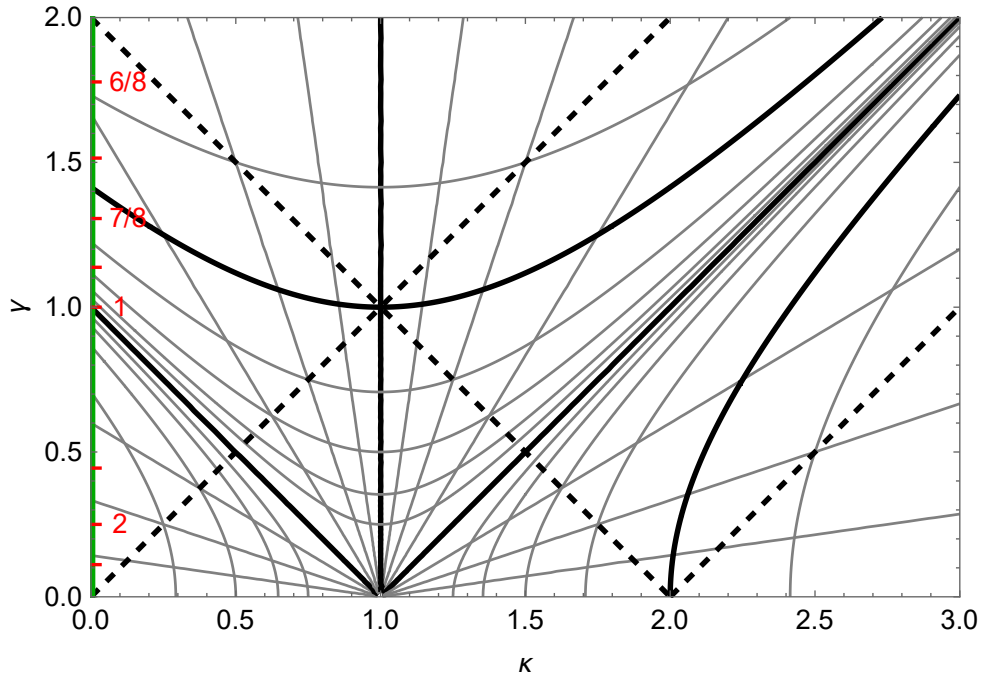
$$\kappa(\boldsymbol{\theta}) = \pi \theta_E^2 \delta(\boldsymbol{\theta}), \quad (3.4)$$

a z rovnice (2.10) její shear, který můžeme vyjádřit jako

$$\gamma(\boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{\theta_E}{\theta} \right)^2. \quad (3.5)$$

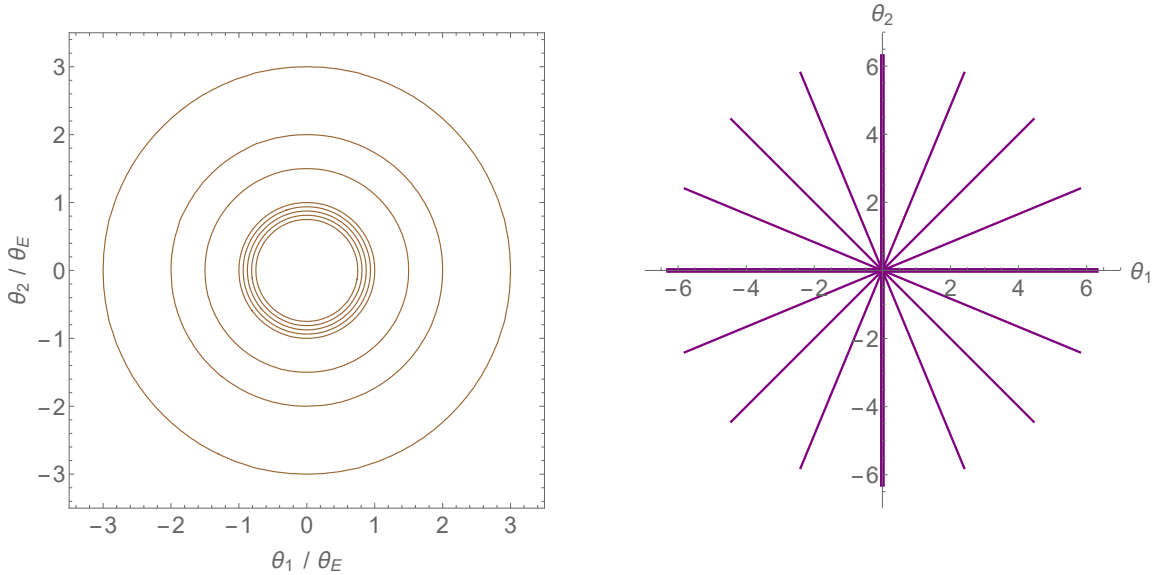
Zavedeme-li v rovině čočky polární souřadnice, $(\theta_1, \theta_2) = \theta(\cos \phi, \sin \phi)$, z rovnice (2.11) získáme fázi

$$\varphi(\boldsymbol{\theta}) = \phi + \pi/2. \quad (3.6)$$



Obrázek 3.2: CS diagram pro bodovou čočku. Zelená přímka značí možné kombinace hodnot konvergence κ a shearu γ . Červené body značí vzdálenost od počátku v rovině čočky v jednotkách Einsteinova poloměru θ_E pro hodnoty popořadě odshora dolů $\theta/\theta_E \in \{6/8, 13/16, 7/8, 15/16, 1, 3/2, 2, 3\}$.

Na Obr. 3.2 můžeme vidět CS diagram pro bodovou čočku. Zelená křivka ukazuje možné kombinace shearu a konvergence. Z Obr. 3.2 vidíme, že v případě bodové čočky jsou možné hodnoty konvergence pouze $\kappa = 0$ (kromě přesné polohy čočky, kde je plošná hustota a tedy i konvergence nekonečná). Dále lze z CS diagramu na Obr. 3.2 vyčíst, že u bodové čočky vždy dochází ke zmenšení obrazů v radiálním směru (díky poloze nad přímkou $\gamma = \kappa$). Červené hodnoty vyznačují úhlovou vzdálenost od počátku v rovině čočky v jednotkách Einsteinova poloměru θ_E , tedy θ/θ_E . Pro tyto body lze vykreslit odpovídající kontury shearu v rovině čočky (levý panel Obr. 3.3). Z rovnice (3.6) můžeme podobně vynést kontury fáze v rovině čočky (pravý panel Obr. 3.3).



Obrázek 3.3: Kontury shearu γ (levý panel) a fáze φ (pravý panel) bodové čočky. Hodnoty kontur shearu odpovídají červeně vyznačeným bodům na Obr. 3.2, konkrétně popořadě zevnitř ven $\gamma \in \{1/9, 1/4, 4/9, 1, 256/225, 64/49, 256/169, 16/9\}$. Hodnoty fáze odpovídají úhlu kolmému na polární úhel ϕ v rovině čočky od kladného směru osy θ_1 . Bereme-li fázi z intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$, odpovídají oba směry osy θ_1 hodnotě $\varphi = \pi/2$ a další vyznačené polopřímky ve směru hodinových ručiček od nich hodnotám vždy o $\pi/8$ menší. Oba směry osy θ_2 tedy odpovídají hodnotě $\varphi = 0$.

Nyní budeme zkoumat vlastnosti obrazů pro vybrané hodnoty shearu vyznačené červenou barvou v CS diagramu, viz Obr. 3.2. Nejprve uvažujme hodnotu $\theta/\theta_E = 3$, která odpovídá obrazům podél vnější kružnice v levém panelu Obr. 3.3. Z CS diagramu na Obr. 3.2 vidíme, že obraz bude pouze o trochu větší než zdroj a bude mít kladnou paritu. V radiálním směru bude obraz mírně zmenšený, v tangenciálním směru bude mírně zvětšený, zploštění bude mírné, $f < 0.25$. Obraz se tedy celkově příliš neliší od zdroje. Pro polohu $\theta/\theta_E = 2$ bude mít obraz obdobné vlastnosti jako obraz s hodnotou $\theta/\theta_E = 3$, jen již bude trochu více deformovaný v tangenciálním směru. Příklad $\theta/\theta_E = 1$ je poněkud extrémní, neboť obraz infinitesimálního zdroje je na Einsteinově kružnici nekonečně zvětšený, nekonečně zjasněný a nekonečně protažený v tangenciálním směru. Obraz na kružnici s $\theta/\theta_E = 7/8$ bude téměř stejně velký jako zdroj, bude však zrcadlově převrácený a stále výrazně tangenciálně protažený (zploštění $f > 0.75$). Obraz ve vzdálenosti $\theta/\theta_E = 6/8$ bude zrcadlově obrácený, více než dvakrát zmenšený, s mírným tangenciálním protažením a výraznějším radiálním ztenčením.

S ohledem na nulovou konvergenci budou všechny obrazy vytvořené bodovou čočkou orientované ve směru fáze. Podle hodnot v pravém panelu Obr. 3.3 tedy budou vždy orientované v tangenciálním směru, tečné ke kružnicím se středem v poloze hmotného bodu.

3.1.1 Obrazy bodového zdroje

V případě bodové čočky lze polohy i vlastnosti obrazů vypočítat analyticky. Vlastnosti vyplývající z jejich polohy v CS diagramu tak lze podložit i získanými vztahy pro vlastní hodnoty, zjasnění i zploštění. Pro názornost nyní zkoumejme zobrazení bodového zdroje, tedy jednoho bodu ve zdrojové rovině. Zobrazení nebodového zdroje pak lze vždy poskládat ze zobrazení všech jeho bodů. Vezmeme čočkovou rovnici (3.1) a vydělíme ji Einsteinovým poloměrem θ_E . Z toho dostaneme rovnici

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \frac{1}{x^2} \mathbf{x}, \quad (3.7)$$

kde $\mathbf{y} = \boldsymbol{\beta}/\theta_E$ je poloha zdroje a $\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}/\theta_E$ je poloha obrazu, obojí v jednotkách Einsteinova poloměru. Hledáme-li polohy obrazů v rovině čočky $\mathbf{x}(\mathbf{y})$, musíme čočkovou rovnici (3.7) invertovat. Díky axiální symetrii z rovnice (3.7) získáme jednoduchou úpravou rovnici podél osy procházející polohami čočky a zdroje

$$y = x - \frac{1}{x}. \quad (3.8)$$

Ta po vynásobení x přejde do tvaru

$$x^2 - yx - 1 = 0. \quad (3.9)$$

Řešením této rovnice a převedením zpět do vektorového tvaru získáváme hledané polohy obrazů

$$\mathbf{x}_{+,-} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4y^{-2}}}{2} \mathbf{y}. \quad (3.10)$$

Pro obraz v poloze x_+ platí $|x_+| > 1$, leží tedy vždy vně Einsteinova poloměru. Naopak pro obraz v poloze x_- platí $|x_-| < 1$, leží tedy vždy uvnitř Einsteinova poloměru.

Například pro zdroj ležící v poloze $[y, 0]$ získáváme z rovnice (3.10) řešení

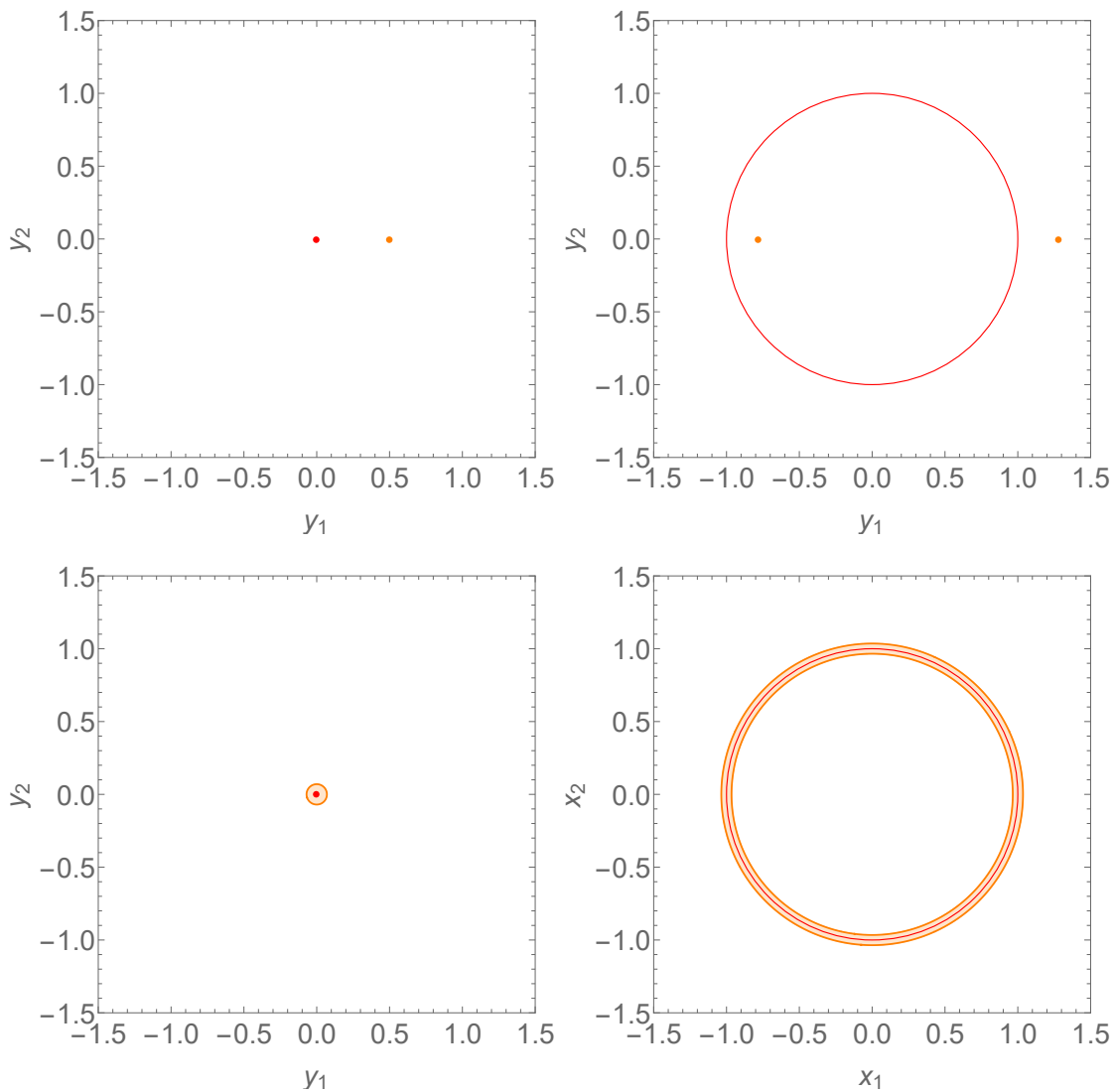
$$x_+ = \left[\frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2}, 0 \right] \quad (3.11)$$

a

$$x_- = \left[\frac{y - \sqrt{y^2 + 4}}{2}, 0 \right]. \quad (3.12)$$

Získáváme tedy dva obrazy v rovině čočky na uvedených souřadnicích, jak můžeme vidět na Obr. 3.4 v prvním řádku vpravo.

Kdybychom umístili bodový zdroj do počátku roviny zdroje, vyšlo by nám nekonečně mnoho řešení čočkové rovnice (3.7) daných vztahem $|x| = 1$ a pozorovali bychom tedy jeden kruhový obraz, tzv. Einsteinův prstenec. To nastává i pro nebodový zdroj v případě, že se čočka nachází přesně na spojnici mezi zdrojem a pozorovatelem. Obraz se potom jeví jako kruhový prstenec o poloměru θ_E , což můžeme vidět v pravém sloupci druhého řádku Obr. 3.4.



Obrázek 3.4: Zobrazení bodového zdroje hmotným bodem. V levém sloupci je oranžovou barvou vyobrazen bodový zdroj. V prvním řádku je zdroj umístěn na souřadnicích $[0.5, 0]$, ve druhém řádku zdroj leží přesně za čočkou, ve středu roviny zdroje. V pravém sloupci jsou oranžovou barvou vyobrazeny příslušné obrazy od bodového zdroje. Červenou barvou je v levém sloupci znázorněna (tangenciální) kaustika, v pravém (tangenciální) kritická křivka. V druhém řádku je zdroj na stejném místě jako kaustika a obraz ve stejné poloze jako kritická křivka. Z důvodu překryvu jsou v tomto případě zdroj i obraz zvýrazněny.

Konvergenci a shear pro bodovou čočku určíme ze vzorců (3.4) a (3.5), kde $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{x}\theta_E$. Dostáváme $\kappa(\boldsymbol{x}) = \pi\theta_E^2\delta(\boldsymbol{x}\theta_E)$ a $\gamma(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{-2}$. V našem případě oba obrazy leží mimo počátek, konvergence je tedy nulová ($\kappa = 0$). Z kombinace γ, κ nyní můžeme určit vlastnosti obrazů jako funkci jejich polohy.

Vlastní čísla Jacobiho matice získáme dosazením do rovnice (2.13),

$$\lambda_{\parallel} = \frac{1}{1 - \gamma} = \frac{x^2}{x^2 - 1}, \quad (3.13)$$

$$\lambda_{\perp} = \frac{1}{1 + \gamma} = \frac{x^2}{x^2 + 1}. \quad (3.14)$$

Zatímco λ_{\perp} je vždy kladné, λ_{\parallel} je kladné pro obrazy ležící vně Einsteinovy kružnice, záporné pro obrazy ležící uvnitř. Vždy navíc platí, že $|\lambda_{\parallel}| > |\lambda_{\perp}|$. Zjasnění obrazu určíme podle rovnice (2.17),

$$A_0 = |\lambda_{\perp}\lambda_{\parallel}| = \frac{x^4}{|x^4 - 1|} \quad (3.15)$$

Zjasnění pro obrazy ležící daleko od hmotného bodu klesá k 1, pro obrazy blízké hmotnému bodu klesá k 0. Na Einsteinově kružnici naopak diverguje. Ta tedy představuje kritickou křivku bodové čočky. Dosazením $x = 1$ do čočkové rovnice (3.7) zjišťujeme, že kaustikou bodové čočky je bod $y = 0$ v poloze čočky.

Zploštění je dané rovnicí (2.20), která se zde zjednoduší na

$$f = 1 - \left| \frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_{\parallel}} \right| = 1 - \left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right|. \quad (3.16)$$

Pro obrazy ležící vně Einsteinovy kružnice ($x > 1$) vyjde zploštění $f = 2/(x^2 + 1)$, pro vzdálené obrazy nulové, u Einsteinovy kružnice maximální. Pro obrazy ležící uvnitř Einsteinovy kružnice ($x < 1$) vyjde zploštění $f = 2x^2/(x^2 + 1)$, které klesá od maxima u Einsteinovy kružnice k nule v blízkosti počátku.

S využitím řešení čočkové rovnice ze vztahu (3.10) lze vyjádřit veličiny z rovnic (3.13)-(3.16) pro oba obrazy jako funkci polohy zdroje y . Zde uvádíme pouze jeden zajímavý výsledek. Celkové zjasnění obou obrazů se v tomto případě spočítá jako součet zjasnění (3.15) každého z obrazů, tedy

$$A_{0,tot} = A_0(x_+) + A_0(x_-) = \frac{y^2 + 2}{y\sqrt{y^2 + 4}}. \quad (3.17)$$

Pro bodový zdroj v úhlové vzdálenosti od čočky podstatně větší než Einsteinův poloměr ($y \gg 1$) klesá celkové zjasnění k hodnotě 1. Naopak pro bodový zdroj uvnitř Einsteinova poloměru zjasnění směrem k poloze čočky diverguje jako $1/y$. Vztah (3.17) udává celkové zjasnění světelného toku i v případě velmi malého Einsteinova poloměru, kdy jednotlivé obrazy není možné pozorováním rozlišit. Velice přesně například popisuje tzv. gravitační mikročočkování vzdálené hvězdy v naší galaxii další hvězdou v popředí (Paczynski 1996).

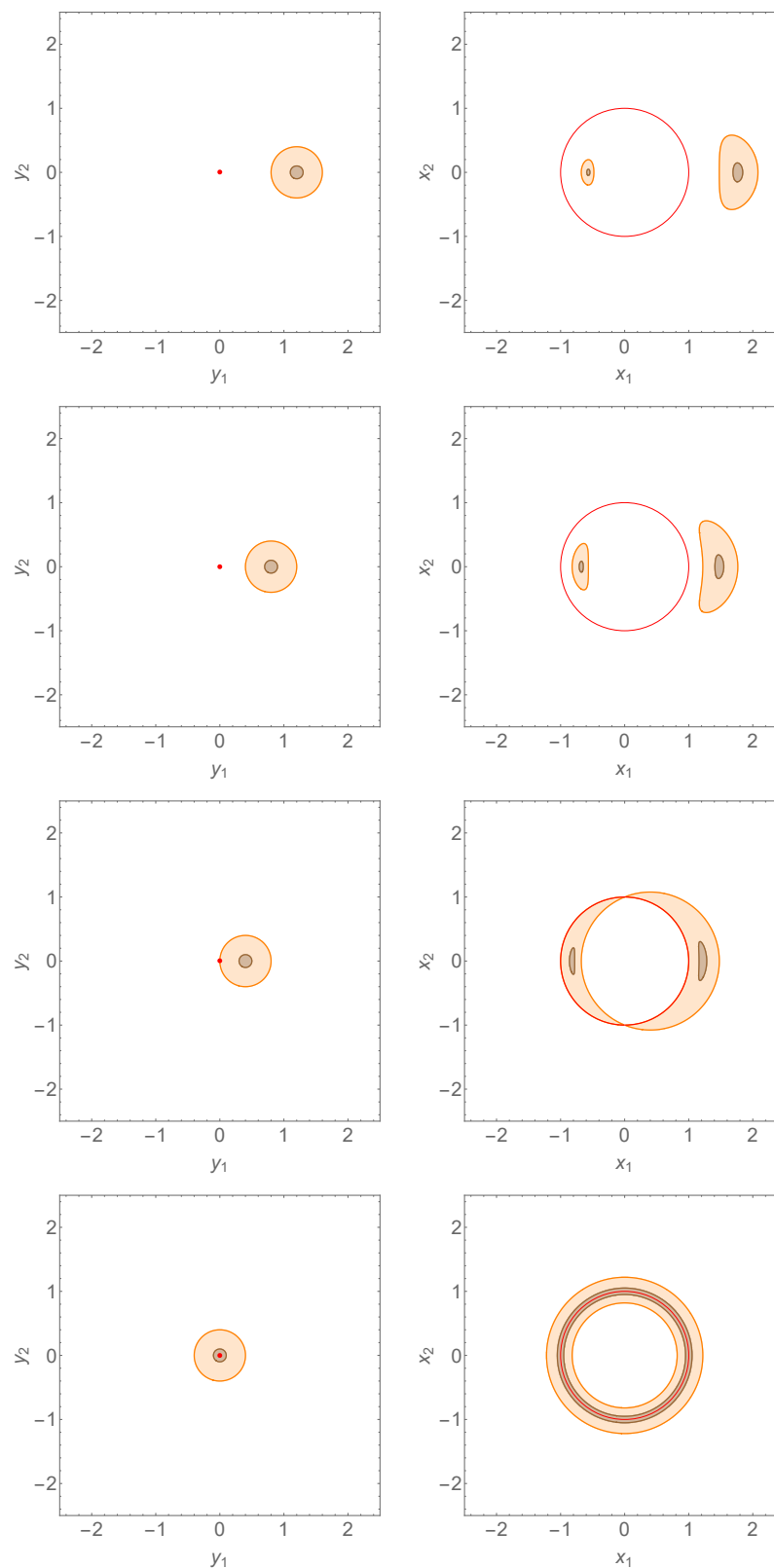
Z polohy v CS diagramu můžeme určit vlastnosti obrazů bodového infinitesimálního zdroje. Uvažujme zdroj se středem na souřadnicích $[0.5, 0]$, ilustrovaný na horní

řádce Obr. 3.4. V tomto případě vzniknou dva obrazy, jeden se středem na souřadnicích $\left[\frac{1+\sqrt{17}}{4}, 0\right]$ a druhý se středem na souřadnicích $\left[\frac{1-\sqrt{17}}{4}, 0\right]$. První obraz má shear $\gamma = 0.610$, podle Obr. 3.2 tedy bude zvětšený, protažený v tangenciálním směru a bude mít kladnou paritu. Druhý obraz má shear $\gamma = 1.640$, podle Obr. 3.2 tedy bude naopak zmenšený, protažený v tangenciálním směru a zrcadlově převrácený.

Druhý řádek Obr. 3.4 ilustruje speciální případ bodového zdroje ležícího přesně za bodovou čočkou. Kaustikou pro tento model je bod v poloze čočky a kritickou křivkou je Einsteinova kružnice.

3.1.2 Obrazy kruhového zdroje

Skutečný zdroj nikdy nemůže být přesně bodovým, proto jej nyní ilustrujeme kruhovým terčíkem. Uvažujme kruhový zdroj o poloměru 0.4 znázorněný v levém sloupci Obr. 3.5 oranžovou barvou. Střed tohoto zdroje budeme posouvat po řadě z bodu $[1.2, 0]$, jak můžeme vidět v horní řádce, přes body $[0.8, 0]$, $[0.4, 0]$, až k bodu $[0, 0]$ vlevo dole. Z pravého sloupce Obr. 3.5 vidíme, že pro zdroj v poloze $[1.2, 0]$ vznikly dva obrazy a postupným přibližováním zdroje směrem k bodu $[0, 0]$ se tyto obrazy spojují, až vytvoří Einsteinův prstenec. Na Obr. 3.5 můžeme vidět také zdroje a obrazy vyobrazené hnědou barvou, se stejnými polohami středu jako oranžové barvy, jen poloměr tohoto zdroje je 0.1. Z Obr. 3.5 si můžeme všimnout, že hnědé obrazy mají obdobné chování jako obrazy oranžové. Díky malé velikosti ale deformace obrazů v prvních třech řádcích dobře odpovídají vlastnostem infinitezimálních obrazů odečtených z CS diagramu, s použitím hodnoty γ v jejich středu.



Obrázek 3.5: Zobrazení kruhového zdroje hmotným bodem. V levém sloupci je oranžovou barvou vyobrazen kruhový zdroj o poloměru 0.4 a hnědou barvou zdroj o poloměru 0.1. Středů těchto zdrojů jsou odshora dolů na souřadnicích $[1.2, 0]$, $[0.8, 0]$, $[0.4, 0]$, $[0, 0]$ v rovině zdroje. V pravém sloupci jsou vyobrazeny příslušné obrazy. Červenou barvou je v levém sloupci znázorněna (tangenciální) kaustika, v pravém sloupci (tangenciální) kritická křivka.

3.2 Model Navarro-Frenka-Whitea (NFW)

Model Navarro-Frenka-Whitea (NFW), viz Navarro, Frenk a White 1996, navzdory své jednoduchosti relativně dobře aproximuje rozložení temné hmoty v halech galaxií a v kupách galaxií. Díky tomu je jedním z nejčastěji používaných modelových profilů pro hala temné hmoty.

Hustota rozložení temné hmoty sférického NFW modelu je definována vztahem

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{\frac{r}{r_s} \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^2}, \quad (3.18)$$

kde r_s je škálový poloměr a ρ_s je charakteristická hustota modelu. Při gravitačním čočkování halem s tímto profilem je úhel odklonu paprsku určen formulí

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{4\kappa_s r_s D_S}{D_L D_{LS}} \left[\ln \frac{x}{2} + F(x) \right] \frac{\mathbf{x}}{x^2}, \quad (3.19)$$

kde κ_s je kritická konvergence modelu a \mathbf{x} je poloha od středu hala v jednotkách r_s , viz Bartelmann 1996.

Ve vztazích pro úhel odklonu, konvergenci a shear se objevuje pomocná funkce

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctanh} \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} & \text{pro } x < 1, \\ 1 & \text{pro } x = 1, \\ \frac{\operatorname{arctan} \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} & \text{pro } x > 1, \end{cases} \quad (3.20)$$

kteřou následně využijeme i v dalším sféricky symetrickém modelu. Pro konvergenční parametr κ_s můžeme konvergenci NFW modelu vyjádřit vztahem

$$\kappa_{NFW}(x) = 2\kappa_s \frac{1 - F(x)}{x^2 - 1} \quad (3.21)$$

a jeho shear vztahem

$$\gamma_{NFW}(x) = 2\kappa_s \left[\frac{2}{x^2} \ln \frac{x}{2} + \frac{1}{1-x^2} + \frac{2-3x^2}{x^2(1-x^2)} F(x) \right]. \quad (3.22)$$

Označíme-li úhlové polohy obrazu a zdroje v jednotkách úhlového škálového poloměru $\mathbf{y} = \frac{D_L}{r_s} \boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{x} = \frac{D_L}{r_s} \boldsymbol{\theta}$, získáme po dosazení (3.19) do (2.2) čočkovou rovnici

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - 4\kappa_s \left[\ln \frac{x}{2} + F(x) \right] \frac{\mathbf{x}}{x^2}. \quad (3.23)$$

Nyní budeme zkoumat CS diagram pro různé konvergenční parametry κ_s . Nejprve budeme uvažovat hodnotu

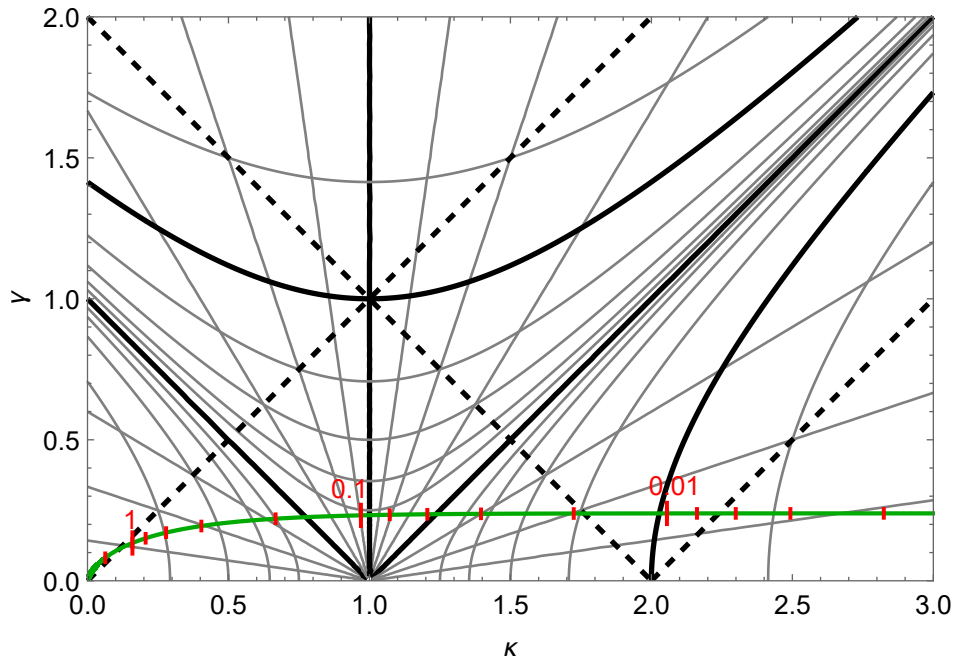
$$\kappa_s = \frac{1}{4 \frac{r_s^2}{D_L \theta_E} \left[\log(1 + c_s) - \frac{c_s}{1+c_s} \right]}, \quad (3.24)$$

vypočtenou pro vzorové halo s koncentračním parametrem $c_s = 3.5$ a úhlovým škálovým poloměrem v jednotkách Einsteinova poloměru $\frac{r_s}{D_L \theta_E} = 1.2$, viz Karamazov a

Heyrovský 2022, což vychází přibližně $\kappa_s = 0.239035$. CS diagram pro tuto hodnotu κ_s můžeme vidět na Obr. 3.6.

Zelená křivka vyznačuje veškeré kombinace $\kappa_{NFW}(x)$ a $\gamma_{NFW}(x)$, které se vyskytují v rovině čočky. Červené body identifikují odpovídající vzdálenost x od středu hala. Konvergence daná vztahem (3.21) v samotném středu diverguje, zatímco shear podle (3.22) konverguje k hodnotě κ_s . Tomu odpovídá asymptotická limita za pravou mezí Obr. 3.6. S rostoucí vzdáleností konvergence i shear klesají podél křivky směrem k počátku CS diagramu. Nulové hodnoty obou veličin tedy odpovídají nekonečné vzdálenosti od středu hala, kde je vliv čočky zanedbatelný.

Nyní se podíváme, jak závisí vlastnosti obrazů na poloze zdroje vůči kaustice a jestli vlastnosti obrazů odpovídají příslušné poloze v CS diagramu. Na Obr. 3.7 jsou v levém sloupci oranžovou barvou vyobrazeny různé polohy zdroje o poloměru 0.005 se středem na souřadnicích odshora dolů popořadě $[0.04, 0]$, $[0.025, 0]$, $[0.01, 0]$ a $[0, 0]$. V pravém sloupci jsou v $5\times$ větším úhlovém rozsahu vyobrazeny příslušné obrazy pro NFW model s $\kappa_s = 0.239035$. Vlastnosti těchto obrazů budeme porovnávat s vlastnostmi podle CS diagramu na Obr. 3.6. V levém sloupci jsou znázorněny také kaustiky, červeně tangenciální směr, pro který je kaustika opět bodová, a modře radiální směr. V pravém sloupci můžeme vidět odpovídající kritické křivky.



Obrázek 3.6: CS diagram pro NFW model s konvergenčním parametrem $\kappa_s = 0.239035$. Zelená křivka značí možné kombinace konvergence κ_{NFW} a shearu γ_{NFW} . Červené body značí vzdálenost od počátku v rovině čočky, konkrétně zprava doleva pro hodnoty $x \in \{0.002, 0.004, 0.006, 0.008, 0.01, 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 2\}$.

Nejprve uvažujme zdroj vzdálený od počátku v poloze $[0.04, 0]$. Tento zdroj vytváří jeden tangenciálně protáhlý obraz, jak můžeme vidět na Obr. 3.7 vpravo nahoře. Vzdálenost od počátku v rovině čočky se dá určit ze vzorce

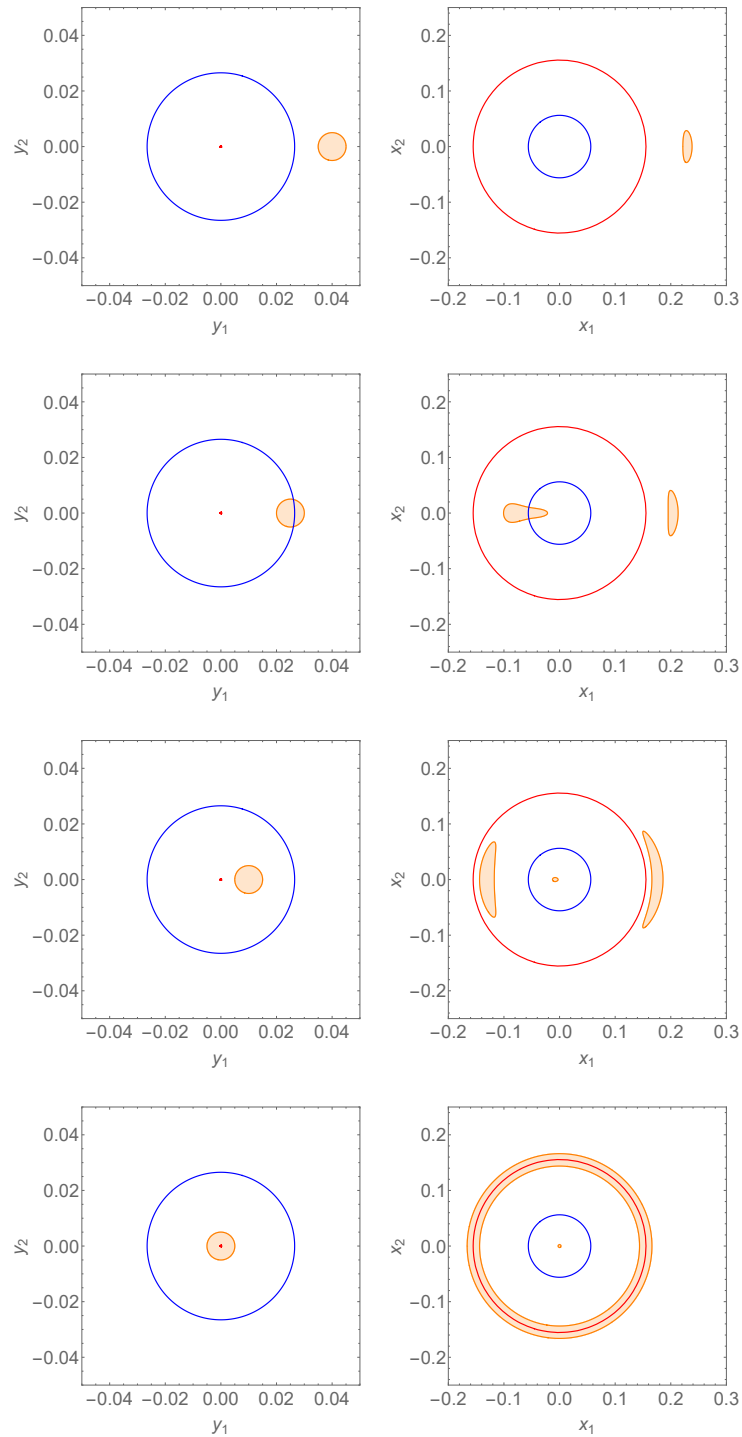
$$x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad (3.25)$$

kde x_1, x_2 jsou složky vektoru \mathbf{x} . V tomto případě vychází pro střed obrazu přibližně $x = 0.23$. Podle CS diagramu na Obr. 3.6 by měl být daný obraz asi $8\times$ zvětšený a protáhlý v tangenciálním směru (zploštění cca 0.7), což odpovídá vlastnostem obrazu na Obr. 3.7.

Posuneme-li však zdroj až na radiální kaustiku do bodu $[0.025, 0]$, vznikne další, tentokrát radiálně podlouhlý obraz ležící na radiální kritické křivce. Tento nový „makro-obraz“ se však skládá ze dvou částečných obrazů spojených na radiální kritické křivce. Jde o obrazy pouze té části zdroje, která leží uvnitř kaustiky. Celkový rozsah tohoto makro-obrazu leží ve vzdálenostech od počátku roviny čočky $x \in \langle 0.02, 0.1 \rangle$. Z CS diagramu na Obr. 3.6 vidíme, že tento obraz bude převážně radiálně protažený (pouze jeho levý konec zasahuje do hodnot $\kappa < 1$ a je tedy lehce tangenciálně protažený), zvětšený a ve vzdálenosti $x = 0.055$, což je pozice na radiální kritické křivce, bude měnit paritu. Část makro-obrazu vně radiální kritické křivky je tedy zrcadlově převrácená. Původní vnější obraz se zvětší a posune se blíž k tangenciální kritické křivce.

Dostane-li se zdroj ještě blíže ke středu do oblasti mezi dvěma kaustikami, vidíme, že se onen protáhlý makro-obraz rozdělil na dva, z nichž část původního obrazu se zápornou paritou je vzdálena od počátku $x = 0.13$, protáhla se v tangenciálním směru a posunula se k vnitřní straně tangenciální kritické křivky. Oproti tomu část původního obrazu s kladnou paritou se přiblíží ke středu čočky na vzdálenost $x \in \langle 0.002, 0.01 \rangle$. Z CS diagramu lze vyčíst, že jde o zmenšený obraz, který je pouze slabě radiálně protažený. Obraz ležící vně tangenciální kaustiky se ještě víc zdeformuje v tangenciálním směru, přimkne se zvnějšku k tangenciální kritické křivce a kopíruje její tvar.

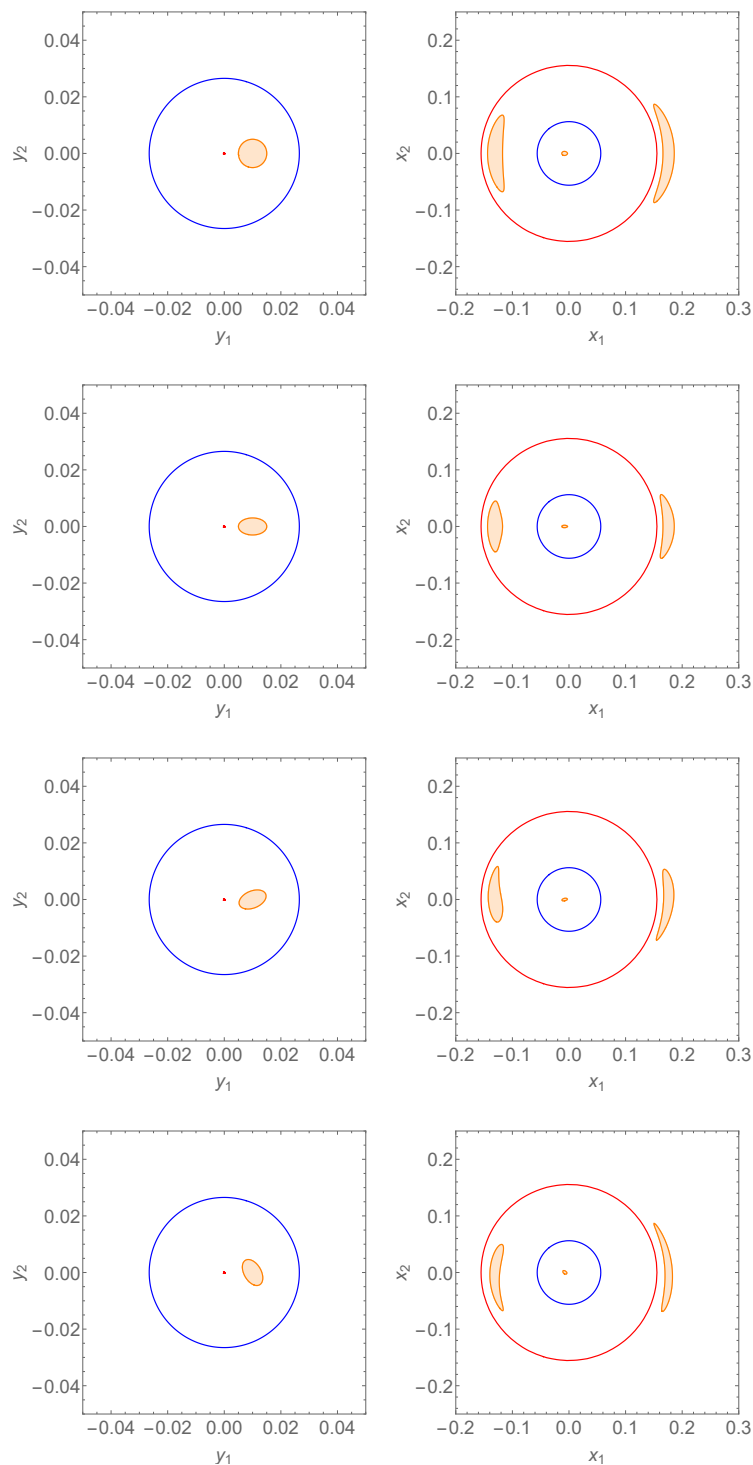
Položíme-li střed zdroje přesně na bodovou tangenciální kaustiku, obraz poblíž středu je výrazně zmenšený a vnější obrazy se spojí v Einsteinův prsteneček ležící na tangenciální kritické křivce, vzdálený $x \in \langle 0.14, 0.16 \rangle$ od počátku, jak můžeme vidět na Obr. 3.7 vpravo dole. Z CS diagramu na Obr. 3.6 vidíme nekonečné zjasnění obrazu infinitesimálního zdroje v tangenciálním směru, což odpovídá poloze obrazu na tangenciální kritické křivce. Poloha v CS diagramu tedy opět koresponduje s vlastnostmi obrazu.



Obrázek 3.7: Zobrazení kruhového zdroje vytvořené NFW modelem s $\kappa_s = 0.239035$. V levém sloupci je oranžovou barvou vyobrazen kruhový zdroj o poloměru 0.005. Střed zdroje leží popořadě odshora dolů na souřadnicích $[0.04, 0]$, $[0.025, 0]$, $[0.01, 0]$ a $[0, 0]$. V pravém sloupci jsou oranžovou barvou vyobrazeny příslušné obrazy. V levém sloupci je modrou barvou znázorněna radiální kaustika, červenou barvou tangenciální kaustika. V pravém sloupci je modrou barvou znázorněna radiální kritická křivka, červenou barvou tangenciální kritická křivka.

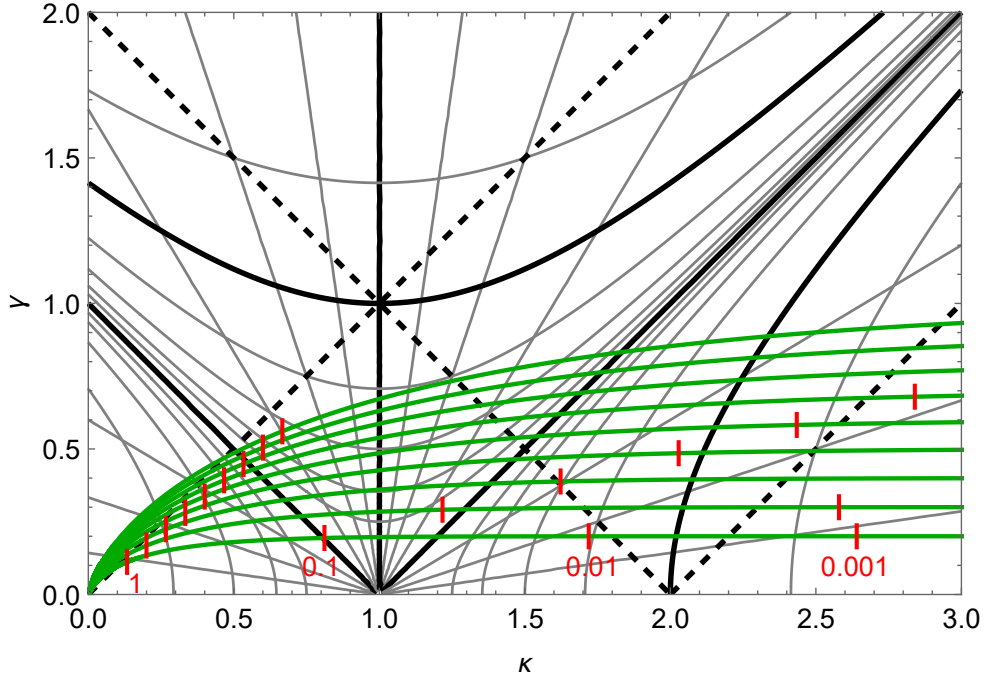
Pro ilustraci u tohoto modelu uvádíme příklad, jak se mění obrazy, pokud vyměníme kruhový zdroj za eliptický. Takový zdroj je lepší aproximací například čočkovaných galaxií. Obr. 3.8 ukazuje, jak se mění příslušné obrazy, měníme-li excentricitu e a orientaci hlavní osy χ elipsoidálního zdroje s hlavní poloosou $a = 0.005$ umístěného v rovině zdroje se středem na souřadnicích $[0.01, 0]$. Uvažujme nejprve situaci z třetího řádku Obr. 3.7, tedy eliptický zdroj s nulovou excentricitou e (kruhový zdroj), viz první řádek Obr. 3.8. Dále použijeme ten samý zdroj, akorát zvětšíme hodnotu excentricity na $e = 0.8$ s orientací $\chi = 0$, což je ukázáno i s příslušnými obrazy v druhém řádku Obr. 3.8. Obrazy zůstávají symetrické, ale např. u levého obrazu je sotva znatelné prohnutí podél tangenciální kritické křivky. Dále zdroji s excentricitou $e = 0.8$ změníme orientaci na $\chi = \frac{\pi}{8}$. Tento zdroj i se svými obrazy jsou znázorněny ve třetím řádku Obr. 3.8. Obrazy už viditelně postrádají symetrii, nabývají více kapkovitého tvaru. V posledním řádku Obr. 3.8 vidíme elipsoidální zdroj s excentricitou $e = 0.8$ a orientací $\chi = \frac{2\pi}{3}$ i s odpovídajícími obrazy. I zde mají obrazy kapkovitý tvar, jejich větší protažení oproti předchozímu řádku je ale způsobené orientací zdrojové elipsy. Hodnoty konvergence a shearu uprostřed odpovídajících obrazů se na jednotlivých řádcích neliší.

Tyto příklady ilustrují, že přestože symetrická čočka obrazy deformuje v tangenciálním a radiálním směru, tvar a orientace výsledných obrazů je zároveň ovlivněná i vlastním tvarem a orientací zdroje.



Obrázek 3.8: Zobrazení eliptického zdroje NFW modelem s $\kappa_s = 0.239035$. V levém sloupci je oranžovou barvou vyobrazen eliptický zdroj s hlavní poloosou $a = 0.005$ umístěný v rovině zdroje se středem na souřadnicích $[0.01, 0]$. V prvním řádku má zdroj excentricitu $e = 0$ a orientaci $\chi = 0$, ve druhém řádku $e = 0.8$ a $\chi = 0$, ve třetím řádku $e = 0.8$ a $\chi = \frac{\pi}{8}$ a ve čtvrtém řádku $e = 0.8$ a $\chi = \frac{2\pi}{3}$. V pravém sloupci jsou oranžovou barvou vyobrazeny příslušné obrazy. V levém sloupci je modrou barvou znázorněna radiální kaustika, červenou barvou tangenciální kaustika. V pravém sloupci je modrou barvou znázorněna radiální kritická křivka, červenou barvou tangenciální kritická křivka.

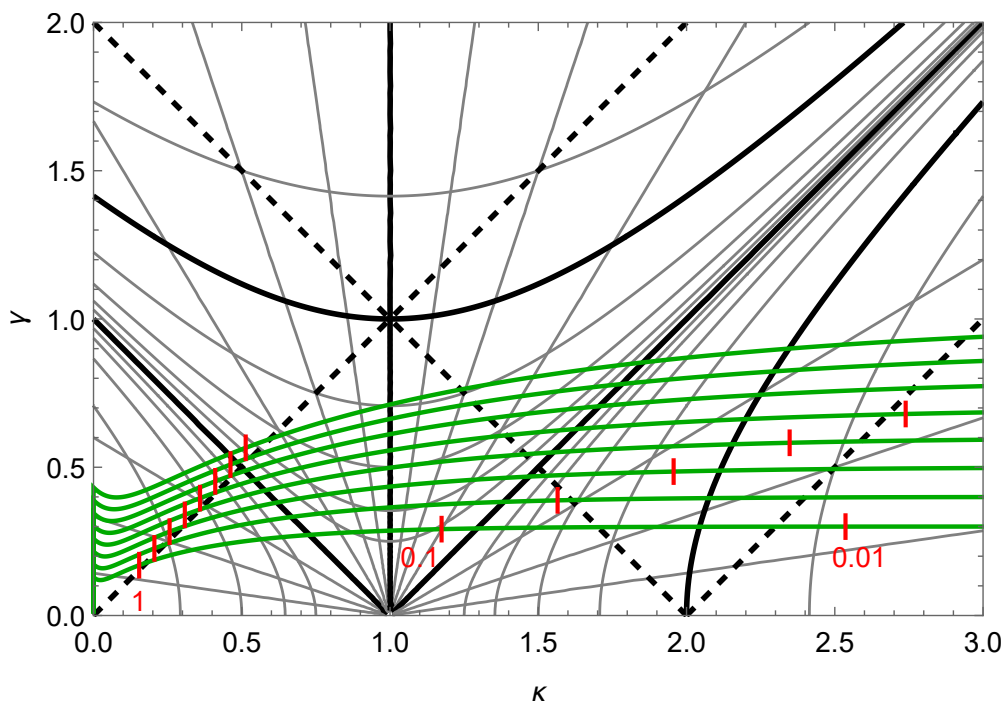
S rostoucím parametrem κ_s roste hodnota konvergence κ_{NFW} i shearu γ_{NFW} , jak je patrné z Obr. 3.9. Z toho plyne, že vzdálenosti od počátku pro modely s různými κ_s leží na přímkách procházejících příslušnou vzdáleností od počátku a počátkem CS diagramu. Můžeme vidět, že s rostoucím κ_s se zvětšují poloměry kritických křivek i vzdálenost mezi tangenciální a radiální kritickou křivkou. Základní charakteristika zelených křivek pro modely s různým κ_s se nemění.



Obrázek 3.9: CS diagram pro NFW modely s různými parametry κ_s . Zelené křivky značí možné kombinace konvergence κ_{NFW} a shearu γ_{NFW} popořadě odspoda nahoru pro NFW modely s $\kappa_s \in \{0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$. Červené body značí vzdálenost od počátku v rovině čočky pro hodnoty $x \in \{0.001, 0.01, 0.1, 1\}$ popsané na křivce pro NFW model s $\kappa_s = 0.2$. Vzdálenosti od počátku pro modely s dalšími κ_s leží na přímkách procházejících příslušnou vzdáleností od počátku pro model s $\kappa_s = 0.2$ a počátkem CS diagramu.

3.3 Radiálně omezený NFW model

Integrací hustotního profilu NFW modelu daného rovnicí (3.18) přes objem sféry zjistíme, že její celková hmota logaritmicky roste s poloměrem. Pro fyzikálnější popis konečného hala je proto vhodnější profil na nějaké vzdálenosti ukončit. Proto nyní pro aproximaci rozložení hustoty hmoty čočky použijeme radiálně omezený NFW model, viz Baltz, Marshall a Oguri 2009.



Obrázek 3.10: CS diagram pro radiálně omezené NFW modely s parametrem $c_{max} = 2$ a různými parametry κ_s . Zelené křivky značí možné kombinace konvergence κ a shearu γ popořadě zespona nahoru pro omezené NFW modely s $\kappa_s \in \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$. Červené body značí vzdálenost od počátku v rovině čočky pro hodnoty $x \in \{0.01, 0.1, 1\}$, což je znázorněno na zelené křivce pro radiálně omezený NFW model s $\kappa_s = 0.3$. Vzdálenosti od počátku pro modely s dalšími κ_s leží na přímkách procházejících příslušnou vzdáleností od počátku pro model s $\kappa_s = 0.3$ a počátkem CS diagramu.

Hustota rozložení hmoty radiálně omezeného NFW modelu je pro $r \leq r_{max}$ dána stejným vztahem jako pro NFW model, viz rovnice (3.18). Pro $r > r_{max}$ je hustota rozložení hmoty nulová. Položíme $c_{max} = \frac{r_{max}}{r_s}$. Úhel odklonu paprsku pro NFW model pak lze vyjádřit formulí

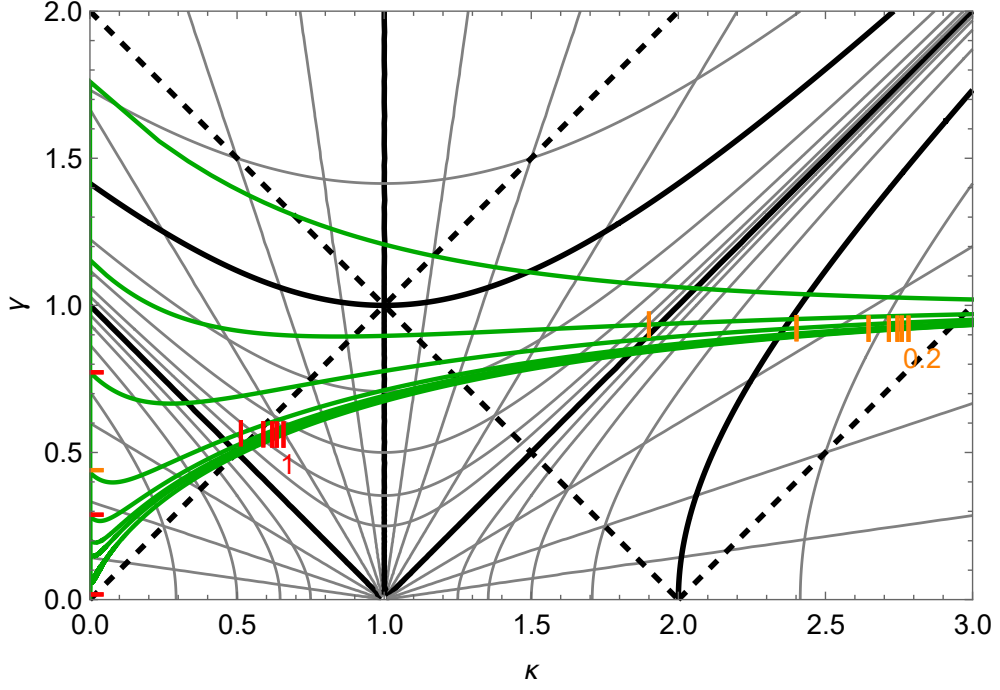
$$\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{4D_s\kappa_s r_s}{D_{LS}D_L} \frac{\mathbf{x}}{x^2} \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{(c_{max}^2-x^2)(1-x^2)}}{c_{max}+x^2} - \dots \right. \\ \left. \dots - \frac{c_{max}-\sqrt{c_{max}^2-x^2}}{c_{max}+1} + \ln \frac{x(c_{max}+1)}{c_{max}+\sqrt{c_{max}^2-x^2}} \right] & \text{pro } x < 1, x < c_{max}, \\ \frac{4D_s\kappa_s r_s}{D_{LS}D_L} \mathbf{x} \left[\frac{2\sqrt{c_{max}^2-1}-c_{max}}{c_{max}+1} + \ln \frac{c_{max}+1}{c_{max}+\sqrt{c_{max}^2-1}} \right] & \text{pro } x = 1, x < c_{max}, \\ \frac{4D_s\kappa_s r_s}{D_{LS}D_L} \frac{\mathbf{x}}{x^2} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \operatorname{arctan} \frac{\sqrt{(c_{max}^2-x^2)(x^2-1)}}{c_{max}+x^2} - \dots \right. \\ \left. \dots - \frac{c_{max}-\sqrt{c_{max}^2-x^2}}{c_{max}+1} + \ln \frac{x(c_{max}+1)}{c_{max}+\sqrt{c_{max}^2-x^2}} \right] & \text{pro } x > 1, x < c_{max}, \\ \frac{4D_s\kappa_s r_s}{D_{LS}D_L} \frac{\mathbf{x}}{x^2} \left[\ln(c_{max}+1) - \frac{c_{max}}{c_{max}+1} \right] & \text{pro } x > c_{max}. \end{cases} \quad (3.26)$$

Konvergenca získaná integrácií hustotního profilu je daná vztahem

$$\kappa(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{2\kappa_s}{1-x^2} \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{(c_{max}^2-x^2)(1-x^2)}}{c_{max}+x^2} - \frac{\sqrt{c_{max}^2-x^2}}{c_{max}+1} \right] & \text{pro } x < 1, x < c_{max}, \\ \frac{2\kappa_s}{3} \frac{(c_{max}+2)\sqrt{c_{max}^2-1}}{(c_{max}+1)^{3/2}} & \text{pro } x = 1, x < c_{max}, \\ \frac{2\kappa_s}{x^2-1} \left[\frac{\sqrt{c_{max}^2-x^2}}{c_{max}+1} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \operatorname{arctan} \frac{\sqrt{(c_{max}^2-x^2)(x^2-1)}}{c_{max}+x^2} \right] & \text{pro } x > 1, x < c_{max}, \\ 0 & \text{pro } x > c_{max} \end{cases} \quad (3.27)$$

a shear lze vypočítat z konvergenca a úhlu odklonu,

$$\gamma(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{2\kappa_s}{x^2} \left[2 \ln \frac{x(c_{max}+1)}{c_{max}+\sqrt{c_{max}^2-x^2}} + \frac{(2-x^2)\sqrt{c_{max}^2-x^2}-2c_{max}(1-x^2)}{(1-x^2)(c_{max}+1)} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{2-3x^2}{(1-x^2)^{3/2}} \operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{(c_{max}^2-x^2)(1-x^2)}}{c_{max}+x^2} \right] & \text{pro } x < 1, x < c_{max}, \\ 4\kappa_s \left[\ln \frac{c_{max}+1}{c_{max}+\sqrt{c_{max}^2-1}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{(11c_{max}+10)\sqrt{c_{max}^2-1}-6c_{max}\sqrt{c_{max}+1}}{6(c_{max}+1)^{3/2}} \right] & \text{pro } x = 1, x < c_{max}, \\ \frac{2\kappa_s}{x^2} \left[2 \ln \frac{x(c_{max}+1)}{c_{max}+\sqrt{c_{max}^2-x^2}} + \frac{(2-x^2)\sqrt{c_{max}^2-x^2}-2c_{max}(1-x^2)}{(1-x^2)(c_{max}+1)} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{3x^2-2}{(x^2-1)^{3/2}} \operatorname{arctan} \frac{\sqrt{(c_{max}^2-x^2)(x^2-1)}}{c_{max}+x^2} \right] & \text{pro } x > 1, x < c_{max}, \\ \frac{4\kappa_s}{x^2} \left[\ln(c_{max}+1) - \frac{c_{max}}{c_{max}+1} \right] & \text{pro } x > c_{max}. \end{cases} \quad (3.28)$$

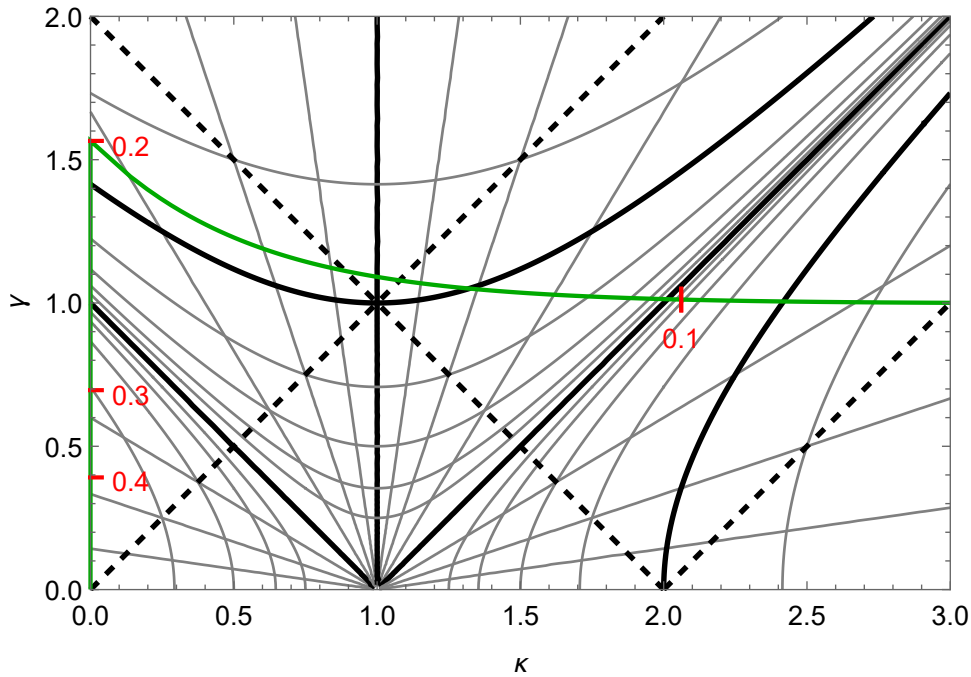


Obrázek 3.11: CS diagram pro radiálně omezené NFW modely s parametrem $\kappa_s = 1$ a různými parametry c_{max} . Zelené křivky značí možné kombinace konvergence κ a shearu γ popořadě odshora dolů pro radiálně omezené modely s $c_{max} \in \{0.1, 0.5, 1, 2, 3, 4, 5, 10\}$. Oranžové body značí vzdálenost $x = 0.2$ od počátku v rovině čočky, červené body značí vzdálenost $x = 1$ od počátku v rovině čočky, což je znázorněno na zelené křivce s $c_{max} = 10$.

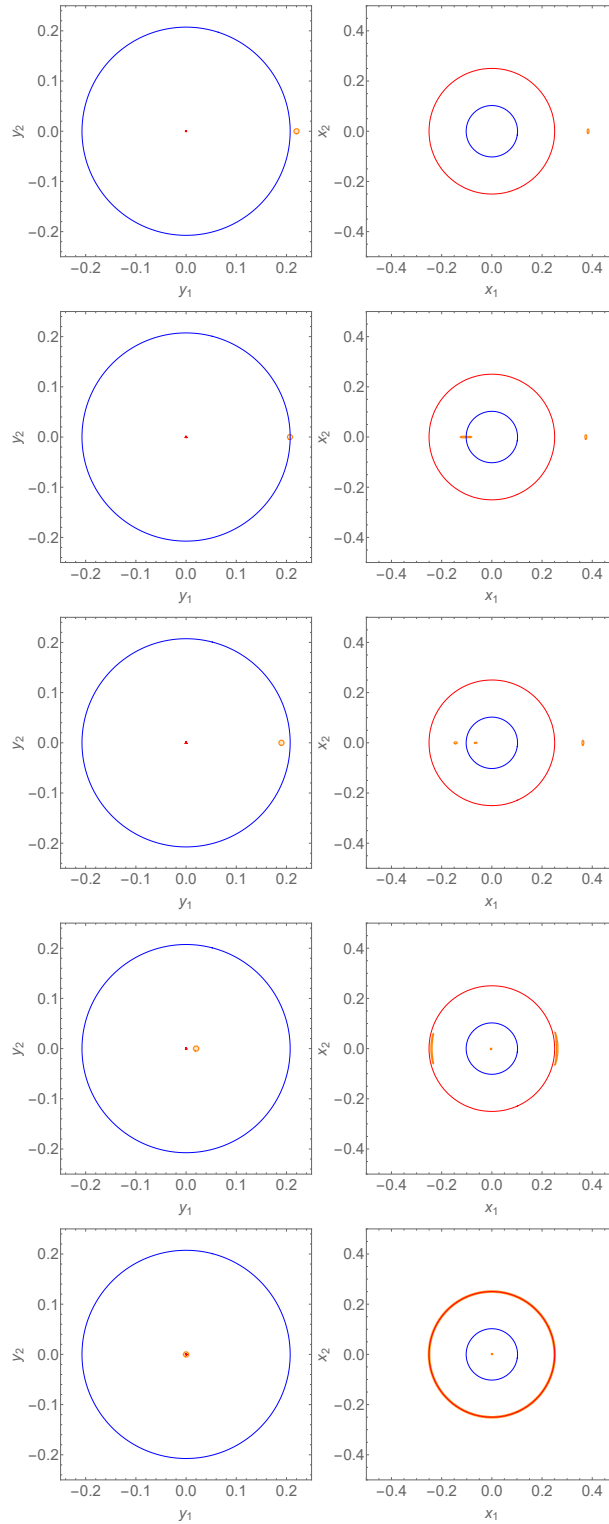
Na Obr. 3.11 můžeme vidět CS diagram pro radiálně omezené NFW modely s různými parametry c_{max} , konkrétně $c_{max} \in \{0.1, 0.5, 1, 2, 3, 4, 5, 10\}$. Radiálně omezený NFW model má podobné chování jako NFW model, ale je sféricky uříznutý na poloměru $r = r_{max}$, tudíž lépe simuluje realitu. To znamená, že pro paprsky vzdálené od počátku roviny čočky méně než $r = r_{max}$ se budou obrazy chovat podobně jako u modelu NFW. Pro paprsky ležící v rovině čočky ve větší vzdálenosti než $r = r_{max}$ budou mít obrazy stejné vlastnosti jako u čočkování bodovou čočkou. Pro zdroj dostatečně vzdálený od počátku roviny zdroje se vždy alespoň jeden z obrazů bude chovat jako obraz vytvořený bodovou čočkou. Jiný obraz od stejného zdroje ale může procházet blízko počátku roviny čočky ve vzdálenosti menší než $r = r_{max}$ a bude se tedy chovat podobně jako obraz od NFW modelu. Pokud chceme, aby se i vnitřní obraz choval podobně jako obraz od bodové čočky, musí ořez $r = r_{max}$ být menší než Einsteinův poloměr θ_E a zároveň vzdálenost zdroje od počátku v rovině zdroje nesmí být příliš velká, aby i vnitřní obraz ležel mezi ořezem $r = r_{max}$ a Einsteinovým poloměrem θ_E . Tento speciální případ můžeme ilustrovat radiálně omezeným NFW modelem s $c_{max} = 0.2$ a $\kappa_s = 1$.

Uvažujme radiálně omezený NFW model s $c_{max} = 0.2$ a $\kappa_s = 1$. CS diagram pro tento případ je znázorněn na Obr. 3.12. Budeme zkoumat, jak se mění vlastnosti obrazů zdroje o poloměru 0.005 v závislosti na poloze v rovině zdroje, viz Obr. 3.13. Pro zdroj ležící vně radiální kaustiky vzniká jeden tangenciálně protáhlý obraz vně tangenciální kritické křivky, jak můžeme vidět v prvním řádku Obr. 3.13. Pro zdroj umístěný na radiální kaustice vzniká kromě tangenciálně deformovaného obrazu ještě radiálně deformovaný obraz ležící na radiální kritické křivce, viz druhý řádek Obr. 3.13. Vlastnosti těchto obrazů jsou podobné jako u obrazů od NFW modelu. Umístíme-li zdroj k vnitřní straně radiální kaustiky tak, aby se jí nedotýkal, radiálně protáhlý obraz se rozdělí na dva obrazy, jak je vidět ve třetím řádku Obr. 3.13, což odpovídá chování obrazů od NFW modelu, které můžeme vidět na Obr. 3.7.

Pokud posuneme zdroj blíže ke středu roviny zdroje, obraz vně radiální kritické křivky se protáhne v tangenciálním směru a přimkne se z vnitřní strany k tangenciální kritické křivce. Obraz uvnitř radiální kritické křivky se přiblíží ke středu. Obraz vně tangenciální kritické křivky se ještě více protáhne v tangenciálním směru a z vnější strany se přimkne k tangenciální kritické křivce. Pro zdroj umístěný ve středu roviny zdroje na tangenciální kaustice dojde k propojení tangenciálně protáhlých obrazů v Einsteinův prstenec ležící na tangenciální kritické křivce, jak můžeme vidět v posledním řádku Obr. 3.13. Chování vnějších obrazů na posledních dvou řádcích odpovídá obrazům od hmotnému bodu, viz Obr. 3.5.



Obrázek 3.12: CS diagram pro radiálně omezený NFW model s $c_{max} = 0.2$ a $\kappa_s = 1$. Zelená křivka značí možné kombinace konvergence κ a shearu γ . Červené body značí vzdálenost od počátku v rovině čočky $x \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$.



Obrázek 3.13: Zobrazení kruhového zdroje radiálně omezeným NFW modelem s $c_{max} = 0.2$ a $\kappa_s=1$. V levém sloupci je oranžovou barvou vyobrazen kruhový zdroj o poloměru 0.005. Střed zdroje leží popořadě odshora dolů na souřadnicích $[0.22, 0]$, $[0.207, 0]$, $[0.19, 0]$, $[0.02, 0]$ a $[0, 0]$. V pravém sloupci jsou oranžovou barvou vyobrazeny příslušné obrazy. V levém sloupci je modrou barvou znázorněna radiální kaustika, červenou barvou tangenciální kaustika. V pravém sloupci je modrou barvou znázorněna radiální kritická křivka, červenou barvou tangenciální kritická křivka.

3.4 Hernquistův model

Dalším profilem, kterým se zde budeme zabývat, je Hernquistův model, viz Hernquist 1990. Ten je zajímavý především tím, že napodobuje rozložení jasu galaxií raného typu. Prostorovou hustotu Hernquistova modelu lze definovat vztahem

$$\rho = \frac{\rho_s}{\frac{r}{r_s} \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^3}, \quad (3.29)$$

kde r_s je škálový poloměr a ρ_s je charakteristická hustota profilu. Hustota rozložení hmoty Hernquistova modelu klesá pro velké vzdálenosti r od počátku rychleji než plošná hustota NFW modelu, která je daná vztahem (3.18).

S použitím pomocné funkce $F(x)$, viz vztah (3.20), lze pro Hernquistův model definovat konvergenci

$$\kappa(x) = \frac{\kappa_s}{(x^2 - 1)^2} [-3 + (2 + x^2)F(x)] \quad (3.30)$$

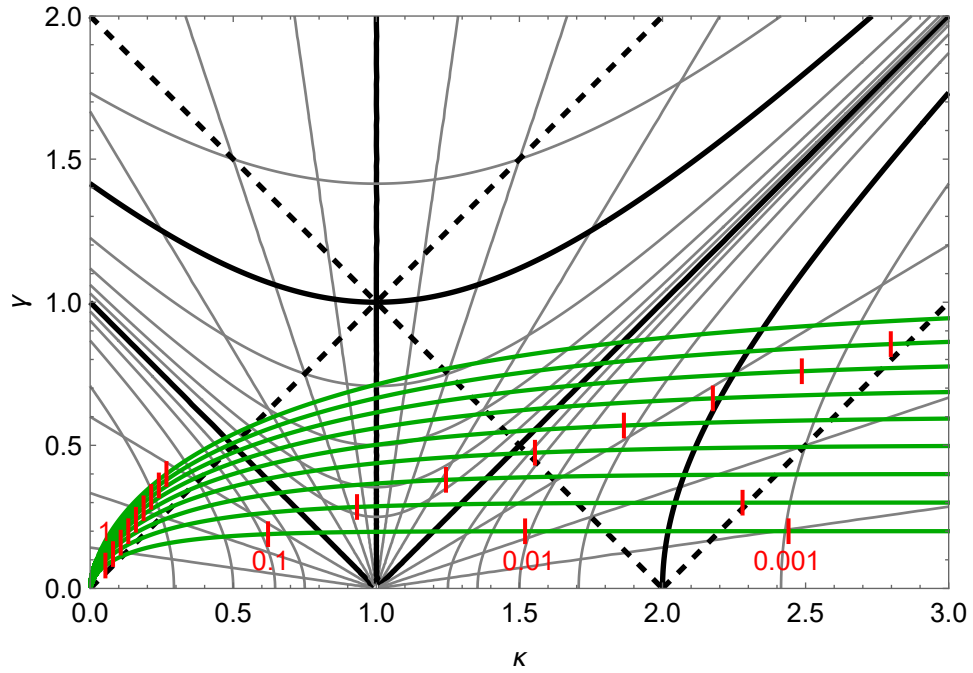
a shear

$$\gamma(x) = \frac{\kappa_s}{(x^2 - 1)^2} [1 + 2x^2 - 3x^2F(x)], \quad (3.31)$$

kde κ_s je kritická konvergence profilu. Úhel odklonu Hernquistova modelu je

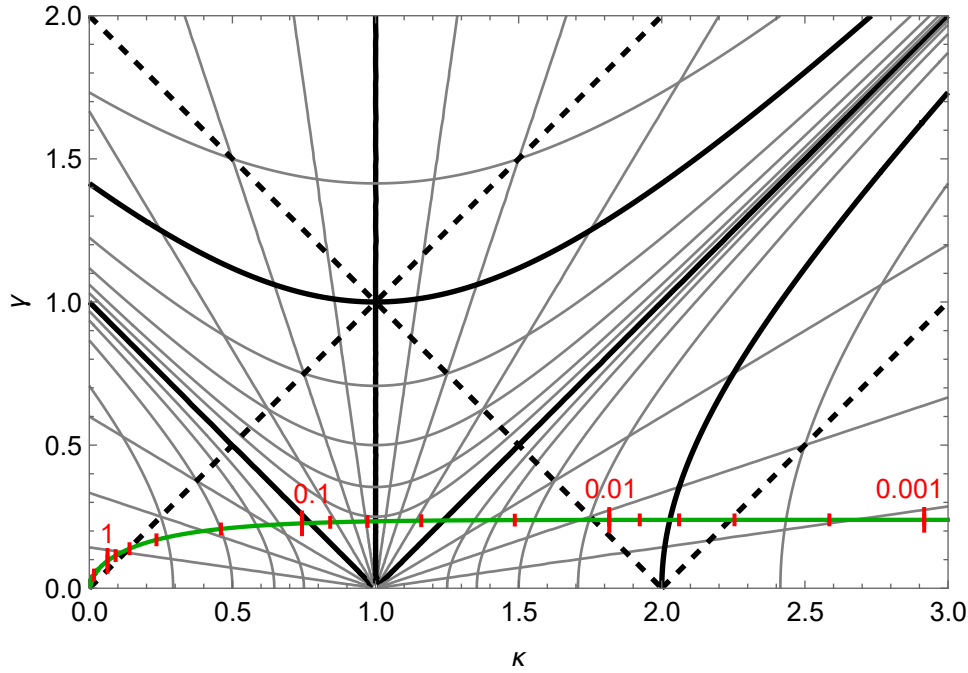
$$\alpha(\mathbf{x}) = \frac{2\kappa_s r_s D_S}{D_L D_{LS}} \left[\frac{1 - F(x)}{x^2 - 1} \right] \mathbf{x}. \quad (3.32)$$

Na Obr. 3.14 můžeme vidět CS diagram pro různé hodnoty škálového parametru κ_s , konkrétně pro hodnoty $\kappa_s \in \{0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.8, 0.9, 1\}$.



Obrázek 3.14: CS diagram pro Hernquistovy modely s různými parametry κ_s . Zelené křivky značí možné kombinace konvergence κ a shearu γ popořadě odspoda nahoru pro Hernquistovy modely s $\kappa_s \in \{0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$. Červené body značí vzdálenost od počátku v rovině čočky, jak je ukázáno pro vzdálenosti $x \in \{0.001, 0.01, 0.1, 1\}$ na zelené křivce pro Hernquistův model s $\kappa_s = 0.2$. Vzdálenosti od počátku pro modely s dalšími κ_s leží na přímkách procházejících příslušnou vzdáleností od počátku pro model s $\kappa_s = 0.2$ a počátkem CS diagramu.

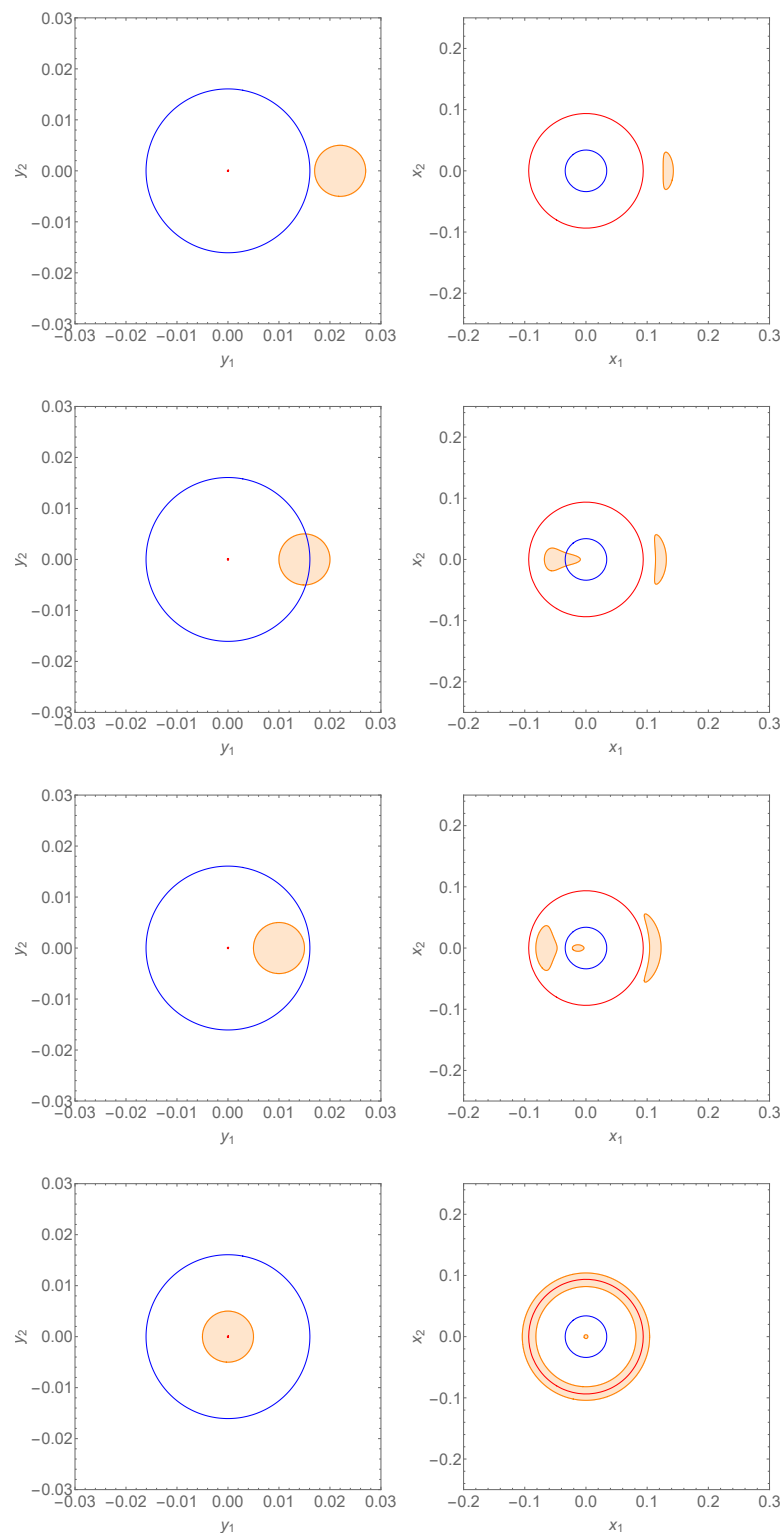
Porovnáme-li CS diagram pro Hernquistův model Obr. 3.14 s CS diagramem pro NFW model Obr. 3.9 vidíme, že křivky mají podobný tvar. Vzdálenosti od počátku v rovině čočky znázorněny na Obr. 3.14 a Obr. 3.9 červenými značkami se ale liší. V CS diagramu pro model NFW Obr. 3.9 jsou červené body, určující vzdálenost $x = 1$ od počátku, umístěny vpravo od přerušované přímky s předpisem $\gamma = \kappa$, zatímco v CS diagramu pro Hernquistův model Obr. 3.14 vidíme, že body pro hodnotu $x = 1$ jsou umístěny vlevo od této přímky. Srovnáním CS diagramů na Obr. 3.14 a 3.9 zjišťujeme, že vzdálenosti od počátku $x = 0.1$ jsou viditelné v CS diagramu pro Hernquistův model pro $\kappa_s \in \{0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$, zatímco pro CS diagram modelu NFW jsou to pouze hodnoty $\kappa_s \in \{0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7\}$. Můžeme tedy říci, že červené značky v CS diagramu pro Hernquistův model jsou strmější než v případě NFW modelu.



Obrázek 3.15: CS diagram pro Hernquistův model s $\kappa_s = 0.239035$. Zelená křivka značí možné kombinace konvergence κ a shearu γ . Červené body značí vzdálenost od počátku v rovině čočky, konkrétně pro vzdálenosti $x \in \{0.001, 0.002, 0.004, 0.006, 0.008, 0.01, 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 2\}$.

Nyní se zaměříme na vlastnosti obrazů pod vlivem gravitačního čočkování u Hernquistova modelu. Na Obr. 3.16 vidíme v levém sloupci různé polohy zdroje o poloměru 0.005 se středy na souřadnicích odshora dolů $[0.022, 0]$, $[0.015, 0]$, $[0.01, 0]$, $[0, 0]$, v pravém sloupci jsou znázorněny obrazy odpovídající příslušným polohám zdroje. Z Obr. 3.16 můžeme usoudit, že vlastnosti obrazů v Hernquistově modelu jsou podobné jako vlastnosti v NFW modelu, jež můžeme vidět na Obr. 3.7. Z Obr. 3.16, 3.7 a diagramů na Obr. 3.14, 3.9 plyne, že radiální kaustika Hernquistova modelu má menší poloměr než radiální kaustika NFW modelu. I kritické křivky Hernquistova modelu mají menší poloměr než kritické křivky NFW modelu. Z toho vyplývá, že obrazy od Hernquistova modelu budou mít podobné vlastnosti jako obrazy od NFW modelu, akorát u Hernquistova modelu se bude určitá vlastnost objevovat u obrazu s menší vzdáleností od počátku v rovině čočky než tomu je u NFW modelu.

Na Obr. 3.15 můžeme vidět CS diagram Hernquistova modelu pro hodnotu $\kappa_s = 0.239035$. CS diagram NFW modelu pro tutéž hodnotu konvergence κ_s můžeme vidět na Obr. 3.6. I v tomto případě jsou zelené křivky téměř totožné.



Obrázek 3.16: Zobrazení kruhového zdroje Hernquistovým modelem s $\kappa_s = 0.239035$. V levém sloupci je oranžovou barvou vyobrazen kruhový zdroj o poloměru 0.005. Střed zdroje leží popořadě odshora dolů na souřadnicích $[0.022, 0]$, $[0.015, 0]$, $[0.01, 0]$ a $[0, 0]$. V pravém sloupci jsou oranžovou barvou vyobrazeny příslušné obrazy. V levém sloupci je modrou barvou znázorněna radiální kaustika, červenou barvou tangenciální kaustika. V pravém sloupci je modrou barvou znázorněna radiální kritická křivka, červenou barvou tangenciální kritická křivka.

3.5 Izotermální modely

3.5.1 Singulární model

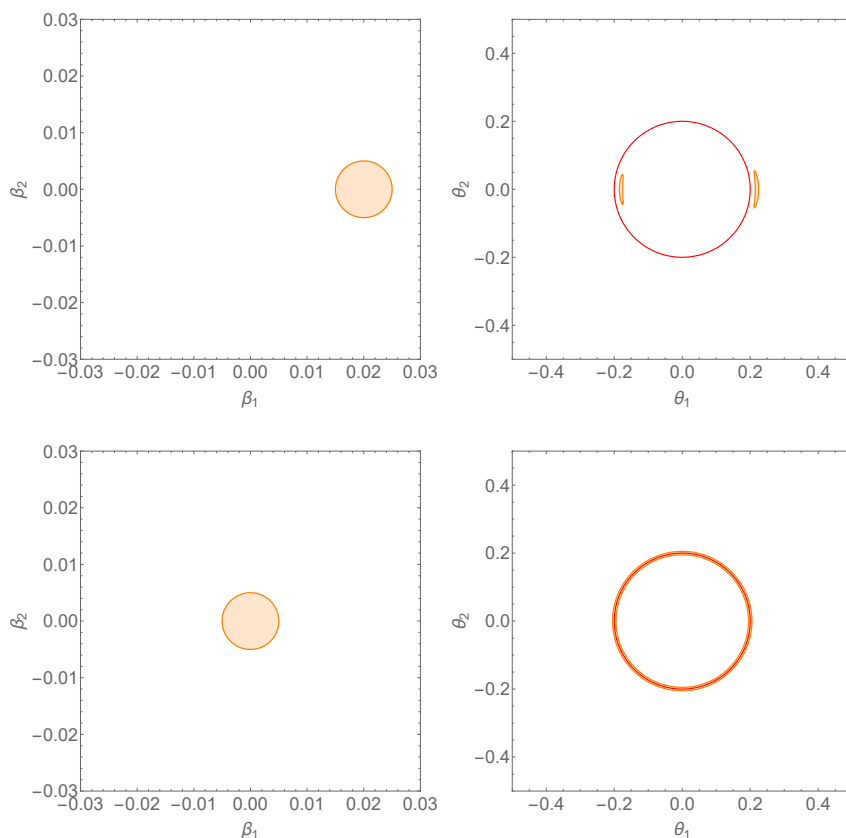
Singulární izotermální model (Kormann, Schneider a Bartelmann 1994) je nej-jednodušším modelovým profilem simulujícím rozložení hmoty v gravitační čočce. Je ale nefyzikální, neboť má singularitu na nulovém poloměru, tj. v $\theta = 0$, a navíc celková hmotnost v nekonečnu diverguje. Jeho konvergenci a shear můžeme vyjádřit formulemi

$$\kappa(\theta) = \frac{\kappa_0}{\theta}, \quad (3.33)$$

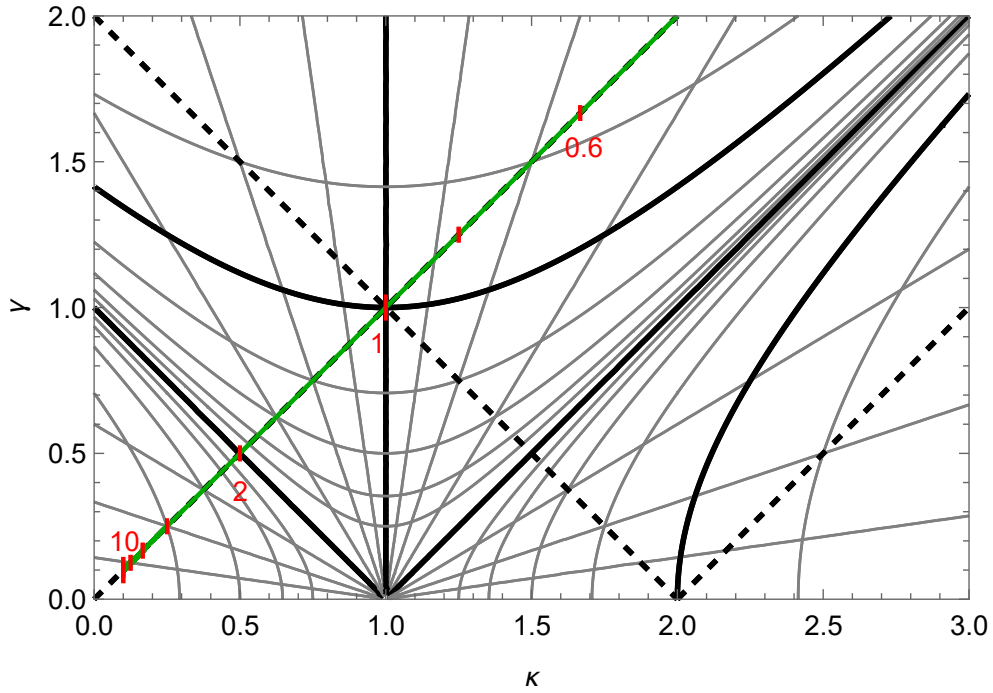
$$\gamma(\theta) = \frac{\kappa_0}{\theta}, \quad (3.34)$$

kde κ_0 značí škálový parametr profilu. Úhel odklonu pro singulární izotermální model je

$$\alpha(\boldsymbol{\theta}) = \frac{2\kappa_0 D_S}{D_{LS}\theta} \boldsymbol{\theta}, \quad (3.35)$$



Obrázek 3.17: Zobrazení kruhového zdroje singulárním izotermálním modelem s parametrem $\kappa_0 = 0.1$. V levém sloupci je oranžovou barvou vyobrazen kruhový zdroj o poloměru $0.05\kappa_0$. Střed zdroje leží v prvním řádku na souřadnicích $[0.2\kappa_0, 0]$, ve druhém řádku na souřadnicích $[0, 0]$. V pravém sloupci jsou oranžovou barvou vyobrazeny příslušné obrazy. Červenou barvou je znázorněna tangenciální kaustika v levém sloupci a tangenciální kritická křivka v pravém sloupci.



Obrázek 3.18: CS diagram pro singulární izotermální model s parametrem $\kappa_0 = 0.1$. Zelená přímka značí možné kombinace konvergence κ a shearu γ . Červené body značí vzdálenost od počátku v rovině čočky v jednotkách κ_0 , konkrétně pro vzdálenosti $\theta \in \{0.6, 0.8, 1, 2, 4, 6, 8, 1\} \kappa_0$.

Na Obr. 3.17 můžeme vidět zobrazení od singulárního izotermálního modelu se škálovým parametrem $\kappa_0 = 0.1$. Pro zdroj o poloměru $\theta = 0.05\kappa_0$ na souřadnicích $[0.2\kappa_0, 0]$ vznikají dva obrazy. Obraz vně tangenciální kritické křivky je vzdálený od středu čočky $\theta = 2.2\kappa_0$. Podle polohy v CS diagramu na Obr. 3.18 s parametrem $\kappa_0 = 0.1$ vidíme, že tento obraz bude zvětšený a protažený pouze v tangenciálním směru, což odpovídá vlastnostem příslušného obrazu na Obr. 3.17 v prvním řádku vpravo. Obraz na tomtéž obrázku uvnitř tangenciální kritické křivky je vzdálený od středu čočky $\theta = 1.8\kappa_0$ a bude dle CS diagramu na Obr. 3.18 také zvětšený a prodloužený pouze v tangenciálním směru, ale navíc bude ještě zrcadlově převrácený. Pro zdroj umístěný ve středu roviny čočky vzniká Einsteinova kružnice, viz Obr. 3.17 druhý řádek vpravo. Vzdálenost od počátku roviny čočky je pro tento obraz $\theta = 0.2\kappa_0$. To podle CS diagramu na Obr. 3.18 znamená, že obraz bude nekonečně prodloužený v tangenciálním směru, což odpovídá příslušnému obrazu na Obr. 3.17.

Parametr κ_0 ovlivňuje pouze to, v jaké vzdálenosti od počátku roviny čočky se daná vlastnost projeví. Zvětšíme-li parametr κ_0 , obrazy s danými vlastnostmi budou dál od středu roviny čočky. To znamená, že se zvětšujícím se parametrem κ_0 se zvětšuje kritická křivka a tedy i příslušné obrazy. Směrnice zelené přímky určující kombinace možných konvergenzí a shearu v CS diagramu na Obr. 3.18 se ale se zvětšujícím parametrem κ_0 nemění. Z možných hodnot konvergence a shearu pro izotermální singulární model znázorněných zelenou přímkou v CS diagramu na Obr. 3.18 můžeme také usoudit, že obrazy od singulárního izotermálního modelu nikdy nebudou protaženy v radiálním směru.

3.5.2 Nesingulární model

Dalším modelovým profilem je nesingulární izotermální model, viz Kormann, Schneider a Bartelmann 1994. Ten je velice podobný singulárnímu izotermálnímu modelu, ale rozložení hmoty v čočce aproximuje přesněji a již u něj nedochází k žádným patologickým situacím. Konvergenci pro nesingulární izotermální model definujeme vztahem

$$\kappa(\theta) = \frac{\kappa_0}{\sqrt{\theta^2 + \theta_c^2}} \quad (3.36)$$

a shear vztahem

$$\gamma(\theta) = \frac{\kappa_0 \theta^2}{\sqrt{\theta^2 + \theta_c^2} \cdot \left[\sqrt{\theta^2 + \theta_c^2} + \theta_c \right]^2}, \quad (3.37)$$

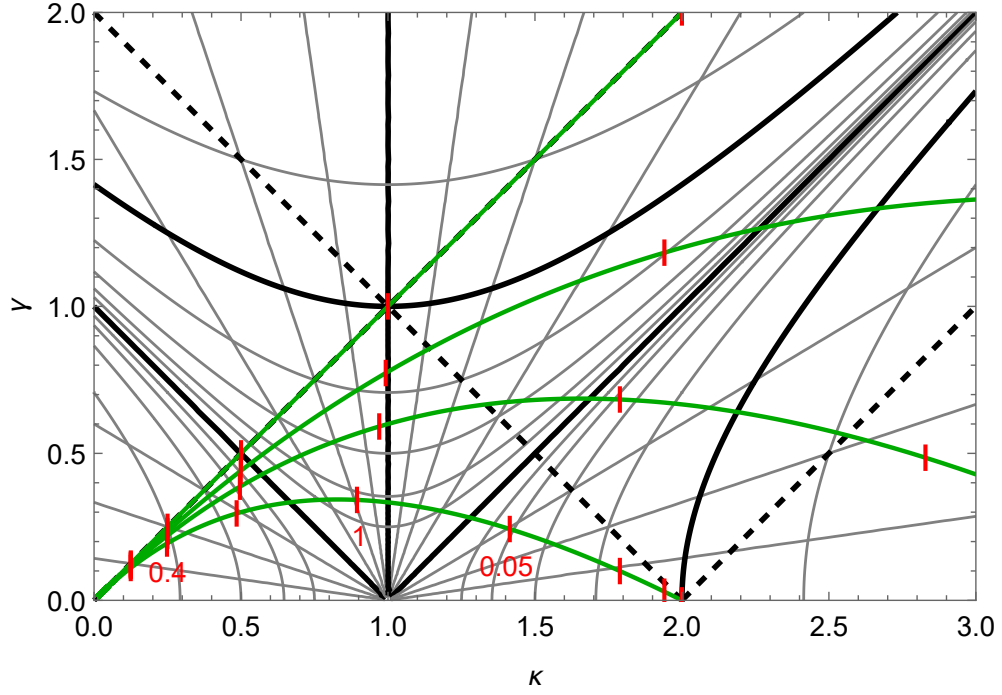
kde κ_0 a θ_c jsou parametry modelu. Úhel odklonu pro nesingulární izotermální model je

$$\alpha(\theta) = \frac{2\kappa_0 D_S}{D_{LS}} \left[\sqrt{\theta^2 + \theta_c^2} - \theta_c \right] \frac{\theta}{\theta^2}. \quad (3.38)$$

I u nesingulárního izotermálního modelu stejně jako u singulárního izotermálního modelu platí, že se zvětšujícím se parametrem κ_0 dochází ke zvětšení kritické křivky a tím pádem i obrazů. Škálový parametr θ_c ovlivňuje možné hodnoty konvergencí a shearu v CS diagramu. Položíme-li parametr $\theta_c = 0$, získáváme singulární izotermální model. Se zvyšujícím se parametrem θ_c se zelené křivky v CS diagramu na Obr. 3.19 stále více ohýbají. Z CS diagramu na Obr. 3.19 můžeme vidět, že pro hodnoty parametru $\theta_c = \kappa_0$ a větší již obrazy nikdy nebudou zrcadlově převrácené ani nebudou maximálně deformované v tangenciálním směru.

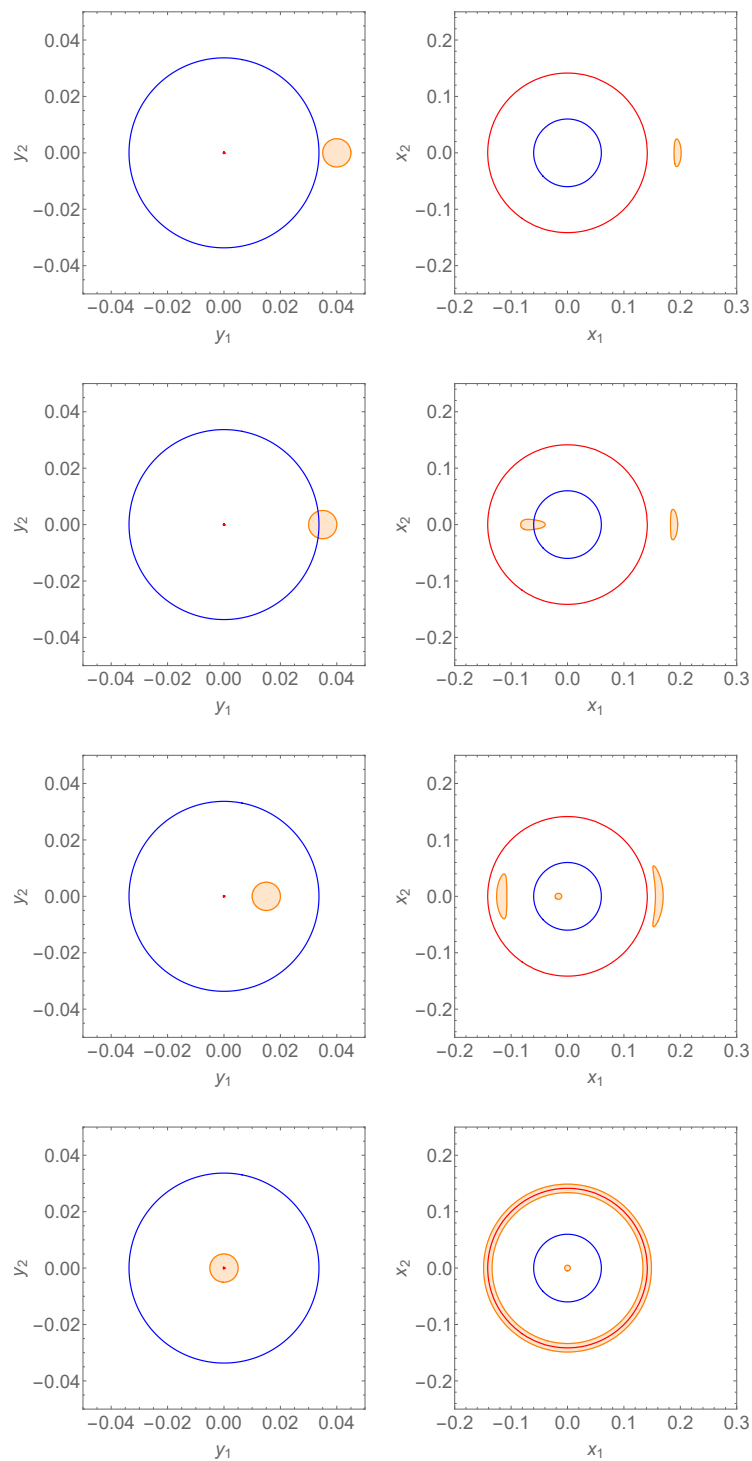
Zdroj o poloměru $0.005\theta_c$ umístěný v rovině zdroje postupně odshora dolů na souřadnicích $[0.04\theta_c, 0]$, $[0.035\theta_c, 0]$, $[0.015\theta_c, 0]$, $[0, 0]$ je znázorněn na Obr. 3.20 vlevo. V pravém sloupci Obr. 3.20 jsou vyobrazeny obrazy nesingulárního izotermálního modelu čočky se škálovým parametrem $\theta_c = 0.5\kappa_0$ od zdroje nacházejícího se na příslušných souřadnicích.

Pro zdroj v prvním řádku je jeho obraz vzdálený $0.2\theta_c$ od středu roviny čočky. Jak můžeme vyčíst z CS diagramu na Obr. 3.19, obraz je zvětšený a protažený v tangenciálním směru podobně, jako tomu bylo u obrazu NFW modelu od zdroje ležícího vně tangenciální kaustiky, viz Obr. 3.7. V druhém řádku Obr. 3.20 vpravo vzniká kromě výše zmiňovaného ještě jeden obraz. Ten je vzdálený od středu čočky $\theta \in (0.04, 0.08)\theta_c$, což dle CS diagramu na Obr. 3.19 znamená, že je tento obraz zvětšený a prodloužený především v radiálním směru. Jeho vlastnosti opět odpovídají příslušnému obrazu NFW modelu od zdroje ležícího na radiální kaustice (druhý řádek Obr. 3.7).



Obrázek 3.19: CS diagram pro nesingulární izotermální model s parametrem $\kappa_0 = 0.1$ a s různými parametry θ_c . Zelené křivky značí možné kombinace konvergence κ a shearu γ popořadě odshora dolů pro nesingulární izotermální model s $\kappa_0 = 0.1$ a $\theta_c \in \{0, 0.125, 0.25, 0.5, 1\}\kappa_0$. Červené body značí vzdálenost od počátku v rovině čocky pro hodnoty $\theta \in \{0, 1, 2, 4\}\theta_c$, což je znázorněno na zelené křivce pro nesingulární izotermální model s $\theta_c = 0.5\kappa_0$, kde $\kappa_0 = 0.1$. Vzdálenosti od počátku pro nesingulární izotermální modely s dalšími parametry θ_c , leží na přímce procházející příslušnou vzdáleností od počátku pro nesingulární izotermální model s $\theta_c = 0.5\kappa_0$, kde $\kappa_0 = 0.1$, a počátkem CS diagramu.

Posuneme-li zdroj ještě blíže ke středu roviny zdroje na souřadnici $[0.015\theta_c, 0]$, výše zmiňovaný radiálně prodloužený obraz se rozdělí na dva obrazy, z nichž jeden se nachází ve vzdálenosti $0.01\theta_c$ od středu čocky a druhý se nachází poblíž tangenciální kritické křivky ve vzdálenosti $0.1\theta_c$ od středu čocky. Obraz poblíž středu bude téměř totožný zdroji, přičemž obraz poblíž tangenciální kritické křivky bude zvětšený a mírně tangenciálně protažený. Tangenciálně deformovaný obraz ležící vně tangenciální kritické křivky se posune do vzdálenosti $0.15\theta_c$ od středu čocky a ještě více se protáhne v tangenciálním směru. Pro zdroj umístěný v počátku roviny zdroje se tangenciálně protáhlé obrazy spojí v Einsteinův prstenec. Tento obraz je vzdálený $0.14\theta_c$ od středu roviny čocky a leží tedy na tangenciální kritické křivce. Obraz, který ležel poblíž středu, se posul do středu roviny čocky a má nyní totožné vlastnosti se zdrojem. Můžeme tedy říci, že obrazy od nesingulárního izotermálního modelu s parametrem $\theta_c = 0.5\kappa_0$ mají podobné chování jako obrazy od NFW modelu.



Obrázek 3.20: Zobrazení kruhového zdroje nesingulárním izotermálním modelem s parametrem $\theta_c = 0.5\kappa_0$, kde $\kappa_0 = 0.1$, $\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}/\theta_c$ a $\mathbf{y} = \boldsymbol{\beta}/\beta_c$. V levém sloupci je oranžovou barvou vyobrazen kruhový zdroj o poloměru $0.005\theta_c$. Střed zdroje leží popořadě odshora dolů na souřadnicích $[0.04\theta_c, 0]$, $[0.035\theta_c, 0]$, $[0.015\theta_c, 0]$ a $[0, 0]$. V pravém sloupci jsou oranžovou barvou vyobrazeny příslušné obrazy. V levém sloupci je modrou barvou znázorněna radiální kaustika, červenou barvou tangenciální kaustika. V pravém sloupci je modrou barvou znázorněna radiální kritická křivka, červenou barvou tangenciální kritická křivka.

Kapitola 4

Nesymetrické modely čočky

V této kapitole se budeme zabývat dvěma nesymetrickými modelovými profily, konkrétně modelem s konstantní konvergencí a shearem a modelem hmotného bodu s vnější konvergencí a shearem.

4.1 Model s konstantní konvergencí a shearem

Uvažujme model s konstantní konvergencí

$$\kappa = \kappa_c \tag{4.1}$$

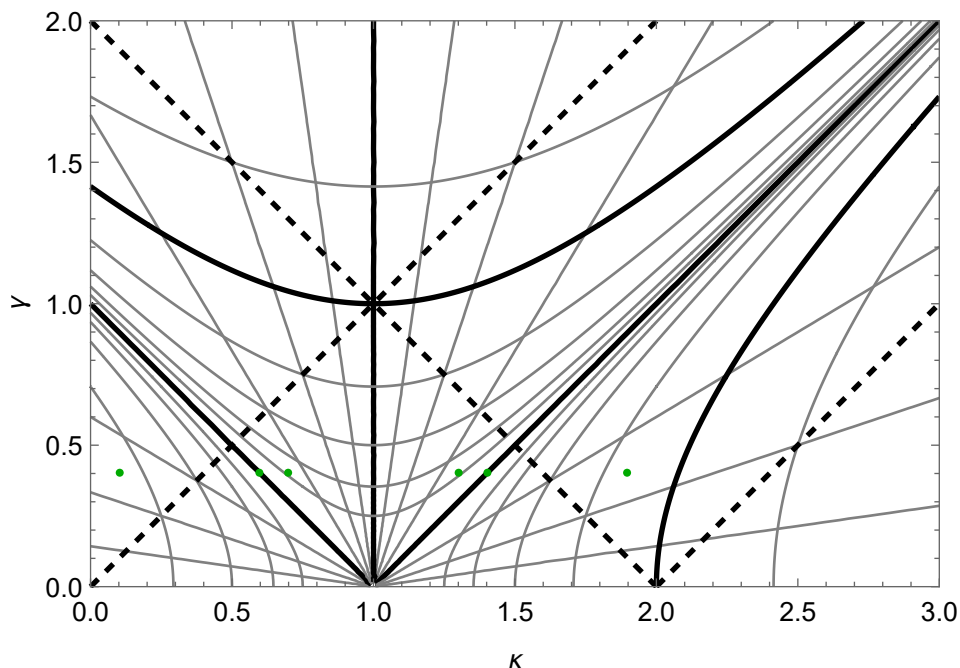
a konstantním shearem

$$\gamma = \gamma_c. \tag{4.2}$$

Fáze je v případě tohoto modelu taky konstantní, tedy

$$\varphi = \varphi_c. \tag{4.3}$$

Možné hodnoty konvergence a shearu jsou body v CS diagramu, jak je znázorněno na Obr. 4.1 pro šest nesymetrických modelů se shearem $\gamma_c = 0.4$, konvergencí $\kappa_c \in \{0.1, 0.5, 0.8, 1.2, 1.5, 1.9\}$ a fází $\varphi_c = 0$. V případě nesymetrického modelu s konstantní konvergencí a shearem nemá smysl hovořit o kritických křivkách. Můžeme se zabývat pouze tím, zda je daná kombinace konvergence a shearu kritická či nikoli.

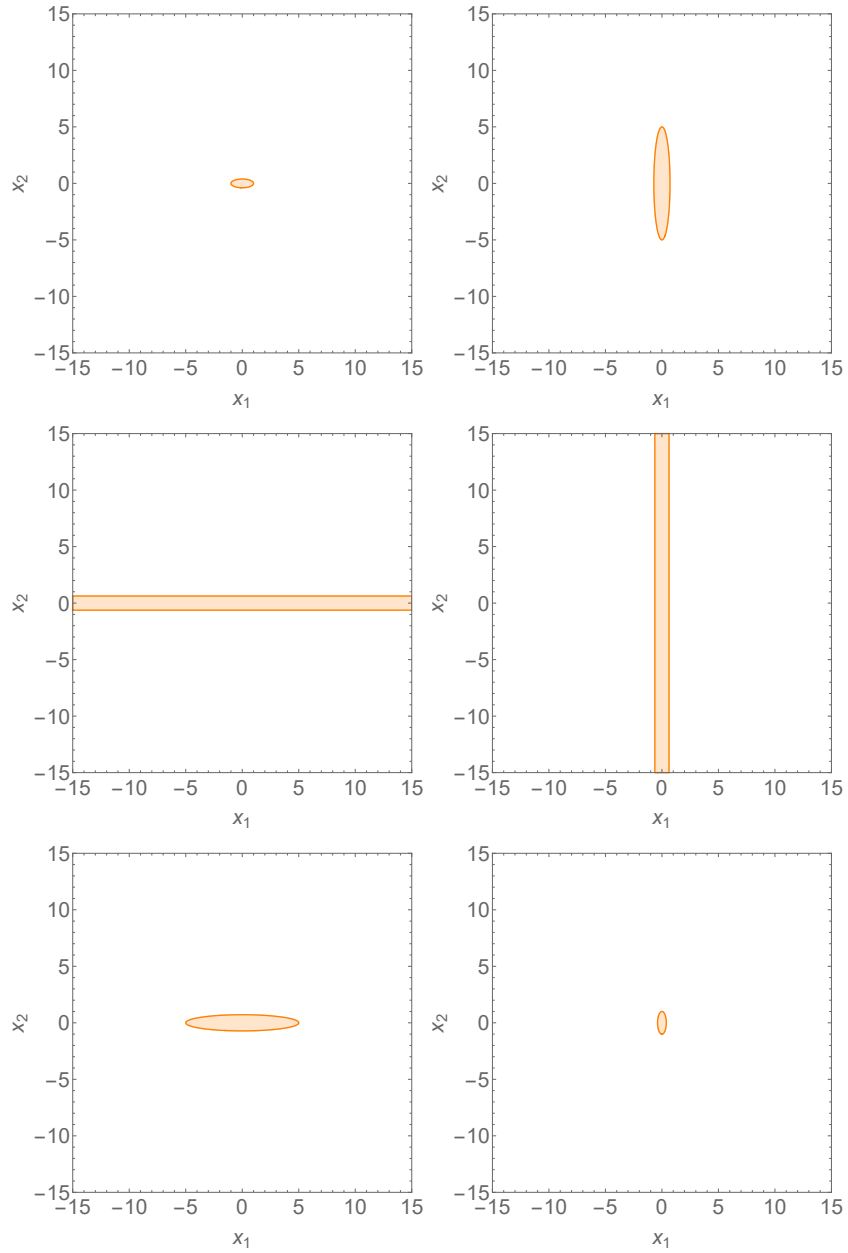


Obrázek 4.1: CS diagram pro šest nesymetrických modelů s konstantní konvergencí $\kappa_c \in \{0.1, 0.6, 0.7, 1.3, 1.4, 1.9\}$, konstantním shearem $\gamma_c = 0.4$ a konstantní fází $\varphi_c = 0$.

Uvažujme zdroj o poloměru $0.5\theta_E$ umístěný v počátku roviny zdroje. Obrazy pro nesymetrické modely s různými hodnotami konvergence $\kappa_c \in \{0.1, 0.6, 0.7, 1.3, 1.4, 1.9\}$, se shearem $\gamma_c = 0.4$, a s fází $\varphi_c = 0$ můžeme vidět na Obr. 4.2. Pro model s $\kappa_c = 0.6$ a $\gamma_c = 0.4$ vzniká obraz nekonečně protažený v tangenciálním směru (viz druhý řádek prvního sloupce Obr. 4.2) a pro model s $\kappa_c = 1.4$ a $\gamma_c = 0.4$ vzniká obraz nekonečně protažený v radiálním směru (viz druhý řádek druhého sloupce Obr. 4.2).

Fáze udává směr natočení obrazu. Změníme-li fází dojde k natočení obrazu příslušným směrem (ve směru fáze). Deformace obrazu je dána polohou v CS diagramu na Obr. 4.1. Obraz s $\kappa_c = 0.1$ a $\gamma_c = 0.4$ bude sice zvětšený v tangenciálním směru, ale zmenšený v radiálním směru. Naopak obraz s $\kappa_c = 1.9$ a $\gamma_c = 0.4$ bude zvětšený v radiálním směru, ale zmenšený v tangenciálním směru. To odpovídá deformaci příslušných obrazů na Obr. 4.2.

Z CS diagramu na Obr. 4.1 vidíme, že ve všech šesti zvolených případech dochází ke zvětšení obrazů. Kdybychom však zvolili bod lžící nad hyperbolou s hodnotou zjasnění -1 nebo vpravo od hyperbolu s hodnotou zjasnění 1, docházelo by ke zmenšení obrazů. Na Obr. 4.2 jsou uvedeny příklady možných obrazů od nesymetrických modelů s různými hodnotami konvergence κ_c . Mohli bychom ovšem volit i modely s jinou konvergencí či jiným shearem, čímž bychom ukázali chování v jiné oblasti CS diagramu.



Obrázek 4.2: Obrazy vytvořené šesti nesymetrickými modely čočky s různými hodnotami konvergenčí κ_c (v prvním sloupci popořadě odshora dolů $\kappa_c \in \{0.1, 0.6, 0.7\}$, ve druhém sloupci popořadě odshora dolů $\kappa_c \in \{1.3, 1.4, 1.9\}$), se shearem $\gamma_c = 0.4$ a s fází $\varphi_c = 0$.

4.2 Hmotný bod s vnější konvergencí a shearem

Tento model je složením hmotného bodu umístěného ve středu roviny čočky a vnějšího pole s konstantní konvergencí a shearem, viz Chang a Refsdal 1984.

U tohoto modelového profilu je konvergence

$$\kappa = \kappa_c \quad (4.4)$$

konstantní. Výsledný shear můžeme vyjádřit rovnicí

$$\gamma = \sqrt{(\gamma_{HB} - \gamma_c)^2 + 4\gamma_{HB}\gamma_c \cos^2(\varphi_{HB} - \varphi_c)}, \quad (4.5)$$

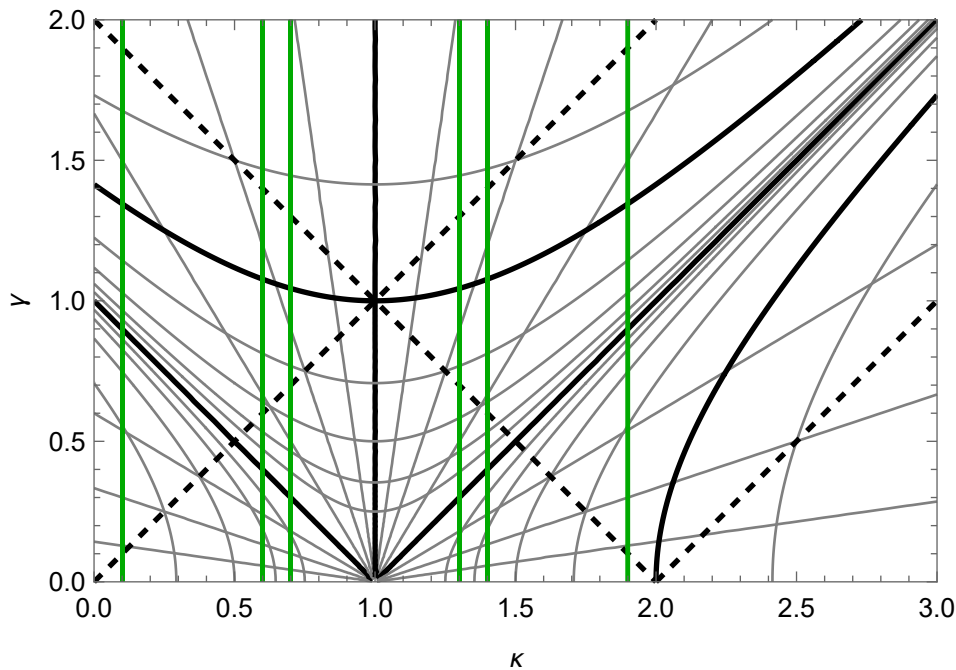
kde $\gamma_{HB} = (\theta_E/r)^2$ je shear hmotného bodu s Einsteinovým poloměrem θ_E , φ_{HB} je fáze hmotného bodu, κ_c je konvergence vnějšího pole a γ_c je shear vnějšího pole. Fáze pro tento model je dána vztahy

$$\cos(2\varphi) = \gamma^{-1} [\gamma_c \cos(2\varphi_c) + \gamma_{HB} \cos(2\varphi_{HB})], \quad (4.6)$$

$$\sin(2\varphi) = \gamma^{-1} [\gamma_c \sin(2\varphi_c) + \gamma_{HB} \sin(2\varphi_{HB})], \quad (4.7)$$

kde γ je výsledný shear z rovnice (4.5). Pro obraz dostatečně vzdálený od počátku je γ_{HB} zanedbatelný a $\varphi = \varphi_c$. Blízko počátku je naopak γ_c zanedbatelné a $\varphi = \varphi_{HB}$.

Na Obr. 4.3 můžeme vidět CS diagram pro šest nesymetrických modelů hmotného bodu s konstantní konvergencí $\kappa_c \in \{0.1, 0.6, 0.7, 1.3, 1.4, 1.9\}$, konstantním shearem $\gamma_c = 1$ a konstantní fází $\varphi_c = 0$.

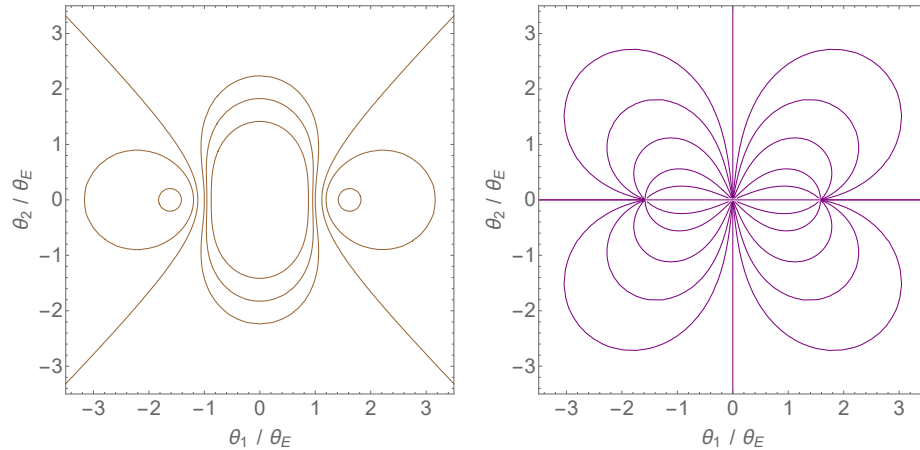


Obrázek 4.3: CS diagram pro šest nesymetrických modelů hmotného bodu s konstantní konvergencí $\kappa_c \in \{0.1, 0.6, 0.7, 1.3, 1.4, 1.9\}$, konstantním shearem $\gamma_c = 1$ a konstantní fází $\varphi_c = 0$.

Nejprve se podíváme, jak se mění kritické křivky a kaustiky v závislosti na konvergenci pro různé hodnoty κ_c . Tuto závislost můžeme vidět pro model se shearem $\gamma_c = 0.4$ na Obr. 4.5. Hodnoty konvergence κ_c jsou po řádcích odshora dolů $\kappa_c \in \{0.1, 0.6, 0.7, 1.3, 1.4, 1, 9\}$, což jsou stejné hodnoty jako v CS diagramu na Obr. 4.3. Z předpisu pro možné hodnoty konvergence a shearu vyznačené v CS diagramu na Obr. 4.3 vidíme, že pro $\kappa_c < 1$ vzniknou pouze tangenciální kritické křivky a tangenciální kaustiky, zatímco pro $\kappa_c > 1$ se vytvoří pouze radiální kritické křivky a radiální kaustiky.

Pro model s $\kappa_c = 0.1$ má kaustika tvar podobný kosočtverci. Se zvětšujícím κ_c se kaustika nejprve protahuje v tangenciálním směru, pro $\kappa_c = 0.6$ sahá v tangenciálním směru až do nekonečna. Dále dochází k předělu roviny podél tangenciální přímky procházející středem roviny zdroje a vznikají dvě kaustiky tvarem podobné trojúhelníkům. Se zvětšujícím se κ_c se kaustiky protahují v radiálním směru a pro $\kappa_c = 1.4$ sahají až do nekonečna. Dále dochází k překlopení částí kaustik z nekonečna a vzniku kaustiky oválovitého tvaru protažené v radiálním směru.

Na Obr. 4.4 jsou znázorněny kontury shearu γ (levý panel) a fáze φ (pravý panel) nesymetrického modelu. Jednotlivé kontury shearu odpovídají tvaru kritických křivek pro různé hodnoty konvergence κ_c . Pro nejmenší hodnotu κ_c ($\kappa_c = 0$) má kritická křivka tvar kružnice kolem hmotného bodu. Kritická křivka pro model s $\kappa_c = 0.1$ má elipsoidální tvar protažený v tangenciálním směru. Se zvětšujícím se κ_c má kritická křivka tvar promáčklé smyčky až se v nejvyšším a nejnižším bodě přetrhne a pro ještě větší κ_c ($\kappa_c = 0.6$) vznikají kritické křivky tvarem podobné hyperbolám. Pro $\kappa_c = 0.7$ se konce hyperbol spojí a vytvoří se dvě kružnice. Se zvětšujícím se κ_c ($\kappa_c = 1.4$) se kritické křivky opět rozpojí do tvaru podobného hyperbolám. Následně se přes promáčklou elipsoidální smyčku opět vrátí ke kružnici pro nejvyšší κ_c . Kontury fáze se sbíhají v poloze hmotného bodu a v polohách bodů s nulovým shearem $\gamma = 0$. Daleko od hmotného bodu se hodnoty fáze blíží k nule, což odpovídá zvolené vnější fázi $\varphi_c = 0$.



Obrázek 4.4: Kontury shearu γ (levý panel) a fáze φ (pravý panel) nesymetrického modelu s $\gamma_c = 0.4$ a $\varphi_c = 0$. Hodnoty kontur shearu odpovídají hodnotám $\gamma \in \{0.1, 0.3, 0.4, 0.6, 0.7, 0.9\}$. Hodnoty fáze odpovídají úhlu kolmému na polární úhel ϕ v rovině čočky od osy $\theta_2 = 0$ popořadě v kladném směru $\varphi \in \{-3\pi/8, -\pi/4, -\pi/8, -\pi/16, -\pi/32, 0, \pi/32, \pi/16, \pi/8, \pi/4, 3\pi/8\}$.

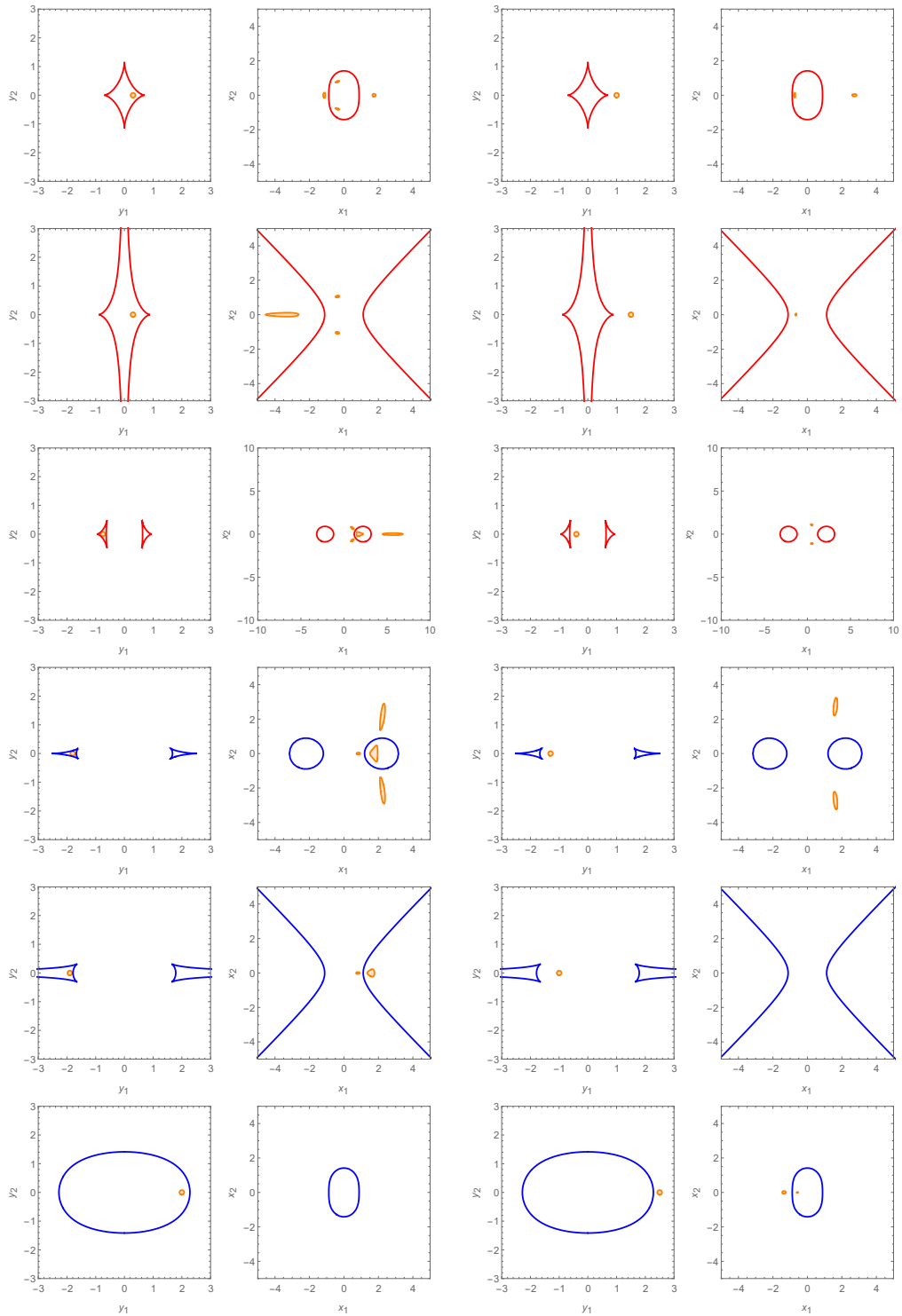
Pro $\kappa_c = 1$ je situace trochu odlišná. Kritické křivky jsou dány rovnicí (2.19). Z toho vyplývá, že pro $\kappa_c = 1$ je jediná přípustná hodnota $\gamma = 0$, pro kterou kritická hodnota nastává všude a nedochází k deformaci obrazů. V tomto případě nemá smysl mluvit o kritické křivce. Nedochází ke tvorbě kaustik ani ke změně počtu obrazů.

Nyní budeme zkoumat, jak se mění obrazy od nesymetrických modelů s různými konstantními konvergenčními κ_c a s konstantním shearem $\gamma_c = 0.4$, měníme-li polohu zdroje vůči příslušné kaustice. Budeme se zabývat pouze vybranými situacemi, přestože může docházet i k dalším pozoruhodným jevům. Je zajímavé, že pokud zdroj prochází kaspem (hrotem) kaustiky, dochází ke spojení tří obrazů v jeden, viz první řádek Obr. 4.5. Přejde-li však zdroj přes kaustiku mezi dvěma kaspem, spojí se dva obrazy v jeden ležící na kritické křivce, který zmizí ve chvíli, kdy se zdroj dostane mimo kaustiku, což lze pozorovat v pátém řádku Obr. 4.5.

Nejprve uvažujme případ $\kappa_c = 0.1$, viz první řádek Obr. 4.5. Z CS diagramu na Obr. 4.3 můžeme vidět, že v tomto případě vznikají pouze tangenciální kritické křivky a tangenciální kaustiky. Uvažujme kruhový zdroj o poloměru 0.08. Pro zdroj uvnitř tangenciální kaustiky vznikají čtyři obrazy (jeden tangenciálně protažený ležící vně tangenciální kritické křivky, dva uvnitř tangenciální kritické křivky a ještě jeden vně tangenciální kritické křivky), jak můžeme vidět na Obr. 4.5 v prvním a druhém sloupci prvního řádku. Projde-li zdroj kaspem kaustiky, tři obrazy (dva obrazy uvnitř kritické křivky a tangenciálně protáhlý obraz vně kritické křivky) se spojí do jednoho tangenciálně protáhlého obrazu. Posuneme-li zdroj vně tangenciální kaustiky, tangenciálně protáhlý obraz se posune dovnitř tangenciální kritické křivky a druhý obraz vně tangenciální kritické křivky se vzdálí od středu roviny čočky. Tuto situaci můžeme vidět ve třetím a čtvrtém sloupci prvního řádku.

Pro konvergenci $\kappa_c = 0.6$ a zdroj umístěný uvnitř tangenciální kaustiky vznikají tři obrazy (dva mezi tangenciálními kritickými křivkami a jeden radiálně protažený vlevo od tangenciální kritické křivky). Projde-li zdroj kaspem kaustiky, všechny tři obrazy splynou v jeden obraz umístěný mezi tangenciálními kritickými křivkami, viz druhý řádek Obr. 4.5.

Ve třetím řádku Obr. 4.5 jsou znázorněny obrazy od nesymetrického modelu s konvergenční $\kappa_c = 0.7$. V tomto případě vznikají pro zdroj uvnitř tangenciální kaustiky čtyři obrazy (jeden uvnitř tangenciální kritické křivky, dva vně mezi tangenciálními kritickými křivkami a jeden radiálně protažený vně vpravo od tangenciální kritické křivky). Přejdem přes kaustiku mezi dvěma kaspem dojde k propojení radiálně protáhlého obrazu vně kritické křivky a obrazu uvnitř kritické křivky. Vznikne tak obraz deformovaný v radiálním směru. Dostane-li se zdroj až za tangenciální kaustiku, obraz protažený v radiálním směru zmizí a zbydou pouze dva obrazy mezi kritickými křivkami.



Obrázek 4.5: Zobrazení kruhového zdroje šesti nesymetrickými modely s konstantním shearem $\gamma_c = 0.4$, konstantní fází $\varphi_c = 0$ a různými hodnotami konstantní konvergence po řádcích odshora dolů $\kappa_c \in \{0.1, 0.6, 0.7, 1.3, 1.4, 1.9\}$. Kruhový zdroj o poloměru 0.08 je v prvním sloupci umístěný uvnitř kaustiky a ve třetím sloupci vně kaustiky. Ve druhém a čtvrtém sloupci jsou oranžovou barvou vyobrazeny příslušné obrazy. V prvním a třetím sloupci je modře znázorněna radiální kaustika a červeně tangenciální kaustika. Ve druhém a čtvrtém sloupci je modře znázorněna radiální kritická křivka a červeně tangenciální kritická křivka. Měřítko na osách se liší.

V případě modelu s konvergencí $\kappa_c = 1.3$ vznikají pouze radiální kritické křivky a radiální kaustiky, jak můžeme vidět v CS diagramu na Obr. 4.3. Pro zdroj ležící uvnitř radiální kaustiky vznikají čtyři obrazy (jeden uvnitř radiální kritické křivky, dva radiálně podlouhlé obrazy nad a pod radiální kritickou křivkou a jeden mezi kritickými křivkami). Posunutím zdroje směrem ke středu na kaustiku se obraz ležící uvnitř radiální kritické křivky spojí s obrazem mezi kritickými křivkami. Tím vznikne tangenciálně protáhlý obraz. Posuneme-li zdroj mimo radiální kaustiku, tangenciálně deformovaný obraz vymizí. Radiálně deformované obrazy nad a pod radiální kritickou křivkou se přesunou směrem ke středu mezi radiální kritické křivky. Tuto situaci můžeme vidět ve čtvrtém řádku Obr. 4.5.

Případ pro model s konvergencí $\kappa_c = 1.4$ je znázorněn v pátém řádku Obr. 4.5. Pro zdroj ležící uvnitř radiální kaustiky vznikají dva obrazy (jeden mezi radiálními kritickými křivkami a druhý vpravo od kritické křivky). Posunutím zdroje na radiální kaustiku směrem ke středu roviny zdroje zmizí oba obrazy. To nastává z důvodu, že čočková rovnice (2.2) v tomto případě nemá řešení.

V případě modelu s konvergencí $\kappa_c = 1.9$, který můžeme vidět v posledním řádku Obr. 4.5, je situace odlišná. Ve většině modelů dochází k redukcí počtu obrazů při přechodu zdroje z vnitřku kaustiky směrem ven, zatímco u modelu s konvergencí $\kappa_c = 1.9$ je tomu naopak. To je způsobeno převrácením kaustiky z nekonečna, což znamená, že vnitřek kaustiky je považován za vnějšek a naopak. U modelu s konvergencí $\kappa_c = 1.9$ a zdroj umístěný uvnitř radiální kaustiky nevniká žádný obraz. Posuneme-li zdroj na radiální kaustiku, vznikne jeden tangenciálně deformovaný obraz ležící na radiální kritické křivce. Pro zdroj ležící vně kaustiky se obraz rozdělí na dva (jeden uvnitř kritické křivky a druhý vně).

Kapitola 5

Závěr

V práci bylo zkoumáno zobrazení několika sféricky symetrickými modely gravitačních čoček. Základním modelem byla bodová čočka, která i přes svou jednoduchost dobře simuluje např. čočkování hvězdami. Následně byl použit model Navarro-Frenka-Whitea (NFW), který je dobrou aproximací čočkování halem temné hmoty galaxie nebo kupy galaxií. Celková hmotnost tohoto modelu však s rostoucím poloměrem diverguje. Z tohoto důvodu jsme následně zkoumali radiálně omezený NFW model, jehož hustotní profil má konečný dosah, a tudíž lépe odpovídá realitě. Ze symetrických modelů byly v práci použity ještě izotermální modely a Hernquistův model, užívané k popisu čočkování galaxiemi.

Nesymetrický model s konstantní konvergencí a shearem popisuje lokální chování jakékoliv gravitační čočky. Posledním modelovým profilem byl model hmotného bodu s vnější konvergencí a shearem, který popisuje lokální čočkování v blízkosti hmotného bodu s dodatečným vlivem další hmoty rozložené na větší prostorové škále.

U každého modelu byl vykreslen jeho CS diagram. Následně byly vlastnosti konkrétních obrazů vytvořených daným modelem porovnány s vlastnostmi odečtenými z CS diagramu. Pro zkoumané modely jsme zjistili, že CS diagram je vhodným nástrojem ke kompaktnímu popisu geometrie obrazů, které se vyskytují kdekoliv v rovině čočky. Platí to zejména v případě sféricky symetrických modelů, pro které radiální závislosti konvergence a shearu vytínají charakteristické křivky v CS diagramu. I v testovaných nesymetrických modelech má CS diagram podobnou užitečnost s tím rozdílem, že body v CS diagramu mohou v rovině čočky odpovídat složitějším konturám než kružnicím. Na práci je možné navázat rozšířením studia nesymetrických modelů, které by mohlo poskytnout další zajímavé výsledky právě ohledně korepondence bodů v CS diagramu s body v rovině čočky.

Literatura

- Baltz, E. A., P. Marshall a M. Oguri (2009). „Analytic models of plausible gravitational lens potentials“. In: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2009, s. 015.
- Bartelmann, M. (1996). „Arcs from a universal dark-matter halo profile.“ In: *Astronomy and Astrophysics* 313, s. 697.
- Chang, K. a S. Refsdal (1984). „Star disturbances in gravitational lens galaxies.“ In: *Astronomy and Astrophysics* 132, s. 168.
- Congdon, A. a C. Keeton (2018). *Principles of Gravitational Lensing: Light Deflection as a Probe of Astrophysics and Cosmology*. Springer Praxis Books. Springer International Publishing. ISBN: 9783030021221.
- Dodelson, S. (2017). *Gravitational Lensing*. Cambridge University Press. ISBN: 9781107129764.
- Eddington, A. S. (1919). „The Deflection of Light during a Solar Eclipse“. In: *Nature* 104, s. 372.
- Einstein, A. (1936). „Lens-Like Action of a Star by the Deviation of Light in the Gravitational Field“. In: *Science* 84, s. 506.
- Hernquist, L. (1990). „An Analytical Model for Spherical Galaxies and Bulges“. In: *The Astrophysical Journal* 356, s. 359.
- Heyrovský, D. (2021). „Gravitational Lensing: From Planets to Galaxy Clusters“. Habilitační práce. Univerzita Karlova.
- Karamazov, M. a D. Heyrovský (2022). „Gravitational Lensing by a Massive Object in a Dark Matter Halo. II. Shear, Phase, and Image Geometry“. In: *The Astrophysical Journal* 927.
- Keeton, C. R. (2001). „A Catalog of Mass Models for Gravitational Lensing“. In: arXiv: astro-ph/0102341 [astro-ph].
- Kormann, R., P. Schneider a M. Bartelmann (1994). „Isothermal elliptical gravitational lens models.“ In: *Astronomy and Astrophysics* 284, s. 285.
- Navarro, J. F., C. S. Frenk a S. D. M. White (1996). „The Structure of Cold Dark Matter Halos“. In: *The Astrophysical Journal* 462, s. 563.
- Paczynski, B. (1996). „Gravitational Microlensing in the Local Group“. In: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 34, s. 419.
- Schneider, P., J. Ehlers a E. Falco (2013). *Gravitational Lenses*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 9783662037584.
- Walsh, D., R. F. Carswell a R. J. Weymann (1979). „0957+561 A, B: twin quasistellar objects or gravitational lens?“ In: *Nature* 279, s. 381.