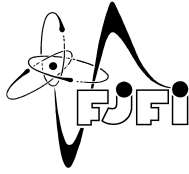


České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská  
Katedra fyzikální elektroniky

# Generace kvantově provázaných stavů světla: teorie a experimentální realizace

Diplomová práce

Autor práce: **Bc. David Tomeček**  
Vedoucí práce: **doc. Ing. Ivan Richter, Dr.**  
Konzultanti: **Ing. Miroslav Dvořák, Ph.D.**  
Školní rok: **2021/2022**



**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE**  
**FAKULTA JADERNÁ A FYZIKÁLNĚ INŽENÝRSKÁ**  
*Katedra fyzikální elektroniky*

## **ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE**

<i>Student:</i>	<b>Bc. David Tomeček</b>
<i>Studijní program:</i>	<b>Fyzikální elektronika</b>
<i>Obor:</i>	<b>Fotonika</b>
<i>Akademický rok:</i>	<b>2021/2022</b>
<i>Název práce:</i> (česky)	<b>Generace kvantově provázaných stavů světla: teorie a experimentální realizace</b>
<i>Název práce:</i> (anglicky)	<b>Generation of quantum entangled states of light: theory and experimental realization</b>

*Cíle práce:*

Diplomová práce je zaměřena na seznámení se s metodami a technikami generace a detekce kvantově provázaných stavů světla, a to jak s fyzikálními základy, tak zejména s experimentálními aspekty. Na základě prozkoumání možností realizace, v korelaci s technickými možnostmi pracoviště, bude zvolena vhodná strategie a bude navrženo vhodné uspořádání. Bude snahou se pokusit toto uspořádání experimentálně realizovat a otestovat a získané výsledky diskutovat.

*Pokyny pro vypracování:*

- 1) Na základě rešerše a studia fyzikálních principů kvantově provázaných (entanglovaných) neklasických kvantových stavů světelného záření se seznámte s jejich unikátními vlastnostmi, základními procesy, technikami, klíčovými komponentami generujícího a detekčního systému.
- 2) Zmapujte a zpracujte praktická a technická hlediska možných realizací, podle jednotlivých přístupů, vzhledem k možnostem pracoviště.
- 3) Porovnáním vlastností jednotlivých přístupů a možností realizace, jak z hlediska celku, tak jednotlivých komponent, zvolte vhodnou strategii, pomocí níž navrhnete uspořádání pro generaci a detekci kvantově provázaných stavů, pomocí jednotlivých funkčních komponent.

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškerou použitou literaturu.

V Praze dne 2. 5. 2022

David Tomeček

# Abstrakt

Kvantově provázané stavy představují cenný zdroj neklasických kvantových jevů, které jsou intenzivně využívány v kvantových komunikacích, výpočtech aj. Umožňují např. implementaci kvantových opakovačů stavěných na algoritmu výměny kvantového provázání, které prostřednictvím optických vláken mohou na velké vzdálenosti přenášet informační qubity. Odsud vyplývá i motivace studia kvantového provázání se zaměřením na optickou doménu. Tato práce se zabývá právě problematikou kvantového provázání, jak z teoretické, tak v kontextu možné generace optickými metodami. V neposlední řadě je v korelaci s vybavením pracoviště diskutováno nejvhodnější experimentální uspořádání pro realizaci a následně je daná experimentální sestava postavena a charakterizována.

**Klíčová slova:** Kvantové provázání, kvantová optika, Bellova nerovnost, parametrická sestupná konverze

# Abstract

Quantum entangled states represent a valuable resource of non-classical quantum phenomena that are intensively used in quantum communications, computation, etc. They allow, for example, the implementation of quantum repeaters based on the entanglement swap algorithm, which can transmit information qubits over long distances via optical fibers. Hence the motivation for studying quantum entanglement focusing on the optical domain. This thesis deals specifically with the topic of quantum entanglement, both from a theoretical perspective and in the context of possible generation by optical means. Finally, the most suitable experimental setup for realization is discussed in correlation with the equipment of the workplace and then the given experimental setup is built and characterized.

**Key words:** Quantum entanglement, quantum optics, Bell's theorem, parametric down conversion

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Úvod do kvantového provázání</b>	<b>2</b>
2.1	Smíšený stav . . . . .	3
2.2	Měření v kvantové mechanice . . . . .	5
2.2.1	POVM a Neumarkův teorém . . . . .	6
2.3	Kvantové provázání . . . . .	7
2.4	Klasické korelace a Bellova nerovnost . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Parametrická sestupná konverze</b>	<b>12</b>
3.1	Kvazifázové přizpůsobení . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Generace kvantově provázaných stavů</b>	<b>18</b>
4.1	Generace SPDC II. typu v úhlově laděných krystalech . . . . .	18
4.2	Generace SPDC typu II v PP krystalech . . . . .	22
4.2.1	Generace s dvojím čerpáním . . . . .	22
4.2.2	Generátor Sagnacova typu . . . . .	24
4.3	Generace SPDC I. typu . . . . .	26
4.4	Optimalizace účinnosti SPDC v PPK . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Detekce kvantově provázaných stavů</b>	<b>29</b>
5.1	Hong-Ou-Mandelův experiment . . . . .	29
5.2	Měření koincidenčí pro různé polarizace . . . . .	32
<b>6</b>	<b>Experimentální část</b>	<b>37</b>
6.1	Příprava čerpacího svazku . . . . .	37
6.2	Generační část . . . . .	41
6.3	Vyhodnocovací (detekční) část . . . . .	42
<b>7</b>	<b>Závěr</b>	<b>46</b>
<b>8</b>	<b>Použitá literatura</b>	<b>47</b>
	<b>Příloha A Kvantově mechanické odvození SPDC</b>	<b>50</b>
	<b>Příloha B Technické parametry experimentální sestavy</b>	<b>51</b>

# 1 Úvod

Kvantové provázání tvoří jeden z nejpozoruhodnějších důsledků kvantové mechaniky. Nachází-li se totiž dvě částice (kvantové systémy) v kvantově provázaném stavu, tak nahlížíme-li na každý stav jednotlivě, tak se oba zdají absolutně nepředvídatelné. Ve chvíli, kdy je na ně nahlíženo v kontextu celého složeného systému, tak lze z testů (experimentů) vykonaných na jednom z podsystémů dedukovat výsledky testů na druhém z podsystémů. Převedením do reálné situace každodenního života si kvantové provázání lze představit jako situaci, ve které jsme s jistotou schopni na základě výsledku hodů jednou vyváženou mincí přesně předpokládat výsledek hodu jiné vyvážené mince. V tomto příkladu by mince byly řečeny kvantově provázané. Toto zjištění vyústilo v roce 1935 k formulaci známého EPR paradoxu, pojmenovaného po trojici vědců Einstein, Podolsky, Rosen [1]. Zmíněný EPR paradox implikuje nutnou neúplnost kvantové teorie, jelikož prostředkem kvantově provázaných stavů lze zdánlivě docílit komunikace rychlejší než je rychlost světla. Pro své nevšední vlastnosti nachází kvantové provázání mnoho uplatnění, a to především v kvantové komunikaci. Velkou motivací na tomto poli je bez diskuse kvantová distribuce klíče, která tvoří odpověď na teoretické prolomení dosavadně běžně používaného zabezpečení pomocí Shorova faktorizačního kvantového algoritmu [2]. Kvantová distribuce klíče představuje neprolomitelné zabezpečení, a to do té úrovně, že jeho prolomení by znamenalo zboření samotných základů kvantové mechaniky. Vzhledem k již vystavěné a zvládnuté optické komunikační infrastruktuře, představují fotony ideální prostředek pro přenos qubitů (kvantových bitů). Stejně jak v klasických optických sítích, které jsou na velkých vzdálenostech vybaveny opakovači pro posílení signálu, tak stejně je toto potřeba při budování kvantových sítí. Vzhledem k teorému zákazu klonování (anglicky *no-cloning theorem*) nelze kvantový opakovač implementovat jednoduchým kopírováním qubitů ze vstupu na výstup. Je třeba hledat jiné odpovědi na řešení této implementační otázky. Odpověď nabízí kvantová teleportace a kvantová výměna provázání (anglicky *entanglement swapping*) [3], využívající kvantové provázání. Jak lze tedy usoudit, tak kvantové provázání tvoří esenciální ingredienci při budování kvantové komunikace a kvantového internetu [4]. Jak je z této úvodní motivace zřejmé, jedná se o perspektivní a aktuální problematiku, která začíná být intenzivně studována i zde na fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské (FJFI) v rámci kvantových technologií.

Prezentována práce je první prací v této oblasti na katedře fyzikální elektroniky FJFI, která si klade za cíl porozumět problematice kvantově provázaných stavů, a to jak z hlediska jejich unikátních vlastností, tak možností jejich generace a detekce v rámci optické platformy. Ambicí této práce je probrat možné optické experimentální sestavy schopné generovat kvantově provázané stavy, přičemž závěrem je jedna z

navržených sestav sestavena a charakterizována.

Práce je rozdělena do několika částí. Po první, úvodní, kapitole následuje kapitola 2., která tvoří úvod do teorie stojící za kvantovým provázáním a zároveň s ní jsou krátce okomentovány i základní principy kvantové mechaniky. Ve 3. kapitole je rozebrán nelineární proces spontánní parametrické sestupné konverze, který tvoří optimální způsob generace korelovaných fotonových párů. V kapitole 4. jsou představeny možné experimentální sestavy umožňující generaci kvantově provázaných párů pomocí, v předchozí kapitole uvedené, spontánní parametrické sestupné konverze. Na generaci kvantově provázaných párů navazují v kapitole 5. možnosti jejich detekce. Zde jsou představeny metody, které do různé míry detailu umožňují generovaný stav charakterizovat. 6. kapitola tvoří experimentální část této práce. V ní je představena experimentální sestava, prostřednictvím které jsem se pokusil kvantově provázaný stav generovat. Sestava je doplněna i o výsledky měření, které na ní byly provedeny. Práce je formálně uzavřena závěrem, přehledem literatury a dvěma přílohami.

## 2 Úvod do kvantového provázání

Klasický systém je deterministicky určen svými dynamickými proměnnými, souřadnicemi ve fázovém prostoru tedy polohou  $\vec{x}$  a hybností  $\vec{p}$ . Jak je ovšem známo z kvantové mechaniky, nelze s maximální přesností simultánně tyto dvě veličiny určit. Měřením jedné z veličin, např.  $x_i$  (složka vektoru  $\vec{x}$ ), vnitřní stav kvantového systému změní a není tak možné získat přesnou hodnotu původního systému pro  $p_i$  (stejná složka vektoru  $\vec{p}$ ). Lze si to představit tak, že samotný akt měření (odražení fotonu od částice) změní stav systému. Oproti klasické mechanice ztrácí tak kvantová mechanika komutativnost, tedy

$$AB \neq BA, \tag{2.0.1}$$

kdy  $A$  a  $B$  představují obecné operace. Pro započtení těchto vlivů se jako vhodný formalismus popisu kvantově mechanických dějů jeví funkcionální analýza. Její základní vlastností je, že je obecně nekomutativní. V tomto formalismu pak fyzikálním pozorovatelným veličinám jsou přidruženy hermitovské operátory, přičemž samotné kvantové systémy jsou reprezentovány paprsky v Hilbertově prostoru  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ , které pak hermitovský operátor  $\hat{A}$  transformuje

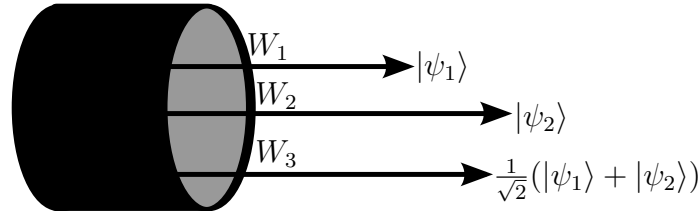
$$\hat{A}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}. \tag{2.0.2}$$

Zmíněná hermitovskost pozorovatelných veličin zajišťuje reálnost jejich spektra, které je ve formalismu kvantové mechaniky interpretováno jako možné výsledky

měření pozorovatelných veličin. V kontextu druhého kvantování elektromagnetického pole se hned nabízí dva příklady kvantových stavů. Fockův stav<sup>1</sup>  $|n\rangle$ , který představuje stav elektromagnetického pole konkrétního počtu fotonů  $n$  a koherentní stav  $|\alpha\rangle$  (vlastní stav anihilačního operátoru  $\hat{a}$ ), který představuje kvantový analog klasického monochromatického signálu. Každý komplexní vektor, s výjimkou nulového, v Hilbertově prostoru reprezentuje realizovatelný čistý kvantový stav. Takhle definované stavy však pokrývají pouze ty kvantové stavy, které jsou tzv. čisté. Pro započtení klasické statistiky je obecný kvantový systém vhodnější vyjádřit tzv. statistickým operátorem, tedy stavem smíšeným.

## 2.1 Smíšený stav

Smíšený stav odráží klasickou statistiku zkoumaného systému (obr. 1). Mějme systém, kde s určitou klasickou pravděpodobností  $W_i$  existuje čistý kvantový stav  $|\psi_i\rangle$  pro  $i = 1, 2 \dots n$ . Tím, že tyto kompoziční stavy ne nutně musí být vzájemně orto-



Obrázek 1: Vyobrazení generátoru smíšeného stavu. Ten s pravděpodobnostmi  $W_1$ ,  $W_2$  a  $W_3$  generuje čisté stavy  $|\psi_1\rangle$ ,  $|\psi_2\rangle$  a  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle)$ .

gonální, je nutné do celkové pravděpodobnosti  $p_j$  naměření systému ve stavu  $|\psi_j\rangle$  započíst jak  $W_i$ , tak kvantovou pravděpodobnost, tedy překryv stavů  $|\langle\psi_j|\psi_i\rangle|^2$ . Celkovou pravděpodobnost lze tedy vyčíslit jako sumu všech pravděpodobností

$$p_j = \sum_i W_i |\langle\psi_j|\psi_i\rangle|^2 = \langle\psi_j| \left( \sum_i W_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \right) |\psi_j\rangle. \quad (2.1.1)$$

Podobný výraz, jako se nachází v poslední rovnosti (2.1.1), je získán i zkoumáním střední hodnoty operátoru  $\hat{A}$

$$\begin{aligned} \langle\hat{A}\rangle &= \sum_m W_m \langle\psi_m|\hat{A}|\psi_m\rangle = \\ &= \sum_m W_m \langle\psi_m| \sum_i a_i |a_i\rangle\langle a_i| |\psi_m\rangle = \\ &= \sum_i \langle a_i| \sum_m W_m |\psi_m\rangle\langle\psi_m| \hat{A} |a_i\rangle = \text{Tr} \left[ \left( \sum_m W_m |\psi_m\rangle\langle\psi_m| \right) \hat{A} \right]. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

<sup>1</sup>Tu se však již nejedná o Hilbertův prostor, nýbrž Fockův prostor.



Jak výraz pro pravděpodobnost (2.1.1), tak střední hodnotu (2.1.2) lze zjednodušit zavedením nového statistického operátoru  $\hat{\rho}$

$$\hat{\rho} = \sum_m W_m |m\rangle\langle m|, \quad (2.1.3)$$

$$p_j = \langle \psi_j | \hat{\rho} | \psi_i \rangle, \quad (2.1.4)$$

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{A}). \quad (2.1.5)$$

Ukazuje se, že je velice výhodné charakterizovat daný systém výše zmíněným operátorem. Tento stav je nazýván smíšený a je plně charakterizován právě svým statistickým operátorem (též matice hustoty). Mezi jeho základní vlastnosti patří jeho hermitovskost, pozitivní semidefinitnost a

$$\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1, \quad (2.1.6)$$

$$\text{Tr}(\hat{\rho}^2) \leq 1, \quad (2.1.7)$$

kdy rovnost v rovnici (2.1.7) nastává právě pro stav čistý (proto se  $\text{Tr}(\hat{\rho}^2)$  též někdy nazývá čistota stavu).

Pro příklad se pokusme definovat stav termodynamické rovnováhy elektromagnetického pole. Ze statistické mechaniky je známo, že pravděpodobnostní rozdělení komponent v poli je následující (viz vyzařování absolutně černého tělesa)

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_m}{k_B T}}, \\ Z &= \sum_i e^{-\frac{E_i}{k_B T}}, \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

kde  $E_m$  je energie  $m$  fotonů,  $W_m$  je pravděpodobnost nalezení excitovaných  $m$  fotonů v poli,  $k_B$  je Boltzmanova konstanta a  $T$  je termodynamická teplota. Dosazením do (2.1.3) je získán tvar statistického operátoru

$$\hat{\rho} = \sum_n \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_n}{k_B T}} |n\rangle\langle n| = \frac{\exp\left(\frac{-\hat{H}}{k_B T}\right)}{\text{Tr}\left[\exp\left(\frac{-\hat{H}}{k_B T}\right)\right]}, \quad (2.1.9)$$

kde  $|n\rangle$  jsou prvky Fockovy báze a  $\hat{H}$  je hamiltonián systému.

Významnou aplikační oblastí statistického operátoru je popis podsystemu složených systému. Mějme statistický operátor  $\hat{\rho}_C$  popisující systém na  $\mathcal{H}_C = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . Definujme pak redukovaný statistický operátor

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B(\hat{\rho}_C), \quad (2.1.10)$$

kde  $\text{Tr}_B$  je částečná stopa přes prostor  $\mathcal{H}_B$ . Redukovaný statistický operátor je význačný pro popis podsystemu díky tomu, že poskytuje správnou statistiku měření. Je-li  $\hat{M}_A$  pozorovatelnou na subsystému  $A$ , pak totiž platí

$$\langle \hat{M}_A \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}_A \hat{M}_A). \quad (2.1.11)$$

Purifikací (vyčištěním) kvantového stavu se rozumí, že máme-li smíšený stav na Hilbertově prostoru  $\mathcal{H}_A$ , pak lze nalézt Hilbertův prostor  $\mathcal{H}_B$  a čistý stav  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  tak, že

$$\hat{\rho} = \text{Tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|). \quad (2.1.12)$$

Jinými slovy pro každý smíšený stav existuje „nadprostor“, ve kterém se jeví jako čistý.

Užitečnou mírou při práci se statistickými operátory je jejich věrnost (anglicky *fidelity*). Máme-li např. kvantový komunikační kanál, tak je předmět našeho zájmu, aby stav na výstupu kanálu, reprezentovaný statistickým operátorem  $\hat{\sigma}$ , co nejlépe reprezentoval stav na jeho vstupu, reprezentovaný statistickým operátorem  $\hat{\rho}$ . Vhodnou veličinou pro vyčíslení věrnosti stavu  $\hat{\sigma}$  ku stavu  $\hat{\rho}$  je fidelita  $F(\hat{\rho}, \hat{\sigma})$

$$F(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) = \left[ \text{Tr} \sqrt{\sqrt{\hat{\rho}} \hat{\sigma} \sqrt{\hat{\rho}}} \right]^2, \quad (2.1.13)$$

která vychází z klasické věrnosti (blízkosti) dvou pravděpodobnostních rozložení. To lze prohlédnout sledováním fidelity dvou čistých stavů  $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ , tedy

$$F(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = |\langle\psi|\phi\rangle|^2, \quad (2.1.14)$$

což je v konkrétních reprezentacích právě překryv pravděpodobnostních vlnových funkcí. Rozšířením této fyzikální interpretace fidelity na smíšené stavy nabízí Uhlmannův teorém [5], který v případě smíšených stavů fidelitu interpretuje jako překryv jejich vyčištěných stavů.

## 2.2 Měření v kvantové mechanice

V porovnání s klasickým měřením, kdy z výsledků měření lze usoudit stav pozorovaného objektu neprodleně před měřením, se kvantová mechanika dost odlišuje. Již bylo řečeno, že pozorovatelná veličina je reprezentována hermitovským operátorem  $\hat{A}$ . Ten je možné spektrálně rozložit do tvaru

$$\hat{A} = \sum_j a_j |j\rangle\langle j|, \quad (2.2.1)$$

kde  $a_j$  jsou vlastní čísla, tedy i možné měřitelné hodnoty pozorovatelné  $\hat{A}$ ,  $\{|j\rangle\}$  představuje množinu jejich vlastních vektorů (pro jednoduchost tvořící úplnou bázi zvoleného Hilbertova prostoru). Samotný akt měření pozorovatelné  $a_j$  lze popsat jako 1D projekci odpovídajícího vlastního vektoru  $|j\rangle$  na pozorovaný kvantový systém  $|\psi\rangle$

( $\hat{\rho}$ )

$$|\phi_j\rangle = \frac{\hat{P}_j |\psi\rangle}{\|\hat{P}_j |\psi\rangle\|}, \quad (2.2.2)$$

$$|\sigma_j\rangle = \frac{\hat{P}_j \hat{\rho} \hat{P}_j}{\text{Tr}(\hat{P}_j \hat{\rho})}, \quad (2.2.3)$$

kde operátor  $\hat{P}_j$  představuje projektor na podprostor konkrétní hodnoty  $a_j$ , která je měřena, přičemž

$$\hat{P}_i = |i\rangle\langle i|, \quad (2.2.4)$$

$$\sum_i \hat{P}_i = \hat{I}. \quad (2.2.5)$$

Výsledný stav po měření  $|\phi_j\rangle$  se nachází na paprsku definovaném stavem  $|a_j\rangle$ , čímž efektivně došlo ke kolapsu stavu před měřením a ztráty informace o něm. Pravděpodobnost  $p_j$  naměření  $a_j$  je pak dána

$$p_j = \langle \psi | \hat{P}_j^2 | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{P}_j | \psi \rangle, \quad (2.2.6)$$

$$p_j = \text{Tr}(\hat{P}_j \hat{\rho} \hat{P}_j) = \text{Tr}(\hat{P}_j \hat{\rho}), \quad (2.2.7)$$

kde pro úpravu výrazů byla využita idempotentnost projektorů a invariance stopy vůči cyklickým záměnám. Lze ukázat, že takto definované měření není nejobecnější možné. Ukazuje se, že podmínka na počet projektorů, shora omezen dimenzí prostoru, je až příliš restriktivní. Například znemožňuje provádět měření, která by dokázala rozpoznat mezi neortogonálními stavy. Myšlenka zobecnění těchto tzv. von Neumannových projektivních měření ústí v zavedení tzv. POVM měření (angl. *positive operator-valued measure*).

### 2.2.1 POVM a Neumarkův teorém

Pokusme se původní Hilbertův prostor  $\mathcal{H}_A$  rozšířit o další, pomocný, Hilbertův prostor  $\mathcal{H}_B$  s ortonormální bází  $\{|m\rangle_B\}$ . Zkoumaným stavem je  $|\psi\rangle_A \in \mathcal{H}_A$  a pomocným stavem je  $|\psi\rangle_B \in \mathcal{H}_B$ . Zkoumejme vliv unitárního operátoru  $\hat{U}_{AB}$  na složený systém  $|\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$ , vyjádřením pravděpodobnosti naměření stavu  $|m\rangle_B$  získáme [6, 7]

$$p_m = \left\| \left( \hat{I}_A \otimes |m\rangle\langle m|_B \right) \hat{U}_{AB} |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B \right\|^2. \quad (2.2.8)$$

Zjednodušením výrazu, zavedením nového operátoru  $\hat{A}_m$ , je získán tvar

$$p_m = \langle \psi |_A \hat{A}_m^\dagger \hat{A}_m | \psi \rangle_A = \langle \psi |_A \hat{\Pi}_m | \psi \rangle_A, \quad (2.2.9)$$

$$p_m = \text{Tr}(\hat{A}_m^\dagger \hat{A}_m \hat{\rho}) = \text{Tr}(\hat{\Pi}_m \hat{\rho}), \quad (2.2.10)$$

$$\hat{A}_m | \psi \rangle_A = \langle m |_B \hat{U}_{AB} | \psi \rangle_A \otimes | \psi \rangle_B, \quad (2.2.11)$$

přičemž byl zaveden nový operátor  $\hat{\Pi}$ , který je nazýván jako element POVM

$$\hat{\Pi}_m = \hat{A}_m^\dagger \hat{A}_m \quad (2.2.12)$$

a platí pro něj

$$\sum_i \hat{\Pi}_i = 1. \quad (2.2.13)$$

Operátory  $\hat{A}_m^\dagger$  a  $\hat{A}_m$ , obecně nehermitovské a jsou nazývány detekční operátory.

Dekompozice (2.2.13) se tedy nazývá POVM a  $\hat{\Pi}_j$  jsou pozitivní operátory nazývané elementy POVM. Možné výsledky měření jsou reprezentovány detekčními operátory  $\hat{A}_m$ , jejichž pravděpodobnosti pro čistý stav  $|\psi\rangle_A$ , resp. statistický operátor  $\hat{\rho}_A$  jsou popsány (2.2.10). Pomocí POVM lze obecně získat větší informační obsah o stavu kvantového systému než pomocí klasických projektivních měření [8]. Jinými slovy. Existuje-li s naším zvoleným kvantovým systémem kvantově provázaný (viz dále) pomocný systém [9], pak provedením klasické von Neumannovské projekce pomocného stavu docílíme transformace celého systému [10]. Zároveň lze dokázat, že existuje-li množina operátorů  $\{\hat{A}_m\}$  na  $\mathcal{H}_A$  taková, že  $\sum_m \hat{A}_m^\dagger \hat{A}_m = \hat{I}$ , pak existuje pomocný prostor  $\mathcal{H}_B$  s bází  $\{|m\rangle_m\}$  a operátor  $\hat{U}_{AB}$  na  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  tak, že platí (2.2.11). Tato 2 tvrzení jsou známá jako Neumannův teorém. Přejít mezi von Neumannovskou projekcí a POVM je tedy analogický k přechodu mezi smíšeným stavem a čistým stavem při jeho purifikaci.

## 2.3 Kvantové provázání

Na úvod se pokusím, po vzoru myšlenkového experimentu „Schrödingerovy kočky“, provést extrapolaci kvantového jevu, zde konkrétně kvantového provázání, do makroskopického světa. Mějme dvojici, Alici a Boba. Oba vlastní několik vyvážených mincí. Dvojice se na nějaký čas odloučí a v definovaných časech provádějí hody mincí. Vždy první Alice pak Bob. Výsledky hodů si zapisují a když se po čase opět střetnou, tak si výsledky porovnají (tab. 1). Při porovnání výsledků jsou oba zaraženi, jelikož

Tabulka 1: Porovnání výsledků 10 hodů vyváženými mincemi Alice a Boba. Panna (P) nebo orel (O) pro sérii 10 hodů.

Alice	P	O	O	P	O	P	P	O	P	O
Bob	O	P	P	O	P	O	O	P	O	P

výsledky jsou perfektně anti-korelované. Za předpokladu, že se skutečně jednalo o vyvážené mince, tedy 50 % panna a 50 % orel, je obdobné chování z pohledu klasické statistiky vyloučeno (nízká pravděpodobnost). Stejně jako v reálném světě na ulici nepotkáme kočku zároveň živou a mrtvou, tak ani se v reálném světě nesetkáme s

takovými mincemi. Ve škálách mnohem menších je tento jev však realizovatelný a nazývá se kvantové provázání (entanglement, propletení). Ze zřejmých důvodů se v historii jednalo o kontroverzní jev, proti kterému se ostře vymezila roku 1935 trojice Albert Einstein, Boris Podolski a Nathan Rosen v článku [1]. Jejich nesouhlas a argumenty jsou shrnuty v pojmu EPR paradox. Hovoří tam o nutné neúplnosti kvantové teorie a existenci neznámých tzv. skrytých proměnných. V opačném případě by se totiž informace přenášela rychleji než světlo, což je v přímém konfliktu s jedním ze základních axiomů (speciální teorie relativity). Jak se však později ukázalo, tak pro přenos informace s využitím kvantového provázání je nutné ji aplikovat v kombinaci s klasickou komunikací, která již je vázaná rychlostí světla (kvantová teleportace).

Jak se tedy formálně kvantově provázaný stav definuje. Pro jednoduchost uvažujme složené systémy 2 kvantových podsystémů (všechny definice lze jednoduše rozšířit). Mějme stav  $|\psi\rangle$ , náležící složenému prostoru  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . Existuje-li dvojice stavů  $|\psi_A\rangle \in \mathcal{H}_A$  a  $|\psi_B\rangle \in \mathcal{H}_B$  tak, že platí

$$|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle, \quad (2.3.1)$$

pak je stav  $|\psi\rangle$  nazýván separovatelný. Obdobně lze separabilitu definovat i pro smíšený stav

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \hat{\rho}_{A_i} \otimes \hat{\rho}_{B_i}, \quad (2.3.2)$$

kde stavy  $\hat{\rho}_{A_i}$ ,  $\hat{\rho}_{B_i}$  popisují stavy na příslušných podprostorech a  $0 \leq p_i \leq 1$ ,  $\sum_i p_i = 1$ . Stav, který není separovatelný, je kvantově provázaný. Příkladem kvantového provázání je rozpad nestabilní částice s celkovým spinem 0 na dvě částice se spinem  $\frac{1}{2}$ . Pro zachování celkového spinu je nutné, aby měly jednotlivé částice spin opačný. Buď spin 1. částice ozn.  $\uparrow$  a spin 2. částice  $\downarrow$  nebo opačně. Výsledný kvantový stav je tedy superpozicí právě této kombinace

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_A\rangle \otimes |\downarrow_B\rangle + |\downarrow_A\rangle \otimes |\uparrow_B\rangle). \quad (2.3.3)$$

Reprezentováním stavů v  $\mathbb{C}^2$  jako  $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  a  $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  je výše zmíněný popsán reprezentován vektorem  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Lze najít takové vektory  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ , aby platilo

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ \alpha\delta \\ \beta\gamma \\ \beta\delta \end{pmatrix} ? \quad (2.3.4)$$

Snadno se lze přesvědčit, že ne! Jak lze tedy nahlížet na jednotlivé podsystémy kvantově provázaného stavu? Jak bylo dříve představeno, tak na ně lze nahlížet

optikou redukovaného statistického operátoru  $\hat{\rho}_A$ ,

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|) = \frac{1}{2}(|\uparrow_A\rangle\langle\uparrow_A| + |\downarrow_A\rangle\langle\downarrow_A|) = \frac{1}{2}\hat{I}. \quad (2.3.5)$$

Jak lze ale pozorovat, tak v případě kvantově provázaného stavu není získána žádná informace o podsystému  $\mathcal{H}_A$ . Jedná se totiž o statistický operátor, který lze charakterizovat jako náhodnou směs. Tedy o stavu podsystému nemáme úplnou informaci, byť stav celkového systému je plně známý (čistý stav). Naopak redukovaný statistický operátor pro případ separabilního stavu

$$\hat{\rho}_A = |a\rangle\langle a| \text{Tr}_B(|b\rangle\langle b|) = |a\rangle\langle a|, \quad (2.3.6)$$

nám dává kompletní informaci o tomto podsystému. Tato skutečnost je využita pro kvantifikaci kvantového provázání. Resp. zkoumáme informaci obsaženou v podsystémech celkového systému. V klasické mechanice představuje vhodný nástroj entropie. Uvažováním statistického rozdělení  $W_m$  statistického operátoru (2.1.3), lze klasickou Shannonovu entropii  $S(W_m) = -\sum_m W_m \ln W_m$  převést na tvar

$$S = -\text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}), \quad (2.3.7)$$

který je znám jako von Neumannova entropie. Zkoumáme-li entropii, tedy míru znalosti podsystému, tak se dostáváme k jedné z měr kvantového provázání

$$E(\psi) = S(\hat{\rho}_A) = S(\hat{\rho}_B), \quad (2.3.8)$$

přičemž nezáleží na zvoleném podsystému, protože oba podsystémy obsahují stejnou množinu vlastních čísel. Aplikací na libovolný separabilní stav (kvantově neprovázaný) se lze přesvědčit, že von Neumannova entropie je 0. Naopak, von Neumannova entropie pro případ stavu zmíněné nestabilní částice (2.3.3) je rovna 1. O takových kvantových stavech hovoříme jako o maximálně kvantově provázaných. Doplněním zmíněného stavu o 3 další vzniká čtveřice známých Bellových stavů

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle), \quad (2.3.9)$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle), \quad (2.3.10)$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle), \quad (2.3.11)$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle). \quad (2.3.12)$$

Další mírou kvantového provázání, opět vycházející z podoby redukovaného statistického operátoru (2.3.5) a (2.3.6), je konkurence  $C(\hat{\rho})$ . Ta vyčísluje stopu kvadrátu

redukovaného operátoru, tedy vyjadřuje čistotu stavu reprezentovaného redukovaným statistickým operátorem (viz vlastnost (2.1.7)). Pro čistý stav je konkurence definována

$$C(|\psi\rangle) = \sqrt{2(1 - \text{Tr } \hat{\rho}_A^2)}. \quad (2.3.13)$$

Pro smíšený stav  $\hat{\rho}$  je konkurence definována jako minimalizace

$$C(\hat{\rho}) = \min_{|\psi_i\rangle} \sum_i p_i C(\psi_i) \quad (2.3.14)$$

přes možné dekompozice  $\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ . Mezi komplikovanější míry kvantového provázání patří např. kvantová destilace a formace, která dává do souvislosti počet kvantově provázaných párů potřebných pro vytvoření kopie čistého stavu a naopak [5, 6, 11]. Tím, že byl definován kompoziční stav, který může být separabilní nebo kvantově provázaný, vzniká potřeba definovat lokální a nelokální operace. Lokální operace je taková, která ovlivňuje jen daný podsystém. Je reprezentována unitárním operátorem  $\hat{U}_1 \otimes \hat{I}_2$ , kde  $\hat{U}_1$  je unitární operátor na 1. podsystému a  $\hat{I}_2$  je operátor identity na 2. podsystému (obdobně pro 2. podsystém). Důležitý závěr je, že aplikování lokálních operací na kvantově provázaný stav celkovou míru kvantového provázání systému nezmění.

## 2.4 Klasické korelace a Bellova nerovnost

Argument odvolávající se na nutnou neúplnost Kodaňské interpretace kvantové mechaniky je známý EPR paradox [1]. Ten tvrdí, že za předpokladu nemožné okamžité interakce vzdálených systémů (lokality) existují případy, kdy vzájemně nekompatibilní pozorovatelné jsou předem určeny (realismus). Zároveň je vyřčeno, že tedy musí existovat skryté proměnné, které nám nejsou známy, které reprezentují element reality za každým fyzikálním měřením. Analogií v klasické mechanice je fakt, že teplota kapaliny je určena již před samotným aktem měřením. V této analogii jako skryté proměnné figurují rychlosti molekul kapaliny.

Později Bell přednesl svou odpověď na EPR paradox [12]. V ní formuluje relaci, známou jako Bellovu nerovnost, která za předpokladu lokality a realismu musí vždy platit. Následně je představen kvantový systém, který prokazatelně tuto nerovnost porušuje. Mějme dva systémy, které spolu po omezený čas interagují a posléze jsou odděleny. Na každém z systému mějme jedno měření, jehož výsledkem je hodnota  $\pm 1$ . Obecně lze tvrdit, že výsledky těchto měření se řídí pravděpodobnostní distribuční funkcí ozn.  $E(\alpha, \beta)$ , přičemž  $\alpha$  a  $\beta$  jsou nastavení jednotlivých měření. Vzhledem k tomu, že oba měřené systémy spolu po omezený čas interagovaly, mohou být výsledky měření korelované. Je-li ale brán v potaz argument lokality, tak po oddělení systému nemohlo dojít k vytvoření dodatečných závislostí mezi systémy.

Měření jednotlivého systému je závislé pak už jen na nastavení daného systému nikoliv na nastavení systému druhého. Řekněme, že nějaká množina dat  $\lambda$ , která byla dostupná oběma systémům při vzájemné interakci, je jediný zdroj závislosti mezi těmito systémy, tedy

$$E_{AB}(\alpha, \beta) = \int E_A(\alpha, \lambda)E_B(\beta, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda, \quad (2.4.1)$$

kde  $\rho(\lambda)$  je distribuční funkce dat  $\lambda$  a  $E_A(\alpha, \lambda)$  a  $E_B(\beta, \lambda)$  jsou pravděpodobnostní rozdělení výsledků měření na systémech  $A$  a  $B$ . Bell ukázal, že pro tento vztah platí nerovnost

$$|E(\alpha, \beta) - E(\alpha, \beta') + E(\alpha', \beta') + E(\alpha', \beta)| \leq 2, \quad (2.4.2)$$

kde  $\alpha, \alpha'$  resp.  $\beta, \beta'$  jsou libovolná nastavení měření na systému  $A$  resp.  $B$ . Jelikož lze prokázat, a i experimentálně ověřit, existenci takových kvantových stavů, které tuto nerovnost porušují, tak z toho vyplývá nekompatibilita kvantové teorie s předpoklady lokality a realismu, tedy porušení platnosti Kodaňské interpretace.

Porušení Bellovy nerovnosti lze ukázat u kvantově provázaného stavu. Za měřitelnou veličinu systému  $A$  zvolme při nastavení  $\alpha$  pozorovatelnou  $\hat{Q}$  a při nastavení  $\alpha'$  pozorovatelnou  $\hat{R}$

$$\hat{Q} = \hat{\sigma}_z, \quad (2.4.3)$$

$$\hat{R} = \hat{\sigma}_x \quad (2.4.4)$$

a za měřitelnou veličinu systému  $B$  zvolme při nastavení  $\beta$  pozorovatelnou  $\hat{S}$  a při nastavení  $\beta'$  pozorovatelnou  $\hat{T}$

$$\hat{S} = \frac{-\hat{\sigma}_z - \hat{\sigma}_x}{\sqrt{2}}, \quad (2.4.5)$$

$$\hat{T} = \frac{\hat{\sigma}_z - \hat{\sigma}_x}{\sqrt{2}}, \quad (2.4.6)$$

kde  $\hat{\sigma}_i$  označuje  $i$ -tý Pauliho operátor. Sledováním středních hodnot korelací měřitelných veličin systému  $A$  a  $B$  v různých nastavení (viz (2.4.2)) se lze dopočítat hodnoty

$$\langle \hat{Q}\hat{S} + \hat{R}\hat{S} + \hat{R}\hat{T} - \hat{Q}\hat{T} \rangle = 2\sqrt{2}, \quad (2.4.7)$$

která převyšuje horní limit nastavený Bellovou nerovností.

Tímto byl představen teoretický úvod do problematiky kvantově provázaných stavů. Otázkou jejich realizace se budou zabývat následující kapitoly. Na závěr pouze zmíním, že definice kvantově provázaného stavu je dost obecná a nediktuje konkrétní stupně volnosti, ve kterých musí být systém provázán (možnost provázovat i ve vícero stupních volnosti [13]). Pro částice může být výhodné provázovat jejich spiny,



zatímco u fotonů se z pravidla využívají přístupy dva, a to kvantové provázání polarizací a nebo tzv. časových binů [14]. Časové biny představují čas příchodu fotonu. Rozpoznává se tu mezi dvěma stavy charakterizované brzkým popř. pozdějším příchodem fotonu. Oproti kvantovému provázání v polarizačních stupních volnosti tento přístup vyniká menší dekoherencí, ale za cenu komplikovanější interakce mezi fotony. Oproti tomu kvantové provázání v polarizaci trpí dekoherencí způsobenou depolarizací, ale zas umožňuje jednodušší interakci mezi fotony. V této práci se zabývám právě touto realizací kvantového provázání.

### 3 Parametrická sestupná konverze

Elektromagnetické pole šířící se prostředím v něm přirozeně vyvolává polarizaci  $\mathbf{P}$ . Tu lze chápat jako důsledek kombinace přeorientování vnitřních elementárních dipólů, vzájemným přesunutím iontů a vychýlení elektronů v elektronovém obalu vůči jádru (ve viditelné oblasti avšak pouze poslední z jmenovaných) v reakci na přítomné elektrické pole  $\mathbf{E}$ . V konvenční, lineární optice je závislost polarizačního vektoru na vnějším elektrickém poli vyjádřena lineárním vztahem

$$\mathbf{P}(t) = \varepsilon_0 \boldsymbol{\chi}^{(1)} \mathbf{E}(t), \quad (3.0.1)$$

kde  $\boldsymbol{\chi}^{(1)}$  je tensor lineární susceptibility (tensor odráží anizotropii prostředí) a  $\varepsilon_0$  je elektrická permitivita vakua. Pro vysoké intenzity přítomného elektromagnetického pole však lineární popis není dostačující a výše popsaný vztah se zobecní do tvaru mocninné řady

$$\mathbf{P}(t) = \varepsilon_0 \boldsymbol{\chi}^{(1)} \mathbf{E}(t) + \varepsilon_0 \boldsymbol{\chi}^{(2)} \mathbf{E}^2(t) + \dots, \quad (3.0.2)$$

kde  $\boldsymbol{\chi}^{(i)}$  představuje tensor elektrické susceptibility  $i$ -tého řádu. Vyšší mocniny vektorů elektrické intenzity zapříčiní, že elektromagnetické vlny různých frekvencí  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$  spolu mohou interagovat

$$\mathbf{P} = \dots + \varepsilon_0 \boldsymbol{\chi}^{(2)} \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 + \dots \quad (3.0.3)$$

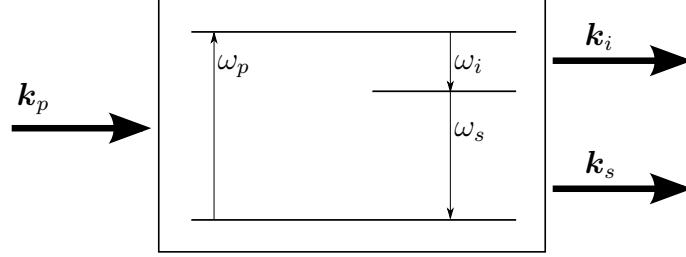
Uvažováním této interakce se lze dobrat mnoha zajímavých nelineárních jevů jako je generace 2. harmonické frekvence, optický Kerrův jev a nebo právě parametrická sestupná konverze neboli anglicky *spontaneous parametric down conversion* (SPDC) [15].

Zmíněný člen v (3.0.3) vede na nelineární jev známý jako generace součtových frekvencí. Jsou-li na vstupu nelineárního prostředí přítomná pole o frekvenci  $\omega_1$  a  $\omega_2$ , pak na výstupu bude, s určitou účinností, přítomné nové pole odpovídající frekvenci  $\omega_1 + \omega_2$ . Prohozením vstupu za výstupy (opačné vlnové vektory) docházíme k jevu

právě SPDC. Tedy za přítomnosti pole  $\omega_p$  na vstupu vznikají na výstupu pole  $\omega_s$  a  $\omega_i$  (i z anglického *idler*, obr. 2), pro která platí

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i. \quad (3.0.4)$$

Abychom tento jev plně vysvětlili, je třeba k němu přistupovat kvantově. Tedy



Obrázek 2: Schématické vyobrazení SPDC. Konverze probíhá při čerpání o frekvenci  $\omega_p$  a vlnovém vektoru  $\mathbf{k}_p$  na signálové pole o frekvenci  $\omega_s$  a vlnovém vektoru  $\mathbf{k}_s$  a jalové pole o frekvenci  $\omega_i$  a vlnovém vektoru  $\mathbf{k}_i$ .

sledovat rozpad čerpacího fotonu na foton signálový a jalový. Kvantový formalismus je uplatněn prostředky 2. kvantování a vývojem vakuového stavu  $|0\rangle$  pod interakčním hamiltoniánem [16]

$$\hat{H}_{INT} \approx \chi^{(2)} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz \hat{\mathbf{E}}_p^{(+)} \hat{\mathbf{E}}_s^{(-)} \hat{\mathbf{E}}_i^{(-)}, \quad (3.0.5)$$

kde  $\hat{\mathbf{E}}_{p,s,i} = \hat{\mathbf{E}}_{p,s,i}^{(+)} + \hat{\mathbf{E}}_{p,s,i}^{(-)}$  je operátor elektrické intenzity [17], kde indexy  $p, s, i$  postupně označují čerpací, signálové a jalové pole. Pro kolineární případ šíření všech vln a homogenní prostředí ( $\chi^{(2)} \neq \chi^{(2)}(\mathbf{r})$ ) má kvantový stav na výstupu tvar (podrobněji viz příloha A)

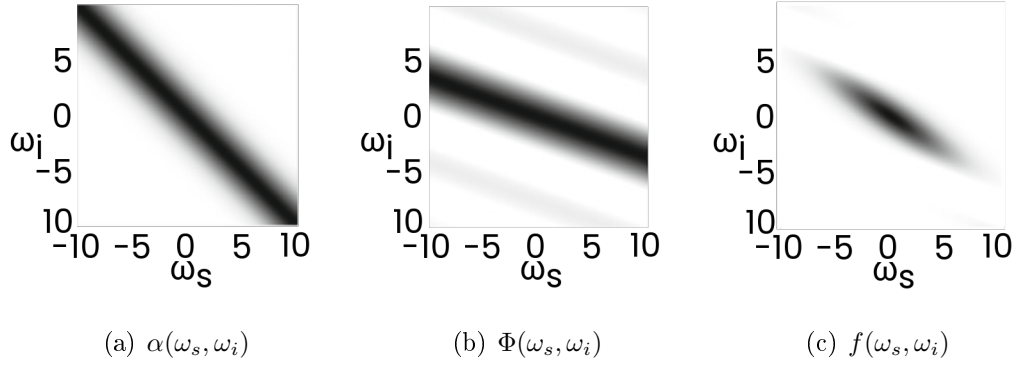
$$|\psi_{PDC}\rangle = konst. \chi_{eff}^{(2)} \iint d\omega_s d\omega_i \underbrace{\alpha(\omega_s + \omega_i) \Phi(\omega_s, \omega_i)}_{f(\omega_s, \omega_i)} \hat{a}_{\omega_s}^\dagger \hat{a}_{\omega_i}^\dagger |0\rangle, \quad (3.0.6)$$

kde  $\alpha(\omega)$  je spektrum čerpacího pole,  $\hat{a}_{\omega_s, i}^\dagger$  jsou kreační operátory příslušných módů  $s, i$  a  $\Phi(\omega_s, \omega_i)$  je synchronizační funkce (obr. 3)

$$\Phi(\omega_s, \omega_i) = L \operatorname{sinc} \left( \Delta k \frac{L}{2} \right), \quad (3.0.7)$$

kde  $L$  je délka krystalu a  $\Delta k = k_p - k_s - k_i$  je velikost fázového rozladění interagujících vln. Pro obecný nekolineární případ hovoříme o splnění zákona zachování hybnosti

$$\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i. \quad (3.0.8)$$

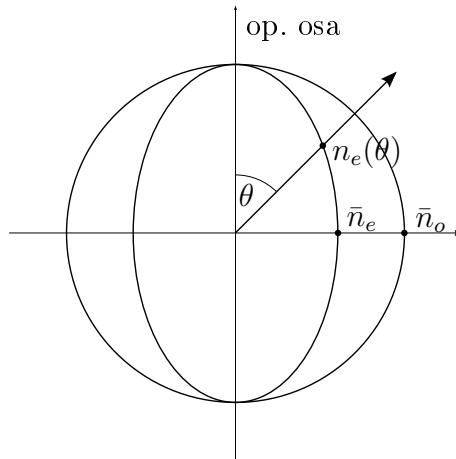


Obrázek 3: Vyobrazení funkcí  $\alpha(\omega_s + \omega_i)$ ,  $\Phi(\omega_s, \omega_i)$  a  $f(\omega_s, \omega_i)$  (3.0.6). Převzato z [16].

Kolineární přístup však v reálných optických isotropních krystalech není realizovatelný z pohledu splnění podmínky

$$\omega_p n(\omega_p) = \omega_s n(\omega_s) + \omega_i n(\omega_i) \quad (3.0.9)$$

spolu s (3.0.4). Řešením je využití anizotropie materiálu, konkrétně dvojlomu. V dvojlomných jednoosých krystalech lze totiž polarizaci rozdělit na tzv. ordinární (o) a extraordinární (e), která se v nich šíří s jiným vlnovým vektorem („vidí“ jiný index lomu, obr. 4). Uvažujeme-li tedy různé polarizace vstupních a výstupních vln, lze



Obrázek 4: Vyobrazení indexového elipsoidu pro dvojlomný kladný krystal.  $n_e$  značí extraordinární index lomu a  $n_o$  značí ordinární indexu lomu.

pomocí různých směrů šíření (vlnových vektorů) docílit různých indexů lomů a tak docílit splnění podmínek zákona zachování (3.0.4), (3.0.8). Typy rozdělení polarizací na vstup a výstup se dělí na tzv. **Typ I** a **Typ II** (tab. 2). Z formulí pro indexový

Tabulka 2: Rozepsané zákony zachování hybnosti v kladném, záporném krystalu pro SPDC typu I, typu II. Splnění synchronizační podmínky je docíleno vhodnou orientací interagujících vlnových vektorů, jelikož extraordinární index lomu se mění s úhlem šíření  $\theta$  (obr. 4).

	Kladný krystal ( $n_o > n_e$ )	Záporný krystal ( $n_o < n_e$ )
Typ I	$\omega_p n_o(\omega_p) = \omega_s n_e(\omega_s, \theta) + \omega_i n_e(\omega_i, \theta)$	$\omega_p n_e(\omega_p, \theta) = \omega_s n_o(\omega_s) + \omega_i n_o(\omega_i)$
Typ II	$\omega_p n_o(\omega_p) = \omega_s n_o(\omega_s) + \omega_i n_e(\omega_i, \theta)$	$\omega_p n_e(\omega_p, \theta) = \omega_s n_e(\omega_s, \theta) + \omega_i n_o(\omega_i)$

elipsoid lze získat [15] index lomu extraordinární složky polarizace vzhledem na uhu šíření  $\theta$

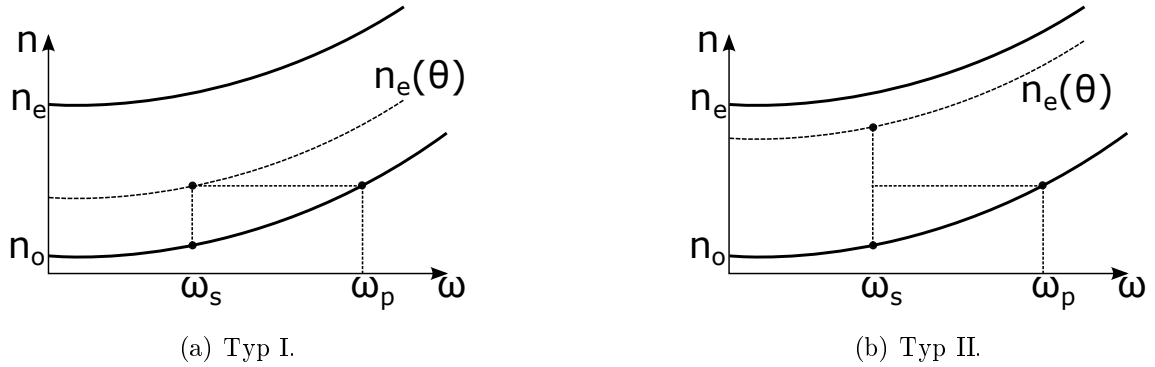
$$\frac{1}{n_e(\theta)^2} = \frac{\sin^2 \theta}{\bar{n}_e^2} + \frac{\cos^2 \theta}{\bar{n}_o^2}. \quad (3.0.10)$$

Pro speciální případ degenerované SPDC, tedy že  $\omega_s = \omega_i$ , nabývají rovnice v kladném krystalu podoby (postupně typ I a typ II)

$$n_o(\omega_p) = n_e\left(\frac{\omega_p}{2}, \theta\right), \quad (3.0.11)$$

$$n_o(\omega_p) = \frac{1}{2}\left(n_o\left(\frac{\omega_p}{2}\right) + n_e\left(\frac{\omega_p}{2}, \theta\right)\right), \quad (3.0.12)$$

což je i graficky znázorněné na obr. 5. Využití úhlově laděných sestav, které byly



Obrázek 5: Ukázky splnění synchronizační podmínky úhlovým laděním u degenerované SPDC  $\omega_s = \omega_i = \frac{\omega_p}{2}$  a) typu I a b) typu II.

výše představeny, však není hned z několika důvodů optimální. Prvním a zřejmějším odůvodněním je složitost ladění a nižší účinnost. Oproti dříve idealizovanému kolineárnímu přístupu, kdy veškeré generované páry se nacházely na jedné přímce, tak při nekolineárním uspořádání dochází k jejich širšímu rozprostření do prostoru. To vytváří značně složitou, až nereálnou, situaci pro jejich směřování, detekci a následné zžitkování v experimentu. Dalším důvodem je, že efektivní koeficient

$$\chi_{eff}^{(2)} = \chi^{(2)} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_t \mathbf{e}_s, \quad (3.0.13)$$

kde  $\mathbf{e}_p$ ,  $\mathbf{e}_t$ ,  $\mathbf{e}_s$  postupně označují polarizace čerpacího, signálového a jalového pole, vyskytující se v rovnici (3.0.6) nemůže většinou v tomto uspořádání dosáhnout největší možné hodnoty a tedy dosáhnout efektivnějších nelineárních jevů<sup>2</sup>. Pro efektivnější nelineární jevy a vyšší účinnosti je tedy výhodné se poohlížet po jiných způsobech splnění podmínek než úhlově ladění. Jako vhodná metoda se ukázalo periodicky uspořádat nelineární krystaly za sebe, přičemž v každé doméně míří vektor rozladění opačným směrem. Výsledkem je, že celkové rozladění na výstupu krystalu se blíží nule. Přístup jinak znám jako kvazifázový synchronismus.

### 3.1 Kvazifázové přizpůsobení

Při průchodu čerpacího pole nelineárním krystalem dochází ke generaci pole signálového a jalového v celém jeho objemu. Při nedodržení fázové podmínky, tedy  $\Delta k \neq 0$ , existuje vzdálenost šíření  $L_c$ , ve které již vygenerované signálové a jalové pole je v protifázi s čerpacím polem. Tato vzdálenost se nazývá koherenční vzdálenost

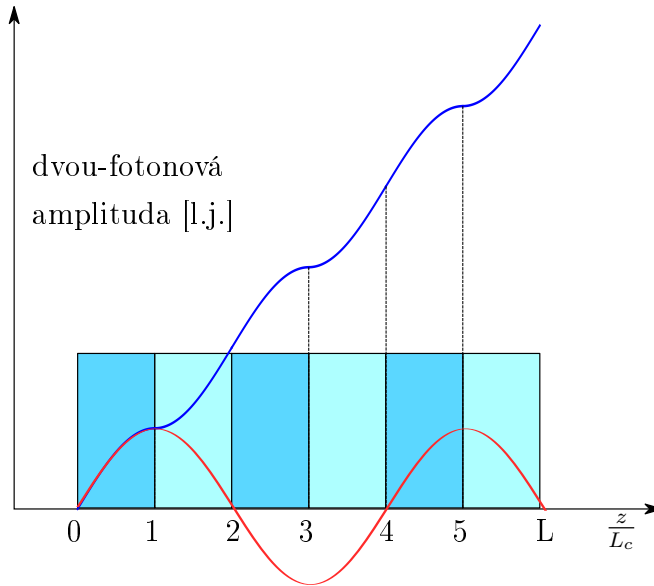
$$L_c = \frac{\pi}{\Delta k}. \quad (3.1.1)$$

Dalším šířením v krystalu tak dochází k destruktivnímu skládání polí, které má za následek vynulování celkové dvoufotonové amplitudy na vzdálenosti  $2L_c$  (jak lze vyčíst z rovnice (3.0.6)). Energie se tak při šíření krystalem přelévá mezi čerpacím a generovaným polem s periodou  $4L_c$  a nedochází tak k efektivní SPDC. Řešení představuje takový materiál, který by s periodou  $2L_c$  obracel znaménko hodnoty efektivní susceptibility 2. řádu  $\chi_{eff}^{(2)}$ , která vybudované fázové zpoždění doplní o zpoždění  $\pi$ . Generované a čerpací pole se tak stávají soufázovými a dochází k efektivnímu budování dvoufotonové amplitudy (obr. 6). Periodickou změnu znaménka  $\chi_{eff}^{(2)}$  lze docílit periodickým pólováním feroelektrických materiálů (LiNbO<sub>3</sub>, KTiOPO<sub>4</sub> (KTP), aj.). Feroelektrické látky se vyznačují přítomností spontánní polarizace (polarizace bez přítomnosti elektrického pole). Jelikož susceptibilita druhého řádu těchto materiálů je úměrná právě této polarizaci [18], lze jejím překlápěním (vlivem silného elektrického pole) docílit změny znaménka  $\chi_{eff}^{(2)}$  (obr. 7). Označíme-li periodu pólování  $\Lambda$  pak lze fázové rozladění jeho volbou upravovat

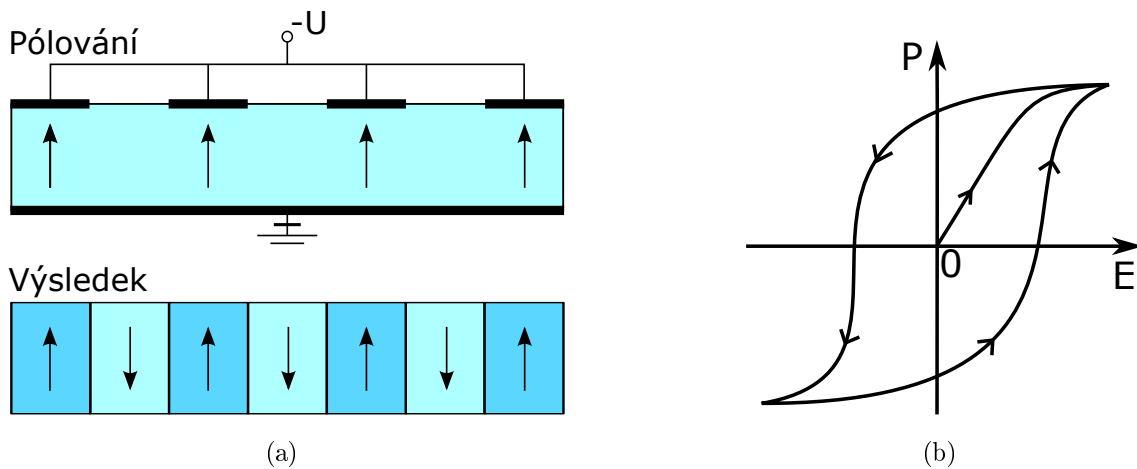
$$\Delta k = k_p - k_s - k_i - \frac{2\pi}{\Lambda}, \quad (3.1.2)$$

což pro případ  $\Lambda = 2L_c$  zajistí nulové fázové rozladění. Tímto byl představen alternativní způsob realizace SPDC. Oproti úhlově laděnému případu lze tímto způsobem docílit vyšší efektivní nelinearity, jelikož existuje víc volností v orientaci krystalu.

<sup>2</sup>Pro dosažení maximálního stupně nelinearity je většinou nutné uplatnit SPDC typu 0, při níž polarizace všech interagujících vln jsou stejné (periodicky pólované krystaly).



Obrázek 6: Vizualizace budování dvou-fotonové amplitudy parametrické sestupné konverze při šíření materiálem, který s periodou  $2L_c$  mění znamínko  $\chi_{eff}^{(2)}$  (modrá křivka), v porovnání s vývojem dvou-fotonové amplitudy bez přítomnosti zmíněné periodizace (červená křivka).



Obrázek 7: (a) Vizualizace procesu periodického pólování. (b) Vliv vnějšího elektrického pole  $E$  na hodnotu spontánní polarizace  $P$  ferroelektrického materiálu.

Ta může být zvolená čistě na základě největších elementů tensoru susceptibility 2. řádu. Druhým, ještě znatelnějším, benefitem je kolineární geometrie generovaných fotonů. Ta značně ulehčuje jejich směřování a následnou manipulaci.

Z rovnice (3.1.2) tedy plyne, že zvolením vhodné periody pólování lze docílit splnění fázové podmínky téměř pro jakékoliv kolineárně se šířící interagující vlny.

Zafixováním periody však neztrácíme veškeré stupně volnosti jak dále interakci ovlivnit. Další možnost, jak krystal lehce přeladit pro jinou třívlnou interakci představuje změna teploty krystalu. Vlivem thermooptického jevu se totiž index lomu mění s teplotou a tyto vztahy lze získat experimentálně. Druhým méně významným jevem spojený s teplotou je prodloužení periody pólování  $\Lambda$ . Tedy platí

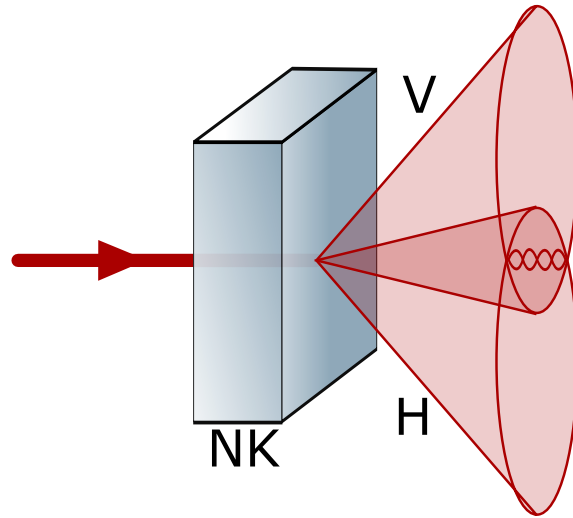
$$\Delta k = \frac{\omega_p}{c} n_p(\omega_p, T) - \frac{\omega_s}{c} n_s(\omega_s, T) - \frac{\omega_i}{c} n_i(\omega_i, T) - \frac{2\pi}{\Lambda(T)}. \quad (3.1.3)$$

Z tvaru Sellmeierových rovnic, thermooptické disperze a termální expanze krystalu lze pak spočítat závislost generovaných vlnových délek z SPDC na teplotě.

## 4 Generace kvantově provázaných stavů

### 4.1 Generace SPDC II. typu v úhlově laděných krystalech

Parametrická sestupná konverze 2. typu generuje z čerpacího fotonu horizontální nebo vertikální polarizace 1 foton polarizace vertikální a 1 foton polarizace horizontální. Ty pro zachování hybnosti musí opouštět krystal pod fixními úhly, přičemž, díky symetrii uspořádání, jsou polohy fotonů centrálně symetrické vzhledem k čerpacímu svazku. Při vhodně zvoleném krystalu je pak možné docílit překrytí jednotlivých výstupních kuželů (obr. 8). V ideálním případě nerozlišitelných fotonů vzniká

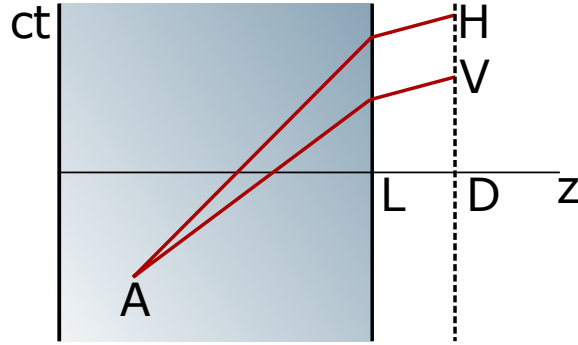


Obrázek 8: Vyobrazení SPDC typu II v nelineárním krystalu NL. Generované fotony vertikální (V) resp. horizontální (H) opouštějí krystal na površích kuželů. V místě překryvu vzniká neurčitost jakému polarizačnímu módu foton náleží a dochází zde ke vzniku kvantově provázaného stavu.

neurčitost polarizačního stavu fotonu v bodech překryvu a v tomto místě vzniká polarizačně kvantově provázaný stav  $|\Psi^+\rangle$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|VH\rangle + |HV\rangle), \quad (4.1.1)$$

který je jedním z Bellových stavů (2.3.12). Pro získání maximálního možného stupně provázání je však nutné zajistit časovou a prostorovou nerozlišitelnost  $|V\rangle$  a  $|H\rangle$  fotonu. V opačném případě by totiž pouze z časového rozdílu mezi detekcí signálového a jalového fotonu na případném detektoru bylo zřejmé, kterému polarizačnímu módu foton náleží (tj. H foton je vždy naměřen před V fotonem). Fotony již na výstupu z krystalu trpí vzájemným podélným časovým zpožděním způsobeným anizotropií krystalu (obr. 9), která, jak bylo diskutováno dříve, je při SPDC v klasických nelineárních krystalech vždy přítomná. V závislosti na místě generace fotonového páru v krystalu, časový rozdíl pak nabývá hodnoty od 0 do  $D = \frac{(n_H - n_V)L}{c}$ , kde  $n_H$  resp.  $n_V$  značí index lomu krystalu odpovídající horizontální resp. vertikální polarizaci. Pro kompenzaci časového zpoždění mezi fotony se do cesty jalovému a signálovému

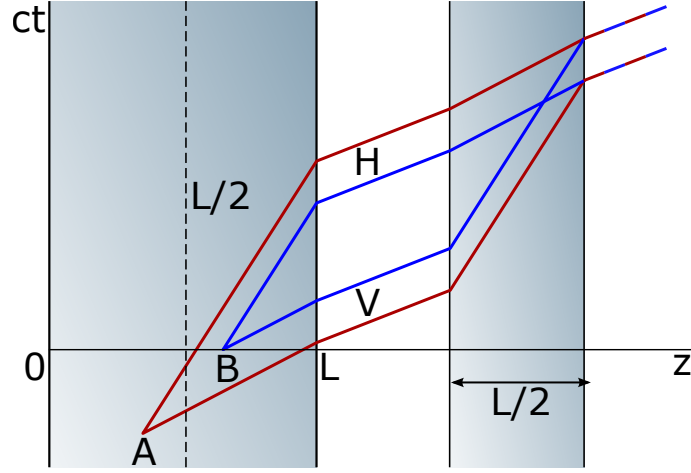


Obrázek 9: Časoprostorový vývoj fotonového páru (H a V) generovaného degenerovanou spontánní parametrickou sestupnou konverzí v události A. Vlivem anizotropního prostředí délky  $L$  dochází k časovému zpoždění na výstupu z krystalu. Ve vzdálenosti  $D$  dochází k detekci.

svazku zařazuje ještě kompenzační krystal (kompenzátor). Ten je zhotovený ze stejného materiálu, jako je krystal generující, avšak vůči němu otočený o  $90^\circ$  (což odpovídá otočení polarizace vstupních fotonů půlvlnnou destičkou). Optimální šířka kompenzátoru ale není zcela zjevná. Jak již bylo zmíněno, tak fotony nabývají v závislosti na místě generace zpoždění od 0 do  $D$ . Krystal tak může nanejvýš kompenzovat fotonový pár náležící 1 generujícímu bodu. Důležité je si ale uvědomit, že tato generace je kontinuální proces, při kterém je na výstupu z krystalu přítomno mnoho vygenerovaných fotonů náležících různým generujícím událostem. Například mějme generující událost  $B = (0, \frac{L}{2} - x)$ , kde  $x \in \langle 0, \frac{L}{2} \rangle$ . Jednoduchým výpočtem



se lze přesvědčit, že je-li zvolen kompenzátor šířky  $\frac{L}{2}$ , tak existuje generující událost  $A = (-cT, \frac{L}{2} - x)$ , kdy  $T = \left(\frac{1}{n_H} + \frac{1}{n_V}\right) \frac{c}{x}$ , při které si s generovaným párem náležící události  $B$  prohodí horizontální, resp. vertikální fotony a eliminuje mezi nimi jakýkoliv časový rozdíl (obr. 10). Rigorózněji, z hlediska kvantové mechaniky,



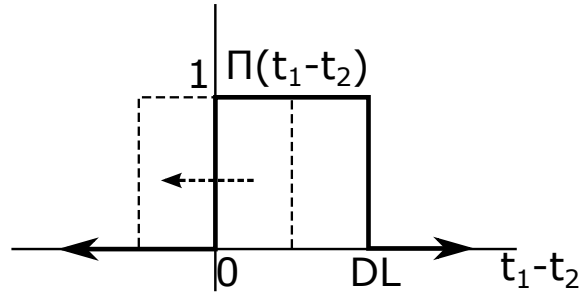
Obrázek 10: Časoprostorový vývoj fotonových párů generovaných v bodech  $A$ ,  $B$  ve vzdálenosti  $\pm x$  od středu krystalu délky  $L$ , ale v různých časech. S využitím kompenzačního krystalu délky  $L/2$ , ortogonálně orientovaným vůči krystalu generujícímu, dochází ke kompenzaci časových zpoždění a k časovému překryvu fotonů náležících různým generujícím událostem.

lze nerozlišitelnost formulovat jako identičnost vlnových funkcí, konkrétně v tomto případě, invariantnost dvou-fotonové vlnové funkce  $\psi(t_V, t_H)$  [19, 20]

$$\psi(t_H, t_V) = A_0 e^{-\left(\frac{t_H + t_V}{\tau_p}\right)^2} \Pi(t_H - t_V) e^{-i\Omega_s t_H} e^{-i\Omega_i t_V}, \quad (4.1.2)$$

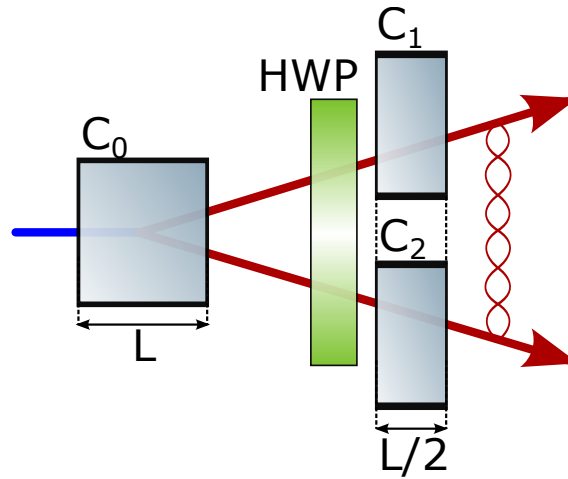
$$\Pi(t_H - t_V) = \begin{cases} 1, & \text{pro } 0 \leq t_H - t_V \leq DL \\ 0, & \text{pro ostatní} \end{cases},$$

vzhledem k záměně  $t_H$ ,  $t_V$ , což jsou časy, kdy fotony opustily krystal (rozdíl podílu vzdálenosti a rychlosti světla a času detekce).  $\tau_p$  je koherenční doba čerpacího svazku,  $\Omega_s$  je centrální frekvence signálového svazku a  $\Omega_i$  je centrální frekvence jalového svazku. Okamžitě lze vydedukovat, že kvůli asymetrii funkce  $\Pi(t_H - t_V)$  je i celková funkce  $\psi(t_H, t_V)$  asymetrická a tedy i výsledné fotony jsou prostorově a časově rozlišitelné. Snadno se lze ale přesvědčit, že posunutím funkce  $\Pi$  o  $\frac{DL}{2}$  lze docílit tížené symetrie (obr. 11). Posunutí lze docílit vložení kompenzátoru právě šířky  $\frac{L}{2}$ . Tím jsme vytvořili generátor kvantově provázaných párů využívající degenerovanou



Obrázek 11: Funkce  $\Pi(t_1 - t_2)$  definovaná v (4.1.2) se zvýrazněným posunem o  $\frac{DL}{2}$ , kterým lze docílit její symetrie.

spontánní parametrickou konverzí typu  $\text{II}^3$  (obr. 12) [21].



Obrázek 12: Schématicky vyobrazené uspořádání experimentální sestavy pro generaci kvantově provázaných párů pomocí degenerované spontánní parametrické konverze 2. typu. Generace probíhá ve vhodně zvoleném nelineárním krystalu  $C_0$  délky  $L$ . Fáze generovaných fotonů jsou posléze kompenzovány kompenzačními krystaly  $C_1, C_2$  stejného materiálu jako  $C_0$ , ale poloviční délky. Před vstupem fotonu do kompenzačního krystalu je ještě otočena jeho polarizace o  $90^\circ$  pomocí půlvlnné destičky  $HWP$  (z angl. *half wave plate*).

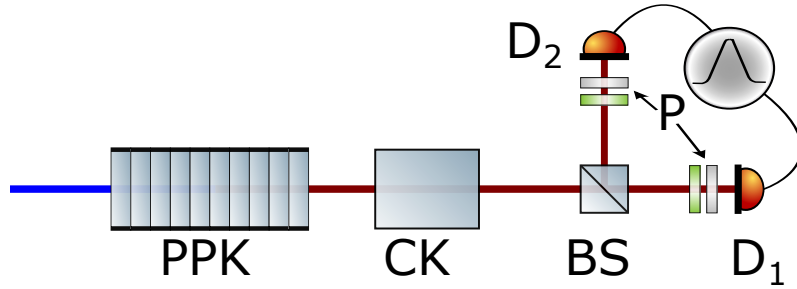
<sup>3</sup>Správně by bylo třeba započíst i vliv příčného rozejití fotonů  $L \tan \rho$ , kde  $\rho$  je úhel mezi generovanými fotony. Tento vliv je ale třeba brát v potaz pouze u velmi dlouhých generujících krystalů.

## 4.2 Generace SPDC typu II v PP krystalech

Podobně lze pomocí SPDC typu II kvantově provázané páry generovat i v periodicky pólovaných (PP) krystalech. Na rozdíl od předchozího příkladu lze tímto způsobem docílit kolineární generace fotonových párů, což značně usnadňuje s nimi spojenou případnou manipulaci. Sestava však nutně musí být odlišná od předchozí zmiňované. Fotony je totiž třeba před samotnou detekcí ještě rozdělit do dvou větví, kde budou detekovány nebo jiným způsobem využity. Toho lze docílit vložním vyváženého děliče svazku (poměr odrazivosti a propustnosti je 50 % ku 50 %) [22, 23]. Vygenerované fotony, který sdílí tentýž prostorový mód, mají pak stejnou pravděpodobnost, že se na děliči odrazí (R) nebo jim projdou (T)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_R + |H\rangle_T) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|V\rangle_R + |V\rangle_T). \quad (4.2.1)$$

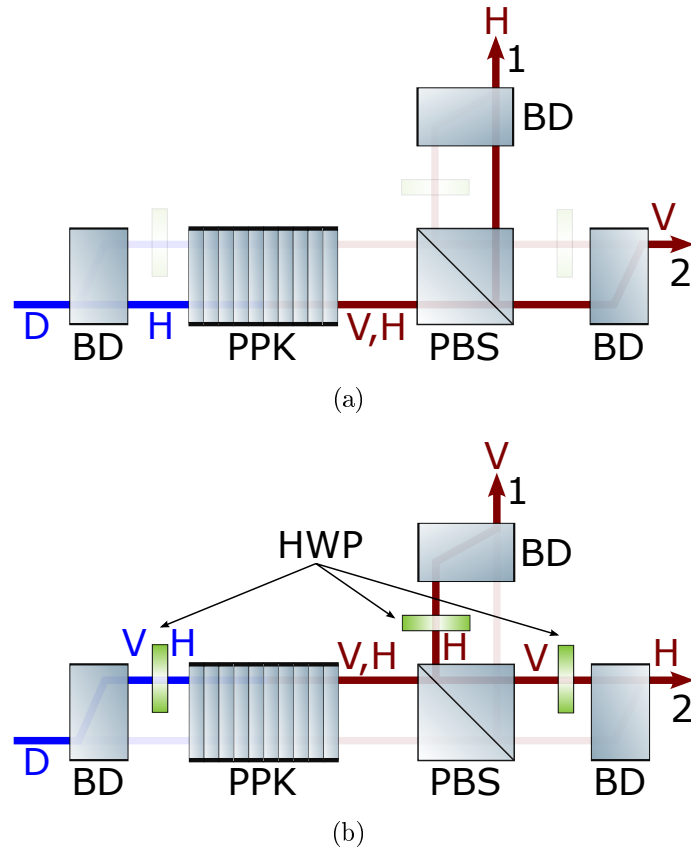
Ignorováním fotonů, které nespádají do zvoleného koincidenčního okna, tedy nedošlo k rozdělení fotonů na děliči, je opět docíleno kvantově provázaného stavu (4.1.1) [24, 25] (obr. 13).



Obrázek 13: Schéma generátoru kvantově provázaných párů fotonů prostřednictvím SPDC II. typu v periodicky pólovaném krystalu (PPK). Ke kompenzaci časového zpoždění slouží kompenzační krystal (CK). Posléze jsou fotony vedeny na dělič svazku (BS). Jednotlivým fotonům lze pak, pro detekční a vyhodnocovací účely, upravit polarizaci (P). Vyhodnocovány jsou pouze ty fotony, které dorazily na detektory  $D_1$  a  $D_2$  ve zvoleném koincidenčním okně.

### 4.2.1 Generace s dvojím čerpáním

Dalším způsobem, jak využít PP krystal pro generaci kvantově provázaných párů, je využití dvojího čerpání, při němž je do krystalu čerpací svazek naveden hned dvakrát. Výhodou tohoto uspořádání je, kromě zjevného zvýšení účinnosti, také eliminace potřeby kompenzace časového zpoždění. To je provedeno vhodným zavedením půlvlnných destiček do cesty jednomu z čerpacích svazků. Příkladem může



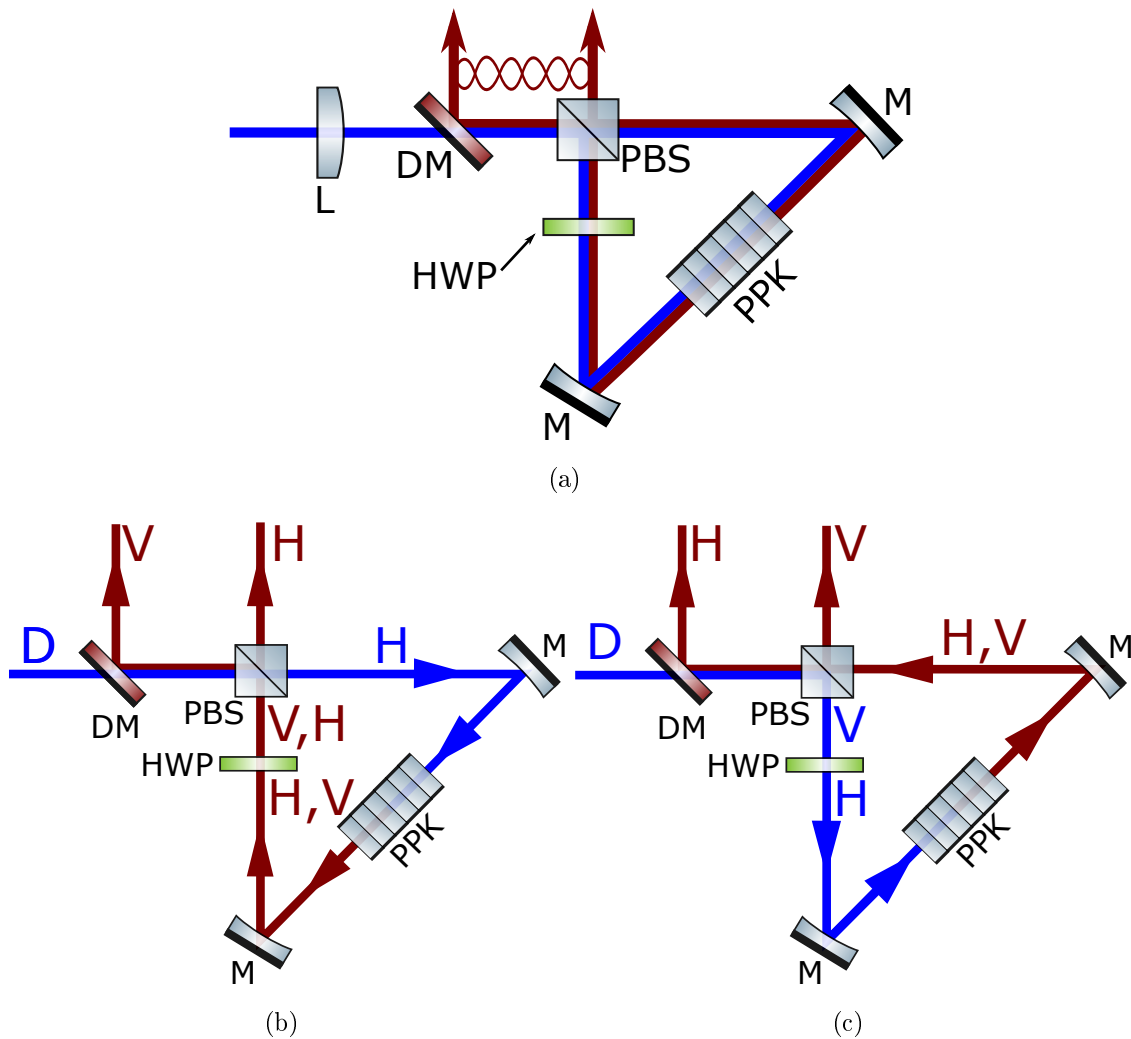
Obrázek 14: Schéma generátoru kvantově provázaných páru s dvojím čerpáním se zvýrazněným a popsaným (a) prvním čerpacím svazkem, (b) druhým čerpacím svazkem. Písmeny D, V a H jsou popsány postupně diagonální (45°), vertikální a horizontální polarizace. BD (z angl. *beam displacer*) je polarizační rozdělovač svazku, PPK je periodicky pólovaný krystal, PBS (z angl. *polarizing beamsplitter*) je polarizační dělič svazku a HWP je půlvlnná destička.

být sestava [26] vyobrazená na obr. 14. Zde rozdělením čerpacího svazku diagonální polarizace  $|D\rangle = \frac{1}{2}(|H\rangle + |V\rangle)$  jsou získány dva čerpací svazky. Důležité je, že fotony přítomné na výstupech 1 a 2 vždy náleží fotonu stejné původní polarizace<sup>4</sup>, tedy horizontální a vertikální. Byť tedy na výstupech 1 a 2 může docházet k časovému zpoždění detekce jednotlivých fotonů, tak z z něj nelze vydedukovat polarizační stav fotonu. Opět je tedy získán kvantově provázaný stav (4.1.1).

#### 4.2.2 Generátor Sagnacova typu

Elegantní implementací sestavy s dvojitým čerpáním jsou sestavy Sagnacovského typu [26, 27, 28]. Zde jsou jednotlivé čerpací svazky získány zprvu rozdělením původně diagonálně polarizovaného čerpacího svazku na polarizačním děliči a následným překlopením polarizace půlvlnnou destičkou v jedné z vzniklých větví. Větev, do které je destička umístěna, se odvíjí od typu polarizace čerpání, na kterou je krystal laděný. Svazky v obou větvích jsou vzájemně zrcadly usměrněny, čímž vzniká Sagnacův interferometr. Vložení PPK do cesty oběma svazkům je docíleno oboustranného čerpání (obr. 15). Předpokládejme dělič svazku, kterým prochází horizontálně polarizované fotony a odráží se vertikálně polarizované fotony. Zároveň předpokládejme PPK laděný na horizontální čerpání. Připomenou, že na vstupu je přítomen diagonálně polarizovaný foton  $|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , který má tedy stejnou pravděpodobnost jak na průchod, tak na odraz. Projde-li foton děličem svazku, a tedy dál pokračuje jako foton horizontálně polarizovaný, tak je na zrcátku odražen a směřován do krystalu (obr. 15(b)). V něm je tímto generován fotonový pár polarizace V a H. Oba fotony tak následně pokračují na zrcátko, na němž jsou odraženy, a prochází půlvlnnou destičkou. Jelikož generované fotony náleží stejné události, a jsou tak jak prostorově, tak časově nerozlišitelné, tak prohození jejich polarizace s sebou nenese žádnou informaci. Fotony se tak vrací zpět na polarizační dělič svazku, kde opět horizontální polarizace prochází a vertikální se odráží. Odražený foton se šíří proti směru čerpacího svazku, kde je odkloněn dichroickým zrcátkem. Na výstupu je tak přítomen stav  $|VH\rangle$ . Pozorujeme-li druhou větev Sagnacova interferometru (obr. 15(c)), tak zde vertikálně polarizovaný foton nejdříve prochází půlvlnnou destičkou, čímž se stává horizontálně polarizovaným (to je z důvodu zajištění vhodné čerpací polarizace). Opět je zrcátkem usměrněn do krystalu, kde generuje fotonový pár. Ten je druhým zrcátkem usměrněn na polarizační dělič svazku ven z interferometru. Na něm se odráží vertikální polarizace a prochází horizontální, která se posléze odklání na dichroickém zrcátku. Na výstupu je tak přítomen fotonový pár ve stavu  $|HV\rangle$ . Celkovým výstupem, po zkombinování obou ramen, je Bellův stav  $|\Psi^+\rangle$  viz (4.1.1). Jelikož v takto navržené sestavě dochází ke sdílení drah mezi čerpacím a generova-

<sup>4</sup>Zde původní polarizací se myslí polarizace po výstupu z PP krystalu.

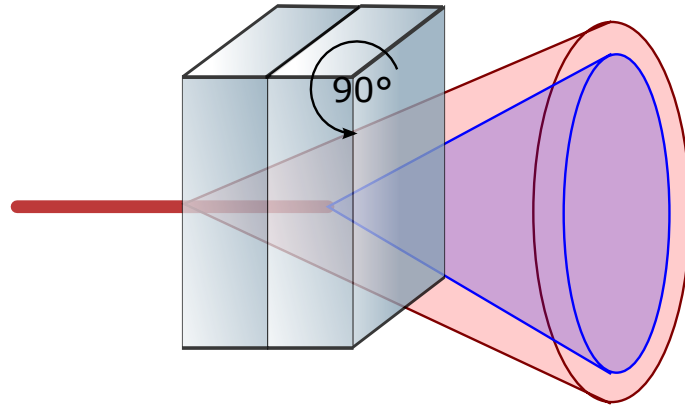


Obrázek 15: (a) Schéma generátoru kvantově provázaných stavů Sagnacovského typu. Na vstupu je zprvu diagonálně ( $D$ ) polarizovaný čerpací svazek fokusován čočkou  $L$ . Ten je polarizačním děličem svazku ( $PBS$ ) rozdělen na (b) horizontální ( $H$ ) větev a (c) vertikální ( $V$ ) větev. V jednotlivých větvích jsou pak prostředkem SPDC v periodicky pólovaném krystalu ( $PPK$ ) generovány fotonové páry. Vhodně vloženou půlvlnnou destičkou ( $HWP$ ) a odkloněním generovaných fotonů na dichroickém zrcátku ( $DM$ ) je vygenerován kvantově provázaný stav.

ným svazkem, tak i veškeré optické komponenty tvořící Sagnacův interferometr musí být zhotoveny, aby fungovaly na těchto dvou vlnových délkách. Konkrétně se jedná o polarizační dělič svazku,  $2\times$  zrcátko (je třeba zajistit vysokou odrazivost) a půlvlnnou destičku. Také je nutné diskutovat prostorovou a časovou nerozlišitelnost mezi výstupy z čerpacích ramen (obr. 15(b), 15(c)). Tě je docíleno polohováním PPK v interferometru. Nenachází-li se v jeho přesném středu, pak z pozorování doby příchodů fotonů na výstupy lze okamžitě vydedukovat, o jaký stav se jedná. Příkladem může být tato sestava [27, 29].

### 4.3 Generace SPDC I. typu

Jak již bylo řečeno, parametrická sestupná konverze umožňuje generaci fotonového páru vícero způsoby. Jeden, již v kontextu kvantově provázaných stavů rozebraný, generuje fotonový pár vzájemně ortogonálních polarizací (opět označíme V a H). Jiný způsob generace však umožňuje také SPDC typu I, která generuje dva fotony stejné polarizace, které jsou ortogonální vůči polarizaci čerpání. V tomto uspořádání je však nutné využít dva vzájemně pootočené totožné krystaly, které jsou laděné na SPDC typu I pomocí polarizace čerpání, řekněme horizontální. Krystaly jsou vzájemně pootočené o  $90^\circ$ , přičemž čerpací svazek je nastaven na diagonální polarizaci. Při průchodu krystaly čerpací foton  $|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$  s totožnou pravděpodobností generuje fotonový pár  $|H\rangle \rightarrow |VV\rangle$  v prvním krystalu jako, vlivem pootočení, generuje fotonový pár  $|V\rangle \rightarrow |HH\rangle$  v druhém krystalu (obr. 16). Celkově lze tedy

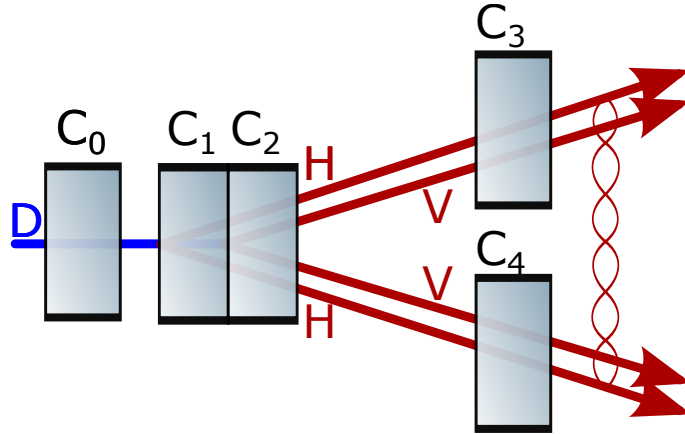


Obrázek 16: Vyobrazení SPDC typu I pro účely generace kvantově provázaného stavu. Její uplatnění dochází ve dvou vůči sobě ortogonálně orientovaných nelineárních krystalech. V nich dochází k SPDC typu I se stejnou pravděpodobností (vlivem diagonálně polarizovaného čerpání). Fotonové páry vystupují ve dvou do sebe vnořených kuželech.

výstup z tohoto generátoru popsat jako Bellův stav  $|\Phi^+\rangle$ ,

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|VV\rangle + |HH\rangle). \quad (4.3.1)$$

Toto uspořádání lze využít jak u úhlově laděných sestav [30, 31] tak u sestav s PPK [32, 33]. U SPDC II typu byla časová i prostorová nerozlišitelnost řešena vhodně zvoleným kompenzátozem, který fotony náležící dřívější generující události pomohl „dohnat“ fotony náležící pozdější generující události. Kompenzace tohoto typu však není vhodná pro SPDC typu I. Zde je naopak žádané dodržet časové rozestupy mezi H a V fotonovými páry, tudíž eliminovat možné promíchání těchto polarizací při detekci. K tomu dochází při šíření fotonového páru, generovaného v prvním krystalu, krystalem druhým. Důležité je, že smazání tohoto časového rozdílu je snahou docílit pro všechny možné výstupní směry fotonů z krystalu (nenulová spektrální šířka čerpacího svazku). Toho je docíleno dvojí sadou kompenzačních krystalů. První sadu tvoří jeden kompenzační krystal, který je předřazen generujícímu krystalu, zatímco druhou sadu tvoří dvojice kompenzačních krystalů, každý z nich je zařazen za generující krystal [34, 35] (obr. 17). Tímto dochází k efektivnímu potlačení dekoherenčních vlivů a vzniku kvantově provázaného stavu.



Obrázek 17: Schématicky vyobrazené uspořádání experimentální sestavy pro generaci kvantově provázaného stavu pomocí SPDC I. typu. Generace probíhá ve dvojici zkřížených stejných nelineárních krystalů ( $C_1$ ,  $C_2$ ). Těm je předřazen kompenzační krystal  $C_0$  a zařazen kompenzační krystal  $C_3$ ,  $C_4$ , které kompenzují dekoherenční vlivy. Na vstupu je přítomný diagonálně polarizovaný čerpací svazek (D), které generuje v prvním krystalu horizontálně polarizované páry (H) a v druhém krystalu vertikálně polarizované páry (V).

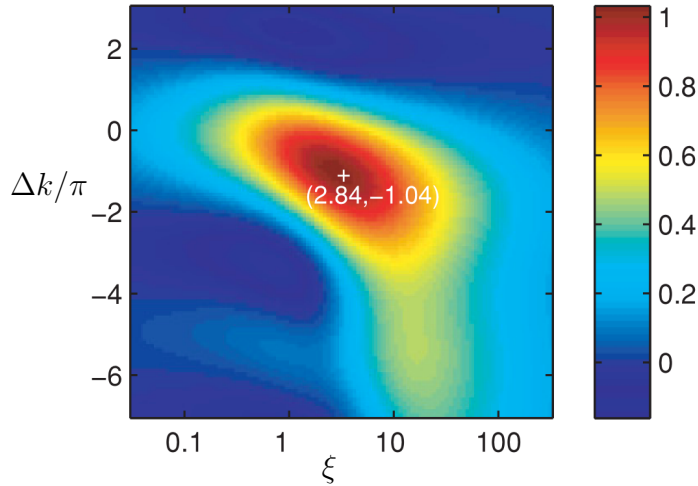


## 4.4 Optimalizace účinnosti SPDC v PPK

Pomineme-li justáž sestavy, tak jako hlavní parametry ovlivňující výslednou účinnost SPDC jsou (i) samotný čerpací svazek a (ii) teplota krystalu. Za čerpací svazek je považován svazek Gaussovského profilu. Ten je charakterizován polohou a šířkou krčku tohoto svazku. Je-li jako poloha krčku uvažován střed krystalu, tak pro optimální generaci fotonových párů v krystalu se jako optimální šířka krčku jeví [36]

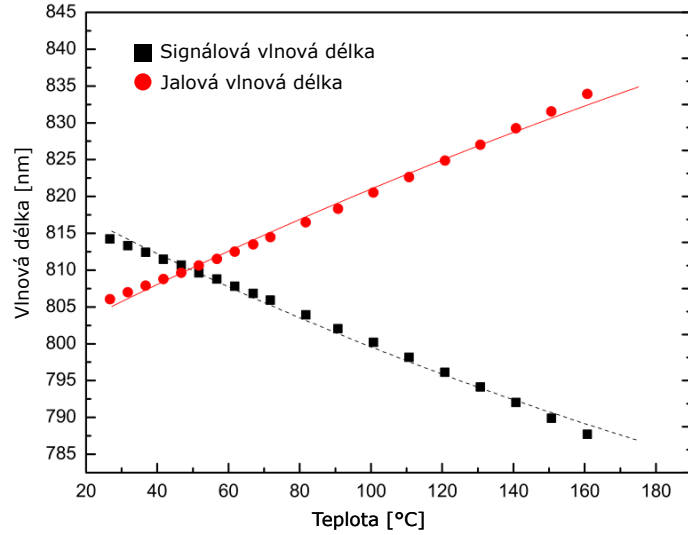
$$w = \sqrt{\frac{L}{k\xi}}, \quad (4.4.1)$$

kde  $L$  je délka krystalu,  $k$  je vlnové číslo svazku,  $\xi \approx 2.84$  je fokální parametr a  $w$  je právě velikost krčku. Tuto hodnotu je v ideálním případě třeba optimalizovat pro všechny 3 interagující vlny. Hodnota  $\xi \approx 2.84$  byla spočtena i při uvažování celkového rozladění vln  $\Delta k$ , viz (3.1.2), přičemž neoptimálnější hodnota fázového rozladění vychází  $\Delta k \approx -1.04\pi$  (obr. 18). Zajímavé, že tato hodnota se liší od očekávané hodnoty  $\Delta k \approx 0$ , se kterou bylo počítáno v rámci rovinných vln. Na hodnotu  $\Delta k$



Obrázek 18: Účinnost SPDC v PP krystalu fázového rozladění  $\Delta k$  a při čerpacím Gaussovském svazku s fokálním parametrem  $\xi$  (rovnice (4.4.1)) [36].

má vliv teplota a to prostřednictvím změny indexu lomu krystalu a změny periody pólování. Jak se experimentálně a teoreticky ukazuje [27], tak s malou změnou čerpací frekvence přichází velká teplotní korekce pro zajištění degenerované SPDC generace (obráceně na to lze také nahlížet jako na nestabilitu degenerované SPDC obr. 19). Proto je žádané mít spektrálně stabilní laserový zdroj o úzké spektrální čáře. Úzká spektrální čára totiž zajistí, že k SPDC dochází na minimu jiných frekvencí, na které není krystal laděný. To má pak vliv i na kvalitu samotného kvantového provázání [37].



Obrázek 19: Závislost generovaných signálových a jalových vlnových délek v PPKTP krystalu o délce  $L = 15$  mm při různé teplotní stabilizaci [27].

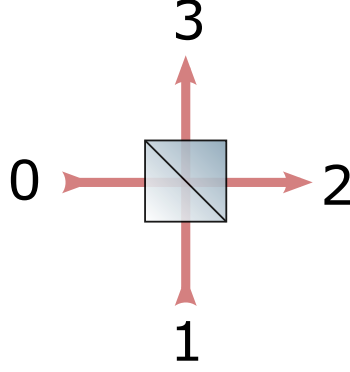
## 5 Detekce kvantově provázaných stavů

Po přípravě sestavy pro generaci kvantově provázaných párů je důležité se přesvědčit, že kvantově provázaný stav je skutečně realizován. To může být např. provedeno testem Bellovy nerovnosti, respektive jednou z navržených metod níže. Zajímá-li nás pouze existence kvantového provázání, tak měření pomocí Hong-Ou-Mandelova experimentu je adekvátní. O kvalitě entanglementu pak lze vyvozovat závěry na základě viditelnosti, též visibility, Mandelova minima (anglicky *dip*) resp. maxima (anglicky *anti dip*). Druhou z nabízených možností je kompletní kvantová tomografie vzniklého stavu. Při ní dochází ke kompletní rekonstrukci statistického operátoru, který je experimentálně generován. Z něj pak lze vyvodit vše důležité a aplikovat metriky, které byly rozebrány dříve.

### 5.1 Hong-Ou-Mandelův experiment

Hong-Ou-Mandelův [38] experiment vychází z kvantového popisu děliče svazku. Ten na základě svých koeficientů reflexe  $r$  a transmise  $t$  (obecně komplexních) superponuje vstupní vlny, které lze kvantově popsat kreačními operátory  $\hat{a}_0$ ,  $\hat{a}_1$  a výstupní vlny  $\hat{a}_2$ ,  $\hat{a}_3$  (obr. 20). Transformační vztah mezi vstupními a výstupními poli je dán

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t \\ t & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{pmatrix}. \quad (5.1.1)$$



Obrázek 20: Dělič svazku s očíslovanými vstupy (0,1) a výstupy (2,3).

Tvar transformační matice není jednoznačně určený, záleží na zvolené fázové konvenci [39]. Oproti klasickým amplitudám pole v případě klasického děliče svazku jsou v kvantovém případě příslušné kreační a anihilační operátory spolu vázány komutačními relacemi

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, 3. \quad (5.1.2)$$

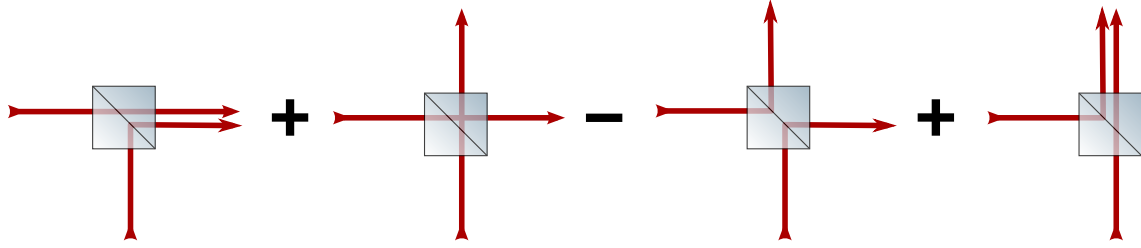
Lze se přesvědčit, že tyto komutační relace nelze splnit v případě započtení pouze jednoho vstupního pole. Vysvětlením je vždy přítomné vakuové pole  $|0\rangle_i$  na volných vstupech děliče svazku  $i$ . Po započtení vlivu vakuového pole již komutační relace platí. Šíření pole děličem svazku je řízeno evolučním operátorem  $\hat{U}$ , takže platí

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} = \hat{U} \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{pmatrix} \hat{U}^\dagger. \quad (5.1.3)$$

Zkoumejme nyní vyvážený případ děliče svazku ( $r = t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ), kdy na každém z jeho vstupů se nachází jeden foton  $|1\rangle$  (jednofotonový Fockův stav). Vývoj zmíněným evolučním operátorem  $\hat{U}$  vede na

$$\begin{aligned} \hat{U} \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1^\dagger |0\rangle_0 |0\rangle_1 &= \frac{1}{2} (\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_3^\dagger) (\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_3^\dagger) |0\rangle_2 |0\rangle_3 = \\ &= \left( \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2^\dagger - \cancel{\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_3^\dagger} + \cancel{\hat{a}_3^\dagger \hat{a}_2^\dagger} - \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3^\dagger \right) |0\rangle_2 |0\rangle_3 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|2\rangle_2 |0\rangle_3 - |0\rangle_2 |2\rangle_3). \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

Vzájemné anulování členů  $\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_3^\dagger$  je známé jako destruktivní kvantová interference (obr. 21) a má za důsledek, že fotony opouštějí dělič svazku vždy v párech. Sledováním koincidence fotonů na výstupech v závislosti na poloze děliče svazku docházíme

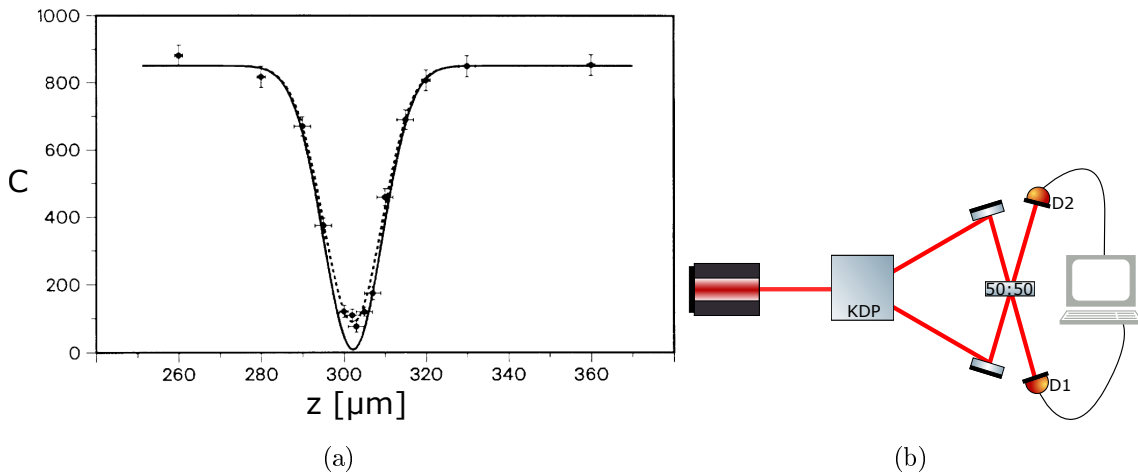


Obrázek 21: Vizualizace kvantové destruktivní interference jako výsledek interakce dvou fotonů na vyrovnaném děliči svazku, viz (5.1.4).

k tzv. Mandelovu minimu (dipu, obr. 22(a)). Vyčíslením jeho visibility  $V_{dip}$ <sup>5</sup>

$$V_{dip} = \frac{C_{max} - C_{min}}{C_{max}}, \quad (5.1.5)$$

kde  $C_{max}$ , resp.  $C_{min}$  značí maximální, resp. minimální koincidence, lze interpretovat jako míru nerozlišitelnosti fotonu. Tedy visibility  $V_{dip} = 1$ , značí absolutně nerozlišitelný pár fotonů. Tento jev lze také chápat jako destruktivní kvantovou interferenci. Provedeme-li Hong-Ou-Mandelovo měření na Bellově stavu  $|\Phi^-\rangle$ ,



Obrázek 22: (a) Počet koincidence za 10 min  $C$  v závislosti na poloze děliče svazku  $z$  [38]. (b) Schéma sestavení Hong-Ou-Mandelova experimentu.

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle), \quad (5.1.6)$$

tak vlivem jeho antisymetrie dochází k přesně opačnému efektu, a tedy ke koincidenčnímu maximu (anglicky *anti dip*) [41]. Jeho visibility lze podobně spočítat vztahem

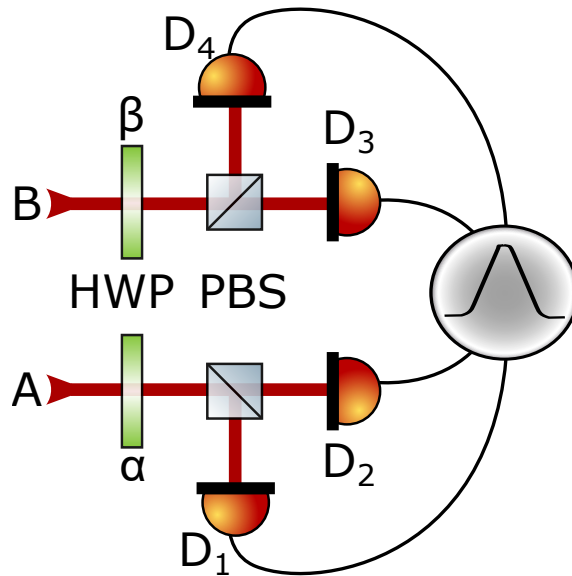
<sup>5</sup>Odlíšná definice oproti klasické interferenční visibility  $\frac{C_{max}-C_{min}}{C_{max}+C_{min}}$  je z důvodu platného vztahu mezi takto definovanou visibility a čistotou  $\text{Tr}(\hat{\rho}^2)$  vstupních fotonů [40].

$$V_{antidip} = \frac{C_{max}}{C_{min}}. \quad (5.1.7)$$

Tímto lze tedy dokázat přítomnost kvantově provázaného stavu  $|\Phi^-\rangle$  a jelikož transformace mezi jednotlivými Bellovými stavy lze jednoduše provádět vhodně vloženými fázovými destičkami, tak tímto způsobem lze dokázat přítomnost všech Bellových stavů.

## 5.2 Měření koincidence pro různé polarizace

Nejjednodušším způsobem, jak kvantově provázání 2 fotonů „odhalit“, je pomocí čítání (angl. *counting*) koincidence fotonů, čímž se myslí simultánní detekce jednoho nebo více fotonů na různých detektorech v definovaném časovém okně. Sledujme nejdřív obecný případ, kdy v jednotlivých větvích, ve kterých sledované fotony pozorujeme (obr. 23) se fotony nachází ve stavu  $\hat{\rho}_A$  a  $\hat{\rho}_B$ , tedy celkový stav systému je  $\hat{\rho} = \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B$ . V obou větvích jsou zařazeny půlvlnné destičky, přičemž ve větvi  $A$  je nastaven



Obrázek 23: Schéma měření koincidence mezi dvěma fotony v závislosti na jejich polarizaci. Pro úpravu polarizace jednotlivých fotonů slouží kombinace půlvlnné destičky (HWP) a polarizačního děliče svazku (PBS), které jsou nastaveny na hodnotu  $\alpha$ , resp.  $\beta$  (úhel stočení polarizace). Na každém výstupu z PBS je pak přítomen detektor sloužící k vyhodnocení koincidence.

vena na úhel  $\theta_A$  a ve větvi  $B$  na úhel  $\theta_B$ . Označíme působení těchto destiček na fotony operátory  $\hat{U}_{HWP}(\theta_A)$ ,  $\hat{U}_{HWP}(\theta_B)$  resp.  $\hat{U}_{HWP}(\theta_A, \theta_B) = \hat{U}_{HWP}(\theta_A) \otimes \hat{U}_{HWP}(\theta_B)$ . Je-li za půlvlnnou destičku umístěn polarizační dělič svazku, který odráží vertikální a

propouští horizontální polarizaci, tak celková kombinace v dané větvi se chová jako polarizátor nastavený na úhel  $\alpha = 2\theta_A$ , resp.  $\beta = 2\theta_B$ . Řekněme, že chceme pozorovat koincidence prošlých fotonů, tedy za děliče svazku umístíme detektory. Pak lze pravděpodobnost  $p_{HH}(\alpha, \beta)$ , že pro dané nastavení půlvlnných destiček oba fotony projdou, vyčíslit pomocí vztahu (2.1.4)

$$p_{HH}(\alpha, \beta) = \langle HH | \hat{U}_{HWP}^\dagger \hat{\rho} \hat{U}_{HWP} | HH \rangle. \quad (5.2.1)$$

Jsou-li detektory umístěny na všech výstupech z polarizačního děliče svazku (ve větvi  $A$  i  $B$ ) a ozn. při zvoleném nastavení půlvlnných destiček  $\alpha, \beta$  koincidence mezi detektory  $D_2$  a  $D_3$  jako  $C_{HH}(\alpha, \beta)$ , detektory  $D_1$  a  $D_3$  jako  $C_{VH}(\alpha, \beta)$ , detektory  $D_2$  a  $D_4$  jako  $C_{HV}(\alpha, \beta)$  a detektory  $D_1$  a  $D_4$  jako  $C_{VV}(\alpha, \beta)$ , pak platí

$$p_{HH}(\alpha, \beta) = \frac{C_{HH}(\alpha, \beta)}{C_{HH}(\alpha, \beta) + C_{VH}(\alpha, \beta) + C_{HV}(\alpha, \beta) + C_{VV}(\alpha, \beta)}. \quad (5.2.2)$$

Obdobně lze vypočítat i ostatní pravděpodobnosti odpovídající sledování koincidencí na jiné dvojici detektorů, tedy  $p_{HV}(\alpha, \beta)$ ,  $p_{VH}(\alpha, \beta)$  a  $p_{VV}(\alpha, \beta)$ . Zabývejme se nyní otázkou, jak se výsledná podoba vztahu (5.2.1) liší pro fotonové páry generované ve smíšeném stavu  $\hat{\rho} = \frac{1}{2} |HV\rangle\langle HV| + \frac{1}{2} |VH\rangle\langle VH|$  oproti těm generovaným v čistém kvantově provázaném stavu  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|VH\rangle + |HV\rangle)$ . Výpočty jsou prováděny v  $\mathbb{C}^4$ , kdy smíšený stav  $\hat{\rho}$  je reprezentován maticí  $4 \times 4$  a kvantově provázaný stav  $|\psi\rangle$  vektorem z  $\mathbb{C}^4$

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2.3)$$

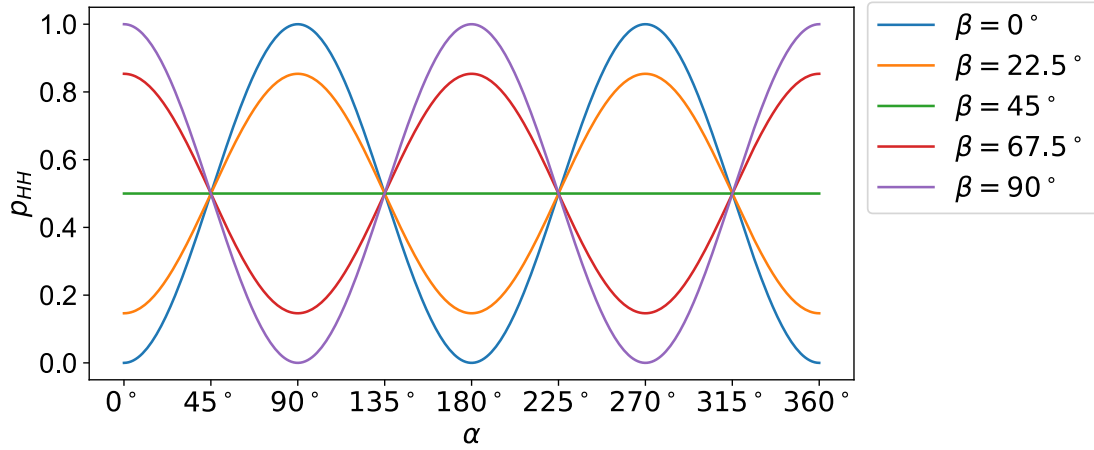
Půlvlnná destička je v maticovém formalismu popsána unitární maticí  $P(\alpha)$

$$P(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (5.2.4)$$

a tedy tensorový součin matic pro dvě různě nastavené půlvlnné destičky  $P(\alpha, \beta)$  je

$$P(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta & \cos \beta \sin \alpha & \sin \alpha \sin \beta \\ \cos \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta & -\cos \beta \sin \alpha \\ \cos \beta \sin \alpha & \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta & -\cos \beta \sin \alpha & -\cos \alpha \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix}. \quad (5.2.5)$$

Upravení výrazu (5.2.1) již představují čistě algebraické operace s maticemi a vektory, jejichž výsledkem je pravděpodobnost (obr. 24)



Obrázek 24: Pravděpodobnost koincidence na detektorech  $D_2$  a  $D_3$  (obr. 23) při systému ve smíšeném stavu  $\hat{\rho} = \frac{1}{2} |VH\rangle\langle VH| + \frac{1}{2} |HV\rangle\langle HV|$  pro různě nastavené polarizační úhly  $\alpha, \beta$ .

$$p_{HH} = \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha. \quad (5.2.6)$$

Jako druhý příklad uveďme kvantově provázaný stav  $|\psi\rangle$ , který je popsán maticí hustoty  $\hat{\rho}_{Bell} = |\psi\rangle\langle\psi|$ ,

$$\hat{\rho}_{Bell} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.2.7)$$

a pro kterou výsledná pravděpodobnost  $p_{HH}$  vychází (obr. 25)

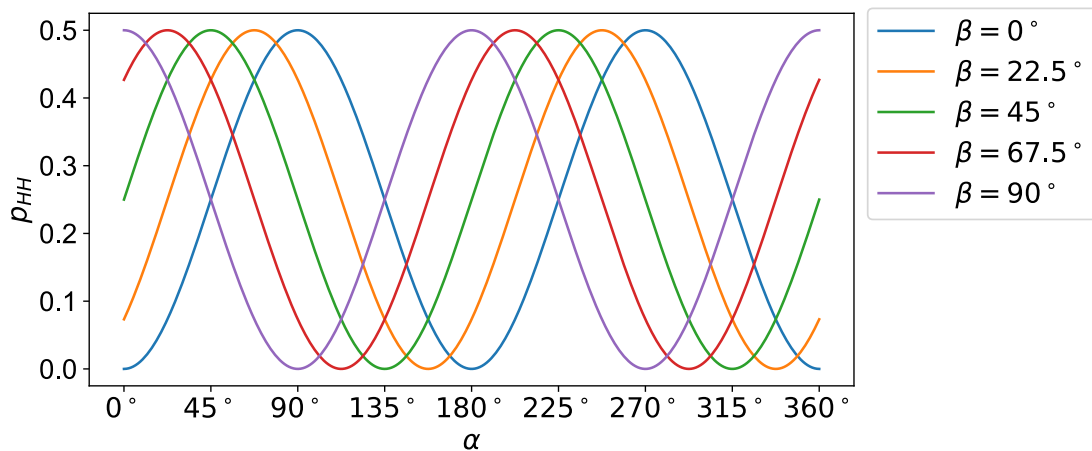
$$p_{HH} = \frac{1}{2} \sin^2(\alpha + \beta). \quad (5.2.8)$$

Jako poslední uveďme statistický mix obou příkladů, tedy zkoumejme statistický operátor  $\hat{\rho}_{mix} = W_1 |\psi\rangle\langle\psi| + (1 - W_1)\hat{\rho}$ , který v lze opět popsat maticí  $4 \times 4$

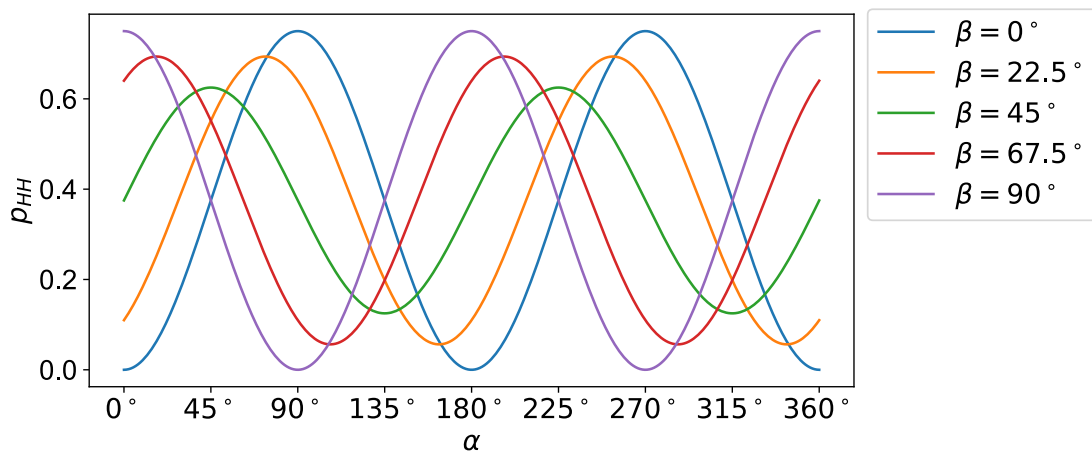
$$\hat{\rho}_{mix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5W_1 + 0.5 & W_1 & 0 \\ 0 & W_1 & 0.5W_1 + 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2.9)$$

Pravděpodobnost  $p_{HH}$  pak vychází (obr. 26)

$$p_{HH} = \cos(\alpha) \sin(\beta) (W_1 \cos(\beta) \sin(\alpha) + \cos(\alpha) \sin(\beta) (0.5W_1 + 0.5)) + \\ + \cos(\beta) \sin(\alpha) (W_1 \cos(\alpha) \sin(\beta) + \cos(\beta) \sin(\alpha) (0.5W_1 + 0.5)). \quad (5.2.10)$$



Obrázek 25: Pravděpodobnost koincidence na detektorech  $D_2$  a  $D_3$  (obr. 23) při systému ve smíšeném stavu  $\hat{\rho}_{Bell}$  pro různě nastavené polarizační úhly  $\alpha, \beta$ .



Obrázek 26: Pravděpodobnost koincidence na detektorech  $D_2$  a  $D_3$  (obr. 23) při systému ve smíšeném stavu  $\hat{\rho}_{mix} = \frac{1}{2}\hat{\rho}_{Bell} + \frac{1}{2}\hat{\rho}$  pro různě nastavené polarizační úhly  $\alpha, \beta$ .



Jak lze vypočítat z obr. 24, 25 a 26, tak byt' pro každý stav platí, že ve větvích  $A$  a  $B$  jsou zároveň fotony  $H, V$  a nebo  $V, H$ , tak v závislosti na konkrétním kvantovém stavu se pozorované závislosti dost liší. Definujme visibilitu koincidenčního měření  $V_C$  po vzoru klasické visibility interference

$$V_C = \frac{C_{max} - C_{min}}{C_{max} + C_{min}}, \quad (5.2.11)$$

kde  $C_{max}$ , resp.  $C_{min}$  je maximální, resp. minimální koincidence při zvoleném nastavení. U smíšeného stavu (obr. 24) lze pozorovat, že pro různé fixní úhly 2. půlvlnné destičky dostáváme při sledování průběhu  $p_{HH}(\alpha)$  různé visibility, a při hodnotě  $\beta = 45^\circ$  není pozorována žádná závislost na úhlu  $\alpha$ . Naopak u kvantově provázaného stavu zůstává visibilita maximální a to napříč různými nastavenými úhly  $\beta$ . Co se mění je průběh funkce (5.2.8), která získává dodatečnou fázi odpovídající nastavenému úhlu  $\beta$ . Při statistickém promíchání obou zmíněných stavů dostáváme kombinaci obou jevů. Tedy s měnícím se úhlem  $\beta$  dochází jak ke změně visibility, tak k posouvání celé křivky.

Dříve byla představena Bellova nerovnost (2.4.2), která je, za předpokladu lokality a realismu, shora omezena číslem 2

$$|E(\alpha, \beta) - E(\alpha, \beta')| + |E(\alpha', \beta) + E(\alpha', \beta')| \leq 2. \quad (5.2.12)$$

Jsou-li zkombinována veškerá koincidenční měření ze všech výstupů, tedy jsou získány hodnoty  $p_{HH}(\alpha, \beta)$ ,  $p_{VH}(\alpha, \beta)$ ,  $p_{HV}(\alpha, \beta)$  a  $p_{VV}(\alpha, \beta)$ , pak lze zvolením

$$\begin{aligned} E(\alpha, \beta) &= p_{HH}(\alpha, \beta) + p_{VV}(\alpha, \beta) - p_{VH}(\alpha, \beta) - p_{HV}(\alpha, \beta) \\ &= \frac{C_{HH}(\alpha, \beta) - C_{VH}(\alpha, \beta) - C_{HB}(\alpha, \beta) + C_{VV}(\alpha, \beta)}{C_{HH}(\alpha, \beta) + C_{VH}(\alpha, \beta) + C_{HV}(\alpha, \beta) + C_{VV}(\alpha, \beta)} \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

docílit porušení Bellovy nerovnosti pro kvantově provázané stavy. Např. pro Bellův stav  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|VH\rangle + |HV\rangle)$  vychází

$$\begin{aligned} p_{HH} &= \frac{1}{2} \sin^2(\alpha + \beta), \\ p_{VH} &= \frac{1}{2} \cos^2(\alpha + \beta), \\ p_{HV} &= \frac{1}{2} \cos^2(\alpha + \beta), \\ p_{VV} &= \frac{1}{2} \sin^2(\alpha + \beta), \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

$$S = |-\cos(2(\alpha + \beta)) + \cos(2(\alpha + \beta'))| + |\cos(2(\alpha' + \beta)) + \cos(2(\alpha' + \beta'))|, \quad (5.2.15)$$

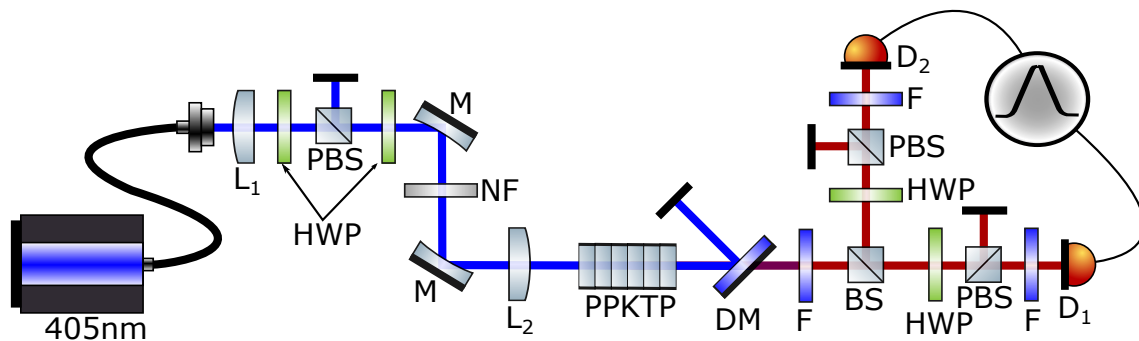
a tedy při zvolení úhlů  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\alpha' = 45^\circ$ ,  $\beta = 22.5^\circ$ ,  $\beta' = 67.5^\circ$  a dosazením do rovnice (5.2.15) získáváme hodnotu 2.83, tedy hodnotu větší než 2, a docházíme k porušení Bellovy nerovnosti.

## 6 Experimentální část

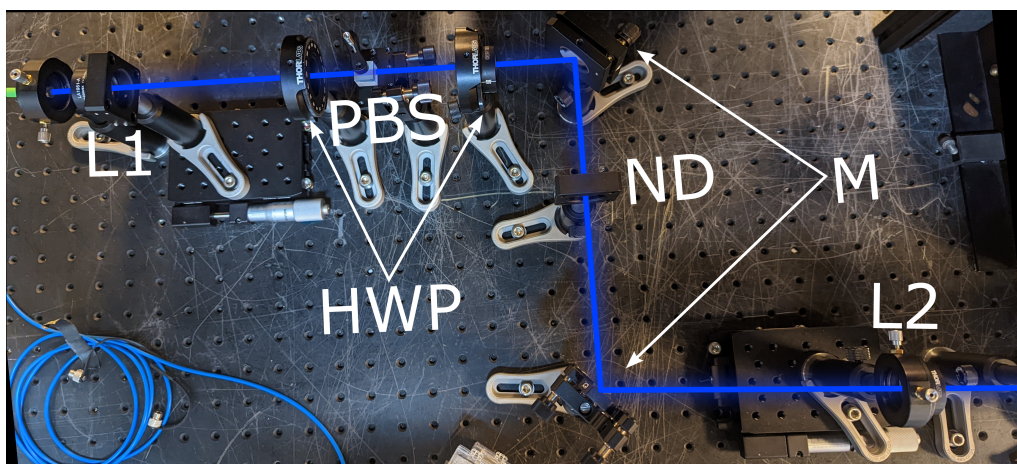
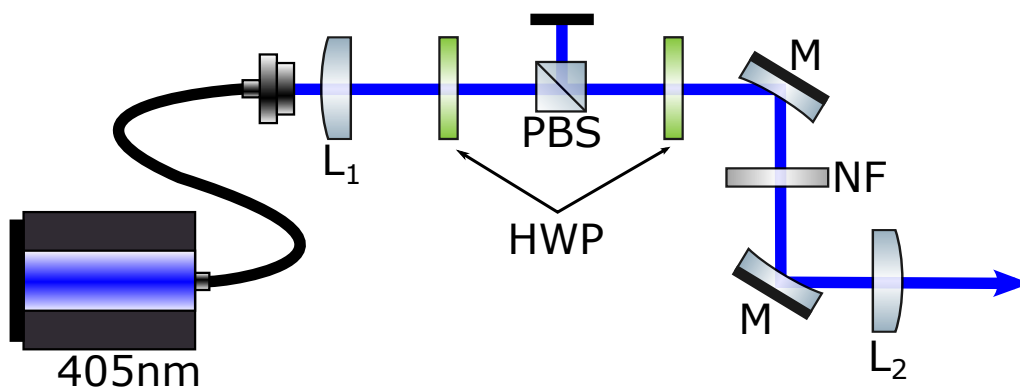
Cílem této části je stavět na teorii představené v předchozích kapitolách a navrhnout a sestavit vhodnou experimentální sestavu pro generaci kvantově provázaných stavů. Hlavním omezujícím faktorem při návrhu vhodné sestavy je aktuální vybavení laboratoře na katedře fyzikální elektroniky a také skutečnost, že se jedná o novou problematiku a nový výzkum. Pro generaci bude využita SPDC v nelineárním krystalu, který tak tvoří jádro samotné sestavy. Je tedy optimální uvažovat vhodnou experimentální sestavu právě v kontextu dostupných nelineárních krystalů. V laboratoři jsou k dispozici BBO krystaly schopny SPDC typu II, BBO krystaly schopné SPDC typu I a 2 cm periodicky pólovaný KTP krystal (PPKTP), laděný na kolineární SPDC pro vlnovou délku čerpání 405 nm. Vzhledem k problematickému ladění úhlově laděných sestav a jejich nízké účinnosti je preferována sestava založená na PPKTP krystalu. Optimální by bylo pokusit se sestavit uspořádání s dvojitým čerpáním. Taková sestava je však bohužel náročná na vybavení. Konkrétně sestava Sagnacovského typu by pro svou realizaci potřebovala mít značný počet optických komponent fungujících na dvou vlnových délkách. Pro experiment proto navrhuji sestavu jednodušší, a to konkrétně sestavu s PPKTP generující na jeden průchod, přičemž provázané fotony jsou prostorově rozlišeny na děliči svazku (obr. 13). První nevýhodou sestavy je její nízká účinnost, vyvěrající z rovnoměrné pravděpodobnosti rozdělení, resp. projití obou fotonových párů na děliči (a tedy ztrátě půlky generovaných fotonových párů). Další nevýhodou této navržené sestavy je, že pro optimální generování kvantově provázaného stavu je nutný kompenzační krystal poloviční délky vůči generačnímu krystalu. Byť samotný kompenzační krystal nemusí být pólovaný a stačí obyčejný KTP krystal (teplotně stabilizovaný na stejnou teplotu jako krystal generační), tak bohužel KTP krystal požadované délky (1 cm) není v současné době v laboratoři k dispozici. I přesto je však volena tato sestava (obr. 27) oproti jiným, nekolineárním, a to zejména kvůli budoucím pracím, které by mohly z charakterizace tohoto krystalu těžit.

### 6.1 Příprava čerpacího svazku

Tato část celkové sestavy (obr. 28) slouží k přípravě vhodného čerpacího záření, které je v další části sestavy navedeno do nelineárního krystalu, který čerpá. Krystal PPKTP dodaný firmou Raicol délky  $L = 20$  mm je od výroby laděný na degenerovanou SPDC horizontálního čerpání (tedy pro záření s horizontálně orientovanou polarizací) o vlnové délce 405 nm a generuje na vlnové délce 810 nm. Jako zdroj záření byl tedy použit laser TopMode od firmy TOPTICA (viz tab. 4). Ten se vyznačuje úzkou šířkou spektra a velice stabilní generací na vlnové délce 405 nm v

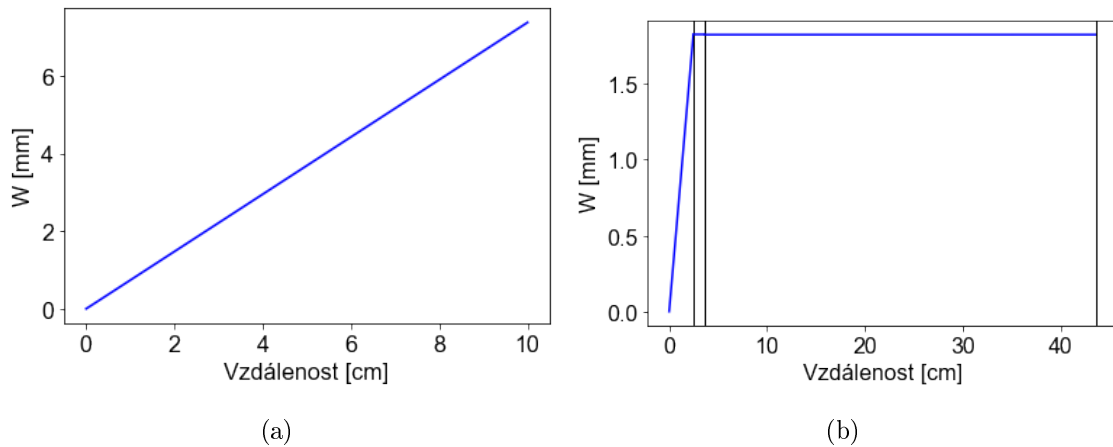


Obrázek 27: Navržená experimentální sestava pro generaci kvantově provázaných stavů. Laserové záření 405 nm je vyvázáno z jednomódového vlákna a kolimováno kolimační čočkou  $L_1$ . Dále prochází půlvlnnou destičkou (HWP), polarizačním děličem svazku (PBS) a opět půlvlnnou destičkou, která upravuje výstupní polarizaci čerpání. Intenzita je omezena na neutrálním filtru (NF) načež je čerpací svazek fokusován fokusační čočkou  $L_2$  do krystalu PPKTP, kde jsou metodou degenerované SPDC generovány fotonové páry o vlnové délce 810 nm. Čerpací svazek je posléze z většiny ( $\sim 99\%$ ) odkloněn dichroickým zrcátkem (DM) a vyfiltrován úzkopásmovým filtrem (F). Zde již generované fotonové páry jsou rozděleny rovnoměrným (tedy 50:50) děličem svazku (BS). V každé větvi jsou pak prošlé fotony analyzovány půlvlnnou destičkou, polarizačním děličem svazku a detektorem ( $D_1$  resp.  $D_2$ ). Detektorům jsou ještě předsazeny úzkopásmové filtry s pásmem propustnosti  $(810 \pm 10)$  nm.



Obrázek 28: Část experimentální sestavy (obr. 27) zodpovědná za přípravu čerpačího svazku. Laserové záření o vlnové délce 405 nm je vyvedeno z jednomódového optického vlákna. Výstup je kolimován kolimační čočkou  $L_1$ . Kombinací půlvlnné destičky (HWP) a polarizačního děliče svazku (PBS) je docílen bezabsorpční polarizátor. Druhou HWP je docíleno stočení polarizace do horizontální polohy. Následně je výkon snížen neutrálním filtrem (ND) a svazek je posléze fokusován fokusační čočkou  $L_2$ .

čase. Vlastnost stability je velice žádaná, vzhledem k tomu, že s mírnou změnou čerpací frekvence přichází relativně velká změna potřebné teploty krystalu, tudíž dochází k nesplnění fázové podmínky. Čerpací laserové záření je hned na výstupu z laseru navedeno do jednomódového polarizace zachovávajícího vlákna dodávaného společně s laserem (viz tab. 4). Díky šíření svazku vláknem, lze výstupní svazek považovat za Gaussovský ( $M^2 < 1.2$ ). Vzhledem k úzkému jádru jednomódového vlákna je výstupní svazek silně divergentní a je nutná jeho kolimace. Té je dosaženo



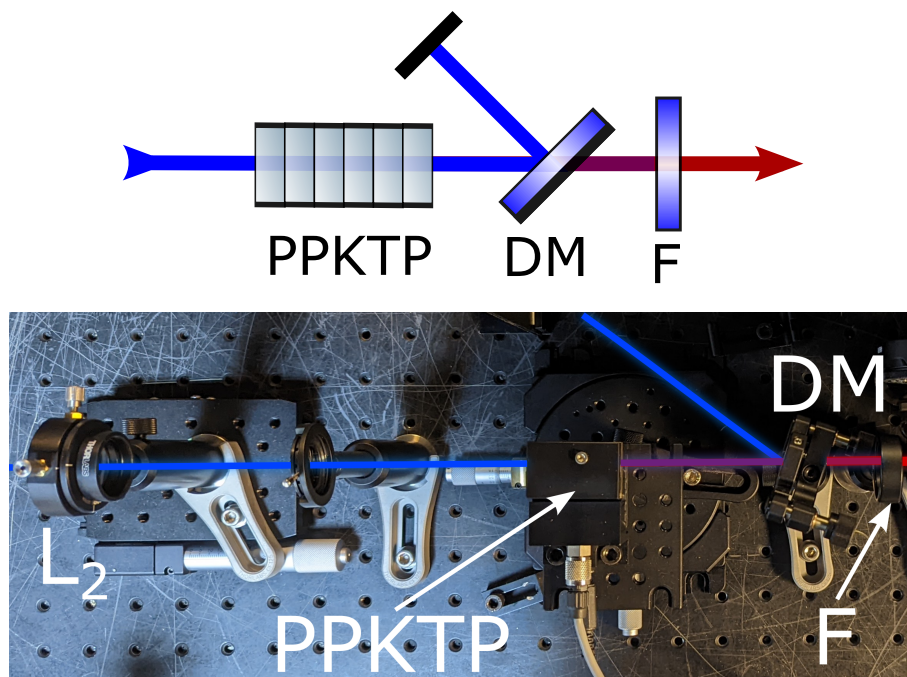
Obrázek 29: Za uvažování Gaussovského výstupu z jednomódového vlákna specifikací tab. 4 vypočtená šířka svazku ( $W$ ) v závislosti na vzdálenosti a) bez kolimační čočky, b) s kolimační čočkou ohniskové vzdálenosti 2.5 cm (na obrázku vyznačena dvěma vertikálními čarami v místě zalomení svazku). Prezentované grafy jsou výstupem z mnou vyvinuté softwarové knihovny [42].

vložení čočky s ohniskem 2.5 cm (obr. 29). Po kolimaci prochází svazek dvojicí půlvlnné destičky a polarizačního děliče svazku. Tato kombinace v sestavě bude figurovat vícekrát a jedná se o implementaci bezabsorpčního polarizátoru, který zde konkrétně slouží v kombinaci s další půlvlnnou destičkou jako variabilní neutrální filtr. Druhá půlvlnná destička je nastavená na fixní hodnotu, která definuje výstupní polarizaci, v tomto případě, horizontální (tedy půlvlnná destička nastavena na  $45^\circ$ ). Dále je svazek veden dvojicí zrcátek, které slouží pro upravení směru šíření svazku, mezi kterými se nachází neutrální filtr. O ten byla sestava doplněna po zjištění, že nechtěná polarizace, která je ve vláknu v malém množství indukována, je velmi náchylná na změnu teploty a mechanickou manipulaci s vláknem. Při snížení výkonu první půlvlnnou destičkou pak dochází k zvětšování podílu této polarizační složky ve výstupním svazku a k dramatické nestabilitě výstupního výkonu. Situaci řeší právě snížení podílu této nechtěné polarizace a to doplněním 1. půlvlnnou destičkou o neutrální filtr, tedy pro stejné snížení výkonu již není třeba tak velké stočení pola-

rizace. Maximální výstupní výkon laserového záření s zařazeným neutrálním filtrem je  $\sim 3$  mW. Fokusační čočka s ohniskovou vzdáleností 250 mm v optimálním případě transformuje Gaussovský svazek tak, aby poloha jeho krčku spadla přímo doprostřed krystalu, a zároveň aby jeho poloměr byl roven  $18 \mu\text{m}$  (viz (4.4.1)). Poloha fokusační čočky byla zafixovaná maximalizováním počtu generovaných SPDC fotonů (viz detekční část).

## 6.2 Generační část

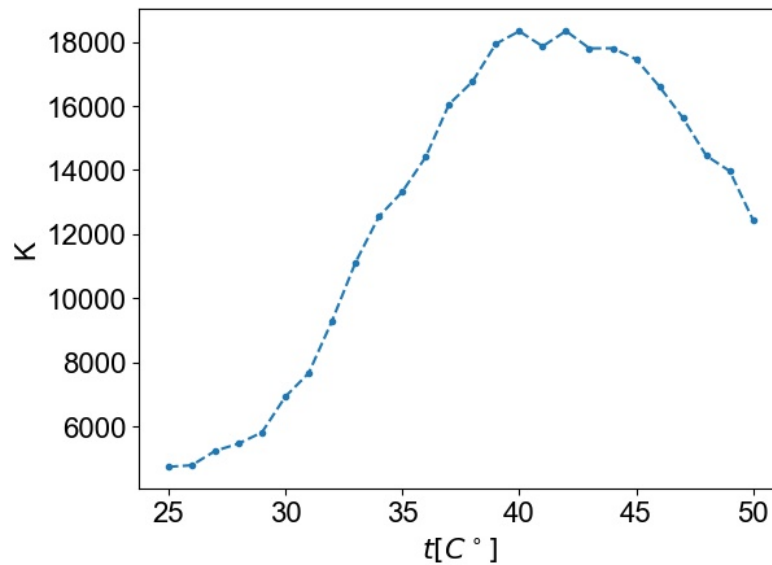
V této části je již připravené čerpací záření z předchozí části navedeno do nelineárního krystalu, v kterém metodou SPDC dochází ke generaci fotonových párů (obr. 30). Samotný PPKTP krystal, dimenzí  $1 \times 1 \times 20$  mm (viz tab. 4), je za-



Obrázek 30: Část experimentální sestavy (obr. 27) zodpovědná za generaci degenerovaných fotonových párů 810 nm. Vhodně zafokusaný horizontálně polarizovaný čerpací svazek je naveden do PPKTP krystalu. V něm jsou procesem SPDC generovány fotonové páry ortogonálních polarizací. Zbylé čerpací záření je odfiltrováno dichroickým zrcátkem (DM) a následně vloženým filtrem (F) s pásmem propustnosti  $(810 \pm 10)$  nm.

fixovaný na rotačním držáku a je umístěn v pícce. Rotační držák je vybavený 2 posuny a rotací v rovině optického stolu. V ideálním případě by bylo mít držák doplněn o možnosti dalšího stupně volnosti, tedy náklonu krystalu. Tento chybějící stupeň volnosti byl kompenzován mírnou změnou chodu paprsku (výchozí stav je

rovnoběžný s optickým stolem) na fokusační čočce. Měněním těchto nastavení bylo docíleno optimální polohy krystalu opět na základě maximalizace výstupních SPDC fotonů. Po průchodu svazku krystalem je zprvu většina čerpacího záření odkloněná dichroickým zrcátkem ( $\sim 99\%$ ), načež se zbylé záření šíří filtrem s pásmem propustnosti ( $810 \pm 10$ ) nm. Teplotní stabilizace byla docílena pomocí pícky, která byla dodána společně s krystalem firmou Raicol. Byla změřena závislost mezi počtem generovaných fotonů a teplotou pícky (obr. 31). Měření probíhalo časovým sběrem



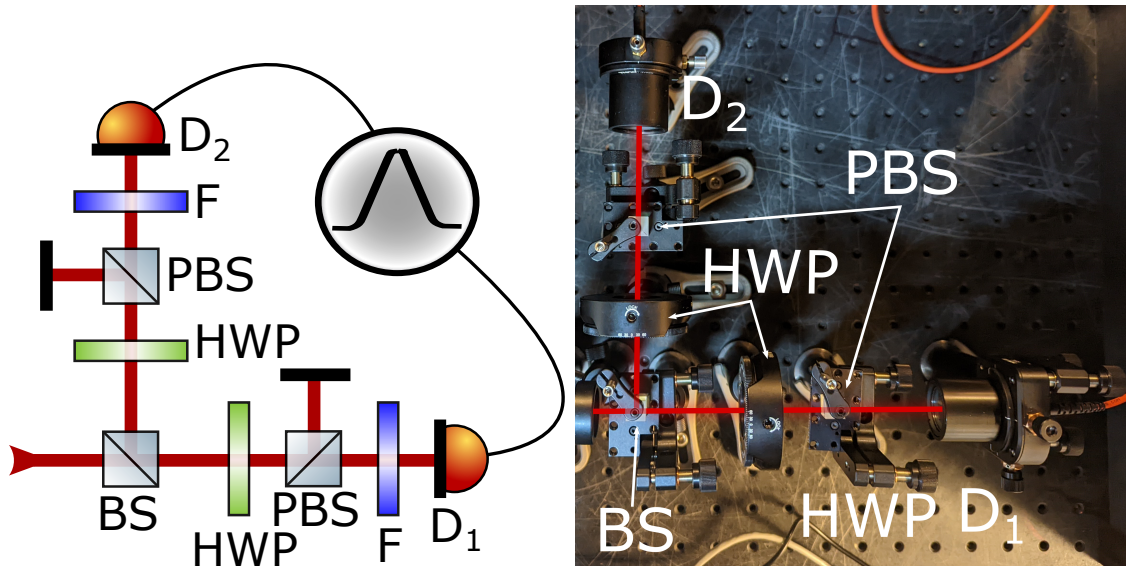
Obrázek 31: Závislost počtu generovaných koincidence ( $K$ ) na teplotě  $t$  v experimentálním uspořádání z obr. 27.

(300 s) koincidence fotonů na detektorech  $D_1$  a  $D_2$  (obr. 27). Z naměřené závislosti je patrné, že k optimální SPDC dochází mezi hodnotami  $39^\circ\text{C}$  a  $42^\circ\text{C}$ . Zploštělý vrchol grafu, lze vysvětlit relativně širokým pásmem propustnosti úzkopásmového filtru  $F$  ( $810 \pm 10$ ) nm. Tím tak prochází i nedegenerované SPDC páry spadající do intervalu 805 nm až 815 nm, které ale produkují podobné počty detekovaných fotonů na detektorech. Pro bližší prozkoumání tvaru účinnosti konverze na teplotě by byl potřeba jednofotonový spektrometr, kterým bohužel není laboratoř vybavena. Každopádně veškerá měření, která budou zmiňována v další části, jsou měřena s fixně nastavenou teplotou  $t = 40^\circ\text{C}$ .

### 6.3 Vyhodnocovací (detekční) část

Posledním krokem přípravy kvantově provázaných stavů je jednotlivé fotony prostorově rozlišit a posléze, na základě koincidenčních měření, fotony charakterizovat. Z toho důvodu jsou generované fotony z předchozí části navedeny na rovnoměrný

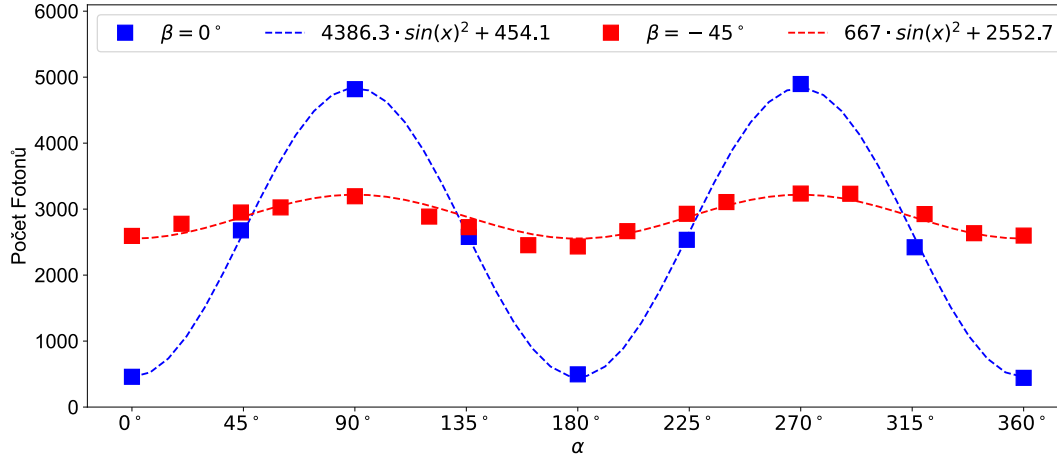
dělič svazku (50:50), na kterém se rozdělí do dvou ramen (obr. 32). V obou ramenech figurují stejné optické komponenty, a to půlvlnná destička v kombinaci s polarizačním děličem svazku, jakožto bezabsorpční polarizátor, úzkopásmový filtr s pásmem propustnosti  $(810 \pm 10)$  nm. Obě ramena jsou zakončena jednofotonovými detektory od firmy Laser Components s označením COUNT-100N-FC (viz tab. 4). Ty při detekci generují TTL (tranzistorově-tranzistorová logika) pulzy, které jsou v čítací jednotce značky Swabian Instrument (viz tab. 4) sbírány, a v programu, který jsem vyvinul specificky pro potřeby této práce, vyhodnoceny. V tomto uspo-



Obrázek 32: Část experimentální sestavy (obr. 27) zodpovědná za detekci a vyhodnocení generovaného stavu. Signálový a jalový svazek je rozdělen na rovnoměrném děliči svazku (BS), který detekční část rozdělí na dvě totožné větve. V nich rozdělené svazky nejdříve prochází kombinací půlvlnné destičky (HWP) a polarizačního děliče svazku (PBS), která slouží jako bezabsorpční polarizátor a následně je ještě zbytkové čerpací záření odfiltrováno úzkopásmovým filtrem (F).

řádání bylo provedeno měření počtu koincidence na detektorech, vzhledem k nastavení úhlu polarizátorů (úhlem polarizátoru rozumíme dvojnásobný úhel nastavené půlvlnné destičky, přičemž udávaný úhel bude vždy výsledný úhel stočení polarizace). Za koincidence budou označovány detekce na jednotlivých detektorech, které spadají do koincidenčního okna 1 ns. Zvolená integrační doba 300 s spojená s nízkým nastaveným výkonem laseru 3 mW má zaručit nižší poměr náhodných koincidence vzhledem k SPDC koincencím. První měření proběhlo na zafixované hodnotě druhého z polarizátorů  $\beta = 0^\circ$ . Naměřená data, jak se lze snadno proložením křivky přesvědčit, kopírují funkci kvadrátu sinu s visibilitou  $V_0 = 0.83$  (viz (5.2.11)). Pro





Obrázek 33: Výsledky měření závislosti počtu koincidence za 300 s pro případ fixně nastaveného 2. polarizátoru ( $\beta$ ) na nastavení 1. polarizátoru ( $\alpha$ ). Prezentováno je porovnání výsledků pro  $\beta = 0^\circ$  (modře) a  $\beta = -45^\circ$  (červeně). Oba výsledky jsou proloženy sinusoidálními fity, které jsou v obrázku uvedeny.

ověření přítomnosti kvantově provázaného stavu je třeba ukázat, že naměřená data pro libovolný fixní úhel polarizátoru sledují křivku  $\sin^2(\alpha + \beta)$  (viz (5.2.8), obr. 25 a výsledky [21, 43]). Proto při dalším měření je 2. polarizátor zafixován na hodnotě  $\beta = -45^\circ$ . Naměřená data opět sledují vývoj kvadrátu funkce sinus, avšak není pozorován žádný posun na ose  $x$ , jak vychází z teorie (obr. 25). Visibilita se ale snížila na  $V_{-45} = 0.14$ . Jelikož zmíněný posun je charakteristický pro kvantově provázaný stav, tak se lze domnívat, že výsledný generovaný stav je pouze smíšený stav stavů  $|VH\rangle$  a  $|HV\rangle$ , přičemž vzhledem ke generování horizontálních a vertikálních fotonů v párech je očekáváno jejich rovnoměrné rozdělení, tedy popsáno statistickým operátorem,  $\hat{\rho} = \frac{1}{2} |VH\rangle\langle VH| + \frac{1}{2} |HV\rangle\langle HV|$ . Při porovnání s teoretickým modelem (obr. 24), který pro nastavený úhel  $\beta = -45^\circ$  předpokládá konstantní průběh naměřených koincidence vzhledem k nastavení  $\alpha$ , a tedy nulovou visibilitu, tak v našem případě jsme naměřili visibilitu nenulovou. To lze vysvětlit nepřesně nastavenou hodnotou  $\beta$ . Je třeba brát v potaz, že odkazovaný polarizátor je ve skutečnosti kombinace půlvlnné destičky a polarizačního děliče svazku, tedy chyba při nastavení půlvlnné destičky se v konečném stočení polarizace projeví dvojnásobně. Tedy lze předpokládat chybu v nastaveních polarizátorů  $\pm 1^\circ$  v závislosti na použitém optomechanickém držáčku. Zároveň mohlo dojít k situaci, kdy krystal není v sestavě ideálně umístěný, tedy generované horizontálně, resp. vertikálně polarizované fotony se nejeví horizontálně, resp. vertikálně polarizované ve vztažné soustavě definované rovinou optického stolu. To se odráží v nastavených hodnotách polarizátorů, jelikož se předpokládalo, že nastavení  $0^\circ$  odpovídá vertikální polarizaci a nastavení

90° odpovídá horizontální polarizaci. Domněnka, že skutečně nedochází ke generaci kvantově provázaného stavu, může být posílena vyčíslením Bellovy nerovnosti prostřednictvím CHSH nerovnosti (viz (5.2.13)) pro úhly  $\alpha = -22.5^\circ$ ,  $\alpha' = 22.5^\circ$ ,  $\beta = -45^\circ$  a  $\beta' = 45^\circ$ . V ideálním případě by bylo za vhodné doplnit sestavu na obr. 32 o další dva detektory na každý ze 2 zbylých výstupů polarizačního děliče svazku a měřit koincidence mezi detektory v různých větvích (obr. 23). Za předpokladu, že generovaný stav není závislý na nastavení polarizátoru, můžou tato koincidenční měření být nahrazena vhodným otočením polarizátoru o 90°, což vede na 16 koincidenčních měření (tab. 3). Výsledkem po započtení Poissonovské statistiky počtu

Tabulka 3: Naměřené hodnoty koincidence pro kombinace nastavených úhlů 1. polarizátoru ( $\alpha$ ) a 2. polarizátoru ( $\beta$ ).  $C_1$ , resp.  $C_2$  představuje celkový počet detekovaných fotonů za 300 s na 1., resp. 2. detektoru.

$\alpha$ [°]	$\beta$ [°]	$C_1$	$C_2$	Koincidence
-22.5	-45	10845248	5932973	2586
-22.5	0	10858471	6128728	1126
-22.5	45	10847068	5890611	3296
-22.5	90	10806117	5610225	4613
22.5	-45	10852113	5871676	2610
22.5	0	10804133	6057189	1172
22.5	45	10845442	5881236	3191
22.5	90	10786019	5565085	4562
67.5	-45	10289717	5957949	3088
67.5	0	10266566	6089506	4704
67.5	45	10283037	5890848	2582
67.5	90	10337367	5693455	1078
112.5	-45	10175004	5899443	2970
112.5	0	10159197	6116795	4474
112.5	45	10197513	5877983	2721
112.5	90	10137859	5575853	1135

fotonů je hodnota  $S = 1.178 \pm 0.096$  (viz (5.2.12)), která je menší jak dva, tedy k porušení Bellovy nerovnosti nedochází. Vysvětlení se nabízí mnoho. Prvním, zřejmým, je že není použit kompenzační krystal, čímž dochází k časové rozlišitelnosti fotonů. Vedlejšími vlivy pak může být neoptimální nastavení optických komponent, nastavená teplotní stabilizace nebo poloha krystalu nebo neoptimálně připravený čerpací svazek, který pro optimální generaci by se měl fokusovat do středu krystalu a mít poloměr krčku  $\sim 18 \mu\text{m}$ .

V této části byla představena experimentální sestava pro generaci kvantově pro-

vázaných stavů. Postupně byly představeny všechny dílčí části a na závěr byla sestava experimentálně otestována. Podařilo se naměřit sinusoidální průběh počtu detekovaných koincidencí při fixně nastaveném jednom z polarizátorů ( $\beta = 0^\circ$ ) a s měnícím se nastavením druhého polarizátoru (obr. 33). Z této závislosti se lze domnívat, že v krystalu skutečně dochází ke generaci korelovaných fotonových párů. Pro ověření generace kvantově provázaných párů bylo provedeno totožné měření koincidencí, ale s jinou fixní hodnotou jednoho z polarizátorů ( $\beta = -45^\circ$ ). Z výsledků měření se ovšem zdá, že ke generaci kvantově provázaných stavů nedochází. Pozorováno je snížení visibility stejného sinusoidálního průběhu, jako u prvního měření, což spíše odpovídá predikcím pro smíšený stav  $\frac{1}{2} |VH\rangle\langle VH| + \frac{1}{2} |HV\rangle\langle HV|$  (obr. 24). Zásadní vliv na tento výsledek se domnívám, že má absence kompenzačního krystalu v sestavě. Jeho přidání do sestavy by přineslo avšak další komplikace v podobě nutné teplotní stabilizace teď již dvou krystalů. Proto spíše bych navrhoval od této sestavy upustit a zaměřit se na sestavy s dvojím čerpáním, jako je např. sestava Sagnacovského typu (obr. 15). Při ní lze dosáhnout vysokých účinností a to bez nutnosti kompenzačního krystalu.

## 7 Závěr

Cílem této práce bylo seznámení s kvantově provázanými stavy a možnostmi jejich realizace za využití optických metod. Po úvodní motivaci v 1. kapitole, byl v kapitole 2. představen úvod do teorie potřebné pro zavedení samotného termínu kvantového provázání, který obsahoval základní poznatky kvantové mechaniky, jako je definice smíšeného stavu a měření v kvantové mechanice, načež bylo definováno samotné kvantové provázání. Byly shrnuty základní metriky kvantového provázání, jako je fidelita a konkurence, přičemž byla kapitola uzavřena otázkou lokality, realismu a konstatováním Bellovy nerovnosti. V kapitole 3. byl popsán proces spontánní parametrické sestupné konverze (SPDC), která byla v pozdějších kapitolách uplatněna pro generaci korelovaných a případně i kvantově provázaných fotonových párů. Byl komentován přístup jak s využitím klasických nelineárních krystalů, tak i přístup, který je schopen kolineární generace za využití periodický pólovaných nelineárních prostředí. Kapitola 4. navazovala na předcházející kapitoly posouzením a posléze navržením vhodných experimentálních schémat schopných kvantově provázaný stav generovat. Jednotlivé sestavy byly společně porovnávány. 5. kapitola popisovala možnosti charakterizace vygenerovaného stavu. Kapitola 6. představuje experimentální sekci této práce. S přihlédnutím na stávající vybavení laboratoře na katedře fyzikální elektroniky (KFE) byla vybrána nejvhodnější sestava pro experimentální realizaci kvantově provázaných stavů. Sekce byla rozdělena do 3. částí, přičemž každá byla

věnována jiné části experimentální sestavy. Součástí poslední podkapitoly, Vyhodnocovací (detekční) části, je přehled naměřených výsledků a jejich vyhodnocení.

Výstupem této práce jsou shrnující poznatky o generaci kvantově provázaných stavů společně s komentováním možných provedení experimentálních generujících sestav. Diskuse je doplněna o pokus jednoduchou generační sestavu realizovat. Jako vhodná sestava, vzhledem k vybavení laboratoře a časovým možnostem, se jeví kolineární sestava s periodicky pólovaným KTP krystalem (PPKTP), bez použití kompenzačního krystalu (obr. 27). Součástí provedení sestavy byla i teplotní charakterizace PPKTP krystalu (obr. 31) a vývoj dvou softwarových programů [42]. Charakterizace generovaného stavu byla provedena měřením koincidence pro různé polarizace fotonů. Jak je patrné z výsledků měření (obr. 33), tak generovaný stav se nejvíce blíží kvantově provázaný, nýbrž se zdá být obyčejným smíšeným stavem  $\hat{\rho} = \frac{1}{2} |VH\rangle + \frac{1}{2} |HV\rangle$ . Tato dedukce byla vyslovena na základě porovnání naměřených dat s teoretickým modelem (obr. 24 a 25). Podporuje jí i výsledek provedení Bellova testu (tab. 3). Naměřené výsledné hodnoty jsou zcela určitě ovlivněny absencí chybějícího kompenzačního krystalu, jehož vliv byl komentován v kapitole 4. Výsledná měření mohly rovněž ovlivnit neoptimální teplotní stabilizace PPKTP krystalu nebo špatně najustované optické elementy v sestavě.

## 8 Použitá literatura

1. EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Physical Review*. 1935, roč. 47, č. 10, s. 777–780.
2. SHOR, P. W. Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer. *SIAM Journal on Computing*. 1997, roč. 26, č. 5, s. 1484–1509.
3. JIN, R.-B. et al. Highly efficient entanglement swapping and teleportation at telecom wavelength. *Scientific Reports*. 2015, roč. 5, č. 1, s. 9333.
4. KIMBLE, H. J. The quantum internet. *Nature*. 2008, roč. 453, č. 7198, s. 1023–1030.
5. NIELSEN, M. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge New York: Cambridge University Press, 2010.
6. BERGOU. *Quantum information processing : theory and implementation*. Cham: Springer, 2021.
7. DUŠEK, M. *Koncepční otázky kvantové teorie*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2002.
8. DAVIES, E. Information and quantum measurement. *IEEE Transactions on Information Theory*. 1978, roč. 24, č. 5, s. 596–599.

9. PERES, A. Neumark's theorem and quantum inseparability. *Foundations of Physics*. 1990, roč. 20, č. 12, s. 1441–1453.
10. JOZSA, R. et al. Entanglement cost of generalised measurements. *Quantum Inf. Comput.* 2003, roč. 3, s. 405–422.
11. PLENIO, M. B.; VIRMANI, S. An introduction to entanglement measures. 2005.
12. BELL, J. S. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics Physique Fizika*. 1964, roč. 1, č. 3, s. 195–200.
13. ZHANG, W. et al. Experimental realization of entanglement in multiple degrees of freedom between two quantum memories. *Nature Communications*. 2016, roč. 7, č. 1.
14. INAGAKI, T. et al. Entanglement distribution over 300 km of fiber. *Optics Express*. 2013, roč. 21, č. 20, s. 23241.
15. BOYD, R. *Nonlinear optics*. 3. vyd. Amsterdam Boston: Academic Press, 2008.
16. MIGDALL, A. *Single-photon generation and detection: physics and applications*. Academic Press, 2013.
17. TOMEČEK, D. *Neklasické kvantové stavy světla: vlastnosti a možné využití*. 2021.
18. MIGA, S.; DEC, J.; KLEEM, W. Non-Linear Dielectric Response of Ferroelectrics, Relaxors and Dipolar Glasses. In: *Ferroelectrics - Characterization and Modeling*. InTech, 2011.
19. SHIH, Y. Entangled photons. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*. 2003, roč. 9, č. 6, s. 1455–1467.
20. RUBIN, M. H. et al. Theory of two-photon entanglement in type-II optical parametric down-conversion. *Physical Review A*. 1994, roč. 50, č. 6, s. 5122–5133.
21. KWIAT, P. G. et al. New High-Intensity Source of Polarization-Entangled Photon Pairs. *Physical Review Letters*. 1995, roč. 75, č. 24, s. 4337–4341.
22. LEVINE, Z. H. et al. Polarization-entangled photon pairs from a periodically poled crystalline waveguide. *Optics Express*. 2011, roč. 19, č. 7, s. 6724.
23. PALACIOS, S. et al. Flux enhancement of photons entangled in orbital angular momentum. *Optics Express*. 2011, roč. 19, č. 15, s. 14108.
24. KUKLEWICZ, C. E. et al. High-flux source of polarization-entangled photons from a periodically poled KTiOPO<sub>4</sub> parametric down-converter. *Physical Review A*. 2004, roč. 69, č. 1.
25. KAISER, F. et al. Polarization entangled photon-pair source based on quantum nonlinear photonics and interferometry. *Optics Communications*. 2014, roč. 327, s. 7–16.
26. FIORENTINO, M.; BEAUSOLEIL, R. G. Compact sources of polarization-entangled photons. *Optics Express*. 2008, roč. 16, č. 24, s. 20149.

27. FEDRIZZI, A. et al. A wavelength-tunable fiber-coupled source of narrowband entangled photons. *Optics Express*. 2007, roč. 15, č. 23, s. 15377.
28. KUZUCU, O.; WONG, F. N. C. Pulsed Sagnac source of narrow-band polarization-entangled photons. *Phys. Rev. A*. 2008, roč. 77, s. 032314.
29. JABIR, M. V.; SAMANTA, G. K. Robust, high brightness, degenerate entangled photon source at room temperature. *Scientific Reports*. 2017, roč. 7, č. 1.
30. KWIAT, P. G. et al. Ultrabright source of polarization-entangled photons. *Physical Review A*. 1999, roč. 60, č. 2, R773–R776.
31. RANGARAJAN, R.; GOGGIN, M.; KWIAT, P. Optimizing type-I polarization-entangled photons. *Optics Express*. 2009, roč. 17, č. 21, s. 18920.
32. STEINLECHNER, F. et al. A high-brightness source of polarization-entangled photons optimized for applications in free space. *Optics Express*. 2012, roč. 20, č. 9, s. 9640.
33. PELTON, M. et al. Bright, single-spatial-mode source of frequency non-degenerate, polarization-entangled photon pairs using periodically poled KTP. *Optics Express*. 2004, roč. 12, č. 15, s. 3573.
34. ALTEPETER, J. B.; JEFFREY, E. R.; KWIAT, P. G. Phase-compensated ultrabright source of entangled photons. *Optics Express*. 2005, roč. 13, č. 22, s. 8951.
35. CIALDI, S. et al. Generation of entangled photon pairs using small-coherence-time continuous wave pump lasers. *Applied Optics*. 2008, roč. 47, č. 11, s. 1832.
36. BENNINK, R. S. Optimal collinear Gaussian beams for spontaneous parametric down-conversion. *Physical Review A*. 2010, roč. 81, č. 5.
37. ERENDO, D. Pump Spectral Bandwidth, Birefringence, and Entanglement in Type-II Parametric Down Conversion. *Research Letters in Optics*. 2009, roč. 2009, s. 1–5.
38. HONG, C. K.; MANDEL, L. Higher-Order Squeezing of a Quantum Field. *Physical Review Letters*. 1985, roč. 54, č. 4, s. 323–325.
39. BACHOR, H.-A.; RALPH, T. C. *A Guide to Experiments in Quantum Optics*. Wiley, 2019.
40. BRAŃCZYK, A. M. *Hong-Ou-Mandel Interference*. arXiv, 2017.
41. MICHLER, M. et al. Interferometric Bell-state analysis. *Physical Review A*. 1996, roč. 53, č. 3, R1209–R1212.
42. TOMEČEK, D. *optix*. Dostupné také z: <https://github.com/cavic19/optix>.
43. PAN, X.-Y. et al. Temperature insensitive type II quasi-phasematched spontaneous parametric downconversion. *Applied Physics Letters*. 2021, roč. 119, č. 2, s. 021107.

## Příloha A Kvantově mechanické odvození SPDC

Předpokládejme, že interakční hamiltonián  $\hat{H}_{INT}$  pro SPDC je dán rovnicí [16]

$$\hat{H}_{INT} \approx \chi^{(2)} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz \hat{\mathbf{E}}_p^{(+)} \hat{\mathbf{E}}_s^{(-)} \hat{\mathbf{E}}_i^{(-)}, \quad (\text{A.0.1})$$

kde pro operátory polí  $\hat{\mathbf{E}}_p^{(+)}$  a  $\hat{\mathbf{E}}_{s,i}^{(+)}$ , kde indexy  $p$ ,  $s$  a  $i$  postupně označují čerpací, signálové a jalové pole,

$$\hat{\mathbf{E}}_p^{(+)} \rightarrow \mathbf{E}_p^{(+)} = \int d\omega_p \mathbf{e}_p \alpha(\omega_p) e^{i(k_p z - \omega_p t)}, \quad (\text{A.0.2})$$

$$\hat{\mathbf{E}}_{s,i}^{(-)} = A \int d\omega_{s,i} \mathbf{e}_{s,i} e^{i(k_{s,i} z - \omega_{s,i} t)} \hat{a}_{\omega_{s,i}}^\dagger, \quad (\text{A.0.3})$$

přičemž  $\mathbf{e}_{p,s,i}$  označují jednotkové vektory stavu polarizace jednotlivých interagujících polí a konstanta  $A$  je společná amplituda signálové a jalové vlny. Je-li interakčním hamiltoniánem vyvíjeno vakuové pole  $|0\rangle$ , je získán výsledný stav pole po interakci  $|\psi\rangle_{SPDC}$

$$|\psi\rangle_{SPDC} \approx -\frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \hat{H}_{INT}(t') |0\rangle, \quad (\text{A.0.4})$$

kde meze časového integrálu  $-\infty$  do  $\infty$  představují dobrou aproximaci reality, vzhledem k tomu, že stav sledujeme dlouze před a dlouze po samotné interakci. Dosazením se získá tvar

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt' \hat{H}(t') = \text{konst.} \underbrace{\chi^{(2)} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_s \mathbf{e}_i}_{\chi_{eff}^{(2)}} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz \iiint d\omega_p d\omega_s d\omega_i \alpha(\omega_p) \times e^{-i(\omega_p - \omega_s - \omega_i)t'} e^{i\Delta k z} \hat{a}_{\omega_s}^\dagger \hat{a}_{\omega_i}^\dagger + h.c., \quad (\text{A.0.5})$$

kde  $h.c$  představuje hermitovskys sruženou první část výrazu. Derivováním podle času se časový integrál redukuje na  $2\pi\delta(\omega_p - \omega_s - \omega_i)$  a opětovným integrováním přes  $\omega_p$  získáváme

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt' \hat{H}(t') = \text{konst.} \chi_{eff}^{(2)} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz \iint d\omega_s d\omega_i e^{i\Delta k z} \alpha(\omega_s + \omega_i) \hat{a}_{\omega_s}^\dagger \hat{a}_{\omega_i}^\dagger + h.c. \quad (\text{A.0.6})$$

Derivováním podle  $z$  získáme

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \hat{H}(t') &= \text{konst.} \chi_{eff}^{(2)} \iint d\omega_s d\omega_i \alpha(\omega_s + \omega_i) L \text{sinc} \left[ \Delta k \frac{L}{2} \right] \hat{a}_{\omega_s}^\dagger \hat{a}_{\omega_i}^\dagger + h.c. \\ &= \text{konst.} \chi_{eff}^{(2)} \iint d\omega_s d\omega_i \alpha(\omega_s + \omega_i) \Phi(\omega_s, \omega_i) \hat{a}_{\omega_s}^\dagger \hat{a}_{\omega_i}^\dagger + h.c., \end{aligned} \quad (\text{A.0.7})$$

kde  $\Phi(\omega_s, \omega_i)$  je synchronizační funkce. Pak dosazením do (A.0.4) je získán výsledný tvar stavu  $|\psi\rangle_{PDC}$

$$|\psi_{PDC}\rangle = \text{konst.} \chi_{eff}^{(2)} \iint d\omega_s d\omega_i \alpha(\omega_s + \omega_i) \Phi(\omega_s, \omega_i) \hat{a}_{\omega_s}^\dagger \hat{a}_{\omega_i}^\dagger |0\rangle. \quad (\text{A.0.8})$$

## Příloha B Technické parametry experimentální sestavy

Tabulka 4: Technické parametry vybraných komponent z experimentální sestavy (obr. 27).

<b>Laserový zdroj od firmy TOPTICA (TOPMODE-405-HP)</b>	
Vlnová délka	405 nm
Šířka spektrální čáry	< 0.01 pm
Stabilita	< 1 pm h <sup>-1</sup>
Výkon bez navázání do vlákna	50 mW
Výkon s navázáním do vlákna	25 mW
<b>Jednomódové vlákno od firmy Toptica (OE-000592)</b>	
Délka	2 m
Vedená vlnová délka	405 nm
Výstupní apertura (NA)	0.07
Průměr generovaného módu (MFD)	3.5 μm
Zachovává polarizaci	ano
M <sup>2</sup> parametr výstupního módu	< 1.2
<b>Jednofotonový detektor od firmy Laser Components (COUNT-100N-FC)</b>	
Účinnost detekce na vlnové délce 810 nm	min. 50 %
Temný šum	max. 100 cps
Průměr aktivní oblasti	min. 100 μm
Pravděpodobnost afer pulsu	max. 0.3 %
<b>Čítací jednotka od firmy Swabian Institute</b>	
Minimální počet nezávislých vstupních kanálů	8
Časové rozlišení	80 ps
Kapacita kontinuálního přenosu dat	8.5 × 10 <sup>6</sup> tag/s
<b>PPKTP krystal od firmy Raicol</b>	
Průřez	1 × 1 mm
Délka	20 mm
Čerpací vlnová délka	405 nm
Generovaná vlnová délka	810 nm
Perioda pólování	10 μm