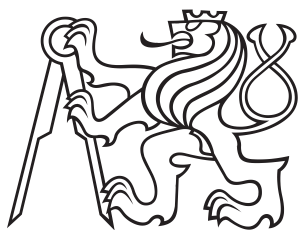


Bakalářská práce



České
vysoké
učení
technické
v Praze

FS

Fakulta strojní
Ústav technické matematiky

Numerická simulace transsonického proudění v dýze

Josef Štěřovský

Vedoucí práce: doc. Ing. Jan Halama, Ph.D.

Studijní program: Teoretický základ strojního inženýrství

Srpen 2022

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Štěřovský** Jméno: **Josef** Osobní číslo: **484037**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávací katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**
Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Numerická simulace transsonického proudění v dýze

Název bakalářské práce anglicky:

Numerical simulation of transonic flow in a nozzle

Pokyny pro vypracování:

Popište matematický model vhodný pro simulaci transsonického proudění plynu
Formulujte úlohu pro případ proudění v osově symetrické dýze
Popište základní přehled numerických metod
Naprogramujte a odlaďte vybranou numerickou metodu
Realizujte modelový výpočet proudění v osově symetrické dýze s rázovou vlnou v divergentní části
Vhodnou formou prezentujte, interpretujte a ověřte výsledky
Komentujte ztráty vlivem rázové vlny

Seznam doporučené literatury:

J. Fürst, K. Kozel: Numerické metody řešení problémů proudění I, skripta ČVUT, 2001
J. Fořt, K. Kozel: Numerické metody řešení problémů proudění II, skripta ČVUT, 2002
J. Fořt, K. Kozel, P. Louda, J. Fürst: Numerické metody řešení problémů proudění III, skripta ČVUT, 2004
J.H. Ferziger, M. Peric: Computational Methods for Fluid Dynamics, Springer 2002
J. Blazek: Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications, Elsevier, 2001
E.F.Toro: Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction, Springer 2009

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

doc. Ing. Jan Halama, Ph.D. ústav technické matematiky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **19.04.2022**

Termín odevzdání bakalářské práce: **14.08.2022**

Platnost zadání bakalářské práce: _____

doc. Ing. Jan Halama, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

prof. Ing. Jiří Fürst, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

4.5.2022

Datum převzetí zadání

Štěřovský

Podpis studenta

Poděkování

Děkuji doc. Ing. Janu Halamovi, Ph.D., za cenné rady, průběžné konzultace a trpělivost při vedení práce. Dále děkuji Ing. Tomáši Hejdovi, Ph.D., za vytvoření třídy `ctuthesis` pro \LaTeX , kterou jsem použil pro sázení a design práce, a všem ostatním autorům nástrojů, které mi umožnily tuto práci vytvořit. V neposlední řadě děkuji také rodině a blízkým za podporu během studia.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně, a že jsem uvedl veškerou použitou literaturu.

V Praze dne 12. srpna 2022

Josef Štěřovský

Abstrakt

Cílem této práce je vytvořit výpočetní model stacionárního transsonického proudění v osově symetrické Lavalově dýze s rázovou vlnou. Proudící tekutina je považována za neviskózní ideální plyn s konstantními měrnými tepelnými kapacitami. Numerické řešení je založeno na kvazi-1D Eulerových rovnicích, je použita metoda typu FTCS s přidáním umělé vazkosti. Numerické výsledky jsou srovnávány s referenčním řešením založeným na analytických vztazích pro kvazi-1D proudění ideálního plynu, poloha rázové vlny a lokální Machova čísla v referenčním řešení jsou určovány numericky. Bylo ověřeno, že aby mohly být získány přesné výsledky, umělá vazkost musí být minimalizována. Je-li to možné, také je vhodné omezit simulovaný úsek dýzy tak, aby rázová vlna vznikla blízko jeho konci, neboť tak vylepšíme přesnost výsledku i rychlost konvergence. Přesnost výsledků naopak nezávisí na síle rázové vlny. Přestože použitá metoda v okolí rázové vlny nezachovává veličiny jako klidová entalpie a hmotnostní tok, při správném nastavení parametrů dobře vystihuje přírůstek entropie na rázové vlně.

Klíčová slova: kvazi-1D proudění, Lavalova dýza, rázová vlna, umělá vazkost, přírůstek entropie

Vedoucí práce: doc. Ing. Jan Halama, Ph.D.

Abstract

The aim of this thesis is to develop a computational model of stationary transonic flow in an axially symmetric de Laval nozzle with a shock wave. The flowing fluid is assumed to be an inviscid ideal gas with constant specific heats. The numerical solution is based on quasi-1D Euler equations and utilizes an FTCS scheme with added artificial viscosity. Numerical results are compared to reference solutions based on analytic relations for quasi-1D ideal gas flow. In the reference solutions, the position of the shock wave and local Mach numbers are determined numerically. It was verified that the artificial viscosity must be minimized to acquire precise results. If possible, the simulated part of the nozzle should be restricted so that the shock wave appears near its end, as this improves both the precision and the rate of convergence of the result. On the other hand, the precision of the results is unaffected by the strength of the shock wave. In the surroundings of the shock wave, properties such as mass flow rate and stagnation enthalpy are not preserved. In spite of this, the utilized scheme is capable of capturing the entropy increase at the shock wave quite well.

Keywords: quasi-1D flow, de Laval nozzle, shock wave, artificial viscosity, entropy increase

Title translation: Numerical simulation of transonic flow in a nozzle

Obsah

Seznam použitých symbolů	1
1 Úvod	3
2 Základní předpoklady	5
2.1 Kontinuum	5
2.2 Ideální plyn	6
2.3 Adiabatické děje	8
2.4 Dynamický popis plynu	11
2.5 Kvazi-1D proudění	13
3 Numerické metody řešení proudění	17
3.1 Řešená úloha	17
3.2 Diskretizace a chyba diskretizace	18
3.3 Vlastnosti numerických metod	20
3.4 Metoda konečných diferencí	21
3.5 Metoda konečných objemů	22
3.6 Hyperbolický systém a nespojitosti	23
4 Lavalova dýza s rázovou vlnou	25
4.1 Vlastnosti Lavalovy dýzy	25
4.2 Analytické řešení	26
4.3 Numerické řešení	28
4.3.1 Počáteční a okrajové podmínky	28
4.4 Realizace výpočtu	29
5 Interpretace výsledků	31
5.1 Vliv intenzity umělé vazkosti na konvergenci a přesnost výsledku	31
5.2 Závislost přesnosti a rychlosti konvergence výpočtu na poloze a síle rázové vlny	32
5.3 Závislost parametrů rázové vlny na složení směsi plynů	32
6 Závěr	35
Literatura	37
A Výsledky – intenzita umělé vazkosti	39
B Výsledky – síla a poloha rázové vlny	45
C Rejstřík	49

Obrázky

2.1 Graf $Z = Z(p)$ při $T = \text{konst.}$. . .	8
2.2 Kontrolní objem	11
2.3 Kvazi-1D element dýzy	14
2.4 Zachování hmoty v elementu . . .	14
3.1 Schéma sítě	18
3.2 Metoda konečných diferencí	21
3.3 Metoda konečných objemů	22
4.1 Skica dýzy	26
5.1 Graf $\Delta s = \Delta s(\sigma_{H_2})$	33
A.1 Graf $A = A(x)$	39
A.2 Graf $Ma = Ma(x, \varepsilon)$	40
A.3 Graf $s = s(x, \varepsilon)$	41
A.4 Graf $T = T(x, \varepsilon)$	41
A.5 Graf $p = p(x, \varepsilon)$	42
A.6 Graf $\dot{m} = \dot{m}(x, \varepsilon)$	42
A.7 Graf $h_t = h_t(x, \varepsilon)$	43
A.8 Graf $\Delta\rho = \Delta\rho(n, \varepsilon)$	43
B.1 Graf $Ma = Ma(x, p_1)$	45
B.2 Graf $\Delta s = \Delta s(x, p_1)$	46
B.3 Graf $\Delta\rho = \Delta\rho(n, p_1)$	47

Tabulky

A.1 Parametry výpočtu	40
B.1 Parametry rázové vlny pro různé výstupní tlaky	46

Seznam použitých symbolů

Pozn.: Tečka nad symbolem značí derivaci veličiny podle času (např. $\dot{Q} = \partial Q / \partial t$). Čárka nad symbolem indikuje, že symbol se vztahuje ke směsi plynů (např. \bar{c}_p, \bar{M}). Není-li zde určeno jinak, indexy u symbolů značí konkrétní hodnoty veličiny identifikované daným symbolem. V kapitole 3 mohou indexy mít také význam parciální derivace, viz začátek této kapitoly.

Symbol	Význam	Jednotka
α	úhel stěny divergentní části vůči ose dýzy	$^\circ$
$\Delta\rho$	reziduum hustoty	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Δs	změna entropie	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Δt	časový krok sítě	s
Δx	prostorový krok sítě	m
ε	intenzita umělé vazkosti	—
κ	adiabatický exponent	—
λ	vlastní číslo, rychlost šíření vlny	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
ρ	hustota	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
σ	hmotnostní zlomek	—
χ	kilomolový zlomek	—
D	lokální chyba diskretizace	
E	globální chyba diskretizace	
f	vektor toků neznámých veličin	
r	vektor pravých stran rovnic	
u	vektor neznámých veličin	
F, U, R	diskrétní aproximace f, u, r	
\mathcal{O}	asymptotické chování zbytku	

Symbol	Význam	Jednotka
A	průřez dýzy	m^2
a	rychlost zvuku	$m \cdot s^{-1}$
a_*	kritická rychlost	$m \cdot s^{-1}$
c	rychlost proudění	$m \cdot s^{-1}$
c_v	měrná tepelná kapacita při konstantním objemu	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
c_p	měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
E	celková energie	J
e	měrná celková energie	$J \cdot kg^{-1}$
H	entalpie	J
h	měrná entalpie	$J \cdot kg^{-1}$
h_t	měrná klidová entalpie	$J \cdot kg^{-1}$
i, j	indexy sítě	—
M	kilomolová hmotnost	$kg \cdot kmol^{-1}$
Ma	Machovo číslo	—
m	hmotnost	kg
n	počet bodů sítě	—
p	statický tlak	Pa
p_t	klidový tlak	Pa
Q	sdělené teplo	J
Q_m	kilomolové sdělené teplo	$J \cdot kmol^{-1}$
q	měrné sdělené teplo	$J \cdot kg^{-1}$
R	univerzální plynová konstanta	$J \cdot kmol^{-1} \cdot K^{-1}$
r	měrná plynová konstanta	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
S	entropie	$J \cdot K^{-1}$
s	měrná entropie	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
s_{prod}	měrná produkovaná entropie	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
T	termodynamická teplota	K
T_t	klidová termodynamická teplota	K
t	čas	s
U	vnitřní energie	J
U_m	kilomolová vnitřní energie	$J \cdot kmol^{-1}$
u	měrná vnitřní energie	$J \cdot kg^{-1}$
V	objem	m^3
v	měrný objem	$m^3 \cdot kg^{-1}$
W	práce	J
w	měrná práce	$J \cdot kg^{-1}$
x	délková souřadnice dýzy	m
Z	kompresibilitní faktor	—

Kapitola 1

Úvod

Transsonické proudění plynu je charakterizováno tím, že je při něm překonána rychlost zvuku v pohybujícím se plynu, a plyn se začne pohybovat rychleji, než se v něm může šířit zvuk nebo jiné mechanické vzruchy. Toto proudění bude realizováno v dýze neboli trysce, což je trubice určená právě ke zrychlení pohybu plynu. Dýzu, v níž je možno realizovat transsonické proudění, nazýváme dýzou Lavalovou.

Dynamika plynů je popsána složitými soustavami parciálních diferenciálních rovnic, jejichž analytické řešení pro drtivou většinu případů dodnes nebylo nalezeno. Známým příkladem jsou Navierovy-Stokesovy rovnice, popisující pohyb vazké tekutiny v trojdimenzionálním prostoru, které figurovaly v jednom z dosud nevyřešených „problémů tisíciletí“ – nejdůležitějších nevyřešených matematických problémů vyhlášených v roce 2000. Nutno dodat, že stanoveným problémem nebylo rovnici vyřešit, ale vůbec dokázat, že řešení existuje a má předpokládané vlastnosti.

V dynamice plynů jsou široce využívány různé numerické metody. Principem numerického řešení je nahrazení obtížně řešitelného problému jednodušším, opakujícím se postupem, přičemž musí být dokázáno, že buď dostatečně přesně vystihuje vývoj soustavy rovnic v čase, nebo v případě stacionárního řešení dokáže toto řešení popsat s arbitrárně malou chybou.

V rámci této práce budou používány Eulerovy rovnice, které na rozdíl od rovnic Navierových-Stokesových vazkost tekutiny zanedbávají. Budeme dýzu popisovat pouze jednou prostorovou souřadnicí, takže ztratíme informace o „příčných“ směrech – nebudeme moci zjistit, jak se liší stav plynu uprostřed dýzy a na její stěně ve stejném místě. Tato zjednodušení však nemění základní zákonitosti numerických metod a mají velkou výhodu, že odpovídající analytická řešení jsou do značné míry známá. Výsledky numerických metod tak budeme moci srovnávat s řešením získaným analyticky.

V kapitole 2 budou popsány v souvislostech základní poznatky z termodynamiky a dynamiky plynů, které poslouží jako technický úvod do problematiky. Kapitola 3 se již zaměří na numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic, definuje základní pojmy, uvede zvolenou metodu a její možné nedostatky. Kapitola 4 vyjmenuje vlastnosti Lavalovy dýzy a shrne konkrétní postupy použité při řešení proudění v Lavalově dýze, např. realizaci okrajových podmínek pro numerickou metodu, rovnice analytického řešení, parametrický

modelový tvar dýzy, a také program vypracovaný pro účely této práce, který všechny tyto postupy integruje.

V kapitole 5 pak budou komentovány výsledky výpočtů a bude provedena jejich diskuze, bude také na základě analytického řešení zkoumána závislost polohy rázové vlny a přírůstku entropie na složení směsi plynů. Výsledky numerických výpočtů pak budou graficky zpracovány v příloze A, v níž bude zkoumán vliv parametrů numerické metody na přesnost jejího výsledku, a v příloze B, která se bude soustředit na citlivost numerické metody na změnu fyzikálního zadání.

Kapitola 2

Základní předpoklady

V této kapitole budou stručně shrnuty základní termodynamické modely a poznatky, na nichž se řešení proudění v dýze zakládá.

Rovnice budou pokud možno vyjadřovány v intenzitní podobě vztažené na jednotku hmoty, tj. pomocí veličin jako měrná vnitřní energie u , měrné sdělené teplo q apod., což se jeví jako nejvhodnější pro další řešení úlohy. Pro úplnost uvedme, že takto vyjádřené rovnice budou platit i v extenzitní podobě (U, Q) nebo při vztažení na jednotku látkového množství (U_m, Q_m).

Bude také důsledně rozlišováno mezi veličinami stavovými a nestavovými. Stavová veličina (anglicky *property*) je taková veličina, jejíž hodnota závisí pouze na současném stavu plynu (např. p, V, T), její diferenciál je diferenciálem úplným (např. dp, dV, dT). Naopak nestavová veličina charakterizuje děj probíhající mezi stavy a pro jednotlivý stav ji nelze jednoznačně určit (např. Q, W). Diferenciál nestavových veličin budeme značit podle konvence obvyklé v termodynamice (např. $\delta Q, \delta W$) [12].

stavová veličina

2.1 Kontinuum

Kontinuum je zjednodušený model reálné struktury makroskopických systémů. Předpokládá spojitý průběh lokálních hodnot veličin, které nazýváme jako intenzitní, tj. veličin, jejichž hodnota je nezávislá na velikosti soustavy.

kontinuum

Příkladem takové veličiny je hustota $\rho = m/V$. U stlačitelných tekutin se mění podle podmínek, nemůžeme tedy ρ považovat za všeobecně platnou konstantu, a tak je nutné ji definovat jiným způsobem. V úvahu přichází definovat hustotu skalárním polem, tj. každému bodu v soustavě přiřadit jednoznačnou hodnotu hustoty, což je právě hypotéza kontinua.

Podle hypotézy kontinua by na libovolném místě v soustavě mělo pro hmotnost tekutiny Δm obsaženou v objemu Δv platit

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \rho, \quad (2.1)$$

kde takto vzniklé skalární pole bude hladkou funkcí vzhledem k prostorovým souřadnicím i k času.¹

¹Vzhledem k tomu, že v této práci budou zkoumány pouze makroskopické jevy, nevyjde

Chyba způsobená modelem kontinua je znatelná až v případě, kdy charakteristický rozměr proudění je řádově stejně velký jako průměrná vzdálenost, kterou urazí molekula plynu mezi dvěma srážkami [2]. Za atmosférického tlaku se tato chyba projeví, zkoumáme-li objemy menší než 10^{-9} mm³ [15].

Kontinuum má velkou výhodu v tom, že převedení průběhů intenzitních veličin na hladké funkce nám umožní užít diferenciálního počtu. Pomocí modelu kontinua však nelze odvodit mnohé základní zákonitosti, které mezi těmito veličinami platí. Statistická mechanika dokáže z částicového modelu plynu např. odvodit vlastnosti ideálního plynu, které budeme v podkapitole 2.2 považovat za axiomy.

2.2 Ideální plyn

ideální plyn Ideální plyn je plyn, který splňuje následujících 5 podmínek² [13]:

1. platí pro něj, že následující poměr je konstantní při jakékoli změně stavu,

$$\frac{pV}{T} = \text{konst.} \quad (2.2)$$

2. jeho měrná kapacita při konstantním objemu c_v je konstantní,
3. jeho vnitřní energie U je funkcí pouze teploty ($U = U(T)$),
4. nelze jej zkapalnit,
5. není vazký.

stavová rovnice termická Vztah 2.2 je termická stavová rovnice ideálního plynu. V závislosti na využití je vhodné ji zapsat v upraveném tvaru. V dynamice plynů se nejčastěji používá tvar

$$\frac{p}{\rho} = rT, \quad (2.3)$$

kde $r = R/M$, $R = 8314,41$ J · kmol⁻¹ · K.

Konstanta R je univerzální, kilomolová hmotnost M je vlastností daného plynu – představuje hmotnost jednotky látkového množství (1 kmol) tohoto plynu. Pro směs k plynů o známém složení získáme její průměrnou kilomolovou hmotnost jako

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^k \chi_i M_i, \quad (2.4)$$

přímo najevo, proč je tato hypotéza nesprávná. Nicméně nemusíme se ani zaobírat současnou částicovou fyzikou, abychom zjistili, že obecně platná není – koneckonců i model ideálního plynu, který má empirické základy, byl již v 19. století spojen s představou velkého množství malých částic, které do sebe narážejí, a tak si předávají kinetickou energii. Rovnice 2.1 tedy neplatí, protože pokud ΔV zmenšíme na objem, ve kterém se právě nenachází žádná částice plynu, zaznamenáme $\rho = 0$, a jakmile do něj částice vstoupí, zaznamenáme skokovou změnu, což je chování neslučitelné se standardní představou hustoty látky. Pokud ovšem uvažujeme dostatečně velké množství částic, můžeme tuto nepřesnost zanedbat.

²Poslední dvě podmínky nejsou uváděny vždy, jsou součástí pouze tzv. striktní definice. V rámci této práce bude do definice ideálního plynu zahrnuto všech 5 podmínek.

kde kilomolový zlomek χ_i je podíl látkového množství složky vůči látkovému množství celku:

$$\chi_i = \frac{n_i}{\sum_{j=1}^k n_j} \quad (2.5)$$

Druhá a třetí definiční podmínka ideálního plynu stanovují, že c_v je závislé pouze na teplotě a že tato závislost je lineární. Spojením těchto dvou podmínek vzniká kalorická stavová rovnice ideálního plynu, uváděná často v diferenciálním tvaru

$$du = c_v dT. \quad (2.6)$$

stavová rovnice
kalorická

Zvolme libovolnou částici plynu a sledujme její pohyb a vývoj stavových veličin v čase. Při tomto (tzv. *lagrangeovském* [6]) popisu plynu můžeme částici považovat za uzavřenou termodynamickou soustavu, protože neuvažujeme tok hmoty přes hranici této soustavy. Můžeme na ni proto aplikovat první hlavní větu termodynamickou pro uzavřené soustavy [12]

$$de = \delta q - \delta w. \quad (2.7)$$

1. hlavní věta
termodynamická
celková energie

Uvažujme po zbytek této podkapitoly, že změna kinetické a potenciální energie je zanedbatelná. Pak platí $de = du$ a můžeme z 2.6 přímo dosadit do 2.7.

Okolí plynu může vykonat práci na jeho kompresi, nebo naopak plyn může konat práci na okolí při expanzi. Tuto tzv. objemovou práci vyjádříme jako $\delta w = p dv$ a dosadíme společně s 2.6 do rovnice 2.7:

$$c_v dT = \delta q - p dv \quad (2.8)$$

$$\delta q = c_v dT + p dv \quad (2.9)$$

Zavedeme-li entalpii $h = u + pv$, pak $dh = du + d(pv)$, tedy po úpravě a dosazení z 2.6

$$dh = c_v dT + p dv + v dp. \quad (2.10)$$

Srovnáme-li nyní rovnice 2.9 a 2.10, je zřejmé, že $\delta q = dh$ právě tehdy, když $dp = 0$. Tepelná kapacita při konstantním tlaku c_p je tedy z definice $\delta q = c_p dT = dh$. Diferenciál dh můžeme upravit také pomocí stavové rovnice 2.3, neboť $d(pv) = d(p/\rho) = r dT$.

Důsledkem je, že c_p je také konstantní a platí tzv. Mayerův vztah (2.12):

Mayerův vztah

$$dh = c_p dT = du + d(pv) = c_v dT + r dT \quad (2.11)$$

$$c_p = c_v + r \quad (2.12)$$

Budeme-li opět uvažovat směs k plynů o známém složení, pak \bar{c}_p, \bar{c}_v této směsi získáme pomocí hmotnostních zlomků jednotlivých složek:

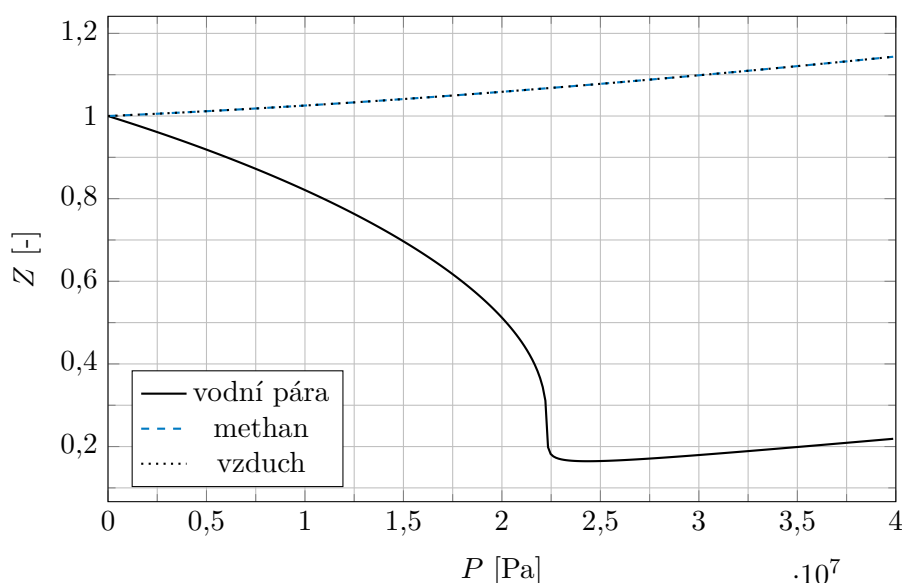
$$\begin{aligned} \bar{c}_p &= \sum_{i=1}^k \sigma_i c_{p_i} \\ \bar{c}_v &= \sum_{i=1}^k \sigma_i c_{v_i} \\ \sigma_i &= \frac{m_i}{\sum_{j=1}^k m_j} \end{aligned} \quad (2.13)$$

kompresibilitní faktor

Přesnost modelu ideálního plynu silně závisí na stavu plynu. Zjednodušeně lze říci, že chování reálných plynů se blíží ideálnímu plynu při velmi nízkých tlacích. Abychom mohli kvantitativně srovnat chování reálného plynu s předpokladem podle modelu reálného plynu, zavedeme tzv. kompresibilitní faktor [12, 13]

$$Z = \frac{pv}{rT} = \frac{p}{\rho rT}. \quad (2.14)$$

Srovnáme-li rovnice 2.14 a 2.3, zjistíme, že pro ideální plyn je vždy $Z = 1$. Čím více se tedy Z reálného plynu za daných podmínek liší od 1, tím méně adekvátní je použít model ideálního plynu za těchto podmínek.



Obrázek 2.1: Závislost kompresibilitního faktoru Z na tlaku při teplotě $T = 648$ K (zdroj dat: [3])

Na obrázku 2.1 jsou vyznačeny hodnoty Z při fixní teplotě a v daném rozmezí tlaků, a to pro tři různé plyny. Methan a vzduch vykazují při této teplotě prakticky stejné chování, u vodní páry klesá Z do velmi nízkých hodnot. Zatímco kritická teplota vody je téměř rovna zvolené teplotě na obr. 2.1, kritická teplota methanu a vzduchu je několikanásobně menší. Z lze pro libovolný plyn určit pomocí jeho kritického stavu a obecně platné závislosti stavových veličin na jejich kritických hodnotách, a to s chybou kolem 5 %³.

2.3 Adiabatické děje

Z hlediska termodynamiky provádíme před vlastním řešením proudění ještě dva zjednodušující předpoklady.

Prvním z nich je, že můžeme zanedbat přenos tepla mezi proudícím plynem a okolím, tj. jedná se o adiabatický děj ($\delta q = 0$). Z rovnice 2.9 pak můžeme

³Jedná se o tzv. teorem korespondujících stavů [13], objevený J. D. van der Waalsem[8].

vyjádřit diferenciál teploty jako

$$dT = -\frac{p \, dv}{c_v}. \quad (2.15)$$

Ze stavové rovnice 2.3 a Mayerova vztahu 2.12 lze tentýž diferenciál určit jako

$$dT = d\left(\frac{p}{r\rho}\right) = \frac{1}{r}d(pv) = \frac{1}{c_p - c_v}d(pv). \quad (2.16)$$

Rovnici 2.15 jsme získali za předpokladu adiabatické změny, rovnice 2.16 vznikla úpravou stavové rovnice a platí tedy pro jakýkoli děj ideálního plynu. Položíme-li tedy do rovnosti pravé strany obou rovnic, musíme získat závislost platnou pro adiabatické změny v ideálním plynu:

$$\begin{aligned} -\frac{p \, dv}{c_v} &= \frac{1}{c_p - c_v}d(pv) \\ -\frac{p \, dv}{c_v} &= \frac{1}{c_p - c_v}(v \, dp + p \, dv) \\ -\frac{c_p \, dv}{c_v \, v} &= \frac{dp}{p} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Zavedme $\kappa = c_p/c_v$ a zintegrujme rovnici mezi libovolnými dvěma stavy, které označíme 1 a 2:

$$\begin{aligned} -\kappa \int_1^2 \frac{dv}{v} &= \int_1^2 \frac{dp}{p} \\ \kappa(\ln v_1 - \ln v_2) &= (\ln p_2 - \ln p_1) \\ p_1 v_1^\kappa &= p_2 v_2^\kappa \end{aligned} \quad (2.18)$$

Získanou rovnici můžeme zapsat také jako

adiabatický exponent

$$pv^\kappa = \text{konst.}, \quad (2.19)$$

jedná se o základní rovnici popisující změnu stavu ideálního plynu při adiabatických dějích. Pomocí této rovnice je možné získat další vztahy umožňující podrobný analytický popis těchto dějů. Tyto vztahy lze najít v literatuře, např. [1, 2], vzhledem k zaměření této práce na numerické řešení jim zde nebude věnován prostor. Podstatný v tomto vztahu je adiabatický exponent κ , zvaný též Poissonova konstanta, který lze poměrně přesně odhadnout na základě tvaru molekuly plynu. Známe-li κ a r plynu, můžeme snadno z definice κ a Mayerova vztahu 2.12 získat měrné tepelné kapacity c_v, c_p jako

měrná tepelná kapacita

$$c_v = \frac{r}{\kappa - 1}, \quad (2.20)$$

$$c_p = \frac{\kappa \cdot r}{\kappa - 1}. \quad (2.21)$$

Druhým předpokladem je, že se jedná o vratný neboli bezztrátový děj. Druhá hlavní věta termodynamická definuje entropii s jako veličinu, která určuje proveditelnost daného děje:

2. hlavní věta
termodynamická
entropie

$$ds = \frac{\delta q}{T} + \delta s_{\text{prod}} \quad (2.22)$$

Pro proveditelný děj je $ds_{\text{prod}} \geq 0$, pro vratný děj $ds_{\text{prod}} = 0$. Pro adiabatický děj bude $\delta q = 0$, a tedy $ds = ds_{\text{prod}}$. Pokud tedy platí oba předpoklady, bude $ds = 0$, tj. jedná se o izoentropický děj. Většinou tedy budeme uvažovat, že během proudění se nemění entropie plynu.

Za předpokladu vratného děje ideálního plynu můžeme z rovnice 2.22 dosadit do 2.9 a dále upravit pomocí 2.3:

$$T ds = c_v dT + p dv \quad (2.23)$$

$$ds = c_v \frac{dT}{T} + \frac{p dv}{T} \quad (2.24)$$

$$ds = c_v \frac{dT}{T} + r \frac{dv}{v} \quad (2.25)$$

Tentýž vztah můžeme také vyjádřit pomocí definic h a c_p uvedených
změna entropie v podkapitole 2.2:

$$T ds = (c_v dT + p dv + v dp) - v dp \quad (2.26)$$

$$T ds = c_p dT - v dp \quad (2.27)$$

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - \frac{v dp}{T} \quad (2.28)$$

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - r \frac{dp}{p} \quad (2.29)$$

Rovnice 2.23 a 2.27 tvoří základ pro určování změny entropie během libovolného děje, rovnice 2.25 a 2.29 pak poskytují tvary stejných dvou vztahů pro ideální plyn, které můžeme přímo integrovat mezi dvěma stavy.

Ačkoli zde byly tyto rovnice odvozeny pouze pro vratný děj při zanedbatelné změně kinetické a potenciální energie, lze je použít i pro nevratné děje a pohyb plynů [12]. Jejich obecnou platnost lze dokázat na základě definiční podmínky ideálního plynu $U = U(T)$ [8].

Proudění budeme většinou pokládat za izoentropické. Výjimkou je rázová vlna, na níž dochází k velkým skokovým změnám všech veličin, a v důsledku toho je produkována entropie. Naopak zvukové vlny jsou dostatečně slabé, abychom je mohli pokládat za izoentropické a skokové změny na nich považovat
rychlost zvuku za elementární. Takto slabé vlny se šíří rychlostí

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}, \quad (2.30)$$

tj. rychlostí zvuku, která je důležitým parametrem stlačitelného proudění, o němž bude dále pojednáno v kapitole 4. Rázová vlna se může šířit rychleji než zvuk [2].

2.4 Dynamický popis plynu

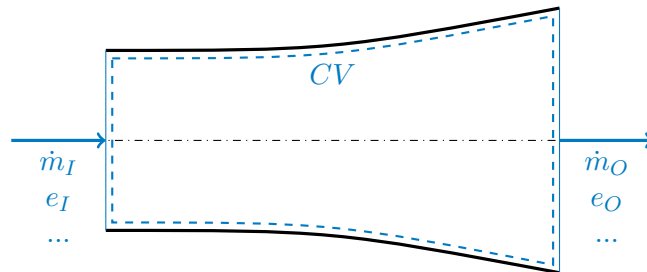
Vraťme se nyní k 1. hlavní větě termodynamické pro otevřenou soustavu 2.7, zapišme ji v extenzitní podobě a zderivujme podle času:

$$dE = \delta Q - \delta W \quad (2.31)$$

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \dot{W} \quad (2.32)$$

Touto rovnicí můžeme popsat okamžitou bilanci energie uzavřené soustavy. Zvolme nyní úsek dýzy mezi libovolnými dvěma jejími průřezy a zkoumejme kontrolní objem CV ohraničený zvolenými průřezy a stěnou dýzy, jak je načrtnuto na obrázku 2.2.

1. hlavní věta
termodynamická



Obrázek 2.2: Kontrolní objem v dýze

Tento kontrolní objem je otevřenou soustavou. Rovnice 2.32 nepostačuje k popisu jeho okamžité změny energie, protože s hmotnostním tokem \dot{m}_O opouštějícím soustavu je spojena ztráta energie $\dot{m}_O \cdot e_O$ a stejným způsobem soustava získává energii z přitékající hmoty. Zahrňme nyní tento způsob přenosu energie do bilance soustavy:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \dot{W} + \dot{m}_I e_I - \dot{m}_O e_O \quad (2.33)$$

Dosud jsme uvažovali, že $\delta e = \delta u$, tj. zanedbávali jsme změnu potenciální a kinetické energie plynu. Změna potenciální energie se běžně zanedbává i v dynamice plynů – hraje roli jen ve speciálních případech, kdy plyn překonává velké výškové rozdíly. Je však zřejmé, že kinetickou složku energie v případě transsonického proudění ignorovat nesmíme, protože rychlost plynu, a tedy i jeho kinetická energie, je poměrně velká. Proto celkovou energii plynu na hranicích kontrolního objemu vyjádříme jako

celková energie
kinetická energie

$$\begin{aligned} e_I &= u_I + \frac{c_I^2}{2}, \\ e_O &= u_O + \frac{c_O^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Rovnice 2.33 ovšem stále není kompletní, protože v překročení hranice soustavy plynu brání tlaková síla odpovídající místnímu statickému tlaku.

Plyn musí vykonat práci, aby tuto sílu překonal, přičemž vyvíjí výkon

$$\begin{aligned}\dot{W}_I &= F_I \cdot c_I = p_I A_I c_I, \\ \dot{W}_O &= F_O \cdot c_O = p_O A_O c_O.\end{aligned}\quad (2.35)$$

Pro hmotnostní tok dýzou platí známý vzorec

$$Ac\rho = \dot{m}, \quad (2.36)$$

který upravíme tak, abychom pomocí něj mohli přeformulovat vyjádření výkonu 2.35:

$$Ac = \frac{\dot{m}}{\rho} = \dot{m}v \quad (2.37)$$

Po dosazení je tedy

$$\begin{aligned}\dot{W}_I &= \dot{m}_I p_I v_I, \\ \dot{W}_O &= \dot{m}_O p_O v_O.\end{aligned}\quad (2.38)$$

Výkon spojený s překonáváním sil na hranici soustavy musíme přidat do bilance 2.33. Po vytknutí \dot{m} tak získáváme rovnici

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \dot{W} + \dot{m}_I \left(u_I + p_I v_I + \frac{c_I^2}{2} \right) - \dot{m}_O \left(u_O + p_O v_O + \frac{c_O^2}{2} \right), \quad (2.39)$$

která již je korektním vyjádřením 1. hlavní věty termodynamické pro otevřenou soustavu z obrázku 2.2 [12].

Aplikujme nyní rovnici 2.39 na problematiku proudění v dýze tak, jak jsme ji doposud popsali. Jak již bylo zmíněno v podkapitole 2.3, považujeme proudění za adiabatické – předpokládáme, že rychlost plynu protékajícího dýzou je tak velká, že si plyn nestíhá předávat teplo se stěnami dýzy. Proto tepelný tok $\dot{Q} = 0$. Dále v dýze nejsou umístěny jakékoliv pohyblivé části, které by mohly konat nebo přijímat práci, tudíž i $\dot{W} = 0$. V rovnici 2.39 si také můžeme všimnout, že součet $u + pv$ je roven entalpii h . Po všech těchto úpravách získáme rovnost platnou pro stavy na krajích kontrolního objemu

$$h_I + \frac{c_I^2}{2} = h_O + \frac{c_O^2}{2}. \quad (2.40)$$

Kontrolní objem jsme zvolili zcela nahodile, rovnost tudíž musí platit pro klidová entalpie jakékoliv dva průřezy. Zapišeme ji tedy jako

$$h + \frac{c^2}{2} = h_t = \text{konst.}, \quad (2.41)$$

tj. při adiabatickém proudění se zachovává klidová entalpie h_t , která odpovídá stavu, kdy se veškerá kinetická energie plynu přemění na vnitřní energii. Zdůrazněme, že zachovávání klidové entalpie nevyhází z 2. hlavní věty termodynamické 2.22, a není proto ovlivněno změnami entropie. Z toho plyne, že v celé simulované dýze musí být h_t konstantní.

Vraťme se ještě k e pohybujícího se plynu – rovnice 2.34. V následujících kapitolách budeme potřebovat způsob, jak změny této energie popsat v závislosti na stavových veličinách plynu. Můžeme začít tím, že z rovnice 2.3 vyvodíme, že $u = c_v \cdot T$. Pomocí tohoto vztahu nemůžeme určit absolutní hodnotu u , protože předpokládáme konstantní c_v až k nulové termodynamické teplotě, k popisu změny u mezi dvěma stavy ideálního plynu nicméně postačí. Již použitý vztah 2.16 nám umožní nahradit teplotu tlakem:

$$u = c_v \cdot T = \frac{c_v}{c_p - c_v} \cdot \frac{p}{\rho} = \frac{p}{(\kappa - 1)\rho} \quad (2.42)$$

Po dosazení do 2.34 je tedy

$$e = u + \frac{c^2}{2} = \frac{p}{(\kappa - 1)\rho} + \frac{c^2}{2}. \quad (2.43)$$

Tato rovnice se často zapisuje v extenzitní podobě [11]

$$E = \rho e = \frac{p}{\kappa - 1} + \frac{\rho}{2} u^2 \quad (2.44)$$

stavová rovnice
dynamická

a je v dynamice plynů rozšířena jakožto stavová rovnice ideálního plynu se zahrnutím vlivu kinetické energie.

2.5 Kvazi-1D proudění

Proudění v dýze v této práci popisováno pomocí jediné prostorové souřadnice. Zároveň však nejde o 1D proudění, neboť při něm bychom museli předpokládat, že průřez dýzy se nemění ($A = \text{konst.}$). Přístup, kdy umožníme změnu průřezu dýzy a zahrneme ji do modifikovaných 1D rovnic, nazýváme kvazi-1D popisem proudění [2].

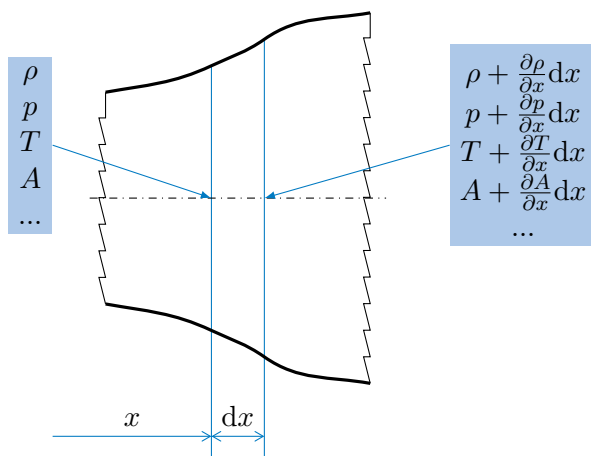
Stavové veličiny plynu nejsme při kvazi-1D přístupu schopni určit pro libovolné místo v dýze, jsme omezeni na průměrnou hodnotu v průřezu specifikovaném délkovou souřadnicí dýzy. Při popisu průběhů veličin plynu v dýze v dalších kapitolách je proto dobré mít na paměti, že se jedná o takto zprůměrované hodnoty. Kvazi-1D elementem dýzy je pak jakýsi nekonečně krátký úsek mezi dvěma takto určenými průřezy, jak je znázorněno na obrázku 2.3.

Většinu veličin budeme považovat za funkce souřadnice x a času t – například $\rho(x, t), p(x, t)$. Tyto veličiny pak můžeme diferencovat jako

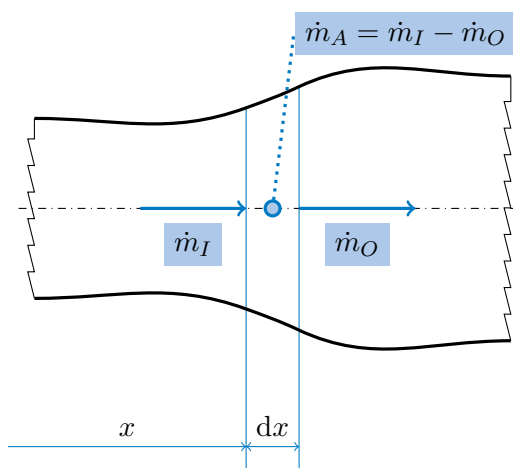
$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt. \quad (2.45)$$

Speciálně pro A bude $\partial A / \partial t = 0$ – předpokládáme, že tvar trysky se s časem nemění, a tedy $dA/dx = \partial A / \partial x$.

Pro dýzy poskytuje 1D popis dobrou aproximaci průběhů hodnot veličin podél dýzy, nezískáme z něj však informace o tom, jak správně navrhnout tvar dýzy. Ten lze určit např. pomocí metody charakteristik [2].



Obrázek 2.3: Kvazi-1D element dýzy



Obrázek 2.4: Zákon zachování hmoty v kvazi-1D elementu

Pomocí tohoto principu lze získat speciální tvary parciálních diferenciálních rovnic vyjadřujících zákony zachování, které budeme používat v další kapitole. Odvoďme jako příklad nejjednodušší z nich, a to zákon zachování hmoty.

Uvažujme proudění protékající kvazi-1D elementem podle obrázku 2.4. Proudění považujeme za nestacionární, tj. umožňujeme akumulaci hmoty v elementu vyjádřenou hmotnostním tokem \dot{m}_A . Hmotnost tekutiny uvnitř elementu m_A lze vyjádřit jako

$$m_A = \rho A \, dx. \quad (2.46)$$

Vzhledem k tomu, že jsme vyloučili, že by se tvar trysky měnil v čase, je na pravé straně rovnice 2.46 funkcí času pouze ρ . Rovnici tedy můžeme zderivovat do tvaru

$$\frac{dm_A}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} A \, dx. \quad (2.47)$$

Hodnotu A konstantní vůči času můžeme zahrnout do derivace a získat

následující vyjádření akumulace \dot{m}_A :

$$\dot{m}_A = \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} dx \quad (2.48)$$

Zaměříme se nyní na toky na hranicích elementu. Hmotnostní tok v kvazi-1D proudění můžeme obecně popsat vztahem

$$\dot{m} = \rho A c. \quad (2.49)$$

Vydeme-li z tohoto vztahu a obrázku 2.3, musí platit

$$\dot{m}_O - \dot{m}_I = \frac{\partial}{\partial x}(\rho A c) dx. \quad (2.50)$$

Tentokrát se s délkovou souřadnicí x mění všechny veličiny na pravé straně, takže parciální derivaci součinu nijak zjednodušit nemůžeme. Můžeme ale dosadit do podmínky zachování hmoty vepsané do obrázku 2.4:

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} dx = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho A c) dx \quad (2.51)$$

Hodnota dx je nekonečně malá, ale nenulová, takže jí můžeme rovnici vydělit a získáme parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho A c) = 0, \quad (2.52)$$

což je první rovnice v soustavě 3.1 z další kapitoly, která pro nás bude základem pro popis proudění. Zbylé dvě rovnice, které jsou součástí této soustavy, by bylo možné odvodit podobným způsobem ze silové rovnováhy elementu, resp. z energetické bilance podobné postupu z podkapitoly 2.4. V silové rovnováze by bylo třeba zanedbat třecí síly na stěny dýzy, neboť viskozitu tekutiny zanedbáváme. Odvození parciálních diferenciálních rovnic pro konkrétní případ proudění se nicméně častěji provádí zjednodušením obecně platných rovnic, viz např. [4].

Kapitola 3

Numerické metody řešení proudění

Abychom mohli numericky řešit proudění tekutin, musíme tekutině přiřadit soustavu parciálních diferenciálních rovnic, které popisují, jak se v tekutině zachovává hmota, hybnost a energie. Za tímto účelem budeme používat kvazi-1D¹ Eulerovy rovnice.

Eulerovy rovnice

Tento speciální tvar Eulerových rovnic lze odvodit z jejich tvaru pro 2D případ za předpokladu osové symetrie dýzy, nebo také přímo ze zákonů zachování při zanedbání třecí síly a za použití principů popsaných v podkapitole 2.5.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(A\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(A\rho c) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(A\rho c) + \frac{\partial}{\partial x}(A(\rho c^2 + p)) &= p \cdot \frac{dA}{dx} \\ \frac{\partial}{\partial t}(A\rho e) + \frac{\partial}{\partial x}(Ac(\rho e + p)) &= 0\end{aligned}\tag{3.1}$$

V soustavě rovnic 3.1 vystupují nezávislé proměnné x, t a závislá proměnná A , jejíž hodnoty známe. Zbývají tedy 4 nezávislé proměnné ρ, c, p, e , které musíme určit. Aby soustava měla jednoznačné řešení, musíme k ní tedy přidat ještě jednu rovnici – jedná se zpravidla o stavovou rovnici tekutiny, v našem případě to bude rovnice 2.44.

V rámci této kapitoly bude pro stručnost zavedeno značení parciálních derivací obvyklé u parciálních diferenciálních rovnic, tj. například

$$\frac{\partial x}{\partial t} = x_t, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{u}_x, \quad \text{apod.}$$

3.1 Řešená úloha

Budeme numericky aproximovat počáteční úlohu

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_t + \mathbf{f}_x &= \mathbf{r}, \\ x &\in (x_1, x_n), \quad t \in (t_1, \infty), \\ \mathbf{u}(x, t_1) &= \mathbf{u}_0,\end{aligned}\tag{3.2}$$

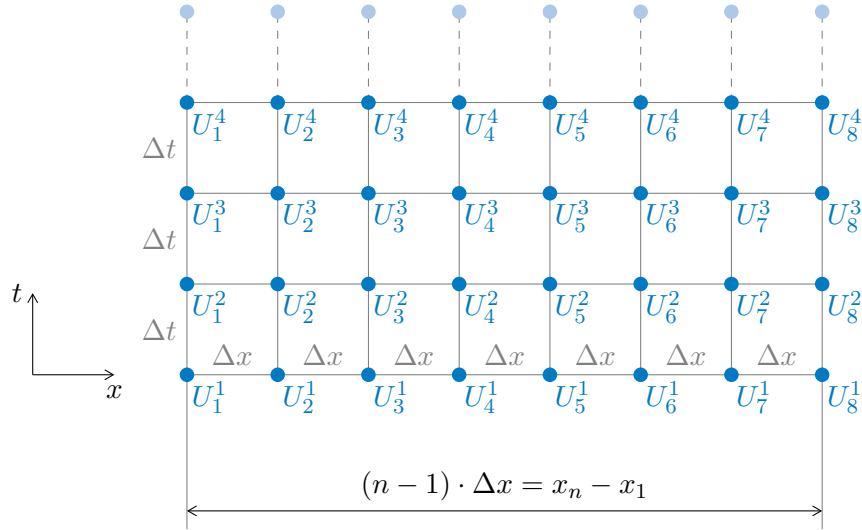
¹Konzervativní veličiny v Eulerových rovnicích jsou přenásobené lokálním průřezem, takže v podstatě nebilancujeme standardní hustotu ρ , ale délkovou hustotu ρA s jednotkou $[\rho A] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m}^2 = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$.

kde přesný tvar vektorů plyne z diferenciálního tvaru Eulerových rovnic 3.1:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} A\rho \\ A\rho c \\ A\rho e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} A\rho c \\ A(\rho c^2 + p) \\ Ac(\rho e + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ p \cdot A_x \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

3.2 Diskretizace a chyba diskretizace

Interval $x \in (x_1, x_n)$ specifikovaný v definici úlohy 3.2 popíšeme pomocí n bodů a zvolíme časový krok Δt . Vznikne tak síť bodů vyznačená na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Síť numerické metody

Tyto rovnice budeme přibližně řešit numerickou metodou v diskrétních bodech sítě. Jak bude dále rozvedeno, tyto body můžeme interpretovat jako hodnoty řešení v konkrétních průřezech dýzy, nebo jako průměry přes objemy o délce Δx . Kroky $\Delta x, \Delta t$ budeme považovat za konstantní². Jak bude dále rozvedeno, tyto body můžeme interpretovat jako hodnoty řešení v konkrétních průřezech dýzy, nebo jako průměry přes objemy o délce Δx . Diskrétní aproximace budeme značit velkými písmeny, např. $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{U}$, $\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{F}$. Globální chybu diskretizace \mathbf{E} [10] v daném bodě sítě pak určíme jako

$$\mathbf{E}_i^j = \mathbf{u}(x_i, t_j) - \mathbf{U}_i^j. \quad (3.4)$$

Numerické metody jsou zpravidla založené na tom, že po určitém časovém intervalu Δt opětovně aplikujeme na vstupní data nějakou funkci $\mathcal{F}_{\Delta t}(\mathbf{u})$, která simuluje vývoj soustavy rovnic v čase. V ideálním případě by tedy mělo platit, že

$$\mathbf{u}(x_i, t_{j+1}) = \mathcal{F}_{\Delta t}(\mathbf{u}(x_i, t_j)), \quad (3.5)$$

²Tedy např. $x_i = x_1 + \Delta x \cdot (i - 1)$, $t_j = t_1 + \Delta t \cdot (j - 1)$. V případě Δt se jedná o zjednodušení, časový krok budeme přepočítávat tak, aby byla zachována podmínka CFL, viz rovnice 3.29. U Δx budeme skutečně volit konstantní hodnotu.

což samozřejmě reálně nikdy splněno není. Definujeme proto ještě lokální chybu diskretizace \mathbf{D} [10], která představuje chybu způsobenou jedním krokem numerické metody:

lokální chyba

$$\mathbf{D}_i^j = \frac{\mathbf{u}(x_i, t_{j+1}) - \mathcal{F}_{\Delta t}(\mathbf{u}(x_i, t_j))}{\Delta t} \quad (3.6)$$

V následujících podkapitolách budeme předpokládat, že řešení je dostatečně hladkou funkcí nezávislých proměnných x, t , jejíž derivace budeme nahrazovat diferencemi. Chování chyby nahrazení popíšeme symbolicky jako $\mathbf{D} = \mathcal{O}(f(\Delta x, \Delta t))$, tzn. lokální chyba \mathbf{D} se chová stejně jako $f(\Delta x, \Delta t)$ až na konstantu. Vzhledem k tomu, že nás zajímá chování při zjemňování sítě, se budeme soustředit na chování při zmenšování hodnot $\Delta x, \Delta t$. Proto definujeme $\mathcal{O}(f)$ následovně [10]:

Jestliže pro funkci $f(z)$ existuje $\xi > 0$ a $K > 0$ takové, že

$$\forall z : (|z| < \xi) \rightarrow (g(z) < K \cdot |f(z)|), \quad (3.7)$$

pak $g(z) = \mathcal{O}(f(z))$. Numerickou metodu s $\mathbf{D} = \mathcal{O}(x^p)$ nazýváme metodou p -tého řádu přesnosti [10].

řád přesnosti

V podkapitolách 3.4 a 3.5 budeme předpokládat, že řešení je dostatečně hladkou funkcí nezávislých proměnných x, t . Díky tomu můžeme parciální derivace aproximovat pomocí Taylorova rozvoje. Z Taylorova polynomu lze při zanedbání členů vyšších řádů odvodit různá diferenční schémata, na kterých se pak zakládají různé metody.

Připomeňme obecný tvar Taylorova polynomu funkce jedné proměnné $g(x)$ se středem v x_0 [14]

Taylorův polynom

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!} g^{(k)}(x_0), \quad (3.8)$$

kde $g^{(k)}$ značí k -tou derivaci g podle x a speciálně $g^{(0)}(x_0) = g(x_0)$. Analogicky můžeme provést Taylorův rozvoj i pro funkci více proměnných podle libovolné parciální derivace.

Pro úplnost uvedme ještě odvození konkrétních diferencí použitých ve zbytku této kapitoly. Nahrazovat budeme parciální derivace z rovnice 3.2, tedy \mathbf{u}_t a \mathbf{f}_x . Hodnotu \mathbf{u} v bodě (x_i, t_{j+1}) můžeme nahradit Taylorovým polynomem se středem v bodě (x_i, t_j) . Po zanedbání členů druhého a vyššího řádu získáme tvar

$$\mathbf{u}(x_i, t_{j+1}) = \mathbf{u}(x_i, t_j) + \Delta t \cdot \mathbf{u}_t(x_i, t_j) + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (3.9)$$

Po jednoduché úpravě tedy

$$\mathbf{u}_t(x_i, t_j) = \frac{\mathbf{u}(x_i, t_{j+1}) - \mathbf{u}(x_i, t_j)}{\Delta t} + \frac{\mathcal{O}(\Delta t^2)}{\Delta t}, \quad (3.10)$$

kde z definice 3.7 platí, že $\mathcal{O}(\Delta t^2)/\Delta t = \mathcal{O}(\Delta t)$. Nahrazením přesné hodnoty \mathbf{u} přibližnou hodnotou \mathbf{U} získáme vzorec pro dopřednou diferenci

dopředná diference

$$\mathbf{u}_t(x_i, t_j) = \frac{\mathbf{U}_i^{j+1} - \mathbf{U}_i^j}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t), \quad (3.11)$$

který je tedy 1. řádu přesnosti.

Pro diskretizaci $\mathbf{f}_x(x, t)$ použijeme rozdíl Taylorových rozvoju pro dvě sousední hodnoty tohoto bodu:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x_{i+1}, t_j) &= \mathbf{f}(x_i, t_j) + \Delta x \cdot \mathbf{f}_x(x_i, t_j) + \frac{\Delta x^2}{2} \mathbf{f}_{xx}(x_i, t_j) + \mathcal{O}(\Delta x^3) \\ \mathbf{f}(x_{i-1}, t_j) &= \mathbf{f}(x_i, t_j) - \Delta x \cdot \mathbf{f}_x(x_i, t_j) + \frac{(-\Delta x)^2}{2} \mathbf{f}_{xx}(x_i, t_j) + \mathcal{O}(\Delta x^3) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Symbol $\mathcal{O}(\Delta x^3)$ značí množinu funkcí s podobným chováním, rozdílem dvou takových funkcí proto obecně musí být opět $\mathcal{O}(\Delta x^3)$. Rozdílem je tedy rovnice

$$\mathbf{f}_x(x_i, t_j) = \frac{\mathbf{f}(x_{i+1}, t_j) - \mathbf{f}(x_{i-1}, t_j)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad (3.13)$$

centrální diference kterou již můžeme použít k diskretizaci parciální derivace:

$$\mathbf{f}_x(x_i, t_j) = \frac{\mathbf{F}_{i+1}^j - \mathbf{F}_{i-1}^j}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad (3.14)$$

Výsledkem je centrální schéma, které je zřejmě 2. řádu přesnosti.

3.3 Vlastnosti numerických metod

- konzistence

 - **Konzistence, aproximace:** Konzistence metody spočívá v tom, že jestliže $\Delta t \rightarrow 0$ a/nebo $\Delta x \rightarrow 0$, musí platit také $\|\mathbf{D}\| \rightarrow 0$. Konzistence metody se zpravidla ověřuje tak, že určíme řád přesnosti metody podle definice 3.7 [7]. Je-li řád metody větší nebo roven 1, metoda je konzistentní a říkáme také, že metoda aproximuje řešenou rovnici [10].
- stabilita

 - **Stabilita:** Metoda nezvětšuje již existující chyby ve vstupních datech. Pro iterační metody to znamená také, že metoda nediverguje [7]. Můžeme dále rozlišit podmíněnost metody, tzn. její citlivost vůči vstupním datům, a numerickou stabilitu, která představuje citlivost vůči zaokrouhlovacím chybám vznikajícím během výpočtu [5]. Exaktně stabilitu definujeme tak, že v libovolném čase $T > 0$ musí pro všechna x v definičním intervalu existovat krok $k_0 > 0$ a chyba $C > 0$ taková, že $\|\mathbf{D}(x, T)\| \leq C$ [10]. Metoda může být nepodmíněně stabilní, ale její stabilita může také být podmíněna vlastnostmi použité sítě.
- konvergence

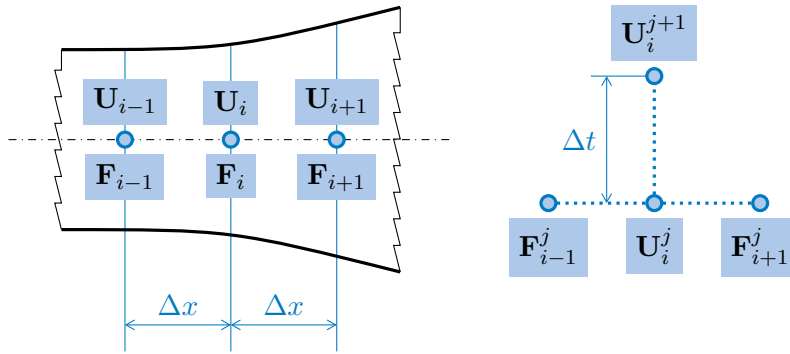
 - **Konvergence:** Metoda musí konvergovat k řešení diferenciální rovnice, kterou aproximuje. To můžeme vyjádřit pomocí globální chyby \mathbf{E} : jestliže $\Delta t \rightarrow 0$, musí $\|\mathbf{E}\| \rightarrow 0$ [10]. Konvergenci je ve většině složitějších případů těžké dokázat, neboť přesné řešení neznáme, a proto nemůžeme určit \mathbf{E} . Pro lineární rovnice konvergence plyne z aproximace a stability [10].

- **Přesnost a realizovatelnost:** Metoda musí respektovat základní zákony zachování, aproximace nesmí obsahovat fyzikálně nesmyslné hodnoty a výsledky s dostatečnou přesností musí být dosažitelné v proveditelném čase [7].

3.4 Metoda konečných diferencí

Bez další znalosti fungování soustavy rovnic 3.2 pro ni můžeme nyní vytvořit numerickou metodu. Jak ovšem vyjde najevo v podkapitole 3.6, některé dosud předpokládané vlastnosti řešení nemůžeme garantovat.

metoda konečných diferencí



Obrázek 3.2: Tři sousední body v dýze pro kvazi-1D metodu konečných diferencí. Schéma pro Laxovu-Friedrichsovu metodu

Vytvořme tedy rovnoměrnou síť viz obrázky 3.1 a 3.2 a na soustavu rovnic 3.2 použijme vzorce 3.11 a 3.14:

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\Delta t} + \frac{F_{i+1}^j - F_{i-1}^j}{2\Delta x} = R_i^j + \mathcal{O}(\Delta x^2 + \Delta t) \quad (3.15)$$

$$U_i^{j+1} = U_i^j + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F_{i-1}^j - F_{i+1}^j) + \Delta t \cdot R_i^j + \mathcal{O}(\Delta x^2 + \Delta t) \quad (3.16)$$

Schéma 3.16 se běžně používá např. pro řešení rovnice vedení tepla [11], pro Eulerovy rovnice ale není stabilní, což lze ukázat např. pomocí spektrálního kritéria, viz [9]. Můžeme jej dále upravit tak, že U_i^j nahradíme průměrem sousedních hodnot:

$$U_i^j = \frac{U_{i-1}^j + U_{i+1}^j}{2} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (3.17)$$

$$U_i^{j+1} = \frac{U_{i-1}^j + U_{i+1}^j}{2} + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F_{i-1}^j - F_{i+1}^j) + \Delta t \cdot R_i^j + \mathcal{O}(\Delta x + \Delta t) \quad (3.18)$$

Rovnice 3.18 popisuje Laxovo-Friedrichsovo schéma. Toto schéma neřeší přímo rovnice 3.2, přidává do nich umělou vazkost, která jej stabilizuje. Na podobném principu jsou postavena i další schémata, přičemž intenzita umělé

Laxovo-Friedrichsovo schéma umělá vazkost

vazkosti se u nich liší. Tato příbuzná schémata lze zobecnit do tvaru

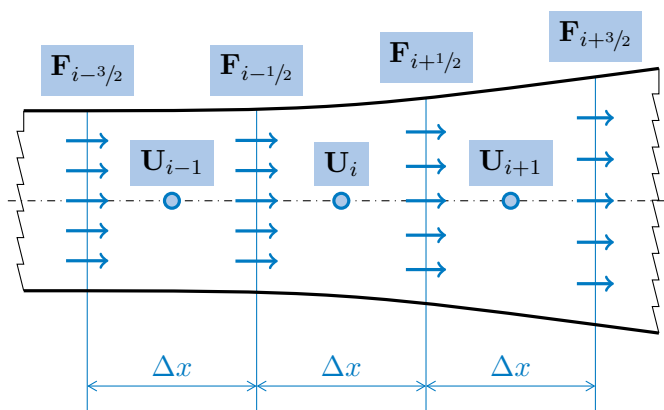
$$\mathbf{U}_i^{j+1} = \mathbf{U}_i^j + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\mathbf{F}_{i-1}^j - \mathbf{F}_{i+1}^j) + \Delta t \cdot \mathbf{R}_i^j + \frac{\varepsilon}{2} (\mathbf{U}_{i-1}^j - 2\mathbf{U}_i^j + \mathbf{U}_{i+1}^j) + \mathcal{O}(\Delta x + \Delta t), \quad (3.19)$$

kde $\varepsilon \in (0, 1)$, pro Laxovo-Friedrichsovo schéma $\varepsilon = 1$. Toto schéma bude pro různé hodnoty ε realizováno a prezentováno ve výsledkové části. Vzhledem k tomu, že umělá vazkost není součástí původní soustavy rovnic, je rozumné předpokládat, že abychom dosáhli nejlepší přesnosti, mělo by ε být co nejmenší. Tato hypotéza bude experimentálně ověřena.

3.5 Metoda konečných objemů

metoda konečných objemů

K diskretizaci v podkapitole 3.2 můžeme přistupovat také tak, že hodnoty v bodech sítě pro nás budou reprezentovat průměr v nějakém objemu poblíž jednotlivých bodů. Diferenciální rovnice pak převedeme na integrální tvar, což nám umožní i rozšířit množinu funkcí, které mohou být řešením soustavy (jedná se o tzv. slabá řešení). Využijeme toho, že rovnice máme vyjádřené v diferenciální podobě v soustavě rovnic 3.2 a zintegrujeme podle x přes i -tý objem – viz např. [11].



Obrázek 3.3: Tři sousední objemy v dýze pro kvazi-1D metodu konečných objemů

$$\int_{V_i} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dx + \int_{V_i} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} dx = \int_{V_i} \mathbf{r} dx \quad (3.20)$$

$$\int_{V_i} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{r} \right) dx = \mathbf{f}_{i-1/2} - \mathbf{f}_{i+1/2}$$

Parciální derivaci \mathbf{u} podle času nahradíme obdobně jako v podkapitole 3.4. Za toky dovnitř a ven z objemu zatím dosadíme jejich aproximované hodnoty. Jedinou informací, kterou máme o průběhu \mathbf{u} a \mathbf{r} uvnitř objemu, je

aproximace jejich průměru uprostřed objemu. Nezbývá nám tedy než tuto aproximaci přenásobit délkou objemu Δx .

$$\left(\frac{\mathbf{U}_i^{j+1} - \mathbf{U}_i^j}{\Delta t} - \mathbf{R} \right) \Delta x = \mathbf{F}_{i-1/2} - \mathbf{F}_{i+1/2} \quad (3.21)$$

Abychom nemuseli zavádět zvláštní síť pro toky konzervativních veličin, vyjádříme je jako průměry jejich hodnot v sousedních objemech. Pak můžeme pravou stranu rovnice 3.21 upravit jako

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i-1/2} - \mathbf{F}_{i+1/2} &= \frac{\mathbf{F}_{i-1} + \mathbf{F}_i}{2} - \frac{\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1}}{2} \\ \mathbf{F}_{i-1/2} - \mathbf{F}_{i+1/2} &= \frac{\mathbf{F}_{i-1} - \mathbf{F}_{i+1}}{2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Po této úpravě z rovnice 3.21 získáváme nestabilní schéma 3.16. Metoda konečných objemů je tedy v tomto případě pro kvazi-1D přístup ekvivalentní metodě konečných diferencí, i přesnost metod bude stejná – rozdíl mezi těmito dvěma přístupy vychází najevo až v 2D a 3D schématech.

Schémata podobného typu pro 1D metodu konečných objemů mají obecně tvar [11, 14]

$$\mathbf{U}_i^{j+1} = \mathbf{U}_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2}^j - \mathbf{F}_{i-1/2}^j) + \Delta t \cdot \mathbf{R}_i^j, \quad (3.23)$$

kde způsob výpočtu toků na hranicích objemů $\mathbf{F}_{i+1/2}^j, \mathbf{F}_{i-1/2}^j$ závisí na konkrétní metodě. Metoda konečných objemů je ve výpočtové dynamice tekutin častá, někdy se dokonce uvádí pouze algoritmus pro výpočet toků, které se dosazují do schématu 3.23. I metody s umělou vazkostí z rovnice 3.19 můžeme zapsat v tomto tvaru [11], definujeme-li tok přes hranici jako

umělá vazkost

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^j = \frac{\mathbf{F}_{i-1}^j + \mathbf{F}_i^j}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} (\mathbf{U}_i^j - \mathbf{U}_{i-1}^j). \quad (3.24)$$

3.6 Hyperbolický systém a nespojitosti

V soustavě parciálních diferenciálních rovnic 3.2 figurují kromě konzervativních veličin ještě jejich toky \mathbf{f}_x . Ty můžeme vyloučit a rovnici přepsat jako

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{J}_i(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x} = \mathbf{r}, \quad (3.25)$$

kde \mathbf{J} je jakobián toků:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial u_1 & \partial f_1 / \partial u_2 & \partial f_1 / \partial u_3 \\ \partial f_2 / \partial u_1 & \partial f_2 / \partial u_2 & \partial f_2 / \partial u_3 \\ \partial f_3 / \partial u_1 & \partial f_3 / \partial u_2 & \partial f_3 / \partial u_3 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Eulerovy rovnice tvoří hyperbolický systém – musí platit, že \mathbf{J} má reálná hyperbolický systém

vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a je diagonalizovatelný, tj. existuje matice \mathbf{K} taková, že

$$\mathbf{K}\mathbf{\Lambda}\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{J}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Toto lze dokázat např. pro ideální plyn, doplníme-li vektory plynoucí z formulace Eulerových rovnic 3.3 o stavovou rovnici ideálního plynu 2.44, viz např. [6, 11]. Vlastní čísla systému jsou pak

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= c - a, \\ \lambda_2 &= c, \\ \lambda_3 &= c + a. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Tato čísla představují rychlosti šíření informace prostorem, přičemž numerická metoda musí tyto rychlosti zachytit. To je v podstatě slovní popis tzv. CFL³ podmínky, která omezuje stabilitu numerických metod. Pro metody popsané rovnicí 3.23 lze tuto podmínku stanovit⁴ jako nerovnost [11]

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|) \leq 1. \quad (3.29)$$

U nelineárních hyperbolických systémů⁵ může i při hladké počáteční podmínce vzniknout v konečném čase nespojitě řešení [10]. Dosud jsme se přitom domnívali, že řešení je dostatečně hladké, abychom jej mohli nahradit Taylorovým polynomem. Vzhledem k tomu, že spojitost řešení nemůžeme garantovat, zdá se, že se jedná o nevhodný postup obzvláště pro modelování rázových vln, které jsou ukázkovým případem takovýchto nespojitostí.

Metody, které lépe respektují tyto vlastnosti hyperbolického systému, spojitost řešení nepředpokládají a zakládají se např. na řešení Riemannova problému. Riemannův problém ve své původní podobě zkoumá vývoj řešení z počáteční podmínky, která je konstantní až na jedinou nespojitost, přičemž je zkoumáno šíření vzruchů z této nespojitosti. Prostorem se začnou šířit vlny rychlostmi odpovídajícími vlastním číslům systému 3.29. Tomuto typu metod se podrobně věnuje kniha [14].

³Podle jmen autorů – Courant, Friedrichs, Lewy.

⁴Při výpočtu budeme hodnotu CFL podmínky omezovat ještě menšími hodnotami než 1. V programu lze maximální hodnotu CFL podmínky nastavit.

⁵Takovým systémem je i soustava rovnic 3.1, jak se můžeme snadno přesvědčit už podle toho, že v 3.3 vystupuje druhá mocnina neznámé c [11].

Kapitola 4

Lavalova dýza s rázovou vlnou

V této podkapitole budou uvedeny základní analyticky odvoditelné vlastnosti Lavalovy dýzy a také iterační proces založený na analytickém řešení izoentropického proudění, kterým lze řešit proudění v dýze. Bude také popsána realizace výpočtu.

4.1 Vlastnosti Lavalovy dýzy

Definujme Machovo číslo jako $Ma = c/a$. Z diferenciálního tvaru rovnice kontinuity pro stacionární izoentropické proudění lze odvodit vztah

$$\frac{dA}{A} = \frac{dc}{c}(Ma^2 - 1), \quad (4.1)$$

který nazýváme Hugoniotova věta [13]. Z 4.1 plyne, že

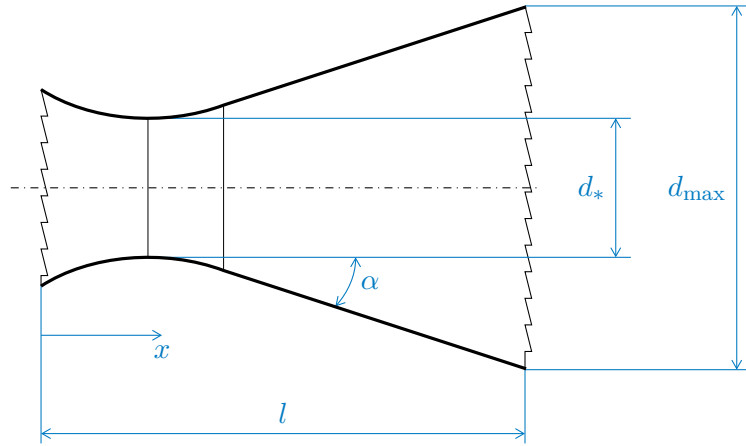
- jestliže $Ma < 1$, pak $(dA > 0) \iff (dc < 0)$,
- jestliže $Ma > 1$, pak $(dA > 0) \iff (dc > 0)$,
- jestliže $Ma = 1$, pak $dA = 0$.

Chceme-li tedy navrhnout dýzu, která zrychluje proudění z podzvukového na nadzvukové, musí mít nejprve zužující se část, která urychlí proudění na rychlost zvuku, a dále rozšiřující se část, která jej dále akceleruje do nadzvukových rychlostí. Zvolený tvar dýzy je načrtnut na obrázku 4.1.

V nejužším místě takto navržené dýzy nastane kritický stav, kdy $c = a = a_*$. Velikost kritické rychlosti a_* závisí pouze na podmínkách na vstupu trysky:

$$a_* = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} r T_0} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0}} \quad (4.2)$$

Podobně i jiné veličiny v kritickém stavu (p_* , T_* , ...) závisí pouze na klidovém stavu na vstupu a vlastnostech plynu. Proto při dosažení $Ma = 1$ v kritickém průřezu vznikne ustálený stav, kdy se již rychlost plynu ani průtok nezvětšuje. Tomuto stavu se někdy říká aerodynamické ucpání.



Obrázek 4.1: Skica geometrie modelové dýzy

4.2 Analytické řešení

Díky jednodimenzionálnímu vyjádření problému lze využít analytických vztahů, které lze odvodit přímo ze zákonů zachování a stavových rovnic ideálního plynu. Všechny tyto vztahy jsou přehledně uvedeny v dokumentu NACA Report 1135 [1], z nějž bude v této podkapitole čerpáno. Postup odvození je naznačen v kapitole 9 knihy [15].

Proudění v kterémkoliv místě průřezu lze za předpokladu izoentropického proudění popsat pomocí průřezu v daném místě, kritického průřezu a libovolného parametru. Pokud za tento parametr zvolíme Ma , získáme rovnici

$$\frac{A_*}{A} = \left(\frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} Ma \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \right)^{-\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}}. \quad (4.3)$$

Pokud na neznámém místě v rozšiřující se části trysky vznikne rázová vlna, rovnice 4.3 neplatí v celé dýze, neboť rázová vlna není izoentropický děj. Bude proto nutné rozdělit dýzu na dvě oblasti rozdělené rázovou vlnou.

Stav přímo za rázovou vlnou označíme indexem 2, stav přímo před ní indexem 1. Ma_2 spočítáme z Ma_1 podle vztahu

$$Ma_2 = \frac{(\kappa - 1)Ma_1^2 + 2}{2\kappa Ma_1^2 - (\kappa - 1)}. \quad (4.4)$$

Ma_2 můžeme dosadit zpět do rovnice 4.3 a získat nový, fiktivní „kritický průřez“, pomocí nějž lze určit Ma v libovolném místě za rázovou vlnou.

V typickém případě známe p na výstupu dýzy. Jeho závislost na Ma je

$$\frac{p}{p_t} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \right)^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (4.5)$$

Do rovnice 4.5 však nesmíme dosadit p_t na vstupu trysky, neboť rovnice 4.5 rovněž předpokládá izoentropický děj. Změnu p_t na rázové vlně vyjádříme pomocí poměru:

$$\frac{p_{t2}}{p_{t1}} = \left(\frac{(\kappa + 1)\text{Ma}_1^2}{(\kappa - 1)\text{Ma}_1^2 + 2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \cdot \left(\frac{\kappa + 1}{2\kappa\text{Ma}_1^2 - (\kappa - 1)} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad (4.6)$$

Klidový tlak p_{t2} je klidový tlak z rovnice 4.5, můžeme tedy dopočítat i tlak p a zjistit, zda odpovídá očekávané hodnotě.

Tento postup neumožňuje zjistit přímo, kde se nachází rázová vlna. Rázovou vlnu proto bude nutné hledat iteračním procesem, který lze shrnout takto:

1. Odhadneme místo x_{12} s průřezem A_{12} , kde vznikne rázová vlna.
2. Pomocí 4.3 vypočítáme Ma_1 .
3. Pomocí 4.6 a Ma_1 vypočítáme p_{t2} .
4. Pomocí 4.4 a Ma_1 vypočítáme Ma_2 .
5. Ma_2 a A dosadíme do 4.3 a vyjádříme fiktivní kritický průřez A_*^F .
6. A_*^F dosadíme do 4.3 a zjistíme Machovo číslo na výstupu trysky.
7. Pomocí 4.5 spočítáme p na výstupu.
 - a. Jestliže p odpovídá reálné hodnotě s požadovanou přesností, uložíme x_{12} a A_*^F .
 - b. Jestliže p je větší než reálná hodnota, posuneme x_{12} blíže k výstupu.
 - c. Jestliže p je menší než reálná hodnota, posuneme x_{12} blíže ke kritickému průřezu.

Z rovnice 4.3 nemůžeme jednoduše vyjádřit Ma , proto byla použita Newtonova metoda. Derivace pro Newtonovu metodu byla určena analyticky zderivováním rovnice 4.3 podle Ma .

Dále z tohoto postupu nelze stanovit, jak moc máme měnit polohu rázové vlny, aby se tlak na výstupu skutečně blížil zadané hodnotě. Tento nedostatek byl obejit metodou půlení intervalu – na rozdíl od rovnice 4.3, která je potřeba pro zjišťování lokálních Machových čísel v celé dýze, se poloha rázové vlny určuje jen jednou, a tak pomalost této metody nevádí. Abychom ovšem mohli použít metodu půlení intervalu, musíme mít jistotu, že rázová vlna v dýze vůbec vznikne. Proto začneme tím, že rázovou vlnu umístíme přesně na výstup trysky a rovnicí 4.4 určíme Machovo číslo za touto fiktivní rázovou vlnou, které dosadíme do rovnice 4.5 a určíme statický tlak. Tento tlak srovnáme se zadaným tlakem p_1 – jestliže je takto vypočtený tlak větší nebo roven p_1 , rázovou vlnu již nemusíme v dýze hledat, a pokud ne, můžeme začít omezovat interval, kde rázová vlna vznikne, až na požadovanou přesnost.

Nezávisle na poloze rázové vlny můžeme analyticky určit přírůstek entropie na rázové vlně, přičemž vyjdeme z rovnice 2.29. Rázová vlna nemění klidovou teplotu plynu [1], proto se rovnice zjednoduší do tvaru

$$\begin{aligned} ds &= -r \frac{dp}{p}, \\ \Delta s &= r \ln \left(\frac{p_{t1}}{p_{t2}} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Proudění je až na rázovou vlnu izoentropické, proto se veškerý přírůstek entropie mezi dvěma koncovými stavy musí soustředit právě na rázové vlně. Referenční řešič programu využívá právě tohoto vztahu pro určení změny entropie na rázové vlně.

4.3 Numerické řešení

K numerickému řešení kvazi-1D Eulerových rovnic byla použita metoda s umělou vazkostí, viz rovnice 3.19. Je vhodné zdůraznit, že Eulerovy rovnice platí obecně pro nestacionární proudění, ale v této kapitole jsme dosud předpokládali stacionární stav aerodynamického ucpání. Očekáváme, že nezávisle na počáteční podmínce se řešení Eulerových rovnic musí časem stabilizovat na stejném stavu, který odpovídá řešení stacionárního proudění. Proto nás příliš nezajímá čas výpočtu, celý výpočet můžeme chápat jako iterační proces blížící se ke stabilnímu stavu. Tomuto postupu se říká také metoda ustalování.

Abychom mohli sledovat stabilizaci výpočtu na stacionární stav, budeme v průběhu iterací numerické metody zapisovat tzv. rezidua, tj. rozdíly mezi hodnotami konkrétní veličiny ve dvou sousedních časových vrstvách. Konkrétně budeme zapisovat reziduum hustoty

$$\Delta\rho_i^j = |\rho_{i-1}^j - \rho_i^j|, \quad (4.8)$$

a to jeho průměrnou a maximální hodnotu v dané iteraci. Zapsání rezidua zpravidla stačí provést jen jednou za několik stovek či tisíc iterací.

4.3.1 Počáteční a okrajové podmínky

Jako počáteční podmínku volíme stav, kdy se plyn v dýze vůbec nepohybuje, T je konstantní a p má lineární průběh mezi zadanými hodnotami na obou koncích. Tato počáteční podmínka zdaleka není optimální, ale poslouží také k vyzkoušení rychlosti konvergence za různých podmínek.

Řešení okrajových podmínek se zakládá na třech zadaných hodnotách, a to klidovém tlaku na vstupu p_{t0} , klidové teplotě T_{t0} ¹ a statickém tlaku na výstupu p_1 .

U okrajové podmínky na vstupu vyjdeme z klidové rychlosti zvuku a_{t0} , pro kterou z definice 2.30 a rovnice 2.3 platí

$$a_{t0} = \sqrt{\kappa r T_{t0}}. \quad (4.9)$$

Pomocí dalšího vztahu z [1] můžeme a určit pomocí a_{t0} a Ma jako

$$a = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot a_{t0}. \quad (4.10)$$

¹V programu a výsledcích jsou označeny jako p_0 , T_0 , zde odlišeny od statických hodnot pro zdůraznění.

Po dosazení z definice Ma a úpravě můžeme rychlost zvuku vyjádřit jako

$$a = \sqrt{\kappa r T_{t0} - \frac{(\kappa - 1)}{2} \cdot c^2}, \quad (4.11)$$

kde c získáme lineární extrapolací z vnitřku sítě. Pomocí takto získaného a přepočítáme Ma a pomocí nové hodnoty opravíme také tyto veličiny:

$$\begin{aligned} \rho &= \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{\frac{-1}{\kappa - 1}} \cdot \frac{p_{t0}}{r T_{t0}} \\ p &= \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{\frac{-\kappa}{\kappa - 1}} \cdot p_{t0} \\ e &= \frac{p}{\kappa - 1} + \frac{\rho c^2}{2} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Okrajová podmínka na výstupu je jednodušší, neboť opravujeme pouze statický tlak na hodnotu p_1 a pomocí něj nastavujeme hodnotu celkové energie ze stavové rovnice 2.44. Pokud v dýze nevznikne rázová vlna, a tedy na výstupu $Ma > 1$, všechny hodnoty na výstupu získáváme pouze extrapolací a statický tlak nekoriguje.

4.4 Realizace výpočtu

Pro účely simulace budeme uvažovat úsek osově symetrické dýzy, který bude zahrnovat i její kritický průřez. Tvar a nejdůležitější parametry této dýzy a počátek délkové souřadnice x jsou načtrnuty na obrázku 4.1.

Výpočet byl realizován programem v jazyce C, který byl vytvořen pro využití v této práci. Zdrojový kód programu je dostupný z repozitáře na webu GitHub². Soubor lze zkompileovat bez žádných závislostí kromě knihoven jazyka C.

Program je určen pro ovládání parametrů výpočtu a iterací numerické metody přes příkazový řádek. Výstupem programu jsou pouze číselné hodnoty veličin v bodech sítě, avšak je-li na počítači nainstalován nástroj `gnuplot`, program ho dokáže za běhu volat k rychlému vykreslení grafů.

Do programu je integrován referenční analytický řešič i numerická metoda, po zadání parametrů výpočtu je ukládá do souboru a uchovává pro příští spuštění. Referenční řešič se spouští ve většině případů automaticky s aktuálními parametry, numerické řešení se z počáteční podmínky spustí zpravidla pouze na příkaz uživatele.

Parametry trysky a numerické metody lze při běhu programu měnit. Pokud je to nutné, numerický výpočet se pak spustí znovu.

²<https://github.com/sterojos/laval-nozzle-1D>

Kapitola 5

Interpretace výsledků

Téměř všechny grafy jsou vykresleny v přílohách A a B. Výpočty byly realizovány v modelové dýze s parametry popsány v tabulce A.1, není-li vysloveně určeno jinak. Tato tabulka jednoznačně specifikuje tvar dýzy i parametry výpočtu pro vlastní program popsáný v podkapitole 4.4, takže lze všechny výpočty pomocí tohoto programu replikovat. Údaje týkající se rázové vlny byly získány z referenčního řešiče, který je součástí programu.

Referenční řešič programu dále poskytuje výsledky založené na analytických vztazích z podkapitoly 4.2. V grafech je výstup řešiče zaznačen silnou bledě modrou čarou, můžeme ho chápat jako měřítko přesnosti numerických výsledků, protože je přesný až na drobnou odchylku v poloze rázové vlny.

Kromě toho bylo pomocí knihovny [3] zjištěno, že v celé dýze má proudící plyn $0,997 < Z < 1$, takže model ideálního plynu platí v tomto případě dobře.

5.1 Vliv intenzity umělé vazkosti na konvergenci a přesnost výsledku

Všechny numerické výsledky jsou uváděny po zkonvergování metody. Průběh reziduí je vyneseno na obrázku A.8, a to až na strojovou přesnost, tj. do okamžiku, kdy je reziduum tak malé, že je interpretováno počítačem jako nula. Z obrázku je zřejmé, že rychlost konvergence se v závislosti na ε řádově nemění.

Schéma nemůže konvergovat, když $\varepsilon \rightarrow 0$, ale nekonverguje v tomto případě ani pro $\varepsilon \rightarrow 1$. Z toho plyne, že silná difuze negarantuje stabilitu výpočtu. Zároveň je z obrázku A.2 patrné, že schéma při vysokých ε vyhlazuje průběh Machova čísla a tedy necharakterizuje dobře rázovou vlnu.

Existují dvě veličiny, které by měly být v dýze všude konstantní, a to hmotnostní tok a klidová entalpie. Na obrázcích A.6 a A.7 jsou graficky znázorněny průběhy těchto veličin v dýze, přičemž jejich zachování je zdaleka nejlépe zachyceno opět při nízkých hodnotách ε . Svislá osa těchto grafů sice nezačíná od nuly, přesto jsou však odchylky od očekávané hodnoty velké a i u nejlepších získaných výsledků je patrné silné zakmitnutí v bezprostředním okolí rázové vlny.

Obrázek A.3 představuje přírůstek entropie vůči vstupu trysky. Vzhledem

k tomu, že předpokládáme izoentropické proudění, by se měla veškerá změna entropie koncentrovat v rázové vlně a všude jinde by entropie měla být konstantní. Fakt, že přírůstek entropie se ke konci přiblíží ke správné hodnotě, nemůžeme dát výpočtu k dobru, protože entropie je stavová veličina a na obou koncích dýzy předepisujeme stavy plynu. Kolem kritického průřezu vzniká místo, kde proud plynu samovolně snižuje svou entropii, což je samozřejmě nesmysl. Na rázové vlně vyhlazené difuzí přitom vzniká entropie mnohem méně, než by mělo. Nutno však dodat, že minimalizace difuze tyto nedostatky dobře odstraňuje, skok entropie může být zachycen poměrně dobře a dokonce ani rozkmitání v okolí rázové vlny není tak silné, jako u \dot{m} a h_t .

Vykresleny jsou také průběhy stavových veličin T, p (A.4, A.5). Za pozornost stojí především anomální stoupaní tlaku u vstupu, které je doprovázeno poklesem klidové entalpie a zrychlováním proudění – za normálních podmínek při zrychlování proudění statické veličiny musí buď klesat, nebo musí být plynu dodáván dostatek energie, aby tuto ztrátu překonal, a v důsledku toho musí klidová entalpie stoupat.

5.2 Závislost přesnosti a rychlosti konvergence výpočtu na poloze a síle rázové vlny

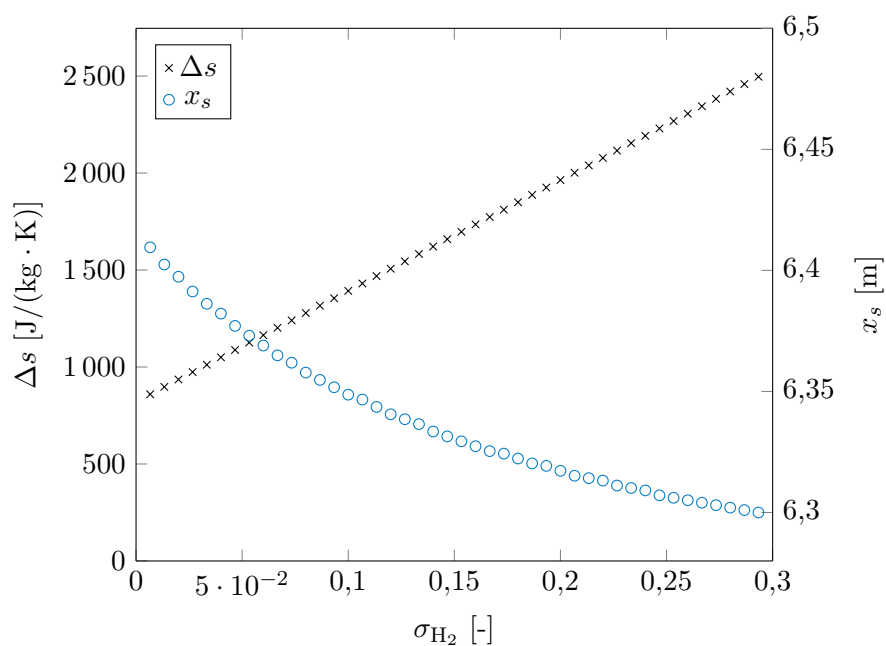
V téže trysce byl výpočet proveden pro různé výstupní tlaky. Použité tlaky jsou vypsány v tabulce B.1 společně s odpovídajícími parametry rázové vlny získanými analyticky. Z obrázku B.1 lze vyčíst, že u vyššího výstupního tlaku je přesnost řešení v okolí rázové vlny o něco horší. Lépe jsou však tyto nepřesnosti vidět na grafu změny entropie na obrázku B.2. Oba tyto grafy jsou opět vykresleny po úplném zkonvergování výpočtu. Rychlost konvergence podle obrázku B.3 také vychází mnohem lépe pro nižší výstupní tlak. To by nás mohlo vést k podivnému závěru, že metoda je přesnější pro silnější rázové vlny, ale ve skutečnosti jsou nepřesnosti způsobeny tím, že slabé rázové vlny vznikají příliš daleko od výstupu trysky a přesnost metody je špatná pro nízká Machova čísla, která vznikají ve zbytečně dlouhé části trysky za rázovou vlnou. Můžeme to ověřit tak, že pro vyšší výstupní tlaky zkrátíme simulovanou část dýzy a adekvátně upravíme výstupní tlak – obzvláště změna entropie pak vychází lépe a výpočet rychleji konverguje.

5.3 Závislost parametrů rázové vlny na složení směsi plynů

Referenční řešič zahrnutý v programu je v porovnání s numerickým řešením velmi rychlý a poměrně přesný. Jeho omezením je samozřejmě to, že je celkově založen na kvazi-1D popisu proudění, ale přesto pomocí něj můžeme okamžitě získat velké množství poměrně přesných odhadů – pro výpočty v 1D se jedná o mnohem výhodnější přístup.

Uvažujme např. směs zemního plynu a vodíku proudící dýzou popsanou v tabulce A.1. Budeme-li chtít vědět, jak se mění poloha rázové vlny v dýze

v závislosti na podílu vodíku, můžeme tuto závislost zjistit pomocí řešiče mnohem snáze a přesněji, než pomocí numerických výpočtů. Tato závislost je pro hmotnostní podíl vodíku 0 až 30 % uvedena na obrázku 5.1. Vlastnosti směsi byly získány pomocí rovnic 2.13 a 2.5. Na témže obrázku je vidět také závislost přírůstku entropie na podílu vodíku, která má zřejmě lineární průběh. To se může zdát překvapivé vzhledem k tomu, že přírůstek byl odvozen z nelineárních rovnic pro kvazi-1D proudění, ale musíme mít na paměti, že stavy na okrajích jsou zafixované a proudění je až na rázovou vlnu izoentropické. Integrací rovnice 2.29 mezi těmito dvěma stavy snadno získáme vztah, který lineárně závisí na vlastnostech směsi, považujeme-li ji za ideální plyn. Závislost mezi vlastnostmi směsi a podílem složek je pak opět lineární. Tento výsledek tedy ověřuje, že změna entropie vychází správně.



Obrázek 5.1: Závislost parametrů rázové vlny na hmotnostním zlomku vodíku ve směsi vodíku a methanu

Kapitola 6

Závěr

Byl vytvořen program, který je schopen simulovat transsonické proudění ideálního plynu v Lavalově dýze pomocí kvazi-1D Eulerových rovnic. Do programu byla zabudována jednoduchá numerická metoda s umělou vazkostí a analytický referenční řešič. Výsledky numerické metody byly ohodnoceny pomocí analytického řešení, byla potvrzena hypotéza, že umělá vazkost/difuze způsobuje nepřesnost, která je nejvíce citelná v okolí nespojitostí. Metoda má také špatnou přesnost v subsonickém proudění. Při minimalizaci umělé vazkosti byly výsledky překvapivě dobré, metoda dokázala poměrně dobře vystihnout i skokovou změnu entropie na rázové vlně, ale v okolí rázu nedokázala zachovat hmotnostní tok a klidovou entalpii.

Práci by bylo možné dále rozšířit přidáním dalších numerických metod do funkčního programu. Především jsem přemýšlel nad metodou HLL, která je poměrně snadná na implementaci. Na druhou stranu při nízké umělé vazkosti jsou výsledky už tak dobré, že by možná bylo obtížné bez patřičných znalostí poznat rozdíl mezi těmito dvěma typy metod.

Také by mohlo být poměrně snadné přidat složitější stavovou rovnici plynu pro případy, kdy model ideálního plynu nestačí. Přebytný čas jsem však nakonec věnoval především analytickému řešení a zdá se mi, že se to vyplatilo, protože jsem si ověřil správnost modelu i z jiného úhlu pohledu a také jsem získal nástroj, kterým mohu snadno posuzovat správnost numerických výsledků. Nevýhodou analytického řešení je ale to, že při přechodu na simulaci ve více dimenzích nebo i nahrazení ideálního plynu reálným plynem by do značné míry ztratilo význam.



Literatura

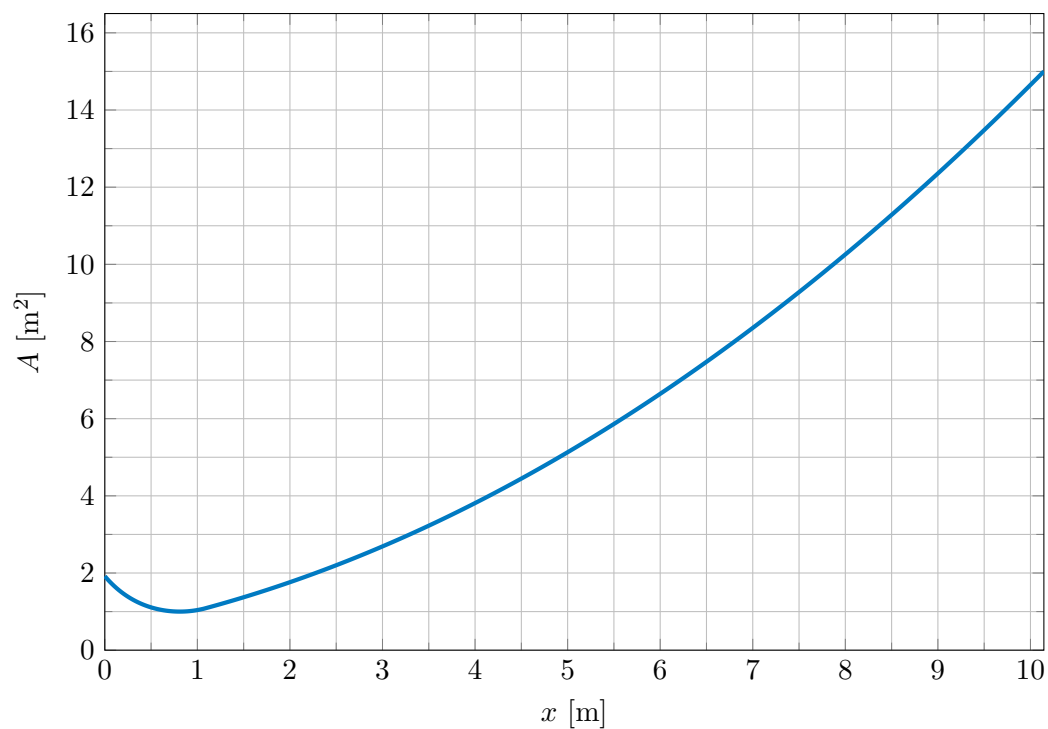
- [1] AMES RESEARCH STAFF. *Equations, Tables and Charts for Compressible Flow*. Moffett Field: Ames Aeronautical Laboratory, 1953. Report 1135. Dostupné také z: https://www.nasa.gov/sites/default/files/734673main_Equations-Tables-Charts-CompressibleFlow-Report-1135.pdf
- [2] ANDERSON, John D., Jr. *Modern Compressible Flow: With Historical Perspective*. New York: McGraw-Hill, 1982. ISBN 0-07-001654-2.
- [3] BELL, Ian H., Jorrit WRONSKI, Sylvain QUOILIN a Vincent LEMORT. *Pure and Pseudo-pure Fluid Thermophysical Property Evaluation and the Open-Source Thermophysical Property Library CoolProp*. *Industrial & Engineering Chemistry Research* [online]. 2014, 53(6), 2498-2508 [cit. 2022-06-29]. ISSN 0888-5885. Dostupné z: [doi:10.1021/ie4033999](https://doi.org/10.1021/ie4033999)
- [4] BLAŽEK, Jiří. *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*. Amsterdam: Elsevier, 2005. ISBN 0080430090.
- [5] ČERMÁK, Libor. *Numerické metody* [online]. Brno: Ústav matematiky VUT FSI v Brně, 2020 [cit. 2022-06-15]. Dostupné z: https://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=1444
- [6] ČERMÁK, Libor. *Výpočtová dynamika tekutin* [online]. Brno: Ústav matematiky VUT FSI v Brně, 2019 [cit. 2022-06-15]. Dostupné z: https://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=1305
- [7] FERZIGER, Joel H. a Milovan PERIĆ. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 3. vydání. Berlin: Springer, 2002. ISBN 3-540-42074-6.
- [8] KONDEPUDI, Dilip a Ilya PRIGOGINE. *Modern Thermodynamics: From Heat Engines to Dissipative Structures*. 2. vydání. Chichester: John Wiley & Sons, 2015. ISBN 978-1-118-37181-7.
- [9] KOZEL, Karel. *Numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic*. 2. vydání. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2009. ISBN 978-80-01-04276-2.
- [10] KOZEL, Karel a Jiří FÜRST. *Numerické metody řešení problémů proudění I*. Praha: ČVUT, 2001. ISBN 80-01-02384-2.

- [11] LEVEQUE, Randall J. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. ISBN 0-521-81087-6.
- [12] MORAN, Michael J., Howard N. SHAPIRO, Daisie D. BOETTNER a Margaret B. BAILEY. *Fundamentals of Engineering Thermodynamics*. 8. vydání. Hoboken: John Wiley & Sons, 2014. ISBN 978-1-118-82044-5.
- [13] NOŽIČKA, Jiří. *Základy termomechaniky*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2001. ISBN 80-01-02409-1.
- [14] TORO, Eleuterio F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. 3. vydání. Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. ISBN 978-3-540-25202-3.
- [15] WHITE, Frank M. *Fluid Mechanics*. 7. vydání. New York: McGraw-Hill, 2011. ISBN 978-0-07-352934-9.

Příloha A

Výsledky – intenzita umělé vazkosti

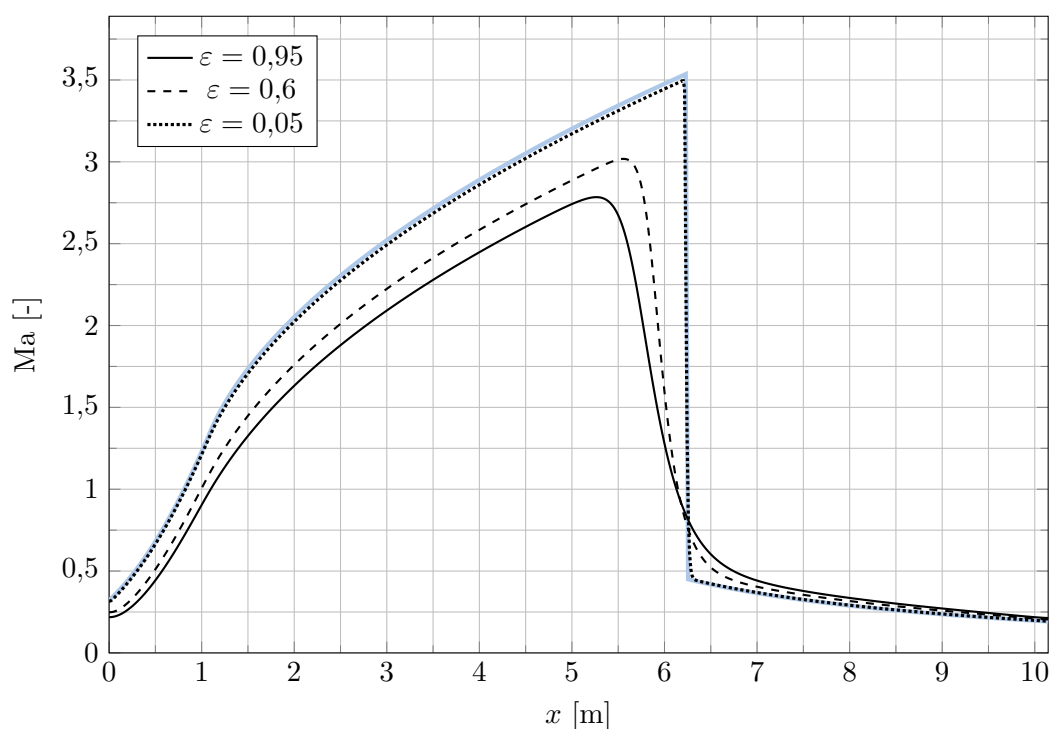
Pozn.: tlustá bleděmodrá čára v grafu značí odpovídající analytické řešení.
Tvar dýzy viz obrázek A.1, parametry výpočtu viz tabulka A.1. Komentář v kapitole 5.



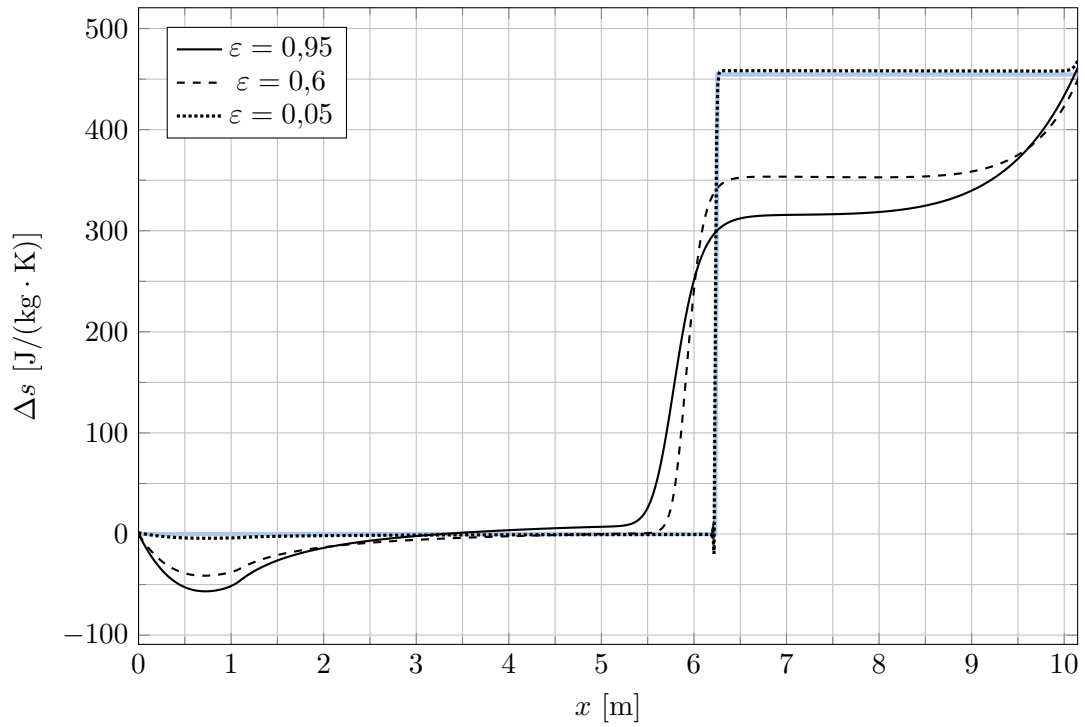
Obrázek A.1: Plocha průřezu podél trysky

Parametr	Hodnota	Popis
r	287 J/(kg · K)	měrná plynová konstanta
κ	1,4	Poissonova konstanta
p_0	$5 \cdot 10^5$ Pa	tlak na vstupu trysky
p_1	$1 \cdot 10^5$ Pa	tlak na výstupu trysky
T_0	300 K	teplota na vstupu trysky
A_*	1 m ²	nejmenší (kritický) průřez trysky
x_*	0,81 m	poloha krit. průřezu vůči vstupu trysky
A_{\max}	15 m ²	největší průřez trysky
α	10°	úhel kužele divergentní části
A_s	7,065 m ²	průřez v místě vzniku rázové vlny
x_s	6,24 m	poloha rázové vlny vůči vstupu trysky
Δs	454,515 J/(kg · K)	měrný přírůstek entropie na rázové vlně
CFL	0,1	max. dovolená hodnota CFL kritéria
n	750	počet bodů v jedné vrstvě sítě

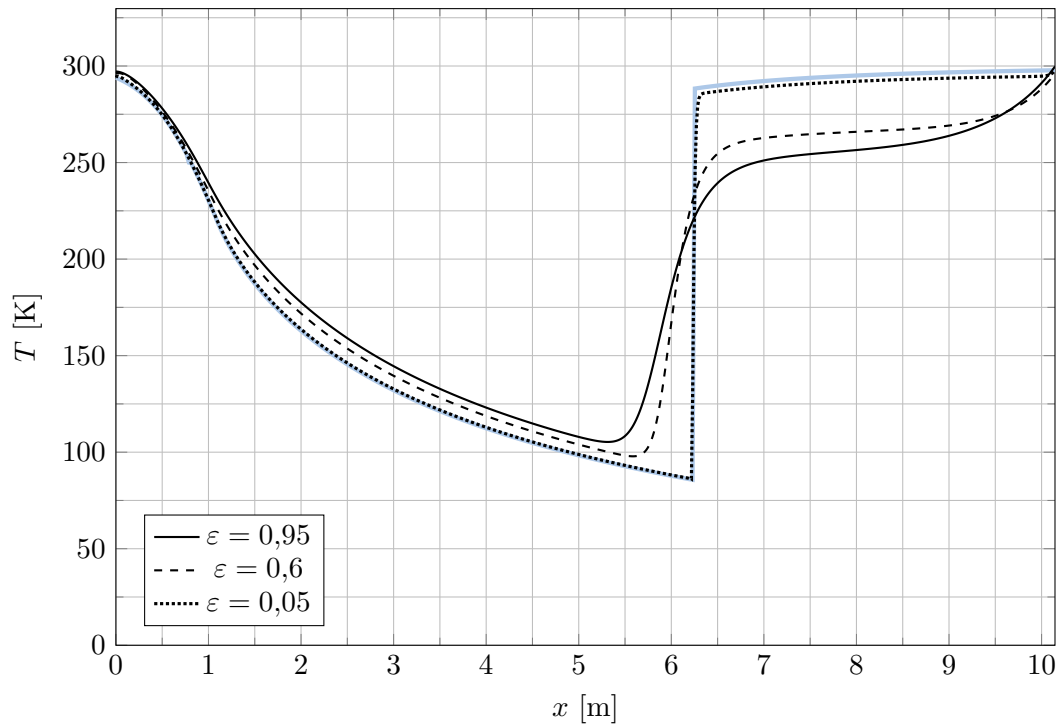
Tabulka A.1: Parametry výpočtu



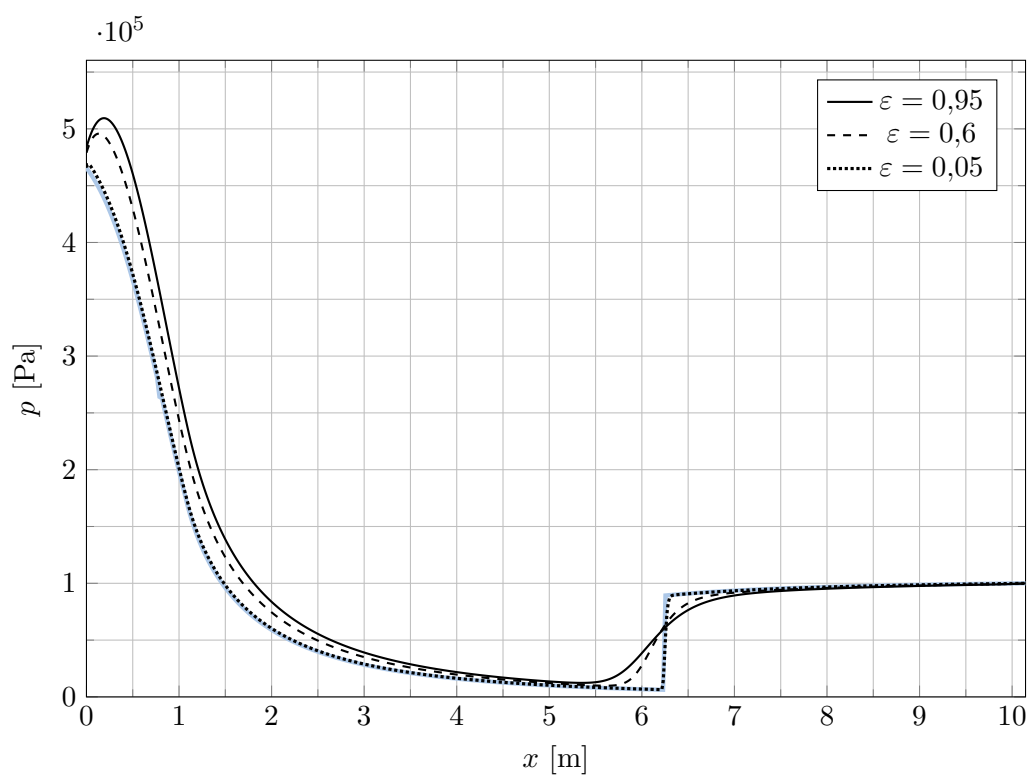
Obrázek A.2: Průběh Machova čísla v trysce



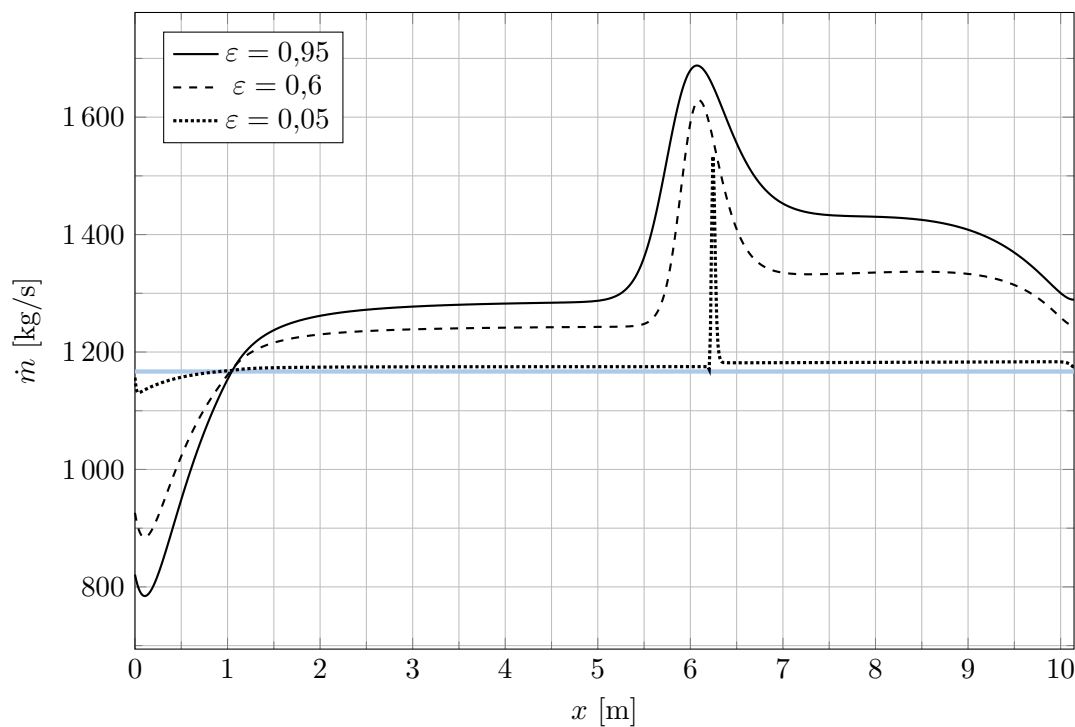
Obrázek A.3: Změna entropie vůči vstupu trysky



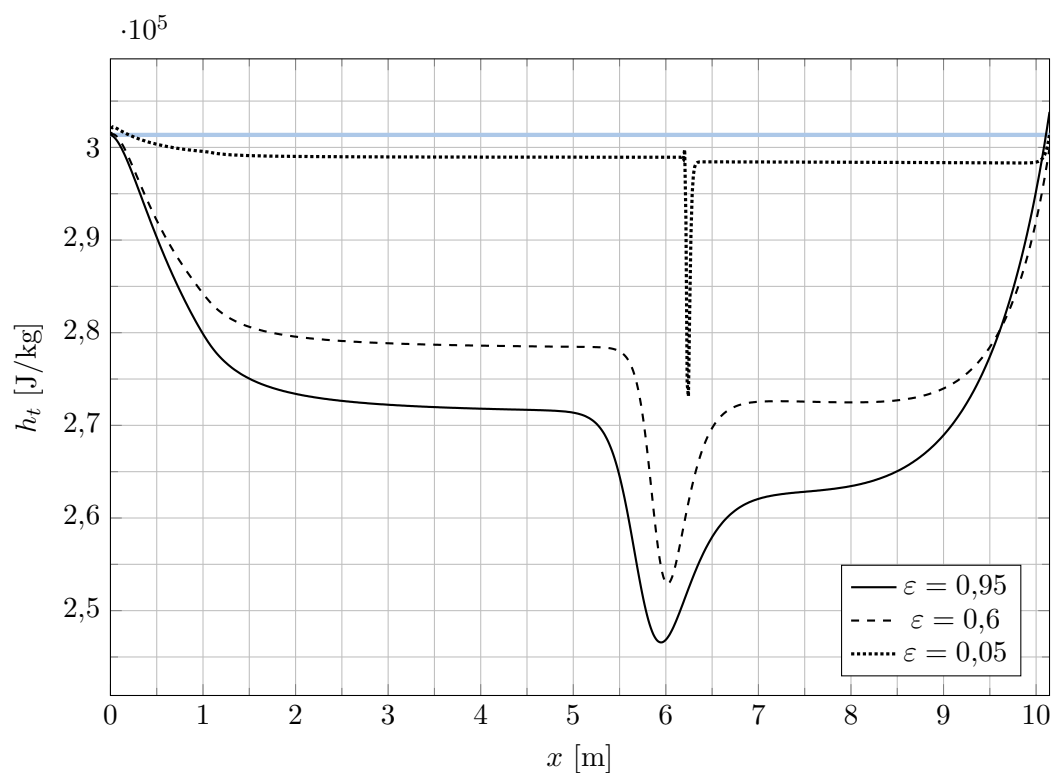
Obrázek A.4: Průběh teploty v trysce



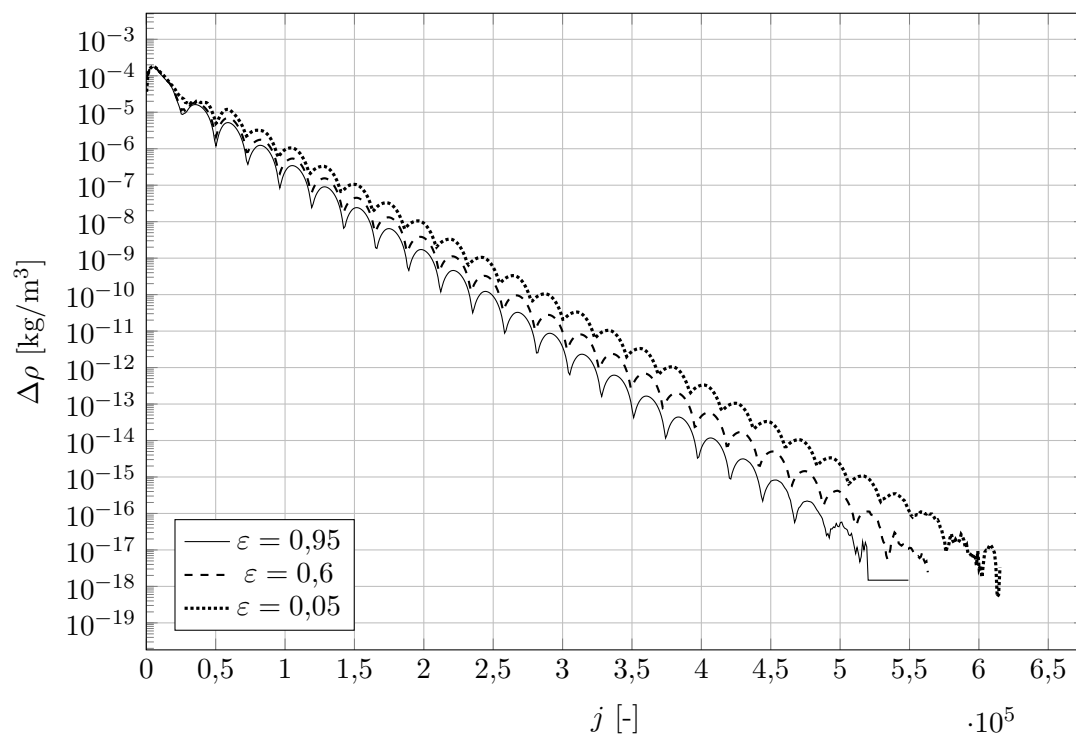
Obrázek A.5: Průběh tlaku v trysce



Obrázek A.6: Průběh hmotnostního toku v trysce



Obrázek A.7: Průběh klidové entalpie v trysce

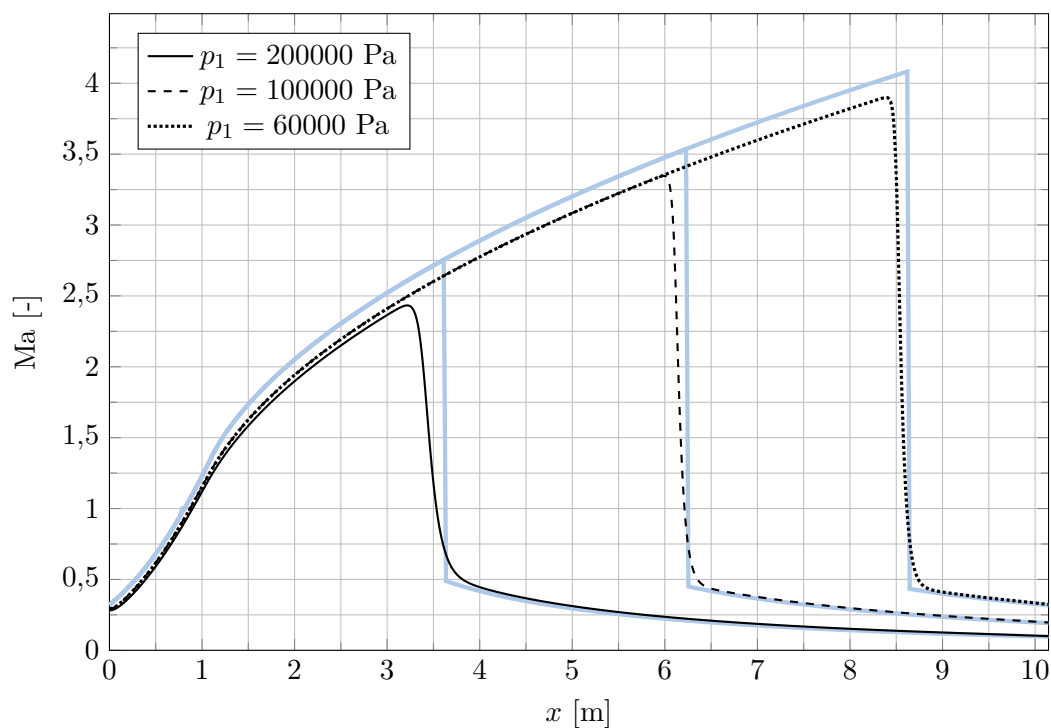


Obrázek A.8: Vývoj průměrného rezidua hustoty (viz rovnice 4.8) během iterací

Příloha B

Výsledky – síla a poloha rázové vlny

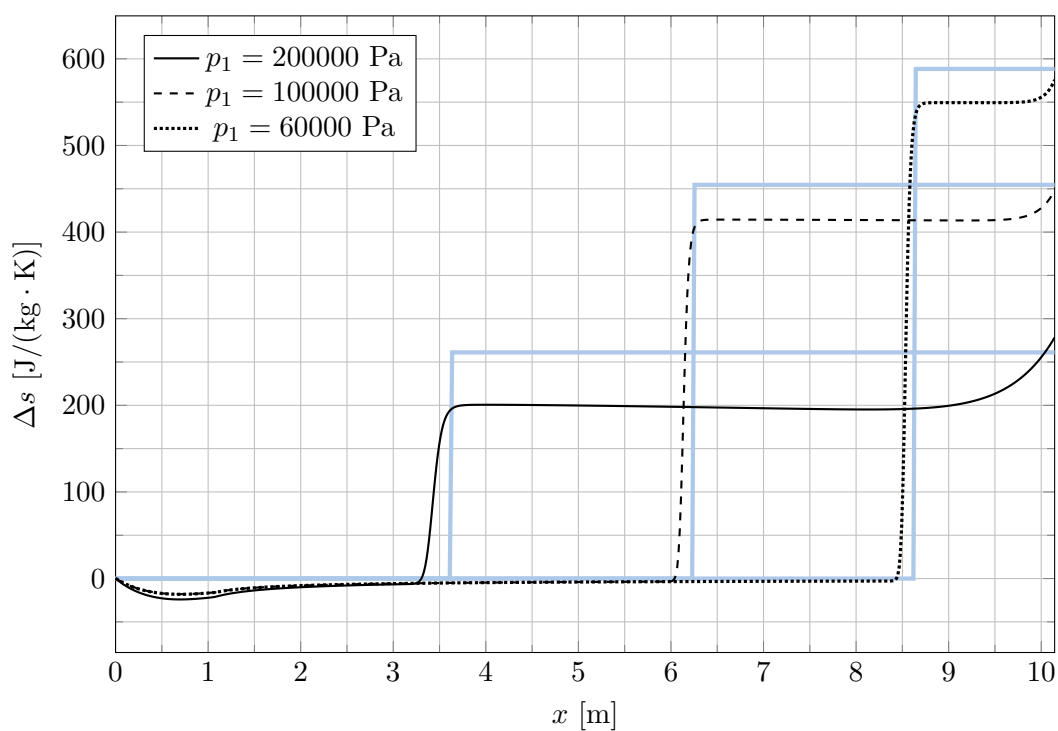
Pozn.: tlustá bleděmodrá čára v grafu značí odpovídající analytické řešení. Tvar dýzy viz obrázek A.1, parametry rázových vln viz tabulka B.1. Intenzita umělé vazkosti $\varepsilon = 0,3$. Ostatní parametry viz tabulka A.1. Komentář v kapitole 5.



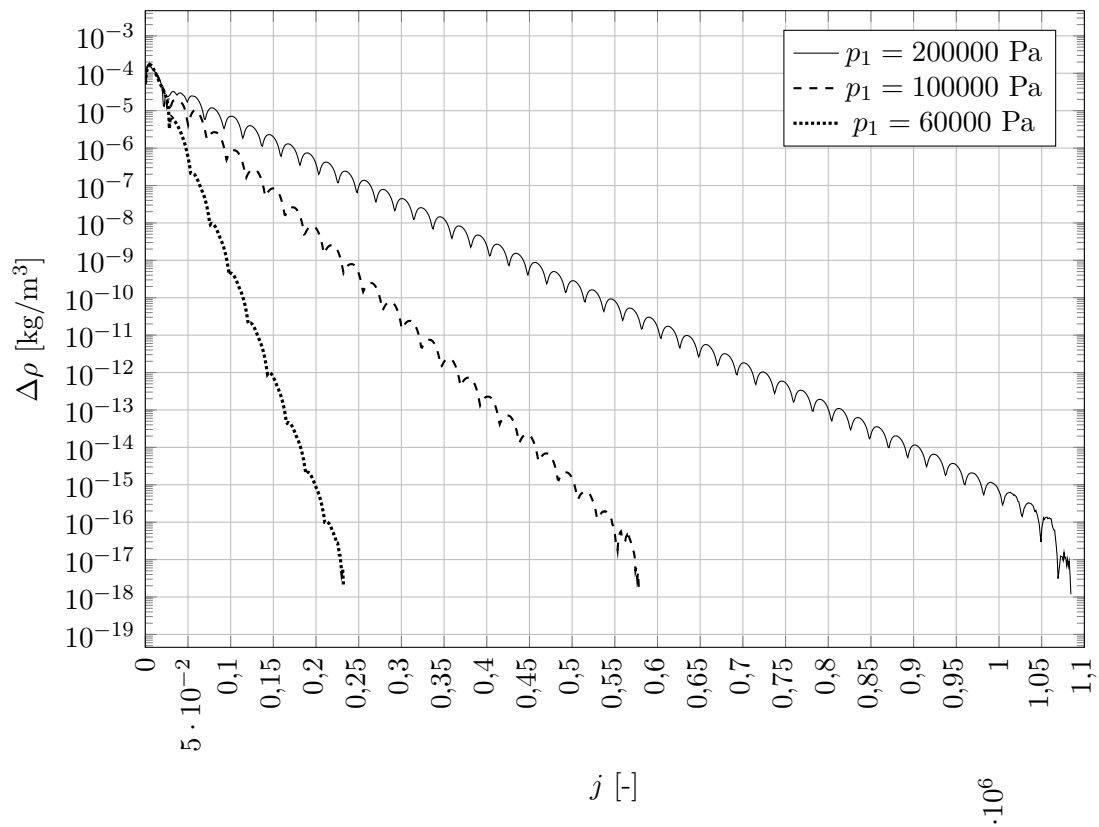
Obrázek B.1: Průběh Machova čísla v trysce pro různé výstupní tlaky

p_1 [Pa]	60000	100000	200000
x_s [m]	8,62	6,24	3,63
A_s [m ²]	11,602	7,065	3,371
Δs [J/(kg · K)]	588,37	454,51	261,11

Tabulka B.1: Parametry rázové vlny pro různé výstupní tlaky



Obrázek B.2: Průběh změny entropie v trysce pro různé výstupní tlaky



Obrázek B.3: Vývoj průměrného rezidua hustoty (viz rovnice 4.8) během iterací pro různé výstupní tlaky

Příloha C

Rejstřík

- 1. hlavní věta termodynamická, **7**, **11**
- 2. hlavní věta termodynamická, **9**
- adiabatický exponent, **9**
- celková energie, **7**, **11**
- centrální diference, **20**
- CFL podmínka, **24**
- diskretizace, **18**
- dopředná diference, **19**
- entropie, **9**
- Eulerovy rovnice, **17**
- globální chyba, **18**
- Hugoniotova věta, **25**
- hyperbolický systém, **23**
- ideální plyn, **6**
- kinetická energie, **11**
- klidová entalpie, **12**
- kompresibilitní faktor, **8**
- kontinuum, **5**
- konvergence, **20**
- konzistence, **20**
- kritická rychlost, **25**
- kritický stav, **25**
- Laxovo-Friedrichsovo schéma, **21**
- lokální chyba, **19**
- Machovo číslo, **25**, **26**
- Mayerův vztah, **7**
- metoda konečných diferencí, **21**
- metoda konečných objemů, **22**
- měrná tepelná kapacita, **9**
- reziduum, **28**
- Riemannův problém, **24**
- rychlost zvuku, **10**
- stabilita, **20**
- stavová rovnice dynamická, **13**
- stavová rovnice kalorická, **7**
- stavová rovnice termická, **6**
- stavová veličina, **5**
- Taylorův polynom, **19**
- umělá vazkost, **21**, **23**
- změna entropie, **10**
- řád přesnosti, **19**