



**ČESKÉ VYSOKÉ  
UČENÍ TECHNICKÉ  
V PRAZE**

**F3**

**Fakulta elektrotechnická  
Katedra počítačové grafiky a interakce**

**Bakalářská práce**

# **Kreslení grafů metodami algebraické teorie grafů**

**Jiří Povolný**

**Otevřená informatika – Počítačové hry a grafika**

**Květen 2022**

**Vedoucí práce: Ing. Matěj Dostál, Ph.D.**



## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Povolný** Jméno: **Jiří** Osobní číslo: **476603**  
Fakulta/ústav: **Fakulta elektrotechnická**  
Zadávající katedra/ústav: **Katedra počítačové grafiky a interakce**  
Studijní program: **Otevřená informatika**  
Specializace: **Počítačové hry a grafika**

## II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

**Kreslení grafů metodami algebraické teorie grafů**

Název bakalářské práce anglicky:

**Graph drawing using algebraic graph theory**

Pokyny pro vypracování:

Algebraická teorie grafů je odvětví matematiky studující grafy a jejich vlastnosti metodami (nejen lineární) algebry. Téma bakalářské práce navazuje na studium lineární algebry a teorie grafů z bakalářské etapy studia, a rozšiřuje ho. Jedním ze zajímavých problémů teorie grafů jsou geometrické reprezentace grafů, tj. vnořování (abstraktních) grafů do (eukleidovských) prostorů.

Seznamte se s maticovými reprezentacemi grafů. Zopakujte si a rozšiřte znalosti o spektrálních vlastnostech speciálních typů matic, prostudujte vlastnosti Laplaceových matic grafů. Seznamte se se základními pojmy reprezentací grafů a formulujte a dokažte Tutteovu větu o kreslení grafu.

Jako "proof of concept" navrhnete a implementujete jednoduchou aplikaci na tvorbu animace rovinného nakreslení grafu. Text bakalářské práce musí splňovat základní požadavky na matematický text. Při volbě důkazových postupů dbejte, aby výsledný text byl samostatně čitelný jako studijní materiál pro bakalářské studenty.

Seznam doporučené literatury:

J. Geelen: On how to draw a graph, dostupné online  
Ch. Godsil, G. Royle: Algebraic graph theory, Springer-Verlag New York (2001)  
W. T. Tutte: How to draw a graph, Proc. London Math. Soc. (3) 13 (1963) 743-768

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

**Ing. Matěj Dostál, Ph.D. katedra matematiky FEL**

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **11.02.2022** Termín odevzdání bakalářské práce: **20.05.2022**

Platnost zadání bakalářské práce: **30.09.2023**

Ing. Matěj Dostál, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) práce

podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Mgr. Petr Páta, Ph.D.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

\_\_\_\_\_  
Datum převzetí zadání

\_\_\_\_\_  
Podpis studenta



## Poděkování / Prohlášení

Chtěl bych poděkovat své rodině, svým spolužákům a kamarádům za neustálou podporu během mého studia. Chtěl bych též poděkovat kapele Rammstein za jejich koncert v Praze, který mi dodal tak moc potřebné odreagování. Na závěr bych chtěl poděkovat svému školiteli Ing. Matějovi Dostálovi, Ph.D. za jeho nekonečnou trpělivost a nehynoucí podporu.

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze dne 20. 5. 2022

.....

## Abstrakt / Abstract

Tato práce se zabývá algebraickou teorií grafů: studiem teorie grafů metodami lineární algebry. Konkrétně je formulována a dokázána Tutteova věta o kreslení grafů. Součástí práce je i implementace programu ilustrujícího výsledné nakreslení zadaného grafu.

**Klíčová slova:** Teorie grafů, lineární algebra, algebraická teorie grafů, Tutteova věta, OpenGL.

This thesis is concerned with algebraic graph theory, the study of graph theory with the use of linear algebraic methods. More concretely, we give a proof of Tutte's embedding theorem. As a part of the thesis we implement a graph drawing program based on the presented theory.

**Keywords:** Graph theory, linear algebra, algebraic graph theory, Tutte's theorem, OpenGL.

**Title translation:** Graph drawing using algebraic graph theory

## / Obsah

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 Úvod</b>                                 | <b>1</b>  |
| <b>2 Grafy a jejich maticové reprezentace</b> | <b>2</b>  |
| 2.1 Grafy . . . . .                           | 2         |
| 2.2 Symetrické matice . . . . .               | 4         |
| 2.3 Matice sousednosti . . . . .              | 5         |
| 2.4 Matice sousedů/stupňů . . . . .           | 6         |
| 2.5 Matice incidence . . . . .                | 6         |
| 2.6 Laplaceova matice . . . . .               | 8         |
| <b>3 Geometrická reprezentace grafů</b>       | <b>10</b> |
| 3.1 Reprezentace grafů . . . . .              | 10        |
| 3.2 Malování grafů . . . . .                  | 12        |
| 3.3 Tutteova věta o kreslení grafu .          | 18        |
| <b>4 Implementace</b>                         | <b>22</b> |
| 4.1 Python skript . . . . .                   | 22        |
| 4.2 OpenGL projekt . . . . .                  | 22        |
| 4.3 Výsledky . . . . .                        | 23        |
| <b>5 Závěr</b>                                | <b>27</b> |
| <b>Literatura</b>                             | <b>28</b> |
| <b>A Obsah elektronické přílohy</b>           | <b>29</b> |

## Tabulky / Obrázky

|                                   |  |
|-----------------------------------|--|
| <b>2.1</b> Notáčn konvence.....5 | <b>1.1</b> Tematick meme na odlehn...1  |
|                                   | <b>2.1</b> Příklad grafu $X$ .....2  |
|                                   | <b>2.2</b> Příklad orientovaného grafu $X$ ..3   |
|                                   | <b>2.3</b> Příklad ohodnoceného grafu $X$ ..4  |
|                                   | <b>3.1</b> Příklad reprezentace grafu $X$ .. 10  |
|                                   | <b>3.2</b> Příklad reprezentace ohod-<br>nocenho grafu $X$ ..... 11                       |
|                                   | <b>3.1</b> Příklad centroidu $x$ ..... 12  |
|                                   | <b>3.2</b> Příklad, kdy $x$ je centroidem .. 14  |
|                                   | <b>3.3</b> Příklad, kdy $x$ není centroi-<br>dem ..... 14                                  |
|                                   | <b>3.4</b> Vypoítan poloha vrcholu $x$<br>tak, aby byl centroidem..... 16                |
|                                   | <b>3.5</b> Vypoítan poloha vrcholu $x$<br>tak, aby vrchol 2 byl centroi-<br>dem ..... 16 |
|                                   | <b>3.1</b> Znzornn Vety 3.3.7..... 19  |
|                                   | <b>4.1</b> Zobrazení 1 grafu 1 ..... 23  |
|                                   | <b>4.2</b> Zobrazení 2 grafu 1 ..... 24  |
|                                   | <b>4.3</b> Zobrazení 1 grafu 2 ..... 24  |
|                                   | <b>4.4</b> Zobrazení 2 grafu 2 ..... 25  |
|                                   | <b>4.5</b> Zobrazení 1 grafu 3 ..... 25  |
|                                   | <b>4.6</b> Zobrazení 2 grafu 3 ..... 26  |
|                                   | <b>4.7</b> Zobrazení 3 grafu 3 ..... 26  |



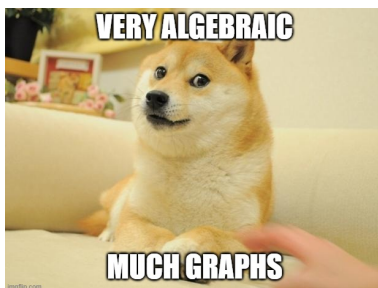
# Kapitola 1

## Úvod

Algebraická teorie grafů je odvětví matematiky studující grafy a jejich vlastnosti metodami nejen lineární algebry.

Jedním ze zajímavých problémů teorie grafů jsou geometrické reprezentace grafů, tj. vnořování abstraktních grafů do eukleidovských prostorů. Speciálně se studuje rovinné kreslení grafů s nekřížícími se hranami a s barycentrickou relativností, které popisuje Tutteova věta o kreslení grafů. Na tuto větu lze nahlížet studiem algebraických vlastností Laplaceovy matice daného grafu.

V této práci se chceme zabývat přípravou podkladů a následně formulovat a dokázat Tutteovu větu o kreslení grafů. Matematické výsledky v tomto textu nejsou původní, jedná se o kompilaci vybrané literatury, viz [1–7]. Součástí práce je i implementace programu ilustrujícího výsledné nakreslení zadaného grafu. Celá implementace je původní, vytvořena vlastní rukou autora této práce.



**Obrázek 1.1.** Tematický meme na odlehčení

# Kapitola 2

## Grafy a jejich maticové reprezentace

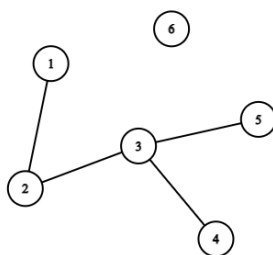
V následující kapitole si připomeneme některé definice z teorie grafů a z lineární algebry, ukážeme si, jak reprezentovat grafy pomocí matic a dokážeme si vztahy mezi těmito maticemi.

### 2.1 Grafy

**Definice 2.1.1.** Necht  $V$  je neprázdná konečná množina, jejíž prvky nazýváme *vrcholy*, a  $E$  je konečná množina dvouprvkových podmnožin množiny  $V$ , jejíž prvky nazýváme *hrany*, pak dvojici  $(V, E)$  nazýváme (*neorientovaný*) *graf*  $X$  a značíme  $X = (V, E)$ .

*Poznámka.* Tato definice zajišťuje, aby každé dva vrcholy byly spojeny nejvýše jednou hranou, a zároveň nedovoluje, aby existovala hrana, která spojuje ten samý vrchol.

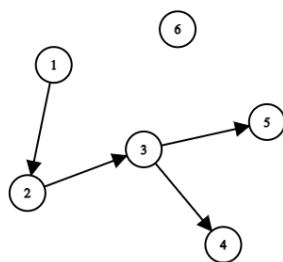
**Příklad 2.1.2.** Příkladem grafu je dvojice  $X = (V, E)$  s vrcholy  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  a s hranami  $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$ .



**Obrázek 2.1.** Příklad grafu  $X$

**Definice 2.1.3.** Necht  $V$  je neprázdná konečná množina, jejíž prvky nazýváme vrcholy, a  $E$  je konečná množina uspořádaných dvojic prvků z množiny  $V$ , jejíž prvky nazýváme *orientované hrany*, pak dvojici  $(V, E)$  nazýváme *orientovaný graf*  $X$  a značíme  $X = (V, E)$ .

**Příklad 2.1.4.** Příkladem orientovaného grafu je dvojice  $X = (V, E)$  s vrcholy  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  a s hranami  $E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 5)\}$ .



**Obrázek 2.2.** Příklad orientovaného grafu  $X$

**Definice 2.1.5.** Necht  $X = (V, E)$  je orientovaný graf, pro který platí, že mezi jakýmkoliv dvěma vrcholy existuje maximálně jedna hrana, pak tento graf nazýváme *prostý*.

**Definice 2.1.6.** Necht  $X = (V, E)$  je orientovaný graf, pak každou hranu  $e = (u, u)$ , kde  $u \in V$ , nazýváme *smyčka*.

**Definice 2.1.7.** Necht  $X = (V, E)$  je orientovaný graf, pro který platí, že nemá hranu, která by byla smyčka, pak tento graf nazýváme *bez smyček*.

*Poznámka.* Všechny orientované grafy, které budeme uvažovat v následujícím textu, budeme považovat za prosté a bez smyček.

**Definice 2.1.8.** Necht  $X = (V, E)$  je graf a  $v$  je vrchol z množiny  $V$ , pak počet hran, které obsahují vrchol  $v$ , nazýváme *stupeň* vrcholu  $v$  a značíme  $\deg(v)$ .

**Příklad 2.1.9.** Pro graf  $X$  z Příkladu 2.1.2 jsou stupně jeho vrcholů následující:

$$\deg(1) = 1, \deg(2) = 2, \deg(3) = 3, \deg(4) = 1, \deg(5) = 1, \deg(6) = 0.$$

**Definice 2.1.10.** Necht  $X = (V, E)$  je graf, pak *orientace*  $\sigma$  grafu  $X$  je orientovaný graf  $X^\sigma = (V, E^\sigma)$ , kdy každé hraně grafu  $X$  přiřadíme libovolnou orientaci.

**Příklad 2.1.11.** Orientovaný graf z Příkladu 2.1.4 je možnou orientací grafu z Příkladu 2.1.2.

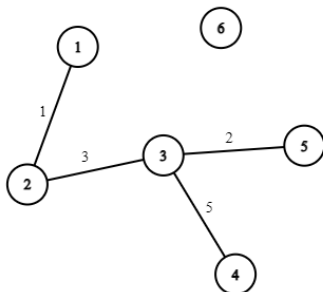
**Definice 2.1.12.** Necht  $X = (V, E)$  je orientovaný graf, pak graf  $X' = (V, E')$ , který vznikne z grafu  $X$  odstraněním orientace všech jeho hran, nazýváme *symetrizace* grafu  $X$ .

**Příklad 2.1.13.** Graf z Příkladu 2.1.2 je symetrizací orientovaného grafu z Příkladu 2.1.4.

**Definice 2.1.14.** Necht  $X = (V, E)$  je graf, pak graf  $X^\omega = (V, E, \omega)$ , který vznikne z grafu  $X$  ohodnocením každé jeho hrany libovolným číslem ( $\omega: E \rightarrow \mathbb{R}$ ), nazýváme *ohodnocený graf*  $X^\omega$  a zobrazení  $\omega$  nazýváme *ohodnocení hran* grafu  $X$ .

**Příklad 2.1.15.** Pro graf  $X$  z Příkladu 2.1.2 může být ohodnocení jeho hran následující:

$$\omega(\{1, 2\}) = 1, \omega(\{2, 3\}) = 3, \omega(\{3, 4\}) = 5, \omega(\{3, 5\}) = 2.$$



**Obrázek 2.3.** Příklad ohodnoceného grafu  $X$

## 2.2 Symetrické matice

**Definice 2.2.1.** Matici  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , pro kterou platí:

$$A = A^T,$$

nazýváme *symetrická matice*.

**Příklad 2.2.2.** Příkladem symetrické matice může být například matice  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Naopak matice  $B$  je příkladem nesymetrické matice:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Věta 2.2.3.** Necht  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je symetrická matice, pak jsou všechna její vlastní čísla reálná.

*Důkaz.* Označme  $\lambda$  jako vlastní číslo matice  $A$  náležící vlastnímu vektoru  $u$  ( $Au = \lambda u$ ), vlastní vektor nemůže být nulový,  $A$  je reálná a symetrická.

Rovnici

$$\lambda u = Au$$

komplexně sdružíme:

$$\begin{aligned} \overline{\lambda u} &= \overline{Au} \\ &= A\bar{u}. \end{aligned}$$

Z předchozí rovnosti nám vyplývá, že pokud je  $\lambda$  vlastním číslem matice  $A$  náležící vlastnímu vektoru  $u$ , pak i  $\bar{\lambda}$  je vlastním číslem matice  $A$  náležícím vlastnímu vektoru  $\bar{u}$ .

Následně si vyjádříme  $\bar{u}^T u$ , kde  $j$ -tý prvek vektoru  $u$  vyjádříme jako součet jeho reálné a imaginární části, podobně si vyjádříme i prvky vektoru  $\bar{u}$ :

$$\begin{aligned}\bar{u}^T u &= \sum_{j=1}^n (a_j - b_j i)(a_j + b_j i) \\ &= \sum_{j=1}^n a_j^2 + b_j^2.\end{aligned}$$

Protože  $u$  a  $\bar{u}$  nemohou být nulové, pak výraz  $\bar{u}^T u$  je nutně kladný.

Nakonec si upravíme výraz  $\lambda \bar{u}^T u$ :

$$\begin{aligned}\lambda \bar{u}^T u &= \bar{u}^T \lambda u \\ &= \bar{u}^T A u \\ &= \bar{u}^T A^T u \\ &= (A \bar{u})^T u \\ &= (\overline{A u})^T u \\ &= (\overline{\lambda u})^T u \\ &= \overline{\lambda} \bar{u}^T u.\end{aligned}$$

Jelikož je výraz  $\bar{u}^T u$  kladný, platí  $\lambda = \overline{\lambda}$ , z čehož vyplývá  $\lambda \in \mathbb{R}$ . ■

## 2.3 Matice susednosti

*Poznámka.* Nyní si zavedeme notační konvenci: prvky vektorů a řádky/sloupce matic, v případech kdy to dává smysl, budeme indexovat vrcholy/hranami grafu následovně:

| notace         | vysvětlení   |
|----------------|--|
| $u_j$          | $j$ -tý prvek vektoru $u$                                |
| $a_u, a_{u^*}$ | $u$ -tý řádek matice $A$                                 |
| $a_{*v}$       | $v$ -tý sloupec matice $A$                               |
| $a_{uv}$       | prvek matice $A$ na $u$ -tém řádku a ve $v$ -tém sloupci |

**Tabulka 2.1.** Notační konvence

**Definice 2.3.1.** Necht  $X = (V, E)$  je graf, pak symetrickou matici  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , kde  $n$  je počet vrcholů grafu  $X$  a pro kterou platí:

$$a_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{když } \exists e \in E, e = \{u, v\}, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

nazýváme *matice susednosti* grafu  $X$ .

**Příklad 2.3.2.** Pro graf  $X$  z Příkladu 2.1.2 je jeho matice susednosti

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 2.4 Matice sousedů/stupňů

**Definice 2.4.1.** Necht  $X = (V, E)$  je graf, pak diagonální matici  $\Delta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , kde  $n$  je počet vrcholů grafu  $X$  a pro kterou platí:

$$a_{uu} = \deg(u), \forall u \in V,$$

nazýváme *matice sousedů/stupňů* grafu  $X$ .

**Příklad 2.4.2.** Pro graf  $X$  z Příkladu 2.1.2 je jeho matice sousedů/stupňů

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 2.5 Matice incidence

**Definice 2.5.1.** Necht  $X = (V, E)$  je orientovaný prostý graf, pak matici  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , kde  $n$  je počet vrcholů grafu  $X$ ,  $m$  je počet hran grafu  $X$  a pro kterou platí:

$$b_{ue} = \begin{cases} -1 & \text{když } \exists e \in E, e = (u, v), \\ 1 & \text{pokud } \exists e \in E, e = (v, u), \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

nazýváme *matice incidence* grafu  $X$ .

**Příklad 2.5.2.** Pro orientovaný graf  $X$  z Příkladu 2.1.4 je jeho matice incidence

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Věta 2.5.3.** Necht  $B$  je matice incidence orientovaného grafu  $X = (V, E)$  a  $X' = (V, E')$  je jeho symetrizace, pak platí:

$$BB^T = \Delta - A,$$

kde  $A$  je matice sousednosti grafu  $X'$  a  $\Delta$  je matice sousedů/stupňů grafu  $X'$ .

*Důkaz.* Označme  $E_u$  jako množinu všech hran  $e \in E$ , které obsahují vrchol  $u$ ,  $b_{*u}^t$  jako  $u$ -tý sloupec matice  $B^T$  a  $Q$  jako matici  $BB^T$ . Všimněme si, že platí následující rovnosti:

$$b_u^T = b_{*u}^t,$$

$$|E_u| = \deg(u).$$

Následně si vyjádříme diagonálu matice  $Q$ ,  $u$ -tý prvek diagonály bude roven skalárnímu součinu

$$b_u b_{*u}^t,$$

tedy:

$$\begin{aligned} q_{uu} &= b_u b_{*u}^t \\ &= b_u b_u^T. \end{aligned}$$

Tento výraz je roven sumě kvadrátů prvků  $u$ -tého řádku matice  $B$ .  $e$ -tý prvek  $u$ -tého řádku matice  $B$  je roven  $-1$ , nebo  $1$ , pokud jeho odpovídající hrana  $e$  obsahuje vrchol  $u$ , v obou těchto případech je jejich kvadrát roven  $1$ , pokud hrana  $e$  neobsahuje vrchol  $u$ , pak je prvek i jeho kvadrát roven  $0$ , tedy suma kvadrátů prvků  $u$ -tého řádku matice  $B$  nám dá počet hran, které obsahují vrchol  $u$ :

$$\begin{aligned} q_{uu} &= \sum_{e \in E_u} b_{ue}^2 \\ &= |E_u| \\ &= \deg(u). \end{aligned}$$

Pro  $u \neq v$  bude prvek  $q_{uv}$  matice  $Q$  roven skalárnímu součinu  $u$ -tého řádku matice  $B$  s transpozicí  $v$ -tého řádku matice  $B$ , což je rovno sumě násobků  $e$ -tého prvků  $u$ -tého řádku matice  $B$  s  $e$ -tým prvkem  $v$ -tého řádku matice  $B$ :

$$\begin{aligned} q_{uv} &= b_u b_{*v}^t \\ &= b_u b_v^T \\ &= \sum_{e \in E} b_{ue} b_{ve}, \end{aligned}$$

$e$ -tý prvek  $u$ -tého řádku matice  $B$  je roven  $-1$ , nebo  $1$ , pokud jeho odpovídající hrana  $e$  obsahuje vrchol  $u$ , pokud hrana  $e$  neobsahuje vrchol  $u$ , pak je prvek roven  $0$ , obdobně to platí pro  $e$ -tý prvek  $v$ -tého řádku matice  $B$ , tedy pokud hrana  $e$  obsahuje vrchol  $u$  i vrchol  $v$ , pak výraz  $b_{ue} b_{ve}$  je roven  $-1 \times 1 = 1 \times -1 = -1$  (nezáleží na orientaci hrany), pokud hrana  $e$  neobsahuje alespoň jeden z vrcholů  $u$  a  $v$ , tak je výraz roven  $0$ . Jelikož mezi dvěma vrcholy může být pouze jedna hrana (jedná se o prostý graf), pak výraz  $\sum_{e \in E} b_{ue} b_{ve}$  může nabývat pouze dvou hodnot:

$$\begin{aligned} q_{uv} &= \sum_{e \in E} b_{ue} b_{ve} \\ &= \begin{cases} -1 & \text{když } \exists e \in E, e = (u, v) \vee e = (v, u), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \end{aligned}$$

Podmínka pro hodnotu  $-1$  se dá přepsat následujícím způsobem:

$$\exists e \in E, e = (u, v) \vee e = (v, u) \Leftrightarrow \exists e' \in E', e' = \{u, v\},$$

kde  $X' = (V, E')$  je symetrizace grafu  $X$ . Když podmínku nahradíme, dostaneme:

$$q_{uv} = \begin{cases} -1 & \text{když } \exists e' \in E', e' = \{u, v\}, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Což odpovídá definici záporné matice sousednosti grafu  $X'$  a jelikož u matice sousednosti nezáleží na orientaci hran, pak to zároveň odpovídá definici záporné matice sousednosti grafu  $X$ .

Prvky na diagonále matice  $Q$  se rovnají prvkům diagonální matice  $\Delta$ , zbylé prvky matice  $Q$  se rovnají prvkům matice  $-A$  a jelikož má matice  $-A$  na diagonále samé nuly, tak platí rovnost:

$$\begin{aligned} Q &= BB^T \\ &= \Delta - A. \end{aligned}$$

■

**Příklad 2.5.4.** Pro orientovaný graf  $X$  z Příkladu 2.1.4 platí:

$$BB^T = \Delta - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 2.6 Laplaceova matice

**Definice 2.6.1.** Necht  $X = (V, E)$  je graf,  $\sigma$  je jakákoliv jeho orientace a  $B$  je matice incidence grafu  $X^\sigma$ , pak matici  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , kde  $n$  je počet vrcholů grafu  $X$  a pro kterou platí:

$$Q = BB^T,$$

nazýváme *Laplaceova matice* grafu  $X$ .

*Poznámka.* Z Věty 2.5.3 vyplývá, že Laplaceova matice nezávisí na orientaci  $\sigma$  grafu  $X$ , jelikož matice sousednosti a matice sousedů/stupňů nezávisí na orientaci grafu  $X$  a tudíž je jeho Laplaceova matice jednoznačně dána.

**Příklad 2.6.2.** Pro graf  $X$  z Příkladu 2.1.2 je jeho Laplaceova matice

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Věta 2.6.3.** Necht  $X = (V, E)$  je graf a  $Q$  je jeho Laplaceova matice, potom pro jakýkoliv vektor  $x \in \mathbb{R}^n$ , kde  $n$  je počet vrcholů z množiny  $V$ , platí:

$$x^T Q x = \sum_{(u,v) \in E} (x_u - x_v)^2.$$

*Důkaz.* Prvně si vyjádříme výraz  $x^T Q x$ :

$$\begin{aligned} x^T Q x &= x^T B B^T x \\ &= (B^T x)^T (B^T x). \end{aligned}$$



Označme  $(B^T x)_e$  jako  $e$ -tý prvek matice  $B^T x$ , protože  $u$ -tý prvek  $e$ -tého řádku matice  $B^T$  je roven  $-1$ , nebo  $1$ , pokud jeho odpovídající hrana  $e$  obsahuje vrchol  $u$ , pokud hrana  $e$  neobsahuje vrchol  $u$ , pak je prvek roven  $0$ , obdobně to platí pro  $v$ -tý prvek  $e$ -tého řádku matice  $B^T$ , tedy  $(B^T x)_e$  je rovno:

$$\pm(x_u - x_v),$$

kde znaménko závisí na orientaci hrany  $e$ . Následně si vyjádříme výraz  $(B^T x)^T (B^T x)$ :

$$\begin{aligned} x^T Q x &= (B^T x)^T (B^T x) \\ &= \sum_{e \in E} (B^T x)_e^2 \\ &= \sum_{(u,v) \in E} (\pm(x_u - x_v))^2 \\ &= \sum_{(u,v) \in E} (x_u - x_v)^2. \end{aligned}$$

■

# Kapitola 3

## Geometrická reprezentace grafů

V této kapitole si ukážeme, jak zobrazit grafy na lineární prostory, jak vypadají matice, které reprezentují tato zobrazení. Dokážeme si vztahy mezi vlastními čísly symetrických matic a jejich principiálních submatic. Odvodíme si souřadnice bodu, který minimalizuje kvadráty vzdáleností od dané množiny bodů. Nakonec se budeme zabývat barycentrickými vlastnostmi geometrických reprezentací grafů a jejich vztahy s maticemi geometrických reprezentací grafů.

Zjednodušeně řečeno: Naučíme se hezky kreslit grafy na roviny.

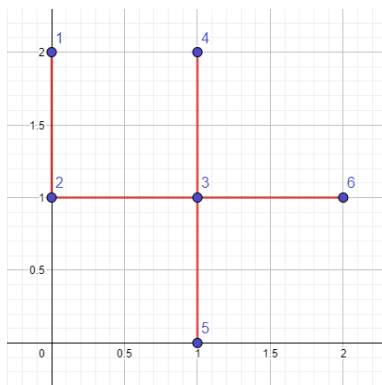
### 3.1 Reprezentace grafů

**Definice 3.1.1.** Necht  $X = (V, E)$  je graf a  $\mathbb{R}^m$  je lineární prostor, pak zobrazení  $V \rightarrow \mathbb{R}^m$  říkáme *reprezentace*  $\rho$  grafu  $X$  v  $\mathbb{R}^m$ .

*Poznámka.* Reprezentace  $\rho$  grafu  $X$  popisuje pozici jeho vrcholů v  $\mathbb{R}^m$ .

**Příklad 3.1.2.** Příkladem reprezentace  $\rho$  grafu  $X = (V, E)$ , s vrcholy  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  a s hranami  $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}\}$ , v lineárním prostoru  $\mathbb{R}^2$  je přiřazení

$$\rho(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \rho(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \rho(3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \rho(4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \rho(5) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \rho(6) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



**Obrázek 3.1.** Příklad reprezentace grafu  $X$

**Definice 3.1.3.** Necht  $X = (V, E)$  je graf a  $\rho$  je jeho reprezentace v  $\mathbb{R}^m$ , pak matici  $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , kde  $n$  je počet vrcholů grafu  $X$  a pro kterou platí:

$$r_{*u} = \rho(u),$$

nazýváme *matici reprezentace* grafu  $X$ .

**Příklad 3.1.4.** Pro graf  $X$  s reprezentací  $\rho$  z Příkladu 3.1.2 je jeho matice reprezentace

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Definice 3.1.5.** Necht  $X = (V, E)$  je graf a  $\rho$  je jeho reprezentace, pak číslo  $\varepsilon(\rho)$ , pro které platí:

$$\varepsilon(\rho) = \sum_{\{u,v\} \in E} \|\rho(u) - \rho(v)\|^2,$$

nazýváme *energie* reprezentace  $\rho$  grafu  $X$ .

**Příklad 3.1.6.** Pro graf  $X$  s reprezentací  $\rho$  z Příkladu 3.1.2 je jeho energie reprezentace

$$\varepsilon(\rho) = 5.$$

**Definice 3.1.7.** Necht  $X = (V, E, \omega)$  je ohodnocený graf a  $\rho$  je jeho reprezentace, pak číslo  $\varepsilon(\rho, \omega)$ , pro které platí:

$$\varepsilon(\rho, \omega) = \sum_{\{u,v\} \in E} \omega(\{u, v\}) \|\rho(u) - \rho(v)\|^2,$$

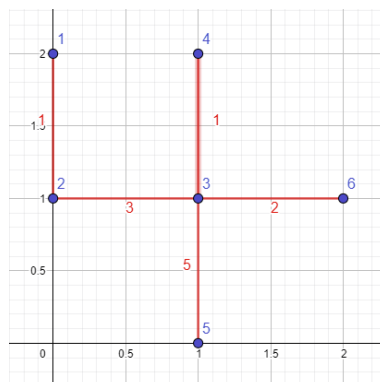
nazýváme *energie* reprezentace  $\rho$  ohodnoceného grafu  $X$ .

**Příklad 3.1.8.** Pro graf  $X$  s reprezentací  $\rho$  z Příkladu 3.1.2 a ohodnocením

$$\omega(\{1, 2\}) = 1, \omega(\{2, 3\}) = 3, \omega(\{3, 4\}) = 1, \omega(\{3, 5\}) = 5, \omega(\{3, 6\}) = 2$$

je jeho energie reprezentace

$$\varepsilon(\rho, \omega) = 12.$$



**Obrázek 3.2.** Příklad reprezentace ohodnoceného grafu  $X$

## 3.2 Malování grafů

**Definice 3.2.1.** Necht  $S \subseteq \mathbb{R}^m$  je množina bodů, pak bod  $x \in \mathbb{R}^m$ , pro který platí:

$$x = \frac{1}{|S|} \sum_{y \in S} y,$$

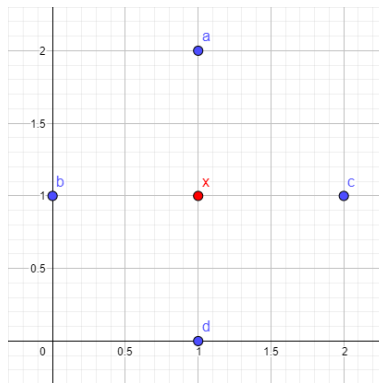
nazýváme *centroid* množiny  $S$ .

**Příklad 3.2.2.** Pro množinu bodů

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

vypadá její centroid následovně:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



**Obrázek 3.1.** Příklad centroidu  $x$

**Věta 3.2.3.** Necht  $S \subseteq \mathbb{R}^m$  je množina bodů a  $x \in \mathbb{R}^m$  je její centroid, pak platí:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{|S|} \sum_{y \in S} y \\ &= \operatorname{argmin}_x \sum_{y \in S} \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

*Důkaz.* Zavedeme si konstantu  $c$ :

$$c = \frac{1}{|S|} \sum_{y \in S} y.$$

Použijeme sumu  $\sum_{y \in S} \|x - y\|^2$ , přičteme k výrazu v sumě nulu  $(c - c)$  a upravíme:

$$\begin{aligned} \sum_{y \in S} \|x - y\|^2 &= \sum_{y \in S} \|(x - c) + (c - y)\|^2 \\ &= \sum_{y \in S} \|x - c\|^2 + 2(x - c)^T(c - y) + \|c - y\|^2 \\ &= \sum_{y \in S} \|x - c\|^2 + 2 \sum_{y \in S} (x - c)^T(c - y) + \sum_{y \in S} \|c - y\|^2. \end{aligned}$$

Výraz v první sumě není závislý na  $y$ , takže ho můžeme vytknout a dostaneme  $\sum_{y \in S} 1 = |S|$ , z druhé sumy můžeme vytknout  $(x - c)^T$ , jelikož daný výraz též není závislý na  $y$ :

$$\sum_{y \in S} \|x - y\|^2 = |S| \|x - c\|^2 + 2(x - c)^T \sum_{y \in S} (c - y) + \sum_{y \in S} \|c - y\|^2.$$

Druhý sčítanec si následně upravíme:

$$\begin{aligned} 2(x - c)^T \sum_{y \in S} (c - y) &= 2(x - c)^T \left( \sum_{y \in S} c - \sum_{y \in S} y \right) \\ &= 2(x - c)^T \left( |S|c - \sum_{y \in S} y \right) \\ &= 2(x - c)^T \left( |S| \frac{1}{|S|} \sum_{y \in S} y - \sum_{y \in S} y \right) \\ &= 2(x - c)^T \left( \sum_{y \in S} y - \sum_{y \in S} y \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Zbývají nám tedy první a třetí sčítanec:

$$\sum_{y \in S} \|x - y\|^2 = |S| \|x - c\|^2 + \sum_{y \in S} \|c - y\|^2.$$

Jelikož je výraz  $\sum_{y \in S} \|c - y\|^2$  konstantní, stačí minimalizovat výraz  $|S| \|x - c\|^2$ , a protože se jedná o násobek dvou nezáporných čísel, pak výsledek bude nejméně nula, což nastane právě tehdy, když za  $x$  dosadíme  $c$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{argmin}_x \sum_{y \in S} \|x - y\|^2 &= \operatorname{argmin}_x |S| \|x - c\|^2 \\ &= c \\ &= \frac{1}{|S|} \sum_{y \in S} y. \end{aligned}$$

■

**Definice 3.2.4.** Necht  $X = (V, E)$  je graf a  $F$  je podmnožina vrcholů množiny  $V$ , pak reprezentaci  $\rho$  grafu  $X$ , pro kterou platí:

$$\forall u \in V \setminus F: \rho(u) = \frac{1}{|S|} \sum_{v \in S} \rho(v),$$

kde  $S$  je množina všech vrcholů, které sousedí s vrcholem  $u$ , nazýváme *barycentricky relativní* podmnožině  $F$ .

*Poznámka.* Pokud je dána reprezentace vrcholů z podmnožiny  $F$ , pak můžeme každému vrcholu  $u \in V \setminus F$  přiřadit reprezentaci tak, aby se každý vrchol  $u$  stal centroidem všech svých sousedů, čímž minimalizujeme energii celé reprezentace (vyplývá z Věty 3.2.3).

*Poznámka.* Reprezentaci nazýváme barycentricky relativní, protože barycentrum je těžiště soustavy hmotných bodů a v našem případě centroid odpovídá těžišti všech jeho sousedů.

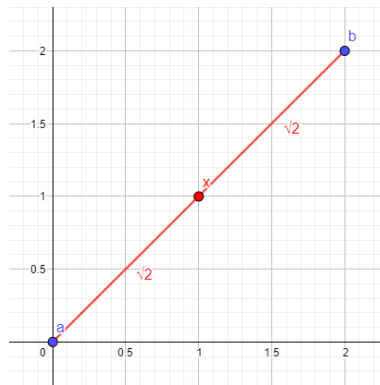
**Příklad 3.2.5.** Pro graf  $G = (V, E)$  s vrcholy  $V = \{a, b, x\}$ , s hranami  $E = \{\{a, x\}, \{b, x\}\}$  a s podmnožinou vrcholů  $F = \{a, b\}$  s reprezentací

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \rho(b) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

hledáme reprezentaci  $x$ . Když zvolíme reprezentaci  $x$  tak, aby  $x$  byl centroid, tj.

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

pak je energie reprezentace  $\varepsilon(\rho) = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4$  a je minimální.

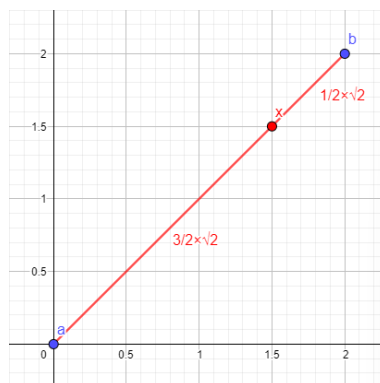


**Obrázek 3.2.** Příklad, kdy  $x$  je centroidem

Když zvolíme reprezentaci  $x$  tak, aby  $x$  nebyl centroid, např.

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix},$$

pak je energie reprezentace  $\varepsilon(\rho) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2 = 5$  a není minimální.



**Obrázek 3.3.** Příklad, kdy  $x$  není centroidem

**Věta 3.2.6.** Necht  $X = (V, E)$  je graf,  $F$  je podmnožina vrcholů množiny  $V$ ,  $\rho$  je reprezentace grafu  $X$ ,  $R$  je matice reprezentace grafu  $X$  a  $Q$  je Laplaceova matice grafu  $X$ , pak platí:

$\rho$  je barycentricky relativní podmnožině  $F$  právě tehdy, když pro všechny vrcholy  $u$  z množiny  $V$ , které se nenacházejí v podmnožině  $F$ , platí:  $u$ -tý sloupec matice  $RQ$  je roven nulovému vektoru.

*Důkaz.* Označme  $S_u$  jako množinu všech vrcholů, které sousedí s vrcholem  $u$ , a  $(RQ)_{*u}$  jako  $u$ -tý sloupec matice  $RQ$ . Všimněme si, že pro každý vrchol  $u$  platí rovnost

$$|S_u| = \deg(u).$$

Následně si vyjádříme  $u$ -tý sloupec matice  $RQ$ , prvek  $q_{uu}$  na diagonále matice  $Q$  je roven  $\deg(u)$ , tento prvek je vynásoben  $u$ -tým sloupcem matice  $R$ , který je roven  $\rho(u)$ :

$$\deg(u)\rho(u),$$

zbytek  $u$ -tého sloupce matice  $Q$  je roznásoben zbytkem matice  $R$ , tedy za každého souseda  $v$  vrcholu  $u$  dostáváme jeho zápornou reprezentaci:

$$- \sum_{v \in S_u} \rho(v),$$

takže  $u$ -tý sloupec matice  $RQ$  je roven:

$$\begin{aligned} (RQ)_{*u} &= \deg(u)\rho(u) - \sum_{v \in S_u} \rho(v) \\ &= |S_u|\rho(u) - \sum_{v \in S_u} \rho(v). \end{aligned}$$

Výraz bude roven nulovému vektoru právě tehdy, když bude vrchol  $u$  centroidem:

$$\begin{aligned} |S_u|\rho(u) - \sum_{v \in S_u} \rho(v) &= 0 \\ |S_u|\rho(u) &= \sum_{v \in S_u} \rho(v) \\ \rho(u) &= \frac{1}{|S_u|} \sum_{v \in S_u} \rho(v). \end{aligned}$$

Pokud jsou pro všechny vrcholy  $u \in V \setminus F$  jejich odpovídající sloupce matice  $RQ$  nulovými vektory, pak jsou všechny vrcholy  $u$  centroidy a tím pádem je reprezentace  $\rho$  z definice barycentricky relativní podmnožině  $F$ . ■

*Poznámka.* Pokud máme daný graf  $X$ , podmnožinu jeho vrcholů  $F$  a reprezentaci vrcholů z podmnožiny  $F$ , můžeme si spočítat Laplaceovu matici  $Q$  grafu  $X$ , a pak si jen stačí dopočítat zbývající reprezentace vrcholů, které nejsou z podmnožiny  $F$ , tak, aby matice  $RQ$  měla na odpovídajících sloupcích nulové vektory, a tím získáme jistotu, že výsledná reprezentace bude barycentricky relativní podmnožině  $F$ .

**Příklad 3.2.7.** Pro graf  $G = (V, E)$  s vrcholy  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, x\}$ , s hranami  $E = \{\{1, 2\}, \{2, x\}, \{x, 3\}, \{x, 4\}, \{x, 5\}\}$ , s podmnožinou vrcholů  $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  s reprezentací

$$\rho(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \rho(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \rho(3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \rho(4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \rho(5) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

s Laplaceovu maticí

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

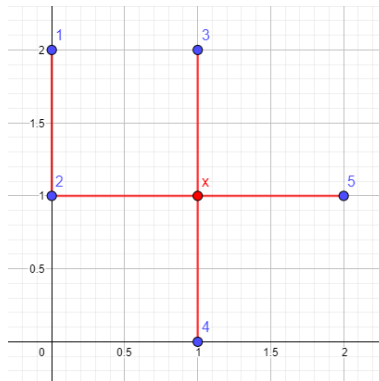
a s maticí reprezentace

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & \rho(x_1) \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & \rho(x_2) \end{pmatrix}$$

je jeho matice

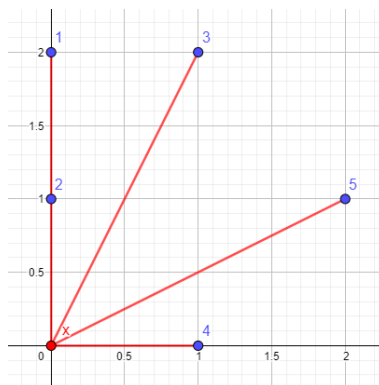
$$RQ = \begin{pmatrix} 0 & -\rho(x_1) & 1 - \rho(x_1) & 1 - \rho(x_1) & 2 - \rho(x_1) & 4\rho(x_1) - 4 \\ 1 & -\rho(x_2) & 2 - \rho(x_2) & -\rho(x_2) & 1 - \rho(x_2) & 4\rho(x_2) - 4 \end{pmatrix}.$$

Zde můžeme vidět, že stačí dosadit za  $\rho(x_1)$  a  $\rho(x_2)$  hodnotu 1, a vrchol  $x$  bude centroidem.



**Obrázek 3.4.** Vypočítaná poloha vrcholu  $x$  tak, aby byl centroidem

Můžeme si také všimnout, že když dosadíme za obě proměnné hodnotu 0, tak se vrchol 2 stane centroidem.



**Obrázek 3.5.** Vypočítaná poloha vrcholu  $x$  tak, aby vrchol 2 byl centroidem

**Věta 3.2.8.** *Nechť  $X = (V, E)$  je souvislý graf,  $F$  je podmnožina vrcholů množiny  $V$ ,  $G = \{e \in E \mid \exists u \in F: u \in e\}$  je podmnožina hran a  $\sigma$  je reprezentace podmnožiny  $F$  v  $\mathbb{R}^m$ , pak platí:*



Jestliže  $Y = (V \setminus F, E \setminus G)$  je souvislý graf, potom existuje právě jedna reprezentace  $\rho$  grafu  $X$ , která rozšiřuje  $\sigma$  a je barycentricky relativní podmnožině  $F$ .

*Důkaz.* Označme  $Q$  jako Laplaceovu matici grafu  $X$ :

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & B \\ B^T & Q_2 \end{pmatrix},$$

kde řádky a sloupce matice  $Q_1$  jsou indexovány vrcholy z podmnožiny  $F$ ,  $R$  jako matici reprezentace grafu  $X$ :

$$R = (R_1 \quad R_2),$$

kde sloupce  $R_1$  odpovídají reprezentaci  $\sigma$  vrcholů z podmnožiny  $F$ . Pak  $\rho$  rozšiřuje  $\sigma$  a je barycentricky relativní podmnožině  $F$  právě tehdy, když:

$$\begin{aligned} (R_1 \quad R_2) \begin{pmatrix} Q_1 & B \\ B^T & Q_2 \end{pmatrix} &= (Y_1 \quad 0) \\ R_1 B + R_2 Q_2 &= 0, \end{aligned}$$

pokud existuje inverze k matici  $Q_2$ , pak dostáváme:

$$\begin{aligned} R_2 &= -R_1 B Q_2^{-1} \\ Y_1 &= R_1 Q_1 + R_2 B^T \\ &= R_1 Q_1 - R_1 B Q_2^{-1} B^T \\ &= R_1 (Q_1 - B Q_2^{-1} B^T). \end{aligned}$$

Nyní chceme dokázat, že existuje inverze k matici  $Q_2$ . Označme  $Y = (V \setminus F, E \setminus G)$  jako souvislý graf (platí z předpokladu věty), pak existuje nezáporná diagonální matice  $\Delta$  taková, že platí:

$$Q_2 = Q(Y) + \Delta,$$

kde  $Q(Y)$  je Laplaceova matice grafu  $Y$  a  $\Delta$  představuje matici, jejíž prvky  $\Delta_{uu}$  jsou rovny počtu vrcholů z podmnožiny  $F$ , s kterými sousedí vrchol  $u$  z množiny  $V \setminus F$ . Jelikož  $X$  je souvislý graf, tak  $\Delta \neq 0$ . Následně chceme dokázat, že matice  $Q_2$  je pozitivně definitní, proto si vyjádříme výraz  $x^T Q_2 x$ :

$$\begin{aligned} x^T Q_2 x &= x^T Q(Y) x + x^T \Delta x \\ &= \sum_{(u,v) \in E \setminus G} (x_u - x_v)^2 + x^T \Delta x. \end{aligned}$$

Vidíme, že první sčítanec je nezáporný a je roven 0 právě tehdy, když jsou si všechny prvky  $x$  rovny:

$$x = c \mathbf{1},$$

kde  $c$  může být jakékoliv číslo a  $\mathbf{1}$  je jednotkový vektor stejné velikosti jako  $x$ . Nyní dosadíme za  $x$  do druhého sčítance a dostaneme:

$$\begin{aligned} x^T \Delta x &= c \mathbf{1}^T \Delta c \mathbf{1} \\ &= c^2 \mathbf{1}^T \Delta \mathbf{1}, \end{aligned}$$

což je rovno nula právě tehdy, když  $c = 0$ , z čehož vyplývá:

$$x^T Q_2 x > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

a z toho vyplývá, že matice  $Q_2$  je pozitivně definitní, což nám zaručuje existenci inverze k matici  $Q_2$ . ■

### 3.3 Tutteova věta o kreslení grafu

**Definice 3.3.1.** Necht  $X = (V, E)$  je souvislý graf, pak ho nazýváme *k-souvislý*, pokud pro něj platí, že když odstraníme jakýchkoliv  $k - 1$  vrcholů z množiny  $V$  a jejich odpovídající hrany z množiny  $E$ , tak vzniklý graf zůstane souvislý.

**Definice 3.3.2.** Necht  $X = (V, E)$  je graf,  $\mathbb{R}^2$  je lineární prostor,  $\rho$  je reprezentace grafu  $X$  v  $\mathbb{R}^2$  a  $\alpha$  je prosté zobrazení, které přiřazuje hranám z množiny  $E$  prosté spojité křivky v  $\mathbb{R}^2$ , pro které platí, že křivka  $\alpha(\{u, v\})$  má krajní body v  $\rho(u)$  a  $\rho(v)$ , pak dvojici  $(\rho, \alpha)$  nazýváme *nakreslení grafu  $X$  na rovinu*.

**Definice 3.3.3.** Necht  $X = (V, E)$  je graf a  $(\rho, \alpha)$  je takové nakreslení grafu  $X$  na rovinu, že křivky odpovídající různým hranám mají společné nejvýše krajní body, pak toto nakreslení grafu  $X$  na rovinu nazýváme *planární*.

**Definice 3.3.4.** Necht  $X = (V, E)$  je graf, pak ho nazýváme *planární*, jestliže existuje planární nakreslení grafu  $X$  na rovinu. Planární graf  $X$  společně s jeho planárním nakreslením na rovinu nazýváme *topologický planární graf*.

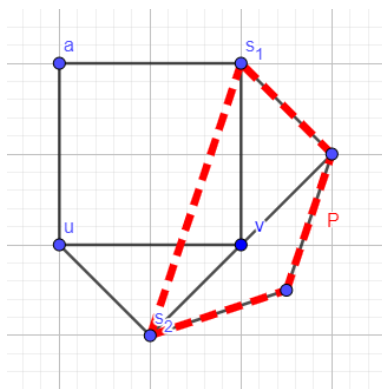
**Definice 3.3.5.** Necht  $(X, \rho, \alpha)$  je topologický planární graf, pak minimální části roviny, které jsou ohraničeny křivkami odpovídajícími hranám grafu, nazýváme *stěny* topologického planárního grafu  $(X, \rho, \alpha)$ .

**Věta 3.3.6 (Kuratowského věta).** Necht  $X = (V, E)$  je graf, pak platí, že graf  $X$  je planární právě tehdy, když neobsahuje podgraf vzniklý dělením úplného grafu  $K_5$  nebo úplného bipartitního grafu  $K_{3,3}$ .

*Poznámka.* Větu 3.3.6 nebudeme dokazovat, neboť důkaz této věty je velice komplexní a je to nad rámec této práce.

**Věta 3.3.7.** Necht  $X = (V, E)$  je 3-souvislý planární graf,  $(X, \rho, \alpha)$  je topologický planární graf,  $\{u, v\}$  je nějaká jeho hrana a necht  $S_1$  a  $S_2$  jsou množiny vrcholů, které tvoří stěny grafu  $(X, \rho, \alpha)$ , jež obsahují hranu  $\{u, v\}$ . Necht  $P$  je cesta v grafu  $X$ , která začíná v nějakém vrcholu z množiny  $S_1 \setminus \{u, v\}$ , končí v jakémkoliv vrcholu z množiny  $S_2 \setminus \{u, v\}$  a neobsahuje ani jeden z vrcholů  $\{u, v\}$ , potom každá cesta v grafu  $X$  z vrcholu  $u$  do vrcholu  $v$  buď obsahuje nějaký vrchol z cesty  $P$ , nebo obsahuje hranu  $\{u, v\}$ .

*Důkaz.* Označme  $s_1$  a  $s_2$  jako vrcholy, které jsou na koncích cesty  $P$ , uvažujme uzavřenou křivku na rovině, která se skládá z křivek odpovídajícím hranám, které tvoří cestu  $P$  z vrcholu  $s_1$  do vrcholu  $s_2$ , a z křivky  $k$ , která spojuje vrcholy  $s_1$  a  $s_2$  tak, že leží pouze ve stěnách  $S_1$  a  $S_2$  a kříží jenom křivku, která odpovídá hraně  $\{u, v\}$ . Křivka  $k$  odděluje vrchol  $u$  od vrcholu  $v$ , takže každá cesta  $Q$  v grafu  $X$ , která propojuje vrchol  $u$  a vrchol  $v$ , musí překřížit křivku  $k$ . Z toho vyplývá, že buď se cesta  $Q$  skládá pouze z hrany  $\{u, v\}$ , nebo obsahuje nějaký vrchol z cesty  $P$ . ■



**Obrázek 3.1.** Znárodnění Věty 3.3.7,  $S_1 = \{u, v, a, s_1\}$ ,  $S_2 = \{u, v, s_2\}$  a cesta  $P$

**Definice 3.3.8.** Necht  $X = (V, E)$  je 3-souvislý planární graf,  $(X, \rho, \alpha)$  je topologický planární graf, pak reprezentaci  $\rho$  grafu  $X$  nazýváme *Tutteovou*, pokud existuje stěna  $F$  grafu  $(X, \rho, \alpha)$  taková, že reprezentace  $\rho$  přiřadí vrcholům ze stěny  $F$  souřadnice tak, že budou tvořit ryze konvexní mnohoúhelník, kde hrany, které tvoří stěnu  $F$ , budou propojovat jeho po sobě jdoucí vrcholy, a zároveň je reprezentace  $\rho$  barycentricky relativní stěně  $F$ . Stěnu  $F$  nazýváme *okrajová*.

**Věta 3.3.9 (Tutteova věta o kreslení grafu).** Necht  $X = (V, E)$  je 3-souvislý planární graf,  $\rho$  je Tutteova reprezentace grafu  $X$  a  $\alpha$  je prosté zobrazení takové, že každé hraně  $\{u, v\}$  z množiny  $E$  přiřadí úsečku, která spojuje vrcholy  $u$  a  $v$ , pak  $(X, \rho, \alpha)$  je topologický planární graf.

*Poznámka.* Větu 3.3.9 si dokážeme na konci této kapitoly.

**Věta 3.3.10.** Necht  $X = (V, E)$  je 3-souvislý planární graf,  $\rho$  je Tutteova reprezentace grafu  $X$  a  $F$  je okrajová stěna, pak pro všechny vrcholy  $u$  z množiny  $V \setminus F$  platí, že pokud povedeme v  $\mathbb{R}^2$  přímku  $l$  přes bod  $\rho(u)$ , tak pokud existuje vrchol  $v$  z množiny  $V$ , který je sousedem vrcholu  $u$  a jeho reprezentace  $\rho(v)$  leží v jedné z polorovin, které odděluje přímka  $l$ , pak musí existovat soused vrcholu  $u$ , jehož reprezentace leží v opačné polorovině.

*Důkaz.* Jelikož je graf  $X$  3-souvislý, pak každý jeho vrchol musí mít alespoň 3 sousedy, následně nám pro všechny vrcholy  $u$  z množiny  $V \setminus F$  platí, že bod  $\rho(u)$  je těžištěm všech svých sousedů a z toho již vyplývá tvrzení věty. ■

**Věta 3.3.11.** Necht  $X = (V, E)$  je 3-souvislý planární graf,  $\rho$  je Tutteova reprezentace grafu  $X$  a  $F$  je okrajová stěna, pak pro všechny vrcholy  $u$  z množiny  $V \setminus F$  platí, že bod  $\rho(u)$  leží striktně uvnitř mnohoúhelníku  $\rho(F)$ .

*Důkaz.* Pro všechny vrcholy  $u$  z množiny  $V \setminus F$  platí, že bod  $\rho(u)$  je těžištěm všech svých sousedů, tedy jejich poloha je závislá na jejich sousedech a pouze body  $\rho(v)$ , které tvoří mnohoúhelník  $\rho(F)$  mají danou polohu, takže v konečném důsledku je poloha bodů  $\rho(u)$  závislá na poloze bodů  $\rho(v)$ , z čehož vyplývá, že každý bod  $\rho(u)$  je váženým těžištěm bodů  $\rho(v)$ , kde váhy alespoň 3 bodů z  $\rho(F)$  jsou kladné a váhy zbylých bodů jsou nezáporné, jelikož se jedná o 3-souvislý graf, tedy body  $\rho(u)$  musí nutně ležet striktně uvnitř mnohoúhelníku  $\rho(F)$ . ■

**Věta 3.3.12.** *Nechť  $X = (V, E)$  je 3-souvislý planární graf,  $\rho$  je Tutteova reprezentace grafu  $X$ ,  $F$  je okrajová stěna a  $H$  je polorovina v  $\mathbb{R}^2$ , pak podgraf  $G$ , který je tvořen vrcholy  $u$  z množiny  $V$ , jejichž reprezentace  $\rho(u)$  leží v  $H$ , je souvislý.*

*Důkaz.* Uvažujme vektor  $t \in \mathbb{R}^2$  takový, že hraniční přímkou  $l$  poloroviny  $H$  můžeme popsat obecnou rovnicí jako  $t^T x = \mu$ , aby platilo:

$$x \in H \Leftrightarrow t^T x \geq \mu.$$

Mějme vrchol  $u$  z množiny  $V$  takový, že  $\rho(u) \in H$  a vrchol  $v$  z množiny  $V$  takový, že maximalizuje  $t^T \rho(v)$ , pak víme, že bod  $\rho(v)$  má nejdelší vzdálenost ze všech ostatních bodů grafu  $X$ , které jsou v polorovině  $H$ , od přímky  $l$ , takže se musí jednat o bod ze stěny  $F$ .

Dále si nadefinujeme pro každý vrchol  $a$  z množiny  $V$  funkci  $t(a) = t^T \rho(a)$ . Uvidíme, že existuje cesta v podgrafu  $G$  z vrcholu  $u$  do vrcholu  $v$ , pro kterou funkce  $t$  nebude klesat, takže všechny body, které tvoří tuto cestu, leží v polorovině  $H$ . Nejdříve vezmeme v potaz situaci, kdy  $t(u) = t(v)$ , v tomto případě nám vyplývá, že  $u \in F$ . Jelikož  $\rho(F)$  je striktně konvexní, tak  $(\rho(u), \rho(v))$  je stěna mnohoúhelníku  $\rho(F)$  a zároveň se jedná o reprezentaci hrany  $\{u, v\}$ .

Pokud nastane situace  $t(u) < t(v)$ , tak stačí ukázat, že existuje cesta z vrcholu  $u$  do nějakého vrcholu  $a$ , pro který platí  $t(u) < t(c)$ , pro kterou funkce  $t$  nebude klesat. Potom můžeme pokračovat v hledání cesty z vrcholu  $c$  do vrcholu  $v$ . Nechť  $W$  je množina všech vrcholů  $w$ , pro které existuje cesta z  $u$  do  $w$  tak, že  $t(w) = t(u)$ . Jelikož je graf  $X$  souvislý, musí existovat vrchol  $w \in W$ , který má souseda  $a \notin W$ . Z Věty 3.3.10 vyplývá, že  $w$  musí mít souseda  $a$ , pro kterého platí  $t(a) > t(w)$ . Proto cesta z vrcholu  $u$  přes  $W$  do vrcholu  $a$  existuje. ■

**Věta 3.3.13.** *Nechť  $X = (V, E)$  je 3-souvislý planární graf,  $\rho$  je Tutteova reprezentace grafu  $X$  a  $F$  je okrajová stěna, pak pro všechny vrcholy  $u$  z množiny  $V$  platí, že bod  $\rho(u)$  není kolineární se všemi svými sousedy.*

*Důkaz.* Pro vrcholy  $v$  z množiny  $F$  platí, že mají alespoň dva sousedy z množiny  $F$ , s kterými tvoří část ryze konvexního mnohoúhelníku  $\rho(F)$ , takže nejsou s těmito svými sousedy kolineární, z čehož vyplývá, že nejsou kolineární se všemi svými sousedy.

Pro ostatní vrcholy předpokládejme sporem, že existuje bod  $\rho(a)$ , který je kolineární se všemi svými sousedy. Pak nechť  $l$  je přímka, na které všechny tyto body leží, a nechť  $S^+$  ( $S^-$ ) jsou všechny body, které leží nad (pod) přímkou  $l$ . Věta 3.3.12 nám říká, že oba grafy, které generují tyto množiny, jsou souvislé. Nechť  $W$  je množina všech vrcholů  $w$ , do kterých existuje cesta z vrcholu  $a$ , takových, že všichni sousedi vrcholu  $w$  leží na přímce  $l$ . Vrchol  $a$  patří do množiny  $W$ . Nechť  $Y$  je množina vrcholů, které leží na  $l$  a zároveň jsou sousedi vrcholů z množiny  $W$ , ale sami nenáleží množině  $W$ . Jelikož vrcholy z  $Y$  nejsou v množině  $W$ , tak Věta 3.3.10 implikuje, že každý vrchol z množiny  $Y$  má sousedy jak z množiny  $S^+$ , tak i z množiny  $S^-$ , jelikož je graf  $X$  3-souvislý a odstranění všech vrcholů z množiny  $Y$  by odpojilo množinu  $W$  od zbytku grafu, tak se v množině  $Y$  nachází alespoň 3 vrcholy, nechť se jedná o  $y_1, y_2$  a  $y_3$ .

Nyní dosáhneme sporu tím, že ukážeme, že graf  $X$  obsahuje podgraf vzniklý dělením úplného bipartitního grafu  $K_{3,3}$ . Tři vrcholy na jedné straně  $K_{3,3}$  jsou  $y_1, y_2$  a  $y_3$ . Zbylou trojici postupně získáme dělením množin  $S^+, S^-$  a  $W$ . ■

**Věta 3.3.14.** *Nechť  $X = (V, E)$  je 3-souvislý planární graf,  $\rho$  je Tutteova reprezentace grafu  $X$ ,  $F$  je okrajová stěna,  $\{u, v\}$  je hrana z množiny  $E$ ,  $l$  je přímka, která prochází*

body  $\rho(u)$  a  $\rho(v)$  a  $F_0, F_1$  jsou stěny grafu  $X$ , které sousedí s hranou  $\{u, v\}$ , pak body z  $\rho(F_0)$  a body z  $\rho(F_1)$ , kromě bodů  $\rho(u)$  a  $\rho(v)$ , leží na opačných stranách přímky  $l$  a žádný z nich neleží na přímce  $l$ .

*Důkaz.* Předpokládejme sporem, že věta neplatí, pak bez újmy na obecnosti předpokládejme, že existují body z  $\rho(F_0)$  a body z  $\rho(F_1)$ , které leží na, nebo pod přímkou  $l$ . Necht  $f_0$  a  $f_1$  jsou takové dva body, pak z Věty 3.3.10 a z Věty 3.3.13 víme, že body  $f_0$  a  $f_1$  mají sousedy, kteří leží striktně pod přímkou  $l$ . Z věty 3.3.12 zase víme, že existuje cesta  $P$ , která propojuje  $f_0$  a  $f_1$ , a všechny její body, kromě  $f_0$  a  $f_1$ , leží striktně pod přímkou  $l$ .

Na druhou stranu, můžeme podobně ukázat, že oba body  $\rho(u)$  a  $\rho(v)$  mají sousedy nad přímkou  $l$  a jsou propojeny cestou, jejíž body leží striktně nad přímkou  $l$ , takže tato cesta nemůže obsahovat hranu  $\{u, v\}$  a musí být oddělena od cesty  $P$ , což je spor s Větou 3.3.7. ■

*Poznámka.* Nyní bude následovat důkaz Věty 3.3.9.

*Důkaz.* Řekneme, že bod na rovině je *obecný*, pokud neleží na žádném bodu  $\rho(u)$  ani na žádné úsečce  $(\rho(u), \rho(v))$ , kde  $u$  a  $v$  jsou vrcholy z množiny  $V$  grafu  $X$ . Prvně si ukážeme, že každý obecný bod leží v právě jedné stěně grafu  $X$ .

Začneme s body, které se nacházejí mimo okrajovou stěnu  $F$ , takový bod leží pouze ve venkovní stěně. Pro každý další obecný bod můžeme namalovat křivku mezi nimi takovou, že nebude procházet přes bod  $\rho(u)$  a nikdy neprotíná průsečík úseček odpovídajících hranám grafu  $X$ , to znamená, že pouze kříží tyto úsečky v jejich vnitřcích. Věta 3.3.14 nám říká, že když naše křivka protne nějakou takovou úsečku, tak přejde z jedné stěny do druhé, takže v žádnou chvíli se nestane, aby naše křivka byla ve dvou stěnách zároveň.

Nyní předpokládejme sporem, že se dvě úsečky odpovídající hranám grafu  $X$  překříží mimo svoje koncové body, pak musí existovat nějaký obecný bod poblíž jejich průsečíku, který leží v alespoň dvou stěnách, což je spor. ■

# Kapitola 4

## Implementace

V rámci této práce jsme implementovali program ilustrující výsledné nakreslení zadaného grafu dle Tutteovy věty o kreslení grafů. Součástí je OpenGL projekt, který vykresluje graf dle zadaných souřadnic, které generuje Python skript, za nemalého využití knihovny NumPy<sup>1</sup>, ze zadaného abstraktního grafu, vše je řízeno pomocí bashového skriptu, který řeší předávání vstupů a výstupů mezi OpenGL projektem a Python skriptem. Celá implementace je uložena na GitHubu<sup>2</sup>.

### 4.1 Python skript

Skript načte abstraktní graf ze vstupního souboru, následně najde stěny tohoto grafu pomocí algoritmu, který implementuje prohledávání do šířky.

Ze stěn vybere tu, co obsahuje nejvíce vrcholů, a ustanoví ji jako okrajovou stěnu. Skript poskytuje i možnost vybrat si okrajovou stěnu ručně pomocí argumentů při spuštění programu, v takovém případě se přeskočí algoritmus hledající stěny grafu.

Okrajové stěně vypočítá souřadnice v  $\mathbb{R}^2$  tak, aby tvořila pravidelný  $n$ -úhelník, poté vytvoří Laplaceovu matici zadaného grafu, kterému prohodí indexy jednotlivých vrcholů, aby počáteční řádky a sloupce výsledné matice odpovídali vrcholům okrajové stěny.

Souřadnice okrajové stěny následně zneužije pro výpočet souřadnic ostatních vrcholů zadaného grafu, výpočet je implementací první části důkazu Věty 3.2.8.

Pomocí konvexní kombinace souřadnic vrcholů, které tvoří okrajovou stěnu, vygeneruje náhodné souřadnice pro vrcholy, které se nenachází v okrajové stěně. Skript, pomocí argumentů při spuštění programu, nabízí možnost vygenerovat náhodné souřadnice i pro vrcholy, které tvoří okrajovou stěnu.

Na konci uloží souřadnice do výstupních souborů.

### 4.2 OpenGL projekt

Projekt načte abstraktní graf a souřadnice jeho vrcholů ze vstupních souborů, poté inicializuje knihovny GLUT<sup>3</sup> a GLEW<sup>4</sup>.

Následně spustí hlavní smyčku, ve které se vykreslují vrcholy a hrany zadaného grafu. Vrcholy mají na začátku náhodně vygenerované souřadnice.

Během běhu program čeká na vstupy z klávesnice a při zmáčknutí klávesy  $F$  spustí animaci, která pomocí lineární interpolace mění hodnoty souřadnic vrcholů, dokud nezíská souřadnice vypočítané pomocí Tutteovy věty o kreslení grafů.

<sup>1</sup> <https://cs.wikipedia.org/wiki/NumPy>

<sup>2</sup> <https://github.com/Urlikp/BachelorProject>

<sup>3</sup> <https://cs.wikipedia.org/wiki/GLUT>

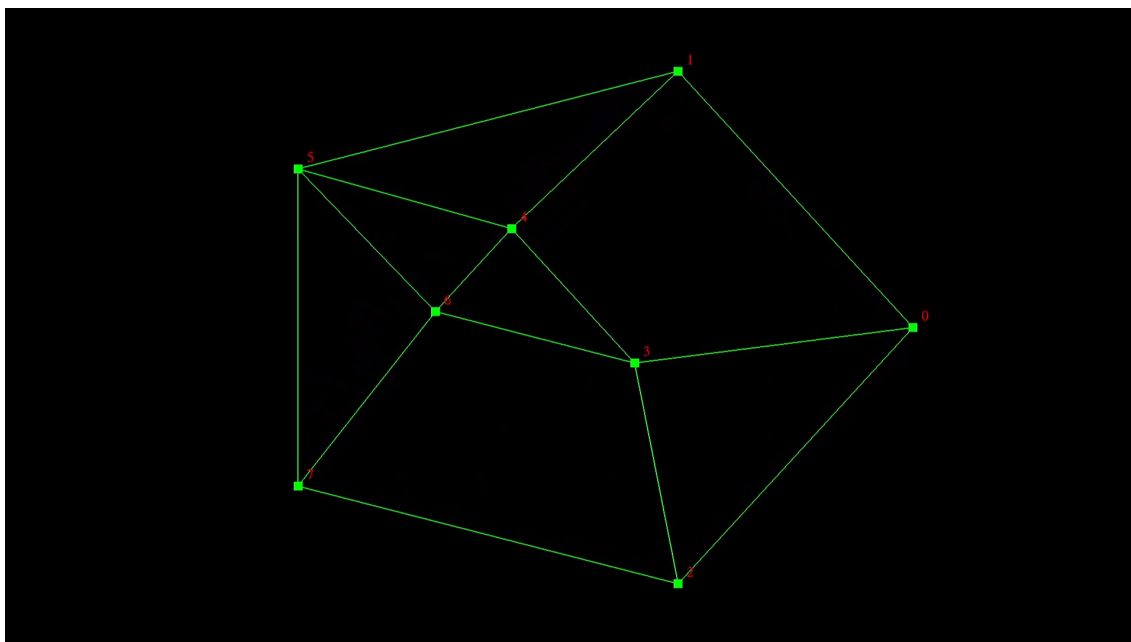
<sup>4</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/OpenGL#Extension\\_loading\\_libraries](https://en.wikipedia.org/wiki/OpenGL#Extension_loading_libraries)

Rychlost změny souřadnic kopíruje rychlost stoupání upravené sigmoidy<sup>5</sup>, čímž dosáhneme plynulé animace, kdy na začátku a na konci animace je změna souřadnic nejmenší a uprostřed animace je změna největší.

## 4.3 Výsledky

Výsledné animace jsme nahráli pomocí programu OBS Studio<sup>6</sup> a vzniklá videa jsou k dispozici v elektronické příloze nebo na YouTube<sup>7</sup>.

Následují vybrané screenshoty z aplikace:

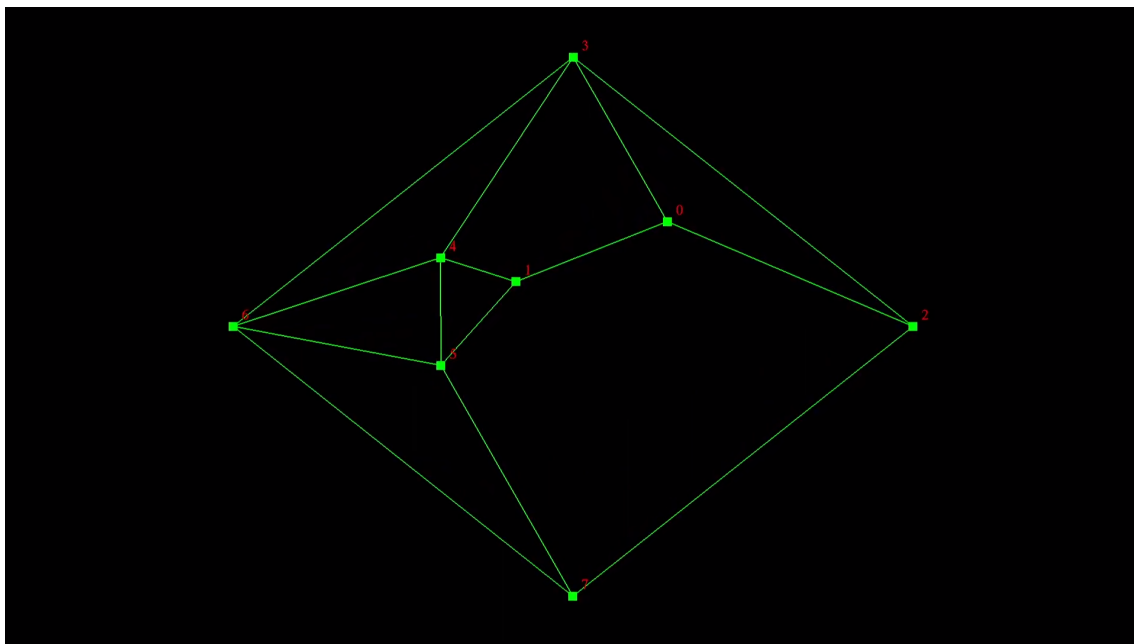


**Obrázek 4.1.** Zobrazení 1 grafu 1

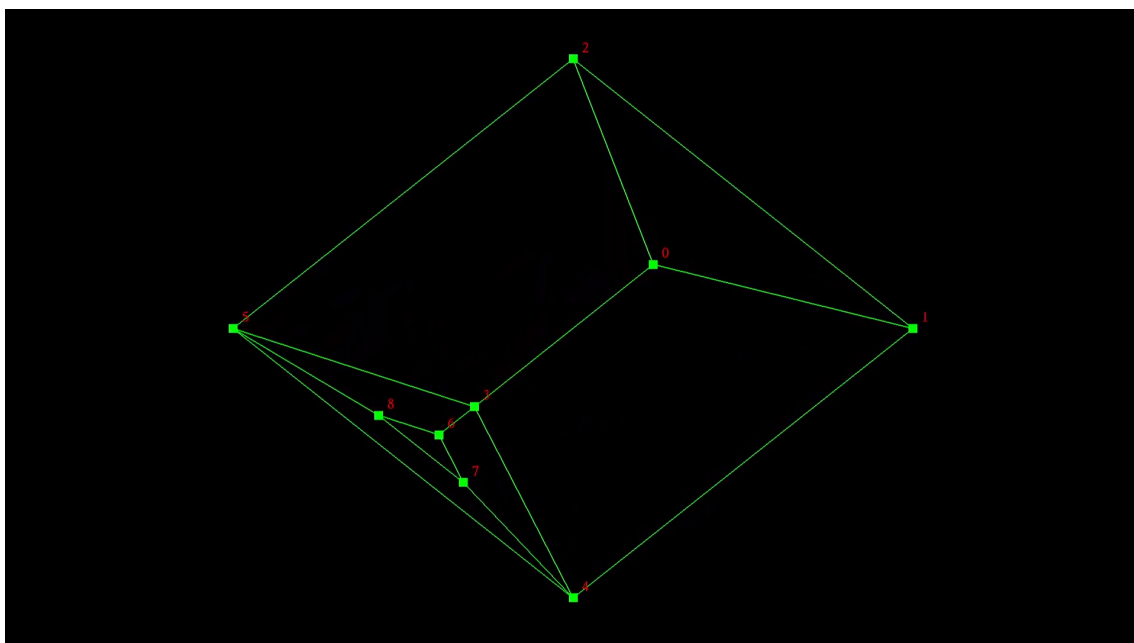
<sup>5</sup> [https://cs.wikipedia.org/wiki/Logistick%C3%A1\\_funkce](https://cs.wikipedia.org/wiki/Logistick%C3%A1_funkce)

<sup>6</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/OBS\\_Studio](https://en.wikipedia.org/wiki/OBS_Studio)

<sup>7</sup> [https://youtube.com/playlist?list=PLBuG\\_2a4g91FZwrufIdn3p1itkugLSZvh](https://youtube.com/playlist?list=PLBuG_2a4g91FZwrufIdn3p1itkugLSZvh)

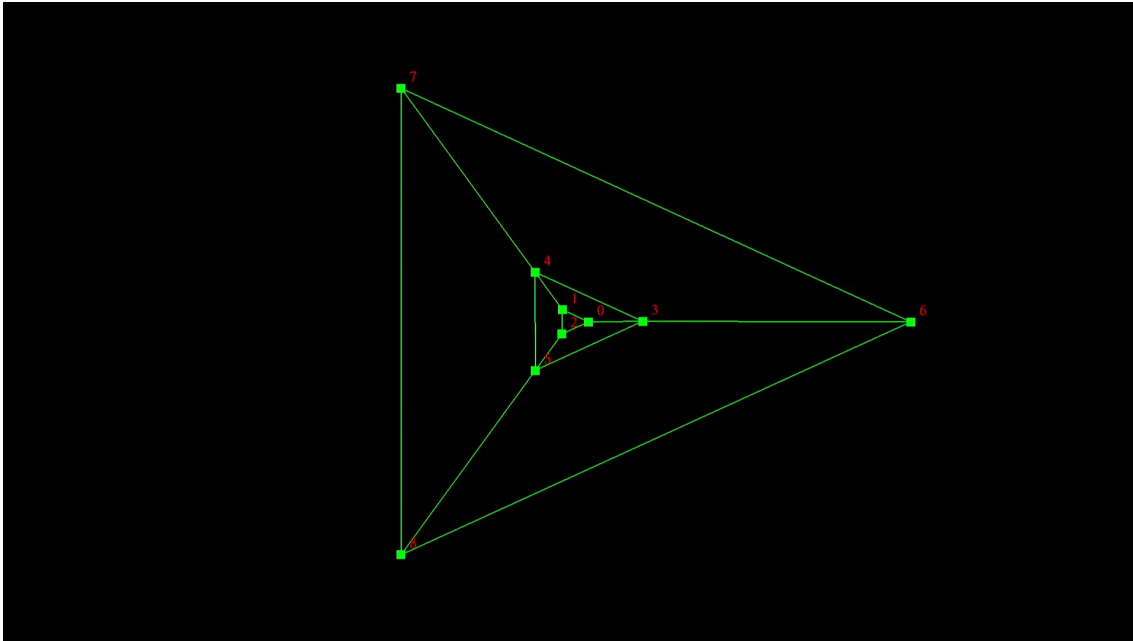


**Obrázek 4.2.** Zobrazení 2 grafu 1

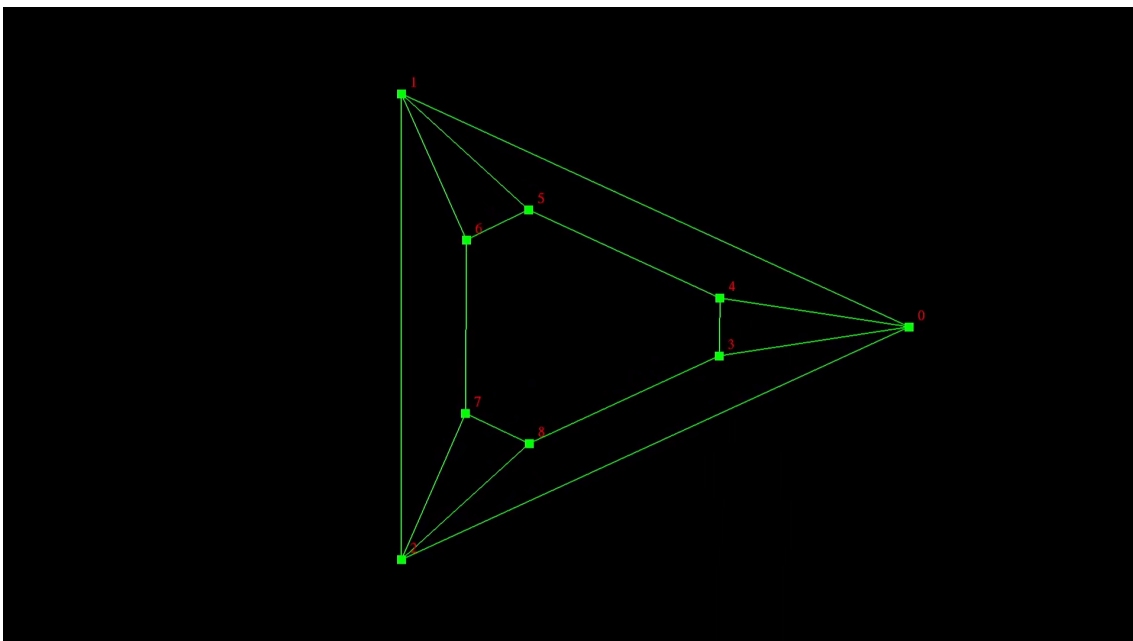


**Obrázek 4.3.** Zobrazení 1 grafu 2

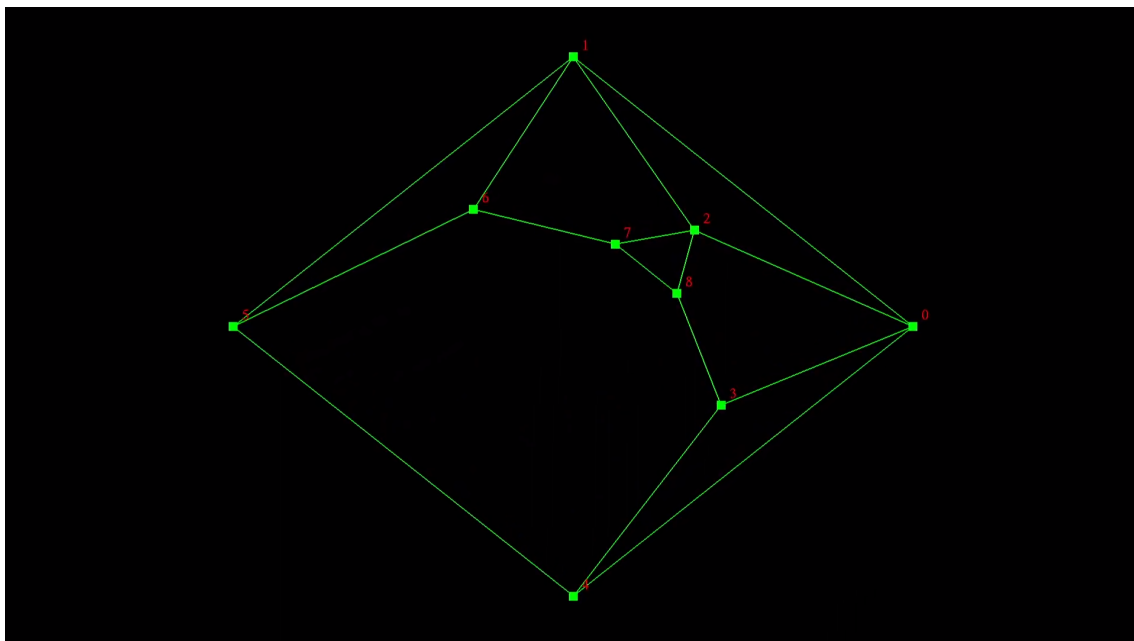




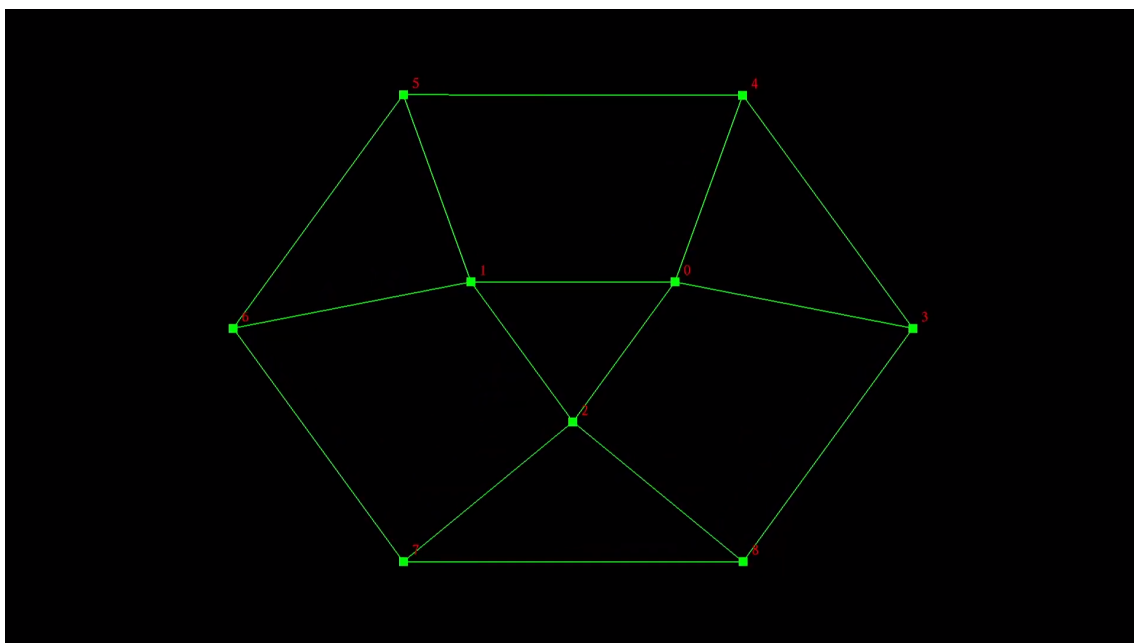
**Obrázek 4.4.** Zobrazení 2 grafu 2



**Obrázek 4.5.** Zobrazení 1 grafu 3



**Obrázek 4.6.** Zobrazení 2 grafu 3



**Obrázek 4.7.** Zobrazení 3 grafu 3

# Kapitola 5

## Závěr

V této práci jsme se zabývali přípravou podkladů pro formulaci a dokázání Tutteovy věty o kreslení grafů a následně jsme ji formulovali a dokázali.

V práci jsme na příkladech formulovali různé maticové reprezentace grafů a dokázali vztahy mezi nimi. Zároveň jsme se zabývali geometrickými reprezentacemi grafů a jejich maticemi. Vyjádřili jsme vztahy mezi vlastními čísly symetrických matic a jejich principiálních submatic. Odvodili jsme tvar bodu, který minimalizuje kvadráty vzdáleností od dané množiny bodů. Následovaly barycentrické vlastnosti geometrických reprezentací grafů a jejich vztahy s maticemi geometrických reprezentací grafů. Poslední částí byla Tutteova věta o kreslení grafů a její důkaz.

V rámci práce jsme jako „proof of concept“ implementovali program s animacemi ilustrující výsledné nakreslení zadaného grafu.

Cíl, který jsme stanovili v úvodu práce, byl splněn.



## Literatura

- [1] Jiří Demel. *Grafy a jejich aplikace*. dostupné online, <https://kix.fsv.cvut.cz/~demel/grafy/gr.pdf>. Naposledy navštíveno 2. 1. 2022.
- [2] Jim Geelen. *On how to draw a graph*. dostupné online, <https://www.math.uwaterloo.ca/~jfggeelen/Publications/tutte.pdf>. 2012.
- [3] Chris Godsil a Gordon F Royle. *Algebraic graph theory*. Springer Science & Business Media, 2001.
- [4] Casimir Kuratowski. Sur le problème des courbes gauches en Topologie. *Fundamenta Mathematicae*. 1930, 15 (1), 271-283.
- [5] Daniel A Spielman. *Spectral and Algebraic Graph Theory*. dostupné online, <http://cs-www.cs.yale.edu/homes/spielman/sagt/sagt.pdf>. Naposledy navštíveno 2. 1. 2022.
- [6] William Thomas Tutte. How to draw a graph. *Proceedings of the London Mathematical Society*. 1963, 3 (1), 743–767.
- [7] Jiří Velebil. *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*. České vysoké učení technické v Praze, 2021.

# Příloha **A**

## Obsah elektronické přílohy

Bashové skripty, návod *README.md* a vstupní textový soubor s ukázkovým abstraktním grafem se nacházejí ve složce *src*. Ve složce *src/Media* se nacházejí screenshoty a videa animací z OpenGL aplikace. Python skript obývá složku *src/Python* a ve složce *src/OpenGL* se schovává OpenGL projekt společně se svým CMake souborem.