

## Oponentův posudek bakalářské práce

### **Kvazi-relativistická kvantová částice na kružnici s komplexním magnetickým polem**

jméno studenta: Jan Havel  
vedoucí práce: prof. Mgr. David Krejčířík, PhD, DSc  
datum obhajoby: 29. - 30. srpna 2022.

---

V úvodu je třeba ocenit zajímavou a aktuální volbu tématu. Student si vybral poměrně náročné téma sahající od přehledu standardních formulací nerelativistické i relativistické kvantové mechaniky až k jejich nedávným rozšířením a aplikacím. S takovou volbou ovšem souvisí nutnost věnovat příslušné bakalářské práci nadstandardní úsilí. V tomto smyslu se zdá, že student mírně podhodnotil svoje časové možnosti a odevzdal práci, která by si ještě v několika ohledech opravdu zasloužila „dopilování“.

Kladnou stránkou studentovy volby tématu je bezesporu její ctižádost. Téma samotné bych totiž kvůli jeho náročnosti spíše chápal jako vhodné pro práci magisterskou. V tomto smyslu je třeba ocenit množství poznatků, které se předložená práce snaží prezentovat. Presentace sama sice není dokonalá (viz několik konkrétních připomínek v dalším textu), ale řada výsledků popsaných v kapitole páté svědčí o studentově motivaci i o jeho živém a aktivním zájmu o téma.

Autor se bezesporu pokusil o rozšíření školitelova zadání. To bylo, podle mého názoru, správně koncipováno, jak je zvykem, spíše ve směru rešeršního přehledu. Šest bodů zadání předpokládalo kapitolu o Schroedingerově rovnici, kapitolu o jejich relativistických analogiích, kapitolu o fyzikální motivaci a tři kapitoly o matematických konceptech Rieszovy báze, rigorózního zavedení odmocniny operátoru a následné spektrální analýzy. V tomto smyslu si autor práce vytyčil zřetelně náročnější cíle.

Ve smyslu tohoto rozšířeného zadání je vlastním konečným cílem práce řešení velmi zajímavé úlohy, v níž máme kvantový systém (částici na kružnici) který je relativistický (ve smyslu kvantové mechaniky), a jehož dynamiku ovlivňuje tzv. komplexní magnetické pole. V důsledku takové modifikace projektu ovšem autor musel nutně narazit na rozpor mezi nutností časově náročné práce na řešení oné úlohy a stejně časově náročnou povinností držet se povšechně zadané osnovy. Výsledek autorova řešení tohoto rozporu není podle mého názoru příliš uspokojivý ani v jednom z obou směrů.

Podrobněji: první kapitola (věnovaná stručnému shrnutí principů a rovnic klasické elektrodynamiky) se mi zdá v daném tematickém rámci nadbytečná, a i kapitola číslo dvě (v níž se autor pokusil shrnout a zároveň i ilustrovat obecný učebnicový formalismus kvantové mechaniky) se mi četla poměrně špatně. Řekl bych, že lepší

by bývalo bylo začít, ve smyslu školitelova zadání, od popisu kvantové teorie bez magnetického pole. Pak by bylo v kapitole třetí možno snadno obrátit pozornost k vysvětlení konceptu komplexního magnetického pole a přejít k jádru věci. V daném uspořádání materiálu je dnes kapitola třetí (tj. řekněme kapitola fyzikální a motivační) téměř nadbytečná, ne zcela přesvědčivá a, ne zcela překvapivě, enormně krátká (přesto však autor stihne citovat relevanci modelu v rámci problematiky černých děr; nejsem si ovšem jist, nepůsobí-li zde náhlý a nečekaný obrat ke kosmologii mírně neorganicky).

Jádrem sdělení je samozřejmě obrácení pozornosti k hlavním matematickým rysům kvantové mechaniky obecných systémů kvazi-hermitovských. V tomto směru je pro mě příslušná úvodní podkapitola 2.3, která by snad měla a mohla být jedním z vrcholů práce, zklamáním (přiznávám navíc, že osobně bych mnohem raději četl a mluvil o systémech krypto-unitárních; uznávám samozřejmě, že v daném oboru už je dnes bohužel racionalizace terminologie úkolem prakticky neproveditelným). V tomto kontextu je nicméně opravdu radost číst následnou kapitolu čtvrtou. Tuto kapitolu lze vsutku chápat jako opravdu pečlivě připravený rešeršní text a důkaz, že autor práce se dobře seznámil s podstatnou částí matematického aparátu, a že jeho bakalářskou práci lze bez nejmenších pochyb přijmout k obhajobě.

Po této části práce je sdělení poslední kapitoly jiné a svým způsobem dominantní. Postupuje se zde de facto ve dvou krocích. V prvním z nich se autor věnoval definicím (tj. konstrukci matematického modelu), zatímco ve druhém jeho úsilí kulminovalo provedením podrobnější analýzy. V prvním kroku je podkapitola 5.1 věnována popisu korektního matematického zavedení momentu hybnosti. Po ní následuje podkapitola č.5.2 pojednávající o řadě přidružených technických otázek (tj., mj., o P-omezenosti operátoru  $A$  atd), a kapitola 5.3 stanovuje coby konečný výsledek podmínky kvazi-hermitovosti Hamiltoniánu. Autorovo úsilí je zde zaměřeno na rigoróznost postupů, v relevantní literatuře, bohužel, ne vždy zcela běžnou. Jsou zde shrnuty některé důležité výsledky nedávné školitelovy práce z roku 2019. Je zde podrobně rozebrána řada technických (a to v daných souvislostech zcela podstatných) podrobností zahrnujících jak nutnost odpovědné definice operátorů v daném modelu, tak i použití řady netriviálních matematických postupů v rámci poměrně pokročilých forem a důkazních triků funkcionální analýzy (dá se říci, že student měl v tomto smyslu velké štěstí, že právě jeho vedoucí práce je v dané oblasti odbornou autoritou z nejspolehlivějších).

Obrátíme-li nyní pozornost k formálním stránkám práce, překvapí nás především již výše zmíněné nevyvážené rozvržení materiálu. Jeho presentace by si vsutku zasloužila přepracování. A to přesto, že při obhajobě se dá předpokládat, že hlavní zájem komise bude věnován studentovým výsledkům matematickým. Z tohoto hlediska lze totiž považovat za určitý (byť v rámci požadavků na bakalářské práce zcela irelevantní) formální nedostatek to, že práce má (a to především v centrální kapitole páté) formu jakéhosi volného vyprávění namísto matematicky mnohem standardnějšího formátu textu typu věta-důkaz (velmi přiměřeně použitého v kapitole čtvrté). V uvedeném vyprávěcím formátu je bohužel poměrně obtížné oddělit převzaté výsledky od autorových výsledků vlastních, jakož i od otázek dosud nevyřešených. Při obhajobě by možná mohla proto vzniknout příležitost pro určité alternativní krátké shrnutí, sloužící tomu, aby si členové zkušební komise mohli stručné a výstižné shrnutí páté kapitoly „odnést s sebou domů“.

V čistě technické smyslu by bylo nyní možno přidat i několik kritických poznámek týkajících se některých formulací (v kapitole 5.1 mě například docela zmátla poněkud příliš stručná poslední věta „Kvůli Fourierově transformaci volíme  $c = 1/\sqrt{2\pi}$ , přičemž píšeme  $p \equiv \lambda$ “). Případně začít i klást řadu typograficky motivovaných připomínek a dotazů (např. co znamená subscript a u Hamiltonovy funkce, či jak je definován operátor  $P$  s tímto subscriptem, či proč „Do konce této části už ovšem nemusíme předpokládat, že je operátor  $P_a$  kvazi-hermitovský.“). Čtenář si to sice většinou domyslí, ale i zde by textu prospělo konečné doladění. Na druhé straně text podkapitoly samotné dokazuje, že student se v příslušných nerovnostních důkazových technikách spojených se jmény Hardyho, Lapteva a Weidla orientuje s přehledem. Předpokládám proto, že odpovědi na podobné marginální nejasnosti se dozvíme u zkoušky.

K formě práce lze ještě dodat několik dalších komentářů. Neodpustím si například ani tentokrát zopakovat svou standardní kritickou poznámku k formě bakalářských prací na FJFI, u nichž zřejmě nějaký podivný předpis stanoví, že by měly být sepsovány pouze v češtině. Můj názor je opačný. Pokud se totiž jedná o práci ctižádostivou (a za takovou lze nepochybně považovat i předkládanou práci), lze volbu češtiny považovat za chybnou, snižující možný vliv a dopad získaných výsledků v širší odborné komunitě. Lze proto shledati líbezným, že v předložené práci se ani sám autor neubrání použití angličtiny, a to alespoň v názvu kapitoly o Leeových a Youngových nulových bodech partiční funkce. Přiznávám ostatně, že ani mně by se český překlad „Leeovy a Youngovy kořeny“ názvu kapitoly 3.1 moc nelíbil. Skrytým důvodem je jistě i to, že angličtina je jazykem prakticky veškeré relevantní literatury (doufám, že v komisi nebude žádný Francouz ani Číňan), a mírně komickým důsledkem je pak i občasný výskyt anglicismů (např. to, že se v práci dočteme, že jeden z operátorů je „unikátní“).

Na závěr se ještě jednou vraťme k obtížnost zvoleného tématu. Tu lze v rámci práce interpretovat dvěma způsoby. Na jedné straně je to rys pozitivní (podle textu závěrečné kapitoly se zdá, že student se cítí motivován k dalšímu pokračování svého studia v daném směru). Na druhé straně se nelze než obdivovat, nakolik autor v průběhu svého studia příslušné překážky překonal. Z tohoto hlediska jsou i některé nedokonalosti textu (já osobně jsem například postrádal alespoň náznak pokusu o komunikaci s experimentálně zaměřenými fyziky) spíše jen důkazem nedostatku času a příslibem, že se autor ani v průběhu svého dalšího studia, pokud se tomuto tématu bude i nadále věnovat, určitě nebude nudit.

Otevřených otázek zde totiž zbývá (jak i sám autor uvádí) celá řada. O intenzifikaci pokusů o komunikaci s experimentálně zaměřenými fyziky si sice podle mého názoru nelze dělat přílišné velké iluze ani v budoucnosti, ale dodání jejich mírnější formy by bylo opravdu žádoucí. I při obhajobě práce by proto možná bylo vhodné, aby se autor k těmto možnostem alespoň krátce vyjádřil.

---

*návrh na hodnocení bakalářské práce písmenem i slovem: B (velmi dobře)*

---

místo vypracování posudku: ÚJF ČSAV, Řež, ČR

datum vypracování posudku: 11. července 2022

autor posudku: **Miloslav Znojil, DrSc**