

Ing. František Štampach, Ph.D.
Katedra matematiky FJFI ČVUT v Praze:

Posudek školitele bakalářské práce
Vojtěcha Bartoše

*Diskrétním Schrödingerův operátor s komplexním schodovitým
potenciálem*

Předmětem studia bakalářské práce pana Vojtěcha Bartoše je spektrální analýza diskrétního Schrödingerova operátoru

$$H_\alpha = -\Delta + \alpha\chi$$

na $\ell^2(\mathbb{Z})$, kde Δ je diskrétní Laplaceův operátor na \mathbb{Z} , potenciál χ je určen diskrétní Heavisideovou funkcí a α je komplexní parametr. Ve speciálním případě model představuje diskrétní analogii Schrödingerova operátoru studovaného kolegou Davidem Křejiříčkem a Raphaelem Henrym, jejichž výsledky byly publikovány v článku [3].

Bakalářská práce je rozdělena do čtyř kapitol. Původní výsledky obsahují kapitoly 2, 3 a 4. V první kapitole student velmi stručně shrnul některé standardní výsledky z funkcionální analýzy, základní věty o omezenosti Toeplitzových a Hankelových operátorů a vybrané partie poruchové teorie.

V druhé kapitole student vyšetřil spektrum H_α včetně jeho částí pro obecné $\alpha \in \mathbb{C}$. Pro $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ není operátor H_α samosdružený. Vyšetření spektra H_α je netriviální a kombinuje obecné metody spektrální teorie se speciálními vlastnostmi tridiagonálních operátorů.

Kratší kapitola 3 srovnává diskrétní a spojitý model. Ukazuje se, že podobně jako ve spojitém modelu, efekt uvažovaného potenciálu rozštěpí esenciální spektrum laplaciánu na dvě totožné kopie lokalizované v komplexní rovině v závislosti na parametru α .

Čtvrtá kapitola je věnována studiu Schrödingerova operátoru $H_\alpha + V$, kde V je komplexní potenciál určený dvojitě nekonečnou ℓ^1 -posloupností. Pomocí Birmanova–Schwingerova principu a odhadů normy resolventy H_α student odvodil nerovnosti, které přibližně lokalizují diskrétní spektrum operátoru $H_\alpha + V$. Hlavní výsledky jsou dvojího druhu: přesná, ale komplikovaně vyjádřená lokalizace spektra, jejíž komplexnost je numericky diskutována, a jednodušší, za to méně přesná lokalizace získaná aplikací hrubších odhadů. Výsledek je zobecněním lokalizace diskrétního spektra operátoru $H_0 + V$ z článku [7]. Odvozené spektrální obálky jsou v práci přehledně numericky ilustrovány.

Práce má dostatečný rozsah, je logicky dobře strukturována a obsah zhruba odpovídá mému úmyslu zformulovanému v zadání. Použité metody

jsou srozumitelně popsány, důkazy jsou logicky v pořádku. V práci jsem našel jen velmi málo překlepových chyb (např. na str. 18 je $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ místo $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$; u B^{-+} na str. 27 chybí indexy) a jen několik drobných chyb věcných (např. tvrzení v poznámce za Lemma 1.10 je sice pravdivé, ale z důkazu lemma nevyplývá, neboť student odvozuje pouze horní odhad normy; tvrzení ze str. 13, že „pro nulu (tj. $\lambda = 0$) řešení neexistuje“ není pravdivé, existují dvě řešení $\xi = \pm i$; na str. 20 se udělají nesprávné závěry $|\eta| = 1$, $|\xi| = 1$ namísto správných $\eta^2 = 1$, $\xi^2 = 1$, komplexní obor!).

Student si osvojil několik metod ze spektrální analýzy operátorů, jež jdou zcela jistě nad rámec obvyklých znalostí studenta 3. ročníku, a ty úspěšně aplikoval na studovaný problém. Chtěl bych vyzdvihnout, že v práci byly odvozeny původní výsledky, které jsou dobrým základem pro možnou budoucí publikaci v mezinárodním impaktovaném časopise. V neposlední řadě oceňuji značnou samostatnost a pečlivost studenta.

Uvedené výtky považuji za marginální a práci za výbornou. Proto *doporučuji bakalářskou práci pana Vojtěcha Bartoše k obhajobě a navrhuji hodnotit známkou A (výborně).*

V Praze 25. 7. 2022

Ing. František Štampach, Ph.D.