

České vysoké učení technické

Fakulta strojní

Ústav technické matematiky



**NUMERICKÉ SIMULACE PROBLÉMŮ  
AEROELASTICITY POMOCÍ HARMONICKÉ  
METODY**

Diplomová práce

Tomáš Krejča

Srpen 2022

Vedoucí:  
Školitel:

prof. Ing. Jiří Fůrst, Ph.D.  
Ing. Ondřej Winter



Děkuji mému školiteli Ing. Ondřeji Winterovi za trpělivé vedení a odborné rady v průběhu mého inženýrského studia, bez kterých bych nedokázal dokončit tuto práci.

## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci *Numerické simulace problémů aeroelasticity pomocí harmonické metody* vypracoval samostatně pod vedením prof. Jiřího Fürsta a Ing. Ondřeje Wintera s využitím literatury uvedené na konci diplomové práce v seznamu použité literatury.

V Praze 14. srpna 2022

## Abstrakt

Tato práce se zabývá aplikací harmonické metody na problém kmitání profilu. Nejdříve je provedena rešerše aeroelasticity, poté je popsán model kontinua a numerický aparát pro řešení Navierových-Stokesových rovnic. Je odvozena harmonická metoda pro řešení obecné transportní rovnice. V poslední části jsou prezentovány výsledky výpočtů periodických dějů řešené harmonickou metodou na skalarání rovnici, rovinné trubce a natáčejícím se profilu. Výsledky rozložení tlaku a rychlosti jsou porovnávány s klasickou nestacionární metodou.

**Klíčová slova:** aeroelasticita, Diskrétní Fourierova transformace, CFD, OpenFOAM, NACA 0012, harmonická metoda

## Abstract

Main goal of this thesis is an application of the Harmonic Balance Method on the airfoil pitching problema. First, a research of aeroelasticity is done, then the continuum model and numerical apparatus for Navier-Stokes equations are described. Harmonic Balance Method is derivated for the solution of the general transport equation. The last part presents the results of applitacion of the Harmonic Balance Method on periodic phenomenons in form of scalar transport, plane tube and pitching airfoil are presented. The results of pressure and velocity dispersion are compared to the classical non-stationary method.

**Keywords:** Aeroelasticity, Discrete Fourier Transform, CFD, OpenFOAM, NACA 0012, Harmonic Balance Method

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Krejča** Jméno: **Tomáš** Osobní číslo: **473473**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**  
Studijní program: **Aplikované vědy ve strojním inženýrství**  
Specializace: **Matematické modelování v technice**

## II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

**Numerické simulace problémů aeroelasticity pomocí harmonické metody**

Název diplomové práce anglicky:

**Numerical simulations of an aeroelastic problems with aid of harmonic balance method**

Pokyny pro vypracování:

Zadání:

1. Rešerše metod pro řešení problémů aeroelasticity
2. Popis a naprogramování modelu (Harmonic balance) pro výpočet rovinného proudění kolem leteckého profilu
3. Odladení programu a výpočet proudového pole pro vybraný případ profilu
4. Grafická prezentace a analýza výsledků

Seznam doporučené literatury:

Blazek, J. (2015). Computational fluid dynamics: Principles and applications  
Moukalled, F., Mangani, L., & Darwish, M. (2015). The finite volume method in computational fluid dynamics: An advanced introduction with OpenFOAM® and matlab  
Jasak, H., & Cvijetić, G. (2016). Implementation and validation of the Harmonic Balance method for temporally periodic non-linear flows. Volume 2C: Turbomachinery.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

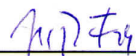
**prof. Ing. Jiří Fůrst, Ph.D. ústav technické matematiky FS**

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

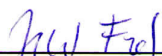
**Ing. Ondřej Winter ústav technické matematiky FS**

Datum zadání diplomové práce: **13.04.2022** Termín odevzdání diplomové práce: **14.08.2022**

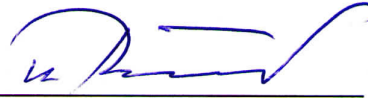
Platnost zadání diplomové práce: \_\_\_\_\_



prof. Ing. Jiří Fůrst, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) práce



prof. Ing. Jiří Fůrst, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry



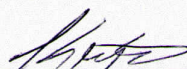
doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.  
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

20.4.2022

Datum převzetí zadání



Podpis studenta

# Obsah

Úvod	1
<b>1 Aeroelasticita</b>	<b>3</b>
1.1 Statická aeroelasticita	4
1.2 Dynamická aeroelasticita	4
1.3 Vztah hmotnosti a tuhosti v letectví	5
1.4 Flutter	6
1.4.1 Základní vlastnosti flutteru	6
1.4.2 Kritérium tuhosti a kritická rychlost flutteru	7
1.5 Aerodynamika profilu křídla	9
1.5.1 Základní vlastnosti vzduchu v atmosféře	9
1.5.2 Charakteristiky proudu tekutiny	10
1.5.3 Vlastnosti proudění a tlakového pole okolo profilu	11
<b>2 Matematický model</b>	<b>14</b>
2.1 Materiálový a prostorový popis kontinua	14
2.2 Zákony zachování a bilanční rovnice	15
2.2.1 Zákon zachování hmoty	15
2.2.2 Zákon zachování hybnosti	16
2.3 Navierovy-Stokesovy rovnice	18
2.4 Fourierova transformace	19
2.4.1 Fourierova řada	19
2.4.2 Diskrétní Fourierova transformace	21
2.5 Harmonická metoda	23
2.5.1 Aplikace Fourierovy transformace na skalární transport	23
2.5.2 Sestavení soustavy rovnic pro řešení skalárního transportu	24
<b>3 Metoda konečných objemů</b>	<b>27</b>
3.1 Diskretizace v prostoru	27
3.1.1 Diskretizace gradientu	28
3.1.2 Diskretizace konvektivního členu	29
3.1.3 Diskretizace difúzního členu	29
3.1.4 Diskretizace zdrojového členu	30
3.2 Numerické řešení Navierových-Stokesových rovnic	32
3.2.1 Algoritmus SIMPLE	35
3.2.2 Algoritmus PISO	36
3.2.3 Algoritmus PIMPLE	37
<b>4 Numerické výsledky</b>	<b>38</b>
4.1 Numerické řešení skalární rovnice harmonickou metodou	38
4.1.1 Sinusový vstupní zdroj	38

4.1.2	Složený periodický zdroj . . . . .	42
4.2	Numerické řešení Navierových-Stokesových rovnic harmonickou metodou . . . . .	45
4.2.1	Proudění v trubce s oscilující rychlostí na vstupu . . . . .	45
4.2.2	Periodické kmitání leteckého profilu . . . . .	47
4.3	Zhodnocení časové náročnosti . . . . .	56
4.4	Výhody a nevýhody harmonické metody . . . . .	57
	<b>Závěr</b>	<b>58</b>



# Úvod

V oblasti letectví a rotačních strojů se setkáváme s problémy spojenými jak s obtékáním těles, tak i se strukturální analýzou. Jevy, které vznikají kombinací těchto oborů, se zabývá aeroelasticta. S nárustem leteckých rychlostí vlivem vývoje letecké techniky 20. století se začali objevovat nové jevy, jako například flutter křídla či ocasních ploch, které končili leteckou havárií a ztrátou lidských životů. Konkrétní případy těchto nehod můžeme nalézt v [1]. Tyto nehody zvýšily zájem o zkoumání aeroelasticity a motivovaly hledání nových nástrojů, jak tyto děje předpovědět či eliminovat. Prvotní zkoumání zahrnovalo experimenty v laboratoři například na zmenšených modelech letounů či částí křídla. I když je tento způsob schopný dodat použitelné výsledky, jeho uskutečnění je časově a finančně náročné. Alternativním způsobem bylo vytváření zjednodušených analytických modelů. Příkladem může být Theodorsonova publikace [2] z roku 1934. Vývoj výpočetní techniky umožnil modelování pomocí počítačových simulací. Pro ty byla odvozena řada numerických metod, jejichž přehled nalezneme například v [3]. Máme-li časově proměnlivé děje, jsme nuceni pro počítačové simulace používat prostředky pro řešení nestacionárních jevů, kde v některých případech narážíme až na enormní výpočetní požadavky. Tato práce se zabývá alternativní metodou, pomocí které je možné tento výpočetní čas výrazně zkrátit. Pro specifický případ periodických dějů, u kterých jsme schopni předem definovat frekvenci kmitů, je k dispozici harmonická metoda popsána v [4]. Ta v těchto případech umožňuje značné urychlení výpočetních času, jak je publikováno v [5].

V *první* kapitole se pojednává o aeroelastice, tedy oboru, který se zabývá interakcemi pevné látky s tekutinou jí obtékající. Je představeno základní dělení na statickou a dynamickou aeroelastictu a jsou stručně vysvětleny základní typy aeroelastických jevů, které v letectví mohou nastat. Zvláštní pozornost je věnována flutteru. K němu je uveden způsob, jak lze matematicky popsat jeho podmínky a vlastnosti.

*Druhá* kapitola prezentuje použitý matematický aparát. Je zde uveden nutný základ k mechanice kontinua a bilanční rovnice používané pro popis proudění tekutin. Další část se zabývá představením fourierovy analýzy a Diskrétní Fourierovy transformace. Z ní je následně odvozena harmonická metoda.

Ve *třetí* kapitole je provedena rešerše numerického aparátu k řešení parciálních diferenciálních rovnic a poté konkrétně pro řešení Navierových-Stokesových rovnic, sloužících jakožto model pro proudění tekutin použitý v této práci. Důležitým výstupem je uvedení SIMPLE a PIMPLE algoritmů nutných pro řešiče nestacionární a harmonické metody.

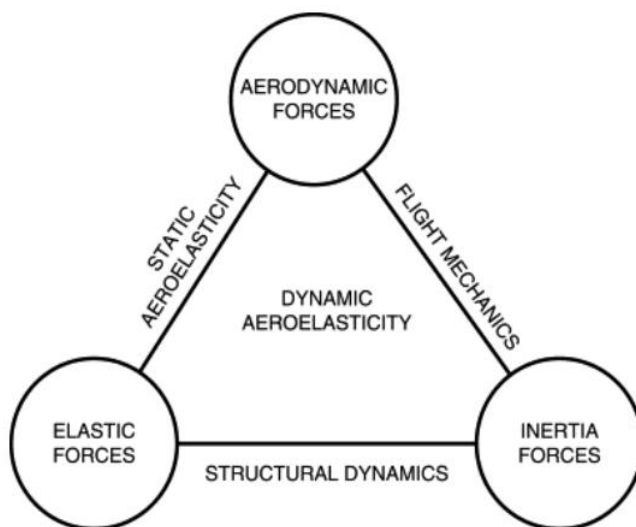
Řešení a prezentace výsledků konkrétních úloh harmonické metody je uvedena ve *čtvrté* kapitole. Nejdříve je metoda otestována na skalární rovnici na poli s jedno-

duchým a následně složeným periodickým vstupním signálem a poté pro výpočet jednoduchého oscilujícího proudového pole v rovinné trubce. Největší pozornost je věnována úloze kmitání profilu NACA 0012, která simuluje konkrétní problém v aeroelasticitě. Výsledné rozložení tlaku na stěně profilu a rychlostní pole je porovnáno s klasickou nestacionární metodou. Na závěr je zhodnocen výpočetní čas harmonické metody oproti klasickému nestacionárnímu řešení.

# 1 Aeroelasticita

Obor aeroelasticity je zaměřený na zkoumání interakcí pevných látek s tekutinami. Zajímá se o aerodynamické vlastnosti proudění, zejména o síly, které jsou na těleso přenášeny, jak se těleso deformuje a jak tato deformace ovlivňuje zpět proudové pole, které pak může opět zesílit svoje účinky na deformace. Tímto způsobem může dojít k divergentním situacím, které jsou ukončeny fatálním selháním konstrukce [6]. Některé jevy mohou ovlivňovat například řídicí prvky v leteckém průmyslu. K účinkům tekutiny se ale přičítají i vlivy objemových sil, jako jsou třeba zrychlení nebo tíha těles.

Vztah mezi jednotlivými silami popisuje trojúhelník aeroelastických sil na obrázku 1. Každá jeho strana reprezentuje konkrétní pár v oblasti mechaniky. Jeho střed obsahuje dynamickou aeroelasticitu, která je ovlivněna všemi zdroji sil.



Obrázek 1: Trojúhelník sil v aeroelasticitě [7]

Kombinací jednotlivých sil z tohoto trojúhelníku dostáváme nová odvětví

- dynamické síly + aerodynamika = stabilita a řízení,
- dynamické síly + mechanika tuhých těles = strukturální vibrace,
- aerodynamika + mechanika tuhých těles = statická aeroelasticita.

Zájem zkoumat aeroelasticitu se rozrůstá z oboru letectví i do odvětví, jako je stavební inženýrství a proudění okolo budov a mostů a nebo strojní inženýrství v oblasti turbomachinery, tedy zkoumání rotačních strojů, jako jsou kompresory nebo turbíny [8]. *Aeroelastický jev* lze podle jeho charakteru dělit na

1. statický
2. dynamický

Z toho vyplývají obory *statická* a *dynamická* aeroelasticita.

## 1.1 Statická aeroelasticita

*Statický* aeroelastický jev zanedbává setrvačné účinky a vnitřní a vnější silové účinky jsou konstantní v čase. Zkoumá se především jednoduché namáhání konstrukce. Mezi statické aeroelastické jevy například spadá:

- **Změna rozložení zatížení** - vlivem deformace se mění vlastnosti jako třeba poloha těžiště a tím i působení dalších sil [9].
- **Změna účinnosti řízení a reverze** - při natočení křídélka směrem dolů, dojde k navýšení vztlakové síly a momentu, který způsobí deformaci v podobě natočení křídla náběžnou hranou směrem k zemi. To umožní vytvořit novou sílu, která působí v opačném směru, než bylo původně zamýšleno. Je-li větší, než síla vznikající z natočení křídélka, dojde k reverzi řízení [10].
- **Torzní divergence** - vztlaková síla, která vzniká z geometrického tvaru profilu křídla, mívá zpravidla jinou polohu působišť, než je těžiště tohoto profilu. Vzniklá vzdálenost odchylky síly tvoří moment, který kroutivě deformuje křídlo. Deformací se navýší aerodynamická síla, který opětovně navýší deformaci [11].

## 1.2 Dynamická aeroelasticita

*Dynamický* aeroelastický jev zahrnuje už i setrvačné účinky deformací, které ovlivňují počáteční deformace nebo proměnlivé proudové pole, jde tedy o již komplexnější fenomén. Do této kategorie spadají i jevy s kmitavými charakteristikami. Do dynamických jevů se řadí například:

- **Aeroelastická odezva na dynamické zatížení** - jedná se o promítnutí vnějších nestacionárních jevů, jako je například vynucené kmitání. Deformace vytvoří další setrvačené síly anebo přidavná aerodynamická zatížení [9].

- **Buffeting** - je způsoben náhodnými poruchami plynoucích z turbulentního obtékání. Typickým případem je kmitání v úplavu vyvolaném jiným aerodynamickým prvkem (ocasní plocha ovlivněná úplavem křídla) a nebo jiným letounem. Nedochozí zde přímo k destruktivním podmínkám, za to ale může ovlivňovat životnost konstrukce způsobené cyklickým namáháním [12].
- **Servoelasticita** - v případě řízení letounu s posilovači dochází k dodání a pohlcení energie do konstrukce a při nevhodném sfázování řízení s deformacemi může docházet ke zvýšení kritické rychlosti flutteru [9].
- **Flutter** - jde o reakci konstrukce na impulzní zatížení. Je-li bilance dodané energie kladná, dojde k divergentnímu chování a až k destruktivním účinkům. Komplexnosti tohoto problému je věnována samostatná kapitola 1.4.

### 1.3 Vztah hmotnosti a tuhosti v letectví

Pro co nejlepší letové vlastnosti je důležitá co nejmenší hmotnost konstrukce [13]. Zároveň ale je potřeba zachovat určitou tuhost konstrukce. Tyto dva požadavky ale leží v protikladu a celá historie vývoje v leteckém průmyslu byla věnována hledáním optimálního poměru těchto dvou požadavků.

V *hmotnosti* se vyjadřuje jak celková hmotnost, tak i parametry, jako je třeba poloha těžiště nebo setrvačné a deviační momenty. *Tuhost* nám deformacemi vyjadřuje, jak reaguje konstrukce na zatížení. Vychází z materiálových charakteristik (například modul pružnosti v tahu a smyku) a geometrických charakteristik (například kvadratické momenty ploch, modul tuhosti) [9].

Tuhost a hmotnost jsou na sobě závislé a vychází z konkrétního konstrukčního řešení. Pevnostní kontroly pak vyhodnotí, zda splňují letecké předpisy [14]. Tyto kontroly jsou podrobněji popsány v [15]. Z bezpečnostních důvodů je tuhost brána se značným podhledem. To znamená, že jsou voleny vysoké bezpečnostní koeficienty při výsledném zpracování dat. Jedná se především o dynamickou aeroelasticitu, jejíž analýza nám ukazuje, že mnohé jevy jsou záludné nebo nepředvídatelné. V laboratorních podmínkách nelze vždy ideálně navodit situace z běžných podmínek a nebo příprava těchto experimentů je finančně a časově náročná. Vzhledem k tomu, že dynamické jevy zahrnují nestacionární jevy, je v případě počítačových simulací proudění (CFD - Computational Fluid Dynamics) potřeba značných výpočetních časů. Tento problém je i motivací této práce. Existují harmonické metody, která nám umožňují tento výpočetní čas výrazně zkrátit, jako je zjišťováno například v [16].

## 1.4 Flutter

V předchozích kapitolách byly rozebírány statické a dynamické aeroelastické jevy, při kterých vlivem proudění docházelo k deformaci a nebo při kterých vlivem deformace docházelo k výrazné změně proudového pole. Výsledkem těchto jevů byl stav, při kterém byl nalezen nový bod rovnováhy energie. Z technické praxe [17] víme, že ne vždy tento bod existuje. Můžeme předpokládat, že existuje situace, kde systém přijímá stále větší množství energie a chová se divergentně. To je případ flutteru - proudění způsobí deformace a deformace zpětně změní proudění. Toto divergentní chování ústí ve ztrátu stability a v destruktivní následky [11].

### 1.4.1 Základní vlastnosti flutteru

Pro demonstraci si lze křídlo letadla představit jako kmitající vetknutý nosník. Na ten působí různé síly a momenty vlivem proudění tekutin a setrvačných účinků z kmitání. Vzniknou deformace z průhybu a krutu. Pokud nosníku dovolíme pouze samotný ohyb, bude tlumení vždy dostatečné tomu, aby zabránilo divergentnímu flutteru [18]. Při pouhém krutu dojde k flutteru jedině, když úhel natočení dosáhne kritického úhlu (úhel náběhu, kdy dochází k odtržení proudu vzduchu). Z toho nám vychází, že pro vznik flutteru je důležitý spojení deformací ve více stupních volnosti. Experimenty, jako [19] nebo [20], ukázaly, že všechny body takto vetknutého nosníku se ohýbají a kroutí ve stejné fázi. Důležitým faktorem je to, že samotný ohyb a krut již ve fázi nejsou [11].

Předpokládáme, že pohyb prvků při flutterovém jevu je definován pěti parametry

1.  $l$  - lineární rozměr
2.  $U$  - rychlost proudění vzduchu
3.  $\rho$  - hustota vzduchu
4.  $\sigma$  - hustota strukturálního materiálu
5.  $K$  - koeficient torzní tuhosti

Výchylka libovolného bodu je popsána jakožto  $e^{-\epsilon t} \cos \omega t$ . Tlumící koeficient  $\epsilon$  získáme kombinací  $U$  a  $l$ , abychom měli odpovídající jednotky ( $s^{-1}$ ). Obdržíme tedy bezrozměrný výraz

$$\frac{\epsilon l}{U} = F\left(\frac{\rho}{\sigma}, \frac{K}{\sigma l^3 U^2}\right). \quad (1.4.1)$$

Aby měly dva systémy stejnou hodnotu  $\frac{\epsilon l}{U}$ , musí mít stejné poměry  $\frac{\rho}{\sigma}$  a  $\frac{K}{\sigma l^3 U^2}$ . Frekvence kmitání  $\omega$  je vyjádřena ve vztahu

$$k = \frac{\omega l}{U}, \quad (1.4.2)$$

kde  $k$  je nazýváno *Strouhalovým číslem* nebo také *redukovanou frekvencí* a existuje vztah [11]

$$k = f\left(\frac{\rho}{\sigma}, \frac{K}{\sigma l^3 U^2}\right). \quad (1.4.3)$$

Jestliže tyto dva poměry v parametrech funkce  $f$  mají stejnou hodnotu pro dva systémy, předpokládáme, že tyto systémy mají i stejné dynamické vlastnosti [11].

#### 1.4.2 Kritérium tuhosti a kritická rychlost flutteru

Z experimentů a výpočtů [21] na různých křídlech, u kterých byl pozorován flutter, bylo zjištěno, že k němu dochází pouze při hodnotách Strouhalova čísla nižších, než je kritická mez

$$k_{kr} = \frac{\omega c}{2U} = 0.9 \pm 0.12, \quad (1.4.4)$$

kde  $c$  značí délku tětiny profilu. Z bezpečnostních důvodů je žádoucí, aby redukovaná frekvence byla vyšší, než  $k_{kr}$ , neboli

$$U_{kr} = \frac{\omega c}{2k_{kr}} \quad (1.4.5)$$

(1.4.5) dává důležitý vztah pro kritickou rychlost flutteru, která musí být vždy vyšší, než konstrukční rychlost letounu.

Jediný parametr, kterým lze navýšit kritickou rychlost flutteru je tedy kritická tuhost  $k_{kr}$ . Pro návrhové aplikace se dá vyjádřit pomocí vztahů z kapitoly 1.4.1 jakožto

$$\frac{K}{\sigma l^3 U^2} \geq konst. \quad (1.4.6)$$

Dokud rovnice (1.4.6) platí, flutter nenastane [11]. Pro vyšetření jednotlivých typů nestabilit musí platit:

1. kritérium torzní tuhosti

$$\frac{K_\theta}{\rho U^2 s \bar{c}^2} \geq konst., \quad (1.4.7)$$

2. kritérium tuhosti pro ohyb

$$\frac{K_h}{\rho U^2 s^3} \geq konst., \quad (1.4.8)$$

kde

- $K_\theta = \frac{\text{kroucí moment na konci křídla}}{\text{krut na konci křídla}}$  značí tuhost křídla v krutu,
- $K_h = \frac{\text{největší ohybový moment} \cdot \text{polovina rozpětí}}{\text{ohyb konce křídla}}$  značí tuhost křídla v ohybu,
- $s$  je rovna polovině rozpětí,
- $\bar{c}$  představuje průměrnou délku tětiny po celém rozpětí křídla [11].

Kritická rychlost flutteru je velmi důležitým parametrem při flutterové analýze. Jeho zjištění je už náročnější. Z prvním modelem, jak tento problém řešit, přišel Theodorsen ve své zprávě [2]. Existuje i publikace [22], kde se hledá kritická rychlost flutteru a k ní příslušící frekvence oscilace pomocí Galerkinovi metody. V NASA technické zprávě [17] je prezentován přístup pomocí energické bilance a následná optimalizace redukování flutteru ovládacími plochami na náběžné a odtokové hraně křídla.



## 1.5 Aerodynamika profilu křídla

Při vyhodnocování aerodynamických sil na letoun musíme brát v potaz, že záleží na faktorech, jako je rychlost letu (pro účely modelování se používá IAS - indicated airspeed, tedy rychlost vůči proudění vzduchu) a vlastnostech tekutiny, jako hustota a tlak vzduchu a z nich vycházející teplota. Při výpočtech se uvažuje, že profil stojí v klidu a mění se pouze rychlost nenarušeného proudu.

### 1.5.1 Základní vlastnosti vzduchu v atmosféře

Pro standartní vlastnosti vzduchu platí tabulka 1.

$T_0$ - teplota na úrovni moře	288.16 $K$
$P_0$ - tlak na úrovni moře	101325 $N/m^2$
$\rho_0$ - hustota na úrovni moře	1.225 $kg/m^3$
$a_0$ - rychlost zvuku na úrovni moře	340.29 $m/s$
$R$ - plynová konstanta	287.05 $m^2/s^2 K$
$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ - poměr specifické tepelné kapacity za konstantního tlaku a konstantního objemu	1.4

Tabulka 1: Tabulka standartních vlastností vzduchu [13]

Závislost teploty na nadmořské výšce je vyjádřena jako

$$T = T_0 - \chi h, \quad (1.5.1)$$

kde konstanta  $\chi = 0.0065 K m^{-1}$  značí pokles teploty pro každých 1000 m a  $h$  nadmořskou výšku. To lze dále přepsat do tvaru

$$dT = T - T_0 = -\chi h. \quad (1.5.2)$$

V našem případě budeme uvažovat ideální plyn a to nám umožní použít stavovou rovnici v podobě

$$p = \rho RT \quad (1.5.3)$$

a rovnici hydrostatiky pro změnu tlaku jakožto

$$dp = p - p_0 = -\rho gh, \quad (1.5.4)$$

kde  $g$  je gravitační zrychlení. Spojením předchozích rovnic dostaneme vztah pro závislost tlaku na teplotě

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{g/\chi R} \quad (1.5.5)$$

a obdobně i závislost hustoty na teplotě jako

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{g/(\chi R)-1}. \quad (1.5.6)$$

Díky těmto rovnicím jsme schopni spočítat teplotu, tlak a hustotu vzduchu pro jakoukoliv nadmořskou výšku až do troposféry (11 000 m) [13]. Dalším parametrem je rychlost zvuku, která má taky závislost na nadmořské výšce, jelikož je definována v závislosti na teplotě jako

$$a = \sqrt{\gamma RT} = a_0. \quad (1.5.7)$$

### 1.5.2 Charakteristiky proudu tekutiny

Jedním ze základních parametrů proudění je Reynoldsovo číslo [23]

$$Re = \frac{u_\infty d}{\nu}, \quad (1.5.8)$$

kde  $u_\infty$  reprezentuje rychlost nenarušeného proudu tekutiny,  $d$  charakteristický rozměr obtékaného tělesa a  $\nu$  kinematickou viskozitu. Pod Reynoldsovým číslem bývá představován poměr setrvačných a viskozních sil v proudu tekutiny.

Při pohledu na proudění okolo tělesa s charakteristickým rozměrem  $d$  (může se například jednat o průměr válce nebo tětivu profilu křídla) a při předpokladu, že se tekutina skládá z individuálních molekul s náhodným pohybem, můžeme průměrnou vzdálenost molekul definovat koeficientem  $\lambda$  (*také nazýván střední volná dráha molekul*). Jestliže je  $\lambda$  řádově menší, než charakteristický rozměr  $d$ , poté proud tekutiny z pohledu obtékaného tělesa působí jako *kontinuální tok*. Je-li koeficient  $\lambda$  naopak řádově větší než  $d$ , jsou molekuly od sebe tak vzdálené, že nedochází k frekventním kolizím s obtékaným tělesem. Tento proud nazveme jako *volný molekulární tok* [23]. S volným molekulárním tokem se setkáváme hlavně ve vyšších vrstvách atmosféry, jinak v běžných případech drtivě převažuje kontinuální tok a ten bude uvažován i v dalších

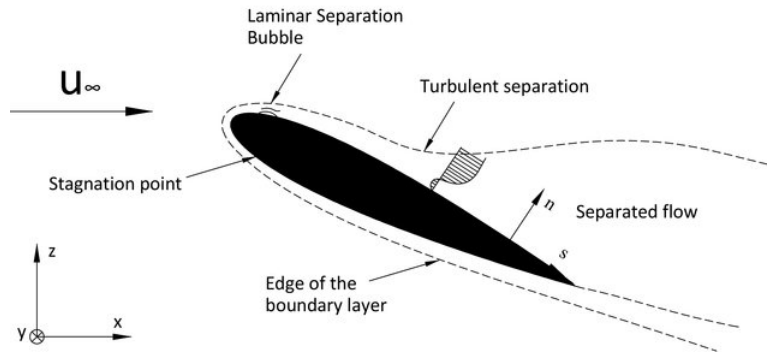
kapitolách.

Při pohybu jednotlivých molekul tekutiny dochází k lokálnímu transportu hmotnosti, hmoty a energie. Ten utvořil princip difúze hmoty, viskozitu z tření a vedení tepla. Proudění tekutin, u kterých pozorujeme tyto efekty, se nazývají *vazké* proudění. Ty, u kterých se nepředpokládá tření, vedení tepla nebo difúze, se nazývají proudění *nevazké*. V praxi ovšem lze viskózní proudění omezit do malé oblasti přilehlé k tělesu, kterou nazveme *mezní vrstvou*. Bohužel v mnoha aerodynamických aplikacích hraje roli aerodynamický odpor, který nelze adekvátně předpovědět využitím nevazkého proudění. Další případ jsou vysoké úhly náběhu leteckých profilů, kde se formuje značný úplav vlivem separace mezní vrstvy[24], jak lze vidět na obrázku 2.

Médium, u kterého hustota tekutiny není konstantní, se nazývá *stlačitelným*. V reálné situaci je všechno proudění do jisté míry stlačitelné. Pro Machova čísla

$$Ma_\infty = \frac{u_\infty}{a_0} < 0.3 \quad (1.5.9)$$

považujeme změnu hustoty za zanedbatelnou [25]. Jedná se o domluvenou hranici, do které se předpokládá, že chyba vzniklá nestlačitelným modelem výrazně neovlivní řešení. Rychlost zvuku  $a_0$ , která vystupuje ve vzorcích (1.5.7) a (1.5.9) udává rychlost šířené malých poruch v tekutině [26].

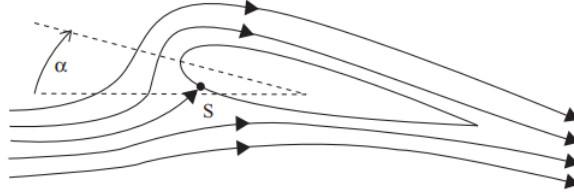


Obrázek 2: Separace proudu při obtékání profilu [27]

### 1.5.3 Vlastnosti proudění a tlakového pole okolo profilu

Profil křídla je dvourozměrný tvar, který získáme jakožto řez třírozměrného křídla po směru proudění. Proudění okolo křídla definujeme jakožto *stacionární*, je-li časově nezávislé. V případě pohybu profilu nebo odtrhávání úplavu je třeba proudění modelovat jako *nestacionární*.

Obtékání okolo profilu lze zobrazit pomocí proudnic [28], neboli proudových čar, které zobrazují pohyb jednotlivých částic, jejichž vektor rychlosti je tečný k proudnici v libovolném bodě. Proudnice se navzájem neprotínají [29].



Obrázek 3: Obtékání okolo symetrického profilu s nenulovým úhlem náběhu a se stagnačním bodem S [13].

Na obrázku 3 vidíme obtékání symetrického profilu s menším úhlem náběhu. I přes symetrii profilu již dochází k natočení proudu vzduchu směrem dolů. Rychlost, hustotu a tlak můžeme svázat pomocí Bernoulliho rovnice ve tvaru

$$p + \frac{1}{2}\rho u^2 = \text{konst.} \quad (1.5.10)$$

Při porovnání proudu na jedné proudnici v nerušené oblasti a v bodě poblíž profilu, dostaneme rovnici

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^2 = p + \frac{1}{2}\rho u^2. \quad (1.5.11)$$

Aby byla zachována rovnováha, tedy platila tato rovnice, dojde při urychlení proudu kolem profilu k poklesu tlaku a naopak.

Rozložení tlaku [30] se obvykle zobrazuje přes tlakový koeficient  $c_p$ , který tlak vztahuje ke statickému v nenarušeném tvaru a počítá se podle

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2}. \quad (1.5.12)$$

Na obrázku 4 lze pozorovat, jak se mění rozložení tlaku pro kladný a záporný úhel náběhu.

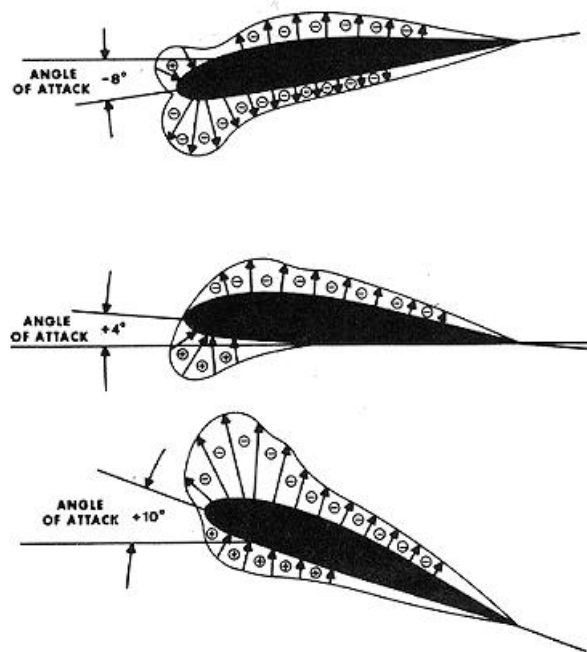


Figure 17-7 Pressure Distribution on an Airfoil

Obrázek 4: Rozložení tlaku kolem profilu pro různé úhly náběhu [31]

## 2 Matematický model

Hlavní náplní této práce je proudění nestlačitelných tekutin v takovém režimu, kde je bezpečné použít model kontinua. Je zvoleno modelování pomocí Navierových-Stokesových rovnic a s nimi souvisejících vztahů. Tento model je používán pro řešení inženýrských aplikací, jak je publikováno například v [3]. Tento koncept byl popsán v mnoha zdrojích, jako třeba v [24] nebo v [28]. Větší pozornost je věnována odvození harmonické metody vycházející z Diskrétní Fourierovy transformace.

### 2.1 Materiálový a prostorový popis kontinua

Pro popis pohybu bodu tělesa (materiálového bodu), použijeme polohový vektor  $\mathbf{X}$ . Popis pohybu libovolné částice v oblasti  $\Omega$  do polohy  $\mathbf{x}$  můžeme vyjádřit pomocí vektoru posunutí  $\mathbf{v}_p$  jako

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{v}_p. \quad (2.1.1)$$

Existují pak dva způsoby, jak tento materiálový bod popisovat vzhledem ke společnému kartézskému souřadnicovému systému při přetvoření oblasti  $\Omega_0$  ( $\Omega$  v čase  $t = 0$ ) na oblast  $\Omega_t$  ( $\Omega$  v čase  $t$ ):

1. materiálové souřadnice (*Lagrangeův popis*) popsané vektorem  $\mathbf{X}$ ,
2. prostorové souřadnice (*Eulerův popis*) popsané vektorem  $\mathbf{x}$ .

V *Lagrangeově* formulaci kontinua jsou jednotlivé materiálové body pevně spojeny s deformacemi zkoumané látky. Tato vlastnost se zejména hodí na výpočty při pevnostní analýze [32]. *Eulerova* formulace kontinua je vhodná pro modelování proudění tekutin. Místo poloh částic sledujeme jejich vektory rychlosti. Pevně uchycený kontrolní objem umožňuje velké deformace a pohyby kontinua. Nevýhodou je nutnost definovat umělé okrajové podmínky [32].

Materiálové a prostoré souřadnice můžeme svázat pomocí funkce

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t). \quad (2.1.2)$$

Rychlost jednotlivých materiálových bodů se pak určí derivací jednotlivých prostorových složek podle času:

$$u_{p_i}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial x_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (2.1.3)$$

V Eulerově formulaci zavedeme obecnou veličinu  $\phi(\mathbf{X}, t) = \varphi(\mathbf{x}, t)$  v materiálových a prostorových souřadnicích. Pro sledování vývoje této veličiny v čase, je třeba provést derivace podle času

$$\dot{\phi}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}, t), t)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (2.1.4)$$

a po dosazení rychlosti vyjádřené v (2.1.3) dostaneme vztah

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u_{p_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (2.1.5)$$

a získáme tak časovou derivaci podél trajektorie, která se také nazývá materiálová derivace. Člen  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u_{p_i}$  nazveme *konvektivní* derivací a  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  derivací *lokální* [33].

## 2.2 Zákony zachování a bilanční rovnice

Zákony zachování zformulujeme jako bilanční rovnice sledovaného média v oblasti  $\Omega$ . Pro libovolnou bilancovanou veličinu  $\phi$  na kontrolním objemu  $\Omega$  můžeme napsat její integrální hodnotu  $\Phi$  podle [34] jakožto

$$\Phi = \int_{\Omega} \rho \varphi \, d\Omega. \quad (2.2.1)$$

Pro bilancování je nutné zachytit časovou změnu  $\Phi$ . Abychom tuto změnu mohli popsat lokálně, aplikujeme na (2.2.1) *Reynoldsovův Transportní teorém* a dostaneme tvar

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \varphi \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varphi) \, d\Omega + \int_{\partial S} \rho \varphi (\mathbf{u} - \mathbf{u}_b) \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (2.2.2)$$

kde  $\mathbf{u}$  znázorňuje rychlost proudění tekutiny,  $\mathbf{u}_b$  rychlost pohybu hranice kontrolní oblasti (pro případy s pevným kontrolním objemem v prostoru je roven nule) a  $\mathbf{n}$  normálový vektor plochy  $S$  s orientací vně [35]. Obdobně, jako u materiálové derivace v kapitole 2.1, se první člen pravé strany nazývá lokálním a druhý člen konvektivním.

### 2.2.1 Zákon zachování hmoty

Při bilancování hmoty předpokládáme, že se všechna hmota zachovává a proto časovou změnu vztahu (2.2.1) zapíšeme jako

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \varphi \, d\Omega = 0 \quad (2.2.3)$$

Po dosazení do Reynoldsova transportního teorému (2.2.2)  $\varphi \equiv 1$ , dostaneme vztah

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (2.2.4)$$

Diferenciální podobu (2.2.4)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2.5)$$

nazveme *rovnici kontinuity* [23]. Pro proudění nestlačitelné tekutiny se vztah (2.2.5) zjednoduší na tvar [34]

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.2.6)$$

### 2.2.2 Zákon zachování hybnosti

Změna hybnosti se podle první impulsové věty rovná výslednicí všech působících sil. Proto platí vztah

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} d\Omega = \mathbf{F}, \quad (2.2.7)$$

kde  $\mathbf{F}$  je vektor obecných sil. Na kontrolní objem můžou působit dva typy sil [34]:

1. **Vnější a objemové síly** působí přímo na hmotu v kontrolním objemu. Typickým případem jsou gravitační nebo centrifugální síly. Jejich příspěvek popisuje integrál

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{f}_e d\Omega. \quad (2.2.8)$$

2. **Povrchové síly** působí přímo na povrch kontrolního objemu a vznikají pouze z tlakového rozložení okolní tekutiny  $-p\mathbf{I}$  a nebo z tenzoru povrchového napětí  $\boldsymbol{\tau}$  (výsledek tření jednotlivých vrstev tekutiny). Vyjdeme ze vztahu

$$\int_S \mathbf{f}_p dS = \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.2.9)$$

kde  $\mathbf{f}_p$  je výslednice působících sil a  $\boldsymbol{\sigma}$  Cauchyho tenzor napětí, který můžeme



rozložit jako

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}. \quad (2.2.10)$$

Levou stranu vztahu (2.2.7) rozvineme podle Reynoldsova transportního teorému a do pravé dosadíme všechny působící síly a dostaneme tvar

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{u} \, d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f}_e \, d\Omega - \oint_{\partial\Omega} p \mathbf{n} \, dS + \oint_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) \, dS \quad (2.2.11)$$

pro libovolný kontrolní objem  $\Omega$  pevně zafixovaný v prostoru [34]. Zákon zachování hybnosti lze přepsat do diferenciálního tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i u_i - \sigma_{ij}) = \rho f_{e_i}. \quad (2.2.12)$$

## 2.3 Navierovy-Stokesovy rovnice

V předchozích kapitolách byly odvozeny bilanční rovnice pro hmotnost a hybnost. Pro účely modelování proudění tekutin spojíme tyto rovnice do jedné soustavy. Z kapitoly 2.2.2 máme rovnici bilance hybnosti v konzervativní formě

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i u_j - \sigma_{ij}) = \rho f_{e_i}. \quad (2.3.1)$$

Pro naše výpočty budeme uvažovat newtonovskou tekutinu, pro kterou platí

$$\tau_{ij} = \rho\nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.3.2)$$

Dosazením rovnice kontinuity a (2.3.2) do rovnice (2.3.1) obdržíme vztah

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} + f_{e_i}, \quad (2.3.3)$$

kde  $\nu$  značí kinematickou viskozitu. Pro nestlačitelnou tekutinu se (2.3.3) zjednoduší na

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i + f_{e_i}. \quad (2.3.4)$$

Obdržíme soustavu *Navierových-Stokesových rovnic*, kterou můžeme podle [29] napsat ve tvaru

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}) = -\frac{\nabla p}{\rho}, \quad (2.3.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.3.6)$$

## 2.4 Fourierova transformace

Účelem Fourierovy transformace je spektrální rozklad neperiodické funkce. To vyžaduje mít schopnost analyzovat libovolnou frekvenci ve vstupním signálu podle [36] v podobě

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt, \quad (2.4.1)$$

kde tento Fourierův integrál je definován v prostoru  $L_1(\mathbb{R})$ , ve kterém pro všechny funkce platí

$$\int f(t) dt < +\infty \quad (2.4.2)$$

a z této frekvence lze získat obraz funkce

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (2.4.3)$$

který vyjadřuje, kolik oscilací o frekvenci  $\omega$  je ve funkci  $f$ . Výsledkem transformace je schopnost převodu vstupního signálu mezi časovou a frekvenční doménou pomocí sinusových a kosinových funkcí.

### 2.4.1 Fourierova řada

Vycházíme z obecného zápisu trigonometrického polynomu pomocí součtu řady podle

$$p(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{2\pi i k \frac{t}{a}} = c_0 + \sum_{k=1}^N (c_k e^{2\pi i k \frac{t}{a}} + c_{-k} e^{-2\pi i k \frac{t}{a}}) \quad (2.4.4)$$

a po nahrazení goniometrickými funkcemi dostaneme trigonometrickou řadu ve tvaru

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \left( a_k \cos \frac{2\pi k t}{a} + b_k \sin \frac{2\pi k t}{a} \right), \quad (2.4.5)$$

kde  $p(t)$  je obecná funkce komplexní proměnné integrovatelná na intervalu  $[t_0, t_0 + a]$  a kde  $a$  je perioda funkce  $p(t)$  [37].

Jestliže  $f(t)$  je periodická s periodou  $a > 0$ , existuje  $\int_0^a |f(t)|^2 dt$  a splňuje Dirichletovy podmínky

1. po částech spojitá,
2. po částech monotónní,

pak trigonometrickou řadu nazvu *Fourierovou řadou* reprezentovanou vztahem

$$f(t) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos \frac{2\pi kt}{a} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{a} \quad (2.4.6)$$

a její součet [38] má podobu

$$S(t_0) = \frac{1}{2} \left( \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) \right), \quad (2.4.7)$$

kde

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi kt}{a} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{a} \quad (2.4.8)$$

a koeficienty Fourierovy řady  $a_k$  a  $b_k$  mají tvar

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{a} \int_0^a f(t) dt, \\ a_k &= \frac{2}{a} \int_0^a f(t) \cos \frac{2\pi kt}{a} dt, \\ b_k &= \frac{2}{a} \int_0^a f(t) \sin \frac{2\pi kt}{a} dt. \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Vztah

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.4.10)$$

nazveme Fourierovým integrálem a následné rovnice

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

využijeme pro přechod mezi časovou a frekvenční doménou.

### 2.4.2 Diskrétní Fourierova transformace

Klasická Fourierova transformace vyžaduje znalost spojitě funkce, která reprezentuje vstupní data. Máme-li však dispozici pouze diskrétní hodnoty, musíme použít Diskrétní Fourierovu transformaci.

Je dána spojitá a periodická funkce s periodou  $a$

$$f(t) = \sum_k^N c_k e^{i\frac{2\pi kt}{a}}. \quad (2.4.12)$$

Provedeme diskretizaci s časovým krokem  $\Delta t$ :

$$t_j = j\Delta t = j\frac{a}{N} \quad (2.4.13)$$

a dostaneme

$$f(t_j) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} c_k e^{i\frac{2\pi k}{a} j\frac{a}{N}} \quad (2.4.14)$$

a po přeindexování

$$f(t_j) = \sum_{k=0}^N c_k e^{i\frac{2\pi kj}{N}} \quad (2.4.15)$$

Tento rozvoj můžeme přepsat obdobně, jako jsme to udělali pro Fourierovu řadu, a to do tvaru

$$f_j = c_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} A_k \sin(\omega_k t_j + \varphi_k), \quad (2.4.16)$$

kde  $A_k = 2|C_k|$  pro  $k = 0, \dots, \frac{N}{2}$  je amplituda a  $\varphi_k$  je fázové posunutí.

Dalším krokem je nalézt koeficienty  $c_k$  z (2.4.15). Funkce  $e^{i\frac{2\pi kj}{N}}$  nám dává diskrétní hodnoty, které rotují na jednotkové kružnici v komplexní rovině pro  $k_j = 0, \dots, N$ . Jelikož poslední hodnota je identická s první:

$$e^{i\frac{2\pi 0j}{N}} = e^{i\frac{2\pi Nj}{N}}, \quad (2.4.17)$$

dostáváme pouze  $N$  nezávislých funkcí a proto dostáváme řadu ve tvaru

$$f(t_j) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{c}_k e^{i\frac{2\pi k}{N}j}, \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (2.4.18)$$

Přeznačíme  $e^{i\frac{2\pi k}{N}j} = w_{kj}$  a přepíšeme rovnici (2.4.18) do vektorového tvaru

$$\mathbb{Z} = \tilde{c}_0 \mathbb{W}_0 + \dots + \tilde{c}_k \mathbb{W}_k + \dots + c_{N-1} \mathbb{W}_{N-1} \quad (2.4.19)$$

a tudíž je vektor  $\mathbb{Z}$  vyjádřen jako lineární kombinace vektorů  $\mathbb{W}_0, \mathbb{W}_1, \dots, \mathbb{W}_{N-1}$ . Platí, že

$$\mathbb{W}_k \cdot \mathbb{W}_j \begin{cases} N, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (2.4.20)$$

a z toho vyvozujeme, že vektory  $\mathbb{W}_0, \mathbb{W}_1, \dots, \mathbb{W}_{N-1}$  tvoří bázi vektorového prostoru o dimenzi  $N$ .

Výsledný zápis  $\mathbb{Z} = c_0 \mathbb{W}_0 + c_1 \mathbb{W}_1 + \dots + c_{N-1} \mathbb{W}_{N-1}$  pak může být napsán v maticovém tvaru jakožto

$$\mathbb{Z} = \mathbb{F}_N \cdot \mathbb{C}, \quad (2.4.21)$$

kde  $\mathbb{F}_N$  představuje matici  $N \times N$  a  $\mathbb{C}$  vektor o velikosti  $N$ . Z této rovnice můžeme vyjádřit vektor koeficientů jakožto

$$\mathbb{C} = \mathbb{F}_N^{-1} \cdot \mathbb{Z} \quad (2.4.22)$$

a pak přepíšeme  $\mathbb{C}$ , jakožto

$$\mathbb{C} = \mathcal{F}_d\{\mathbb{Z}\} \quad (2.4.23)$$

a tím pádem dostaneme Diskrétní Fourierovu transformaci vektoru  $\mathbb{Z}$ .

## 2.5 Harmonická metoda

Při řešení problémů vznikajících interakcemi pevné látky s tekutinou, se často setkáváme s kmitavými charakteristikami. Abychom tyto případy mohli řešit klasickými CFD metodami, je třeba nestacionárních výpočtů. Ty jsou však velmi náročné na výpočetní výkon. HB (Harmonic Balance), neboli harmonická metoda, vznikla za účelem snížení výpočetního času na právě nestacionárních výpočtech. Předpoklad kmitavé charakteristiky umožňuje využití Fourierovy řady, která tvoří jádro HB. S počtem členů Fourierovy řady roste přesnost ale i výpočetní náročnost.

### 2.5.1 Aplikace Fourierovy transformace na skalární transport

Za předpokladu periodického problému můžeme rovnici konvekce-difúze zapsat jako

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \mathcal{R} = 0, \quad (2.5.1)$$

kde  $\mathcal{R}$  představuje konvektivní, difúzní a zdrojový člen a  $Q$  primární veličinu. Tyto členy, jak je uvedeno v předchozí kapitole, lze rozepsat pomocí Fourierovy řady jako

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_0 + \sum_{i=1}^n Q_{S_i} \sin(i\omega t) + Q_{C_i} \cos(i\omega t), \\ \mathcal{R}(t) &= R_0 + \sum_{i=1}^n R_{S_i} \sin(i\omega t) + R_{C_i} \cos(i\omega t). \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Je třeba rozlišovat proměnné psané psacím písmem ( $Q$ ,  $\mathcal{R}$ ), které spadají do časové domény a proměnné psané tiskacím písmem, které spadají do domény frekvenční. V rovnici (2.5.2) je počet harmonických frekvencí libovolný a vybírá se podle typu řešeného problému. Výsledný počet členů bude vždy  $2n + 1$  reprezentující střední hodnotu a sinus a kosinus v každé harmonické frekvenci, jejichž počet se značí  $n$ .

Po dosazení rozvinutých členů zpět do rovnice (2.5.1) a zderivování  $Q$  ve frekvenční doméně, dostaneme rovnici se sčítacím indexem  $i$

$$\begin{aligned} \omega Q_{S_i} \cos(\omega t) - \omega Q_{C_i} \sin(\omega t) + \\ R_{S_i} \cos(\omega t) + R_{C_i} \sin(\omega t) = -R_0 \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

kterou můžeme přepsat do maticového zápisu

$$\omega \mathbb{A} \mathbb{Q} + \mathbb{R} = 0. \quad (2.5.4)$$

Obdobně, jako jsme vytvořili vztahy (2.4.21) a v (2.4.22) pro Diskrétní Fourierovu transformaci, tak získáme

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &= \mathbb{E}Q(t) \\ \mathbb{R} &= \mathbb{E}Q(t) \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

pro převod z časové do frekvenční domény. Koeficienty, ze kterých se skládá matice  $\mathbb{E}$ , se napočítají při Diskrétní Fourierově transformaci pro  $2n+1$  časových kroků s  $n$  harmonickými frekvencemi. Tyto časové instanty budou rozloženy rovnoměrně po celé periodě  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

### 2.5.2 Sestavení soustavy rovnic pro řešení skalárního transportu

Diskrétní Fourierova transformace pro jednotlivé časové instanty  $t_i$  členu  $Q_{t_i}$  má podobu

$$Q_{t_i} = Q_0 + Q_S \sin(\omega t_i) + Q_C \cos(\omega t_i), \quad i = 1, \dots, 2n + 1. \tag{2.5.6}$$

Tuto soustavu rovnic si můžeme přepsat do maticového tvaru

$$Q_{t_i} = \mathbb{E}^{-1}Q \tag{2.5.7}$$

Přechodová matice  $\mathbb{E}$  pak dostane tvar

$$\mathbb{E} = \frac{2}{2n+1} \begin{bmatrix} \sin(\omega t_1) & \sin(\omega t_2) & \dots & \sin(\omega t_{2n+1}) \\ \sin(2\omega t_1) & \sin(2\omega t_2) & \dots & \sin(2\omega t_{2n+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin(n\omega t_1) & \sin(n\omega t_2) & \dots & \sin(n\omega t_{2n+1}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} \\ \cos(\omega t_1) & \sin(\omega t_2) & \dots & \cos(\omega t_{2n+1}) \\ \cos(2\omega t_1) & \cos(2\omega t_2) & \dots & \cos(2\omega t_{2n+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(n\omega t_1) & \cos(n\omega t_2) & \dots & \cos(n\omega t_{2n+1}) \end{bmatrix}, \tag{2.5.8}$$

kde  $t_{2n+1}$  reprezentuje časovou instantu

$$t_i = \frac{Ti}{2n+1}, \tag{2.5.9}$$



používanou i pro přepočítání času z frekvenční do časové domény. Z toho lze vyzorovat, že nám tato metoda umožní výpočet pouze v  $2n+1$  časových instancích [39].

Po dosazení převodových vztahů do rovnice (2.5.4) dostaneme soustavu  $2n+1$  rovnic, která se dá v maticovém tvaru zapsat jako

$$\omega \mathbb{E}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{E} \mathbb{Q} + \mathbb{R} = 0. \quad (2.5.10)$$

Pomocí trigonometrického vzorce  $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$  se zbavíme kosínových funkcí a zbydou nám pouze ty sínové.

Rovnici (2.5.10) rozdělíme na klasické členy (konvekce a difúze) na jedné straně a členy vzniklé Fourierovou transformací na druhé do tvaru

$$\mathbb{R} = -\omega \mathbb{E}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{E} \mathbb{Q}. \quad (2.5.11)$$

Po roznásobení matic  $\mathbb{E}$ ,  $\mathbb{A}$  a  $\mathbb{E}^{-1}$  dostaneme soustavu rovnic

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} Q_{t_i}) - \nabla \cdot (\gamma \nabla Q_{t_i}) = -\frac{2\omega}{2n+1} (Q_{t_i} \sum_{k=1}^n k \sin(k\omega j n t_i)), \quad (2.5.12)$$

kde

- $i \in \{1, 2, \dots, 2n+1\}$  je volný index označující rovnice soustavy pro jednotlivé časové instancie
- $j \in \{1, 2, \dots, 2n\}$
- $l \in \{1, 2, \dots, 2n\} \setminus \{i\}$  značí sčítací index členů  $Q_l$ , tedy člen, ve kterém jsou nasčítané členy  $Q$  ze zbylých rovnic soustavy, díky čemuž jsou všechny rovnice soustavy provázány

Zdrojový člen, tedy člen na pravé straně, můžeme ještě zjednodušit vztahem

$$P_m = \sum_{k=1}^n k \sin(k\omega m t_i), \quad \text{pro } m = \{1, 2, \dots, 2n\}. \quad (2.5.13)$$

Koeficienty  $P$  uplatníme v maticovém součinu  $\mathbb{E} \mathbb{A} \mathbb{E}^{-1}$  z rovnice (2.5.11) a dostaneme symetrickou matici

$$\mathbb{E}\mathbb{A}\mathbb{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & P_1 & P_2 & \dots & P_{2n} \\ -P_1 & 0 & P_1 & \dots & P_{2n-1} \\ -P_2 & -P_1 & 0 & \dots & P_{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -P_{2n} & -P_{2n-1} & -P_{2n-2} & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.5.14)$$

Rovnice pro první časovou instantu má pak tvar [40]

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}Q_{t_1}) - \nabla \cdot (\gamma \nabla Q_{t_1}) = -\frac{2\omega}{2n+1} (P_1 Q_{t_2} + P_2 Q_{t_3} + \dots + P_{2n} Q_{t_{2n+1}}). \quad (2.5.15)$$

Po zobecnění pro všechny časové instanty dostaneme soustavu  $2n+1$  rovnic ve tvaru

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}Q_{t_i}) - \nabla \cdot (\gamma \nabla Q_{t_i}) = -\frac{2\omega}{2n+1} \left( \sum_{j=1}^{2n} P_j Q_{t_i} \right). \quad (2.5.16)$$

### 3 Metoda konečných objemů

Předmětem této kapitoly je diskretizace parciálních diferenciálních rovnic, jejíž výsledkem je systém algebraických rovnic. Diskretizace jednotlivých členů bude popsána na obecné transportní rovnici pro modelování bilance skaláru  $\phi(\mathbf{x}, t)$  a která má podobu:

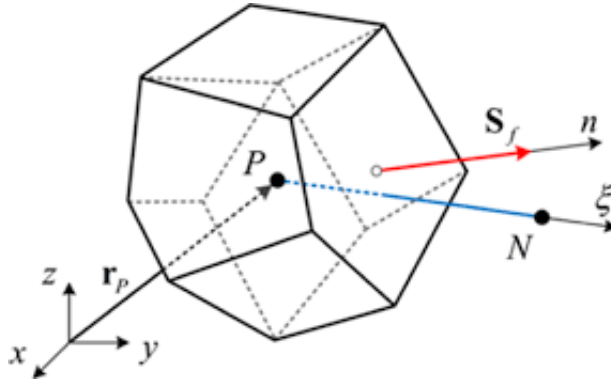
$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{C} \phi) - \nabla \cdot (\rho \Gamma_{\phi} \nabla \phi) = S_{\phi}(\phi) \quad (3.0.1)$$

Tato parciální diferenciální rovnice druhého řádu se dělí na následující členy

- $\frac{\partial \rho \phi}{\partial t}$  - časová derivace (nestacionární člen)
- $\nabla \cdot (\rho \mathbf{C} \phi)$  - konvektivní člen
- $-\nabla \cdot (\rho \Gamma_{\phi} \nabla \phi)$  - difúzivní člen
- $\nabla_{\phi} = S_{\phi}(\phi)$  - zdrojový člen,

#### 3.1 Diskretizace v prostoru

Výpočetní oblast rozdělíme na konečný počet diskrétních podoblastí, které se nazývají kontrolní objemy a nebo také výpočetní buňky.



Obrázek 5: Kontrolní objem pro Metodu konečných objemů [41]

V každé buňce se nachází bod P s polohovým vektorem  $\mathbf{r}_P$ , ve kterém jsou diskretizované jednotlivé proměnné. Tento bod se nachází v geometrickém těžišti buňky definovaným jako [42]

$$\int_p (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) dV = \mathbf{0}. \quad (3.1.1)$$

Každá stěna má přiřazený vektor  $\mathbf{S}_f$ , který směřuje z buňky ven, je normálový k této stěně a jeho velikost je rovna ploše této stěny a k němu jednotkový vektor  $\mathbf{n}_f$ .

### 3.1.1 Diskretizace gradientu

Tok na hranici kontrolního objemu spočítáme jako součet toků na jednotlivých stěnách

$$\int_S \phi \, dS = \sum_k \int_{S_P} \phi \, dS. \quad (3.1.2)$$

Tok  $\phi$  je zde myšlen jako hodnota ve středu stěny, ale my tyto hodnoty máme diskretizovány pro střed buňky. Abychom získali přesnost druhého řádu, musíme tuto hodnotu interpolovat. K tomu použijeme centrální diferencí [42]. Při přepisování veličiny na stěnu buňky pomocí centrálního schématu se nám rychlost na stěně  $u_f$  mezi dvěma sousedními buňkami A a B s rychlostmi na stěnách  $u_A$  a  $u_B$  lineárně interpoluje pomocí

$$u_f = w_f u_A + (1 - w_f) u_B, \quad (3.1.3)$$

kde nám váha  $w_f$  představuje vzdálenost stěny od jednotlivých středů sousedních buněk a počítá se podle

$$w_f = \frac{\|\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{f'}\|}{\|\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A\|}, \quad (3.1.4)$$

jak je uvedeno v [35]. Zanedbává se zde tedy vzdálenost  $x_f$  a  $x'_{f'}$ . U zdeformovanějších sítí, kde se spojnice středů sousedních buněk více vzdaluje od středu stěny mezi těmito buňkami, může váha napomáhat k nestabilitě při výpočtu. Doporučuje se váhu držet v rozmezí (0, 2) [34]. Máme-li spočítanou rychlost na stěně, můžeme diskretizovat konvektivní člen. Obdržíme gradient pole  $\phi_P$  ve středu buňky pomocí vzorce z [43]

$$\nabla \phi_P = \frac{1}{V_P} \sum_{faces} \phi_f \mathbf{S}_f, \quad (3.1.5)$$

kde  $V_C$  udává objem kontrolního objemu (buňky),  $S_f$  vektor plochy jednotlivých stěn buňky a  $\phi_f$  je tok ve středu stěny.

### 3.1.2 Diskretizace konvektivního členu

Je-li kontrolní objem tvořen plochými stěnami, můžeme aproximovat přes hodnoty na stěně pomocí

$$\int_V (\nabla \cdot \phi) dV = \oint_{\partial V} \phi \cdot d\mathbf{S} \approx \sum_f \int_f \phi \cdot dS_f \quad (3.1.6)$$

Integrály přes jednotlivé stěny dále aproximujeme podle

$$\int_f \phi \, dS \approx \phi_f S_f \quad (3.1.7)$$

Vzhledem k tomu, že  $\phi$  není k dispozici na stěně kontrolního objemu, je třeba tuto hodnotu interpolovat pomocí jedné z již uvedených metod.

Konvektivní člen se pak upraví podle

$$\int_{V_p} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \phi) dV = \sum_f \mathbf{S}(\rho \mathbf{u} \phi)_f = \sum_f F \phi_f, \quad (3.1.8)$$

kde  $F$  reprezentuje hmotnostní tok skrze stěnu  $f$ , tok na stěně  $\phi_f$  získáme buď stejnou lineární interpolací, jako jsme použili v (3.1.3), nebo použijeme up-wind schéma, kde hodnota  $\phi$  se určuje podle směru proudění. Podle [42] označením vyšetřovaného kontrolního objemu indexem  $P$  a sousedního indexem  $N$ , určíme tok na stěně  $\phi_f$  pomocí

$$\phi_f = \begin{cases} \phi_P & \text{pro } F \geq 0, \\ \phi_N & \text{pro } F < 0. \end{cases}$$

Použijeme kombinaci up-wind schéma s centrální diferencí

$$\phi_f = (1 - \gamma) \phi_f)_{UW} + \gamma(\phi_f)_{CD}, \quad (3.1.9)$$

kde koeficient  $\gamma$  ( $0 \leq \gamma \leq 1$ ) určuje množství numerické difúze.

### 3.1.3 Diskretizace difúzního členu

Použijeme podle [42] vztah

$$\int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \Gamma_\phi \mathbf{C} \nabla \phi) dV = \sum_f \mathbf{S}(\rho \Gamma_\phi \nabla \phi)_f = \sum_f (\rho \Gamma_\phi)_f \mathbf{S} \cdot (\nabla \phi)_f. \quad (3.1.10)$$

Máme-li ortogonální síť, lze upravit  $\mathbf{S} \cdot (\nabla \phi)_f$  jako

$$\mathbf{S} \cdot (\nabla \phi)_f = |\mathbf{S}| \frac{\phi_N - \phi_P}{|\mathbf{d}|}, \quad (3.1.11)$$

kde vektor  $\mathbf{d}$  značí spojnicí geometrického středu buňky a středu stěny, na které se počítá tok, a pomocí  $P$  značíme vyšetřovanou buňku a pomocí  $N$  buňku sousední. V alternativní metodě se pro výpočet dvou sousedních buněk použije vztah

$$(\nabla \phi)_P = \frac{1}{V_P} \sum_f \mathbf{S} \phi_f. \quad (3.1.12)$$

Pro výpočet toku na stěně je nutné použít interpolaci

$$(\nabla \phi)_f = f_x (\nabla \phi)_P + (1 - f_x) (\nabla \phi)_N. \quad (3.1.13)$$

V praxi si však více setkáváme s neortogonální sítí, kde je třeba použít systém korekcí. V tom případě si člen  $\mathbf{S} \cdot (\nabla \phi)_f$  rozdělíme na ortogonální a neortogonální příspěvek pomocí

$$\mathbf{S} \cdot (\nabla \phi)_f = \Delta \cdot (\nabla \phi)_f + \mathbf{k} \cdot (\nabla \phi)_f, \quad (3.1.14)$$

kde musí být splněno

$$\mathbf{S} = \Delta + \mathbf{k}, \quad (3.1.15)$$

kde vektor  $\Delta$  je paralelní s vektorem  $\mathbf{d}$  ze vztahu (3.1.11). Příklady způsobů, jak tento vektor vypočítat jsou uvedeny v [42] (kap. 3.3).

### 3.1.4 Diskretizace zdrojového členu

Zdrojový člen, reprezentovaný v obecné transportní rovnici (3.0.1) jako  $S_\phi(\phi)$ , je obecnou funkcí  $\phi$ . Před diskretizací je provedena linearizace podle [44] jakožto

$$S_\phi(\phi) = Su + Sp \phi. \quad (3.1.16)$$

Objemový integrál je pak počítán jako

$$\int_{V_p} S_\phi(\phi) dV = S_u V_p + S_p V_p \phi_P \quad (3.1.17)$$

### 3.2 Numerické řešení Navierových-Stokesových rovnic

Pro převod na algebraické rovnice potřebujeme provést úplnou diskretizaci. Předpokládejme tvar obecné transportní rovnice (3.0.1) podle [45]

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_P} \rho \phi dV + \int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \phi) dV - \int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi) dV \right] dt \quad (3.2.1)$$

$$= \int_t^{t+\Delta t} \left( \int_{V_P} S_\phi(\phi) dV \right) dt.$$

Po aplikaci diskretizací z minulých kapitol na jednotlivé členy a za předpokladu, že se kontrolní objemy nemění v čase, dostáme semi-diskrétní tvar

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} \right)_P V_P + \sum_f F \phi_f - \sum_f (\rho \Gamma_\phi)_f \mathbf{S}(\nabla \phi)_f \right] dt \quad (3.2.2)$$

$$= \int_t^{t+\Delta t} (Su V_P + Sp V_P \phi_P) dt.$$

Prostorovou a časovou derivaci přepíšeme podle [42] do podoby

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} = \frac{\rho_P^n \phi_P^n - \rho_P^o \phi_P^o}{\Delta t}, \quad (3.2.3)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \phi(t) dt = \frac{1}{2} (\phi^o + \phi^n) \Delta t, \quad (3.2.4)$$

kde  $\phi^n = \phi(t + \Delta t)$ . Po dosazení nových členů (3.2.3) a (3.2.4) do rovnice (3.2.2) a předpokladu konstantní hustoty a difúznosti obdržíme Crankovo-Nicolsonovo schéma ve tvaru

$$\frac{\rho_P^n \phi_P^n - \rho_P^o \phi_P^o}{\Delta t} V_P + \frac{1}{2} \sum_f F \phi_f^n - \frac{1}{2} \sum_f (\rho \Gamma_\phi)_f \mathbf{S}(\nabla \phi)_f^n$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_f F \phi_f^o + \frac{1}{2} \sum_f (\rho \Gamma_\phi)_f \mathbf{S}(\nabla \phi)_f^o \quad (3.2.5)$$

$$= Su V_P + \frac{1}{2} Sp V_P \phi_P^n + \frac{1}{2} Sp V_P \phi_P^o.$$



Pro každou buňku dostáváme soustavu algebraických rovnic

$$a_P \phi_P^n + \sum_N a_N \phi_N^n = R_P \quad (3.2.6)$$

svázaných přes hodnotu  $\phi_P^n$ , která závisí na hodnotách sousedních buněk. Zjednodušený maticový tvar má podobu

$$A\phi = R, \quad (3.2.7)$$

kde  $A$  je matice koeficientů s prvky  $a_p$  na diagonále a  $a_n$  mimo diagonálu,  $\phi$  je vektor neznámých a  $R$  vektor zdrojů pro každou buňku [42].

Po každé iteraci dostáváme novou sadu hodnot  $\phi$ . Podle [45] je schéma (3.2.5) bezpodmínečně stabilní.

Pro aproximaci použijeme segregovaný přístup řešení. To znamená, že se rovnice pro rychlost a tlak řeší odděleně. Zdiskretizované momentové rovnice ze vztahu (3.2.7) zapíšeme ve tvaru

$$\mathcal{A}U - \mathcal{H} = -\nabla p, \quad (3.2.8)$$

kde matice  $\mathcal{A}$  zastupuje diagonální prvky zdiskretizovaných členů a kterou díky tomu můžeme snadno zinvertovat,  $\mathcal{H}$  se složí z mimodiagonálních prvků diskretizovaných členů a rychlost  $U$  se převezme z předchozí iterace. Jedná se tedy o rozklad matice  $\mathcal{A}$  z rovnice (3.2.7).

Vyjádříme si matici neznámých rychlostí z rovnice (3.2.8)

$$U = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{H} - \mathcal{A}^{-1}\nabla p \quad (3.2.9)$$

a vložíme jí do rovnice kontinuity (2.3.6)

$$\nabla \cdot (\mathcal{A}^{-1}\mathcal{H} - \mathcal{A}^{-1}\nabla p) = 0 \quad (3.2.10)$$

a tím získáme Poissonovu rovnici pro tlak [42]

$$\nabla \cdot (\mathcal{A}^{-1}\nabla p) = \nabla \cdot (\mathcal{A}^{-1}\mathcal{H}). \quad (3.2.11)$$

Tu ještě můžeme vydělit diagonální maticí  $\mathcal{A}^{-1}$  a získáme tvar dle [42]

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{a_p} \nabla p \right) = \nabla \cdot \left( \frac{\mathcal{H}(\mathbf{U})}{a_p} \right). \quad (3.2.12)$$

Pro vyjádření rychlosti si momentovou rovnici přepíšeme do tvaru

$$\mathbf{U} = \frac{\mathcal{H}(\mathbf{U})}{a_p} - \frac{\nabla p}{a_p} \quad (3.2.13)$$

První člen na pravé straně se zanedbává, to však vede k horší konvergenci [43]. Získáme čtyři rovnice (2.3.5),(2.3.6),(3.2.8) a (3.2.12) pro čtyři neznámé  $U_x, U_y, U_z$  a  $p$ .

V Poissonově rovnici se nám na levé straně u tlakového členu vyskytuje divergence pocházející z rovnice kontinuity a gradient vycházející z momentových rovnic. Tyto derivace jsou od sebe oddělené a mohou být počítány různými schémata. Je tedy nutné dbát na zachování konzistence u těchto operátorů, jinak by nebyla zachována rovnice kontinuity [35].

### 3.2.1 Algoritmus SIMPLE

Algoritmus SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) udává iterativní postup, jak tyto rovnice řešit. Kroky jedné iterace algoritmu jsou následující:

1. Řešení diskretizovaných momentových rovnic pro výpočet rychlostního pole. Zde se dosazuje tlak  $p_0$  z počáteční podmínky nebo předchozí iterace.
2. Výpočet toků na stěnách buněk podle vztahu

$$\mathbf{U}_f = \left( \frac{\mathcal{H}(\mathbf{U})}{a_p} \right)_f - \left( \frac{1}{a_p} \right)_f (\nabla p)_f \quad (3.2.14)$$

za pomocí interpolovaných hodnot na jednotlivé stěny buňky.

3. Řešení tlakové rovnice pro nový tlak  $p_n$

$$p_n = \nabla \cdot \left( \frac{1}{a_p} \nabla p_0 \right). \quad (3.2.15)$$

4. Aplikace relaxace tlaku podle rovnice

$$p^i = p^{i-1} + \alpha_p (p^p - p^{i-1}), \quad (3.2.16)$$

kde  $p^p$  značí výsledek z tlakové rovnice a  $\alpha_p$  je relaxační koeficient nabývající hodnoty  $0 < \alpha_p \leq 1$ .

5. Korekce toků na stěnách buněk a rychlostí z nového tlakového pole pomocí

$$\mathbf{U}^n = \mathbf{U} - \frac{1}{a_c} \nabla p^n \quad (3.2.17)$$

pro každou buňku  $n$ .

### 3.2.2 Algoritmus PISO

PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators) algoritmus byl vyvinut pro výpočet nestacionárního proudění a jeho kroky mají podobu:

1. Výpočet toků na stěnách buněk (identické se SIMPLE algoritmem).
2. Predikce - Obdobně, jako v prvním kroku SIMPLE algoritmu se řeší diskretizované hybnostní rovnice s odhadem tlakového pole  $p^*$  k získání odhadu rychlosti  $\mathbf{u}^*$  ve tvaru

$$\mathcal{A}\mathbf{u}^* + \mathcal{H}\mathbf{u}^* = \mathcal{R} - \nabla p, \quad (3.2.18)$$

kde  $\mathcal{R}$  značí zdiskretizovaný zdrojový člen.

3. První korekce - Ke splnění kontinuity pro  $\mathbf{u}^*$  je třeba korekce pro tlak  $p^*$ . Pomocí jedné korekce SIMPLE algoritmem

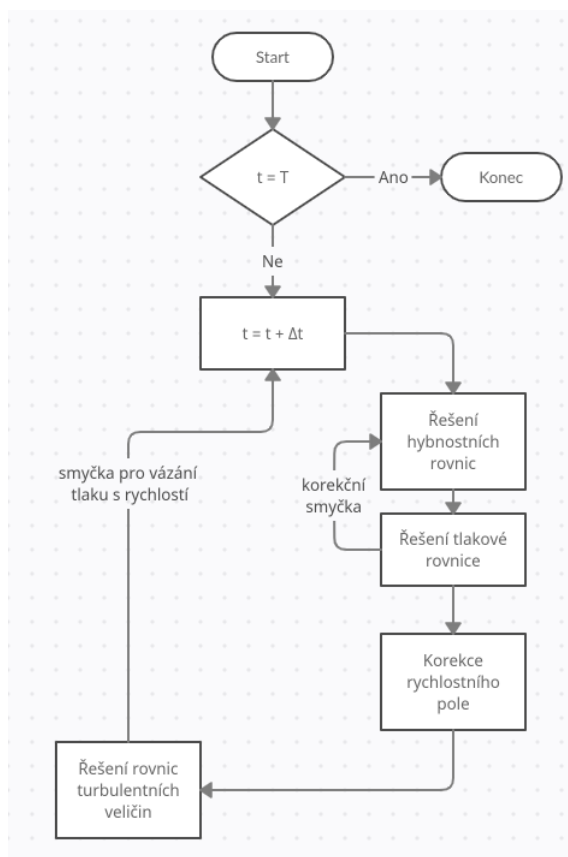
$$\mathcal{A}\mathbf{u}^{**} + \mathcal{H}\mathbf{u}^* = \mathcal{R} - \nabla p^* \quad (3.2.19)$$

obdržíme  $\mathbf{u}^{**}$

4. Druhá korekce - I když  $\mathbf{u}^{**}$  již splňuje rovnici kontinuity, stále je nutné dopočítat tlak  $p^{**}$ . Toho docílíme opakováním kroku 3 pro získání hodnoty  $\mathbf{u}^{***}$
5. Přidávání dalších korekcí pro předem definovaný počet korektorů.
6. Postup v čase o jeden časový krok.

### 3.2.3 Algoritmus PIMPLE

V PIMPLE algoritmu dochází k řešení stacionárních rovnic pro každý časový krok. Vznikají tedy vnitřní iterace, kde je snaha dosáhnout konvergence pomocí definovaného počtu korekčních smyček (*correction loops*). V případě pouze jedné korekční smyčky, je PIMPLE indentický s PISO algoritmem. Na obrázku 6 lze vidět diagram PIMPLE algoritmu podle [46], který běží po krocích  $\Delta t$  do koncového času  $T$ .



Obrázek 6: PIMPLE algoritmus

## 4 Numerické výsledky

Tato kapitola obsahuje výsledky spojené s praktickou částí práce. Kód pro výpočty harmonickou metodou byl naprogramován v jazyce C++, jakožto modulární řešič do open-source softwarového balíku pro CFD výpočty OpenFOAM, který je detailně popsán v [47]. Všechny úlohy jsou modelovány jakožto rovinné, aby se zjednodušila analýza výsledků a zkrácení výpočetního času. Následné rozšíření do třetího rozměru je pouze otázkou nastavení úlohy, nikoliv samotného řešiče.

Nejdříve je základní funkcionalita kódu pro harmonickou metodu otestována na skalární rovnici, kde je simulován periodický vstupní signál. Následně je řešena jednoduchá úloha pro Navierovy-Stokesovy rovnice v podobě rovné trubky s oscilující rychlostí na vstupu. Finální úloha je řešení periodického natáčení profilu NACA 0012. Jejím účelem je simulovat získávání dat z proudového pole, které se dají následně aplikovat při řešení problémů z aeroelasticity. Příklady těchto úloh jsou uvedeny v kapitolách 1.1 a 1.2.

### 4.1 Numerické řešení skalární rovnice harmonickou metodou

Pro účely odladění harmonického řešiče byla použit jednoduchý transport veličiny  $S$ , který může být popsán rovnicí

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}S) = 0. \quad (4.1.1)$$

Simulace byla nastavena podle parametrů v [4], tzn. obdélníková rovinná výpočetní doména o rozměrech 10x7 m a konstantní rychlostní pole o velikosti  $u_x = 10$  m/s. Na vstupu (levý okraj domény) byla definována Dirichletova podmínka pro vstupní signál a na výstupu (pravá strana domény) byla definována Neumannova okrajová podmínka v podobě nulové derivace. Výsledky byly získány harmonickou metodou pro řešení skalární rovnice srovnány s nestacionárním výpočtem pomocí PIMPLE algoritmu. Výsledky jsou prezentovány v podobě zobrazení časového vývoje veličiny  $S$  uprostřed výpočetní oblasti (bod [5 m, 3.5 m]) v jednotlivých časových snímcích a pomocí rozložení veličiny  $S$  napříč středovou čarou ( $y = 3.5$  m).

#### 4.1.1 Sinusový vstupní zdroj

Na vstupu byla nastavena okrajová podmínka pro skalární veličinu  $S$  reprezentovaná rovnicí

$$S(t) = A \sin(2\pi ft), \quad (4.1.2)$$

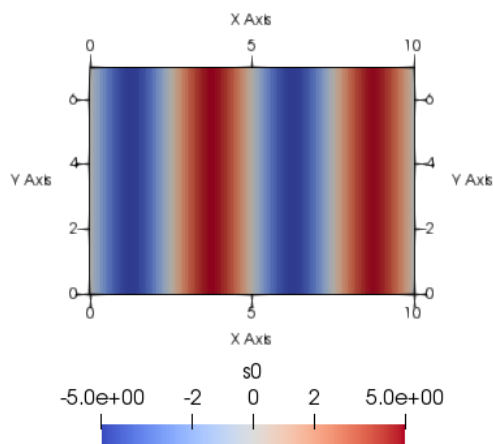
kde  $A = 5$  reprezentuje amplitudu a  $f = 2Hz$  frekvenci oscilace. V harmonické metodě má každý časový okamžik vlastní rovnice. Z toho plyne, že je nutné pro každý okamžik spočítat odpovídající hodnotu proměnné okrajové podmínky. Vztah (4.1.2) se tudíž upraví na

$$S(t_i) = A \sin(2\pi f t_i), \quad (4.1.3)$$

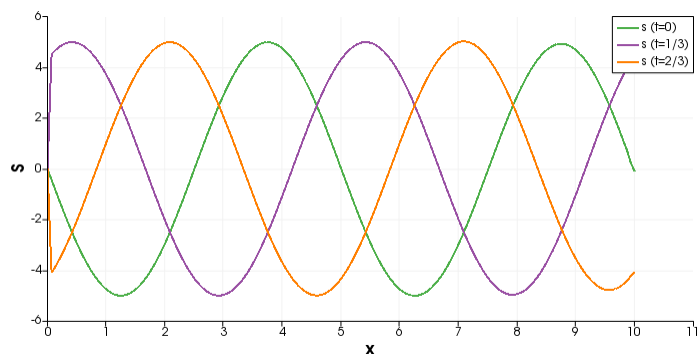
kde

$$t_i = \frac{T}{2n + 1} \cdot i \quad (4.1.4)$$

pro  $i = 0, 1, \dots, 2n$  pro  $n$  harmonických frekvencí a  $T = \frac{1}{f}$  periodu kmitu. Díky jednoduchosti vstupní podmínky lze použít pro výpočet pouze jednu harmonickou frekvenci. Ta nám dovoluje počítat pole hodnot pro tři časové snímky rovnoměrně rozložené po celé periodě  $Q_{(t_i=0)}$ ,  $Q_{(t_i=T/3)}$  a  $Q_{(t_i=2T/3)}$ .

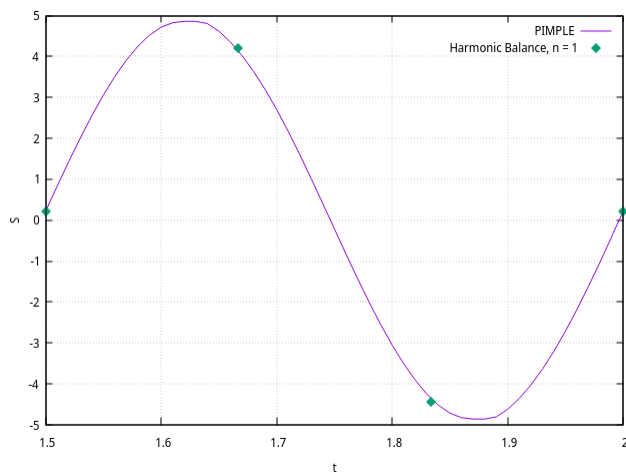


Obrázek 7: Rozložení  $S(x, t_i)$  v časovém okamžiku  $t=0$  pomocí harmonické metody



Obrázek 8: Rozložení  $S(x, t_i)$  pro všechny časové okamžiky napříč souřadnicí  $x$

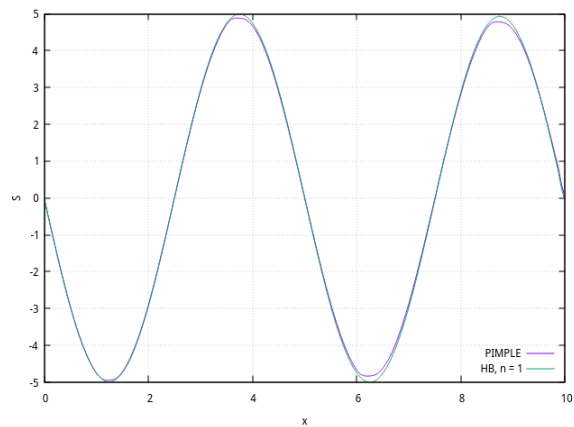
Na obrázku 8 lze vidět, jaké data obdržíme z harmonické metody. Místo toho, abychom dostali diskretizované výsledky závislé na časovém kroku, jak to bývá u klasických nestacionárních metod, obdržíme výsledky diskretizované v  $2n+1$  rovnoměrně rozložených časových okamžicích. Obrázek 9 ukazuje časový průběh veličiny  $S$  v bodě  $[5, 3.5]$ , tedy v prostředním bodě domény, pomocí PIMPLE algoritmu a harmonické metody s jednou harmonickou frekvencí.



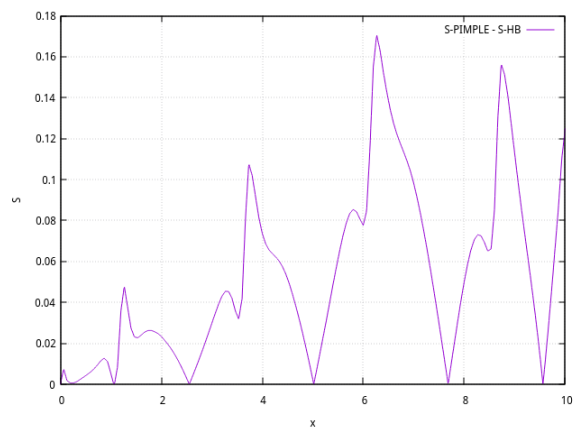
Obrázek 9: Průběh  $S(x, t_i)$  v prostředním bodě

Na závěr na obrázku 10 lze vidět rozložení veličiny  $S$  na začátku každé periody. Pro PIMPLE algoritmus je zobrazen začátek třetí periody.





Obrázek 10: Průběh  $S(x, t = 0)$  po středové čáře  $y = 3.5$



Obrázek 11: Rozdíl řešení harmonicko metodou oproti nestacionární po středové čáře  $y = 3.5$

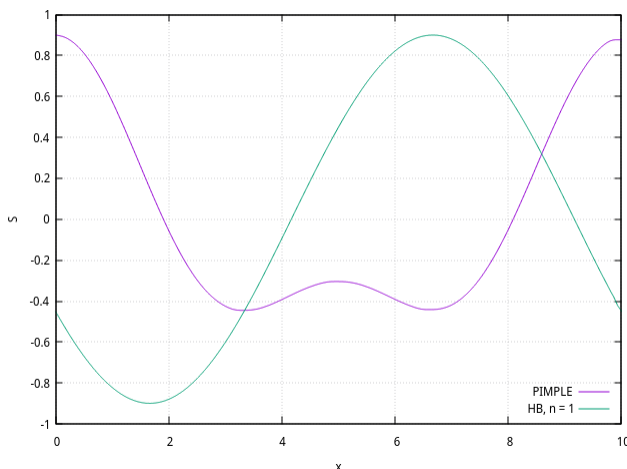
### 4.1.2 Složený periodický zdroj

Pro demonstraci komplexnějšího vstupního signálu a nutnosti využití více harmonických frekvencí, byla okrajová podmínka na vstupu pro  $S$  nastavena jako

$$S(t) = A \sin(2\pi ft) + B \cos(4\pi ft), \quad (4.1.5)$$

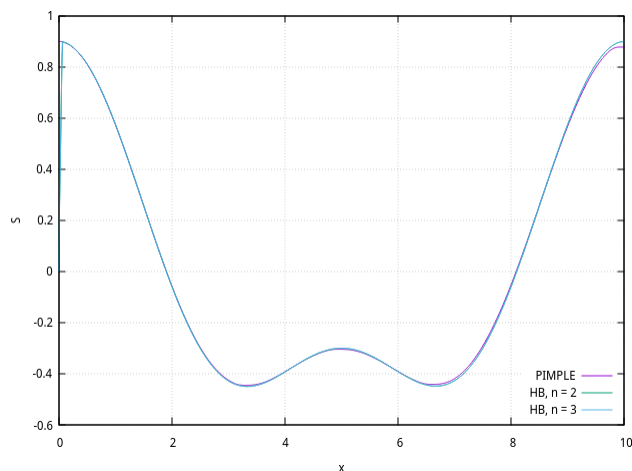
kde  $A = 0.6$  a  $B = 0.3$  reprezentují amplitudy jednotlivých periodických funkcí. Člen s kosínovou funkcí má dvojnásobnou frekvenci. Pro nastavení harmonické metody se použije frekvence vycházející z celkové periody periodického děje. V našem případě to je  $f = 1\text{Hz}$ . Přepočítání okrajových podmínek pro harmonickou metodu probíhá obdobně jako v kapitole 4.1.1.

Na obrázku 12 je zobrazeno rozložení veličiny  $S$  po středové čáře  $y = 3.5$  pro jednu harmonickou frekvenci porovnaný s nestacionární metodou. Lze na první pohled vidět, že jedna harmonická frekvence není dostačující.



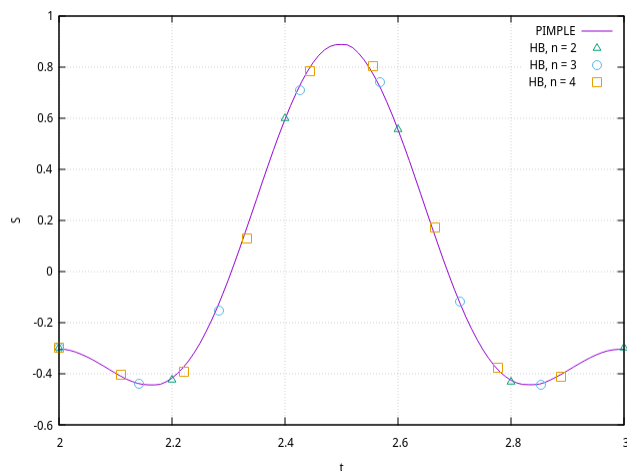
Obrázek 12: Průběh  $S(x, t = 0)$  po středové čáře  $y = 3.5$  pro jednu harmonickou frekvenci

Na obrázku 13 je porovnání na středové čáře s již dvěma a třema harmonickými frekvencemi. Velikost transportované veličiny  $S$  je po celé délce  $x$  téměř totožná.



Obrázek 13: Průběh  $S(x, t = 0)$  po středové čáře  $y = 3.5$

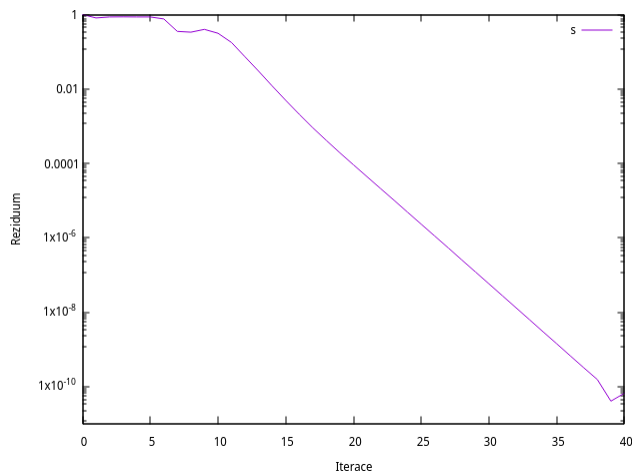
Obrázek 14 znázorňuje průběh veličiny  $S$  po jednu periodu v geometrickém středu oblasti nestacionární metodou (PIMPLE algoritmus, třetí perioda) a poté hodnoty z jednotlivých časových instancí harmonické metody pro dvě, tři a čtyři harmonické frekvence. V případě použití pouze jedné harmonické frekvence, je výpočtem zachycen pouze sínosový zdroj. Lze vidět, že s přibývajícými harmonickými frekvencemi přesnost nestoupá a pouze se navyšuje počet diskrétních hodnot v čase.



Obrázek 14: Průběh  $S(x, t_i)$  v prostředním bodě

V této kapitole bylo ukázáno, že lze simulovat i děje probíhající v násobcích základní frekvence. Chceme-li tedy zaznamenávat i drobnější děje o vyšších frekvencích, je třeba postupně navyšovat počet harmonických frekvencí metody. Je nutné si uvědomit, že s každou harmonickou frekvencí přibudou další dvě hybnostní rovnice ve finální řešené soustavě. Bylo vyzkoušeno, že aby v tomto případě harmonická metoda dosáhla stejného

výpočetního času jako klasická nestacionární (po třech periodách), bylo třeba alespoň 25 harmonických frekvencí, které nám umožní počítat 51 hybnostních rovnic pro odpovídajících 51 časových okamžiků. To znamená, že harmonická metoda stále poskytuje výhodu kratšího výpočetního času i pro vyšší časové rozlišení.



Obrázek 15: Reziuda veličiny S pro dvě harmonické frekvence

## 4.2 Numerické řešení Navierových-Stokesových rovnic harmonickou metodou

Byla řešena Navierova-Stokesova rovnice harmonickou metodou podle kapitoly 2.5.2 ve tvaru

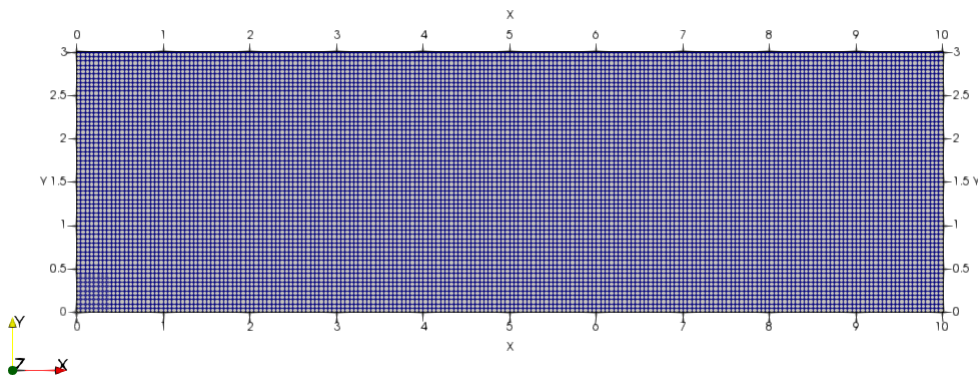
$$\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}_i) - \nabla \cdot (\gamma \nabla \mathbf{u}_i) = -\nabla p_i - \frac{2\omega}{2n+1} \left( \sum_{j=1}^{2n} P_j \mathbf{u}_i \right). \quad (4.2.1)$$

a výsledky byly porovnány konvenční nestacionární metodou implementovanou PIMPLE algoritmem popsaném v kapitole 3.2.3. Diskretizace jednotlivých členů je popsána v kapitole 3.

Nejdříve je řešení Navierových-Stokesových rovnic ověřeno na jednoduchém případě v podobě proudění ve 2D trubce s periodickou rychlostí na vstupu. Následuje řešení hlavního problému této práce - proudění okolo kmitajícího 2D profilu. Všechny úlohy byly voleny v rovinné oblasti. To umožňuje rychlé získání dat díky krátkým výpočetním časům a také jejich následnou rychlou analýzu.

### 4.2.1 Proudění v trubce s oscilující rychlostí na vstupu

Pro simulaci proudění v trubce byla definována rovinná oblast o rozměrech 3 x 10 metrů s čtvercovou sítí o celkovém počtu 12 000 buněk.



Obrázek 16: Výpočetní síť pro rovinnou trubku

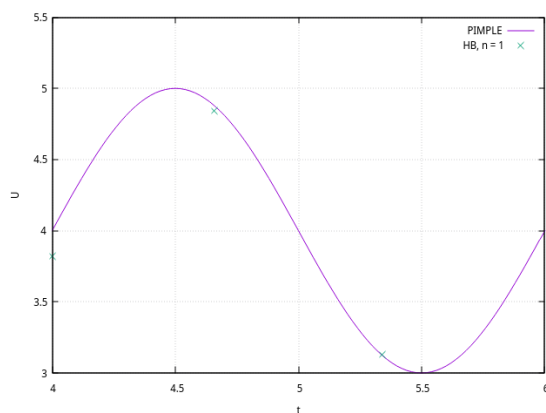
Na vstupu je předepsán konstantní rychlostní profil definován jakožto periodická funkce

$$u_x(t) = U_{in} + A \sin(2\pi ft), \quad (4.2.2)$$

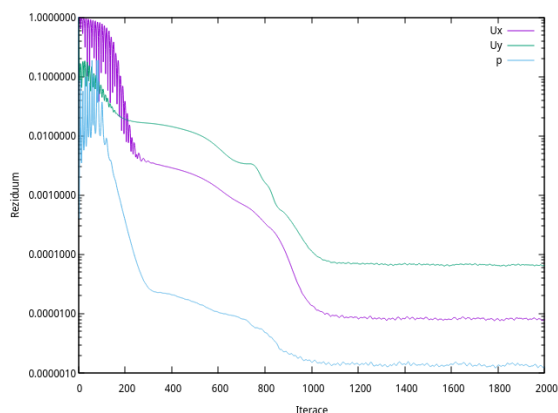
kde  $f = 0.5 \text{ Hz}$  značí frekvenci kmitání,  $U_{in} = 4 \text{ m/s}$  je střední rychlost a  $A = 1$  je maximální výchylka. Přepočtení okrajových podmínek rychlosti a tlaku probíhá obdobně jako v kapitole 4.1.1.

Vzhledem k jednoduchému periodickému průběhu okrajové podmínky, byla pro řešení nastavena pouze jedna harmonická frekvence. Výpočet byl poté ověřen nestacionárním výpočtem pomocí PIMPLE algoritmu.

Na obrázku 17 lze vidět porovnání výsledných dat v prostředním bodě domény [5, 1.5].



Obrázek 17: Průběh rychlosti

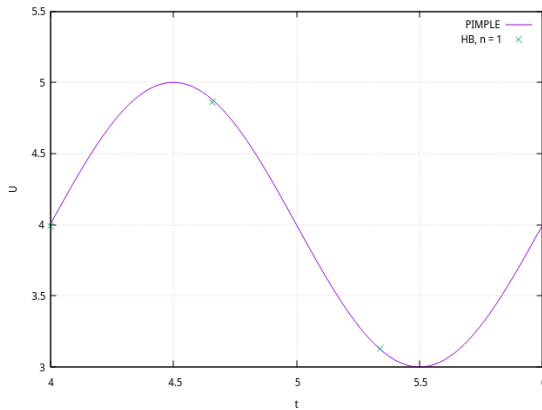


Obrázek 18: Rezidua pro  $t_0$

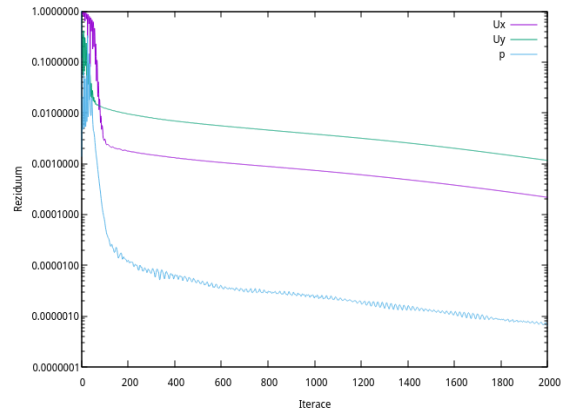
Na obrázku 17 je zřejmé, že první časový okamžik je už za tolerantí mezí v porovnání s nestacionárním výpočtem, který tvoří předpokládaný sinusový průběh. Vypsání reziduí (obr. 18) ukazuje, že výpočet již zkonvergoval a další iterování by se neprojevilo. Byla provedena analýza nastavení relaxačních faktorů podle tabulky 2.

U	p	$U_{t_0}$
0.1	0.05	3.83
0.1	0.1	3.92
0.1	0.2	3.96
0.1	0.3	3.98
0.2	0.3	3.95
<b>0.05</b>	<b>0.3</b>	<b>3.99</b>

Tabulka 2: Relaxační faktory pro rychlost a tlak a jejich vliv na rychlost v prostředním bodě



Obrázek 19: Průběh rychlosti po korekci



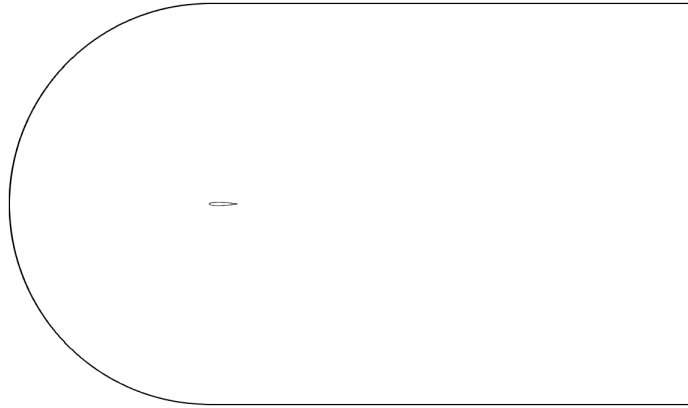
Obrázek 20: Rezidua pro  $t_0$  po korekci

Tento jednoduchý ukázkový případ posloužil pro vyzkoušení a odladění řešiče pro harmonickou metodu. Bylo zjištěno, že relaxační faktory mají značný vliv na řešení a že řešič lze použít na řešení komplikovanějších úloh.

#### 4.2.2 Periodické kmitání leteckého profilu

Hlavní úlohou pro testování harmonické metody v této práci je periodické natáčení profilu NACA 0012. Výsledky jsou porovnány s řešením pomocí klasického PIMPLE algoritmu, který v tomto případě slouží k validaci výsledků. Simulace probíhá v nízkých Reynoldsových číslech ( $Re = 6000$ ). Reynoldsovo číslo je nastavováno pomocí kinematické viskozity. Vstupní rychlost  $U_\infty$  byla nastavena na  $30 \text{ m/s}$ . Frekvence natáčení profilu byla vybrána jako  $1 \text{ Hz}$  a maximální výchylka  $A$  jako  $4^\circ$ . Oba výpočty jsou vždy počítány na stejné výpočetní síti. Hlavní porovnávací parametr bylo zvoleno rozložení tlaku  $p$  podél profilu.

Na obrázku 21 je zobrazen tvar výpočetní domény, kde byla zohledněna dostatečná vzdálenost od okrajových podmínek a dostatečný prostor pro úplav za profilem.



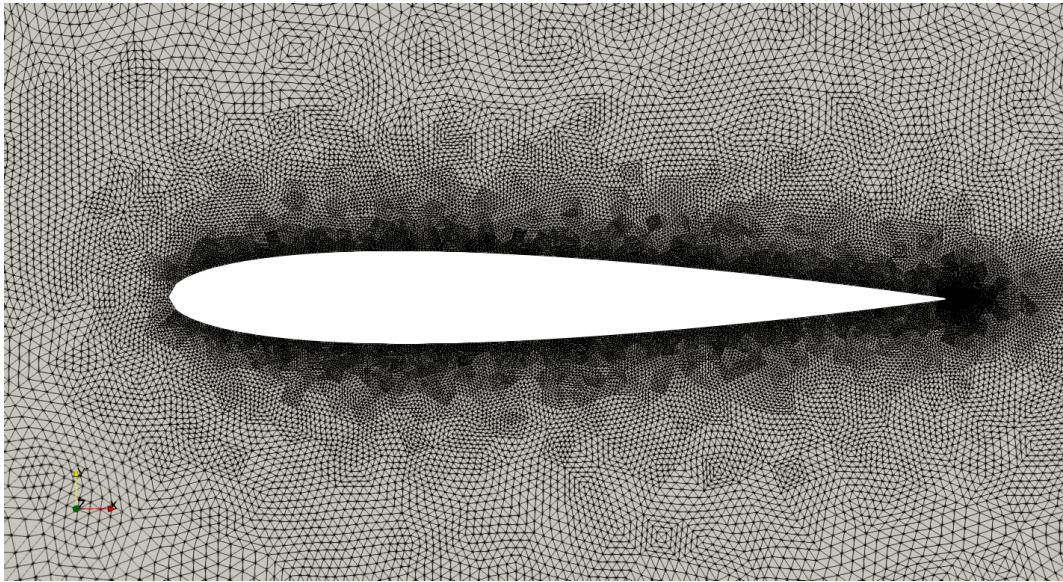
Obrázek 21: Výpočetní doména pro profil

Pro rychlost je na levé, horní a spodní hraně domény je *vstupní* okrajová podmínka. Zde je předepsán vektor rychlost odpovídající okamžiku v periodě kmitu. Složky vektoru rychlosti na vstupu se pak počítají podle

$$\begin{aligned} U_x &= U_\infty - A + A \cos(4\pi f t_i), \\ U_y &= U_\infty \sin(2\pi f t_i), \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

kde časový okamžik  $t_i$  se počítá podle přepočteního vztahu z kapitoly 4.1.1. Na pravé hraně je okrajová podmínka typu *outlet*, kde je předepsána nulová derivace ve směru z domény. Na stěně profilu je předepsána nulová rychlost u stěny. Pro tlak je na vstupu, horní a spodní hraně a stěně předepsána nulová derivace ve směru z domény a na výstupu je pevně nastavená nulová hodnota pro tlak. Obrázek 22 ukazuje tvar výpočetní sítě v okolí profilu. Narozdíl od OpenFOAM generátoru *snappyHexMesh* nabízí GMSH dostačující zjemněné odtokové hrany. Nevýhodou je horší kontrola síťování mezní vrstvy.

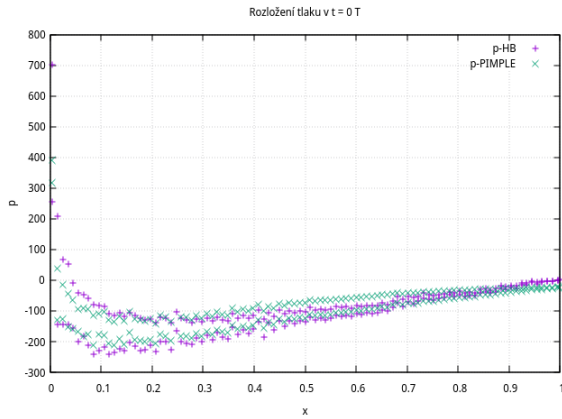




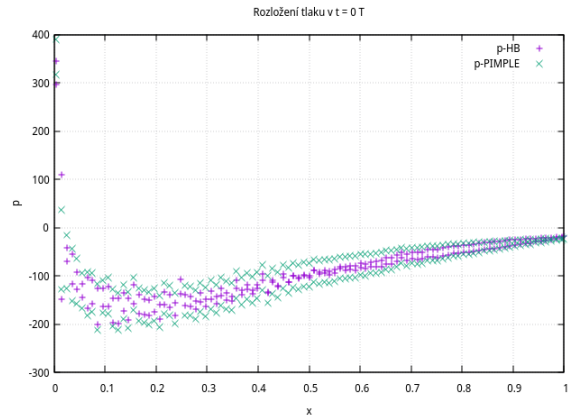
Obrázek 22: Výpočetní GMSH síť pro profil NACA 0012

Oscilace byla počítána pro různý počet harmonických frekvencí a tím pádem vznikál i různý počet časových okamžiků. S jejich počtem se mění i jejich časová poloha v jedné periodě a to komplikuje porovnávání různého nastavení. Z complexity buzení periodického děje - tedy z frekvence kmitání, která má formu jednoduché sinusové funkce - plyne, že by měla stačit pouze jedna harmonická frekvence. V kapitole 1.5, kde je popisováno proudění okolo profilu, je uvedena problematika mezní vrstvy. Zde vznikají sekundární periodické děje, které nemusí mít stejnou frekvenci, jaká je nastavena okrajovou podmínkou.

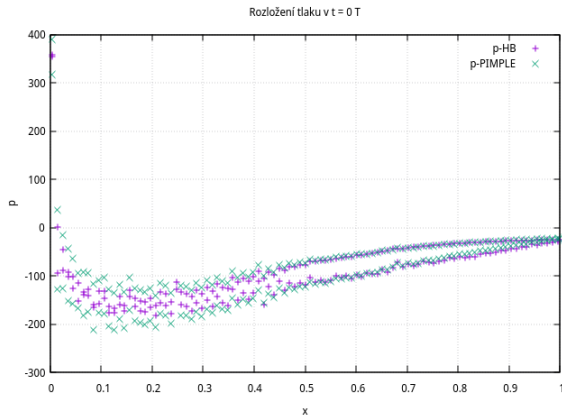
Na obrázku 23 je zobrazeno porovnání rozložení tlaku na profilu NACA 0012 počítaného harmonickou metodou a PIMPLE algoritmem pro různý počet harmonických frekvencí. Pro šest harmonických frekvencí dostáváme již přijatelný výsledek. Pro devět harmonických frekvencí dostáváme takřka odpovídající porovnání s nestacionární metodou. Každá přidaná harmonická frekvence by měla z principu fourierovy řady mít menší podíl na změně řešení i když stále navyšuje výpočetní čas.



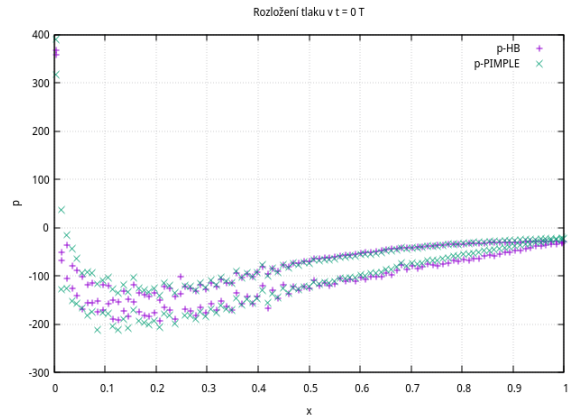
(a) Rozložení tlaku pro  $n = 1$ ,



(b) Rozložení tlaku pro  $n = 3$ ,



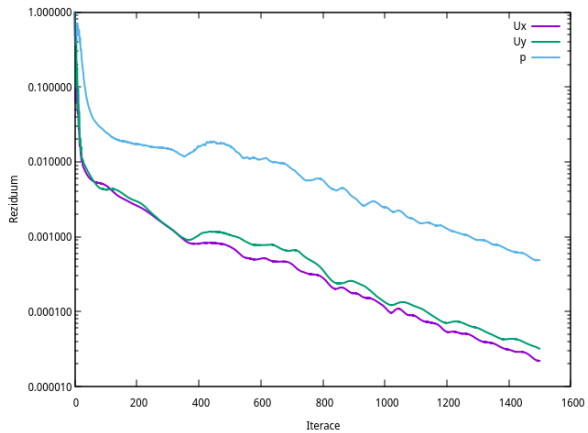
(c) Rozložení tlaku pro  $n = 6$ ,



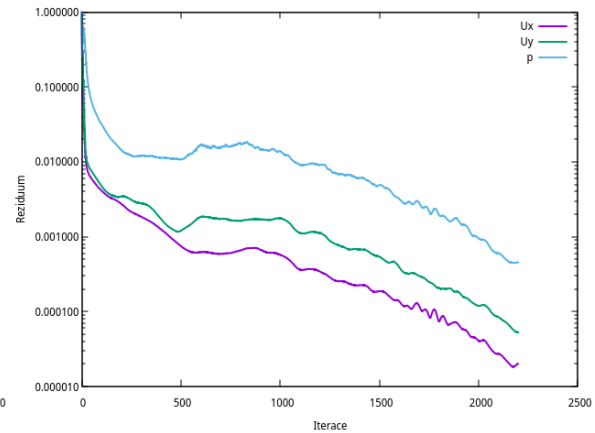
(d) Rozložení tlaku pro  $n = 9$ .

Obrázek 23: Rozložení tlaku podél profilu pro různý počet harmonických frekvencí v porovnání s PIMPLE algoritmem

Obrázky 24 a 25 zobrazují vývoj reziduí výpočtu kmitání profilu harmonickou metodou se třemi a šesti harmonickými frekvencemi. Jelikož harmonická frekvence obsahuje soustavu rovnic a pole hodnot pro každý časový okamžik, bylo pro sledování reziduí zvoleno pole pouze z prvního časového okamžiku  $t_i = 0$ .



Obrázek 24: Residua pro tři harmonické frekvence

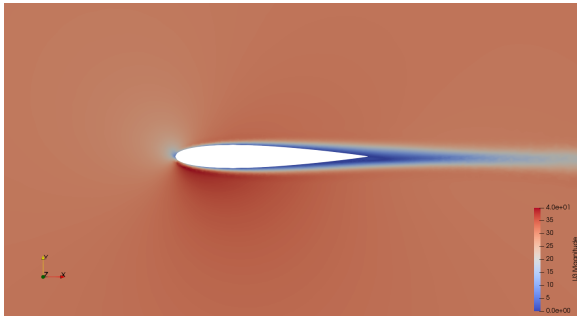


Obrázek 25: Residua pro šest harmonických frekvencí

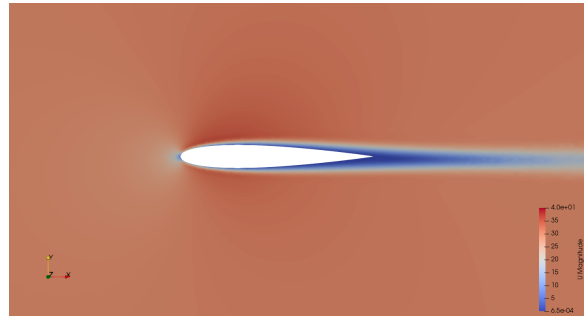
Rozložení rychlostního pole okolo profilu je zobrazeno na obrázku 26. Jelikož v úplavu vznikají děje o vyšších harmonických frekvencí, byl řešič nastaven pro  $n = 6$ .

Obrázek 27 zobrazuje tlakové kontury kmitajícího profilu pro tři harmonické frekvence. Toto porovnání oproti nestacionární metodě vyšlo dobře i na nižší počet harmonických frekvencí. Je třeba vyzdvihnout, že stagnační bod se jeví v obou případech na podobné části náběžné hrany profilu.

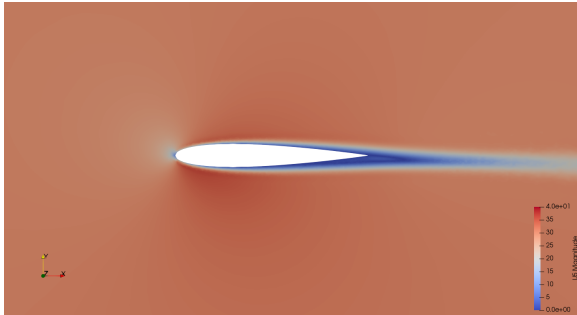
Při výpočtu harmonicko metodou o šesti harmonických frekvencích nebylo dosaženo již výrazného zlepšení, jak lze vidět na obrázku 28 a to za cenu přibližně dvojnásobného výpočetního času. Zajímají-li nás pouze tlakové kontury, tři harmonické frekvence se jeví jako dostačující pro toto nastavení Reynoldsova čísla, frekvence oscilace a maximální výchylky.



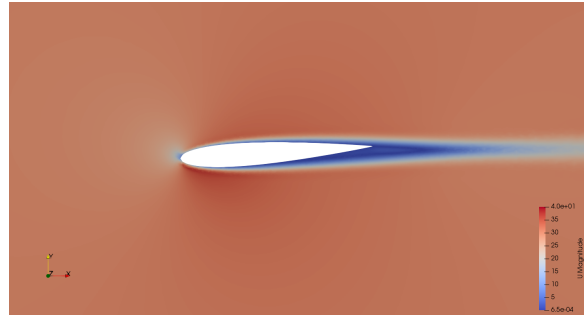
(a) Harmonická metoda v  $t_i = 0$ ,



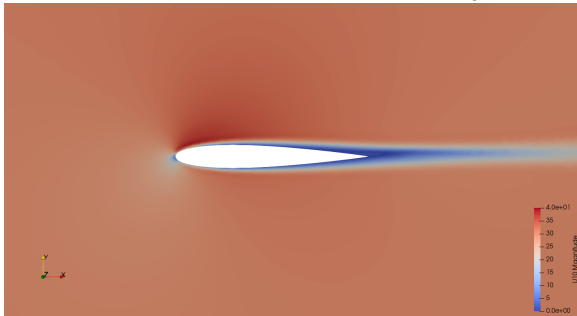
(b) PIMPLE v  $t = 0$ ,



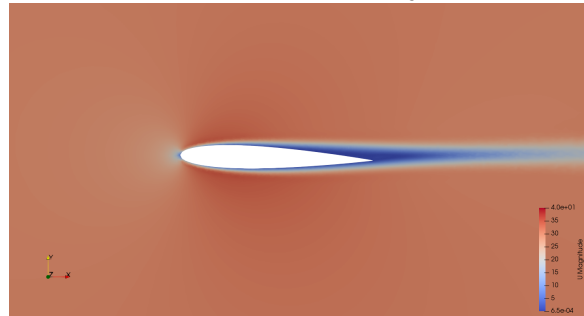
(c) Harmonická metoda v  $t_i = \frac{3T}{13}$ ,



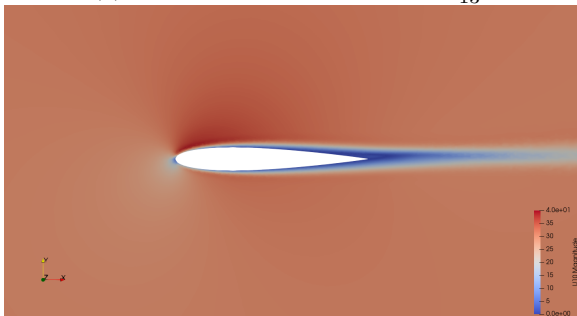
(d) PIMPLE v  $t = \frac{3T}{13}$ ,



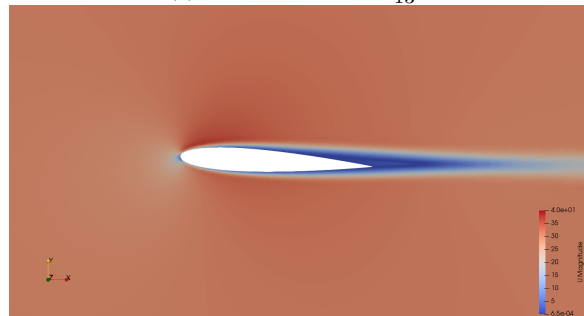
(e) Harmonická metoda v  $t_i = \frac{7T}{13}$ ,



(f) PIMPLE v  $t = \frac{7T}{13}$ ,

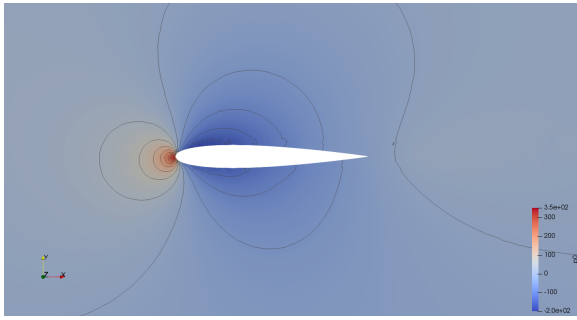


(g) Harmonická metoda v  $t_i = \frac{11T}{13}$ ,

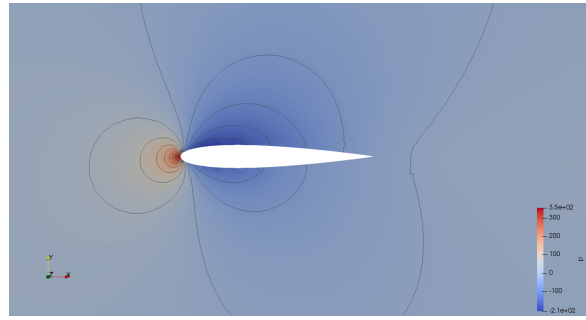


(h) PIMPLE v  $t = \frac{11T}{13}$ .

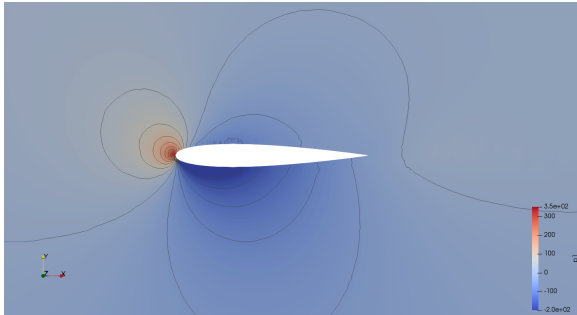
Obrázek 26: Srovnání harmonické metody o šesti harmonických frekvencích s PIMPLE algoritmem pro rychlostní pole proudění okolo kmitajícího profilu NACA 0012.



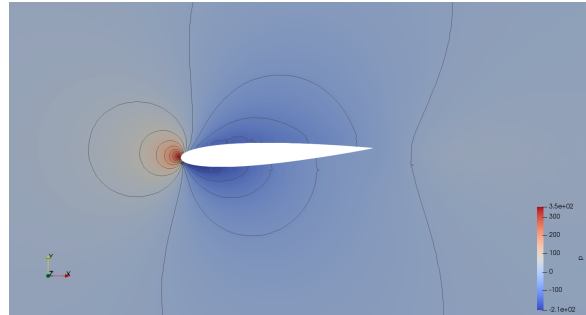
(a) Harmonická metoda v  $t_i = 0$ ,



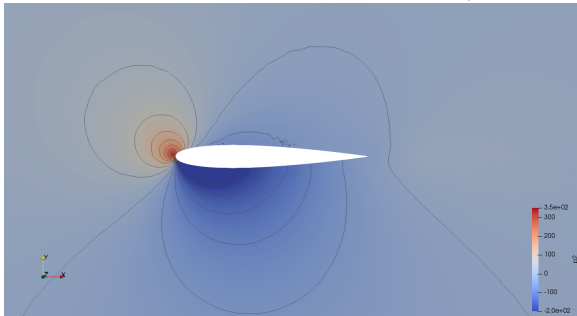
(b) PIMPLE v  $t = 0$ ,



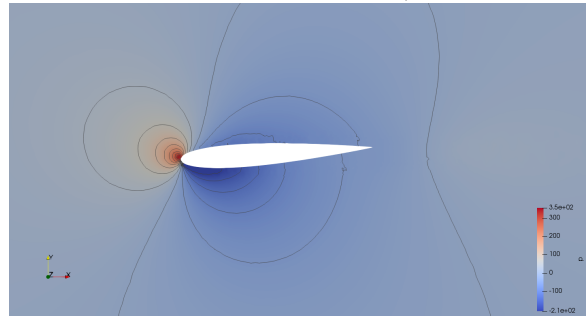
(c) Harmonická metoda v  $t_i = \frac{T}{7}$ ,



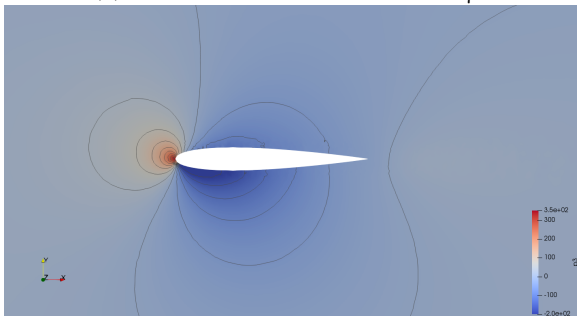
(d) PIMPLE v  $t = \frac{T}{7}$ ,



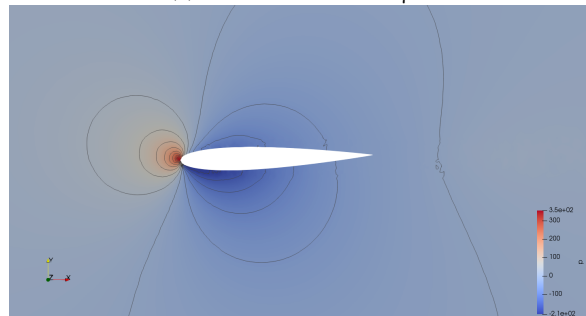
(e) Harmonická metoda v  $t_i = \frac{2T}{7}$ ,



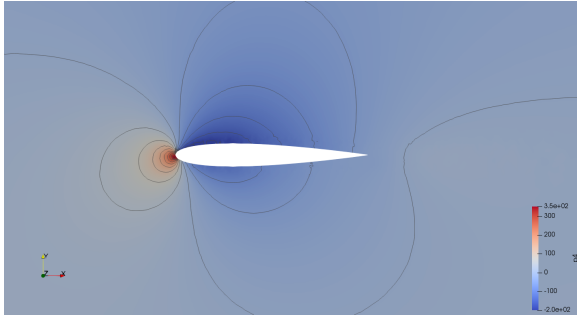
(f) PIMPLE v  $t = \frac{2T}{7}$ ,



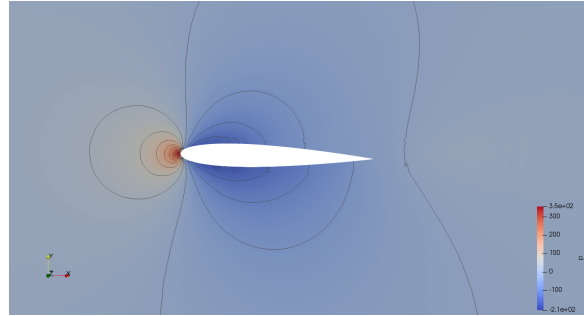
(g) Harmonická metoda v  $t_i = \frac{3T}{7}$ ,



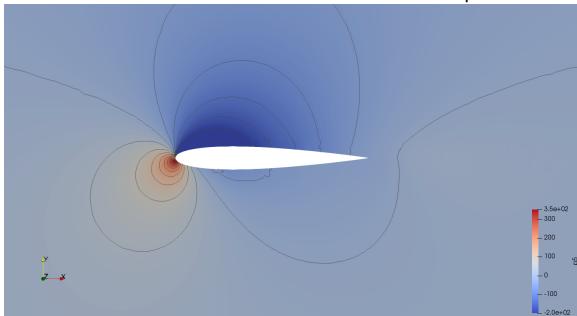
(h) PIMPLE v  $t = \frac{3T}{7}$ ,



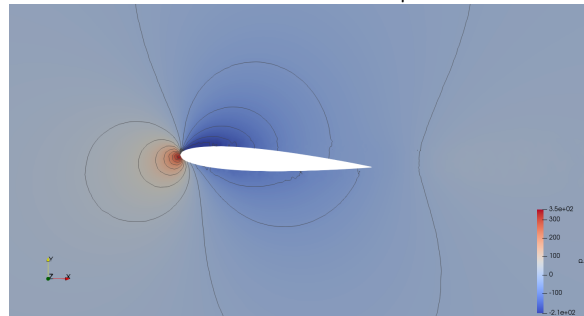
(i) Harmonická metoda v  $t_i = \frac{4T}{7}$ ,



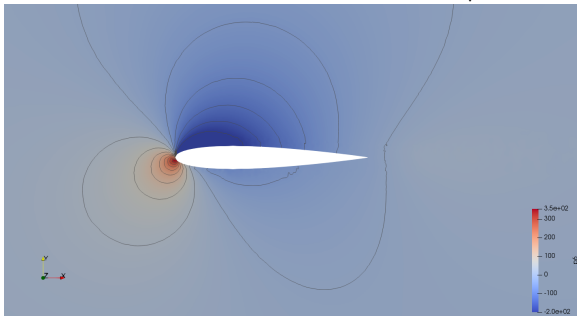
(j) PIMPLE v  $t = \frac{4T}{7}$ ,



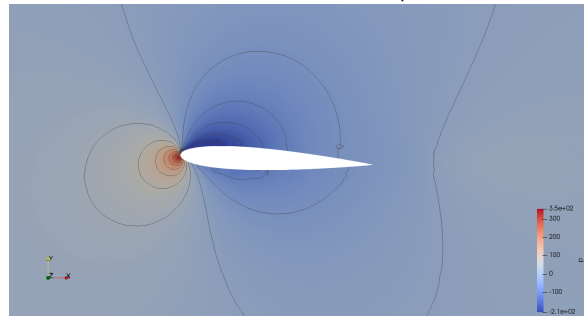
(k) Harmonická metoda v  $t_i = \frac{5T}{7}$ ,



(l) PIMPLE v  $t = \frac{5T}{7}$ ,

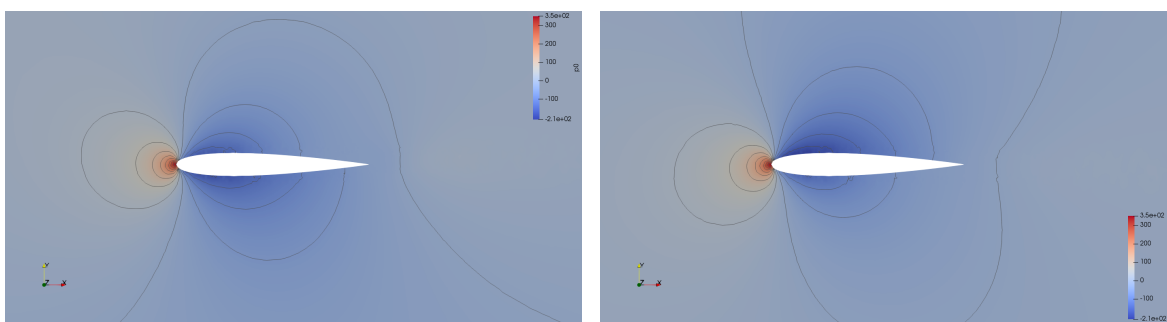


(m) Harmonická metoda v  $t_i = \frac{6T}{7}$ ,



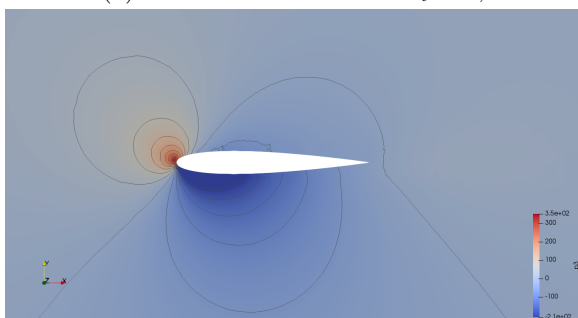
(n) PIMPLE v  $t = \frac{6T}{7}$ .

Obrázek 27: Srovnání harmonické metody o třech harmonických frekvencí s PIMPLE algoritmem pro tlakové kontury proudění okolo kmitajícího profilu NACA 0012.

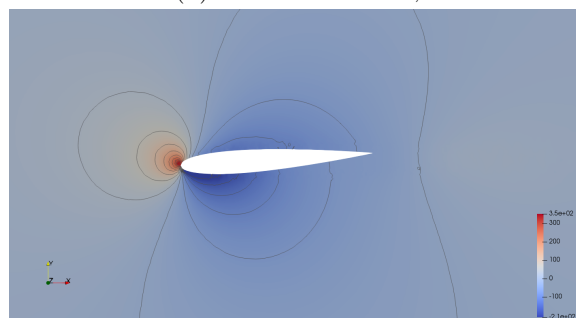


(a) Harmonická metoda v  $t_i = 0$ ,

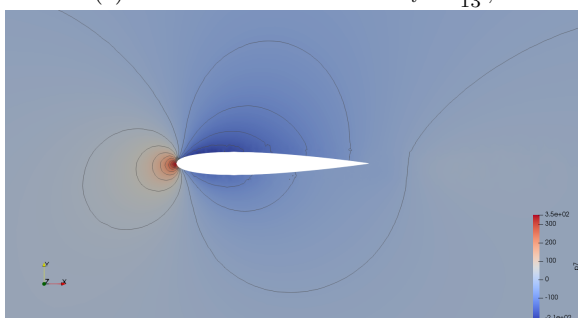
(b) PIMPLE v  $t = 0$ ,



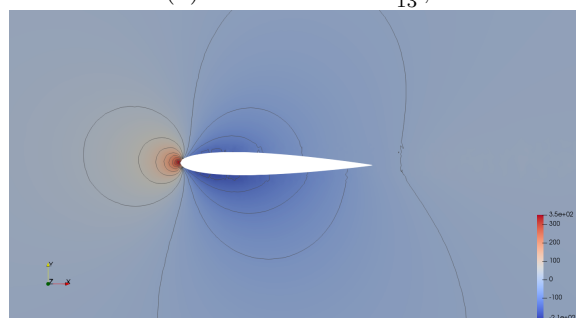
(c) Harmonická metoda v  $t_i = \frac{3T}{13}$ ,



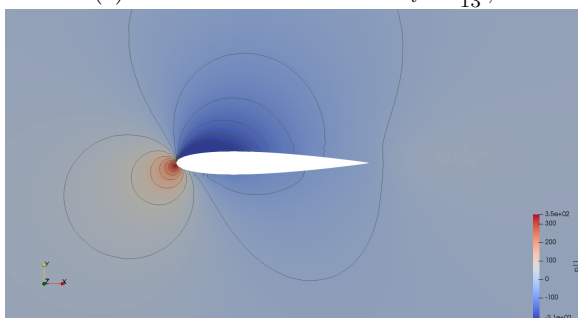
(d) PIMPLE v  $t = \frac{3T}{13}$ ,



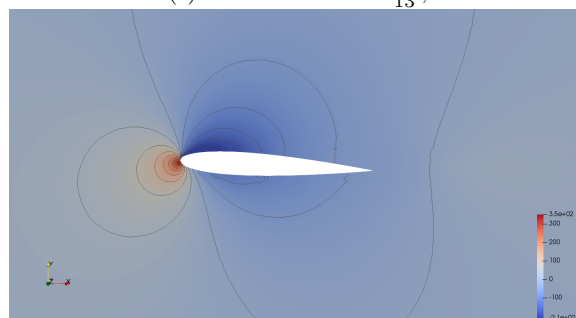
(e) Harmonická metoda v  $t_i = \frac{7T}{13}$ ,



(f) PIMPLE v  $t = \frac{7T}{13}$ ,



(g) Harmonická metoda v  $t_i = \frac{11T}{13}$ ,



(h) PIMPLE v  $t = \frac{11T}{13}$ .

Obrázek 28: Srovnání harmonické metody o šesti harmonických frekvencích s PIMPLE algoritmem pro tlakové kontury proudění okolo kmitajícího profilu NACA 0012.

### 4.3 Zhodnocení časové náročnosti

V této kapitole je probrána časová náročnost harmonické metody. Jelikož právě zkrácení výpočetní doby je hlavní důvod, proč tuto metodu používat, je toto porovnání důležité.

Výpočty byly provedeny na stolním počítači střední výkonové třídy s procesorem Intel i5-7500 o frekvenci 3.8 GHz a na jednom výpočetním jádru. Jako hranice pro určení přibližného počtu iterací harmonické metody byla zvolena hodnota reziduí na hodnotě  $10^{-5}$  pro jednotlivé složky rychlosti.

n	výpočetní čas	iterace
1	506 s	1100
2	623 s	1300
3	1230 s	1650
4	1853 s	1840
6	2205 s	2200
9	2806 s	2420

V porovnání pro nestacionární výpočet byl použit PIMPLE algoritmus a Courantovo číslo bylo omezeno na hodnotu 1. Byl nastaven variabilní časový krok, aby tato hodnota byla dodržena. Celkové byly spočítány čtyři periody natáčení profilu.

počet period	výpočetní čas
1	8820 s
4	26 640 s

Je nutné vzít v potaz, že nestacionární metoda má dynamickou síť. To znamená, že se síť pro každý časový krok deformuje. To způsobí prodloužení výpočetního času. Pro výpočet na tři harmonické frekvence dosáhneme zrychlení přibližně 17,4. Použijeme-li šest harmonických frekvencí, abychom měli jistotu zachycení podstatných periodických jevů ve výpočetní oblasti, dosáhneme urychlení 12.



## 4.4 Výhody a nevýhody harmonické metody

Harmonická metoda požaduje vyšší znalost simulovaného problému, než metoda nestacionární. První nevýhoda vychází hned ze základní definice. Je požadováno znát základní frekvenci počítaného periodického děje. V některých případech, jak bylo zjišťováno v předchozích kapitolách, lze frekvenci odhadnout z okrajových podmínek. Existují i případy, jako je třeba kmitající úplav za tělesem, které stojí pevně v prostoru. V této situaci je nutné provést část výpočtu nestacionární metodou a pak aplikovat frekvenční analýzu, jako je například provedeno v [39]. Další zjevnou nevýhodou je rozlišení časových okamžiků v jedné periodě. Jelikož pro každý časový okamžik je nutné počítat jednu soustavu hybnostních rovnic, tak zjemňování značně navyšuje výpočetní čas. Mimo to je každá počítaná promenná (vektor rychlosti a tlak pro laminární model) reprezentována jedním polem v každém časovém okamžiku. To zvyšuje nároky na paměť.

Hlavní výhoda harmonické metody je zkrácený výpočetní čas. Jelikož se místo nestacionárního problému, který musí být počítán v každém časovém kroku metody, počítá  $2n + 1$ , kde  $n$  je počet harmonických frekvencí, problémů stacionárních. Zrychlení výpočtu, jak bylo ukázáno v předchozích kapitolách, bývá až několikanásobné. V situacích, kde dochází k deformacím, je nutné v nestacionární metodě přegenerovat výpočetní síť. To opět zvýší časovou náročnost. Harmonická metoda umožňuje si síť předgenerovat pouze pro  $2n + 1$  časových okamžiků.

## Závěr

Tato práce prezentovala nejdříve provedenou rešerši problémů aeroelasticity a numerických metod pro řešení proudění tekutin. Poté byla naprogramována harmonická metoda v jazyku C++ jakožto modul do open-source CFD balíku OpenFOAM. Tento modul byla odladěna na jednoduchých případech skalární a Navierovy-Stokesovy rovnice. Na závěr byl modul použit na počítání periodického kmitání profilu NACA 0012 a výsledky porovnány s nestacionární metodou.

V *první části* byly prozkoumány nejběžnější problémy aeroelasticity v oboru letectví. Zvýšená pozornost byla věnována závažnému a komplexnímu flutteru. Jelikož se práce zabývá z velké části kmitáním křídla, byly shrnuty charakteristiky proudění tekutin kolem leteckého profilu a uceleno, jaké výsledky by se měli očekávat při modelování proudění kolem profilu. V *druhé části* byla představena mechanika kontinua a byly zde také popsány bilanční rovnice hmotnosti a hybnosti, z kterých vychází v této práci použitý model proudění. Následně byla odvozena harmonická metoda z Fourierovy řady a příslušné soustavy rovnic pro řešení obecných problémů proudění tekutin pomocí parciálních diferenciálních rovnic. Ztěžejším bodem je značné zkrácení výpočetního času pro specifické problémy kmitání (s předem známou a konstantí frekvencí). Ve *třetí části* byla popsána aplikace metody konečných objemů na řešení obecné transportní rovnice a poté byly popsány algoritmy SIMPLE, PISO a PIMPLE pro numerický výpočet Navierových-Stokesových rovnic. Ve finální *čtvrté části* byla aplikována harmonická metoda pro skalární transport. Bylo ukázáno, že pro modelování skalární transportní rovnice funguje harmonická metoda bezproblémově. Posléze byly řešeny Navierovy-Stokesovy rovnice v úloze pro oscilující proudění v trubce a natáčení profilu NACA 0012. Zde jsou účinným nástrojem relaxační faktory pro tlak a rychlost, které dokážou potlačit divergentní chování během výpočtu. U natáčejícího se profilu byly znázorněny tlakové kontury a rozložení tlaku podél stěny profilu. Na identické podmínky byla aplikována klasická nestacionární metoda. Ze srovnání těchto dvou numerických výsledků vyšlo, že harmonická metoda poskytuje výsledky na přijatelné odchylce. Byl změřen výpočetní čas pro různý počet harmonických frekvencí a porovnán proti PIMPLE algoritmu pro nestacionární metodu. V těchto podmínkách vycházelo urychlení 9.5 s devíti harmonickými frekvencemi pro jemné a detailní výsledky a urychlení až 17.5 se třemi harmonickými frekvencemi pro hrubý výpočet.

Cílem této práce bylo zjistit, zda se dá aplikovat harmonická metoda při řešení periodických aeroelastických problémů a zda přinese zrychlení oproti klasickým metodám. Úloha natačení profilu ukazuje, že metoda dokáže přinést přijatelné výsledky s až o řád nižšími výpočetními časy.

## Seznam použité literatury

- [1] R.L. Bisplinghoff, H. Ashley a R.L. Halfman. *Aeroelasticity*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Mineolam N.Y., 1955.
- [2] Theodore Theodorsen. *General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter*. American Institute of Aeronautics a Astronautics, No. 496, 1934.
- [3] J. D. Anderson. *Introduction to Computational Fluid Dynamics*. von Karman Institute for Fluid Dynamics, 2009.
- [4] H. Jasak a G. Cvijetic. “Implementation and Validation of the Harmonic Balance Method for Temporally Periodic Non-Linear Flows”. In: *Conference: ASME Turbo Expo 2016: Turbomachinery Technical Conference and Exposition* (červ. 2016), V02CT39A009. DOI: 10.1115/GT2016-56254.
- [5] Frédéric Sicot, Thomas Guédeney a Guillaume Dufour. “Time-domain harmonic balance method for aerodynamics and aeroelastic simulations of turbomachinery flows”. In: *International Journal of Computational Fluid Dynamics* 27 (2013).
- [6] Terry A. Weisshaar. *Aeroelasticity, an introduction to fundamental problems - with an historical perspective, examples and homework problems*. Purdue University, 1995.
- [7] Jiří Čečrdle. *Whirl Flutter of Turboprop Aircraft Structures*. Woodhead Publishing, Cambridge, 2015. Kap. Introduction to aircraft aeroelasticity and whirl flutter. ISBN: 978-1-782421-86-3.
- [8] Earl H. Dowell. *A Modern Course in Aeroelasticity*. Springer International Publishing, 2015. ISBN: 978-3-319-09452-6.
- [9] Svatomír Slavík. *Aeroelasticita leteckých konstrukcí*. České Vysoké Učení v Praze, 1997.
- [10] N. Rajamurugu, S. Yaknesh a J. Anbarasi. “Influence of Control Surfaces in Aircraft Wing Control Reversal Problems-FEA and CFD Analysis”. In: *Advances in Aerospace Science and Applications* (2013).
- [11] Y. C. Fung. *An Introduction to the Theory of Aeroelasticity*. Dover Publications, Inc., New York, 1993. ISBN: 0-486-67871-7.
- [12] Emil Simiu a Daniel W. Lozier. *The Buffeting of Tall Structures by Strong Winds*. U.S. Department of Commerce, 1975.
- [13] Jan R. Wright a Jonathan E. Cooper. *Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads*. John Wiley & Sons, Ltd, West Sussex, 2007. ISBN: 978-0470-85840-0.
- [14] Kayran A. “Flight flutter testing and aeroelastic stability of aircraft”. In: *Aircraft Engineering and Aerospace Technology* 79 (2007).
- [15] Harold M. Wells Jr. a Troy T. King. *Aircraft Structural Integrity Program: Airplane Requirements*. Air Force Systems Command, Ohio, 1970.

- [16] Luka Čulić. *Validation of the Harmonic Balance Solver for Turbomachinery Start-Up and Shut-Down Simulations*. University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering a Naval Architecture, Zagreb, 2018.
- [17] E. Nissim. *Flutter Suppression Using Active Controls Based on the Concept of Aerodynamic Energy*. Langley Research Center, NASA TN D-6199, 1971.
- [18] Donald S. Woolston, Harry L. Runyan a Robert E. Andrews. “An Investigation of Effects of Certain Types of Structural Nonlinearities on Wing and Control Surface Flutter”. In: *Journal of the Aeronautical Sciences* 24 (2012).
- [19] F. W. Lanchester. *Torsional Vibration of the Tail of an Airplane*. Aeronaut. Research Com., R & M.276, part i, 1916.
- [20] Mevlüt Burak Dalmis a Kemal Yaman. “Numerical and Experimental Investigations of Cantilever Rectangular Plate Structure on Subsonic Flutter”. In: *International Journal of Aerospace and Mechanical Engineering* 9 (2015).
- [21] Emma Chao. *Discrete Vortex Modeling of Aerodynamic Flutter of a Flat Plate with Damped Oscillations*. UNLV Theses, Dissertations, Professional Papers a Capstones. 3874, 2020.
- [22] M. R. Moosavi, A. R. Naddaf Oskouei a A. Khelil. “Flutter of subsonic wing”. In: *Thin-Walled Structures* 43 (2005).
- [23] Rudolf Dvořák a Karel Kozel. *Matematické modelování v aerodynamice*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1996. ISBN: 80-01-01541-6.
- [24] John D. Anderson Jr. *Fundamentals of Aerodynamics, 6th edition*. McGraw-Hill Education, New York, 2017. ISBN: 978-1-259-12991-9.
- [25] Genick Bar-Meir. *Fundamentals of Compressible Fluid Mechanics*. 2007.
- [26] Jaromír Příhoda a Petr Louda. *Matematické modelování turbulentního proudění*. Nakladatelství ČVUT, Praha, 2007. ISBN: 978-80-01-03623-5.
- [27] Alessandro Zanon. *A Vortex Panel Method For VAWT in Dynamic Stall*. Università Degli Studi Di Udine, 2011.
- [28] Miloslav Feistauer. *Theory and Numerics for Problems of Fluid Dynamics*. Charles University, Faculty of Mathematics a Physics, Prague, 2006.
- [29] Doug McLean. *Understanding Aerodynamics*. A John Wiley & Sons, Ltd., 2013. ISBN: 978-1-119-96751-4.
- [30] Ira H. Abbott a Albert E. Von Doenhoff. *Theory of Wing Sections*. Dover Publications, Inc., New York, 1959. ISBN: 486-605866-8.
- [31] *Obtékání okolo symetrického profilu s nenulovým úhlem náběhu a se stagnačním bodem S*. <http://avstop.com/ac/flighttrainghandbook/pressuredistribution.html>. [Online; přistoupeno 19.7.2022].
- [32] J. Donea et al. “Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methods”. In: *Encyclopedia of Computational Mechanics* (2004).

- [33] A. J. M. Spencer. *Continuum Mechanics*. Dover Publications, Inc., London, 1980. ISBN: 0-486-43594-6.
- [34] J. Blazek. *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*. Elsevier Science Ltd, 2001. ISBN: 0080430090.
- [35] Ferziger Peric. *Computational Methods for Fluid Dynamics, 3rd Edition*. Springer, 2002.
- [36] Stéphane Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. 2008.
- [37] J. Kadlec a A. Kufner. *Fourierovy řady*. Academia, Praha, 1969.
- [38] Zuzana Došlá a Vítězslav Novák. *Nekonečné řady*. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno, 2002. ISBN: 80-210-1949-2.
- [39] Gregor Cvijetić. *Analysis and Implementation of the Harmonic Balance Method in Computational Fluid Dynamics*. Faculty of Mechanical Engineering a Naval Architecture, Zagreb, 2015.
- [40] Cvijetić G. et al. “Harmonic Balance Developments in OpenFOAM”. In: *Computer and Fluids* (2018).
- [41] Junjie Liang et al. “A robust finite volume method for three-dimensional filling simulation of plastic injection molding”. In: *Engineering Computations* 34 (2017).
- [42] Hrvoje Jasak. *Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows*. Imperial College, 1996.
- [43] F. Moukalled, L. Mangani a M. Darwish. *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics*. Springer International Publishing Switzerland, 2016. ISBN: 9783319168739.
- [44] S. V. Patankar. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Hemisphere Publishing Corporation, 1981.
- [45] C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows*. John Wiley & Sons, 1991.
- [46] Timofey Mukha a Mattias Liefvendahl. “Large-Eddy Simulation of Turbulent Channel Flow”. In: (květ. 2015), s. 9–10.
- [47] Hrvoje Jasak. “OpenFOAM: Open source CFD in research and industry”. In: *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering* 1 (2009). ISSN: 2092-6782.