

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta strojní

Ústav technické matematiky  
Obor: Matematické modelování v technice



# Vliv okrajových podmínek v metodě SPH

## Influence of boundary conditions in SPH method

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vypracoval: Bc. Tomáš Halada  
Vedoucí práce: doc. Ing. Luděk Beneš Ph.D.  
Rok: 2022



## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Halada** Jméno: **Tomáš** Osobní číslo: **473501**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**  
Studijní program: **Aplikované vědy ve strojním inženýrství**  
Specializace: **Matematické modelování v technice**

## II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

**Vliv okrajových podmínek v metodě SPH**

Název diplomové práce anglicky:

**Influence of boundary conditions in SPH method**

Pokyny pro vypracování:

Jedním z důležitých aspektů použití SPH metody pro modelování proudění s volnou hladinou je vhodná realizace okrajových podmínek. Student se seznámí s metodou SPH s realizací různých typů okrajových podmínek. Na vhodně zvolených testovacích případech vyhodnotí vliv jak různých okrajových podmínek pro pevné stěny tak provedení vstupu a výstupu.

Seznam doporučené literatury:

G.R. Liu a M.B. Liu. Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method. Singapore: World Scientific, 2003. isbn: 9789812564405.

Shaofan Li a W. K. Liu. Meshfree particle methods. Berlin: Springer, 2004. isbn: 3-540-22256-1

Alejandro Crespo, M. Gomez-Gesteira a Robert Dalrymple. "Boundary conditions generated by dynamic particles in SPH methods". In: CMC. Computers, Materials, and Continua 3 (čvn. 2007).

Mou-Bin Liu a G. R. Liu. "Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH): an Overview and Recent Developments". In: Arch Computat Methods Eng 8 (2010). issn: 1134-3060. url: <https://doi.org/10.1007/s11831-010-9040-7>.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

**doc. Ing. Luděk Beneš, Ph.D. ústav technické matematiky FS**

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

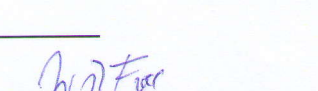
**prof. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. ústav technické matematiky FS**

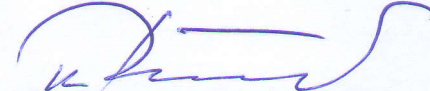
Datum zadání diplomové práce: **14.04.2022**

Termín odevzdání diplomové práce: **14.08.2022**

Platnost zadání diplomové práce: \_\_\_\_\_

  
doc. Ing. Luděk Beneš, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) práce

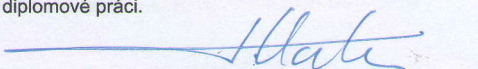
  
prof. Ing. Jiří Fürst, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

  
doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

5.5.2022  
Datum převzetí zadání

  
Podpis studenta

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty...) uvedené v příloženém seznamu.

V Praze dne .....

.....  
Bc. Tomáš Halada



## **Poděkování**

Děkuji vedoucímu doc. Ing. Luďkovi Benešovi Ph.D. za důkladné komentáře k dílčím nedostatkům, obecné poznámky a diskuze, detailně rozebírající jednotlivé aspekty metody a práce.

Bc. Tomáš Halada

*Název práce:*

**Vliv okrajových podmínek v metodě SPH**

*Autor:* Bc. Tomáš Halada

*Studijní program:* Aplikované vědy ve strojním inženýrství

*Obor:* Matematické modelování v technice

*Druh práce:* Diplomová práce

*Vedoucí práce:* doc. Ing. Luděk Beneš Ph.D.

Ústav technické matematiky, Fakulta strojní, České vysoké učení technické v Praze

*Konzultant:* prof. Ing. Jiří Fürst Ph.D.

Ústav technické matematiky, Fakulta strojní, České vysoké učení technické v Praze

*Abstrakt:*

Rozvíjeným tématem je vliv realizace okrajových podmínek v bezsítové částicové metodě Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) s ohledem na problémy proudění s volnou hladinou. Práce vychází z třírozměrných simulací na komplexních geometriích výtokových objektů čerpacích a turbínových stanic řešených pomocí metody SPH. Problémy spojené s realizací okrajových podmínek motivovaly studium provedení pevných stěn i vstupů a výstupů. Na několika testovacích příkladech je zkoumán vliv pokročilých realizací okrajových podmínek pro pevné stěny a vstupy a výstupy při zohlednění vlivu volné hladiny. Mimo to je rozebírána alternativní formulace SPH metody založena na částečně Lagrangeovské a částečně Eulerovské formulaci (ALE-SPH), odstraňující některé z nedostatků klasické varianty SPH metody.

*Klíčová slova:*

Proudění s volnou hladinou, Smoothed Particle Hydrodynamics, okrajové podmínky

*Title:*

**Influence of boundary conditions in SPH method**

*Author:* Bc. Tomáš Halada

*Abstract:*

The topic is the influence of the realization of boundary conditions in the meshless particle method Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) with regard to the free-surface flow problems. The work is motivated by three-dimensional simulations of discharge objects of pumping and turbine stations with complex geometries performed by SPH method. Problems associated with implementation of boundary conditions led to the study of construction of the boundary conditions for solid walls and inlets and outlets. The influence of advanced realisation of boundary conditions for solid walls and inlets and outlets is investigated on several test cases, taking into account the influence of the free surface. In addition, alternative formulation of the SPH method based on partially Lagrange and partially Eulerian description (ALE-SPH) is discussed, while it improves some of the shortcomings of the classical variant of the SPH method.

*Key words:*

Free-surface flow, Smoothed Particle Hydrodynamics, boundary conditions

# Obsah

<b>1</b>	<b>Metoda SPH</b>	<b>11</b>
1.1	Úvod do metody SPH . . . . .	12
1.1.1	Popis kontinua . . . . .	13
1.1.2	Matematický základ metody . . . . .	14
1.1.3	Gradientní náhrady . . . . .	15
1.1.4	Řídící rovnice . . . . .	18
1.1.5	Diskretizace . . . . .	18
1.2	Numerické aspekty SPH metody . . . . .	20
1.2.1	Difuzní členy . . . . .	20
1.2.2	Particle shifting techniky . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Okrajové podmínky</b>	<b>26</b>
2.1	Okrajové podmínky stěn . . . . .	28
2.1.1	Kompenzační metody - kernel corrections . . . . .	28
2.1.2	Okrajové podmínky na principu rozšíření . . . . .	29
2.1.3	Dynamic boundary condition - DBC . . . . .	30
2.1.4	Modified Dynamic boundary condition - mDBC . . . . .	30
2.1.5	Semianalytické okrajové podmínky, hraniční členy - BT . . . . .	33
2.2	Vstupní a výstupní okrajové podmínky . . . . .	35
<b>3</b>	<b>ALE-SPH formulace</b>	<b>39</b>
3.1	Odvození ALE-SPH formulace . . . . .	40
3.2	Výsledný systém rovnic . . . . .	42
3.2.1	Okrajové podmínky . . . . .	44
3.3	Řešení Riemannova problému na rozhraní mezi částicemi . . . . .	44
3.3.1	Použití limiterů . . . . .	45
3.3.2	Hancockovokovo schéma (druhého řádu) . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Program</b>	<b>49</b>
4.1	Přehled dostupných SPH řešičů . . . . .	49
4.2	Struktura programu . . . . .	51
4.2.1	Vyhledávání párů . . . . .	51
4.2.2	Nastavení úlohy . . . . .	52
4.3	Zpětná interpolace na spojitá pole . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Testovací úlohy</b>	<b>57</b>
5.1	Stojící voda . . . . .	57

5.2	Problém protržení přehrad	62
5.2.1	Vliv okrajových podmínek na řešení	63
5.2.2	Protržení přehrad řešené pomocí varianty ALE-SPH	72
5.3	Otevřený kanál	77
5.4	Proud tryskající proti stěně	79
<b>6</b>	<b>Simulace proudění ve výtokových objektech</b>	<b>84</b>
	<b>Závěr</b>	<b>89</b>
	<b>Seznam použitých symbolů</b>	<b>92</b>
	<b>Seznam použitých zkratek</b>	<b>94</b>

# Úvod

Numerické řešení problémů proudění tvoří v dnešní době již nedílnou součást průmyslové a vědecké praxe. Díky postupu poznatků a rostoucímu výpočetnímu výkonu (což souvisí s popularitou a vzestupem nových výpočetních architektur), se dostáváme k řešení stále komplikovanějších problémů a setkáváme se s požadavky na provádění stále komplexnějších simulací. S tím jde ruku v ruce vznik nových metod, či rozvoj metod stávajících.

Práce se zabývá metodou Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH), která sice existuje již téměř 50 let, nicméně výraznější popularity se jí dostává teprve v posledních letech. To souvisí s rostoucí popularitou využívání grafických procesorů (GPU) pro obecné výpočty (často se mluví o tzv. general purpose GPU computing, skrýváno pod zkratku GPGPU). Metoda SPH je poměrně vhodná pro implementaci na tento typ architektur. Slůvko poměrně neužíváme náhodou. Plnohodnotná a efektivní implementace metody (zejména pro GPU) skýtá řadu doposud ne plně uspokojivě vyřešených problémů a úskalí.

Výzvu představují i některá témata spojená s konstrukcí metody. Mezinárodní organizace SPHERIC (SPH rEsearch and engineeRing International Community), sdružující komunitu okolo metody SPH a udržující přehled o pokroku v jednotlivých jejích oblastech, z dlouhodobého hlediska vyčlenila pět hlavních témat, která představují jakési primární výzvy s metodou spojené. Jedná se o studium teoretických vlastností metody, adaptivitu, propojení s ostatními numerickými metodami, aplikaci pro průmyslové aplikace a studium okrajových podmínek.

Právě studiu okrajových podmínek se práce v následujících kapitolách věnuje. Výběr tématu není náhodný. Motivace pro prozkoumání problému okrajových podmínek vznikla při aplikaci metody na proudění ve výtokových objektech čerpacích stanic (jde o různě tvarované přepady a jezy) a právě nespolehlivé chování vstupních a výstupních okrajových podmínek a okrajových podmínek pro pevné stěny působilo při výpočtech výrazné problémy. Práce souhrnně představuje okrajové podmínky v metodě SPH, detailně rozebírá tři pokročilé formulace okrajových podmínek pro pevné stěny a prezentuje algoritmus pro realizaci otevřených okrajových podmínek.

Pozornost je dále věnována ALE formulaci SPH metody, která krom jiného přístupu k okrajovým podmínkám poskytuje řadu nových možností. Je sestavena konkrétní formulace metody a ozkoušena na obvyklých testovacích případech. Pro implementaci všech zkoumaných modelů a variant byl vytvořen nový řešič, jehož funkce krom testovacích úloh a jednoduchých aplikací tkví v ucelení poznatků pro plnohodnotnou, rozsáhlou, škálovatelnou a efektivní implementaci. Vlastnosti jsou zkoumány na testovacích úlohách, konkrétně úloze stojící vody, protržení přehradu



a tekutiny tryskající proti stěně, přičemž získané výsledky porovnááme s experimentálními daty nebo analytickým řešením.

Členění práce je následující. První kapitola obsahuje velmi stručný úvod SPH metody, základní členění a přehled významných prací, dále pak výchozí systém rovnic a jeho diskretizaci a věnuje se některým numerickým aspektům metody. Druhá kapitola teoreticky rozebírá okrajové podmínky v SPH, představuje trojici konkrétních způsobů jak realizovat okrajové podmínky stěn a okrajové podmínky pro vstup a výstup. Třetí kapitola přichází s ALE formulací SPH metody (ALE-SPH) a obsahuje odvození konkrétních schémat pro řešení výchozího systému rovnic. Čtvrtá kapitola pojednává o implementaci metody, včetně přehledu dostupných programů a nástrojů. Představen je vytvořený program, jeho provedení, uspořádání a možnosti a jsou zde rovněž uvedeny některé poznatky spojené s implementací metody. Pátá kapitola se věnuje výsledkům testovacích úloh. V první části je rozebírán vliv okrajových podmínek na testovacím případě stojící vody, protržení přehrady a tekutiny tryskající proti stěně. Na případě protržení přehrady je rovněž demonstrována varianta ALE-SPH.

# Kapitola 1

## Metoda SPH

Metoda **Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)**, těšící se v posledních letech stále větší oblibě, je bezsíťová částicová metoda, založená na Lagrangeově popisu kontinua. To umožňuje řešit úlohy ať už z oblasti proudění, jako je proudění s volnou hladinou, kde dochází k masivnímu mísení vody se vzduchem, rozstříku nebo četným fragmentacím proudu, či z oblasti mechaniky pevných látek jako jsou například lomy, mimořádné deformace nebo tříštění materiálu, na které konvenční metody, obvykle využívající pro diskretizaci výpočetní síť, nedostačují nebo nejsou pro danou třídu úloh příliš vhodné. Mimo standardních aplikací v rámci mechaniky kontinua či multifyzikálních simulací lze nástroje SPH metody využít i pro zcela odlišné oblasti, například při zpracování obrazu. Druhým, neméně důležitým, ba naopak možná dokonce primárním důvodem, který stojí za rostoucí popularitou SPH je stále větší využití grafických procesorů (GPU) pro vědecké a technické výpočty. Architektury GPU, které umožňují pro určité typy úloh a metod (konkrétně pro úlohy s velkým množstvím vzájemně nezávislých dat) dosáhnout výrazně vyšších výpočetních výkonů, než klasické, odlišně konstruované procesory, se jeví jako velmi vhodná platforma pro metodu SPH.

Středem našeho zájmu jsou úlohy proudění s volnou hladinou. To zahrnuje jevy proudění v otevřeném kanále, proudění, při kterém dochází k masivnímu mísení vody se vzduchem, bublání a peřejím, rozstříku, jevy spojené s vlněním hladiny, kolapsem vln a nebo například kolize tekutiny s tělesem. Bezsíťový Lagrangeovský charakter představuje velmi vhodné predispozice právě pro tuto třídu problémů. Standardní převažující nástroj ve výpočetní mechanice tekutin představuje metoda konečných objemů. Tu je právě pro problémy s volnou hladinou nutné doplnit dodatečnými technikami, obvykle se užívá například VOF (*volume of fluid*) metody, která doplní systém řídicích rovnic o transportní rovnici pro hmotnostní podíl, určující zda je konkrétní buňka zaplněná tekutinou či nikoliv nebo metody sledování rozhraní (ITM - *interface tracking method*), které přidávají funkci výšky hladiny jenž je v průběhu výpočtu vyhodnocována. Mnohdy se však i přes značné snahy nepodaří rozhraní správně zachytit - ať už je hladina určena špatně nebo dojde k úplnému rozmazání rozhraní tekutiny vlivem umělé numerické difuze. Použití výpočetní sítě se proto někdy jeví jako velmi obtížně překonatelná překážka.

Oproti tomu díky Lagrangeovskému popisu a vzájemně topologicky neprovázaným částicím je zachycení rozhraní přímým důsledkem konstrukce SPH metody.

Určení úrovně hladiny proto není nutné modelovat pomocí dodatečných mechanismů nebo okrajových podmínek, získáme ji přirozeně z uspořádání částic.

Poznamenejme však, že ani SPH metoda není všemocná. Cenou za možnost řešit komplexní problémy je zpravidla vyšší výpočetní náročnost. Mimoto, Lagran-geovský rámec přináší kromě výhod pramenících z částicového popisu i řadu nových problémů, jako jsou například drobné oscilace částic, výskyt šumu či problém s ustavením částic v klidovém stavu. Pro zmiňovanou třídu problémů jsou však benefity převažující a současný stav SPH metody umožňuje řešení širokého spektra technic-kých a vědeckotechnických problémů, na které konvenční přístupy nestačí a nebo je jejich použití velmi obtížné.

## 1.1 Úvod do metody SPH

S rostoucí popularitou SPH roste také počet různých modifikací, odnoží a vari-ant. Uvedme proto na úvod stručný přehled s odkazem na stěžejní práce v klíčových oblastech ve vztahu k aplikaci na problémy proudění.

Metoda byla představena roku 1977 nezávisle na sobě ve dvou pracích [23][35], přičemž primárním předmětem zájmu byla simulace astrofyzikálních jevů v trojroz-měrném prostoru. Postupem času byla metoda shledána jako užitečný nástroj pro proudění s volnou hladinou [42] a začala být rozvíjena ve dvou podobách, variantě uvažující tekutinu jako ryze nestlačitelnou (ISPH - *incompressible SPH*) [13] dále pak v [30][51] a variantě pracující s tekutinou slabě stlačitelnou (WCSPH - *weakly compressible SPH*) [42], které se následně blíže věnujeme.

Významnou pozornost zasluhuje práce [61], která v rámci SPH pracuje s využi-tím řešení Riemannových problémů (dále pak například [28][65]) a představuje kon-cept částečně Lagranegovského a částečně Eulerovského přístupu k metodě (ALE-SPH), ve snaze omezit oscilace částic a tím způsobený šum, projevující se jako dů-sledek konstrukce metody a použitého modelu. Použití přibližných Riemannovských řešičů v rámci stabilizace zjednodušuje [19], nezávisle se za stejným účelem rozvíjejí tzv. difuzní členy [41], důkladně rozpracované v [3][2][9] pod označením  $\delta$ -SPH . Dalším z významných milníků s ohledem na zlepšení stability metody bylo zavedení umělého posouvání částic označované jako *particle shifting technique* (PST) [32][36].

Vazké členy jsou obvykle řešeny pomocí tzv. umělé viskozity [43], navržené pů-vodně pro stabilizaci metody. Studium diskretizace vazkých členů je k nalezení na-příklad v [10], podrobněji poté v [9].

V současné době, s ohledem na výpočty proudění s volnou hladinou v prak-tických aplikacích, jsou pro nás stěžejní práce věnující se problematice okrajových podmínek. Z okrajových podmínek pro stěny jde o snadno implementovatelné tzv. *dynamic boundary conditions* (DBC) [12][1], jejich nedávné rozšíření [16] a dále pak varianty založené na semianalytickém přístupu [37][40] a hraničních integrálech [14].

Vstupní a výstupní okrajové podmínky jsou v SPH doposud ne zcela uspokojivě vyřešeným tématem. Velmi spolehlivě se jeví implementace pomocí tzv. *bufferových zón*, o kterých pojednává série článků [55][54] a [53]. Alternativně lze otevřené okra-jové podmínky realizovat také pomocí semianalytického přístupu [18].

Zapotřebí je zmínit adaptivitu. Proměnné rozlišení není v SPH doposud běžně

užívaným nástrojem, nicméně probíhají četné snahy o jeho realizaci, například [58].

Přidejme ještě několik poznámek o variantě ALE-SPH, která se do budoucna jeví jako slibná alternativa. Problematice se velmi rozsáhle věnuje [38] a [45] i s ohledem na propojení s metodou konečných objemů. Využití ALE-SPH metody společně s metodou konečných prvků pro simulace interakce tekutiny s poddajným tělesem rozebírá [31]. V souvislosti s ALE-SPH lze dále zmínit například [47].

Z moderních variant metody a zkoumaných směrů zmiňme semi-implicitní variantu WCSPH metody [27], částečně Lagrangeovskou a částečně Eulerovskou variantu vybudovanou z ryze nestlačitelné konstrukce metody, označovanou jako ELI-SPH [20], dále pak čistě Eulerovskou konstrukci EI-SPH [33][46] založenou na ryze nestlačitelném modelu, která by mohla najít uplatnění pro specifické aplikace a tzv.  $\delta$ -ALE-SPH variantu [4], zkoumající nové možnosti při použití ALE-SPH přístupu.

Na závěr stručného shrnutí přidejme ještě článek organizace SPHERIC [59], který popisuje pokrok a stav řešení hlavních výzev v SPH metodě, stanovených toutéž skupinou, k roku 2020.

### 1.1.1 Popis kontinua

Předmětem zájmu a zároveň oblastí existence všech fyzikálních veličin a vlastností je v mechanice kontinua **materiálové těleso**  $\mathcal{B}$ , složené z nekonečného počtu materiálových částic  $\mathcal{X}$ . Materiálové těleso  $\mathcal{B} = \{\mathcal{X}\}$  je kompaktní měřitelná množina s nekonečným počtem materiálových bodů. Stav nebo také konfigurace  $\kappa$  tělesa (zpravidla vybíráme jednu konkrétní konfiguraci jako referenční  $\kappa_0$ ) je dána polohou všech jeho bodů v prostoru. Formálně zapsáno

$$\begin{aligned} \gamma_0 : \mathcal{B} &\mapsto \mathbb{E}^3 \\ \mathcal{X} &\mapsto \mathbf{X} = \gamma_0(\mathcal{X}) \end{aligned} \tag{1.1}$$

kde  $\mathbf{X}$  je poloha částice  $\mathcal{X}$ . Působením vnějších sil se těleso  $\mathcal{B}$  hýbe a deformuje, mění svojí konfiguraci. Konfiguraci  $\kappa_t$  v čase  $t$  nazveme jako aktuální. Aktuální konfigurace je určena pomocí zobrazení

$$\begin{aligned} \gamma_t : \mathcal{B} &\mapsto \mathbb{E}^3 \\ \mathcal{X} &\mapsto \mathbf{x} = \gamma_t(\mathcal{X}, t). \end{aligned} \tag{1.2}$$

kde  $\mathbf{x}$  značí polohu částice v čase  $t$ . Pohyb tělesa pak představuje zobrazení mezi referenční konfigurací  $\kappa_0$  a konfigurací aktuální  $\kappa_t$

$$\begin{aligned} \chi_t : \mathbb{E}^3 &\mapsto \mathbb{E}^3 \\ \mathbf{X} &\mapsto \mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Rovnice (1.2) představuje tzv. *materiálový popis*, jehož nezávislými proměnnými jsou čas  $t$  a materiálová částice  $\mathcal{X}$ . O rovnici (1.3) hovoříme jako o *referenčním popisu* s nezávislými proměnnými časem  $t$  a polohou  $\mathbf{X}$  částice  $\mathcal{X}$ . V případě kdy je za referenční konfiguraci  $\kappa_0$  zvolena počáteční konfigurace v čase  $t = 0$ , hovoříme o *Lagrangeově popisu*. Jak bude patrné v následující sekci, právě Lagrangeův popis a představa materiálových částic je případ metody SPH.

## 1.1.2 Matematický základ metody

Konstrukce metody vychází z identity

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}')\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')d\mathbf{x}' \quad (1.4)$$

kde  $\delta$  představuje Dirackovu delta funkci chápanou ve smyslu distribucí, definované právě vztahem (1.4), tedy  $\delta_{\mathbf{x}}[\varphi] = \varphi(\mathbf{x})$  pro každou funkci  $\varphi \in \mathcal{C}_0^{\infty}$ , přičemž integrace probíhá přes oblast  $\Omega$ .

$\delta$ -distribuci aproximujeme vhodnou funkcí (mluvíme o vyhlazovací nebo také váhové funkci, občas rovněž nazývanou jako jádro)  $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)$ , disponující kompaktním nosičem, který na rozdíl od  $\delta$ -distribuce není bodový. Původní identita přechází do podoby

$$f(\mathbf{x}) \simeq \langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}')W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)d\mathbf{x}' \quad (1.5)$$

kde operátorem  $\langle \cdot \rangle$  označujeme, že se jedná o aproximaci. Od váhové funkce  $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)$  požadujeme již zmíněný kompaktní nosič, tedy  $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) = 0$  pro  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| > \kappa h$  kde  $\kappa$  je vhodná konstanta a  $h$  představuje tzv. vyhlazovací délku a jde o parametr váhové funkce, potažmo metody. Dále požadujeme, aby  $W$  byla dostatečně hladká (alespoň  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ ), normovaná

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)d\mathbf{x}' = 1, \quad W(+\infty) = 0$$

a aby v distributivním smyslu konvergovala k  $\delta$ -distribuci pro  $h \rightarrow 0^+$ . Mimo uvedených nezbytných matematických předpokladů požadujeme, aby šlo o funkci nezápornou, což souvisí se smysluplnou reprezentací některých fyzikálních veličin. Navíc předpokládejme, že jde o funkci symetrickou a radiální, klesající s rostoucí vzdáleností od bodu  $\mathbf{x}$ .

Dosadíme-li namísto  $f(\mathbf{x})$  její derivaci

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} \nabla f(\mathbf{x}')W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)d\mathbf{x}' \quad (1.6)$$

lze s využitím vlastností váhové funkce  $W$  derivaci působící na funkci  $f(\mathbf{x})$  pomocí Gaussovy věty převést na váhovou funkci

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = \int_S (f(\mathbf{x}')W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)) \cdot \mathbf{n}dS' - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)d\mathbf{x}'. \quad (1.7)$$

přičemž první integrál, díky tomu, že funkce  $W$  má kompaktní nosič v  $\Omega$ , je nulový, což plyne přímo z definice kompaktního nosiče. Získáváme náhradu pro derivaci působící na funkci  $f(\mathbf{x})$  ve tvaru

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)d\mathbf{x}'. \quad (1.8)$$

Získanou aproximaci posléze diskretizujeme - mluvíme o tzv. **částicové aproximaci**. Spojité prostředí  $\Omega$  rozdělíme na konečný počet  $N$  částic  $\Omega_i$  tak, aby zůstala



zachovaná míra charakterizující oblast. Každé částici přísluší objem  $V_i$  určený v závislosti na dělení oblasti (respektive počtu částic) a hodnota funkce v odpovídajícím bodě  $f(\mathbf{x}_i) \equiv f_i$ . Obdržíme náhradu

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle_i = \sum_{i=1}^N f_i W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, h) V_i \quad (1.9)$$

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle_i = - \sum_{i=1}^N f_i \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, h) V_i \quad (1.10)$$

kde operátorem  $\langle \cdot \rangle_i$  značíme, že se jedná o diskretizaci aproximace (1.5), což koresponduje s představou materiálového tělesa složeného z materiálových částic  $\mathcal{B} = \{\mathcal{X}\}$ , přičemž jsme se z důvodu uchopitelnosti numerického výpočtu omezili pouze na jejich konečný počet  $N$ . Díky kompaktnímu nosiči funkce  $W$  navíc není potřeba provádět sumaci přes všechny částice v oblasti, jelikož příspěvek v místě  $\mathbf{x}$  je od částic mimo oblast nosiče ( $\mathbf{x}_i: |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i| > \kappa h$ ) nulový.

Upozorněme ještě na hierarchii mezi zavedenými náhradami. Operátor  $\langle \cdot \rangle_i$  značí diskretizaci pomocí konečného počtu bodů funkce, která byla aproximována přechodem od  $\delta$ -distribuci k váhové  $W$ . Pokud bychom tedy chtěli ukázat, že naše náhrada  $\langle f \rangle_i$  konverguje k původní funkci  $f(\mathbf{x})$ , musíme prvně přejít zpět ke spojitě mu prostředí ( $\Delta \mathbf{x}/h \rightarrow 0$ ,  $\Delta \mathbf{x}$  označuje vzdálenost mezi částicemi) a následně pomocí limity  $h \rightarrow 0$  ukázat konvergenci v distributivním smyslu k původní funkci  $f(\mathbf{x})$

$$\langle f \rangle_i \xrightarrow{\Delta \mathbf{x}/h \rightarrow 0} \langle f(\mathbf{x}_i) \rangle \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(\mathbf{x}).$$

Funkci metody si lze představit následujícím způsobem. Uvažujme například případ obyčejné transportní rovnice. Na počátku máme spojitou oblast, ve které je specifikované rozložení koncentrace určité látky. Oblast rozdělíme na konečný počet částic, přičemž každé z částic přiřadíme její vlastní objem a hodnotu koncentrace podle polohy, kde se částice nachází. Specifikujeme-li nyní pohyb jednotlivých částic, získáme se změnou jejich polohy i informaci o tom, jak se v oblasti mění zastoupení veličiny. Zajímá-li nás nová hodnota v konkrétním místě, pomocí náhrady (1.9) ji sestavíme z příspěvků okolních částic vážených pomocí váhové funkce  $W$ . Popsaný princip koresponduje se vztahem (1.3) a jedná se o Lagrangeovský náhled na popis kontinua. Představený základ metody je čistě Lagrangeovský.

### 1.1.3 Gradientní náhrady

Náhrada derivace (1.10) má řadu nedostatků. Problém nastává například už při náhradě konstantní funkce, kdy dostáváme

$$\langle 1 \rangle_i = \sum_{i=1}^N W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, h) V_i \quad (1.11)$$

avšak

$$\langle \nabla 1 \rangle_i = - \sum_{i=1}^N \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, h) V_i \neq \mathbf{0} \quad (1.12)$$

pro libovolně uspořádané částice a v blízkosti hranice oblasti. Toho lze využít pro konstrukci náhrady s lepšími vlastnostmi. Od výsledné náhrady požadujeme, aby byla symetrická, což souvisí s vlastností konzervativity [61]. Postupujeme následujícím způsobem. Namísto  $\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle$  provedme náhradu výrazu  $\langle \nabla f(\mathbf{x}) - \nabla h f(\mathbf{x}_i) \rangle$ , kde  $\forall \mathbf{x} \in \Omega : h(\mathbf{x}) = 1$  a tím pádem  $\nabla h(\mathbf{x})(\mathbf{x}) = 0$

$$\langle \nabla f(\mathbf{x})h(\mathbf{x}) - \nabla h(\mathbf{x})f(\mathbf{x}_i) \rangle = \int_{\Omega} [\nabla f(\mathbf{x}') - \nabla h(\mathbf{x}')f(\mathbf{x}_i)]W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)d\mathbf{x}' \quad (1.13)$$

Upozorníme, že hodnota funkce v místě  $i$   $f(\mathbf{x}_i)$  není funkcí  $\mathbf{x}'$ . Využitím Gaussovy věty získáváme

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [\nabla f(\mathbf{x}') - \nabla h f(\mathbf{x}_i)]W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)d\mathbf{x}' \\ &= \int_S f(\mathbf{x}')W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)\mathbf{n}dS' - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}')\nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)d\mathbf{x}' \\ & - \int_S h(\mathbf{x}')f(\mathbf{x}_i)W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)\mathbf{n}dS' + \int_{\Omega} h(\mathbf{x}')f(\mathbf{x}_i)\nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (1.14)$$

a po vypuštění nulových integrálů přes plochu  $S$  společně s přechodem k částicové aproximaci získáváme (pro zjednodušení označme  $W_{ij} \equiv W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h)$ )

$$\langle \nabla f - \nabla h f_i \rangle_i = - \sum_{j=1}^N \nabla_j W_{ij} f_j \Delta V_j + \sum_{j=1}^N \nabla_j W_{ij} f_i V_j. \quad (1.15)$$

Symetrická náhrada derivace má tvar

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle_i = - \sum_{i=1}^N (f_i - f(\mathbf{x})) \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, h) V_i \quad (1.16)$$

respektive nahrazujeme-li derivaci na částici  $i$  namísto v obecném místě  $\mathbf{x}$  obdržíme

$$\langle \nabla f \rangle_i = - \sum_{j=1}^N (f_j - f_i) \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) V_j. \quad (1.17)$$

Je patrné, že tato náhrada je již v případě aproximace konstantní funkce konzistentní.

Často se však využívá náhrad ještě pokročilejších. Uvažujme vhodnou funkci  $\rho$  (v intencích problémů proudění se obvykle pracuje s hustotou). Využijeme vztahu

$$\frac{\nabla f}{\rho} = \frac{f}{\rho^q} \nabla \left( \frac{1}{\rho^{1-q}} \right) + \frac{1}{\rho^{2-q}} \nabla \left( \frac{f}{\rho^{q-1}} \right) \quad (1.18)$$

kde  $q$  představuje celočíselný parametr. Použitím SPH diskretizace s přihlédnutím k vyjádření pro objem částice  $\Delta V_i = m_i/\rho_i$  získáváme

$$\left\langle \frac{\nabla f}{\rho} \right\rangle_{i,q} = \sum_{j=1}^N \left( \frac{f_i}{\rho_i^{2-q} \rho_j^q} + \frac{f_j}{\rho_i^q \rho_j^{2-q}} \right) \nabla_i W_{ij} m_j. \quad (1.19)$$

Obvykle užívané jsou náhrady, které získáme položíme-li  $q = 1$ ,

$$\left\langle \frac{\nabla f}{\rho} \right\rangle_{i,1} = \sum_{j=1}^N \left( \frac{f_i + f_j}{\rho_i \rho_j} \right) \nabla_i W_{ij} m_j \quad (1.20)$$

a pro  $q = 2$

$$\left\langle \frac{\nabla f}{\rho} \right\rangle_{i,2} = \sum_{j=1}^N \left( \frac{f_i}{\rho_i^2} + \frac{f_j}{\rho_j^2} \right) \nabla_i W_{ij} m_j. \quad (1.21)$$

V případě náhrady druhé derivace je postup složitější. Pokud bychom použili přímočarý postup a převedli druhou derivaci přímo na váhovou funkci (uvažujme rovnou částicovou reprezentaci)

$$\langle \nabla^2 f \rangle_i = \sum_j f_j \nabla_i^2 W_{ij} V_j \quad (1.22)$$

obdržíme náhradu, která je velmi citlivá na nerovnoměrné uspořádání částic. Navíc vzhledem k tomu, že druhá derivace váhové funkce mění znaménko (zde připomeňme, že váhovou funkci uvažujeme jako radiální), v případě difuzních procesů (vazkých, tepelných, chemických,...) nemáme zaručenou správnost jejich směru.

Náhradu druhé derivace proto konstruujeme se snahou vyhnout se druhé derivaci váhové funkce. Zaveďme funkci  $F(|\mathbf{x}_{ij}|)$ , tak, že  $\nabla_i W(\mathbf{x}_{ij}, h) = -\mathbf{x}_{ij} F(|\mathbf{x}_{ij}|)$ . Uvažujme dále funkci  $I(\mathbf{x})$  (pro názornost začněme s jednorozměrným případem)

$$I(x) = \int (f(x') - f(x)) F(|x - x'|) dx'. \quad (1.23)$$

Použitím Taylorova rozvoje v okolí bodu  $x$  získáme

$$\begin{aligned} I(x) &\simeq \int \left( f(x) + \frac{df}{dx}(x') - x + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}(x') - x)^2 - f(x) \right) F(|x - x'|) dx' \\ &= \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \int (x' - x)^2 F(|x - x'|) dx' = \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \end{aligned} \quad (1.24)$$

přičemž člen  $\frac{df(x)}{dx}(x' - x)$  je nulový pro symetrickou váhovou funkci. Následnou diskretizací obdržíme vyjádření druhé derivace v SPH formalismu

$$\left\langle \frac{d^2 f}{dx^2} \right\rangle_i = 2 \sum_{j=1}^N \frac{f_j - f_i}{x_j - x_i} \frac{dW(x_i - x_j)}{dx_i} V_j. \quad (1.25)$$

Přechodem k třírozměrnému (potažmo  $d$ -rozměrnému) prostoru získáváme vztah pro aproximaci laplaceova operátoru (označovaný jako *Morrisova formule*)

$$\langle \nabla^2 f \rangle_i^{\text{Mo}} = 2 \sum_{j=1}^N (f_j - f_i) \frac{\mathbf{x}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}}{\|\mathbf{x}_{ij}\|^2} V_j \quad (1.26)$$

respektive obecný vztah pro náhradu druhé derivace

$$\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right\rangle_i = \sum_{j=1}^N \left( (d+2) \frac{\Delta x_\alpha \Delta x_\beta}{\|\mathbf{x}_{ij}\|^2} - \delta_{\alpha\beta} \right) (f_j - f_i) \frac{\mathbf{x}_{ij} \cdot \nabla W_{ij}}{\|\mathbf{x}_{ij}\|^2} V_j \quad (1.27)$$

kde  $d = 1, 2, 3$  značí počet dimenzi a  $\delta_{\alpha\beta}$  je Kroneckerovo delta. Řeckými písmeny  $(\alpha, \beta)$  indexujeme prostorové složky a  $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ . Uvedený postup lze rozšířit pro získání libovolné derivace [17].

### 1.1.4 Řídící rovnice

Ačkoliv je předmětem našeho zájmu zejména proudění nestlačitelné vazké tekutiny, metoda SPH pracuje s modelem tekutiny slabě stlačitelné, což znamená, že připouštíme variace hustoty v rámci jednoho procenta. Nelze proto pracovat s rovnicí kontinuity ve tvaru  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , ale je nutné použít rovnici kontinuity pro stlačitelnou tekutinu. Rovnici kontinuity a pohybovou rovnici je nutné dále doplnit stavovou rovnicí, udávající vztah mezi hustotou a tlakem.

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \operatorname{div}(\mathbf{v}) \quad (1.28)$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\mathbb{T}) + \mathbf{f} \quad (1.29)$$

$$p = p(\rho). \quad (1.30)$$

Symbolem  $D(\cdot)/Dt$  značíme materiálovou derivaci,  $\mathbb{T}$  je tenzor napětí a  $\mathbf{f}$  představuje vektor vnějších sil. Rychlost tekutiny je definovaná jako materiálová derivace polohy materiálové částice s polohou  $\mathbf{x}$

$$\frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \mathbf{v}. \quad (1.31)$$

V našem případě se omezíme na pouze Newtonovské tekutiny. Tenzor napětí  $\mathbb{T}$  je určen jako

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \tau = (-p + \lambda \operatorname{tr}(\mathbb{D}))\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D} \quad (1.32)$$

$$\mathbb{D} = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right).$$

Jako stavová rovnice je použita obvykle užívaná rovnice pro slabě stlačitelnou tekutinu [43]

$$p = b \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + p_0 \quad (1.33)$$

kde  $b = c_0^2 \rho_0 / \gamma$ ,  $\gamma$  značí Poissonovu konstantu s obvyklou volbou  $\gamma = 7$ ,  $c_0$  představuje rychlost zvuku a  $\rho_0$  referenční hustotu média. Vzhledem k předpokladu o slabé stlačitelnosti a Taylorovu rozvoji okolo bodu  $\rho = \rho_0$  ze kterého je patrné, že hlavní příspěvek jde na vrub lineárnímu členu [3], lze pracovat s linearizovanou formou stavové rovnice (1.33) ve tvaru

$$p = c_0^2 (\rho - \rho_0) + p_0. \quad (1.34)$$

### 1.1.5 Diskretizace

Vezmeme-li v potaz, že objem částice můžeme složit z její hmotnosti a hustoty

$$V_i = \frac{m_i}{\rho_i} \quad (1.35)$$

získáváme v SPH formalismu vyjádření pro hustotu ve tvaru (jde o pouhé dosazení do vztahu (1.9))

$$\langle \rho(\mathbf{x}) \rangle = \sum_{j=1}^N m_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h). \quad (1.36)$$

Zákon zachování hmoty lze v SPH zapsat přímo pomocí vztahu (1.36), plynoucího z konstrukce metody<sup>1</sup>

$$\langle \rho \rangle_i = \sum_{j=1}^N m_j W_{ij}. \quad (1.37)$$

který však nefunguje v blízkosti rozhraní. Využijeme proto rovnice kontinuity (1.28) a přechodem k částicové diskretizaci společně s náhradou pro derivaci (1.17) obdržíme

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = -\langle \rho \operatorname{div}(\mathbf{v}) \rangle_i = \rho_i \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla W_{ij}. \quad (1.38)$$

Obdobně postupujeme v případě pohybové rovnice (1.29), kde člen  $\nabla p$  diskretizujeme pomocí vztahů (1.20) resp. (1.21) a efekt vazkých sil  $\nabla \cdot \tau$  (tedy pro newtonovské tekutiny  $\eta \nabla^2 \mathbf{u}$ ) prozatím označíme členem  $\Pi_{ij}$ . Získáváme vztahy

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = -\langle \nabla p \rangle_{i,1} + \langle \nabla \cdot \tau \rangle_i + \mathbf{f}_i = -\sum_{j=1}^N \left( \frac{p_i + p_j}{\rho_i \rho_j} + \Pi_{ij} \right) \nabla_i W_{ij} m_j + \mathbf{f}_i \quad (1.39)$$

respektive<sup>2</sup>

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = -\langle \nabla p \rangle_{i,2} + \langle \nabla \cdot \tau \rangle_i + \mathbf{f}_i = -\sum_{j=1}^N \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \nabla_i W_{ij} m_j + \mathbf{f}_i. \quad (1.40)$$

Vazký člen  $\eta \nabla^2 \mathbf{u}$  diskretizujeme pomocí náhrady (1.26). Člen vazkých sil tím získává tvar

$$\Pi_{ij}^\eta = -\eta K \frac{\mu_{ij}}{h \rho_i \rho_j}, \quad \mu_{ij} = \frac{h \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij}}{|\mathbf{x}_{ij}|^2 + \epsilon h^2} \quad (1.41)$$

<sup>1</sup>Byť se jedná o vztah plynoucí přímo z konstrukce metody [42], ukázalo se, že pro problémy s volnou hladinou či vícefázovým prouděním jde o náhradu nevhodnou, kvůli nekonzistenci v blízkosti rozhraní [17]. Přihlédneme-li k faktu, že  $V_i = 1 / \sum_j^N W_{ij}$ , lze získat alternativní vyjádření v podobě  $\langle \rho \rangle_i = m_i \sum_j^N W_{ij}$ , které je již konzistentní pro vícefázové proudění, nicméně stále se potýká s nedostatky v případě volné hladiny [24]. V textu prezentované výrazy vycházející z diskretizace rovnice kontinuity (1.28), pracující s hustotou, jsou funkční v případě proudění s volnou hladinou, nicméně pro změnu nevhodné při vícefázovém proudění. V tomto ohledu se nejlépe jeví formulace, která namísto hustot  $\rho_i$  pracuje při diskretizaci rovnice kontinuity (1.28) s objemy  $V_i$ . Rovnice (1.38) má poté podobu  $DV_i/Dt = V_i^2 \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla W_{ij}$  a pohybová rovnice (1.40)  $m_i D\mathbf{v}_i/Dt = -\sum_{i=1}^N (p_i V_i^2 + p_j V_j^2) \nabla W_{ij}$  přičemž platí  $V_i = m_i / \rho_i$  [8].

<sup>2</sup>Poznamenejme, že rovnici odpovídající vztahu s náhradou  $\langle \nabla p \rangle_{i,2}$  bychom získali i naprosto odlišným způsobem, kdy bychom řídicí rovnice pro částice odvozovali za pomoci Lagrangeovské dynamiky s využitím lagrangianu  $\mathcal{L}(\mathbf{x}, v) = \int_\Omega \rho \left( \frac{1}{2} v^2 - e(\rho, p) - \phi(\mathbf{x}) \right) dx$  [25][8].



kde  $\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$ ,  $\eta$  je kinematická viskozita a  $K$  je prostorový koeficient s hodnotami  $K = 6, 8$  a  $15$  v 1D, 2D a 3D a  $\epsilon$  v členu  $\mu_{ij}$  představuje volitelnou konstantu, která má za úkol zabránit nulovému jmenovateli, s obvyklou hodnotou  $\epsilon = 0.001$  [7].

Vazký člen  $\Pi_{ij}$  se ovšem často realizuje ve formě tzv. *umělé viskozity*, navržené původně za účelem stabilizace metody [43][25]

$$\Pi_{ij}^\alpha = \begin{cases} \frac{-\alpha \bar{c}_{ij} \mu_{ij} + \beta \mu_{ij}^2}{\bar{\rho}_{ij}} & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij} < 0 \\ 0 & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad (1.42)$$

kde  $\bar{c}_{ij} = (c_i + c_j)/2$  je průměrná rychlost zvuku mezi částicemi,  $\bar{\rho}_{ij} = (\rho_i + \rho_j)/2$  průměrná hustota,  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\epsilon$  jsou volitelné konstanty a  $\mu_{ij}$  je dáno stejně jako v rovnici (1.41). V našem případě uvažujeme  $\beta = 0$  (druhý člen se pro simulace s volnou hladinou obvykle vypouští), hodnoty  $\alpha$  se pohybují řádově okolo 0.01 a 0.1. Ačkoliv byl člen originálně navržen jako stabilizační, lze ukázat jeho souvislost s fyzikální viskozitou [11].

## 1.2 Numerické aspekty SPH metody

Zaměříme se nyní na určité aspekty náhrady, kterou jsme odvodili a věnujme pozornost nástrojům, za jejich pomoci lze zlepšit přesnost a numerické vlastnosti získané aproximace.

### 1.2.1 Difuzní členy

Pro většinu případů, které jsou předmětem našeho zájmu, je fyzikální rychlost zvuku výrazně vyšší, než rychlost tekutiny. Časový krok výpočtu je úměrný rozlišení a rychlosti zvuku  $\Delta t \sim h/c_0$ . Bohužel, nelze použít skutečnou fyzikální rychlost zvuku, protože časový krok by byl příliš malý. Z toho důvodu užíváme tzv. *numerické rychlosti zvuku*, obvykle určenou podle vztahu [15]

$$c_0 = C_{cs} \sqrt{h_w \|\mathbf{g}\|} \quad (1.43)$$

kde  $C_{cs}$  je volitelný koeficient (obvykle kolem hodnoty  $C_{cs} = 20$ ) a  $h_w$  je maximální výška vodního sloupce, případně dle vztahu

$$c_0 = 10 \max \left( V_{\max}, \sqrt{\frac{p_{\max}}{\rho_0}} \right) \quad (1.44)$$

přičemž  $V_{\max}$  a  $p_{\max}$  představují maximální očekávané hodnoty rychlosti a tlaku v průběhu výpočtu. Uvedené odhady souvisí s předpokladem umělé stlačitelnosti, kdy předpokládáme

$$\left| \frac{\Delta \rho}{\rho} \right| \leq 0.01. \quad (1.45)$$

Při použití standardní metody využívající odvozených rovnic si všimneme, že i když dostáváme dobré výsledky (myšleno experimentu odpovídající) pro kinematiku a rychlostní pole, v tlakovém poli se vyskytuje výrazný šum. Jeho přítomnost souvisí s několika faktory - numerické schéma je centrální a explicitní, s použitým fyzikálním modelem slabě stlačitelné tekutiny a akustickými vlnami a konečně také s Lagrangeovskou povahou metody, kdy částice, směřující do žádané polohy, podléhají drobným oscilacím. Všechny uvedené důvody jsou pochopitelně vzájemně provázané.

Strategií, jak odstranit šum a oscilace v tlakovém (potažmo hustotním) poli je přidat dodatečný difuzní člen do rovnice kontinuity

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} + \delta_\psi h c_0 \mathcal{D} \quad (1.46)$$

kde  $\delta_\psi$  představuje bezrozměrný parametr difuzního členu (obvykle  $\delta_\psi = 0.1$ ) a

$$\mathcal{D} = 2 \sum_{j=1}^N \psi_{ij} \cdot \frac{\mathbf{x}_{ij} \cdot \nabla_j W_{ij}}{\|\mathbf{x}_{ij}\|^2} \frac{m_j}{\rho_j} \quad (1.47)$$

Kandidát na difuzní člen  $\psi_{ij}$  by měl splnit některé základní podmínky. V první řadě, má-li být člen (1.47) difuzní, **musí aproximovat sudé derivace pole hustoty** (poznamenejme, že tvar rovnice (1.47) koresponduje se vztahem pro náhradu druhé derivace (1.26)). Další podmínkou je je **konzistence se zákonem zachování hmoty**, přechodem od diskretizace zpět ke kontinuu bychom měli obdržet rovnici kontinuity (1.28), tedy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \lim_{\Delta x/h \rightarrow 0} \left\langle \frac{d\rho_{\mathcal{D}}}{dt} \right\rangle_i \right) = 0 \quad (1.48)$$

Splnění první podmínky je obvykle zajištěno navržením difuzního členu ve tvaru [48]

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = h^p \hat{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad p \geq 1. \quad (1.49)$$

Následuje podmínka **konzistence vzhledem k volné hladině**, která požaduje aby nedocházelo k nefyzikálnímu pohybu hladiny. Při jejím porušení vzniká v blízkosti rozhraní umělý dodatečný člen, který vede k umělému zvyšování úrovně hladiny [3] a tím zamezuje získání hydrostatických řešení. Dále požadujeme **globální zachování hmoty**, neboli

$$\sum_{i=1}^N \left\langle \frac{d\rho_{\mathcal{D}}}{dt} \right\rangle_i = 0. \quad (1.50)$$

Bylo dokázáno [2], že symetrie difuzního členu zajistí splnění podmínky globálního zachování hmoty, tedy

$$\sum_{i=1}^N \mathcal{D}_i V_i = 0 \iff \boldsymbol{\psi}_{ij} = -\boldsymbol{\psi}_{ji}. \quad (1.51)$$

Rozšířenou variantou difuzního členu je difuzní člen navržený Moltenim a Colagrossim [41]

$$\psi_{ij}^{\text{Mo}} = \rho_j - \rho_i. \quad (1.52)$$

Lze nahlédnout [3], že uvedený tvar nespĺňuje podmínku konzistence v blízkosti hladiny (volného povrchu). Difuzní člen totiž při použití  $\psi_{ij}^{\text{Mo}}$  vede na vztah

$$\mathcal{D}_i^{\text{Mo}} = 2\nabla\rho_i \cdot \nabla\Gamma_i + \Gamma_i\nabla^2\rho_i + \mathcal{O}(h) \quad (1.53)$$

kde

$$\Gamma_i = \sum_{j=1}^N W_{ij} \frac{m_j}{\rho_j}, \quad \nabla\Gamma_i = \sum_{j=1}^N \nabla_i W_{ij} \frac{m_j}{\rho_j}. \quad (1.54)$$

Druhý člen na pravé straně obsahuje druhou derivaci hustoty a proto jde o difuzní člen. První člen pravé strany je však diferenciální operátor prvního řádu. V případě, že je efektivní oblast jádra zcela zaplněna (uvnitř oblasti, v dostatečné vzdálenosti od hladiny) platí  $\Gamma_i \simeq 1$  a  $\nabla\Gamma_i \simeq 0$ , první člen pravé strany je nulový a  $\mathcal{D}_i^{\text{Mo}}$  aproximuje laplacian hustoty. To však neplatí v blízkosti hladiny, kde  $\nabla\Gamma_i$  není nulové a míří směrem ven z oblasti s tekutinou. Ve stavu blízkém stavu hydrostatickému směřuje gradient hustoty  $\nabla\rho_i$  rovněž směrem k hladině, díky čemuž je skalární součin  $\nabla\rho_i \cdot \nabla\Gamma_i$  kladný a difuzní člen  $\mathcal{D}_i^{\text{Mo}}$  taktéž kladný. To vede k nárůstu hustoty a potažmo tlaku ve směru k hladině, což má za následek vznik síly působící ve směru ven z tekutiny, která posouvá částice vzhůru a dochází tak k rozporu s hydrostatickým řešením. Popsaný efekt je však zanedbatelný v případě nehydrostatických případů, kde je síla uměle zvyšující hladinu řádově menší, než ostatní přítomné síly.

Antuono [3] však navrhnul zlepšení představeného členu v podobě, která je konzistentní v celé oblasti s tekutinou, zajišťuje zachování hmoty a není v rozporu s řešením hydrostatických případů

$$\psi_{ij}^{\text{An}} = (\rho_j - \rho_i) - \frac{1}{2} (\langle \nabla\rho \rangle_j^{\mathcal{L}} + \langle \nabla\rho \rangle_i^{\mathcal{L}}) \cdot \mathbf{x}_{ij} \quad (1.55)$$

kde  $\langle \nabla\rho \rangle_i^{\mathcal{L}}$  značí renormalizovanou náhradu gradientu hustoty, určenou jako

$$\langle \nabla\rho \rangle_i^{\mathcal{L}} = \sum_{j=1}^N (\rho_j - \rho_i) \mathcal{L}_i \nabla_i W_{ij} V_j \quad (1.56)$$

$\mathcal{L}$  je tzv. renormalizační faktor daný vztahem

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}_i) = \left[ \sum_{j \in \mathcal{F}} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \otimes \nabla W_h(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \frac{m_j}{\rho_j} \right]^{-1} \quad (1.57)$$

přičemž sumace probíhá přes množinu částic tekutiny  $\mathcal{F}$  a  $\otimes$  značí tenzorové násobení. Podobně jako v předchozích případech lze ukázat [2], že navržený difuzní člen vede na

$$\mathcal{D}_i^{\text{An}} = \frac{h^2}{12} \mathbb{B}_{jkpq} \left( \frac{\partial^4 \rho_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma \partial x_\delta} \right). \quad (1.58)$$

Opravu Molteniho difuzního členu, ve snaze získat konzistenci v blízkosti hladiny lze provést ještě druhým způsobem, a to s využitím dynamických hustot (potažmo tlaků) [22]. Člen má tvar

$$\psi_{ij}^{\text{Fo}} = \rho_j^{\text{D}} - \rho_i^{\text{D}} \quad (1.59)$$

kde  $\rho^D$  značí dynamickou hustotu danou  $\rho^D = \rho^T - \rho^H$ . ( $\rho^T$  značí celkovou hustotu a  $\rho^H$  její hydrostatickou část). Difuzní člen lze potom přepsat jako

$$\psi_{ij}^{\text{Fo}} = \rho_{ji}^T - \rho_{ij}^H. \quad (1.60)$$

Pomocí stavové rovnice (1.33) určíme hydrostatickou složku hustoty

$$\rho_{ij}^H = \rho_0 \left( \frac{p_{ij}^H + 1}{b} + 1 \right)^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (1.61)$$

Je ovšem nutné místo celkového tlaku  $p_{ij}$  použít jeho hydrostatickou část  $p_{ij}^H = \rho_0 g z_{ij}$ , přičemž  $z_{ij}$  značí vertikální vzdálenost mezi částicemi  $i$  a  $j$  a  $b = c_0^2 \rho_0 / \gamma$  je konstanta stavové rovnice. Výhoda této varianty spočívá zejména v tom, že oproti první navržené opravě není nutné počítat renormalizované gradienty hustoty. Předchozí varianta má však tu výhodu, že funguje pro libovolný typ proudění, zatím co difuzní člen  $\psi_{ij}^{\text{Fo}}$  je navržený pro proudění, kde je dominantní silou síla gravitační.

## 1.2.2 Particle shifting techniky

Nerovnoměrné uspořádání částic vede ke snížení přesnosti aproximace a způsobuje problémy se stabilitou. Ty se projevují vznikem nejrůznějších fluktuací v polích veličin proudění a vznikem poruch v podobě prázdných oblastí a trhlin v proudu tekutiny. Ve snaze zamezit zmíněným problémům byl vyvinutí tzv. *shifting algoritmus*, označovaný zkratkou PTS (*particle shifting technique*) [32][62]. Jde postup, který uměle posouvá částice z oblasti s jejich vyšší koncentrací do oblasti, kde je koncentrace částic nižší. Děje se tak na základě Fickova difuzního zákona

$$\mathbf{J} = -D \nabla C. \quad (1.62)$$

kde  $\mathbf{J}$  značí difuzní tok,  $C$  koncentraci částic a  $D$  difuzní koeficient. Předpokládáme, že difuzní tok  $\mathbf{J}$  je úměrný rychlosti posunu částice  $\mathbf{v}_s$ . Dráha, o kterou jsou částice posouvány, je dána jako  $\delta \mathbf{x}_s = \Delta t \mathbf{v}_s$ , na základě čehož uvažujeme

$$\delta \mathbf{x}_s \propto -D \Delta t \nabla C. \quad (1.63)$$

S využitím částicové aproximace rovnici pro  $\delta \mathbf{x}_s$  přepíšeme do podoby  $\delta \mathbf{x}_{s,i} \propto -D_i \Delta t \langle \nabla C \rangle_i$  a gradient koncentrace v difuzním zákoně (1.62) vyjádříme jako

$$\langle \nabla C \rangle_i = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \nabla_i W_{ij}. \quad (1.64)$$

Difuzní koeficient v rovnici (1.63) je potřeba zvolit tak, aby zajistil dostatečný posun částic a zároveň tak, aby posun částic negeneroval nové poruchy a nestability. Za pomoci podmínky stability pro řešení advektivně-difuzní rovnice určené jako

$$D_i \leq \frac{h^2}{2 \Delta t_i} \quad (1.65)$$

kde  $\Delta t_i$  odpovídá maximálnímu lokálnímu časovému kroku vyhovujícímu CFL podmínce pro dané aktuální rychlosti a zvolené rozlišení

$$\Delta t_i \leq \frac{h}{\|\mathbf{v}_i\|}. \quad (1.66)$$

lze kombinací obou rovnic získat  $D_i \leq h\|\mathbf{v}_i\|$ , přičemž uvažujeme CFL číslo 0.5 a tím pádem  $\Delta t_i \leq 0.5h/\|\mathbf{v}_i\|$ . Vztah pro posun částice  $\mathbf{x}_s$  má potom tvar

$$\delta \mathbf{x}_{s,i} = -Ah\|\mathbf{v}_i\| \Delta t_i \langle \nabla C \rangle_i \quad (1.67)$$

kde  $A$  je bezrozměrná konstanta nezávislá na konfiguraci daného problému, diskretizaci a časovém kroku, volena obvykle z intervalu  $[1, 6]$  [52].

Dále je nutné zohlednit chování v blízkosti hladiny, kde efektivní oblast váhové funkce není zcela zaplněna. Bez patřičných opatření by docházelo chybnému pohybu rozhraní a nefyzikálním nestabilitám. Aby se zabránilo přechodu částic z tekutiny přes volnou hladinu, používá se dodatečné korekce [32], limitující difuzi ve směru normály k povrchu avšak umožňující pohyb částic v tečném směru vzhledem k hladině. Korekce se tedy uplatní pouze v blízkosti rozhraní. Určuje se tak na základě tzv. *částicové divergence*  $\nabla \cdot \mathbf{x}$  [30], která má v SPH formalismu tvar

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{x} \rangle_i = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{x}_{ij} \nabla_i W_{ij}. \quad (1.68)$$

Jednou z možných realizací [15] je doplnit vzdálenost posunutí  $\delta \mathbf{r}$  o tzv. prahovou hodnotu hladiny  $A_{\text{FSC}}$

$$A_{\text{FSC}} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{x} - A_{\text{FST}}}{A_{\text{FSM}} - A_{\text{FST}}} \quad (1.69)$$

kde pro koeficienty  $A_{\text{FSM}}$  a  $A_{\text{FST}}$  platí

$$A_{\text{FSM}} = \begin{cases} 2 & \text{pro 2D} \\ 3 & \text{pro 3D} \end{cases} ; \quad A_{\text{FST}} = \begin{cases} 1.5 & \text{pro 2D} \\ 2.75 & \text{pro 3D} \end{cases} \quad (1.70)$$

Výsledný vztah pro posunutí částice se zohledněnou korekcí v blízkosti hladiny má pak tvar

$$\delta \mathbf{x}_{s,i} = \begin{cases} -A_{\text{FSC}} Ah\|\mathbf{v}_i\| \Delta t \langle \nabla C \rangle_i, & (\nabla \cdot \mathbf{x} - A_{\text{FST}}) < 0 \\ -Ah\|\mathbf{v}_i\| \Delta t \nabla \langle C \rangle_i, & (\nabla \cdot \mathbf{x} - A_{\text{FST}}) = 0 \end{cases} \quad (1.71)$$

Poznamenejme, že použitím PST korekce ztrácíme ryze lagrangeovský charakter, což je důsledek vychýlení částic z jejich přirozených trajektorií. Vzhledem k tomu, že hodnoty posunutí jsou však velmi malé, povaha metody zůstává téměř lagrangeovská. Doplníme také, že realizaci a provedení shifting algoritmů (PST) je celá řada. Umělé posouvání částic (PST) je v některých svých podobách zároveň velmi efektivní korekcí v případě tzv. tahových nestabilit (*v literatuře pod pojmem tensile instabilities*). Jde o jev spojený s diskretizací tlakového gradientu, kde z důvodu zachování hybnosti vyžadujeme symetrickou náhradu ve tvar  $p_i + p_j$ . Následkem použití centrální náhrady jsou tahové nestability, které se při proudění projevují vznikem



dutin v oblastech s negativním tlakem. PST je v tomto ohledu pouze doplňující numerickou technikou, nejedná se o zásah do konstrukce diskretizovaných rovnic. V některých případech se však PST nedokáže s tahovými nestabilitami vypořádat (obvykle v případech s velmi výraznými hodnotami negativního tlaku). V takovém případě lze využít tzv. TIC (*tensile instability correction*) technik [36], které nahrazují při diskretizaci tlakového gradientu člen  $p_j + p_i$  za člen  $p_j - p_i$  a jsou schopné úplně odstranit tahové nestability ovšem za cenu, že není přesně splněn zákon zachování hybnosti. Konstrukce pokročilých korekcí napěťových nestabilit je v SPH metodě poměrně moderním tématem a byť výsledky prezentované v dalších kapitolách nepracují s pokročilými technikami PST ani TIC, jedná se o téma natolik závažné, že jej bylo záhodno zmínit alespoň několika řádky.

# Kapitola 2

## Okrajové podmínky

Podobně jako u jiných numerických metod, i v SPH metodě jsou okrajové podmínky jednou z hlavních výzev a zároveň jedním z hlavních problémů při realizaci výpočtů a simulací. I díky tomu si vysloužily místo mezi pěti vybranými tématy SPH metody (tzv. *grand challenges*), které vyčlenila mezinárodní organizace SPHERIC (*SPH rEsearch and engineeRing International Community*) jako hlavní oblasti pro bádání a výzkum. Organizace SPHERIC sdružuje práce a pokroky spojené s metodou a umožňuje tak komunitě uživatelů i badatelů pohodlnější přehled o problémech, nových informacích a nástrojích.

Při řešení problémů s volnou hladinou se vyskytují typicky tři druhy okrajových podmínek.

**Okrajová podmínka volného povrchu**, respektive hladiny, vyžaduje splnění kinematických a dynamických podmínek podél rozhraní. Kinematická okrajová podmínka říká, že body na rozhraní musí zůstat na hranici oblasti  $\partial\Omega_F$ , přičemž  $\partial\Omega_F$  značí volnou hladinu tekutiny. Vzhledem k tomu, že se rozhraní pohybuje společně s tekutinou

$$\mathbf{v}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{V}_{n,f}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_F \quad (2.1)$$

kde  $\mathbf{v}_n$  je rychlost tekutiny promítnuté do normály k hladině  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{V}_{n,f}$  normálová rychlost rozhraní.

Dynamická podmínka pro volný povrch je důsledkem spojitosti napětí napříč rozhraním. Při zanedbání povrchových napětí (poznamenejme, že modelování povrchového napětí v metodě SPH představuje samostatnou kategorii), na hladině nepůsobí ani kolmé ani tečné (smykové) napětí. Pro Newtonovské tekutiny formálně zapsáno

$$\mathbb{T} \cdot \mathbf{n} = (-p + \lambda \text{tr}(\mathbb{D}))\mathbf{n} + 2\mu\mathbb{D} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.2)$$

kde  $\mathbb{D}$  je tenzor rychlosti deformace a  $\lambda$  a  $\mu$  jsou koeficienty vazkosti.

**Okrajové podmínky pro stěny** rovněž vyžadují splnění kinematické okrajové podmínky, pro část hranice odpovídající stěně  $\partial\Omega_B$  pohybující se rychlostí  $\mathbf{V}_b$  platí

$$\mathbf{v}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{V}_{n,b}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_B. \quad (2.3)$$

přičemž  $\mathbf{V}_{n,b}$  značí rychlost stěny v jejím normálovém směru. V závislosti na tečné rychlosti na stěně rozlišujeme mezi skluzovou okrajovou podmínkou (tzv. *free-slip*) a podmínkou ulpívání na stěně (*no-slip*). Volba spočívá v tom, zda je předmětem zájmu mezní vrstva. Okrajová podmínka s ulpíváním na stěně požaduje

$$\mathbf{v}_t(\mathbf{x}) \Big|_{\text{no-slip}} = \mathbf{V}_t(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_B \quad (2.4)$$

kde  $\mathbf{v}_t$  a  $\mathbf{V}_{t,b}(\mathbf{x})$  jsou rychlosti tekutiny a stěny promítnuté do tečné roviny k rozhraní. V případě skluzových okrajových podmínek není dán žádný požadavek na tečnou rychlost. Pro tlak platí Neumannova okrajová podmínka ve tvaru

$$\nabla p(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \rho \left[ \mathbf{g} - \frac{d\mathbf{V}(\mathbf{x})}{dt} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}) \right] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_B. \quad (2.5)$$

**Vstupní a výstupní okrajové podmínky** - v případě vstupních okrajových podmínek (část hranice  $\partial\Omega_I$ ), na rozdíl od případu pro pevné stěny, uvažujeme pouze Dirichletovy okrajové podmínky pro rychlost a pro tlak

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_I \quad (2.6)$$

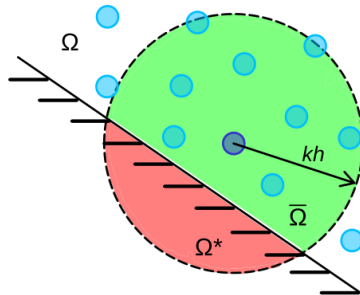
$$p(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_I. \quad (2.7)$$

kde  $\mathbf{V}$  a  $P$  udává rychlost a tlak na vstupu. Oproti tomu na výstupu uvažujeme pouze Neumannovu okrajovou podmínku

$$\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_O \quad (2.8)$$

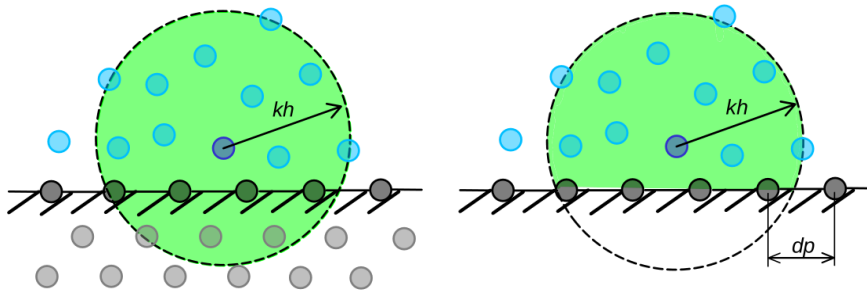
$$\nabla p(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_O. \quad (2.9)$$

Problém realizace okrajových podmínek pro pevné stěny (a ostatně i pro vstup a výstup) je patrný na obrázku 2.1. Nejen, že musíme zaručit, aby částice neprocházely stěnou, potýkáme se také s problémem, že částice v blízkosti hranice nemá rovnoměrně zaplněnou efektivní oblast (nosič)  $\Omega_i$  své váhové funkce sousedními částicemi (občas mluvíme o tzv. deformovaném nosiči jádra). Pro každou částici v blízkosti hranice lze  $\Omega_i$  rozložit jako  $\Omega_i = \Omega_i^* \cup \bar{\Omega}_i$ . Nachází-li se částice v blízkosti hranice, část efektivní oblasti  $\Omega_i^*$  přesahuje přes hranici a v oblasti problému  $\Omega$  se nachází pouze část  $\bar{\Omega}_i \in \Omega$ .



Obrázek 2.1: Znázornění přesahu efektivní oblasti jádra  $\Omega_i$  přes hranici pro částici nacházející se v její blízkosti.  $\Omega_i = \Omega_i^* \cup \bar{\Omega}_i$ ,  $\Omega_i^*$  - část mimo oblast úlohy  $\Omega$ ,  $\bar{\Omega}_i$  - část v oblasti úlohy  $\Omega$

Zmíněný efekt je možné řešit dvojím způsobem. První třídou postupů pro realizaci okrajových podmínek tvoří metody dodatečných částic, kdy za hranici umístíme pomocné částice, zajišťující zaplnění oblasti  $\Omega_i^*$ . Druhou pak způsoby založené na renormalizaci aproximací jednotlivých členů řídicích rovnic, ve snaze vykompenzovat chybějící spoluinteragující sousedy částice v blízkosti hranice. V následující části je představena konstrukce jednotlivých metod a jsou uvedeny jejich vlastnosti, možnosti a omezení.



Obrázek 2.2: Realizace okrajových podmínek pomocí dodatečných částic umístěných za hranici (vlevo) a pomocí jedné vrstvy částic, obvykle doplněné o renormalizační procedurou (vpravo).  $d_p$  značí počáteční vzdálenost mezi částicemi.

## 2.1 Okrajové podmínky stěn

Přistupme nyní ke konkrétním realizacím výše naznačených způsobů.

### 2.1.1 Kompenzační metody - kernel corrections

Často používaným přístupem jak kompenzovat chybějící sousedy v blízkosti hranice (resp. deformovaný nosič jádra v blízkosti hranice) je náhrada váhové funkce  $W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h)$  alternativní variantou  $W^{\mathcal{L}}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h)$ , přičemž

$$\nabla W^{\mathcal{L}}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) = \mathcal{L}(\mathbf{x}_i) \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) \quad (2.10)$$

kde  $\mathcal{L}$  značí renormalizační nebo také deformační operátor. Uvažujeme-li  $\mathcal{L}(\mathbf{x}_i) = \mathbb{I}$  obdržíme klasickou variantu váhové funkce ( $\mathbb{I}$  značí jednotkovou matici).

Jednou z možností navrženou v [5] je použít *Shepardovu renormalizaci*, kdy položíme

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{\gamma_h(\mathbf{x}_i)} \mathbb{I} \quad (2.11)$$

přičemž Shepardův renormalizační faktor  $\gamma_h$  určíme jako

$$\gamma_h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \quad (2.12)$$

respektive v diskretizované částicové reprezentaci

$$\langle \gamma \rangle_i = \sum_{j \in \mathcal{F}} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) \frac{m_j}{\rho_j}. \quad (2.13)$$

Sumace v tomto případě probíhá pouze přes částice tekutiny  $\mathcal{F}$ , případné hraniční částice či prvky k hodnotě nepřispívají.

Uvedený přístup vede k získání aproximace nultého řádu pro SPH náhradu v blízkosti hranic. Ve snaze získat náhradu prvního řádu lze použít tzv. MLS (*moving least-squares*) přístup [50], kdy deformační operátor váhové funkce  $\mathcal{L}$  definujeme jako

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}_i) = \left[ \sum_{j \in \mathcal{F}} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \otimes \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) \frac{m_j}{\rho_j} \right]^{-1}. \quad (2.14)$$

Kompenzační přístup však nedokáže sám o sobě zaručit nepropustnost stěny. Používá se proto v kombinaci s doplňujícími technikami, obvykle založenými na pokrytí hranice vrstvou částic (se vzdálenostmi mezi částicemi odpovídající počátečnímu dělení  $d_p$ ), které zavádějí působení dodatečné síly mezi stěnou a tekutinou [7][44]. Byť použití dodatečných (či umělých) hraničních sil není zcela konzistentní, v případě rozsáhlých, objemných třírozměrných simulací s komplexní geometrií jde, oproti jiným přístupům, o nástroj snadno realizovatelný a lze jej považovat za přijatelnou alternativu.

### 2.1.2 Okrajové podmínky na principu rozšíření

V úvodu k okrajovým podmínkám jsme uvedli, že hlavním problémem částic v blízkosti hranice je právě absence sousedních částic v oblasti  $\Omega^*$ , tedy části efektivní oblasti, která hranici přesahuje. Okrajové podmínky na principu rozšíření přidávají za hranici dodatečné částice a to tak, aby pro částici tekutiny v blízkosti hranice byla efektivní oblasti váhové funkce zcela zaplněna. Hraniční částice (*virtuální*, nebo také tzv. *ghost particles*) zároveň zabráňují částici tekutiny projít skrze hranici a realizují předepsanou okrajovou podmínku. Označíme-li množinu částic tekutiny jako  $\mathcal{F}$  a množinu virtuálních částic stěny  $\mathcal{G}$ , lze rovnice pro SPH náhradu funkce (1.9) a diferenciálního operátoru (1.8) rozdělit na členy

$$\langle f \rangle_i = \sum_{j \in \mathcal{F}} f_j W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) \frac{m_j}{\rho_j} + \sum_{j \in \mathcal{G}} f_j W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) \frac{m_j}{\rho_j} \quad (2.15)$$

$$\langle \nabla f \rangle_i = - \sum_{j \in \mathcal{F}} f_j \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) \frac{m_j}{\rho_j} - \sum_{j \in \mathcal{G}} f_j \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) \frac{m_j}{\rho_j} \quad (2.16)$$

kde druhý výraz na pravé straně značí interakci s hraničními částicemi.

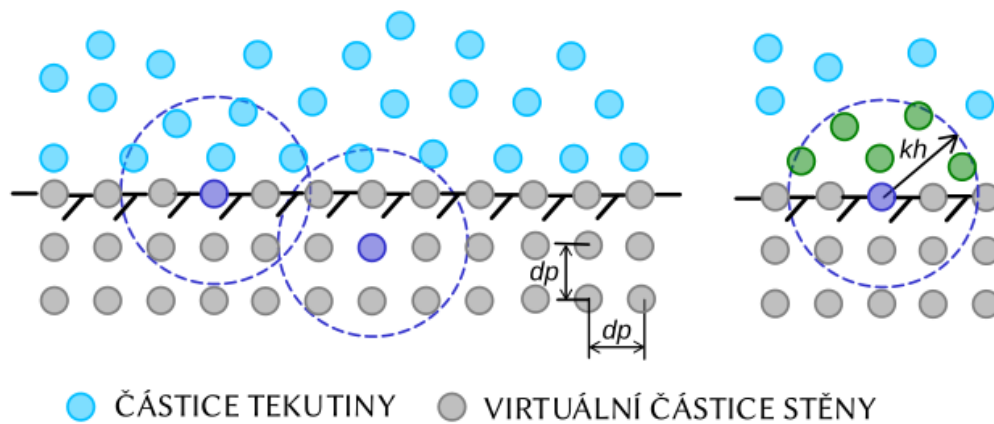
U okrajových podmínek založených na **principu rozšíření tekutiny** rozlišujeme dva přístupy. První, princip tzv. **virtuálních částic** (*v literatuře obvykle označované jako *virtual particles**), kdy jsou za hranicí oblasti rozmístěny dodatečné částice s pevně danou strukturou uspořádání, která se v průběhu výpočtu nemění. Ty zaplňují hranici přesahující část efektivní oblasti  $\Omega^*$  částice v blízkosti hranice. Hodnoty veličin na virtuálních částicích jsou určovány z hodnot tekutiny v blízkosti stěny, případně pevně předepsány. Právě způsobem určení veličin virtuálních částic se jednotlivé metody založené na principu rozšíření virtuálními částicemi liší. Poloha virtuálních částic je neměnná nebo upravována podle předepsané okrajové

podmínky [1][16][12].

Druhou variantu představuje **zrcadlení částice tekutiny** (v literatuře obvykle označované jako **ghost particles**). Za hranici oblasti jsou rozmístěny dodatečné částice, které v tomto případě však vznikají zrcadlením částic tekutiny, nacházejících se u okraje oblasti, přes hranici. Obraz částice tekutiny za hranicí má stejné hodnoty veličin jako původní částice avšak s tím rozdílem, že rychlost je uvažována z opačným znaménkem [50]. Ačkoliv se uvedený přístup dočkal řady zdokonalení a rozšíření (např. [21]), v případě implementace na grafické procesory (GPU) je obtížně uchopitelný a to zejména proto, že předem neznáme počet dodatečných částic za stěnou a je nutné je v průběhu výpočtu generovat.

### 2.1.3 Dynamic boundary condition - DBC

Nejjednodušší variantou virtuálních částic jsou tzv. **dynamic boundary conditions** (DBC), kdy je hranice a oblast za hranicí do vzdálenosti  $\kappa h/2$  pokryta částicemi uspořádanými v kartézské mřížce o hraně  $dp$ , což odpovídá inicializační vzdálenost mezi částicemi. Částice však nemusí být uspořádány nutně ekvidistantně. Diskretizujeme-li například válcovou oblast, je možné uspořádat částice tak, abychom co nejlépe zachytili žádanou geometrii, ovšem při současné snaze se co nejméně odchýlit od rovnoměrného uspořádání. Částice hranice (hovoříme o částicích  $\mathcal{G}$ ) splňují stejné rovnice pro určení hustoty a tlaku jako částice tekutiny. Na hraničních částicích je určována hustota (a pomocí stavové rovnice zároveň tlak), nevyhodnocujeme pro ně však zrychlení a jejich poloha se nemění (případně se mění tak, jak vyžaduje okrajová podmínka například v případě pohyblivé stěny). Blíží-li se částice tekutiny k hranici, na hraničních částicích i částici tekutiny roste hustota a tedy tlak a čímž mezi částicemi vzniká odpuzivá síla, která zabraňuje tekutině projít skrze hranici.

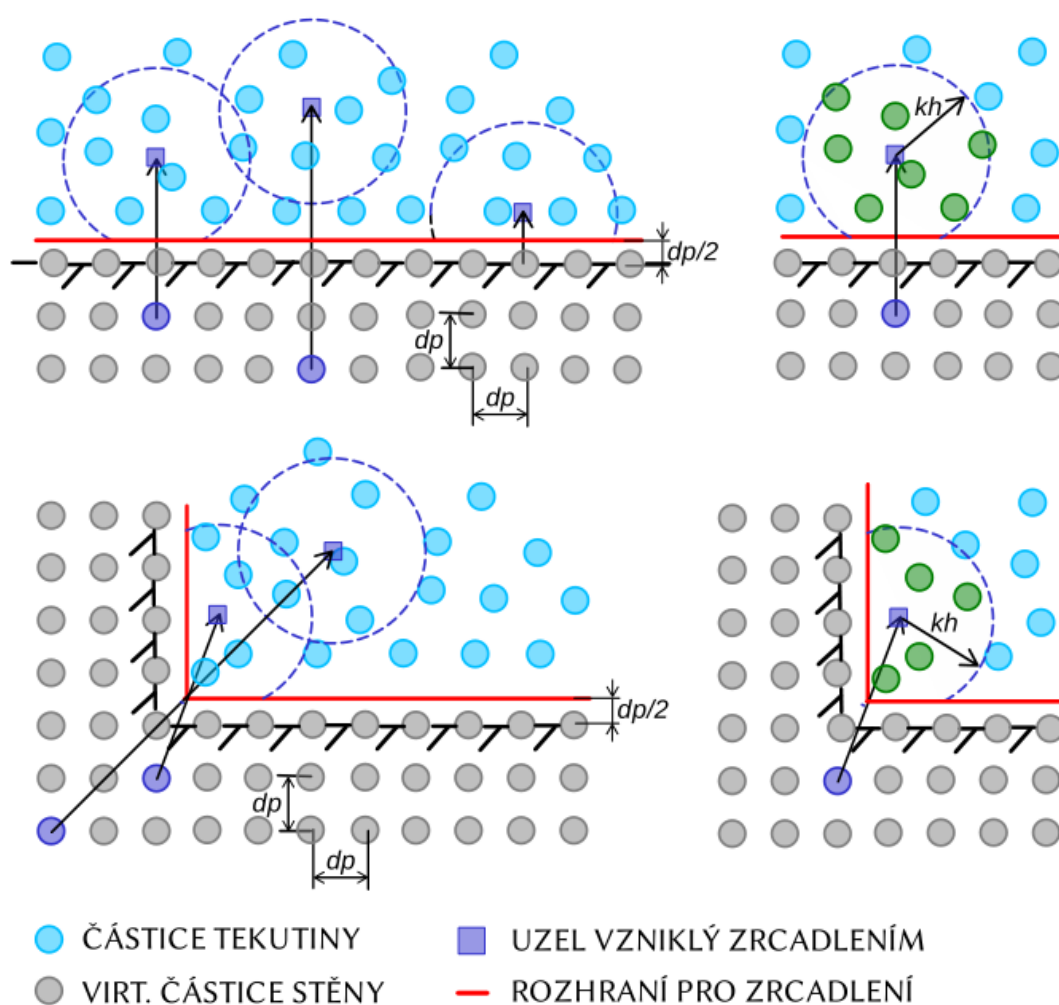


Obrázek 2.3: Schématické znázornění interakce částic, hraničních částic a virtuálních částic za stěnou u varianty okrajových podmínek DBC.

### 2.1.4 Modified Dynamic boundary condition - mDBC

Jak je již z názvu patrné, metoda **modified dynamic boundary conditions** zdokonaluje předchozí variantu DBC a odstraňuje její nejvýraznější nedostatky,

umělou mezeru, vznikající mezi stěnou a tekutinou a šum a poruchy tlakových polí v blízkosti hranice (viz výsledky v sekci 5), které jsou cenou za snadnou realizaci DBC okrajové podmínky. Zlepšení lze dosáhnout jiným přístupem k určování veličin na hraničních částicích. V metodě mDBC jsou hraniční částice uspořádány stejně jako v předchozí variantě, ovšem s dodatečným rozhraním mezi hraničními částicemi a částicemi tekutiny ve vzdálenosti  $dp/2$ . Pro každou hraniční částici je pomocí zrcadlení přes dodatečné rozhraní vytvořen v oblasti tekutiny virtuální uzel. U přímých stěn probíhá zrcadlení přímo ve směru normály k hranici, osově, v případě rohových částic je zrcadlení provedeno středově přes roh oblasti, jak demonstruje obrázek 2.4. Sumace proměnných je provedena v přezrcadleném virtuálním uzlu a následně je pomocí Taylorova rozvoje prvního řádu extrapolována zpět na hraniční částici. Princip funkce okrajové podmínky je stejný jako v předchozím případě.



Obrázek 2.4: Schématické znázornění zrcadlení virtuálních částic na uzly v oblasti tekutiny a jejich následné interakce u varianty okrajových podmínek mDBC.

Postup pro určování veličin pro hraniční částice je následující. Vyjděme z Taylorova rozvoje pro funkci více proměnných (indexy s řeckými písmeny  $\alpha, \gamma, \dots$  značí prostorové složky, přičemž derivaci budeme nyní značit indexovým zápisem, tedy

$$\partial f_i / \partial x_\alpha \equiv f_{i,\alpha}$$

$$f(\mathbf{x}) \simeq f_i + (\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) f_{i,\alpha} + \frac{1}{2!} (\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) (\mathbf{x}^\gamma - \mathbf{x}_i^\gamma) f_{i,\alpha\gamma} \quad (2.17)$$

Dále vynásobíme obě strany rozvoje váhovou funkcí  $W_i(\mathbf{x})$  a jejími prvními derivacemi  $W_{i,\beta}(\mathbf{x})$  (přičemž pro kompaktnost zápisu značíme  $W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}, h) \equiv W_i(\mathbf{x})$ ), zanedbáme derivace druhého a vyššího řádu a integrujeme přes oblast  $\Omega$ . Obdržíme tak soustavu  $d + 1$  rovnic (2.18) pro  $d + 1$  neznámých ( $f_i$  a  $f_{i,\alpha}$ )

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) W_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = f_i \int_{\Omega} W_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + f_{i,\alpha} \int_{\Omega} (\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) W_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.18)$$

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) W_{i,\beta}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = f_i \int_{\Omega} W_{i,\beta}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + f_{i,\alpha} \int_{\Omega} (\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) W_{i,\beta}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Výsledná diskrétní aproximace pro  $f_i$  a  $f_{i,\alpha}$  (získáno převedením soustavy (2.18) do částicové reprezentace a vyjádřením příslušných neznámých pomocí Cramerova pravidla) má podobu

$$f_i = \frac{\det \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^N f_j W_{ij} \Delta V_j & \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) W_{ij} \Delta V_j \\ \sum_{j=1}^N f_j W_{ij,\beta} \Delta V_j & \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) W_{ij,\beta} \Delta V_j \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^N W_{ij} \Delta V_j & \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) W_{ij} \Delta V_j \\ \sum_{j=1}^N W_{ij,\beta} \Delta V_j & \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) W_{ij,\beta} \Delta V_j \end{pmatrix}} \quad (2.19)$$

$$f_{i,\beta} = \frac{\det \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^N W_{ij} \Delta V_j & \sum_{j=1}^N f_j W_{ij} \Delta V_j \\ \sum_{j=1}^N W_{ij,\beta} \Delta V_j & \sum_{j=1}^N f_j W_{ij,\beta} \Delta V_j \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^N W_{ij} \Delta V_j & \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) W_{ij} \Delta V_j \\ \sum_{j=1}^N W_{ij,\beta} \Delta V_j & \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j^\alpha - \mathbf{x}_i^\alpha) W_{ij,\beta} \Delta V_j \end{pmatrix}} \quad (2.20)$$

Přejdeme nyní k proměnným proudění a proměnným, které je nutné pro hraniční částice vyhodnocovat. Začneme s hustotou. Jak bylo popsáno výše, částici hranice na souřadnici  $\mathbf{x}_b$  zrcadlíme přes hranici, čímž získáme virtuální uzel v oblasti s tekutinou o souřadnicích  $\mathbf{x}_g$ , ve kterém určíme hustotu a její derivace (uspořádejme tyto hodnoty do vektoru a označme jej jako  $\boldsymbol{\rho}_g$ ). Poté provedeme extrapolaci zpět na hraniční částici

$$\rho_b = \rho_g + (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_g) \cdot \nabla \rho_g. \quad (2.21)$$

Hodnoty hustoty a derivací hustoty ve virtuálním uzlu určíme podle představené náhrady (2.18) jako řešení soustavy lineárních algebraických rovnic

$$\mathbb{A}_g \boldsymbol{\rho}_g = \mathbf{b}_g \quad (2.22)$$

kde  $\mathbb{A}_g$  je uzlová matice částicové aproximace,  $\boldsymbol{\rho}_g$  vektor obsahující hustoty a složky gradientu ve virtuálním uzlu a  $\mathbf{b}_g$  vektor koeficientů příslušných proměnných z rovnice (2.18). Pro 2D



$$\mathbb{A}_g = \begin{pmatrix} \sum_j^N W_{gj} V_j & \sum_j^N (x_j - x_g) W_{gj} V_j & \sum_j^N (y_j - y_g) W_{gj} V_j \\ \sum_j^N \partial_x W_{gj} V_j & \sum_j^N (x_j - x_g) \partial_x W_{gj} V_j & \sum_j^N (y_j - y_g) \partial_x W_{gj} V_j \\ \sum_j^N \partial_y W_{gj} V_j & \sum_j^N (x_j - x_g) \partial_y W_{gj} V_j & \sum_j^N (y_j - y_g) \partial_y W_{gj} V_j \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

$$\boldsymbol{\rho}_g = \begin{pmatrix} \rho_g \\ \partial_x \rho_g \\ \partial_y \rho_g \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_g = \begin{pmatrix} \sum_j^N W_{gj} m_j \\ \sum_j^N \partial_x W_{gj} m_j \\ \sum_j^N \partial_y W_{gj} m_j \end{pmatrix}.$$

### 2.1.5 Semianalytické okrajové podmínky, hraniční členy - BT

Přístup založený na hraničních členech (označovaný též jako *semianalytický*) vychází z modifikované formulace SPH metody, kdy v rovnici pro náhradu derivace (1.7) nevypustíme integrál přes hranici nosiče váhové funkce a pokoušíme se nalézt jeho řešení podél hranice oblasti. To je možné buď na základě částečně analytického přístupu [37][14] a nebo, jak je prezentováno na následujících řádcích, čistě numericky, pomocí formalismu SPH [7].

Výchozí rovnicí je vztah (1.7), ve kterém se nejprve namísto integrace přes celou oblast  $\Omega$  omezíme na integraci přes efektivní oblast váhové funkce  $\Omega_i$  a dále rozdělíme podle obrázku 2.1 na část nacházející se v oboru  $\bar{\Omega}_i$  a část přesahující hranici  $\Omega_i^*$

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = - \int_{\bar{\Omega}} f(\mathbf{x}') \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' - \int_{\Omega^*} f(\mathbf{x}') \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \quad (2.24)$$

přičemž druhý integrál v uvedené náhradě v principu neexistuje. Jsme však schopni, za předpokladu, že je pole  $f$  dostatečně regulární, s využitím vlastností váhové funkce provést následující náhradu zahrnující oba integrály pravé strany

$$\frac{1}{\gamma_h(\mathbf{x})} \left( - \int_{\bar{\Omega}} f(\mathbf{x}') \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' + \int_{\partial\bar{\Omega}} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) \mathbf{n}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right) \quad (2.25)$$

$$= \frac{1}{1 - \gamma_h(\mathbf{x})} \left( - \int_{\Omega^*} f(\mathbf{x}') \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' + \int_{\partial\Omega^*} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) \mathbf{n}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right) + \mathcal{O}(h)$$

kde normálový vektor k hranici  $\mathbf{n}$  uvažujeme jako vnější a  $\gamma_h(\mathbf{x})$  je spojitý Shepardův renormalizační faktor

$$\gamma_h(\mathbf{x}) := \int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}'. \quad (2.26)$$

Váhová funkce je nenulová v části průniku hranic  $\partial\Omega \cap \partial\bar{\Omega}_i$ . Druhý integrál levé strany je tedy až na znaménko stejný jako druhý integrál na pravé straně. Díky tomu lze druhý integrál z původní rovnice (2.24) vyjádřit jako

$$\int_{\Omega^*} f(\mathbf{x}') \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \simeq \quad (2.27)$$

$$\frac{1}{\gamma_h(\mathbf{x})} \left( (1 - \gamma_h(\mathbf{x})) \int_{\bar{\Omega}} f(\mathbf{x}') \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' - \int_{\partial\bar{\Omega}} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) \mathbf{n}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right).$$

Přechodem k SPH diskretizaci získáváme výslednou náhradu

$$\langle \nabla f \rangle_i = \frac{1}{\gamma_i} \left( - \sum_{j \in \mathcal{F}} f_j \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) \frac{m_j}{\rho_j} + \sum_{k \in \mathcal{B}} f_k W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k, h) \mathbf{n}_k s_k \right). \quad (2.28)$$

$$\langle \gamma \rangle_i = \sum_{j \in \mathcal{F}} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) \frac{m_j}{\rho_j} \quad (2.29)$$

přičemž  $\mathcal{F}$  značí sumaci přes částice tekutiny a  $\mathcal{B}$  sumaci přes hraniční částice (elementy).

Ze vztahu (2.28) je patrné, že pro vyčíslení hodnoty náhrady pro částice v blízkosti hranice je zapotřebí znát hodnoty funkce  $f_k$  na hranici a velikost elementů  $s_k$ . Za tímto účelem diskretizujeme hranici pomocí jedné vrstvy částic (což odpovídá situaci na obrázku 2.2 vlevo), umístěných ve vzdálenostech  $d_p$ , přičemž každé částici odpovídá část hranice spojená s počátečním dělením ( $s = d_p$  v případě 2D,  $s = d_p^2$  pro 3D). Občas v kontextu hraničních členů nemluvíme o hraničních částicích ale používáme pojem hraniční elementy. Hodnoty proměnných pro hraniční částice (elementy) určujeme extrapolací z oblasti s tekutinou. V našem případě využíváme vážené sumace

$$f(\mathbf{x}_b) = \frac{\sum_{j \in \mathcal{F}} f_j W(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_j)}{\sum_{j \in \mathcal{F}} W(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_j)}. \quad (2.30)$$

Výsledný tvar řídicích rovnic v částicové reprezentaci má při použití hraničních členů podobu

$$\langle \gamma \rangle_i = \sum_{j \in \mathcal{F}} W_h(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \frac{m_j}{\rho_j} \quad (2.31)$$

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \frac{1}{\gamma_i} \left( \sum_{j \in \mathcal{F}} m_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} + \sum_{k \in \mathcal{B}} \rho_k \mathbf{v}_{ik} \cdot \mathbf{n}_k W_{ik} s_k + \delta_\Psi h c_0 \mathcal{D} \right) \quad (2.32)$$

$$\mathcal{D} = 2 \sum_{j \in \mathcal{F}} \psi_{ij} \cdot \frac{\mathbf{x}_{ij} \cdot \nabla_j W_{ij} m_j}{\|\mathbf{x}_{ij}\|^2 \rho_j}, \quad \psi_{ij}^{\text{Mo}} = \rho_j - \rho_i$$

$$p = b \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\kappa - 1 \right] + p_0, \quad b = c_0^2 \rho_0 / \kappa \quad (2.33)$$

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = -\frac{1}{\gamma_i} \left( \sum_{j \in \mathcal{F}} \left( \Lambda_{ij} + \Pi_{ij} \right) \nabla_i W_{ij} m_j - \sum_{k \in \mathcal{B}} \rho_k \left( \Lambda_{ik} + \Pi_{ik} \right) \mathbf{n}_k W_{ik} s_k \right) - \mathbf{f}_i \quad (2.34)$$

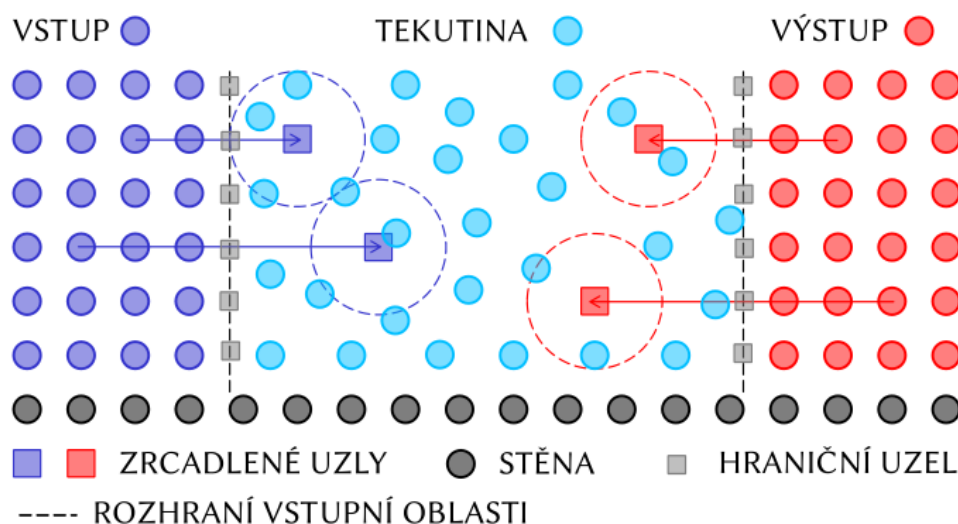
$$\Lambda_{ij} = \frac{p_i + p_j}{\rho_i \rho_j}$$

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha c_{ij} \mu_{ij} + \beta \mu_{ij}^2}{\bar{\rho}_{ij}} & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij} < 0 \\ 0 & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij} \geq 0 \end{cases}, \quad \mu_{ij} = \frac{h \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij}}{|\mathbf{x}_{ij}|^2 + \epsilon h^2}.$$

## 2.2 Vstupní a výstupní okrajové podmínky

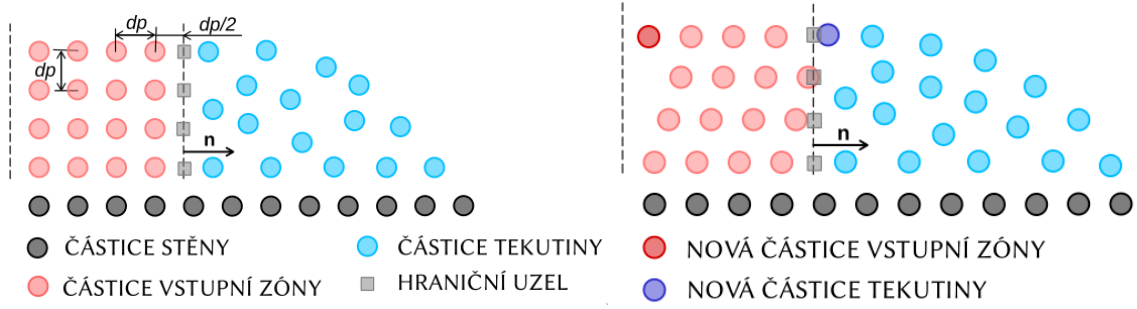
Stejně jako v případě okrajových podmínek pro pevné stěny je nutné zajistit, aby částice tekutiny v blízkosti hranice, pro kterou je předepsána vstupní nebo výstupní okrajová podmínka, měla zaplněna svou efektivní oblast, která přes hranici přesahuje, případně aby byl deficit sousedů jiným způsobem kompenzován. U vstupní okrajové podmínky přidáváme do oblasti nové částice a v případě výstupní okrajové podmínky částice oblast naopak opouští.

Realizace vstupů a výstupů je provedena pomocí tzv. vstupních a výstupních nebo také *bufferových* zón, jejichž princip byl představen v trojici článků [55][54][53] a ze kterých se v následujícím odstavci vychází a které jsou implementovány pomocí vlastních algoritmů. Je nutné si uvědomit, že částice pro nás představují diskretizační body oblasti, přičemž vstupy a výstupy nám mění počet částic a tedy i diskretizačních bodů v oblasti. Právě z toho důvodu je jejich realizace do značné míry rovněž problémem algoritmickým.



Obrázek 2.5: Schématické znázornění realizace vstupní a výstupní okrajové podmínky, zahrnující zrcadlení uzlových bodů a extrapolaci hodnot z oblasti tekutiny na částice vstupních a výstupních zón.

Za částí hranice, pro kterou je předepsána vstupní nebo výstupní okrajová podmínka, je umístěná *bufferová* zóna o šířce větší, než je radius nosiče váhové funkce, tedy platí  $L_b > \kappa h/2$ . Zóna je složená z částic rozmístěných v kartézské mřížce s mezičásticovou vzdáleností  $d_p$ , odpovídající počáteční vzdálenosti částic. Pro částice zóny jsou jednotlivé veličiny předepsány předem okrajovou podmínkou nebo lze hodnoty veličin extrapolovat z oblasti tekutiny, čehož se využívá zejména u výstupní okrajové podmínky.



Obrázek 2.6: Schématické znázornění vstupní zóny, aktualizace poloh částic vstupní zóny, přeměny částice vstupní zóny na částici tekutiny a vygenerování nové částice vstupu.

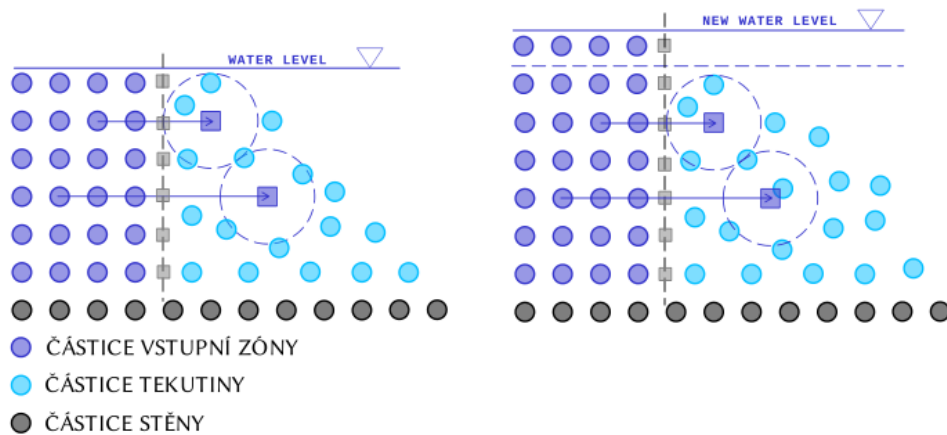
Pro částice vstupní a výstupní zóny není určováno zrychlení ani derivace hustoty. Poloha vstupních částic je v každém kroku aktualizována společně s polohou částic tekutiny podle předepsané rychlosti. Překročí-li vstupní částice rozhraní zóny, změní se její typ z typu *VSTUP* na typ *TEKUTINA* a na opačné straně vstupní zóny se vytvoří nová vstupní částice. Poloha nově vytvořené částice je dána vztahem

$$\mathbf{x}_{nb} = \mathbf{x}_b + [(\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_b) \cdot \mathbf{n}_b - L_b] \mathbf{n}_b.$$

příčemž reflektuje polohu částice přetypované. S přetypovanou částicí je nadále nakládáno jako s ostatními částicemi tekutiny.

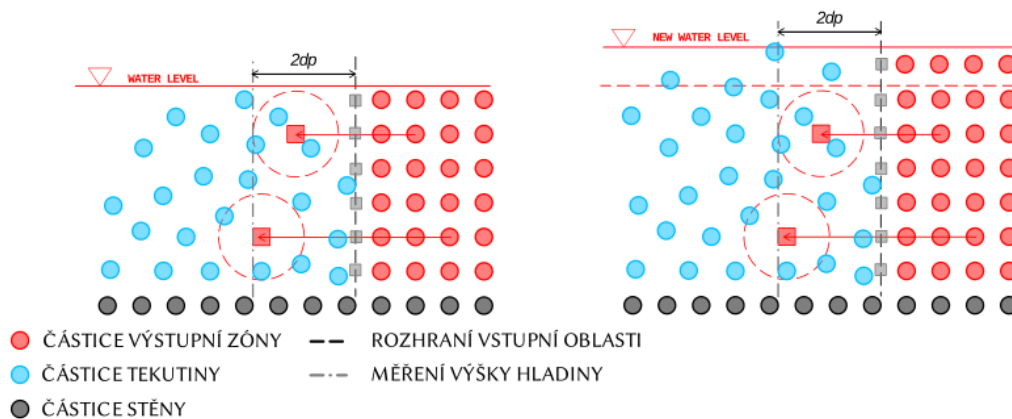
Podobně se postupuje i v případě výstupní okrajové podmínky. Zde je možné veličiny na výstupu předepsat pevně nebo je extrapolovat z oblasti s tekutinou. Překročí-li částice tekutiny oblast hranice, je její typ změněn z typu *TEKUTINA* na typ *VÝSTUP* a jsou jí přiřazeny hodnoty proměnných podle typu okrajové podmínky. Částice se nadále účastní interakcí s tekutinou a stejně jako v předchozím případě pro ně nejsou určovány hodnoty jednotlivých veličin, pouze se aktualizuje její poloha. Při posunutí za opačnou stěnu bufferové zóny je částice ze simulace zcela vyňata.

Mezi vstupem a výstupem je drobný rozdíl v uspořádání částic. Zatím co vstupní zóna se sestává z předem vytvořených částic, funkci výstupních částic tvoří přetypované částice tekutiny, které zaplní (přitečou) oblast bufferu. Mohlo by však dojít k situaci, že díky neuspořádanosti částic přitékajících k výstupu vzniknou po přetypování a posunu výstupních částic v oblasti výstupní zóny prázdná místa či nezaplňené dutiny. Z tohoto důvodu je oblast výstupní zóny pokryta kartézskou sítí o hraně buňky  $d_p$  a po každé aktualizaci poloh částic (a po provedení přetypování) se kontroluje, zda každá z buněk výstupní zóny obsahuje výstupní částici. Je-li některá z buněk prázdná, dojde k vygenerování částice s příslušnými vlastnostmi výstupu (veličiny jsou přímo předepsány nebo extrapolovány z tekutiny podle typu okrajové podmínky).



Obrázek 2.7: Schématické znázornění zvyšování hladiny pomocí vstupního bufferu.

Výška vstupního i výstupního bufferu může být nastavena pevně a nebo upravována v průběhu výpočtu. Toho využívá zejména výstup, kde je často nutné výšku výstupní zóny uzpůsobit úrovni hladiny. Výška výstupní zóny se řídí výškou hladiny určenou ve vzdálenosti  $d_p$  před výstupní okrajovou podmínkou. Postup pro určování výšky hladiny je popsán v sekci 4.3.



Obrázek 2.8: Schématické znázornění zvyšování výstupního bufferu podle výšky hladiny.

Extrapolace veličin, které nejsou pro vstupní a výstupní zóny určeny okrajovou podmínkou, funguje na principu představeném a detailně odvozeném v předchozí kapitole pro získání hodnot proměnných na virtuálních částicích při realizaci okrajových podmínek pevných stěnou pomocí varianty mDBC. Částice zóny je zrcadlena přes hranici oblasti s tekutinou a pomocí soustavy (2.20) jsou určeny hodnoty a gradienty příslušných veličin. Ty se následně využijí k rekonstrukci hodnoty veličiny na částici zóny. V případě hustoty (respektive tlaku) platí vztahy (2.21) a (2.22), v případě rychlosti lze postupovat analogicky

$$\mathbf{v}_b = \mathbf{v}_g + (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_g) \cdot \nabla \mathbf{v}_g \quad (2.35)$$

kde hodnoty rychlosti a derivací v uzlovém bodě určíme opět jako

$$\mathbb{A}_g \mathbf{V}_{\mathbf{x}_g} = \mathbf{b}_g, \quad \mathbb{A}_g \mathbf{V}_{\mathbf{y}_g} = \mathbf{b}_g \quad (2.36)$$

přičemž vektory  $\mathbf{V}_{\mathbf{x}_g}$  a  $\mathbf{V}_{\mathbf{y}_g}$  obsahují příslušnou složku rychlosti a její derivace v uzlovém bodě, uspořádané následujícím způsobem

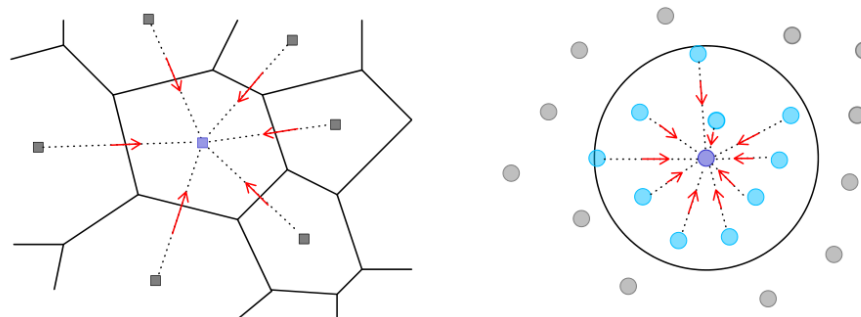
$$\mathbf{V}_{\mathbf{x}_g} = \begin{pmatrix} v_{x,g} \\ \partial_x v_{x,g} \\ \partial_y v_{x,g} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_{\mathbf{y}_g} = \begin{pmatrix} v_{y,g} \\ \partial_x v_{x,g} \\ \partial_y v_{x,g} \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Vyzdvihněme nyní ještě některé přednosti vstupních a výstupních zón. Princip chování vstupních a výstupních částic je prakticky stejný, což přináší řadu implementačních benefitů. Zóny lze použít i pro realizaci komplikovanějších podmínek, poznamenejme, že v rámci Lagrangeovského světa SPH metody zajišťují mimo přestupu hybnosti i přestup hmoty. Jejich použití je také jednou z cest k proměnnému rozlišení, představujícímu další ze současných témat SPH metody.

# Kapitola 3

## ALE-SPH formulace

I přes rostoucí popularitu metody SPH a zejména pak její slabě stlačitelné varianty WCSPH je patrné, že se potýkáme s řadou nedostatků. Počínaje difuzními členy, přes realizaci vazkých členů (použití umělé viskozity), okrajové podmínky nevyjímaje. Zkusíme proto upravit formulaci celé metody, ve snaze odstranit některé z přítomných problémů. Využijeme k tomu částečně Lagrangeovského a částečně Eulerovského popisu [61][45]. ALE-SPH (*arbitrary Lagrangian-Eulerian SPH*) se v současnosti jeví jako užitečný nástroj poskytující nové možnosti a směr, kterým se bude metoda v budoucnu rozvíjet [47][4].



Obrázek 3.1: Paralela mezi metodou konečných objemů a ALE-SPH formulací, využívající řešení Riemannových problémů.

V našem případě sestavíme schéma pracující s přibližným řešením Riemannových problémů, což nám umožňuje použít řadu poznatků rozpracovaných v metodě konečných objemů (mluvíme proto o tzv. R-ALE-SPH variantě). Paralela MKO s ALE-SPH formulací je znázorněna na obrázku 3.1. Namísto toků mezi jednotlivými buňkami určujeme toky mezi jednotlivými částicemi, které na rozdíl od buněk mění svou polohu a za vzájemné interakce se volně pohybují v oblasti stejně jako v případě klasické formulace SPH metody. Stále se využívá standardní SPH sumace a náhrad, příspěvek od spoluinteragujících sousedů je vážen váhovou funkcí (jádrem). Rozdíl oproti klasické formulaci spočívá dále v tom, že trajektorie částice (respektive její rychlost) nemusí nutně odpovídat Lagrangeovskému módu ( $D\mathbf{x}_i/Dt = \mathbf{v}_i$ ) ale lze využít formulace s obecnou transportní rychlostí, přičemž je rychlost částice nastavena obecně jako ( $D\mathbf{x}_i/Dt = \mathbf{v}_{0,i}$ ).

Částečně Lagrangeovská a částečně Eulerovská formulace nám poskytuje možnost přistupovat k úloze jak v Lagrangeovské nebo Eulerovské formě, čehož se rovněž v některých aplikacích využívá [46].

### 3.1 Odvození ALE-SPH formulace

Zapišme systém řídicích rovnic v následujícím tvaru

$$L_{v_0}(\Phi) + \sum_{\alpha=1,d} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\mathbf{F}_E^\alpha - v_0^\alpha \Phi) = \mathbf{S} \quad (3.1)$$

kde

$$L_{v_0}(\Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{\alpha=1,d} \frac{\partial (v_0^\alpha \Phi)}{\partial x_\alpha} \quad (3.2)$$

přičemž  $d$  značí počet rozměrů ( $\alpha$  je prostorový sčítací index),  $\Phi$  a  $\mathbf{F}(\Phi)^\alpha$  značí vektor proměnných a vektor toků ve směru  $x_\alpha$  a  $\mathbf{S}$  značí vektor zdrojů

$$\Phi = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\Phi)^x = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\Phi)^y = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}(\Phi)^z = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho f_x \\ \rho f_y \\ \rho f_z \end{pmatrix}$$

a systém opět doplníme rovnicí slabě stlačitelné tekutiny

$$P = b \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right]. \quad (3.3)$$

Přechodem k částicové aproximaci (využíváme postupů z kapitoly 1) přechází výchozí rovnice (3.1) do diskretizované podoby

$$\frac{d}{dt} (V_i \Phi_i) + V_i \langle \nabla \cdot \mathbf{F} \rangle_i = \mathbf{S}_i \quad (3.4)$$

kde  $\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (\mathbb{F} - \mathbf{v}_0 \otimes \Phi)$  (přičemž  $\mathbb{F}$  značí matici toků) a  $\langle \nabla \cdot \mathbf{F} \rangle_i$  značí částicovou aproximaci, jejímž rozepsáním získáváme

$$\frac{d}{dt} (V_i \Phi_i) = V_i \sum_{j \in \mathcal{F}} \nabla_i W_{ij} \mathbf{F}_j V_j - V_i \sum_{k \in \mathcal{B}} \mathbf{n}_k \cdot W_{ik} \mathbf{F}_k S_k + \mathbf{S}_i. \quad (3.5)$$

přičemž  $\mathcal{F}$  značí sumaci přes částice tekutiny a  $\mathcal{B}$  značí sumaci přes hraniční elementy (podobně jako tomu bylo v případě realizace okrajových podmínek pomocí hraničních členů 2.1.5.) V rovnici mimo to nyní navíc zohledňujeme objem částice  $V_i$ , měnící se v důsledku hmotnostních toků.



Stejně jako v případě klasické Lagrangeovské formulace je nutné zajistit, aby formulace vyhovovala zákonům zachování, čehož se dosáhne použitím symetrické náhrady [61]. Symetrickou náhradu získáme analogickým způsobem jako u formulace klasické varianty. Pomozme si funkcí  $H(\mathbf{x}) = 1$ ,  $\nabla H(\mathbf{x}) = 0$  a proto  $\nabla H \cdot \mathbf{F}_i = 0$ . Provedme dále aproximaci členu  $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \nabla H \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}_i)$ , který následně dosadíme na místo toku do rovnice (3.4)

$$\frac{d}{dt}(V_i \Phi_i) + V_i \langle \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla H \cdot \mathbf{F}_i \rangle_i = \mathbf{S}_i. \quad (3.6)$$

Aproximace toků s přidaným členem má podobu

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \nabla H \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) \rangle = \int_{\Omega} [\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}') + \nabla H \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}_i)] W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \quad (3.7)$$

(přičemž upozorněme, že tok  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_i)$  není funkcí proměnné  $\mathbf{x}'$ ). Využitím Gaussovy věty získáme

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}') + \nabla H \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}_i)] W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \\ &= \int_S W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) \mathbf{F}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{n} dS' - \int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}') \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \\ &+ \int_S W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) H(\mathbf{x}') \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{n} dS' - \int_{\Omega} H(\mathbf{x}') \mathbf{F}(\mathbf{x}') \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (3.8)$$

a přechodem k částicové aproximaci

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla H \cdot \mathbf{F}_i \rangle_i &= - \sum_{j \in \mathcal{F}} \mathbf{F}_j \cdot \nabla W_{ij} V_j + \sum_{k \in \mathcal{B}} W_{ik} \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{n}_k s_k \\ &- \sum_{j \in \mathcal{F}} \mathbf{F}_i \cdot \nabla W_{ij} V_j + \sum_{k \in \mathcal{B}} W_{ik} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n}_k s_k. \end{aligned} \quad (3.9)$$

kde  $s_k$  značí velikost elementu hranice oblasti. Dosazením výsledku do rovnice (3.6) obdržíme

$$\frac{d}{dt}(V_i \Phi_i) = V_i \sum_{j \in \mathcal{F}} (\mathbf{F}_j + \mathbf{F}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j - V_i \sum_{k \in \mathcal{B}} W_{ik} (\mathbf{F}_k + \mathbf{F}_i) \cdot \mathbf{n}_k s_k + \mathbf{S}_i \quad (3.10)$$

Vila [61] navrhnul, že člen  $(\mathbf{F}_j + \mathbf{F}_i)$  lze aproximovat pomocí toku získaného řešením Riemannova problému jako  $(\mathbf{F}_j + \mathbf{F}_i) \simeq 2\mathbf{G}_E(\Phi_i, \Phi_j)$ , přičemž

$$\mathbf{G}_E(\Phi_i, \Phi_j) = \mathbf{F}_E(\Phi_{ij}(\lambda_{0,ij})) - \mathbf{v}_0(\mathbf{x}_{ij}, t) \otimes \Phi_{ij}(\lambda_{0,ij}) \quad (3.11)$$

$$\Phi_{ij}(\lambda_{0,ij}) = \Phi_E(\lambda_{0,ij}, \Phi_i, \Phi_j) \quad (3.12)$$

$$\lambda_{0,ij} = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}_{ij}, t) \cdot \mathbf{n}_{ij} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{x}_{ij} = \frac{\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j}{2} \quad (3.14)$$

kde  $\Phi_E$  značí stav získaný jako řešení pohybuujícího se Riemannova problému, mezi dvěma stavy  $\Phi_i$  a  $\Phi_j$  reprezentujícími částice  $i$  a  $j$ .

Upozorněme, že oproti klasické variantě je v ALE formulaci objem jednotlivých částic mnohem výrazněji proměnný. Je proto nutné sestavit ještě evoluční rovnici pro objem částice  $\omega_i$ . Vyjděme z Reynoldsova transportního teorému

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{v}_d \cdot \mathbf{n}_d d\Gamma_d. \quad (3.15)$$

K získání rovnice pro  $\omega_i$  položíme  $\Omega = \Omega_i$ , což je oblast odpovídající vlivu váhové funkce částice  $i$ ,  $\mathbf{f} = 1$  a rychlost pohybu hranice  $\mathbf{v}_d = \mathbf{v}_0$  tak, aby odpovídala rychlosti částic. Výsledek vede na rovnici kontinuity

$$\frac{dV_i}{dt} = \int_{\partial\Omega_i} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega_i} \nabla \cdot \mathbf{v}_0 d\Omega = V_i \langle \nabla \cdot \mathbf{v}_0 \rangle_i \quad (3.16)$$

přičemž rozepsáním diskretizačního operátoru získáváme

$$\frac{dV_i}{dt} = V_i \sum_{j \in \mathcal{F}} \mathbf{v}_{0,j} \cdot \nabla_i W_{ij} V_j + V_i \sum_{k \in \mathcal{B}} W_{ik} \mathbf{v}_{0,k} \cdot \mathbf{n}_k \cdot s_k. \quad (3.17)$$

Abychom zajistili symetrii náhrady klíčovou pro konzervativitu schématu, stejnou technikou jako v předchozím odstavci, s využitím funkce  $H(\mathbf{x}) = 1, \nabla H(\mathbf{x}) = 0$  a proto  $\nabla H \cdot \mathbf{v}_{0,i} = 0$ , doplníme

$$\frac{dV_i}{dt} = V_i \langle \nabla \cdot \mathbf{v}_0 - \nabla H \cdot \mathbf{v}_{0,i} \rangle_i \quad (3.18)$$

a pomocí procedury provedené v rovnicích (3.8) získáváme rovnici pro objem částice  $V_i$  ve tvaru

$$\frac{dV_i}{dt} = V_i \sum_{j \in \mathcal{F}} (\mathbf{v}_{0,j} - \mathbf{v}_{0,i}) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j + V_i \sum_{k \in \mathcal{B}} W_{ik} (\mathbf{v}_{0,k} - \mathbf{v}_{0,i}) \cdot \mathbf{n}_k s_k. \quad (3.19)$$

Poloha částice  $\mathbf{x}_i$  je dána transportní rychlostí částice  $\mathbf{v}_{0,i}$

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_{0,i}. \quad (3.20)$$

## 3.2 Výsledný systém rovnic

Výsledkem našeho snažení je semidiskrétní systém rovnic

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_{0,i} \quad (3.21)$$

$$\frac{dV_i}{dt} = V_i \sum_{j \in D_i} \nabla_i W_{ik} \cdot (\mathbf{v}_{0,j} - \mathbf{v}_{0,i}) V_j \quad (3.22)$$

$$\frac{d(V_i \Phi_i)}{dt} = -V_i \sum_{j \in D_i} \mathbf{G}_E(\Phi_i, \Phi_j) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j + \mathbf{S} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{G}_E^x = \begin{pmatrix} \rho_E(u_E - u_0) \\ \rho_E u_E(u_E - u_0) + p_E \\ \rho_E u_E(v_E - v_0) \\ \rho_E u_E(w_E - w_0) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_E^y = \begin{pmatrix} \rho_E(v_E - v_0) \\ \rho_E v_E(u_E - u_0) \\ \rho_E v_E(v_E - v_0) + p_E \\ \rho_E v_E(w_E - w_0) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_E^z = \begin{pmatrix} \rho_E(w_E - w_0) \\ \rho_E w_E(u_E - u_0) \\ \rho_E w_E(v_E - v_0) \\ \rho_E w_E(w_E - w_0) + p_E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho V_i g_x \\ \rho V_i g_y \\ \rho V_i g_z \end{pmatrix}$$

respektive v rozepsaném tvaru

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_{0,i} \quad (3.24)$$

$$\frac{dV_i}{dt} = V_i \sum_{j \in \mathcal{F}} \nabla_i W_{ij} (\mathbf{v}_{0,j} - \mathbf{v}_{0,i}) \omega_j + V_i \sum_{k \in \mathcal{B}} W_{ik} (\mathbf{v}_{0,k} - \mathbf{v}_{0,i}) \cdot \mathbf{n}_k s_k \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho_i V_i)}{dt} &= -V_i \sum_{j \in \mathcal{F}} 2\rho_{E,ij} (\mathbf{v}_{E,ij} - \mathbf{v}_{0,ij}) \cdot \nabla_i W_{ik} V_j \\ &\quad - V_i \sum_{k \in \mathcal{B}} 2W_{ik} \rho_{E,ik} (\mathbf{v}_{E,ik} - \mathbf{v}_{0,ik}) \cdot \mathbf{n}_k s_k \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho_i V_i \mathbf{v}_i)}{dt} &= -V_i \sum_{j \in \mathcal{F}} 2[\rho_{E,ij} \mathbf{v}_{E,ij} \otimes (\mathbf{v}_{E,ij} - \mathbf{v}_{0,ij}) + p_{E,ij} \mathbf{I}] \cdot \nabla_i W_{ij} V_j \\ &\quad - V_i \sum_{k \in \mathcal{B}} 2W_{ik} [\rho_{E,ik} \mathbf{v}_{E,ik} \otimes (\mathbf{v}_{E,ik} - \mathbf{v}_{0,ik}) + p_{E,ik} \mathbf{I}] \cdot \mathbf{n}_k s_k + \rho_i \mathbf{g} V_i. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Zvolíme-li za rychlost  $\mathbf{v}_0$  přímo rychlost jednotlivých částic, získáme tzv. **Lagrangevský mód** ALE varianty. Tím se systém rovnic zjednoduší a získáme rovnice s následujícím podobou

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_i \quad (3.28)$$

$$\frac{dV_i}{dt} = V_i \sum_{j \in \mathcal{F}} \nabla_i W_{ij} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) V_j + V_i \sum_{k \in \mathcal{B}} W_{ik} (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_k s_k \quad (3.29)$$

$$\frac{d(\rho_i V_i)}{dt} = -V_i \sum_{j \in \mathcal{F}} 2\rho_{E,ij} (\mathbf{v}_{E,ij} - \mathbf{v}_{ij}) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho_i V_i \mathbf{v}_i)}{dt} &= -V_i \sum_{j \in \mathcal{F}} 2[\rho_{E,ij} \mathbf{v}_{E,ij} \otimes (\mathbf{v}_{E,ij} - \mathbf{v}_{ij}) + p_{E,ij} \mathbf{I}] \cdot \nabla_i W_{ij} V_j \\ &\quad - V_i \sum_{k \in \mathcal{B}} 2W_{ik} p_{E,ik} \mathbf{I} \cdot \mathbf{n}_k s_k + \rho_i \mathbf{g} V_i \end{aligned} \quad (3.31)$$

Pokud bychom naopak použili volbu transportní rychlosti  $\mathbf{v}_0 = 0$ , získáme **Eulerovský mód**. Velmi atraktivní variantou je pochopitelně nastavení, ve kterém není rychlost  $\mathbf{v}_0$  pro všechny částice stejná ale mění se podle polohy a stavu částice.

Řešíme-li například případ otevřeného kanálu protékaného vodou, můžeme v úvodu simulace kdy se kanál plní, nastavit částicím rychlost podle Lagrangeovského módu a v průběhu simulace, kdy už je dno kanálu zatopené lze částice u dna přibrzdit a případně je převést dokonce do Eulerovské nastavení. To nám umožní částice u dna uspořádat do pravidelné struktury, zvýšit tak přesnost SPH náhrady a zlepšit vlastnosti simulace s ohledem na stabilitu, vznik poruch, či přesnost výpočtu v oblasti u stěny. Popsaný postup lze využít například pro spojení metody SPH a metody konečných objemů, což může být v některých typech úloh přínosné. Algoritmy a postupy pro proměnu rychlost  $\mathbf{v}_0$  jsou předmětem současného bádání [46].

*pozn. Poznamenejme, že stručně nastíněný princip práce s proměnnou hodnotou rychlosti částice je velmi zjednodušený a vyžaduje některé další procedury. Cílem však bylo uvést možnosti, které nová formulace poskytuje. Zmíněných vlastností se využívá například v [33].*

### 3.2.1 Okrajové podmínky

Při interakci se stěnou využíváme podobného přístupu, jako u okrajových podmínek založených na hraničních členech 2.1.5. Objem částice  $\omega_i$  zde zastupuje funkci renormalizačního faktoru  $\gamma_i$  ze sekce 2.1.5. Tím je zajištěna kompenzace deformovaného nosiče pro částice v blízkosti hranice. V rovnicích (3.25)-(3.27) (resp. (3.29)-(3.27)) je zahrnuta i sumace přes částice (elementy) nacházející se na hranici  $\partial\Omega$  (označeno jako množina  $\mathcal{B}$ ). Hranice je pokryta, stejně jako v případě provedení s hraničními členy, jednou vrstvou částic (elementů). V tomto případě pro hraniční částice však není potřeba určovat hodnoty jednotlivých veličin. Namísto toho se při interakci s hraniční částicí využívá řešení částečného Riemannova problému [56].

## 3.3 Řešení Riemannova problému na rozhraní mezi částicemi

Systém rovnic (3.25)-(3.27) (resp. (3.29)-(3.27)) vyžaduje řešení nelineárního pohyblivého se Riemannova problému, který se vyskytne mezi dvojicí sousedních spoluinteragujících částic. Bohužel, přesné řešení je možné nalézt pouze za pomoci časově náročné iterační procedury a z toho důvodu se využívá přibližného řešení, získaného pomocí metod běžně použitých v praktických aplikacích, založených na linearizaci Riemannova problému.

Ve vzniklém Riemannově problému je levý počáteční stav dán hodnotami na částici  $i$  a pravý počáteční stav určuje částice  $j$ , s nespojitostí v polovině spojnice interagujícího páru, tedy v místě  $\mathbf{x}_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j)$ . Pravý a levý stav jsou dány jako

$$\begin{cases} (\rho_L, v_L, p_L) = (\rho_i, \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{e}_i, p_i) \\ (\rho_R, v_R, p_R) = (\rho_j, \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{e}_i, p_j) \end{cases}$$

kde  $\mathbf{e}_{ij} = -\mathbf{x}_{ij}/\|\mathbf{x}_{ij}\|$  je jednotkový vektor ve směru spojnice částic. Řešením uvedeného Riemannova problému vede na trojici vln šířících se z místa nespojitosti. Dvě vlny, může jít o vlny rázové nebo expanzní, se šíří nejmenší respektive maximální vlnovou rychlostí. Prostřední vlnou je pokaždé kontaktní nespojitost oddělující oba

stavy  $(\rho_L^*, v_L^*, p_L^*)$  a  $(\rho_R^*, v_R^*, p_R^*)$ . Nadále budeme předpokládat, že pro přechodové stavy platí  $\rho_L^* = \rho^* = \rho_R^*$  a  $v_L^* = v_R^* = v^*$ .

K řešení je použito **VFroeho schéma** [39], lišící se od klasického Roeho schématu tím, že linearizovaná Jacobiho matice  $\tilde{A}(\Phi_L, \Phi_R) = \partial F / \partial \Phi$  nemusí splňovat tzv. Roeho podmínku na konzistenci. Řešení je dáno ve tvaru centrálního a protiproudého (*upwind*) příspěvku

$$\rho^* = \frac{1}{2}(\rho_L + \rho_R) - \frac{1}{2}(v_R - v_L) \frac{\bar{\rho}}{\bar{c}} \quad (3.32)$$

$$v^* = \frac{1}{2}(v_L + v_R) - \frac{1}{2}(\rho_R - \rho_L) \frac{\bar{c}}{\bar{\rho}} \quad (3.33)$$

kde  $\bar{\rho} = (\rho_L + \rho_R)/2$  značí střední hustotu a  $\bar{c} = (c_L + c_R)/2$  střední rychlost zvuku. Druhý člen, protiproudá část, pomáhá schéma stabilizovat, avšak je zodpovědný za velmi výraznou numerickou difuzi. Lze ukázat, že difuze je úměrná velikosti skoku mezi pravým a levým stavem.

Použité schéma je ovšem pouze prvního řádu, což souvisí s po částech konstantní aproximací řešení. Protože výpočetní kříž (*stencil*) je v případě SPH metody mnohem širší, než v případě metod využívajících výpočetní síť (počet spoluinteragujících částic je výrazně vyšší, než počet okolních buněk), je i numerická disipace mnohem výraznější.

### 3.3.1 Použití limiterů

Uvedené rovnice pro přibližné řešení Riemannova problému na rozhraní je nutné doplnit limiterovou funkcí pro omezení vzniklé umělé vazkosti. Zavedeme proto funkci, která zajistí, že v případě expanzní vlny se nebude ve vztahu (3.32) uplatňovat disipace. Provedeme úpravu

$$\rho^* = \frac{1}{2}(\rho_L + \rho_R) - \frac{1}{2}(v_R - v_L) \frac{\bar{\rho}}{\bar{c}} \quad \rightarrow \quad p^* = \frac{1}{2}(p_L + p_R) - \frac{1}{2}\beta(v_R - v_L)\bar{\rho} \quad (3.34)$$

$$\beta = \min(\eta \max(v_L - v_R, 0), \bar{c}) \quad (3.35)$$

přičemž tvar funkce  $\beta$  vychází z [65], parametr  $\eta$  je volitelný (uvažujeme  $\eta = 3$  na základě ladění pomocí testovacích úloh) a slouží k modulaci disipace, pokud je řešením Riemannova problému kompresní vlna, tedy v případě  $v_L > v_R$ . V případě  $v_L < v_R$  se advektivní část neuplatňuje. Poznamenejme, že disipace vzniklá při určování přechodové rychlosti (3.33) není v tomto případě limitována a parcuje se s rovnicí v původním tvaru.

Zaměříme-li se na chování v blízkosti hladiny, narážíme na problém, že příspěvek od protiproudého (difuzního) členu v rovnici (3.33), je negativní, což souvisí s přesahem efektivní oblasti částic nacházející se v blízkosti hladiny přes rozhraní. Problém je obdobný problému popsanému v souvislosti s chováním difuzních členů v blízkosti hladiny, což bylo detailně probráno v sekci 1.2.1. Jev je v případě pohybující se tekutiny zanedbatelný (což v analogii s kapitolou o difuzních členech odpovídá použití Molteniho difuzního členu), nicméně u hydrostatických případů má za následek umělé zvyšování úrovně hladiny, které je potřeba eliminovat. Navrhujeme proto navíc dodatečnou korekci v podobě limiteru  $\zeta$  uplatněnou v rovnici (3.33)

$$v^* = \frac{1}{2}(v_L + v_R) - \frac{1}{2}(\rho_R - \rho_L)\frac{\bar{c}}{\bar{\rho}} \quad \rightarrow \quad v^* = \frac{1}{2}(v_L + v_R) - \frac{1}{2}\zeta\frac{(p_R - p_L)}{\bar{\rho}\bar{c}} \quad (3.36)$$

$$\zeta = \begin{cases} 0, & |p_R - p_L| \leq \|\mathbf{g}\| \kappa h \\ 1, & |p_R - p_L| > \|\mathbf{g}\| \kappa h \end{cases} \quad (3.37)$$

za účelem potlačení popsaného efektu.

### 3.3.2 Hancockovokovo schéma (druhého řádu)

Po částech konstantní řešení je možné nahradit aproximací s řešením po částech lineárním, přičemž dosáhneme omezení numerické vazkosti a obdržíme náhradu druhého řádu. Využijeme přístupu vycházejícího z **MUSCL schémat** [60] a při řešení Riemannova problému namísto hodnot příslušících interagujícím částicím  $\Phi_i$  a  $\Phi_j$  použijeme hodnoty získané lineární extrapolací  $\Phi_{iL}$  a  $\Phi_{jR}$ . Prostá lineární extrapolace hodnot pro L a R stav ve tvaru

$$\Phi_{iL} = \Phi_i + \nabla_i \Phi \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{2} \quad (3.38)$$

$$\Phi_{iR} = \Phi_i - \nabla_j \Phi \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{2} \quad (3.39)$$

však vede k oscilacím v blízkosti prudkých gradientů a způsobuje vznik nestabilit. Důvodem je chybějící TVD vlastnost, což dovoluje formování nových lokálních extrémů. Řešením je použití funkce limiteru a tedy extrapolace ve tvaru

$$\Phi_{iL} = \Phi_i + \beta(\Phi_i, \Phi_j, \nabla_i \Phi) \nabla_i \Phi \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{2} \quad (3.40)$$

$$\Phi_{iR} = \Phi_i - \beta(\Phi_j, \Phi_i, \nabla_j \Phi) \nabla_j \Phi \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{2} \quad (3.41)$$

kde  $\beta$  značí vhodný limiter, sloužící k odstranění oscilací v místech s prudkými gradienty.

Přístupy používanými v metodě konečných objemů se lze inspirovat i pro další postup. V následující části určíme dopřednou a zpětnou derivaci, které posléze použijeme pro proceduru limitace.

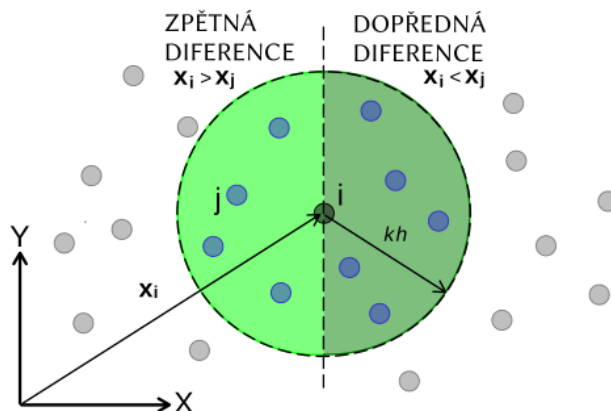
Princip spočívá v porovnání zpětné a dopředné derivace pro každý objem (pořažmo v našem případě pro každou částici) a na základě jejich hodnot je rozhodnuto o uplatnění náhrady vedoucí na schéma vyššího řádu. Náhrada derivací pomocí SPH metody však odpovídá centrální diferenci a proto není příliš vhodná pro proces limitace [28]. Z tohoto důvodu zavádíme dvě nové náhrady derivace lišící se od rovnice (1.17), pro výpočet dopředné difference

$$\nabla \Phi_i = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad \rightarrow \quad \langle \nabla \Phi_i \rangle_F = 2 \sum_{j:x_j > x_i} \omega_j (\Phi_j - \Phi_i) \nabla W_{ij} \quad (3.42)$$

a zpětné difference

$$\nabla\Phi_i = \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad \rightarrow \quad \langle \nabla\Phi_i \rangle_B = 2 \sum_{j:x_j < x_i} \omega_j (\Phi_j - \Phi_i) \nabla W_{ij} \quad (3.43)$$

přičemž sumace probíhá pouze přes sousedy napravo (vzhledem k ose  $x$ ) do částice  $i$  (tedy  $x_j > x_i$ ) pro dopřednou diferenci, resp. pro sousedy nalevo ( $x_j < x_i$ ) pro diferenci zpětnou. Faktor 2 v uvedených náhradách je spojen s tím, že pro aproximaci je použita pouze polovina efektivní oblasti jádra. Spojením nově zavedené dopředné a zpětné difference získáme známou centrální náhradu (1.17)



Obrázek 3.2: Znázornění výpočtů dopředné a zpětné derivace na základě polohy vzhledem k aktivní částici.

$$\langle \nabla\Phi_i \rangle = \frac{1}{2} (\langle \nabla\Phi_i \rangle_F + \langle \nabla\Phi_i \rangle_B). \quad (3.44)$$

Po určení dopředných a zpětných derivací jsou pro každý spoluinteragující pár vypočteny derivace ve směru jejich spojnice  $\mathbf{x}_{ij}$

$$\Delta_{i,F/B} = \nabla\Phi_{i,F/B} \cdot \mathbf{r}_{ij}. \quad (3.45)$$

Pro každou z částic je následně provedena procedura limitace, přičemž porovnáváme hodnoty dopředné a zpětné derivace pro každou částici. Využíváme přitom funkce limiteru

$$\overline{\Delta}_i = \begin{cases} \max[0, \min(\beta\Delta_{i,B}, \Delta_{i,F}), \min(\Delta_{i,B}, \beta\Delta_{i,F})] & \Delta_{i,F} > 0 \\ \min[0, \max(\beta\Delta_{i,B}, \Delta_{i,F}), \max(\Delta_{i,B}, \beta\Delta_{i,F})] & \Delta_{i,F} < 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

kde volbou  $\beta = 2$  získáme tzv. *SuperBee limiter* [56]. Následně je provedena rekonstrukce, extrapolující hodnoty pravého a levého stavu

$$\Phi_{iL} = \Phi_i - \frac{1}{2}\overline{\Delta}_i, \quad \Phi_{iR} = \Phi_i + \frac{1}{2}\overline{\Delta}_i, \quad (3.47)$$

$$\Phi_{jL} = \Phi_j - \frac{1}{2}\overline{\Delta}_j, \quad \Phi_{jR} = \Phi_j + \frac{1}{2}\overline{\Delta}_j. \quad (3.48)$$

Finální hodnoty pro řešení jednodimenzionálního Riemannova problému vzniknou evolucí stavů  $\Phi_{iR}, \Phi_{jL}$  jako

$$\bar{\Phi}_{iR} = \Phi_i + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{d_p} [\mathbf{F}(\Phi_{iL}) - \mathbf{F}(\Phi_{iR})] \quad (3.49)$$

$$\bar{\Phi}_{jR} = \Phi_j + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{d_p} [\mathbf{F}(\Phi_{jL}) - \mathbf{F}(\Phi_{jR})] \quad (3.50)$$

kde  $\Delta t$  značí časový krok a  $d_p$  počáteční vzdálenost mezi částicemi a posléze vstupují do vztahů (3.32) a (3.33).



# Kapitola 4

## Program

Za účelem implementace výše uvedené teorie byl v rámci práce vytvořen zcela nový vlastní, sloužící pro výpočty testovacích úloh a jednoduché aplikace.

Realizace je provedená pomocí jazyka C++. Program je paralelizován pro architektury se sdílenou pamětí při využití procesorů (CPU) pomocí standardu openMP, pro grafické karty (GPU) s využitím platformy CUDA pomocí standardu openAcc. *(Doplňme však, že pro GPU nejsou implementovány všechny funkcionality, například vstupní a výstupní okrajové podmínky. Aktuální konstrukce programu není rovněž příliš vhodná pro paralelizaci na grafických procesorech. GPU implementace byla vytvořena primárně ze studijních důvodů, s cílem seznámit se s náležitostí efektivní a masivně paralelizované implementace SPH metody pro použití na GPU v budoucnu, k čemuž je na konci aktuální sekce připojeno několik poznámek. )*

### 4.1 Přehled dostupných SPH řešičů

Než se však pustíme do popisu vytvořeného programu, udělejme stručný přehled dostupných implementací, které cílí na použití pro problémy proudění.

Zdaleka nejpoužívanější variantu představuje kód DualSPHysics [15]. V současnosti dostupná verze (DualSPHysics 5.0.4) obsahuje implementaci základní verze WCSPH metody k použití jak pro jednu grafickou kartu, přičemž se využívá rozhraní CUDA, tak pro využití CPU s paralelizací pomocí standardu openMP pro architekturu se sdílenou pamětí. Program obsahuje řadu dodatečných nástrojů pro řešení multifyzikálních problémů a je vybaven širokým spektrem nástrojů pro simulace vlnění a kolapsů vln. Mimo to je schopný řešit velmi jednoduché úlohy vícefázového a nenewtonovského proudění. Dostupné verze programu však nejsou zcela ideální pro velké vysokovýkonnostní počítání. Kód neumožňuje využití více GPU ani neobsahuje paralelizaci pro zařízení s distribuovanou pamětí. Struktura kódu není navíc příliš přehledná a chybí jakékoliv výraznější členění což je důsledkem kontinuálního nabalování nových a nových částí kódu bez prakticky žádné refaktORIZACE. Některé funkcionality (například vstupní okrajové podmínky, některé vyhodnocovací nástroje) nefungují zcela správně. Přesto je však DualSPHysics pravděpodobně nejlepším dostupným open-source nástrojem pro simulace proudění pomocí metody SPH a sám autor přiznává, že jej hojně využívá. Doplňme ještě, že součástí řešiče je preprocesor schopný připravit, nakonfigurovat a diskretizovat úlohu včetně externí geometrie.

Druhý kod představuje GPUSPH (v aktuální verzi 5.0), rovněž implementující základní variantu WCSPH provedení metody, nabízí dále některé stabilizační nástroje (renormalizace váhové funkce) a turbulentní modely  $k-\varepsilon$  a LES [26]. Program zvládá vícefázové proudění i neneutronovské tekutiny. Kód je konstruován čistě pro použití na GPU, opět za využití rozhraní CUDA, oproti předchozímu nástroji však umí za pomoci MPI využít více grafických karet. Ačkoliv členění kódu je výrazně lepší než tomu je u DualSPHysics, kód je mimořádně komplikovaný a stejně jako v předchozím případě se na provedení podepsalo, že šlo o kód který je průkopníkem jak v oblasti SPH tak v oblasti využití GPU pro numerické výpočty a je vyvíjen již řadu let. Na vývoji GPUSPH se podílela řada organizací, přičemž některé z nich v průběhu let od vývoje upustily. Kód tak obsahuje řadu částí a pasáží, které jsou bohužel bez údržby s přibývajícími verzemi chátrají a nikdo ze současného vývojářského týmu s nimi není detailně obeznámen. To je případ právě například vstupních a výstupních okrajových podmínek, které jsou oproti DualSPHysics řešeny naprosto odlišným způsobem, který aktuálně v GPUSPH nemá vývojářskou podporu. Kód rovněž nedisponuje potřebným preprocesorem a řadu úloh je nutné připravovat pomocí externích nástrojů. Realizace jednotlivých úloh je také mnohem náročnější než tomu je u DualSPHysics, což souvisí i s nedostatkem existující dokumentace.

Trojici velkých opensource kódu orientujících se na SPH uzavírá kód AQUA-gpusph podporující jak výpočet na jedné grafické kartě tak procesorech se sdílenou pamětí [7]. Oproti předchozím dvěma programům je kód primárně dílem jediného člověka. Největší rozdíl spočívá v tom, že implementace pro GPU je provedená pomocí standardu openCL a funguje tím pádem i s grafickými procesory nejen od společnosti Nvidia. To však nemusí být nutně výhodou. Jelikož v rámci vědeckotechnických výpočtů na GPU výrazně převažuje rozhraní CUDA, použití openCL poněkud komplikuje modifikaci kódu zvláště přihlédneme-li k faktu, že programování v rámci standardu openCL je poměrně složité a zdlouhavé. AQUA-gpusph však cílí na to být nástrojem primárně pro vědeckou komunitu SPH metody. Z toho důvodu představuje vcelku pozoruhodný koncept modulů a rozšíření využívajících programovacího jazyka python, které mají sloužit ke snadnému sestavování schémat na míru. Bohužel, naprostá absence dokumentace poněkud užití AQUA-gpusph komplikuje. V posledních aktualizacích však probíhá snaha o využití MPI a některé z autorem testovaných modulů obsahují velmi užitečné nástroje, jako například široké spektrum okrajových podmínek či pokusy o proměnné rozlišení, byť jen v rámci testovacích příkladů.

Z ostatních open-source kódu zmiňme ještě SPLisHSPlasH [6] či py-sph [49], které sice obsahují řadu modelů a variant SPH metody, nicméně nejsou příliš orientované na vědeckotechnické výpočty a nejsou pro nás příliš zajímavé s ohledem škálování a realizovanou paralelizací.

Uveďme také hlavní komerční aplikace pracující s SPH metodou, přičemž doplníme, že komerčních SPH řešičů začalo v posledních dvou letech výrazně přibývat. Pravděpodobně nejpokročilejším SPH softwarem je Nextflow (původně označovaný jako SPH-flow), který byl v současnosti odkoupen společností Siemens. Nextflow obsahuje nejmodernější SPH teorii ať už v ohledu schémat či okrajových podmínek, velmi robustní preprocesor a řadu pokročilých technik. Dalším pokročilým komerčním nástrojem je SPH implementace v rámci platformy Altair. Z astrofyzikálních programů uveďme open-source kód SWIFT implementovaný pro masivně paralelní

výpočty s využitím klasický procesorů a který je doposud rekordmanem co se do velikosti prováděných simulací pomocí metody SPH týče. Pomocí kódu SWIFT byly řešeny astrofyzikální úlohy obsahující více než  $10^{11}$  částic. Velmi populární je rovněž astrofyzikální kód SPHERA.

Seznam komerčních i open-source kódů, ať už pro použití v problémech proudění či astrofyzice, udržuje a průběžně aktualizuje na svých stránkách organizace SPHERIC.

## 4.2 Struktura programu

Program je psán formou hlavičkových souborů. Ty obsahují jednotlivé funkce a struktury a nástroje. Úlohu pak vytváříme jako samostatně překládaný program, kde voláme žádané funkce obsažené v příslušných hlavičkových souborech.

Je vybaven jednoduchým generátorem částic, který umožňuje tvorbu stěn a bloků tekutiny na základě zadaných souřadnic. Částice je možné rovněž vytvořit pomocí externích nástrojů a načíst.

Program obsahuje trojici řešičů, všechny pracující s modelem slabě stlačitelné tekutiny. První obsahuje implementaci klasické SPH metody (WCSPH) doplněnou o difuzní členy ( $\delta$ -WCSPH), přičemž jsou k dispozici všechny varianty prezentované v sekci 1.2.1. K dispozici je trojice formulací okrajových podmínek pro stěny, vícevrstvé DBC a mDBC a jednovrstvá semianalytická varianta BT. Součástí WCSPH řešiče je i realizace vstupů a výstupů pomocí bufferových zón.

Druhý řešič implementuje variantu R-ALE-SPH s několika schémata pro přibližné řešení Riemannova problému mezi částicemi. Pro variantu R-ALE-SPH doposud nejsou doplněny vstupní a výstupní okrajové podmínky. Mimo dvou prezentovaných přístupů obsahuje kód i třetí řešič, který pracuje s variantou R-SPH založené na klasické formulaci, přičemž na interakci mezi částicemi je nahlíženo jako na řešení Riemannova problému [65].

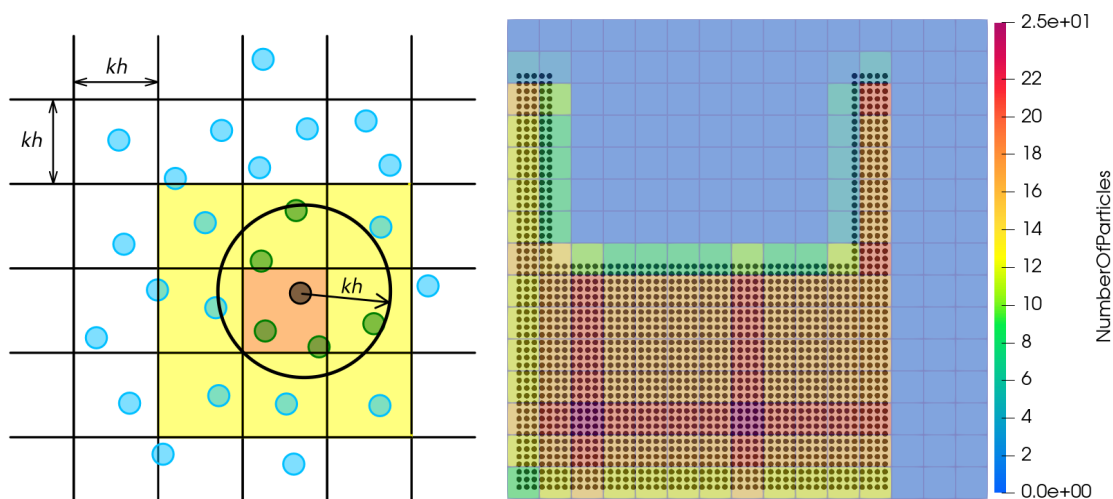
Program dále umožňuje zpětnou interpolaci částicové reprezentace na spojitá pole (výstup je možné uložit v obou podobách, výstupem jsou soubory ve formátu vtk) a nástroje pro vyhodnocování veličin v konkrétních bodech a vyhodnocování výšek hladiny, přičemž nástroje pro vyhodnocení a interpolaci lze použít i pro zpracování externích dat.

### 4.2.1 Vyhledávání párů

Vyhledávání spoluinteragujících částic je stěžejním krokem pro implementaci SPH metody a na efektivitě vyhledávacího algoritmu závisí efektivita celého SPH programu. Obvykle užívané jsou algoritmy typu oktálového stromu (*octree*) či typu *linked-list*. Octree algoritmy pracují s hierarchickým dělením oblasti a bývají využívány především v astrofyzikálních programech, kde bývá obvykle koncentrace částic výrazně proměnná.

V našem případě však využíváme algoritmu na principu *linked-list*. Při vytváření úlohy je programu zadána oblast, ve které je během výpočtu přípustná existence částic. Jde z pravidla o oblast nepatrně větší, než je samotná oblast úlohy (oblast, na

keré je problém definován). Ta je rozdělena pomocí kartézské sítě s konstantní velikostí buněk o délce hrany  $\kappa h$ . Každá částice je posléze podle své polohy přiřazena konkrétní buňce a interakce (sumace v diskretizovaných rovnicích) probíhá pouze s ostatními částicemi v dané buňce a s částicemi v buňkách sousedních. Výhoda uvedeného přístupu spočívá ve snadné implementaci a možnost snadného provedení aproximace veličin v libovolném bodě oblasti, kdy postupujeme analogickým způsobem. Schématická a praktická realizace je znázorněna na obrázku 4.1, který mimo principu vyhledávání zobrazuje i výstupní soubor programu obsahující síť pro vyhledávání dvojic a informace o počtu částic v každé buňce.



Obrázek 4.1: Schématické znázornění výběru spoluinteragujících párů a praktická realizace - znázornění sítě buněk s indikátorem počtu částic v každé z buněk.

Poznamenejme ještě pro úplnost, že poloha buněk je v naší realizaci oproti skutečné poloze částicového prostoru posunuta o malou hodnotu  $\varepsilon$ , aby v počátečním kroku nebyl problém s rozřazením částic na rozhraní buněk.

## 4.2.2 Nastavení úlohy

Úloha je formálně tvořena souborem obsahujícím parametry úlohy, souborem obsahujícím sekvenci úkonů výpočtu (časovou smyčku ve které voláme jednotlivé nástroje SPH metody) a souborem, který vytváří nebo načítá počáteční konfiguraci částic.

Uspořádání úkonů v časové smyčce závisí na volbě integrátoru - schématicky prezentujeme strukturu jednoho časového kroku společně s příslušným integračním schématem pro Verletovo integrační schéma, symplektický integrátor a leap-frog integrační schéma.

### Verletův integrátor

Verletovo integrační schéma je široce užívaný nástroj pro částicové systémy (hojně se využívá například v molekulární dynamice). Poloha je integrována s druhým řádem přesnosti a navíc jde o velmi jednoduché a efektivní schéma.

---

**Algorithm 1** Schéma programu při použití Verletova integračního schématu

---

```
1: procedure VÝPOČET ČASOVÉHO KROKU N
2:   if OP == mDBC, BT then
3:     Aktualizace hodnot hraničních částic
4:     • Vyhledání spoluinteragujících párů:
5:       → Vymazání stávajících dat z buněk sítě
6:       → Přiřazení částic do buněk
7:     • Výpočet tlaku ▷ Z hustoty, stavová rovnice
8:     • Výpočet interakcí (zrychlení, derivace hustoty)
9:     • Integrace:
10:    if step /  $N_{Euler}$  == 0 then
11:      Eulerovo integrační schéma
12:    else
13:      Verletovo integrační schéma
14:    • Kontrola poloh a hustot částic
15:    • Výpis výsledků:
16:      → Interpolace veličin
17:      → Vyhodnocení speciálních výpisů (výška hladiny, tlak na stěnu)
```

---

$$\mathbf{x}_i^{n+1} = \mathbf{x}_i^n + \Delta t \mathbf{v}_i^n + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{a}_i^n \quad (4.1)$$

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^{n-1} + 2\Delta t \mathbf{a}_i^n \quad (4.2)$$

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^{n-1} + 2\Delta t d\rho_i^n. \quad (4.3)$$

přičemž v tomto případě  $n$  značí časový krok. Mimo to, v případě použití Verletova integrátoru ze stabilizačních důvodů každých  $n$  kroků (obvykle volíme přibližně  $n = 40$ ) provede výpočet pomocí Eulerovo explicitního schématu

$$\mathbf{x}_i^{n+1} = \mathbf{x}_i^n + \Delta t \mathbf{v}_i^n + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{a}_i^n \quad (4.4)$$

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^n + \Delta t \mathbf{a}_i^n \quad (4.5)$$

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \Delta t d\rho_i^n \quad (4.6)$$

### Symplektický integrátor

Symplektický integrátor druhého řádu v čase a je velmi vhodné pro Lagrangeovské systémy, jelikož zachovává lagrangian. Pro naše potřeby (vzhledem k přítomnosti vazkových sil a nutnosti určovat hustotu) schéma zapisujeme ve formě prediktoru

$$\mathbf{x}_i^{n+1/2} = \mathbf{x}_i^n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}_i^n \quad (4.7)$$

$$\mathbf{v}_i^{n+1/2} = \mathbf{v}_i^n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{a}_i^n \quad (4.8)$$

$$\rho_i^{n+1/2} = \rho_i^n + \frac{\Delta t}{2} d\rho_i^n \quad (4.9)$$

a korektoru

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^n + \Delta t \mathbf{a}_a^{n+1/2} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{x}_i^n = \mathbf{x}_a^n + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{v}_a^n + \mathbf{v}_a^{n+1}) \quad (4.11)$$

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n \frac{2 - \epsilon_i^{n+1/2}}{2 - \epsilon_i^{n+1/2}}, \quad \epsilon_i^{n+1/2} = -\frac{\Delta t d\rho}{\rho_i^{n+1/2}}. \quad (4.12)$$

---

**Algorithm 2** Schéma programu při použití **symplektického integrátoru**

---

- 1: **procedure** VÝPOČET ČASOVÉHO KROKU N
  - 2:   **if** OP == mDBC, BT **then**
  - 3:     Aktualizace hodnot hraničních částic
  - 4:     • Vyhledání spoluinteragujících párů:
  - 5:       → Vymazání stávajících dat z buněk sítě
  - 6:       → Přiřazení částic do buněk
  - 7:     • Výpočet tlaku ▷ Z hustoty, stavová rovnice
  - 8:     • Výpočet interakcí (zrychlení, derivace hustoty)
  - 9:     • Integrace - **symplektický integrátor - prediktor**
  - 10:    • Vyhledání spoluinteragujících párů:
  - 11:     → Vymazání stávajících dat z buněk sítě
  - 12:     → Přiřazení částic do buněk
  - 13:    • Výpočet tlaku ▷ Z hustoty, stavová rovnice
  - 14:    • Výpočet interakcí (zrychlení, derivace hustoty)
  - 15:    • Integrace - **symplektický integrátor - korektor**
  - 16:    • Kontrola poloh a hustot částic
  - 17:    • Výpis výsledků:
  - 18:     → Interpolace veličin
  - 19:     → Vyhodnocení speciálních výpisů (výška hladiny, tlak na stěnu)
- 

### Leapfrog integrace

Leapfrog integrace je integrační schéma druhého řádu velmi podobné Veletovu integrátoru.

$$\mathbf{v}^{n+1/2} = \mathbf{v}^n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{a}^{n-1/2} \quad (4.13)$$

$$\rho^{n+1/2} = \rho^n + \frac{\Delta t}{2} d\rho^{n-1/2}. \quad (4.14)$$

Následně je vyhodnocené zrychlení a derivaci hustoty načež pokračujeme druhou částí schématu

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n + \Delta t \mathbf{a}^{n+1/2} \quad (4.15)$$

$$\rho^{n+1} = \rho^n + \Delta t d\rho^{n+1/2}. \quad (4.16)$$

a po aktualizaci rychlostí jsou aktualizovány i polohy

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \Delta t \mathbf{a}^{n+1}. \quad (4.17)$$

---

**Algorithm 3** Schéma programu při použití **leap-frog integračního schématu**

---

- 1: **procedure** VÝPOČET ČASOVÉHO KROKU N
  - 2:   **if** N > 1 **then**
  - 3:     • Integrace - **první část leap-frog schématu**
  - 4:   **if** OP == mDBC, BT **then**
  - 5:     Aktualizace hodnot hraničních částic
  - 6:     • Vyhledání spoluinteragujících párů:
  - 7:       → Vymazání stávajících dat z buněk sítě
  - 8:       → Přiřazení částic do buněk
  - 9:     • Výpočet tlaku ▷ Z hustoty, stavová rovnice
  - 10:    • Výpočet interakcí (zrychlení, derivace hustoty)
  - 11:    • Integrace - **druhá část leap-frog schématu**
  - 12:    • Kontrola poloh a hustot částic
  - 13:    • Výpis výsledků:
  - 14:      → Interpolace veličin
  - 15:      → Vyhodnocení speciálních výpisů (výška hladiny, tlak na stěnu)
- 

### 4.3 Zpětná interpolace na spojitá pole

Jednou z velmi často opomínaných fází při zpracování výsledků simulací pomocí SPH metody je zpětný přechod od částic ke spojitým polím. Výchozím systémem je spojitě prostředí, které bylo následně diskretizováno a hodnoty veličin na jednotlivých částicích nepodávají úplnou informaci. (Pokud bychom chtěli například vyhodnocovat tlak na stěně v bodě, ve kterém se nachází částice stěny a jako výstupní hodnoty bychom brali hodnoty tlaku z oné samotné částice stěny, dostali bychom výsledky silně zkreslené.) Pro demonstraci si vypůjčíme řešení problému protržení přehrady, prezentovaného v následující sekci. Obrázek 4.2 znázorňuje přechod od částicové reprezentace ke spojitým polím.

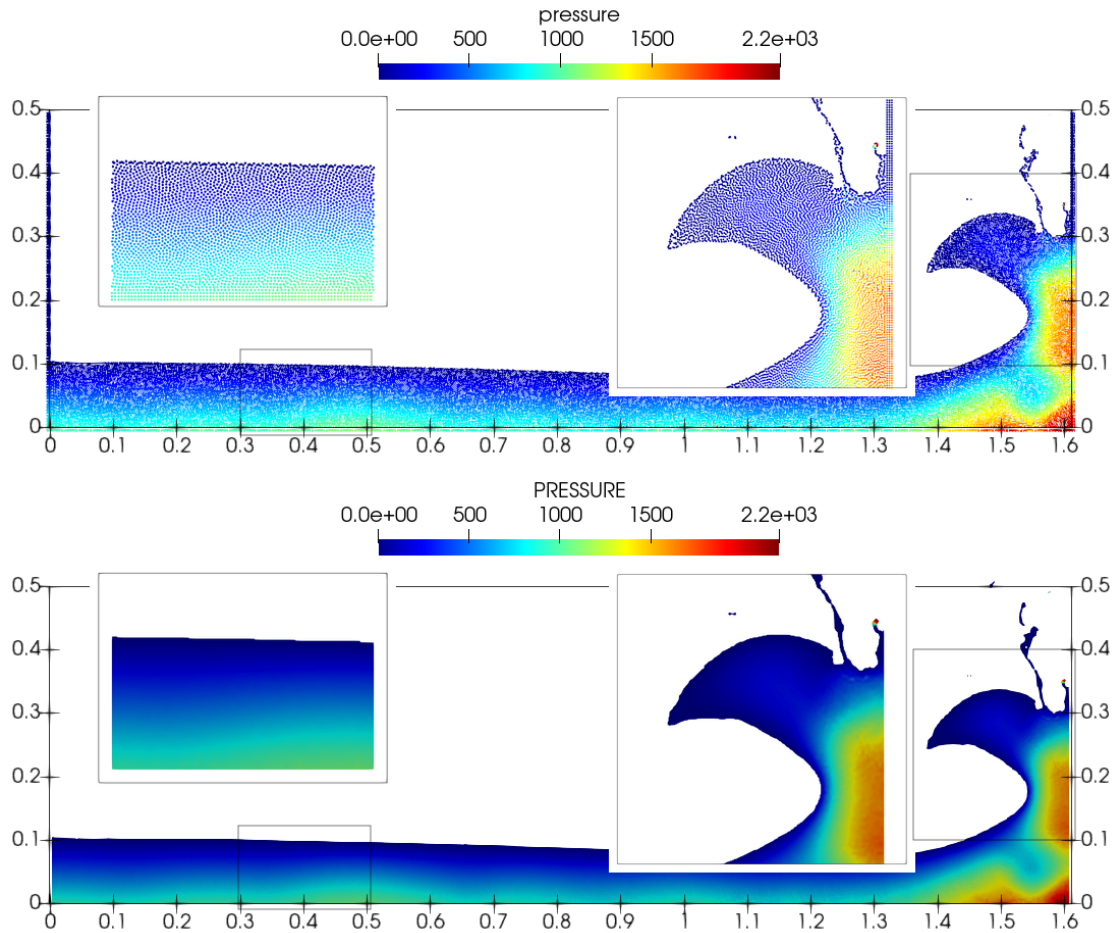
Vytvořený řešič umožňuje provést interpolaci v libovolně zvolené podoblasti. Vybraná podoblast je pokryta kartézskou sítí s délkou hranu  $d_p$  a v každém bodě je pro vybrané veličiny provedena vážená SPH sumace, doplněná o vyhodnocení úrovně hladiny. Zda se daný bod nachází v oblasti s tekutinou nebo mimo ní se určuje pomocí sumace hmotnosti

$$m(\mathbf{x}) = \sum_j m_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \quad (4.18)$$

přičemž pokud  $m(\mathbf{x}) > 0.5m_{\text{ref}}$ , kde  $m_{\text{ref}}$  je referenční hmotnost a odpovídá hmotnosti při sumaci se zcela zaplněnou efektivní oblastí váhové funkce, je bod vyhodnocený jako bod nacházející se pod hladinou. Vzhledem k tomu, že uvažujeme konstantní hmotnost částic, můžeme se omezit pouze na sumaci hodnot váhové funkce. Vztah pro interpolaci veličin má tedy podobu

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\sum_j f_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)}{\sum_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)}, & \sum_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) > 0.5 \\ 0, & \sum_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) < 0.5 \end{cases} \quad (4.19)$$

Přesto je však částicová reprezentace velmi užitečná, například pro vizuální kontrolu chování v blízkosti stěn či posouzení četnosti výskytu poruch.



Obrázek 4.2: Zpětná interpolace z částicové reprezentace (nahore) na spojitá pole (dole), demonstrováno na problému protržení přehrady.



# Kapitola 5

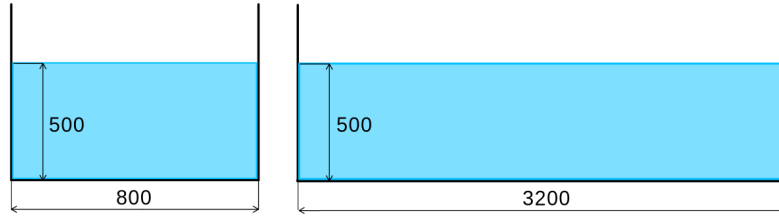
## Testovací úlohy

Prezentované varianty okrajových podmínek a formulace metody jsou srovnány na jednoduchých a důvěrně známých případech. Zvolili jsme tak proto, že v takových případech jsme velmi dobře obeznámeni s chováním systému a máme k dispozici analytické řešení či experimentální data a můžeme tak velmi dobře zhodnotit získané výsledky. Na následujících stránkách uvádíme výsledky dvojice úloh se záměrem prozkoumat vliv okrajových podmínek pro pevné stěny (jedná se o *úlohu stojící vody* a *problém protržení přehrady*) a výsledky dvojice úloh orientující se na ověření funkčnosti vstupních a výstupních okrajových podmínek (*proudění v otevřeném kanále* a *proud tryskající proti stěně*). Všechny předložené výsledky jsou získány pomocí vlastního řešiče představeného v předchozí sekci.

### 5.1 Stojící voda

První testovací úlohou je případ stojící vody. Mimo to, že nás zajímá, jaký vliv má konkrétní realizace okrajových podmínek na hydrostatické řešení, můžeme zde zkoumat, zda částice zůstávají opravdu v klidu, což odpovídá přesnému řešení úlohy a nebo dochází k jejich přeskupení či oscilacím, na které je slabě stlačitelné pojetí SPH metody náchylné. Motivací nám přitom mohou být například simulace úloh zahrnující volnou konvekci, pro které vyžadujeme, aby se v oblasti nevyskytoval parazitní umělý pohyb, případně aby byl řádově nižší, než jsou rychlosti tekutiny spojené s volnou konvekci.

Uvažujeme obdélníkovou nádobu (2D) ve dvou provedeních s rozměry na obrázku 5.1, výška hladiny je  $H = 0.5$  m, šířka úzké nádoby  $L_n = 0.8$  m a široké nádoby  $L_w = 3.2$  m. Nádobu není zcela naplněna, okraj nádoby tedy přesahuje úroveň hladiny, přičemž médiem v nádobě je voda s hustotou  $\rho_0 = 1000$  kg/m<sup>3</sup> a kinematickou viskozitou  $1.06 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s. Rychlost tekutiny je v počátečním stavu všude nulová, hodnoty tlaku (a potažmo hustoty, díky vazbě mezi hustotou a tlakem přes stavovou rovnici) odpovídají hydrostatickému rozložení.



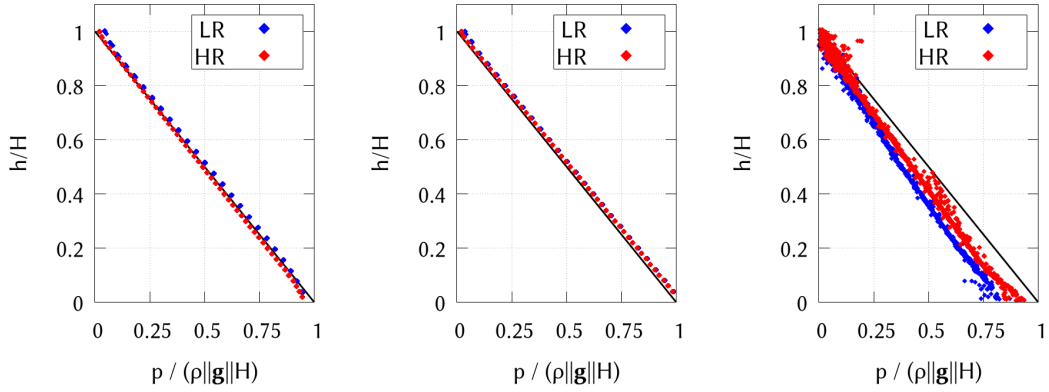
Obrázek 5.1: Konfigurace a rozměry úlohy stojící vody. Uvedené rozměry jsou v milimetrech.

Prezentované výpočty jsou provedeny pomocí varianty WCSPH ( $\delta$ -SPH) s použitým difuzním členem (1.59), jehož volba pro hydrostatické případy je odůvodněna v kapitole 1.2.1. Při použití standardně užívaného difuzního členu (1.52) dochází k umělému stoupání hladiny. Hodnota difuzního koeficientu je standardní,  $\delta = 0.1$ , využívá se umělé viskozity (1.42) s parametrem  $\alpha = 0.01$ . Tlak je určován pomocí stavové rovnice ve formě (1.33). Numerická rychlost zvuku je konstantní, určena odhadem (1.43) jako  $c_0 = 42.48$ . Integraci zajišťuje symplektický integrátor ve formě prediktoru a korektoru. Jako váhová funkce je použito Wendlandovo jádro s vyhlazovací délkou  $h = 2d_p$ . Uvažujeme dvě rozlišení, nízké (označujeme LR)  $H/d_p = 40$  a vysoké (označujeme HR)  $H/d_p = 80$ , kde  $H$  je výška vodního sloupce a  $d_p$  počáteční vzdálenost mezi částicemi. V obou případech je použitý konstantní časový krok, pro nižší rozlišení  $\Delta t_{LR} = 10^{-4}$  a vyšší rozlišení  $\Delta t_{LR} = 5 \cdot 10^{-5}$ . Výsledky srovnávají efekt použití realizace okrajových podmínek variantou DBC, mDBC a BT.

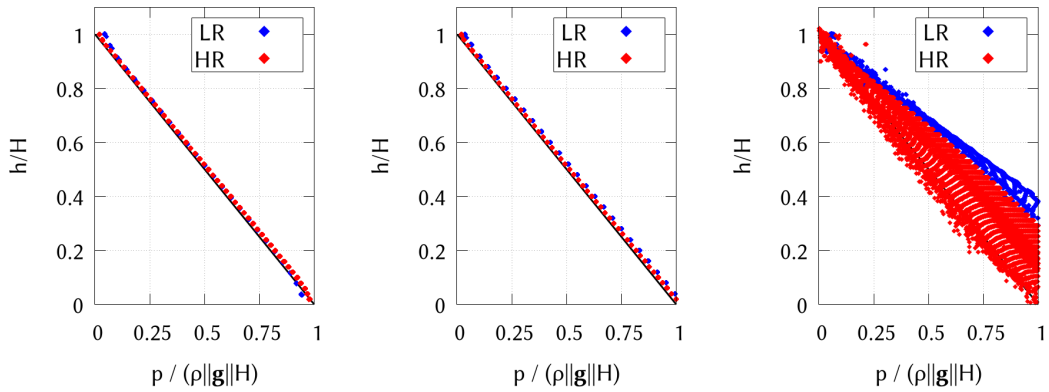
Mimo základní otázky, a to zda konkrétní realizace okrajových podmínek umožňuje splnit nejjednodušší hydrostatické řešení, nás také zajímá, zda dochází k nějakému umělému pohybu či oscilaci částic a nebo šumu v jednotlivých proměnných proudění. V budoucnu bychom totiž rádi při výpočtech pracujících s přestupem tepla zohlednili i volnou konvekci, kterou by mohly parazitní pohyby výrazně ovlivnit a proto se jim ve výsledcích věnujeme detailněji. Z toho důvodu uvažujeme úlohu ve dvou konfiguracích, s úzkou a širokou nádobou, abychom prozkoumali vliv šíření poruch v závislosti na konkrétní realizaci okrajové podmínky stěny.

Podívejme se nejprve na tlakové průběhy hydrostatického tlaku uvedeného na obrázcích 5.2 a 5.3. Grafy znázorňují tlak všech částic v nádobě v závislosti na jejich poloze. U okrajových podmínek tvořených více vrstvami (DBC, mDBC) výsledky dobře odpovídají hydrostatickému řešení. U obou variant lze pozorovat lehký odklon směrem k vyšším hodnotám pro částice u hladiny. DBC vykazují zároveň lehce nižší tlak u samotného dna (což přímo souvisí s konstrukcí okrajové podmínky). Provedení mDBC poskytuje tlak nepatrně vyšší, než je exaktní řešení, s rostoucím rozlišením se však přibližuje přesným hodnotám. Varianta BT nesplňuje hydrostatické řešení a je patrné, že na větší oblasti jsou výsledky ještě výrazně horší.

Ačkoliv by měly být jednotlivé částice ve stacionárním hydrostatickém případě v klidu, není tomu tak, jak je zřejmé z grafů celkové kinetické energie 5.4 a 5.5. V oblasti je naopak patrný značný pohyb. Celková kinetická energie soustavy je v počáteční konfiguraci nulová. Při začátku výpočtu dojde k mírnému přeuspořádání částic. To je způsobeno jak okrajovými podmínkami, tak vlivem volné hladiny a částice zůstávají i nadále lehce oscilovat.



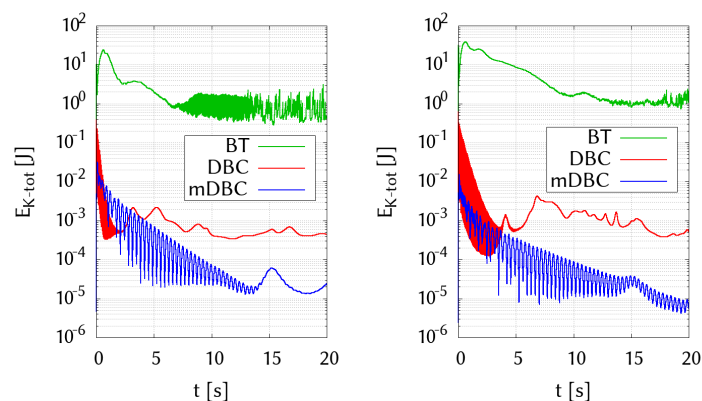
Obrázek 5.2: Zobrazení tlaku na všech částicích tekutiny v případě úzké nádoby při použití okrajových podmínek Zleva **DBC**, **mDBC**, **BT**. LR značí výsledky při rozlišení  $H/d_p = 40$ , HR při  $H/d_p = 80$ .



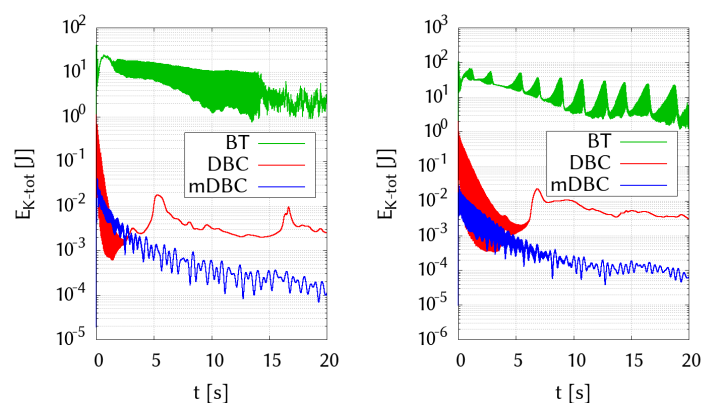
Obrázek 5.3: Zobrazení tlaku na všech částicích tekutiny v případě široké nádoby při použití okrajových podmínek Zleva **DBC**, **mDBC**, **BT**. LR značí výsledky při rozlišení  $H/d_p = 40$ , HR při  $H/d_p = 80$ .

Jak lze pozorovat, při realizaci stěn pomocí hraničních členů (BT) je počáteční nárůst celkové kinetické energie nejvýraznější. Následně ještě krátce přetrvává nárůst a nadále klesá pouze o jeden řád a vykazuje velmi výrazný šum. To se ostatně promítlo i na výsledcích hydrostatického tlaku. *pozn. Nabízí se otázka, proč se tedy realizací pomocí hraničních členů nadále zabývat, když nezaručuje ani splnění základních hydrostatických řešení. Jak však uvidíme dále, v některých případech může být přesto užitečná, přihlédneme-li k faktu, že stěny jsou tvořeny pouze jednou vrstvou částic, umístěnou přímo na rozhraní, což výrazně ulehčuje přípravu výpočtu.*

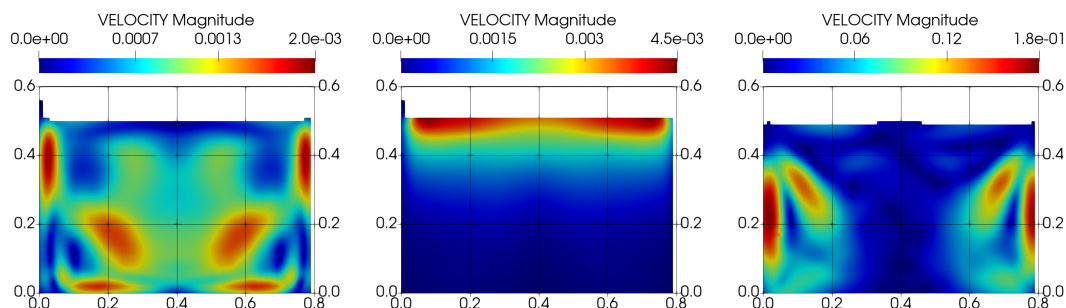
U vícevrstvých okrajových podmínek dochází k výraznějšímu útlumu počátečního impulzu. Varianta DBC zprvu klesá velmi rychle, poté však opět mírně vzroste na hodnotu, kolem které se následně drží. Šum částic je zde dominantně tvořen vlivem okrajových podmínek pro stěny, což je patrné z rozložení rychlosti v oblasti, kde lze pozorovat, že po délce hladiny se nachází minimum poruch. Varianta mDBC vykazuje nejnižší počáteční poruchu a byť zpočátku klesá pomaleji, než varianta DBC, zvláště u většího počtu částic (větší oblast, vyšší rozlišení) klesá na řádově menší hodnoty.



Obrázek 5.4: Průběh celkové kinetické energie částic tekutiny v případě úzké nádoby. Vlevo při rozlišení  $H/d_p = 40$ , vpravo při rozlišení  $H/d_p = 80$ .



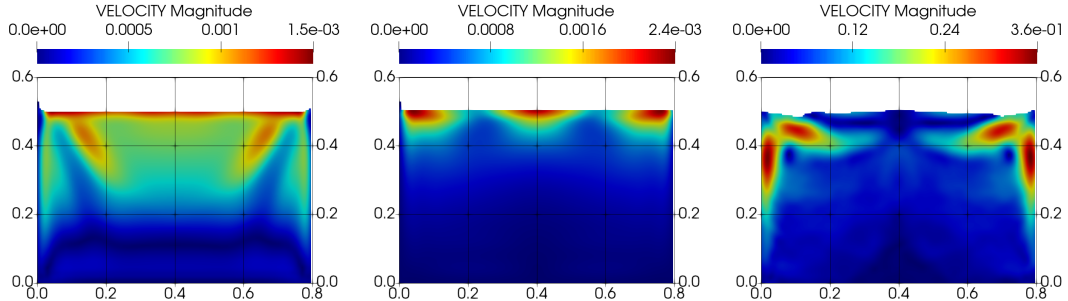
Obrázek 5.5: Průběh celkové kinetické energie částic tekutiny v případě široké nádoby. Vlevo při rozlišení  $H/d_p = 40$ , vpravo při rozlišení  $H/d_p = 80$ .



Obrázek 5.6: Zobrazení rozložení rychlosti tekutiny v úzké nádobě při použití okrajových podmínek (zleva) DBC, mDBC, BT a rozlišení  $H/d_p = 40$ . Upozorněme na rozdílné škálování grafů.

Grafy 5.6 a 5.7 zobrazují rozložení velikosti rychlosti v oblasti. U variant DBC a BT ovlivňují nedokonalosti okrajové podmínky prakticky celou oblast - připomeňme, že u varianty BT velmi výrazně, oproti zbývajícím variantám jde o rozdíl dvou řádů. V případě BT formuje je na vině použití renormalizačního faktoru (2.26), při

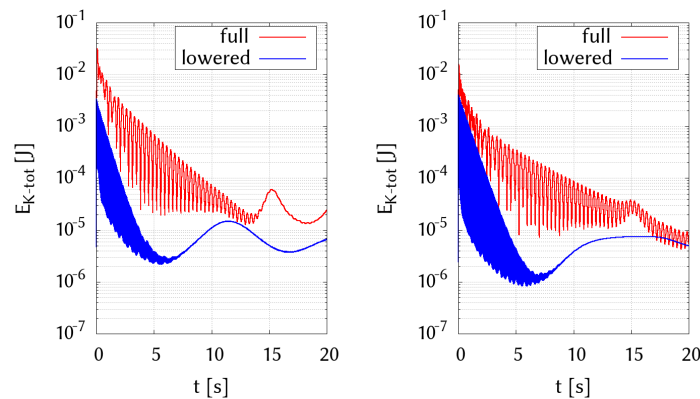
jehož zapojení přicházíme o symetrii náhrady, přičemž pozorovaný efekt je právě důsledkem absence symetrie. V případě mDBC je pohyb v oblasti lokalizován pouze v blízkosti hladiny. Dalším výrazným rozdílem oproti zbylým dvěma případům, kdy v oblasti vznikají ucelené proudy, zde dochází pouze k vlnění, které se šíří po hladině a odráží od stěn. Stejný jev byl pozorován jak v úzké tak široké nádobě.



Obrázek 5.7: Zobrazení rozložení rychlosti tekutiny v úzké nádobě při použití okrajových podmínek (zleva) DBC, mDBC, BT a rozlišení  $H/d_p = 80$ . Upozorníme na rozdílné škálování grafů.

### Vliv okrajových podmínek stěny a volné hladiny

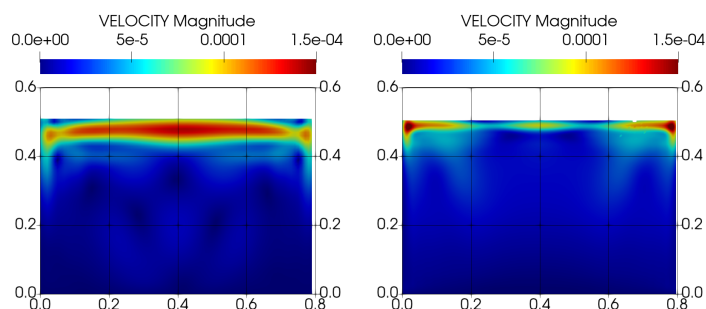
Při použití mDBC okrajové podmínky je patrné, že prakticky všechny pohyb je lokalizován v blízkosti hladiny. Výrazným zdrojem pohybu je nesymetrické zastoupení párů u částic tekutiny v levém a pravém horním rohu. Částice tekutiny zde interaguje se sousedy z oblasti tekutiny a se sousedy tvořícími stěnu. Částice stěny se nacházejí ovšem jak pod úrovní hladiny, tak nad úrovní hladiny. Z principu konstrukce okrajové podmínky jsou částicemi na první vrstvě (potažmo prvních vrstvách) stěny usmířných nad úrovní hladiny detekovány částice tekutiny v blízkosti hladiny. To (ostatně jako už samotná přítomnost částic stěny necházejících se nad hladinou) vede k lehké nerovnováze která se projevuje šumem v blízkosti povrchu tekutiny.



Obrázek 5.8: Porovnání celkové kinetické energie při snížených a nesnížených stěnách, varianta mDBC. Vlevo při rozlišení  $H/d_p = 40$ , vpravo při rozlišení  $H/d_p = 80$ .

Upravíme-li nádobu tak, že výška stěn bude totožná s výškou hladiny, lze z celkové kinetické energie 5.8 a rozložení rychlost 5.9 pozorovat mnohem výraznější

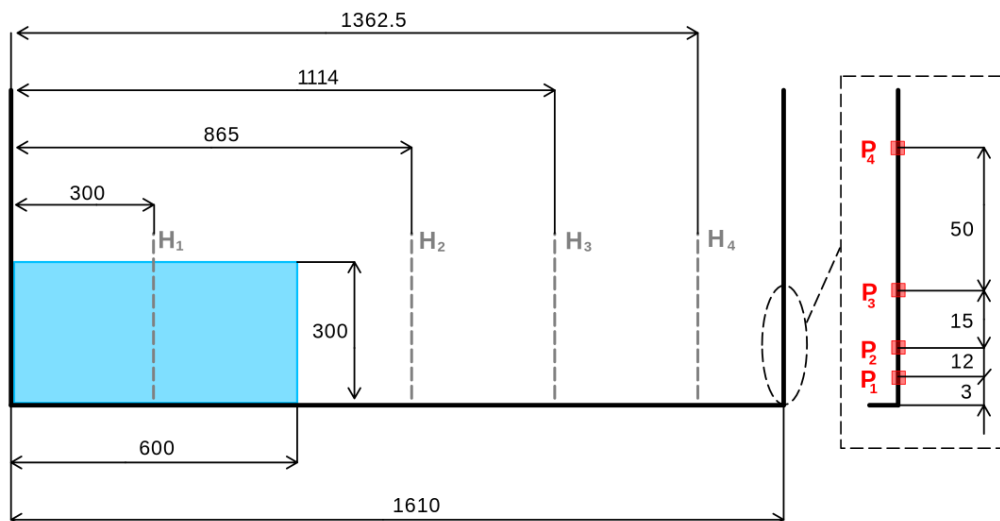
útlum šumu. Zde nám však do pohybu částic začne výrazněji promlouvat i vliv volné hladiny a kombinací jevů dojde opět k nárůstu pohybu. Ta je však zejména u vyššího rozlišení lokalizována na velmi malou oblast.



Obrázek 5.9: Rozložení velikosti rychlosti při snížených stěnách, varianta mDBC. Vlevo při rozlišení  $H/d_p = 40$ , vpravo při rozlišení  $H/d_p = 80$ .

## 5.2 Problém protržení přehrady

Druhým testovacím příkladem je protržení přehrady. Jedná se o blok vody v obdélníkové otevřené nádobě (2D), ohraničený přepážkou. Ta je v čase  $t = 0$  okamžitě odstraněna, voda se působením gravitační síly dává do pohybu a naráží na protější stěnu. Problém představuje standardní testovací případ pro problémy s volnou hladinou a typově odpovídá úlohám vhodným pro využití SPH metody.



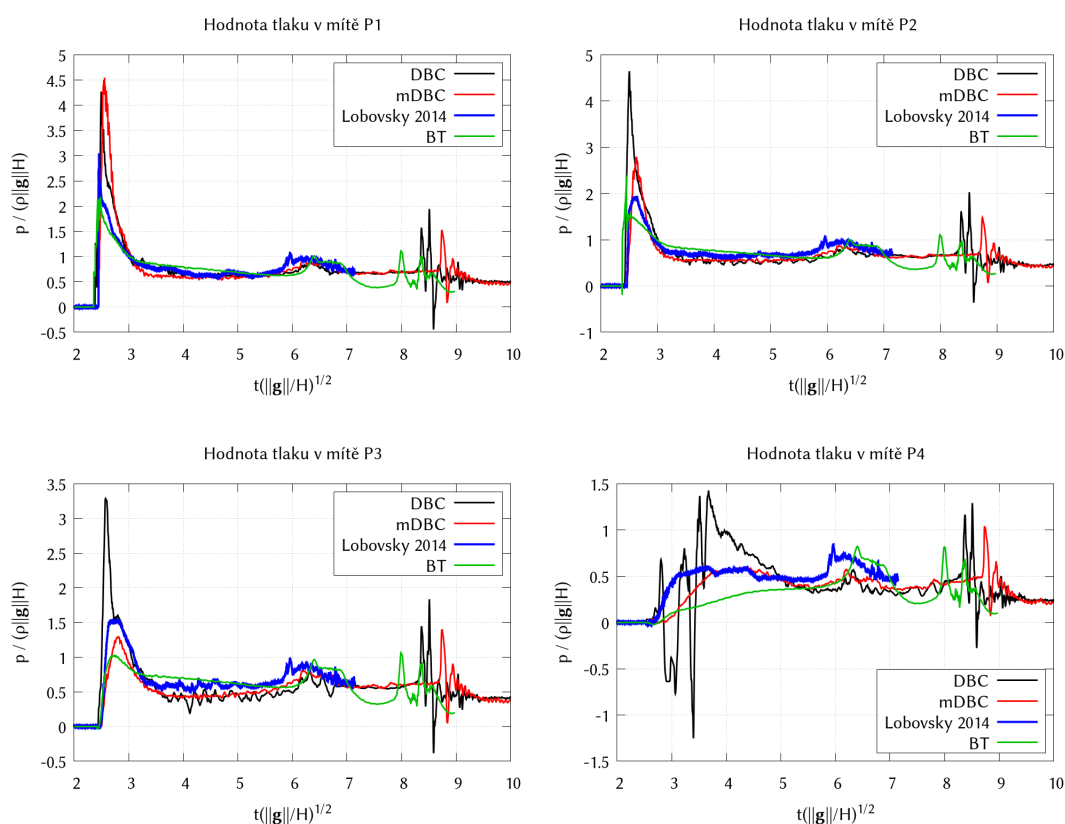
Obrázek 5.10: Konfigurace úlohy protržení přehrady. (Rozměry v milimetrech.)

Rozměry úlohy uvedené na schématu 5.10, délka nádoby  $L_n = 1.610$  m, s blokem vody (s uvažovanou referenční hustotou  $\rho_0 = 1000$  kg/m<sup>3</sup> a kinematickou viskozitou  $1.06 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s) o výšce  $H = 0.3$  m a šířce  $L = 0.6$  m, odpovídají nastavení z experimentu publikovaném v [34]. V experimentu byl vyhodnocen tlak tekutiny na stěnu, do které tekutina naráží a to ve čtyřech výškových úrovních (P1, P2, P3, P4, viz schéma 5.10) a dále pak výška hladiny ve čtyřech polohách v nádrži (H1, H2,

H3, H4). Stejně veličiny vyhodnocujeme i v průběhu výpočtu a porovnáváme je s měřenými daty. Poznamenejme, že hodnoty tlaku jsou ve výpočtu určovány přímo na stěně, nikoliv před stěnou, jak bývá z důvodu realizace okrajových podmínek v SPH metodě občas zvykem.

### 5.2.1 Vliv okrajových podmínek na řešení

Výpočet je proveden pomocí slabě stlačitelné varianty WCSPH ( $\delta$ -SPH). Využívá se difuzního členu (1.52) s difuzním koeficientem  $\delta = 0.1$ , umělé viskozity s parametrem  $\alpha = 0.02$ , numerická rychlost zvuku je konstantní, určená odhadem (1.43) jako  $c_0 = 34.3$ . Tlak je určován pomocí stavové rovnice ve formě (1.33). Využívá se symplektického integrátoru ve formě prediktoru a korektoru, jádrem je Wendlandova funkce s vyhlazovací délkou  $h = \sqrt{2}d_p$  při použití okrajových podmínek DBC a mDBC a  $h = 1.3\sqrt{2}d_p$  pro okrajové podmínky tvořené hraničními členy (BT). Uvedeny jsou výsledky pro dvě rozlišení, každé s konstantním časovým krokem. U nízkého rozlišení (značeno LR)  $L/d_p = 120$  je  $\Delta t_{LR} = 4 \cdot 10^{-5}$  pro vícevrstvé okrajové podmínky (DBC, mDBC) a pro variantu BT  $\Delta t_{LR} = 2 \cdot 10^{-5}$ . Při vysokém rozlišení (značeno HR)  $L/d_p = 240$  je v případě mDBC a DBC  $\Delta t_{HR} = 2 \cdot 10^{-5}$  a pro variantu BT  $\Delta t_{HR} = 1 \cdot 10^{-5}$ . Výsledky srovnávají vliv jednotlivých okrajových podmínek s ohledem na tlak tekutiny na protilehlou stěnu, výšku hladiny a charakter proudění.



Obrázek 5.11: Časový průběh tlaku ve sledovaných místech při rozlišení  $L/d_p = 120$ .

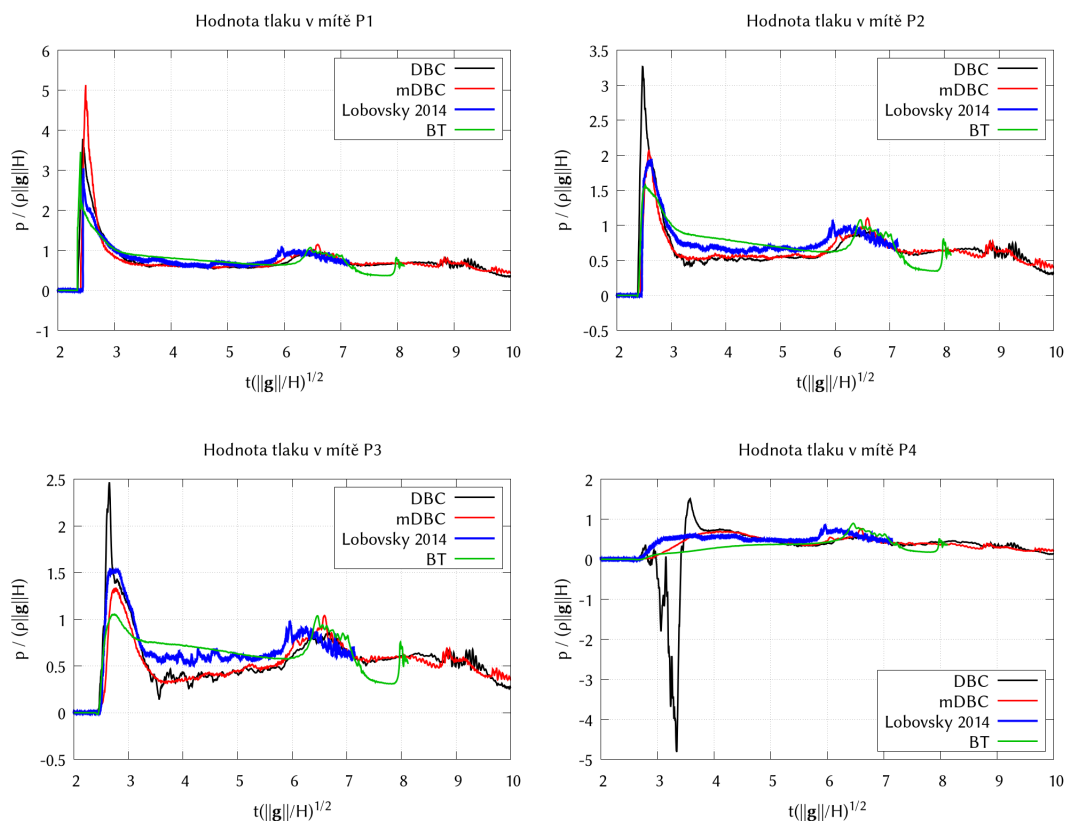
Tlak v daném místě je určován pomocí SPH vážené sumace dané vztahem

$$p(\mathbf{x}) = \frac{\sum_j p_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)}{\sum_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)} \quad (5.1)$$

Uvedené výsledky prezentují středované hodnoty přes 90 časových kroků. Středování se ukázalo jako nezbytné, protože aktuální hodnoty tlaku vykazují velmi výrazné kolísání a šum (čemuž bude věnována pozornost v další kapitole).

Z průběhů tlaků na obrázcích 5.11 a 5.12 v místech **P1** a **P2** je patrné, že největší chyba nastává právě při kontaktu se stěnou v čase přibližně  $\tau = 2.5$ . Vícevrstvé varianty DBC a mDBC mají tendenci maximální hodnotu značně nadhodnotit. To je dáno tím, že v některých prvních časových krocích kontaktu se stěnou, je vlivem uspořádání částic, které se přímo promítne na hodnotách tlaku částic hraničních, v místě vyhodnocení interpolovaná velmi vysoká hodnota tlaku (detailsy v další části).

Naopak jednovrstvá varianta BT hodnoty maxima podhodnocuje. Přesně opačné chování nastává v případě, kdy je již stěna (a potažmo tlakové senzory) v kontaktu s vodou (máme na mysli časový úsek přibližně mezi  $\tau = 3$  a  $\tau = 6$ ), kde v případě poloh **P1-3** s použitím BT získáváme vyšší hodnoty tlaku, než jaké byly pozorovány a varianty DBC a mDBC hodnoty menší. V případě snímaného místa **P4** je patrné výrazné podhodnocení jak u mDBC tak u BT. Varianta DBC ze již kompletně selhává.



Obrázek 5.12: Časový průběh tlaku ve sledovaných místech při rozlišení  $L/d_p = 240$ .

Průběhy znázorněné na obrázku 5.11 a 5.12 zároveň demonstrují problém varianty DBC. V místě **P1** jsou velmi podobné variantě mDBC. Nedostatek DBC se



však začíná projevovat na průběhu tlaků v místě **P2** a výrazně znatelněji v místě **P3**, kde začínají hodnoty kmitat. Budeme-li se posouvat po pravé stěně směrem vzhůru, je tento jev stále výraznější a jak je patrné z průběhu v místě **P4** mezi časy  $\tau = 2.8$  a  $\tau = 5$ , ve vyšší úrovni již zcela selhávají.

Přechodem k vyššímu rozlišení  $L/d_p = 240$  začínají řešení lépe kopírovat oblast skoku při nárazu do stěny, ale jak je zřejmé z průběhu **P2** a zejména pak **P3**, mezi časem  $\tau = 3$  a  $\tau = 6$ , odchylky od experimentálních dat jsou pro všechny tři varianty výraznější než v tomu bylo při původním rozlišení  $L/d_p = 120$ . *Výraznější odchylka v intervalu  $\tau = 3$  a  $\tau = 6$  je pravděpodobně důsledkem tahových nestabilit, které se začínají při vysokém rozlišení projevovat v pravém spodním rohu oblasti, kde dojde ke vzniku místa se záporným tlakem. Tahové nestability a tlakové korekce jsou však stále ještě předmětem bádání, proto zde zmíněný efekt uvádíme pouze jako možné, byť vysoce pravděpodobné vysvětlení vzniklé odchylky.*

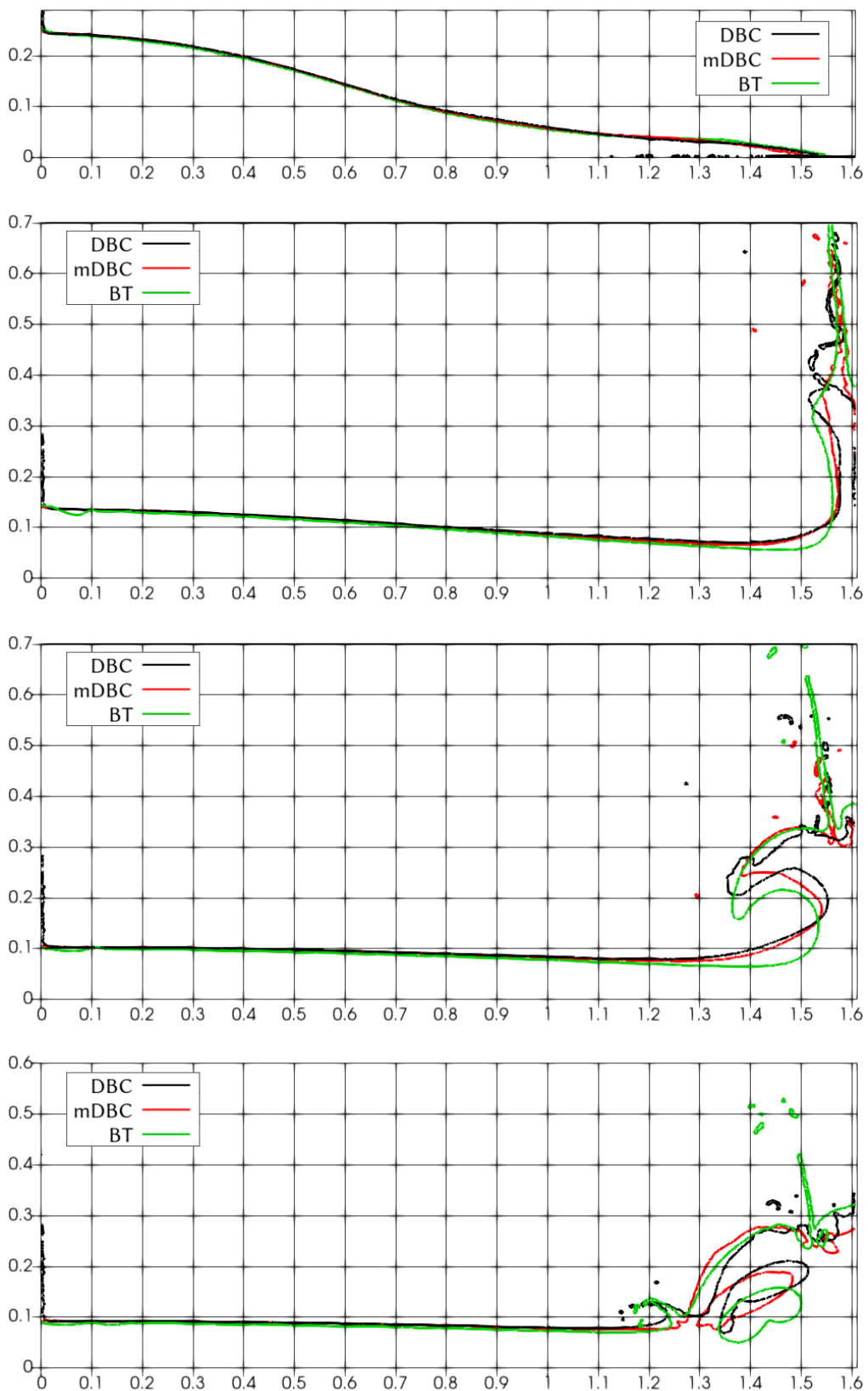
Vliv okrajových podmínek na rychlost šíření tekutiny po dně, tedy na čas, kdy je náraz tekutiny do stěny zaznamenán je číselně zobrazen v tabulce 5.1. Moment nejlépe zachycuje varianta mDBC. Z hodnot je patrné, že v případě varianty BT se voda rozlévá po dně rychleji, než u vícevrstvých variant. Právě absence dodatečných vrstev částic může být příčinou pozorovaného jevu.

P1	Exp.	DBC <sub>LR</sub>	DBC <sub>HR</sub>	mDBC <sub>LR</sub>	mDBC <sub>HR</sub>	BT <sub>LR</sub>	BT <sub>HR</sub>
$\tau$	2.444	2.423	2.417	2.481	2.453	2.397	2.378
$\varepsilon$	—	-0.021	0.027	0.037	0.009	-0.047	-0.066
$\varepsilon_r$ [%]	—	-0.86	-1.1	1.51	0.37	-1.92	-2.27

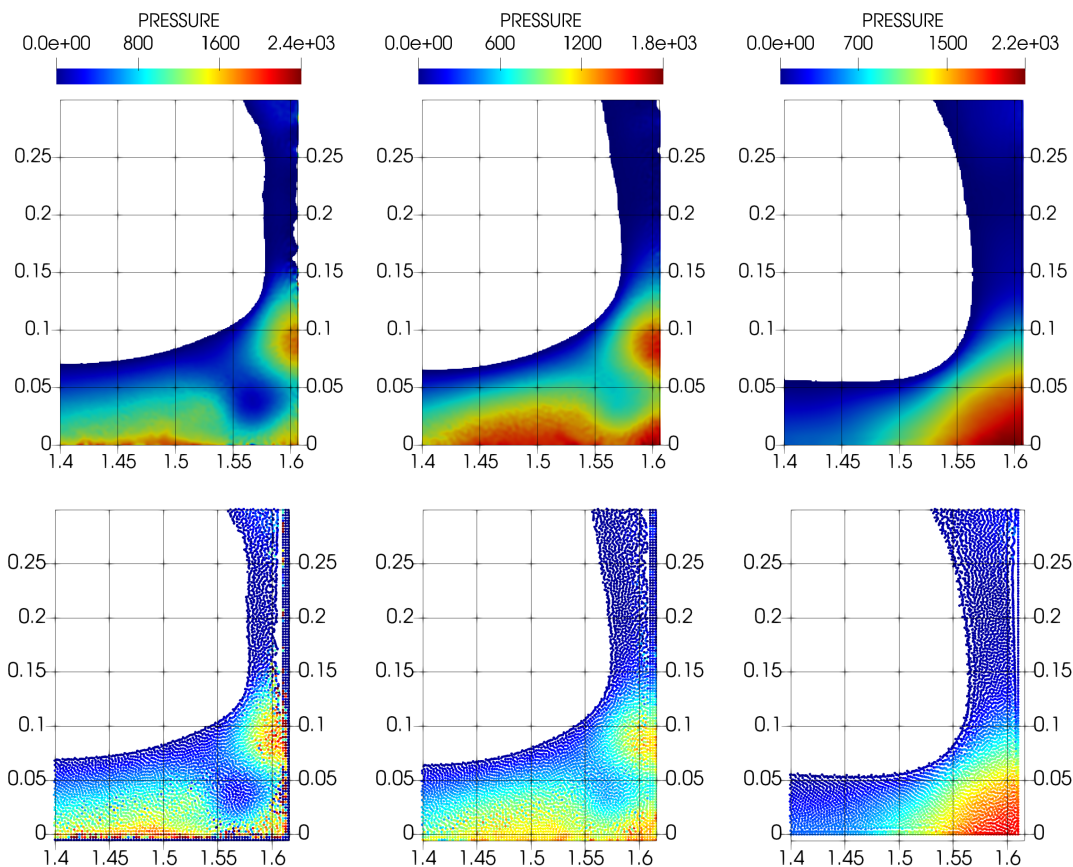
Tabulka 5.1: Srovnání časů, kdy je senzory detekovaná příchozí vlna.  $\tau = t(\|g\|/H^{1/2})$  značí bezrozměrný čas příchodu vlny ke stěně,  $\varepsilon$  absolutní odchylku od experimentálních dat a  $\varepsilon_r$  odchylku relativní.

Podíváme-li se na detail proudu v místech, kde působení tlaku vyhodnocujeme, viz obr. 5.14, jsou v případě DBC patrné výrazné poruchy, dané charakterem výpočtu tlaků na částicích stěny. Mimo to je patrné, že odražený sloupec nestoupá přímo po stěně, nýbrž zde vzniká mezera. Oba problémy částečně odstraňuje varianta mDBC, využívající zrcadlení. Díky zrcadlení je spolehlivěji vyhodnocen tlak pro všechny částice tvořící stěnu, přesto je však zejména v částicové reprezentaci patrný lehký šum. Varianta BT poskytuje nejhladší průběh v tlakových polích, jejich charakter se však liší od předchozích případů. Stejně tak lze pozorovat, že se mírně liší i profil hladiny.

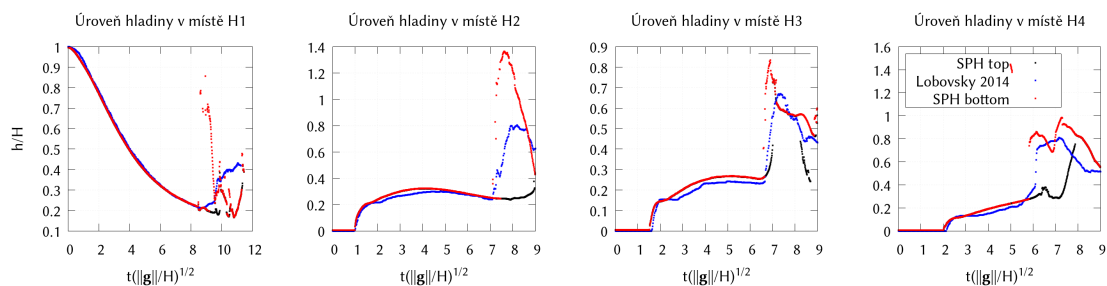
Detailní srovnání vlivu okrajových podmínek na profil hladiny je ilustrováno grafem 5.13. Zdvihnutší se sloupec kapaliny nejvýrazněji kopíruje stěnu u realizace pomocí hraničních členů. Při této realizaci zůstává také nejdéle neporušen, což má za následek, že bublina, která vzniká převalením vody se nachází o něco níže, než u vícevrstvých variant. Budeme-li však posuzovat výšku vlny ze shora, je velmi blízko řešení získaného s použitím mDBC. Poznamenejme ještě, že u varianty DBC je patrné ulpívání tekutiny na stěně, které souvisí se způsobem určování tlaku pro částice stěny.



Obrázek 5.13: Porovnání vlivu okrajové podmínky na profil hladiny. Profily v časech (shora  $t = 0.12$  s,  $t = 0.28$  s,  $t = 0.36$  s,  $t = 0.4$  s)



Obrázek 5.14: Detail kolize tekutiny se stěnou nádrže, horní řada ukazuje interpolovaná tlaková pole, spodní řada hodnoty tlaku v částicové reprezentaci zahrnující i okrajové podmínky. Zleva DBC, mDCB a BT při rozlišení  $L d_p = 120$ .



Obrázek 5.15: Výšky hladin pro okrajové podmínky realizované pomocí mDBC při rozlišení  $L d_p = 120$  srovnané s experimentálními daty. Hodnoty označené jako *SPH top* určují výšku hranice postupem do horní hranice oblasti, hodnoty *SPH bottom* detekují úroveň hladiny při postupu ze dna.

Porovnání výšek hladin s experimentálním měřením je zobrazeno na grafech 5.15. Podotkněme však, že zvláště v místě bortící se odražené vlny je potřeba brát měření pouze orientačně. Mimo to, napříč opakovanými měřeními lze pozorovat výrazné odchylky i v experimentálních datech [34]. Experiment navíc nelze realizovat

jako čistě dvojrozměrný, zatím co simulace byla provedena pouze ve 2D. Výška hladiny je určována způsobem popsaným v sekci 4.3 s tím, že v grafu prezentujeme dvojici křivek - první, vyhodnocujeme-li výšku směrem od dna, kdy algoritmus postupuje dokud nenarazí na hladinu (křivka *SPH - bottom*) a druhou, kdy hladiny hledáme směrem shora (*SPH - top*). Při borcení odražené vlny se totiž vyskytuje několik rozhraní mezi vodou a vzduchem nad sebou, přičemž diagramy zobrazují polohu rozhraní položených nejvýše a nejnižše. V místech, kde nedochází k lámání a překlápění vlny oba postupy splývají a udávají stejnou výšku hladiny.

### Vliv parametrů a testovaných korekcí

Využijme této sekce, abychom demonstrovali některé varianty a vlastnosti, uváděné v úvodních kapitolách. Začneme funkcí difuzního členu. V sekci 1.2.1 jsou vysvětleny důvody k rozšíření rovnice kontinuity o difuzní člen. Na obrázku 5.16 je proveden výpočet naší testovací úlohy bez rozšířené rovnice kontinuity. Je patrné, že získaná kinematika více méně odpovídá výše prezentovaným případům, tlaková pole jsou však zcela špatně. Tlakové průběhy jsou plně neuspořádaného šumu, přičemž na vině jsou problémy popsané v úvodu sekce 1.2.1.

P1	Exp.	$\alpha = 0.005$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.1$
$\tau$	2.444	2.433	2.481	2.551	2.635
$\varepsilon$	—	-0.011	0.037	0.107	0.191
$\varepsilon_r[\%]$	—	-0.45	1.51	4.37	7.82

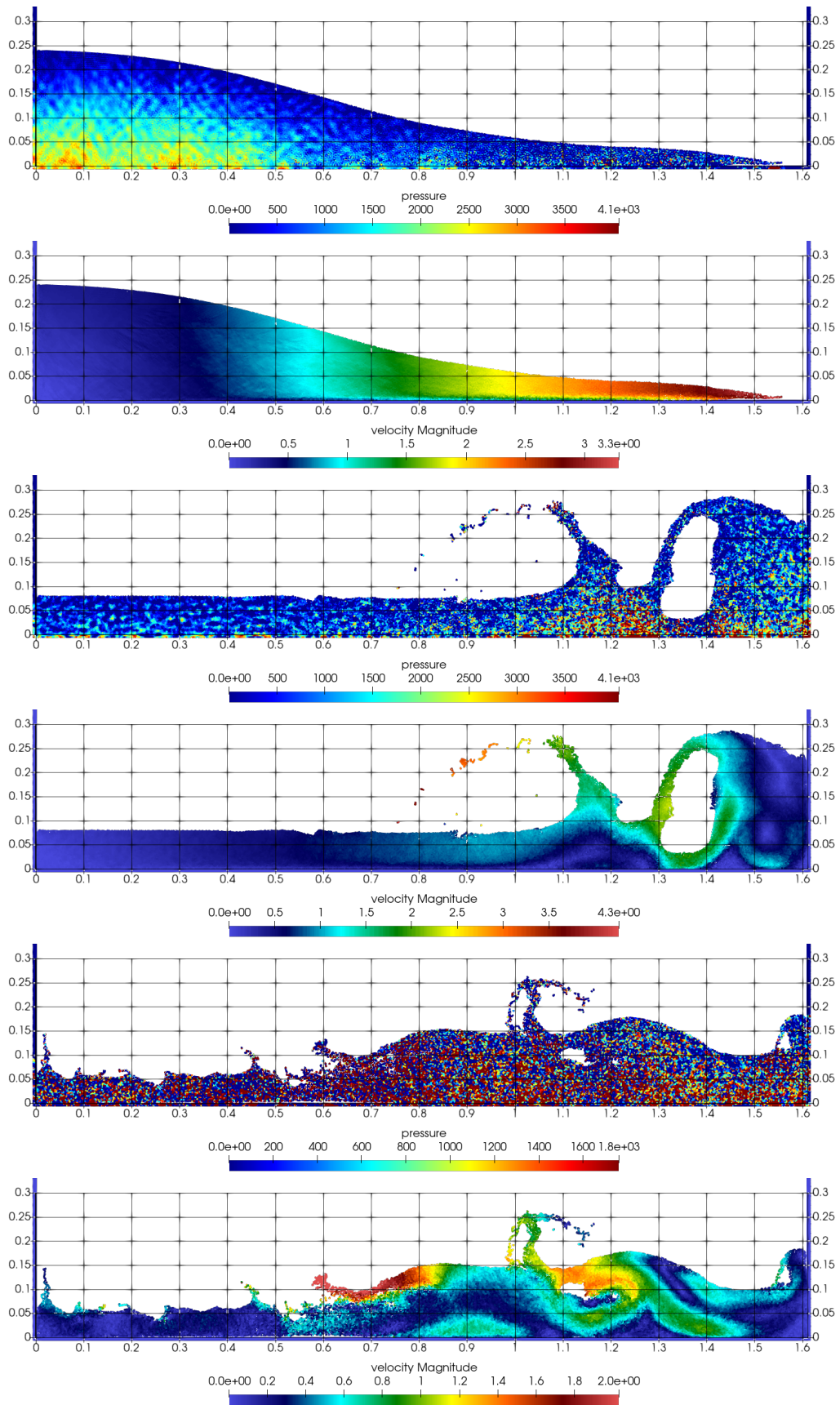
P2	Exp.	$\alpha = 0.005$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.1$
$\tau$	2.457	2.433	2.485	2.551	2.635
$\varepsilon$	—	-0.024	0.028	0.107	0.178
$\varepsilon_r[\%]$	—	-0.97	1.13	3.83	7.24

Tabulka 5.2: Srovnání časů, kdy je senzory **P1** a **P2** detekovaná příchozí vlna v závislosti na parametru umělé viskozity  $\alpha$ . Použité rozlišení  $L/d_p = 120$ .  $\tau = t(\|g\| / H^{1/2})$  značí bezrozměrný čas příchodu vlny ke stěně,  $\varepsilon$  absolutní odchylku od experimentálních dat a  $\varepsilon_r$  odchylku relativní.

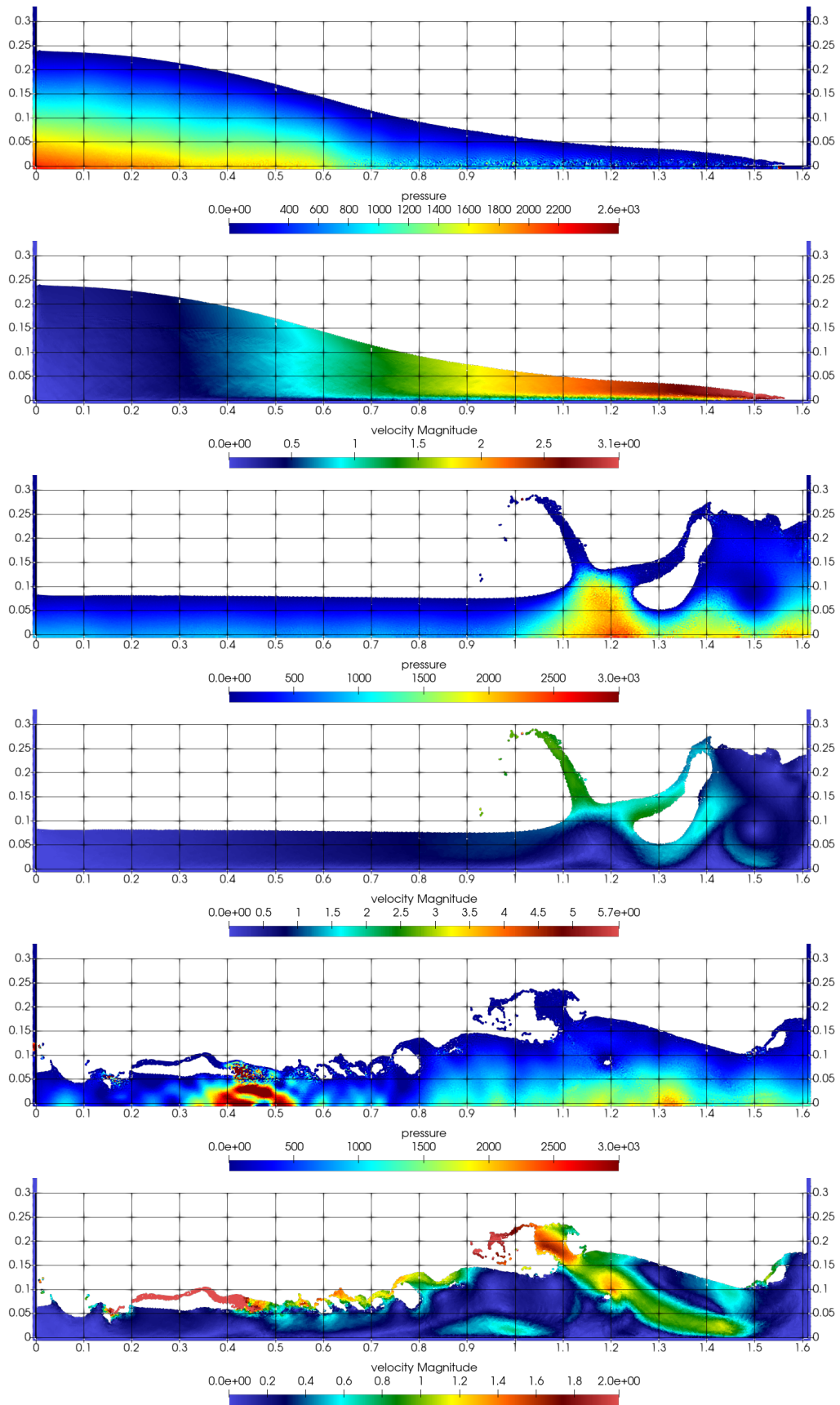
Uveďme dále vliv parametru umělé viskozity na řešení. Parametr umělé viskozity vystupuje ve členu (1.42) v pohybové rovnici a jeho primárním úkolem je stabilizovat výpočet. Má ovšem také vliv na vazkost simulovaného média, což je patrné v tabulce 5.2, která srovnává čas příchodu vlny ke stěně, na které je vyhodnocovaný tlak, v závislosti na hodnotě parametru umělé viskozity.

Často bývá udávána vztah mezi koeficientem umělé viskozity  $\alpha$  a reálnou kinematickou viskozitou  $\nu$  jako

$$\nu = \frac{\alpha hc_0}{d(d+2)} \quad (5.2)$$

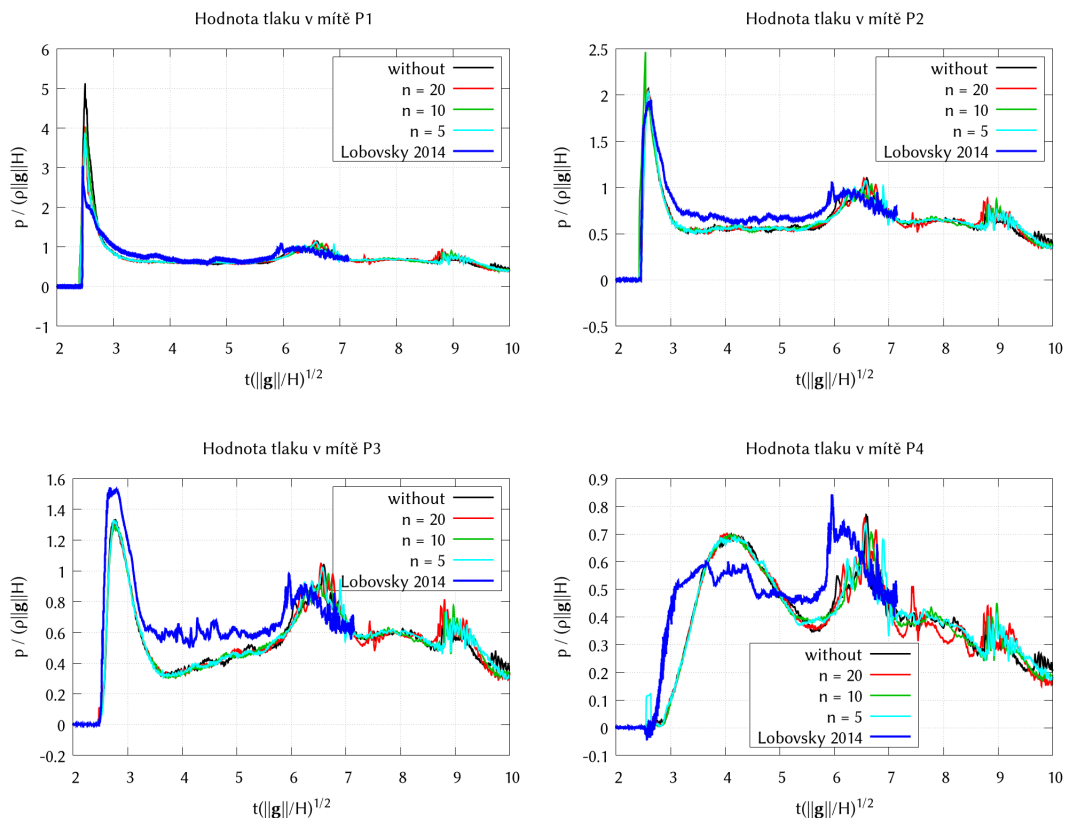


Obrázek 5.16: Tlaková a rychlostní pole při řešení protržení přehradu variantou WCSPH bez použití difuzního členu. První dvojice znázorňuje výsledky v čase  $t = 0.4$  s, druhá v čase  $t = 1.2$  s a třetí v čase  $t = 1.65$  s).



Obrázek 5.17: Tlaková a rychlostní pole při řešení protržení přehradu variantou WCSPH ( $\delta$ -SPH). První dvojice znázorňuje výsledky v čase  $t = 0.4$  s, druhá v čase  $t = 1.2$  s a třetí v čase  $t = 1.65$ ).





Obrázek 5.18: Průběhy tlaku u varianty mDBC při rozlišení  $L d_p = 120$  s vlivem reinitializace hustoty na řešení. Křivka *without* (černě) zobrazuje výsledky bez použití reinitializace, ostatní potom s reinitializací v každém  $n$ -tém časovém kroku ( $n = 20$ ,  $n = 10$ ,  $n = 5$ ).

kde  $c_0$  značí (numerickou) rychlost zvuku,  $h$  vyhlazovací délku a  $d$  dimenzi úlohy. Dosadíme-li do vztahu 5.2 hodnotu  $\alpha = 0.005$  která dle výsledků 5.2 nejlépe vystihuje reálné chování, tak společně s dalšími parametry simulace (z odstavce v úvodu kapitoly) obdržíme kinematickou viskozitu odpovídající tekutině s viskozitou 75x vyšší, než přísluší vodě, která je předlohou a která byla použita v experimentu. Pokud bychom vztah (5.2) dosadili do výpočtu Reynoldsova čísla, zjistili bychom, že ve vztahu pro  $Re$  se vyskytne parametr rozlišení a pokud bychom chtěli zachovat relaci (5.2) při použitím parametru umělé viskozity, bylo by potřeba přibližně  $800 \cdot 10^6$  částic.

V rámci korekcí byla zkoušena tzv. *reinitializace hustoty*, což je proces, při kterém je v každém  $N$ -tém kroku dodatečně vyhlazeno pole hustoty. Děje se tak na základě přepočtu hustoty pomocí rovnice kontinuity (1.36). V základu je totiž hustota počítána pomocí rovnice (1.38). Použití korekce motivovala snaha o zpřesnění výsledků v místě maxima tlaků při kontaktu tekutiny se stěnou. Ačkoli použití vedlo (s mírným efektem) ke zmírnění šumu a oscilací v neprůměrovaných tlacích, na průměrované průběhy, jak je patrné z grafů 5.18, nemá prakticky žádný vliv.

## 5.2.2 Protržení přehradu řešené pomocí varianty ALE-SPH

V následující sekci jsou prezentována řešení problému protržení přehradu pomocí varianty ALE-SPH (respektive R-ALE-SPH) v různých konfiguracích. Výchozím systémem diskretizovaných rovnic je systém (3.29) - (3.31), pro aproximační řešení Riemannova problému se využívá v první realizaci vztahů (3.34) a (3.33) (značíme jako *R-ALE*), ve druhé se potom pracuje s MUSCL náhradou a Hancockovým schématem (představeným v sekci 3.3.2) s využitím limiteru SuperBee (značíme jako *R-ALE MUSCL*). Numerická rychlost zvuku je zvolna konstantní, určená pomocí odhadu (1.43) jako  $c_0 = 34.3$ . Integraci provádíme pomocí leapfrog integračního schématu. Jako váhová funkce bylo použito Wendlandovo jádro s vyhlazovací délkou  $h = 2d_p$ , dále jsou pak testovány varianty s vyhlazovací délkou  $h = \sqrt{2}d_p$ ,  $h = 1.3\sqrt{2}d_p$  a  $h = 1.6\sqrt{2}d_p$ . Okrajové podmínky jsou realizovány jednou vrstvou částic společně s řešením částečného Riemannova problému. Prezentovány jsou výsledky při dvou rozlišeních s konstantním časovým krokem, rozlišení  $L/d_p = 120$  (značíme LR) s konstantní časovým krokem  $\Delta t_{LR} = 1.5 \cdot 10^{-5}$ , dále pak rozlišení  $L/d_p = 240$  (značeno HR) při časovém kroku  $\Delta t_{HR} = 1 \cdot 10^{-5}$ . Je srovnáno řešení získané pomocí varianty R-ALE-SPH s výsledky získanými variantou WCSPH při použití okrajových podmínek mDBC, které v případě klasické varianty vykazují nejlepší chování (dále uvádíme pouze jako *WCSPH*) a s experimentálními daty.

Vyhodnocení tlaku na stěnu u varianty R-ALE-SPH probíhá odlišným způsobem, než tomu je u WCSPH. Na rozdíl od klasické varianty, v případě R-ALE-SPH, kdy se při interakci s hraniční částicí řeší částečný Riemannův problém, nejsou pro hraniční částice dopočítávané hodnoty tlaku (získávané u varianty mDBC zrcadlením, u okrajových podmínek DBC a BT pomocí prosté SPH vážené sumace). Tlak  $p_{E,ik}$  na částici (a nebo možná přesněji na element) stěny je dán jako

$$p_k = \sum_{i \in D_k} \omega_i W_{ik} 2p_{E,ik} \quad (5.3)$$

kde  $p_{E,ik}$  je tlak získaný řešením částečného Riemannova problému. Použitím akustického přibližného řešení [56] je tato hodnota určena jako

$$p_{E,ik} = p_i - \rho_i c_i (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_k \quad (5.4)$$

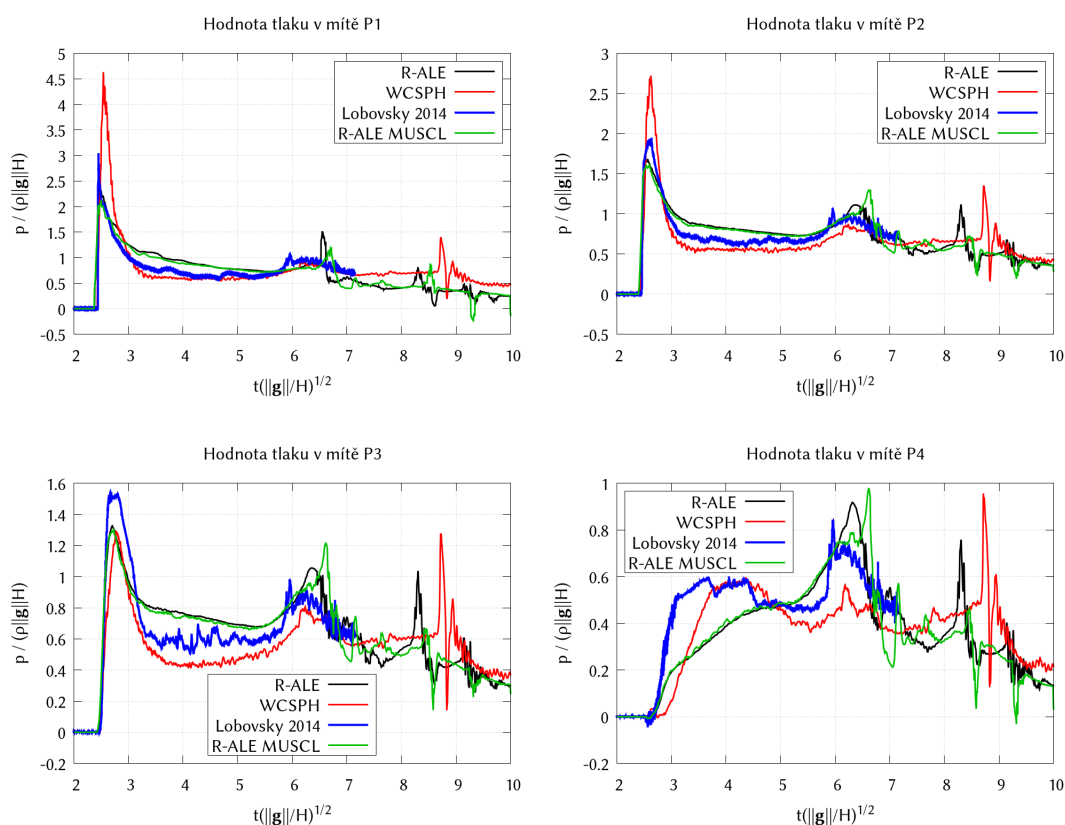
kde  $\mathbf{v}_k$  představuje rychlost pohybu stěny (ta je v našem případě nulová),  $\mathbf{v}_i$  rychlost částice  $i$  v blízkosti stěny a  $\mathbf{n}_k$  vnější normálu ke stěně.

Následné průměrování a zpracování získaných hodnot je stejné jako v předchozím případě, nicméně jak je patrné z neprůměrovaných průběhů na obrázku 5.21, šum a oscilace v tlakovém poli jsou u prezentované varianty výrazně menší, než u výsledků získaných pomocí WCPSH.

Z průběhů na obrázku 5.19 je patrné, že obě realizace mají tlakový průběh odlišný od průběhů získaných klasickou variantou při použití okrajových podmínek mDBC a podobají se spíše řešení s okrajovými podmínkami BT, které rovněž využívá pouze jedné vrstvy hraničních částic, byť na jiném principu. Oproti slabě stlačitelné variantě je zde výrazněji nadhodnocený tlak mezi časy  $\tau = 3$  a  $\tau = 6$ , což platí i pokud bychom výsledky porovnávali s klasickou formulací využívající BT realizaci okrajových podmínek, u kterých se vyskytuje stejné chování. R-ALE-SPH však poskytuje výstižnější chování v oblasti prvotního kontaktu stěny s tekutinou a to bez



ohledu na typ okrajových podmínek u klasické formulace. V místech snímačů **P1**, **P2** a **P3** zachycuje náraz tekutiny nejlépe ze všech testovaných variant. V místě **P4** mezi časy  $\tau = 3.25$  a  $\tau = 4.6$  podhodnocuje tlak výrazněji než varianty WCSPH s mDBC okrajovými podmínkami, je však blíže experimentálním datům než klasická formulace při použití okrajových podmínek BT. Doplňme ještě, že realizace s konstantní aproximací veličin *R-ALE* a s po částech konstantní aproximací *R-ALE MUSCL* dávají prakticky totožné výsledky.



Obrázek 5.19: Časový průběh tlaku ve sledovaných místech při rozlišení  $L/d_p = 120$ . Křivka *R-ALE* značí řešení získané variantou *R-ALE-SPH* při konstantní náhradě veličin na jednotlivých částicích, křivka *R-ALE MUSCL* pak využívá náhrady lineární. Data *WCSPH* znázorňují řešení pomocí standardní formulace.

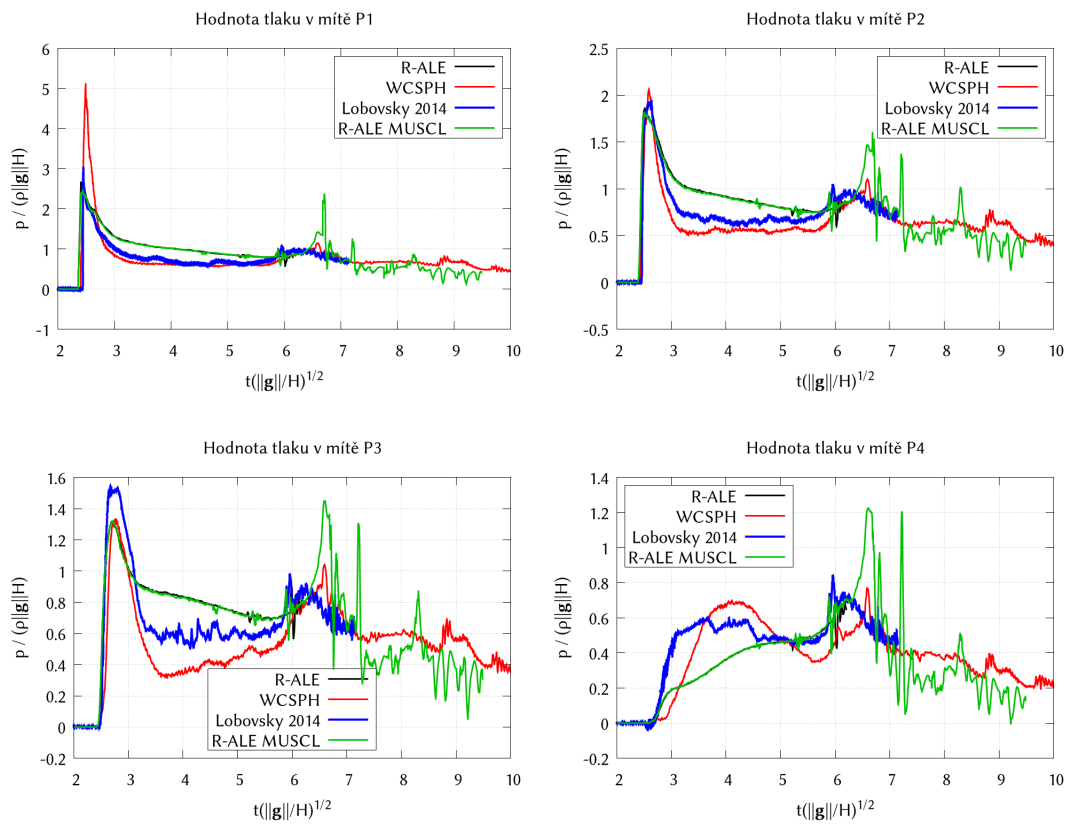
Přechodem k vyššímu rozlišení,  $L/d_p = 240$  (obrázek 5.20), pozorujeme stejné chování jako při přechodu k vyššímu rozlišení v případě klasické varianty, tedy zvýraznění odchylky mezi časy  $\tau = 3$  a  $\tau = 6$  a výstižnější chování okolo času  $\tau = 2.5$  při kontaktu se stěnou. Při použití MUSCL schématu dochází v čase přibližně  $\tau = 6$  k výraznému rozkmitání tlakového průběhu, což je spojeno s příchodem odražené (druhé) vlny.

Pohledem na tabulku srovnávající časy nárazu do stěny (čas detekce tekutiny snímačem tlaku v místě **P1**) 5.3 vidíme, že varianta *R-ALE-SPH* určuje čas kontaktu menším, než odpovídá pozorování z experimentu. Stejně jako tomu bylo u klasické varianty při použití okrajových podmínek DBC a BT, i v případě *R-ALE-SPH* se

odchylka s rostoucím rozlišením zvětšuje. Z dat je dále patrné, že použití MUSCL schématu nemá na rychlost šíření tekutiny po dně žádný vliv.

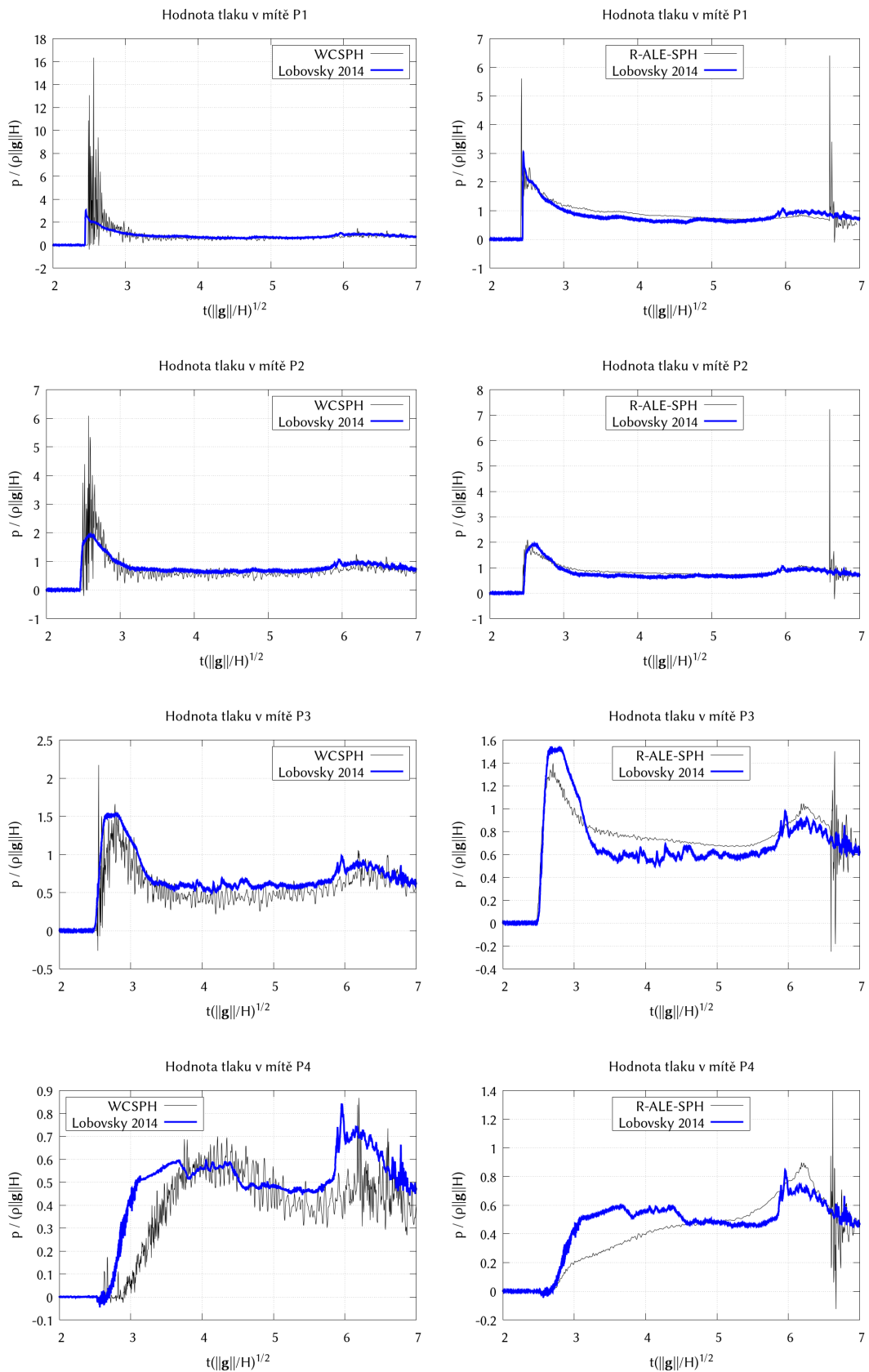
P1	Exp.	R-ALE <sub>LR</sub>	R-ALE <sub>HR</sub>	R-A-M <sub>LR</sub>	R-A-M <sub>HR</sub>	mDBC <sub>LR</sub>	mDBC <sub>HR</sub>
$\tau$	2.444	2.423	2.397	2.423	2.378	2.481	2.453
$\varepsilon$	—	-0.042	-0.059	-0.042	-0.059	0.037	0.009
$\varepsilon_r$ [%]	—	-1.73	-2.44	-1.73	-2.44	1.51	0.37

Tabulka 5.3: Srovnání časů, kdy je senzory detekovaná příchozí vlna. Sloupce *R-A-M* značí R-ALE-SPH variantu s použitím MUSCL schématu.  $\tau = t(\|g\|/H^{1/2})$  značí bezrozměrný čas příchodu vlny ke stěně,  $\varepsilon$  absolutní odchylku od experimentálních dat a  $\varepsilon_r$  odchylku relativní.

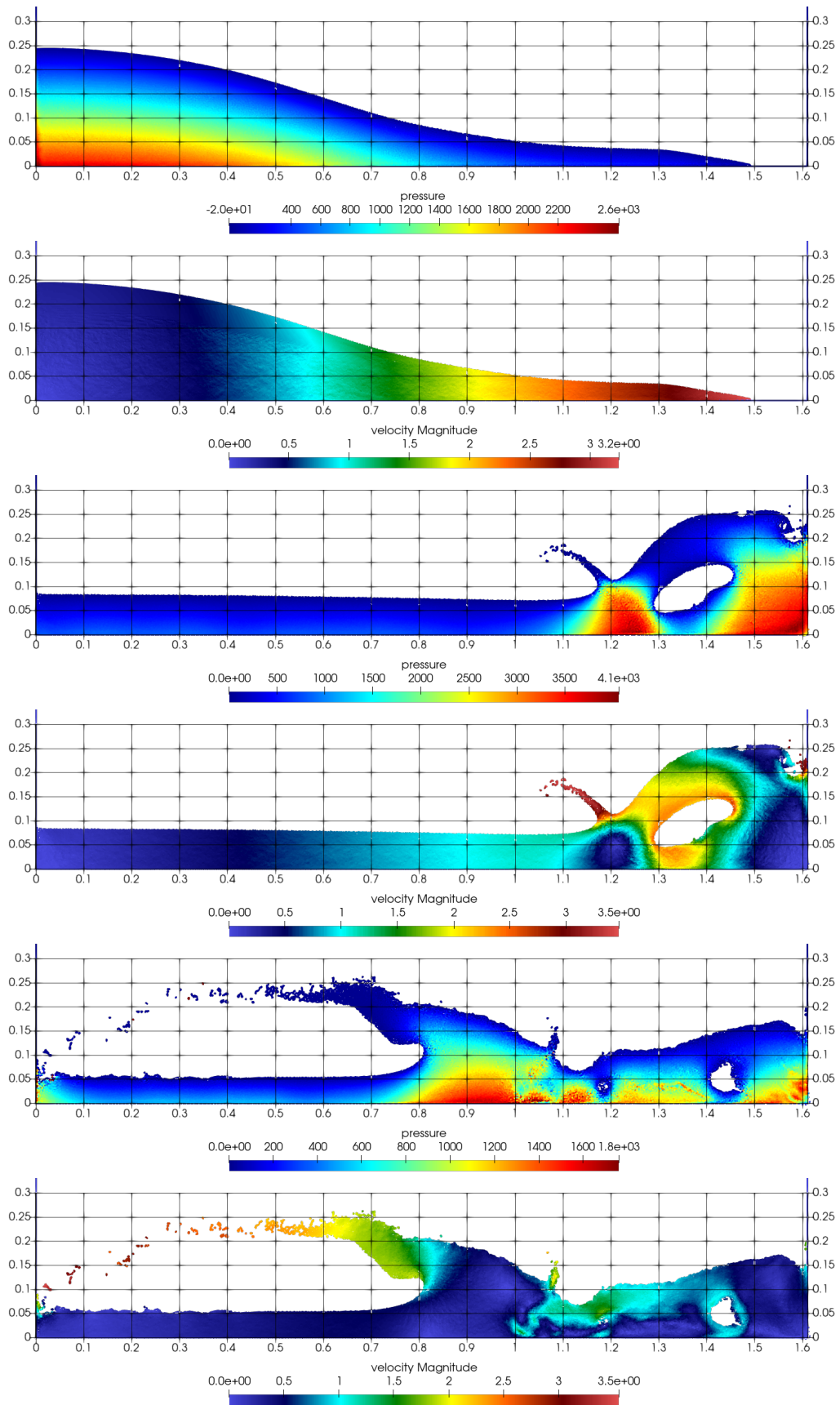


Obrázek 5.20: Časový průběh tlaku ve sledovaných místech při rozlišení  $L/d_p = 240$ . Křivka *R-ALE* značí řešení získané variantou R-ALE-SPH při konstantní náhradě veličin na jednotlivých částicích, křivka *R-ALE MUSCL* pak využívá náhrady lineární. Data *WCSPH* znázorňují řešení pomocí standardní formulace.

Dále byl zkoumán vliv volby vyhlazovací délky  $h$  na chování výpočtu. Zatím co u varianty WCSPH jsou k dispozici určitá doporučení, u varianty bylo potřeba optimální relaci mezi počáteční rozložením částic a vyhlazovací délkou s ohledem na přesnost a efektivitu výpočtu nalézt. Výpočty byly provedené pro  $h = \sqrt{2}d_p$ ,  $h = 1.3\sqrt{2}d_p$ ,  $h = 2d_p$  a  $h = 1.6\sqrt{2}d_p$ .

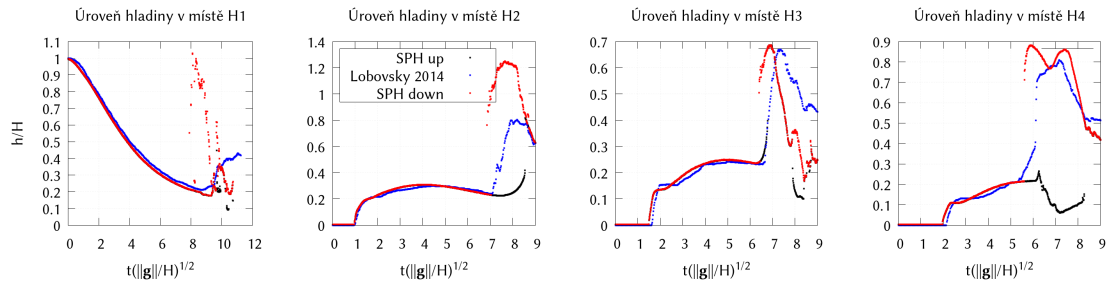


Obrázek 5.21: Průřehy tlaku bez filtrování při rozlišení  $L d_p = 120$ . V levém sloupci varianta WCSPH s okrajovými podmínkami typu mDBC, napravo varianta R-ALE-SPH.



Obrázek 5.22: Tlaková a rychlostní pole při řešení protržení přehrady variantou R-ALE-SPH. První dvojice znázorňuje výsledky v čase  $t = 0.4$  s, druhá v čase  $t = 1.2$  s a třetí v čase  $t = 1.65$  s).

Výsledky ukázaly, že zvětšení vyhlazovací délky vede ke snížení odchylky v čase  $\tau = 3$  až  $\tau = 6$ , ovšem s nepříliš výrazným efektem. Použití větší hodnoty vyhlazovací délky rovněž lehce tupí hodnotu maxima při kontaktu se stěnou a zároveň lehce vyhlazuje různé zákmity a poruchy, což je přímo důsledkem konstrukce metody. Jelikož sumace probíhá přes větší množství částic a dostáváme tak hodnoty průměrované z větší oblasti.

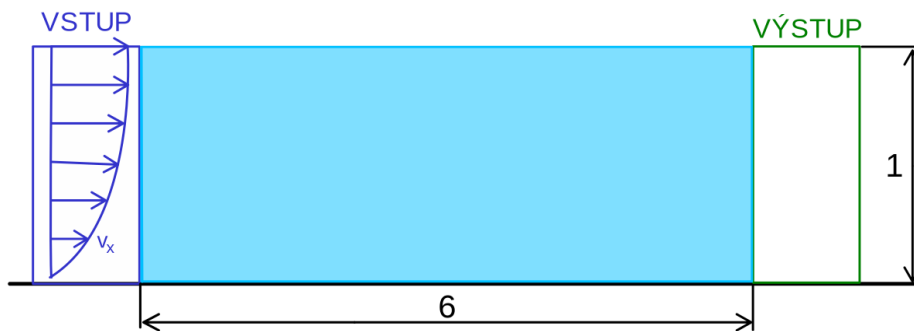


Obrázek 5.23: Výšky hladin pro okrajové podmínky realizované pomocí mDBC při rozlišení  $L d_p = 120$  srovnané s experimentálními daty. Hodnoty označené jako *SPH top* určují výšku hranice postupem do horní hranice oblasti, hodnoty *SPH bottom* detekují úroveň hladiny při postupu ze dna.

Nejvýraznější rozdíl mezi variantami je však patrný podíváme-li se na neprůměrované průběhy tlaků na obrázku 5.21. Průběhy tlaků získané pomocí varianty R-ALE-SPH jsou výrazně hladší, než průběhy získané pomocí WCSPH (ve srovnání jsou pro variantu WCSPH použité mDBC okrajové podmínky, u kterých je z testovaných variant šum nejmenší). Mimo množství zákmitů je dramatický rozdíl také v jejich amplitudě. U klasické formulace je v místě snímačů **P1** a **P2** při kontaktu tekutiny se stěnou patrná řada zákmitů, několikanásobně přesahujících hodnoty měřeného tlaku. U varianty R-ALE-SPH je v místě **P1** patrný jediný zákmit s tím, že od času  $\tau = 3$  je řešení prakticky hladké. Mnohem lépe zaznamenává R-ALE-SPH varianta kontakt tekutiny se stěnou i v místě snímače **P3**, na průběhu ze snímače **P4** je pak opět dobře znatelný rozdíl v oscilacích a přítomném šumu. Průběhy tlaku získané pomocí R-ALE-SPH obsahují výraznou poruchu v čase přibližně  $\tau = 4.8$ , která souvisí s dopadem kapek od zpětné vlny a která se časem utlumí.

### 5.3 Otevřený kanál

Prvním testem pro vstupní a výstupní okrajovou podmínku je úloha otevřeného kanálu se snahou ověřit, zda okrajová podmínka dodává do oblasti předepsané množství tekutiny a správné množství tekutiny z oblasti odvádí. Byť se jedná o banální problém, je potřeba mít na paměti, že pracujeme s Lagrangeovským částicovým prostředím, ve kterém je realizace vstupní a výstupní okrajové podmínky značně obtížná. Komplikace jsou spojeny s tím, že nám vstup resp. výstup přivádí resp. odvádí nové diskretizační body do resp. z oblasti. Z toho důvodu začínáme s jednoduchou úlohou, abychom ověřili, zda do oblasti vstupuje předepsané množství tekutiny, zda vstup a výstup správně plní svojí funkci a zda v jejich blízkosti nevznikají poruchy.



Obrázek 5.24: Schéma úlohy dvojrozměrného proudění v otevřeném kanále. Rozměry jsou uvedeny v metrech.

Úlohu představuje nakloněný otevřený kanál s výškou hladiny  $H = 1$  m o délce  $L = 6H$  se sklonem  $\theta = 5^\circ$ . V nastavení úlohy je kanál uvažován jako vodorovný a sklon je simulován pomocí gravitačního zrychlení  $\mathbf{g} = (|\mathbf{g}| \sin \theta, |\mathbf{g}| \cos \theta)$ . Na vstupu je předepsán rychlostní profil

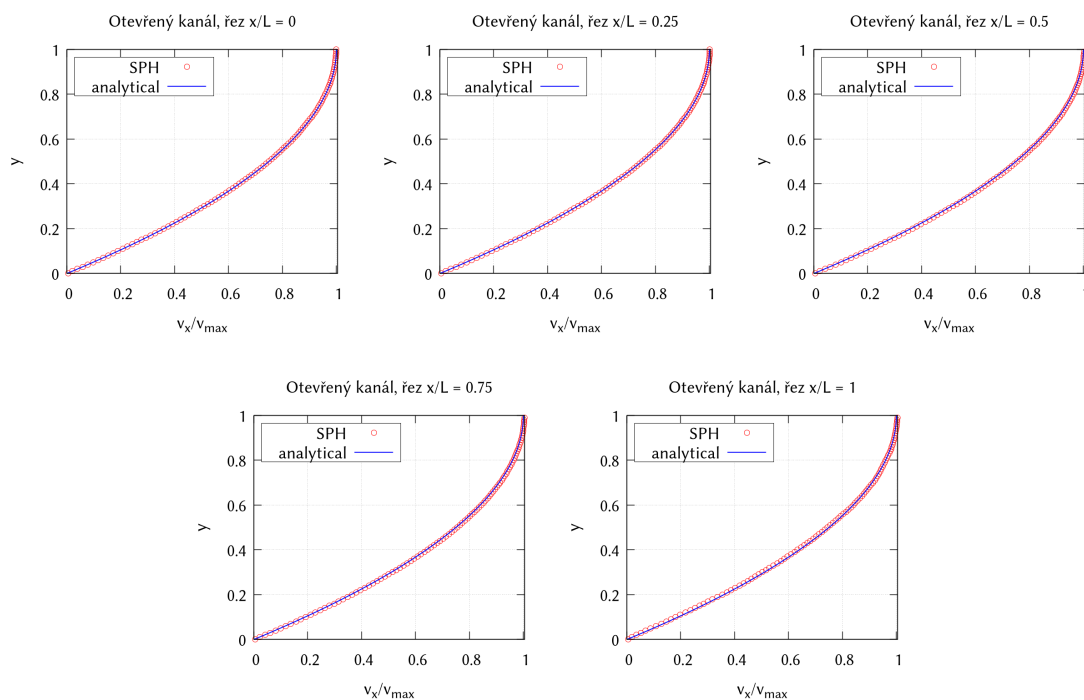
$$v_x(y) = \frac{|\mathbf{g}| \sin \theta}{\nu} \left( yH - \frac{1}{2}y^2 \right). \quad (5.5)$$

Požadujeme laminární proudění v režimu pro Reynoldsovo číslo  $Re = 100$ , kdy je zrychlení tekutiny způsobené gravitační silou kompenzováno vazkými silami a nedochází tak k urychlování proudu, který má díky tomu konstantní rychlost. Proto pro  $Re = \bar{v}H/\nu = 100$ , kde  $\bar{v}$  značí střední rychlost a  $\nu$  viskozitu, volíme  $\nu = 0.0534$ , přičemž pracujeme s laminárním vazkým členem [64]. Pro vstup a výstup předepisujeme hydrostatické rozložení hustoty, rychlost na výstupu je extrapolována z oblasti s tekutinou. Výška výstupní zóny je určována na základě výšky tekutiny v oblasti ve vzdálenosti  $d_p$  před hranicí, pro kterou je výstup předepsán. Realizace vstupní a výstupní zóny je popsána v sekci 2.2, přičemž vstup i výstup tvoří čtyři vrstvy částic. Tekutina v oblasti je inicializovaná se stejným rychlostním profilem jako vstupní okrajová podmínka.

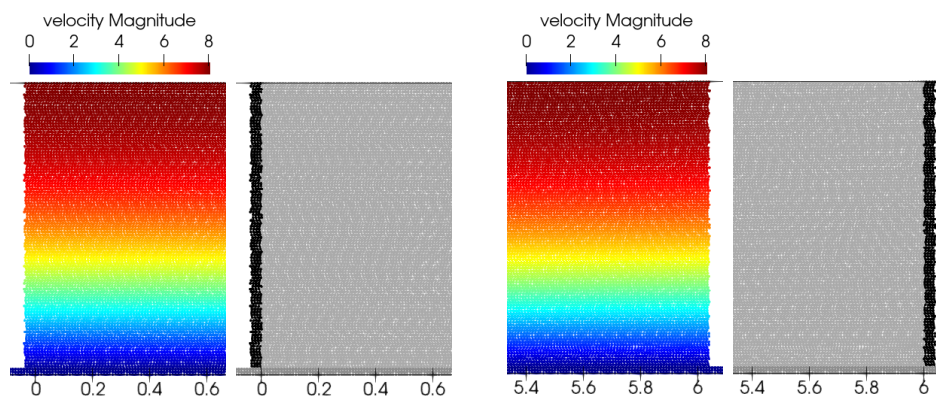
Řešení je provedeno variantou WCSPH (respektive  $\delta$ -SPH) s difuzním členem (1.59) a hodnotou difuzního koeficientu  $\delta = 0.1$ . Pracujeme s laminární viskozitou s koeficientem  $\alpha = 0.0534$ , numerickou rychlostí zvuku  $c_0 = 68.15$ , stavovou rovnicí (1.33), symplektickým integračním schématem a jako funkci  $W$  používáme Wendlandovo jádro. Pro vyhlazovací délku platí  $h = \sqrt{2}d_p$ , počáteční vzdálenost mezi částicemi je  $d_p = 0.01$  (tedy použité rozlišení je  $H/d_p = 100$ ). Dno je realizováno pomocí mDBC formulace okrajových podmínek pro pevné stěny a časový krok je konstantní  $\Delta t = 1.25 \cdot 10^{-4}$ .

Průběhy na obrázku 5.25 potvrzují, že v oblasti je zachovaný objemový tok a vstupní okrajová podmínka dodává předepsané množství tekutiny. Z posledního grafu, obr. 5.26, který zobrazuje rychlostní profil na výstupním bufferu je navíc patrné, že spolehlivě funguje i extrapolace rychlosti z oblasti a na výstupu nedochází ke vzniku žádných poruch.





Obrázek 5.25: Bezrozměrné průběhy rychlosti na vstupním bufferu, ve čtvrtině, polovině, třech čtvrtinách a na výstupu z kanálu.



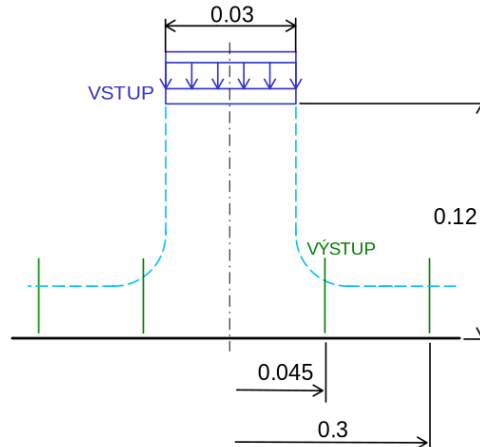
Obrázek 5.26: Vstupní a výstupní zóna v částicové reprezentaci. Zleva rozložení rychlosti na vstupu, znázornění typu částic - černá představuje vstupní buffer, šedivá tekutinu, následuje rychlost částic na výstupu a znázornění výstupní zóny.

## 5.4 Proud tryskající proti stěně

Druhým zvoleným testovacím příkladem je proud tryskající proti stěně. K uvedenému případu existuje řada měření a je možné pomocí analytického výpočtu nalézt rozložení tlaku na stěně. Při různých orientacích vstupu a různých tvarech stěny získáváme problém hojně řešený v rámci návrhu Peltonových turbín, kdy stěna představuje lopatku, proti které tryská proud vody. Tento problém lze velmi dobře řešit

pomocí SPH metody a krom síly, kterou proud působí na lopatku, lze také studovat jakým způsobem proud vody lopatku opouští, což je velmi cenná informace při návrhu uvedených zařízení a je velmi obtížné jí získat za pomoci konvenčních metod.

Úloha je tvořena tryskou o průměru  $D_t = 0.03$  m, ze které tryská voda o rychlosti  $20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , přičemž na vstupu je předepsaný konstantní rychlostní profil. Tryska je umístěna ve vzdálenosti  $L_t = 0.12$  m nad stěnou (tj.  $L_t/D_t = 4$ ). Odcházející proud odtéká dvojicí výstupů.



Obrázek 5.27: Schéma úlohy proudění tryskajícího proti stěně. Výstup na souřadnici 0.05 m od osy trysky znázorňuje hranici pro úlohu s úzkou oblastí a výstup na souřadnici 0.3 m hranici široké oblasti. Rozměry na obrázku jsou uvedeny v metrech.

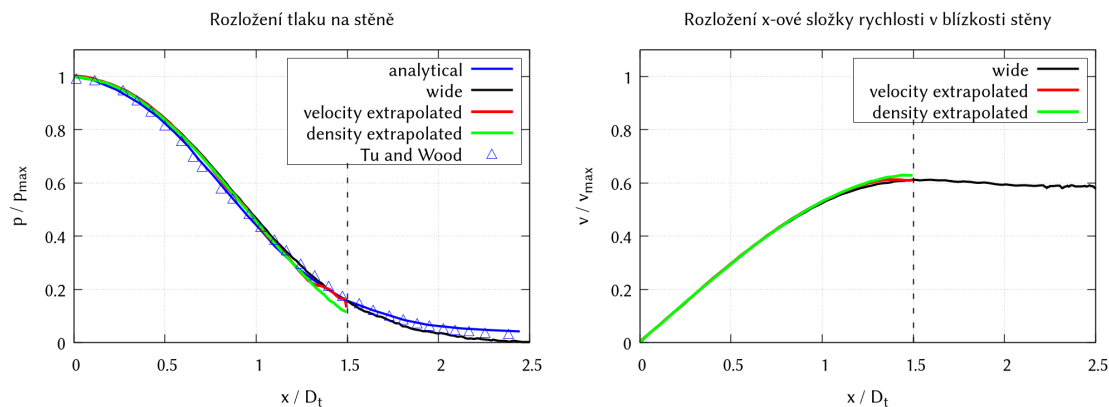
Případ realizujeme ve dvou konfiguracích, první, kdy je odtok umístěn ve značné vzdálenosti  $L_W = 0.3$  m od osy trysky (varianta se širokou oblastí) a druhé, kdy je výstupní okrajová podmínka předepsána velmi blízko dopadajícího paprsku proudu, ve vzdálenosti  $L_N = 0.05$  m od osy (varianta s úzkou oblastí). Druhá varianta působí poněkud uměle, umístění výstupní okrajové podmínky bývá zpravidla v mnohem větší vzdálenosti od dopadajícího proudu, přesto nám však dokáže posloužit jako užitečný nástroj pro ověření vlastností výstupní okrajové podmínky představující odtok. Můžeme sledovat, zda při použití naší realizace výstupu adaptujícího se na výšku hladiny na odtoku obdržíme stejné tlakové profily na stěně a stejné tvary proudu pro širokou a úzkou oblast, což nám poskytne informace o správnosti fungování výstupní okrajové podmínky. Průběhy tlaku na stěně navíc srovnáváme s analytickým řešením [29][63] a experimentálními daty [57].

Samotná výstupní okrajová podmínka, jejíž princip je popsán v sekci 2.2, je provedena ve dvou variantách. První předepisuje homogenní Neumannovu podmínku pro rychlost a z oblasti extrapoluje hustotu (potažmo tlak) a výšku hladiny na odtoku, druhá pak předepisuje homogenní Neumannovu podmínku pro hustotu (resp. tlak) a z oblasti je extrapolována rychlost a výška hladiny. Doplňme ještě, že vstupní a výstupní zóny jsou tvořeny čtyřmi vrstvami částic.

Prezentované výsledky jsou získané pomocí slabě stlačitelné formulace WCSPH ( $\delta - SPH$ ) při použití difuzního členu (1.59) s difuzním koeficientem  $d = 0.1$  a umělé viskozity s parametrem  $\alpha = 0.02$ . Hodnota numerické rychlosti zvuku je  $c_0 = 230$  a je konstantní po celou dobu výpočtu. Přepočítání hustoty na tlak se děje pomocí stavové rovnice (1.33), integrace se provádí symplektickým integračním schématem.



Jádrem je Wendlandova funkce s vyhlazovací délkou  $h = \sqrt{2}d_p$  s počáteční vzdáleností částic  $d_p = 5 \cdot 10^{-4}$ . Okrajové podmínky pro stěny jsou realizovány pomocí mDBC formulace, časový krok je konstantní  $\Delta t = 2 \cdot 10^{-6}$ . Uvažovaným médiem je voda s hustotou  $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$  a kinematickou viskozitou  $1.06 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ . Výsledky zobrazují výpočty při jediném rozlišení  $D_t/d_p = 60$  a zkoumají spolehlivost a chování realizace pro vstupní a výstupní okrajovou podmínku tím, že srovnávají rozložení tlaku na stěně pro variantu se širokou a úzkou oblastí a srovnávají je s analytickým řešením a experimentálními daty.



Obrázek 5.28: Rozložení tlaku a rychlosti  $v_x$  ve směru  $x$  v blízkosti stěny. Vyhodnocováno ve vzdálenosti  $h$  od stěny. Černá čárkovaná svislice na souřadnici  $x = 1.5$  značí uměle vloženou odtokovou okrajovou podmínku.

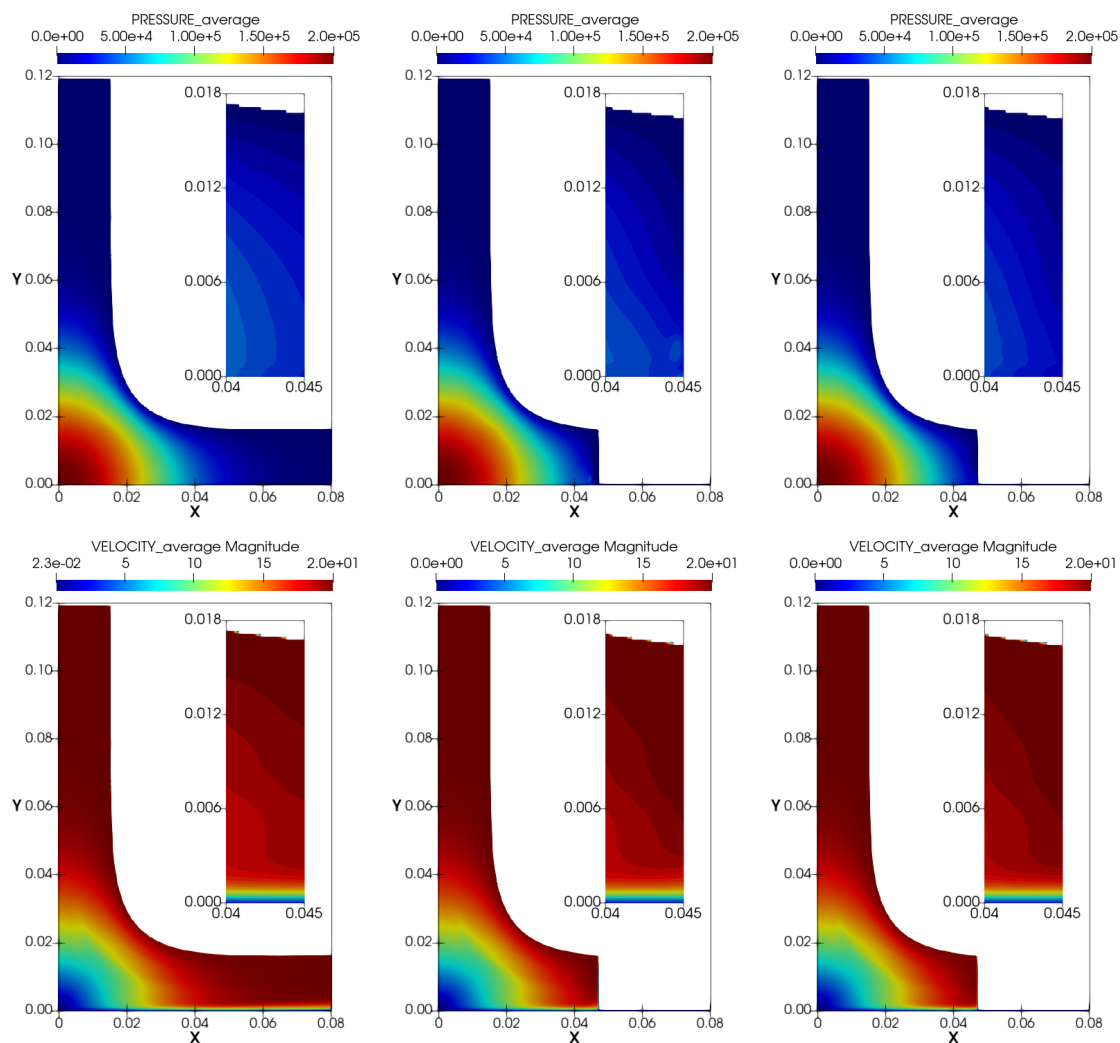
Grafy na obrázku 5.28 znázorňují hodnoty tlaku a rychlosti *na* stěně. Hodnoty jsou vyhodnocovány ve vzdálenosti  $h$  od stěny. Děje se tak proto, že aktuální realizace výstupu nezohledňuje interakci mezi částicemi stěny a částicemi výstupní zóny, které tvoří okrajovou podmínku výstupu. Ačkoliv se absence této interakce neprojeví na celkových výsledcích, vnáší chybu do zpětné interpolace 4.3 hodnot na stěně v blízkosti výstupu.

Průběhy tlaku a rychlosti u stěny na široké oblasti srovnáváme s průběhy na úzké oblasti, která obsahuje výstup v místě  $x/D_t = 1.5$ . Na výstupu široké oblasti je použita homogenní Neumannova okrajová podmínka pro rychlost (křivka *wide*, černě), na úzké oblasti srovnáváme variantu s homogenní Neumannovou pro rychlost extrapolující hustotu (křivka *density extrapolated*, zeleně) a variantu s homogenní Neumannovou podmínkou pro hustotu přičemž je dopočítávána rychlost (křivka *velocity extrapolated*, zeleně).

Z výsledků je patrné, že v oblasti pod dopadajícím proudem (souřadnice 0 - 1), si široká a zkrácená varianty velmi dobře odpovídají. Ve všech třech variantách rovněž získáváme stejný maximální tlak. Následně vidíme, že na zkrácené oblasti varianta s extrapolací hustoty lehce podhodnocuje tlak a nadhodnocuje rychlost. Naopak provedení s homogenní Neumannovou podmínkou pro hustotu využívající extrapolace hustoty na celé oblasti velmi dobře kopíruje řešení získané na široké oblasti, analytické řešení i experimentální data.

Porovnáním vypočtených hodnot tlaku na stěně ve vzdálenosti  $h$  od výstupní hranice s analytickým řešením zjistíme, že pro řešení na úzké oblasti je u varianty

extrapolující rychlost odchylka pouhých 0.008 %. U varianty pracující s extrapolací rychlosti je to - 27.75 % a řešení na široké oblasti se od analytických dat ve stejném výsledku liší o 0.2 %. Průběh rychlosti ve stejném místě se na úzké oblasti od řešení na široké oblasti liší o 0.61 % pro provedení s extrapolací rychlosti a o 3.7 % pro verzi pracující s extrapolací hustoty. Odchytky vzniklé při použití homogenní Neumannovy podmínky pro rychlost a extrapolace hustoty jsou však omezeny pouze do těsné blízkosti hranice.



Obrázek 5.29: Horní řada zobrazuje tlakové profily, dolní rychlostní profily. Vlevo výsledky na široké oblasti, uprostřed výsledky na úzké oblasti a okrajovou podmínkou využívající extrapolace rychlosti a vpravo výsledky na úzké oblasti s okrajovou podmínkou extrapolující hustotu. Detail u každého profilu zobrazuje chování v bezprostřední blízkosti hranice pro případy na úzké oblasti a v tomtéž místě pro případ se širokou oblastí. (Veličiny jsou uvedeny v základních jednotkách, tlak v Pa, rychlost v  $\text{m/s}^{-1}$ , poloha v m.)

Doplňme ještě poznámku k srovnání s analytickým řešením a experimentem. Mezi souřadnicemi  $x/D_t = 0$  a  $x/D_t = 1.5$  získané výsledky velmi věrohodně kopírují analytické řešení a experimentální data. Řešení na široké oblasti se na souřadnici

$x/D_t = 1.5$  až  $x/D_t = 2.5$  minimálně odchyľuje od analytického výsledku a experimentálních dat. V blízkosti stěny v odtékajícím proudu ve větších vzdálenostech od ústí trysky vznikají drobné mezery vlivem neuspořádanosti částic, což v souvislosti s vyhodnocením tlaku ve výšce  $h$  od stěny vede k výslednému podhodnocení tlaku.

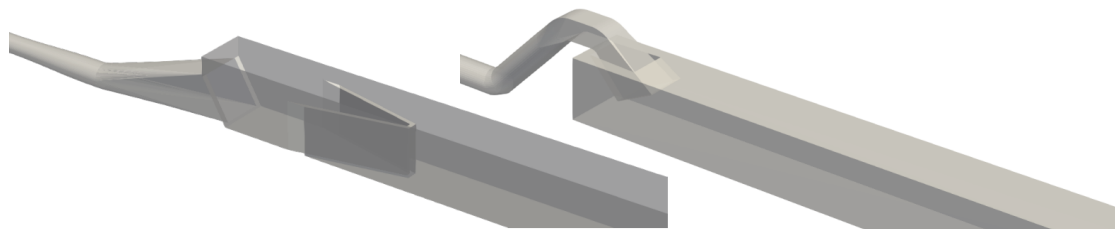
Na obrázku 5.29 jsou znázorněna průměrovaná rychlostní a tlaková pole. Pro úzkou oblast (grafy uprostřed a vlevo) jsou zobrazeny i detaily z části oblasti, která přiléhá k hranici, pro kterou výstupní okrajovou podmínku předepisujeme. Pro variantu se širokou oblastí (vlevo) zachycuje detail místo na stejných souřadnicích, jako v případě úzké oblasti. Úloha je řešena včetně rozběhu. V prvních okamžicích simulace výška výstupní zóny roste s rostoucí výškou hladiny proudu na odtoku. Z grafů (resp. zobrazených detailů) je patrné, že výška hladiny není výstupem prakticky ovlivněna a tudíž v tomto ohledu pracují výstup a algoritmus adaptující výšku výstupní zóny na výšku hladiny spolehlivě.

# Kapitola 6

## Simulace proudění ve výtokových objektech

V samotném úvodu práce zmiňujeme, že motivace ke studiu okrajových podmínek v SPH metodě pramení z vyskytnuvších se potíží při simulacích proudění ve výtokových objektech čerpacích a turbínových stanic řešených touto metodou. Zmiňme nyní dosažené výsledky, včetně případů, u kterých se použití základní realizace okrajových podmínek (DBC) ukázalo jako nedostatečné. Poznamenejme ještě, že následující text si neklade za cíl detailně dokumentovat řešení problémů proudění ve výtokových objektech, ale představit téma práce v kontextu reálných aplikací.

Jedná se o případ třírozměrného proudění s volnou hladinou na komplexních geometriích. Konkrétně byly výpočty prováděné pro dva typy výtokového objektu - geometrii s přepadem ve tvaru V (obr. 6.1 vlevo) a geometrii se sifonem (obr. 6.1 pravo). Geometrie představují součásti zařízení budovaných společností SIGMA GOURP a.s. V obou případech pracujeme se zmenšeným laboratorním modelem daného objektu, řádově se rozměry pohybujeme v jednotkách metrů (včetně odtokové části je délka kanálu přibližně 4 m, šířka 0.3 m). Pro oba případy máme k dispozici porovnání s experimentem provedeným v Centru Hydraulického Výzkumu spol. s.r.o. Mimo vizuálního srovnání charakteru proudění jsou v případě V-přepadu dostupná data o výšce hladin a pro geometrii se sifonem měření v několika rovinách pomocí metody PIV.

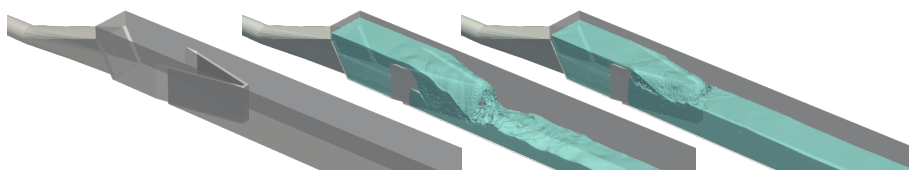


Obrázek 6.1: Geometrie výtokových objektů, vpravo geometrie se sifonem, vlevo geometrie s přepadem ve tvaru V.

První případ, geometrie přepadu ve tvaru V, obsahuje významný podíl v čase dynamicky měnící se hladiny, četné fragmentace proudu při přepadávání vody přes přepadovou hranu a mísení dopadávající vody s vodou v odtokovém kanále pod

přepadem. Vzhledem k propozicím úlohy představuje SPH ideální nástroj pro řešení. Mimo to by byl výpočet pomocí standardních CFD nástrojů, které zastřešuje metoda konečných objemů velmi obtížný. Klasické metody obvykle pro proudění s volnou hladinou využívají VOF (*volume of fluid*) či MAC (*marker and cell*) schémat, avšak v uvedeném případě je chování hladiny natolik komplexní, že by bylo zapotřebí značné snahy, velmi jemné sítě a tedy i výrazného výpočetního výkonu a přesto bez záruky validního výsledku, zatímco SPH při srovnání s experimentem dává velmi dobré predikce.

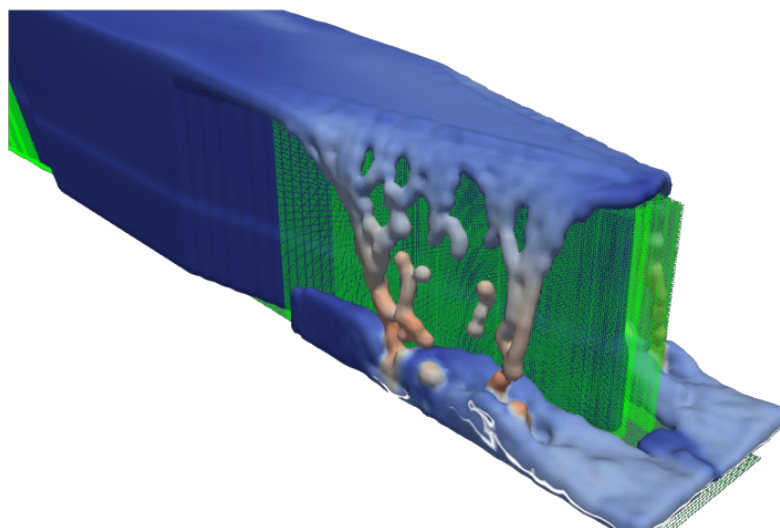
V druhém případě, pro geometrie se sifonem, je situace poněkud odlišná. Podíl hladiny zde není natolik dominantní, navíc se výrazná část proudění odehrává v uzavřeném potrubí. Oproti předchozí variantě je výpočet mnohem snáze uchopitelný klasickými zaběhlými nástroji. Přesto bychom i v tomto případě rádi dosahovali srovnatelných či lepších výsledků pomocí SPH metody. Jak následně ukážeme, právě významný podíl proudění v uzavřeném potrubí si žádá pečlivější přístup k okrajovým podmínkám pro realizaci stěn. Pro tento typ úloh se pak dále jeví jako mimořádně efektivní formulace SPH metody se zobecněnou transportní rychlostí částic (ALE-SPH), umožňující Lagrangeovské či převážně Lagrangeovské chování v blízkosti hladiny a Eulerovský charakter a chování ve smyslu metody konečných objemů v zatopených oblastech a potrubí.



Obrázek 6.2: Výsledné proudění na geometrii s přepadem ve tvaru V. Vlevo prázdný přepad, uprostřed mód s nízkou hladinou (LWL), vpravo mód s vysokou hladinou (HWL).

Varianta s přepadem ve tvaru V byla řešená ve dvou konfiguracích, variantě s nízkou hladinou v odtokovém kanále, pro kterou je výška na odtoku nastavena na 95 cm s hodnotou průtoku  $\dot{V}_{LWL} = 11.4$  l/s a variantě s vysokou hladinou kdy výškou hladiny v odtokovém kanále činí 255 cm, při průtoku  $\dot{V}_{HWL} = 10.8$  l/s. Příklad geometrie se sifonem byl řešen pro výšku hladinu na odtoku 265 cm a průtoky  $\dot{V}_{LV} = 13.8$  l/s a  $\dot{V}_{HV} = 17.2$  l/s.

K řešení byl použit open-source kód DualSPHysics verze 4.4., který nabízí implementaci slabě stlačitelné verze SPH metody (WCSPH), přičemž okrajové podmínky pro pevné stěny jsou realizované variantou DBC. Provedení vstupních a výstupních okrajových podmínek je formou vstupních a výstupních zón, nicméně detaily a algoritmy realizace nejsou mimo samotný zdrojový kód programu popsány v žádné dostupné dokumentaci. Právě chování v blízkosti vstupu a samotná funkce vstupní okrajové podmínky tvoří nejvýraznější překážku při realizaci výpočtů. Konkrétně jsme se potýkali s problémem, kdy vstup nedodával do systému předepsané množství tekutiny (předepsaný objemový tok) a v blízkosti za vstupem vznikaly poruchy v proudovém poli. Obrázek 6.3 zobrazuje počáteční výsledky při základním nastavení. Porovnáním s finálními výsledky na obrázku 6.4 je dobře patrný rozdíl v objemovém průtoku.



Obrázek 6.3: Výsledky simulace se základním nastavením, neodpovídajícím průtočným množstvím a umělými mezerami mezi tekutinou a stěnou.

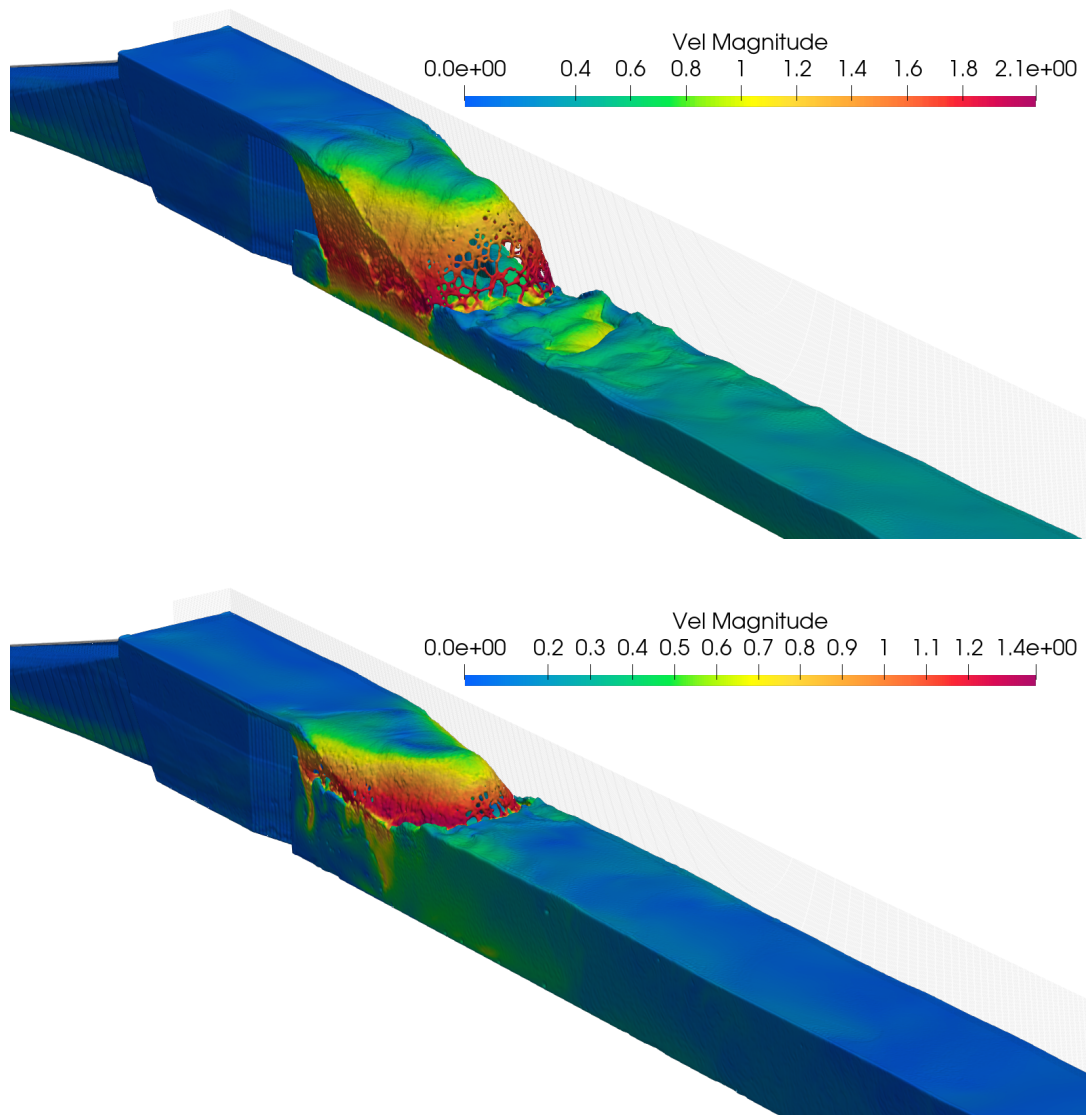
Ve snaze odstranit potíže se vstupem byla pro verze kódu DualSPHysics 4.4. a DualSPHysics 5.0. provedena rozsáhlá studie chování vstupní okrajové podmínky v závislosti na různých konfiguracích metody. Konkrétně bylo zkoumáno chování při použití difuzního členu, při zapojení PST technik (pro všechna nastavení dostupná v DualSPHysics), otestovaná byla varianta pro 4, 6 a 8 vrstev částic vstupní zóny a varianta s extrapolací hustoty pro vstupní částice. Během testování bylo pro obě verze programu odhaleno několik implementačních chyb<sup>1</sup>. Díky znalostem získaným studiem a implementací vstupní okrajové podmínky do testovacího řešiče a realizací několika testovacích úloh se podařilo vstup nastavit tak, aby dodával předepsané množství tekutiny. Jako stěžejní se ukázalo použití extrapolace hustoty z oblasti (což souvisí s uvažovaným slabě stlačitelným modelem tekutiny).

S ohledem na realizaci vstupů a výstupů byla pro výpočty zvolena starší verze DualSPHysics 4.4., aktuální dostupná verze DualSPHysics 5.0. přinesla určité úpravy algoritmů pro provedení vstupů a výstupů a navzdory značné snaze se nepodařilo docílit žádaného chování vstupu.

Výsledky na obrázcích 6.4 a 6.5 zobrazují chování proudění na přepadu při dosažení správného průtoku a odstranění většiny potíží. Charakter proudění získaný výpočtem velmi dobře odpovídá charakteru proudění, který byl pozorován v experimentu. Výpočet zachycuje například vírovou strukturu vznikající u varianty s nízkou hladinou v odtokovém kanále v rohu mezi stěnou kanálu a stěnou přepadu (obrázek 6.5 nahoře) a která byla pozorována i v laboratorní realizaci. Experimentu odpovídá i rozvlnění hladiny nad přepadem, které je dobře patrné na pohledech z boku na obrázku 6.5.

V případě varianty se sifonem se doposud nepodařilo odstranit všechny potíže. V kolenu sifonu vzniká nefyzikální bublina patrná z obrázku 6.6, která pravděpodobně souvisí s použitím okrajových podmínek DBC. Příčina je nejspíše velmi podobná tomu, co lze pozorovat na průbězích tlaku z problému protržení přehrad v ka-

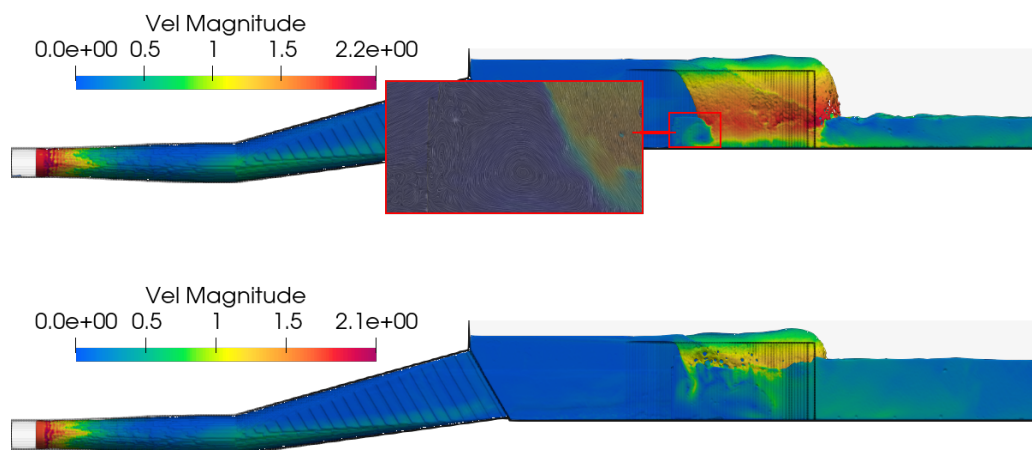
<sup>1</sup>Získané výsledky byly sdíleny s autory programu i samotné okrajové podmínky a DualSPHysics komunitou.



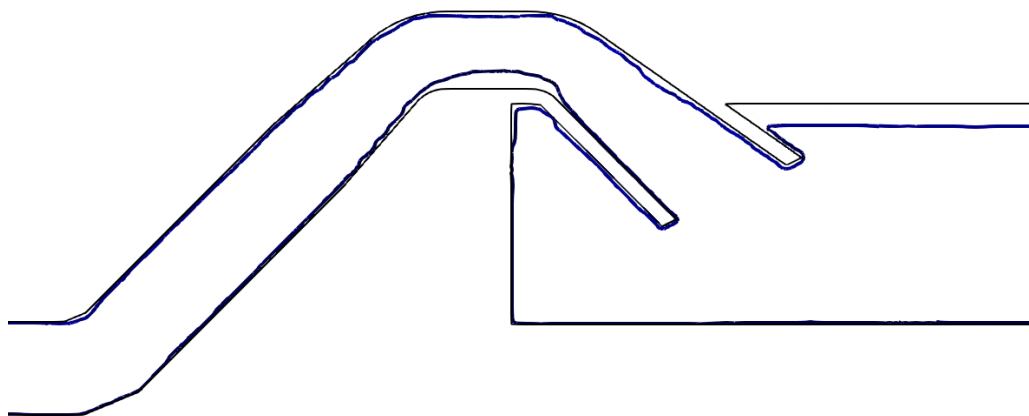
Obrázek 6.4: Proudění přes přepad po dosažení správného průtoku. Varianta s nízkou úrovní hladiny (nahore) a vysokou úrovní hladiny (dole).

pitole 5. Při pohledu na hodnoty tlaku získané ze snímače P4 na obrázcích 5.11 a 5.12 v kapitole 5, jsou u okrajových podmínek DBC vidět nefyzikální záškuby způsobené umělou mezerou mezi tekutinou a stěnou. Ty v případě kolene sifonu vedou k umělému odtržení a vzniku dutiny. S odkazem na výsledky protržení přehradu lze usoudit, že ostatní prezentované formulace zmíněný problém odstraňují a pro úspěšné vyřešení problému bude tedy nezbytné pravděpodobně jejich použití. Atraktivně se v tomto ohledu jeví zejména varianta BT, protože okrajové podmínky mDBC jsou při praktickém použití spjaty se složitou přípravou úlohy, během které je nutné provést zrcadlení hraničních částic a získat tak virtuální uzly v oblasti s tekutinou, které slouží pro lineární interpolaci hodnot na hranici. V případě obecné geometrie, kterou přepad i sifon bezesporu jsou, se jedná o nesnadný algoritizační úkol, který nemáme doposud vyřešený.





Obrázek 6.5: Proudění přes přepad po dosažení správného průtoku. Varianta s nízkou úrovní hladiny (nahore) a vysokou úrovní hladiny (dole). Na horním obrázku je vyznačena zachycená vírová struktura.



Obrázek 6.6: Řez osou kanálu s geometrií sifonu (geometrie černě) se zobrazenou konturou tekutiny (modře). Na obrázku je patrná dutina ve místě kolene.



# Závěr

V úvodu práce stručně představujeme současný stav SPH metody, uvádíme přehled pokroků v klíčových otázkách a mapujeme současné varianty metody používané pro řešení problémů proudění. Poznamenejme, že přehled zachycuje všechna stěžejní témata SPH metody s ohledem na problémy proudění s volnou hladinou, včetně uvedení nosných prací, z nichž značná část vznikla v průběhu posledních let. Metoda je formálně zavedena, je provedena diskretizace rovnic nestlačitelného vazkého proudění a jsou diskutovány hlubší a moderní numerické aspekty SPH metody, jako jsou pokročilé difuzní členy a PST techniky. Děje se tak v intencích problémů proudění s volnou hladinou, kdy klademe důraz na vliv okrajové podmínky rozhraní, resp. hladiny.

Následuje teoretický pohled na hlavní téma práce, problematiku okrajových podmínek v metodě SPH. Kapitola obsahuje ucelený přehled sestavený na základě velkého množství aktuálních odborných článků a vědeckých prací, který (je-li autorovi známo) nebyl doposud nikde publikovaný jako celek. Uvedeny jsou problémy spojené s realizací okrajových podmínek v částicovém Lagrangeovském prostředí SPH metody. Detailně jsou probrány dva přístupy pro realizaci stěn, použití dodatečných částic a varianty kompenzující chybějící sousedy za hranicí oblasti. Pro pevné stěny rozebíráme hojně užívanou formulaci DBC (*dynamic boundary conditions*) a její modifikaci mDBC (*modified dynamic boundary conditions*), odstraňující některé neduhy DBC přístupu. Dále se pak věnujeme konstrukci pracujících s hraničními integrály (označovanou jako BT) společně s renormalizačními technikami vyvažujícími nepřítomnost částic za hranicí. Všechny tři prezentované typy okrajových podmínek pro stěny nebyly doposud vzájemně porovnány.

Dále je představen moderní přístup pro realizaci vstupů a výstupů založený na vstupních a výstupních vícevrstvých zónách (tzv. *bufferech*). V rámci práce byly navrženy algoritmy implementující vstupní a výstupní zóny, které navíc zohledňují měnící se výšku hladiny v průběhu výpočtu.

Následující část se věnuje ALE-SPH formulaci pracující se zobecněnou transportní rychlostí částic, která dále využívá přibližného řešení Riemannových problémů pro mezičásticovou interakci. Výsledkem je odvození vlastního nového R-ALE-SPH schématu.

Odvozené schéma bylo společně se zbylou uvedenou a popsanou teorií a realizací okrajových podmínek implementováno do nově vytvořeného programu. V rámci čtvrté kapitoly, která se věnuje konstrukci kódu, byl vypracován přehled dostupných open-source i komerčních programů, pracujících s SPH metodou, včetně uvedení obsažených formulací a možností použití.

Přejdeme nyní k závěrům plynoucím z výsledků testovacích úloh, zvolených s

ohledem na zkoumání žádané problematiky. Začněme srovnáním okrajových podmínek pro pevné stěny. Z případu stojící vody je patrné, že variantu BT nelze použít v případě situací blízkých hydrostatickému stavu z důvodu výskytu umělého pohybu. Ten je způsoben absencí symetrie v použité náhradě a je cenou za použití okrajových podmínek tvořených pouze jednou vrstvou částic. S ohledem na oba srovnávací případy se jeví nejlépe varianta mDBC. Bohužel, příprava okrajových podmínek ve formě mDBC, je pro obecné geometrie poměrně obtížná. Mimo vytvoření více vrstev částic (což je společné s variantou DBC) je nutné pro každou z hraničních částic určit normálu k hranici a provést zrcadlení do oblasti s tekutinou, což může být v úzkých prostorech a na členitých oblastech problematické. Nejedná se však o matematický problém spojený s konstrukcí metody SPH, nýbrž o algoritmizační problém při přípravě úlohy.

Byť ze srovnání na hydrostatickém případě vychází nejhůře varianta BT, která navíc vyžaduje použití menšího časového kroku, nelze však uvedené provedení stěn ztracovat. V případech kde je přítomna dynamika tekutiny, se jedná o spolehlivou realizaci, navíc výrazně jednodušší k implementaci, než jsou vícevrstvá provedení. Poznamenejme, že pokrytí hranice hraničními elementy (částicemi) může být jemnější, než odpovídá počáteční vzdálenosti částic tekutiny, čehož lze rovněž využít při práci s komplexní geometrií. Jako nejméně vhodná se jeví varianta DBC, přičemž zjištěné problémy jako jsou mezery a poruchy v blízkosti stěn korespondují s problémy vzniklými při simulacích výtokových objektů, při jejichž řešení byla použita právě DBC formulace.

Verdiktem je, že pro praktické aplikace vzdálené hydrostatickým případům (pro problémy, kdy je rychlost tekutiny alespoň o řád vyšší, než parazitní rychlost částic určená v kapitole 5), doporučujeme použití BT formulace, zatímco pro aplikace, které tuto podmínku nesplňují, pracovat s mDBC variantou.

Vyzdvihněme dále řešení získaná pomocí R-ALE-SPH formulace. Odvozené schéma dává velmi dobré výsledky, omezuje šum v tlakových polích a to v porovnání s dostupnými řešiči a klasickou WCSPH a  $\delta$ -SPH formulací velmi výrazně. Částečně Lagrangeovský částečně Eulerovský popis pracující se zobecněnou transportní rychlostí částic (ALE-SPH) navíc skýtá nesčetné nové možnosti, ačkoliv jsme se v prezentované práci omezili pouze na Lagrangeovský mód ALE-SPH varianty. Autor považuje ALE-SPH realizaci za jeden z hlavních výsledků práce a to i ve vztahu k vlivu okrajových podmínek. Díky formulaci pracující s řešením Riemannových problémů mezi částicemi (R-ALE-SPH) jsme se navíc zbavili umělých difuzních a vazkých členů, neboť stabilizace je zajištěna umělou vazkostí plynoucí z přibližného řešení Riemannova problému. Na základě toho R-ALE-SPH variantu považujeme pro problémy proudění za preferovanou, s tím, že klasické provedení má pro nás i nadále význam a to například budeme-li chtít zohlednit další fyzikální jevy - přestup tepla, chemické reakce, či jiné složité multifyzikální simulace.

Dále se věnujeme realizaci vstupních a výstupních okrajových podmínek při proudění s volnou hladinou. Provedení založené na principu vstupních a výstupních zón se ukázalo jako velmi efektivní a spolehlivé právě pro proudění v otevřených prostorech. Nebylo však prověřeno chování vstupní okrajové podmínky s ohledem na vtok do oblasti s protitlakem, uzavřených systémů apod., což představuje jeden z hlavních nedostatků, přičemž právě uvedené případy vtoku do zatopené oblasti představují jednu z hlavních komplikací při realizaci vstupů.

Všechny výpočty testovacích úloh byly provedeny pomocí vlastnoručně vytvořeného kódu, který byl sestavený se záměrem snadného testování nových formulací a prozkoumání aspektů plnohodnotné široce paralelizované implementace SPH metody. Byť se, zvláště ze současného úhlu pohledu, po nabytí pokročilých znalostí, jeví vytvořený kód poměrně nedokonale, posloužil jak svému účelu výpočetního nástroje, tak účelu edukačnímu. Při jeho tvorbě byla zjištěna řada poznatků spojených s využitím výpočtů na více GPU a poznatků spojených s implementací SPH, které, byť nejsou do současného kódu vtěleny, jsou stěžejní pro tvorbu budoucího SPH kódu.

V samotném závěru velmi stručně zmiňujeme simulace proudění ve výtokových objektech čerpacích a turbínových stanic, které jsou čistě dílem autora a při jejichž realizaci vyvstala řada problémů spojených s okrajovými podmínkami, jenž se staly motivací pro předkládanou práci a které je možné nyní díky získaným poznatkům spolehlivě řešit. Při řešení problémů vtokových objektů byla použita pro okrajové podmínky stěny varianta DBC, přičemž pozorované problémy s poruchami a umělými mezerami v blízkosti stěny se podařilo pro variantu DBC reprodukovat na úloze protržení přehrad. Při použití ostatních zkoumaných realizací stěn se uvedené problémy u testovací úlohy nevyskytují a zdají se být proto vhodnějším nástrojem pro studované úlohy. Případy zabývající se studiem vstupních a výstupních okrajových podmínek pak poskytly důkladné znalosti o chování vstupů a výstupů, které umožnily identifikovat několik implementačních chyb v programu DualSPHysics a korektně nastavit vstupní okrajové podmínky pro dosažení žádaného průtoku.

Připomeňme ještě, že okrajové podmínky jsou jednou z tzv. *Grand Challenges* SPH metody, k jejímuž rozvoji by měla být směřována snaha a pozornost badatelů. Prezentované závěry, zejména v oblasti vlivu okrajových podmínek na umělý pohyb částic, jsou proto hodnotné i v tomto kontextu. Ostatně, SPH metoda v posledních letech prokazuje, že naše očekávání od bezsítových částicových metod nejsou přehnaná a vskutku se jedná o nástroj schopný řešit novou třídu úloh, které pro nás doposud nebyly pomocí konvenčních metod uchopitelné.

# Seznam použitých symbolů

$\alpha$	koeficient umělé viskozity, funkce limiteru
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	prostorový index (prostorové souřadnice indexujeme řeckými písmeny)
$b$	koeficient stavové rovnice slabětlačitelné tekutiny
$\beta$	druhý koeficient umělé viskozity, funkce limiteru
$\mathcal{B}$	materiálové těleso
$\mathcal{B}$	množina částic hranice
$c$	rychlost zvuku
$c_0$	numerická rychlost zvuku
$C_{cs}$	koeficient numerické rychlosti zvuku
$D$	difuzní koeficient
$D(\cdot)/Dt$	operátor materiálové derivace
$\mathcal{D}$	diferenciální operátor
$\mathbb{D}$	tenzor rychlosti deformace
$\mathcal{D}$	difuzní člen
$dom(f)$	definiční obor funkce $f$
$\delta, \delta_{\mathbf{x}}$	Dirackova delta distribuce
$\delta_{\alpha\beta}$	Kroneckerovo delta
$\delta_0$	koeficient difuzního členu
$\delta \mathbf{x}_s$	posun částice vlivem PST algoritmu
$\Delta t$	časový krok
$\Delta x$	prostorový krok
$\Delta V$	objem částice
$e$	vnitřní energie
$\epsilon$	dostatečně malá kladná konstanta
$E$	chyba
$\mathbb{E}$	Euklidovský prostor
$f$	libovolná funkce (není-li uvedeno jinak)
$\mathbf{f}$	vektor objemových síly
$\mathbf{F}$	vektor toků
$\mathcal{F}$	množina částic tekutiny
$\mathbf{g}$	gravitační zrychlení
$\mathcal{G}$	množina virtuálních částic
$\gamma$	Poissonova konstanta
$\gamma_0$	zobrazení přiřazující materiálové částici polohu v prostoru
$\gamma_t$	zobrazení přiřazující materiálové částici aktuální polohu v prostoru
$\gamma_h$	Shepardův renormalizační faktor
$\Gamma$	částicová koncentrace

$h$	vyhlazovací délka (není-li uvedeno jinak)
$h_w$	výška vodního sloupce
$H$	člen umělého tepla
$i, j, k, \dots$	indexy jednotlivých částic (částice indexujeme malými písmeny latinky)
$\mathbf{I}$	jednotkový vektor
$\kappa$	konstanta efektivní oblasti
$\mathcal{L}$	kompensační faktor, Lagrangeova funkce
$\Lambda$	tlakový člen
$m$	hmotnost
$\mu_{ij}$	člen umělé viskozity
$\mathbf{n}$	vektor normály plochy
$N$	celkový počet částic
$\eta$	dynamická viskozita
$\nabla$	operátor nabla
$\Omega$	oblast
$\partial\Omega$	hranice oblasti
$p$	tlak
$p_0$	referenční tlak
$\Pi, \Pi^\alpha, \Pi^\eta$	člen viskozity, umělá viskozita, fyzikální viskozita
$\Phi$	vektor konzervativních proměnných
$\phi$	potenciálová funkce
$\varphi$	testovací funkce
$\psi$	funkce difuzního členu
$s$	entropie
$S, \mathbf{S}$	plocha, vektor zdrojů
$supp(f)$	nosič funkce $f$
$t$	čas
$\mathbb{T}$	tenzor napětí
$\rho$	hustota
$\rho_0$	referenční hustota
$\nu$	kinematická viskozita
$V$	objem
$\mathbf{v}, \mathbf{v}_0$	vektor rychlosti, transportní rychlost částice
$W$	váhová funkce metody SPH (není-li uvedeno jinak)
$x, \mathbf{x}, \mathbf{X}$	proměnná, polohový vektor
$\chi_t$	zobrazení polohy z referenčního do aktuálního popisu
$\mathcal{X}$	materiálová částice
$\zeta$	funkce limiteru
$\langle \cdot \rangle$	SPH aproximační operátor
$\langle \cdot \rangle_i$	diskrétní SPH aproximační operátor
$\bar{A}$	střední hodnota veličiny $A$
$A_E, A^*$	řešení Riemannova problému pro veličinu $A$
$\otimes$	tenzorový součin

# Seznam použitých zkratek

ALE	Aribtrary Lagrangian-Eulerian
ALE-SPH	Aribtrary Lagrangian-Eulerian Smoothed Particle Hydrodynamics
BT	Boundary Terms Boundary conditions
CPU	Central processing unit (procesor)
DBC	Dynamic Boundary Conditions
E-SPH	Eulerian Smoothed Particle Hydrodynamics
ELI-SPH	Eulerian-Lagrangian Incompresible Smoothed Particle Hydrodynamics
$\delta$ -SPH	Delta Weakly Compressible Smoothed Particle Hydrodynamics
GC	SPHERIC Grand Challanges
GPU	Graphics Processing unit (grafická karta)
ISPH	Incompressible Smoothed Particle Hydrodynamics
IWCSPH	Implicit Weakly Compressible Smoothed Particle Hydrodynamics
mDBC	modified Dynamic Boundary Conditions
MAC	Mark and cell
MKO	Metoda Konečných Objemů
OP	okrajové podmínky
R-SPH	Riemann-based Smoothed particle Hydrodynamics
RALE-SPH	Riemann-based Aribtrary Lagrangian-Eulerian Smoothed Particle Hydrodynamics (varianta s použitím difuzních členů v rovnici kontinuity)
SPH	Smoothed Particle Hydrodynamics
SPHERIC	SPH rEaserch and engineeRing International Community
VOF	Volume of fluid
WCSPH	Weakly Compressible Smoothed Particle Hydrodynamics

# Bibliografie

- [1] S. Adami, X. Y. Hu a N. A. Adams. “A generalized wall boundary condition for smoothed particle hydrodynamics”. In: *J Comput Phys* 231 (2012). DOI: 10.1016/j.jcp.2012.05.005. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2012.05.005>.
- [2] M. Antuono, A. Colagrossi a S. Marrone. “Numerical diffusive terms in weakly-compressible SPH schemes”. In: *Comput Phys Commun* 183 (2012). DOI: 10.1016/j.cpc.2012.07.006. URL: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2012.07.006>.
- [3] M. Antuono et al. “Free-surface flows solved by means of SPH schemes with numerical diffusive terms”. In: *Computer Physics Communications* 181.3 (2010), s. 532–549. ISSN: 0010-4655. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2009.11.002>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465509003506>.
- [4] M. Antuono et al. “The delta-ALE-SPH model: An arbitrary Lagrangian-Eulerian framework for the delta-SPH model with particle shifting technique”. In: *Computers and Fluids* 216 (2021), s. 104806. ISSN: 0045-7930. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2020.104806>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793020303765>.
- [5] T. Belytschko et al. “On the completeness of meshfree particle methods”. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 43.5 (1998), s. 785–819.
- [6] Jan Bender a Dan Koschier. “Divergence-Free SPH for Incompressible and Viscous Fluids”. In: *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 23.3 (2017), s. 1193–1206. DOI: 10.1109/TVCG.2016.2578335.
- [7] J. L. Cercos-Pita. “AQUAopusph, a new free 3D SPH solver accelerated with OpenCL”. In: *Comput Phys Commun* (2015). DOI: 10.1016/j.cpc.2015.01.026. URL: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2015.01.026>.
- [8] A. Colagrossi a D. Durante S. Marrone M. Antuono. “How to derive Smoothed Particle Hydrodynamics equations in a Lagrangian mechanics framework”. Delf Institute of Applied Mathematics, 24th January 2019. 2019.
- [9] A. Colagrossi et al. “Theoretical analysis and numerical verification of the consistency of viscous smoothed-particle-hydrodynamics formulations in simulating free-surface flows”. In: *Phys Rev E Stat Nonlinear Soft Matter Phys* (2011). DOI: 10.1103/PhysRevE.84.026705. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.84.026705>.

- [10] Andrea Colagrossi, Claudio Lugni a Maurizio Brocchini. “A study of violent sloshing wave impacts using an improved SPH method”. In: *Journal of Hydraulic Research - J HYDRAUL RES* 48 (led. 2010), s. 94–104. DOI: 10.1080/00221686.2010.9641250.
- [11] Andrea Colagrossi et al. “Discussion of Stokes’ hypothesis through the smoothed particle hydrodynamics model”. In: *Phys. Rev. E* 96 (2 srp. 2017), s. 023101. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.023101. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.96.023101>.
- [12] Alejandro Crespo, M. Gomez-Gesteira a Robert Dalrymple. “Boundary conditions generated by dynamic particles in SPH methods”. In: *CMC. Computers, Materials, and Continua* 3 (čvn. 2007).
- [13] Sharen J Cummins a Murray Rudman. “An SPH Projection Method”. In: *Journal of Computational Physics* 152.2 (1999), s. 584–607. ISSN: 0021-9991. DOI: <https://doi.org/10.1006/jcph.1999.6246>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999199962460>.
- [14] LEFFE DE, David Le Touzé a B. Alessandrini. “Modeling of SPH boundary conditions using a normal flux method”. In: (led. 2009).
- [15] J. M. Domínguez et al. “DualSPHysics: from fluid dynamics to multiphysics problems”. In: *Computational Particle Mechanics* (2021). ISSN: 2196-4386. DOI: 10.1007/s40571-021-00404-2. URL: <https://doi.org/10.1007/s40571-021-00404-2>.
- [16] A. English et al. “Modified dynamic boundary conditions (mDBC) for general-purpose smoothed particle hydrodynamics (SPH): application to tank sloshing, dam break and fish pass problems”. In: *Computational Particle Mechanics* (2021). ISSN: 2196-4386. DOI: 10.1007/s40571-021-00403-3. URL: <https://doi.org/10.1007/s40571-021-00403-3>.
- [17] Pep Español a Mariano Revenga. “Smoothed dissipative particle dynamics”. In: *Phys. Rev. E* 67 (2 ún. 2003), s. 026705. DOI: 10.1103/PhysRevE.67.026705. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.67.026705>.
- [18] M. Ferrand, A. Joly a C. Kassiotis. “Unsteady open boundaries for SPH using semi-analytical conditions and Riemann solver in 2D”. In: *Comput Phys Commun* 210 (2017). DOI: 10.1016/j.cpc.2016.09.009. URL: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2016.09.009>.
- [19] Angela Ferrari et al. “A new 3D parallel SPH scheme for free surface flows”. In: *Computers and Fluids* 38.6 (2009), s. 1203–1217. ISSN: 0045-7930. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2008.11.012>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793008002284>.
- [20] G. Fourtakas et al. “An Eulerian–Lagrangian incompressible SPH formulation (ELI-SPH) connected with a sharp interface”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 329 (2018), s. 532–552. ISSN: 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.09.029>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782517302050>.



- [21] G. Fournakos et al. “Local uniform stencil (LUST) boundary condition for arbitrary 3-D boundaries in parallel smoothed particle hydrodynamics (SPH) models”. In: *Comput Fluids* 190 (2019). DOI: 10.1016/j.compfluid.2019.06.009. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2019.06.009>.
- [22] Georgios Fournakos et al. “Local uniform stencil (LUST) boundary condition for arbitrary 3-D boundaries in parallel smoothed particle hydrodynamics (SPH) models”. In: *Computers and Fluids* 190 (2019), s. 346–361. ISSN: 0045-7930. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2019.06.009>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793019301859>.
- [23] R. A. Gingold a J. J. Monaghan. “Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars.” In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 181 (1977), s. 375–389. DOI: 10.1093/mnras/181.3.375. URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/181.3.375>.
- [24] N. Grenier et al. “An Hamiltonian interface SPH formulation for multi-fluid and free surface flows”. In: *Journal of Computational Physics* 228.22 (2009), s. 8380–8393. ISSN: 0021-9991. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.08.009>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002199910900446X>.
- [25] Tomas Halada. “Řešení Sodova problému užitím SPH metody”. Bakalářská práce. České vysoké učení technické, 2020.
- [26] Alexis Hérault, Giuseppe Bilotta a Robert A. Dalrymple. “SPH on GPU with CUDA”. In: *Journal of Hydraulic Research* 48.Extra Issue (2010), s. 74–79.
- [27] Abbas Khayyer a Hitoshi Gotoh. “A Multiphase Compressible–Incompressible Particle Method for Water Slamming”. In: *International Journal of Offshore and Polar Engineering* 26 (břez. 2016). DOI: 10.17736/ijope.2016.mk42.
- [28] Phoivos Koukouvinis, John Anagnostopoulos a Dimitris Papantonis. “An improved MUSCL treatment for the SPH-ALE method: Comparison with the standard SPH method for the jet impingement case”. In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 71 (břez. 2013), s. 1152–1177. DOI: 10.1002/flid.3706.
- [29] Sonia Kvicinsky. “Méthode d’analyse des écoulements 3D à surface libre application aux turbines Pelton”. In: (2002), s. 315. DOI: 10.5075/epfl-thesis-2526. URL: <http://infoscience.epfl.ch/record/33002>.
- [30] E.-S. Lee et al. “Comparisons of weakly compressible and truly incompressible algorithms for the SPH mesh free particle method”. In: *Journal of Computational Physics* 227.18 (2008), s. 8417–8436. ISSN: 0021-9991. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2008.06.005>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002199910800315X>.
- [31] Zhe Li et al. “A non-intrusive partitioned approach to couple smoothed particle hydrodynamics and finite element methods for transient fluid-structure interaction problems with large interface motion”. In: *Computational Mechanics* 55.4 (dub. 2015), s. 697–718. DOI: 10.1007/s00466-015-1131-8. URL: <https://doi.org/10.1007/s00466-015-1131-8>.

- [32] S. J. Lind et al. “Incompressible smoothed particle hydrodynamics for free-surface flows: A generalised diffusion-based algorithm for stability and validations for impulsive flows and propagating waves”. In: *J Comput Phys* 231 (2012). DOI: 10.1016/j.jcp.2011.10.027. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2011.10.027>.
- [33] S.J. Lind a P.K. Stansby. “High-order Eulerian incompressible smoothed particle hydrodynamics with transition to Lagrangian free-surface motion”. In: *Journal of Computational Physics* 326 (2016), s. 290–311. ISSN: 0021-9991. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.08.047>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999116304041>.
- [34] Libor Lobovsky et al. “Experimental investigation of dynamic pressure loads during dam break”. In: *Journal of Fluids and Structures* 48 (srp. 2013). DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2014.03.009.
- [35] L. B. Lucy. “A numerical approach to the testing of the fission hypothesis”. In: *The Astronomical Journal* 82 (1977), s. 1013–1024. DOI: 10.1086/112164. URL: <http://dx.doi.org/10.1086/112164>.
- [36] Hong-Guan Lyu et al. “On removing the numerical instability induced by negative pressures in SPH simulations of typical fluid–structure interaction problems in ocean engineering”. In: *Applied Ocean Research* 117 (2021), s. 102938. ISSN: 0141-1187. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apor.2021.102938>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141118721003989>.
- [37] Fabricio Macià et al. “A boundary integral SPH formulation consistency and applications to ISPH and WCSPH”. In: *Progress of Theoretical Physics* 128 (zář. 2012), s. 439–462. DOI: 10.1143/PTP.128.439.
- [38] J.C. Marongiu a F. Leboeuf. *Méthode numérique lagrangienne pour la simulation d’écoulements à surface libre: application aux turbines Pelton*. 2007. URL: <https://books.google.cz/books?id=-2uxngEACAAJ>.
- [39] Jean Marie Masella, Isabelle Faille a Thierry Gallouët. “On a rough Godunov scheme”. In: 1996.
- [40] A. Mayrhofer et al. “Investigation of wall bounded flows using SPH and the unified semi-analytical wall boundary conditions”. In: *Comput Phys Commun* (2013). DOI: 10.1016/j.cpc.2013.07.004. URL: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2013.07.004>.
- [41] D. Molteni a A. Colagrossi. “A simple procedure to improve the pressure evaluation in hydrodynamic context using the SPH”. In: *Comput Phys Commun* 180 (2009). DOI: 10.1016/j.cpc.2008.12.004. URL: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2008.12.004>.
- [42] J. J. Monaghan. “Simulating free surface flows with SPH”. In: *J Comput Phys* 110 (1994). DOI: 10.1006/jcph.1994.1034. URL: <https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1034>.
- [43] J.J. Monaghan a H. Pongracic. “Artificial viscosity for particle methods”. In: *Applied Numerical Mathematics* 1.3 (1985). ISSN: 0168-9274. DOI: 10.1016/0168-9274(85)90015-7. URL: [https://doi.org/10.1016/0168-9274\(85\)90015-7](https://doi.org/10.1016/0168-9274(85)90015-7).

- [44] Joseph Monaghan a Jules Kajtar. “SPH particle boundary forces for arbitrary boundaries”. In: *Computer Physics Communications* 180 (říj. 2009), s. 1811–1820. DOI: 10.1016/j.cpc.2009.05.008.
- [45] Magdalena Neuhauser. “Development of a coupled SPH-ALE/Finite Volume method for the simulation of transient flows in hydraulic machines”. In: (pros. 2014).
- [46] Joseph O’Connor et al. “Eulerian incompressible smoothed particle hydrodynamics on multiple GPUs”. In: *Computer Physics Communications* 273 (2022), s. 108263. ISSN: 0010-4655. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2021.108263>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465521003751>.
- [47] G. Oger et al. “SPH accuracy improvement through the combination of a quasi-Lagrangian shifting transport velocity and consistent ALE formalisms”. In: *Journal of Computational Physics* 313 (2016), s. 76–98. ISSN: 0021-9991. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.02.039>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999116001030>.
- [48] Cercós Pita a José Luís. “A novel generalized diffusive SPH model: Theoretical analysis and 3D HPC implementation”. In: 2016.
- [49] Prabhu Ramachandran et al. “PySPH: A Python-based Framework for Smoothed Particle Hydrodynamics”. In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 47.4 (pros. 2021), s. 1–38. ISSN: 0098-3500, 1557-7295. DOI: 10.1145/3460773.
- [50] P.W. Randles a L.D. Libersky. “Smoothed Particle Hydrodynamics: Some recent improvements and applications”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 139.1 (1996), s. 375–408. ISSN: 0045-7825. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01090-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01090-0). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782596010900>.
- [51] Songdong Shao a Edmond Yat-Man Lo. “INCOMPRESSIBLE SPH METHOD FOR SIMULATING NEWTONIAN AND NON-NEWTONIAN FLOWS WITH A FREE SURFACE”. In: *Advances in Water Resources* 26 (2003), s. 787–800.
- [52] A. Skillen et al. “Incompressible smoothed particle hydrodynamics (SPH) with reduced temporal noise and generalised Fickian smoothing applied to body–water slam and efficient wave–body interaction”. In: *Comput Methods Appl Mech Eng* 265 (2013). DOI: 10.1016/j.cma.2013.05.017. URL: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2013.05.017>.
- [53] Angelo Tafuni et al. “A versatile algorithm for the treatment of open boundary conditions in Smoothed particle hydrodynamics GPU models”. In: (srp. 2018).
- [54] Angelo Tafuni et al. “Accurate and efficient SPH open boundary conditions for real 3-D engineering problems”. In: čvn. 2017.
- [55] Angelo Tafuni et al. “Open boundary conditions for large-scale SPH simulations”. In: čvn. 2016.
- [56] E.F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. Springer Berlin Heidelberg, 2009. ISBN: 9783540498346.

- [57] C.V. Tu a D.H. Wood. “Wall pressure and shear stress measurements beneath an impinging jet”. In: *Experimental Thermal and Fluid Science* 13.4 (1996). Peter Bradshaw 60th Birthday Issue: Part II, s. 364–373. ISSN: 0894-1777. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0894-1777\(96\)00093-3](https://doi.org/10.1016/S0894-1777(96)00093-3). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0894177796000933>.
- [58] R. Vacondio et al. “Variable resolution for SPH: A dynamic particle coalescing and splitting scheme”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 256 (2013). ISSN: 0045-7825. DOI: 10.1016/j.ca.2012.12.014.
- [59] Renato Vacondio et al. “Grand challenges for Smoothed Particle Hydrodynamics numerical schemes”. In: *Computational Particle Mechanics* (2020). ISSN: 2196-4386. DOI: 10.1007/s40571-020-00354-1. URL: <https://doi.org/10.1007/s40571-020-00354-1>.
- [60] Bram van Leer. “Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov’s method”. In: *Journal of Computational Physics* 32.1 (1979), s. 101–136. ISSN: 0021-9991. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(79\)90145-1](https://doi.org/10.1016/0021-9991(79)90145-1). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999179901451>.
- [61] Jean Paul Vila. “On particle weighted methods and SPH”. In: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences - M3AS* 09 (břez. 1999), s. 161–209. DOI: 10.1142/S0218202599000117.
- [62] Rui Xu, P.K. Stansby a Dominique Laurence. “Accuracy and Stability in Incompressible SPH (ISPH) Based on the Projection Method and a New Approach”. In: *J. Comput. Physics* 228 (řij. 2009), s. 6703–6725. DOI: 10.1016/j.jcp.2009.05.032.
- [63] Zhuyun Xu, Horia Hangan a Pei Yu. “Analytical Solutions for a Family of Gaussian Impinging Jets”. In: *Journal of Applied Mechanics* 75.2 (ún. 2008). 021019. ISSN: 0021-8936. DOI: 10.1115/1.2775502. URL: <https://doi.org/10.1115/1.2775502>.
- [64] Shao S. Y.M. Lo E. “Simulation of near-shore solitary wave mechanics by an incompressible SPH method”. In: *Appl Ocean Res* 24 (2002). DOI: 10.1016/S0141-1187(03)00002-6. URL: [https://doi.org/10.1016/S0141-1187\(03\)00002-6](https://doi.org/10.1016/S0141-1187(03)00002-6).
- [65] C. Zhang, X.Y. Hu a N.A. Adams. “A weakly compressible SPH method based on a low-dissipation Riemann solver”. In: *Journal of Computational Physics* 335 (2017), s. 605–620. ISSN: 0021-9991. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.01.027>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999117300438>.