Bakalářská práce

České
vysoké
učení technické
v Praze

F3

Fakulta elektrotechnická
Katedra matematiky

Hyperfunkce jedné proměnné

Josef Sobotka

Vedoucí: doc. RNDr. Martin Bohata, Ph.D.
Obor: Otevřené elektronické systémy
Květen 2022

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Sobotka** Jméno: **Josef** Osobní číslo: **491857**

Fakulta/ústav: **Fakulta elektrotechnická**

Zadávající katedra/ústav: **Katedra radioelektroniky**

Studijní program: **Otevřené elektronické systémy**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Hyperfunkce jedné proměnné

Název bakalářské práce anglicky:

Hyperfunctions of one Variable

Pokyny pro vypracování:

Cílem bakalářské práce je studium základních aspektů teorie hyperfunkcí jedné reálné proměnné. Student se seznámí s různými operacemi na hyperfunkcích a bude je ilustrovat na jednoduchých příkladech. Zejména podrobně rozebere derivování a integrování hyperfunkcí. V ilustračních příkladech se bude věnovat Diracově funkci, která se často vyskytuje v inženýrských aplikacích. Dále ukáže, že klasické funkce lze interpretovat jako hyperfunkce. V závěru práce bude student diskutovat Fourierovu transformaci hyperfunkcí s kompaktním nosičem.

Seznam doporučené literatury:

[1] U. Graf: Introduction to Hyperfunctions and Their Integral Transforms, Birkhauser, Basel, 2010.
[2] I. Imai: Applied Hyperfunction Theory, Springer, Dordrecht, 1992.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

doc. RNDr. Martin Bohata, Ph.D. katedra matematiky FEL

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **19.01.2022** Termín odevzdání bakalářské práce: ______________

Platnost zadání bakalářské práce: **30.09.2023**

doc. RNDr. Martin Bohata, Ph.D. podpis vedoucí(ho) práce	doc. Ing. Stanislav Vítek, Ph.D. podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry	prof. Mgr. Petr Páta, Ph.D. podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

. Datum převzetí zadání	Podpis studenta

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval doc. RNDr. Martinu Bohatovi, Ph.D. za odborné vedení mé práce, za čas strávený nad problematikou nejen při konzultacích a za velmi přínosné rady, které umožnily tuto práci zdárně dokončit. Také bych chtěl poděkovat své rodině za poskytnutí zázemí k sepsání této práce.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně, že jsem svědomitě plnil veškeré úkoly zadané vedoucím této práce, a že jsem uvedl veškerou použitou literaturu v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze, 15. května 2022

Abstrakt

Práce pojednává o základních aspektech teorie hyperfunkcí jedné reálné proměnné. Jejím hlavním cílem je uchopení této problematiky tak, aby byla přístupná širokému okruhu čtenářů. Postupně prozkoumáme různé operace na hyperfunkcích. Hlavní pozornost věnujeme především derivování a integrování hyperfunkcí. V poslední části práce se zaměříme na Fourierovu transformaci hyperfunkcí s kompaktním nosičem. Abstraktní pojmy budeme v průběhu práce prokládat konkrétními příklady.

Klíčová slova: hyperfunkce, generující funkce, Diracova delta funkce, Heavisideova funkce, derivace, integrace

Vedoucí: doc. RNDr. Martin Bohata, Ph.D.
České vysoké učení technické v Praze,
Fakulta elektrotechnická,
Katedra matematiky,
Jugoslávských partyzánů 1580/3
160 00 Praha 6

Abstract

This thesis deals with basic aspects of the theory of hyperfunctions of one real variable. The main aim is to present hyperfunctions in an accessible way for non-specialists. Various operations on hyperfunctions are investigated. Special attention is paid to differentiation and integration. In the last part of the thesis, we discuss Fourier transform of hyperfunctions with compact support. Abstract concepts are illustrated by concrete examples.

Keywords: hyperfunction, generating function, Dirac delta function, Heaviside function, derivation, integration

Title translation: Hyperfunctions of one variable

Obsah

Obrázky

Tabulky

Kapitola 1

Úvod

V roce 1930 publikoval teoretický fyzik a pozdější držitel Nobelovy ceny Paul Dirac slavnou monografii *The Principles of Quantum Mechanics* [1], ve které poprvé zavedl objekt $\delta(x)$, dnes nazývaný Diracova delta funkce. Jednalo se o objekt závisející na $x \in \mathbb{R}$, který měl podle Diraca splňovat

$$\begin{aligned} \delta(x) &= 0, \quad \text{pro každé } x \neq 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx &= 1. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Důležitou vlastností byla také rovnost

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\, dx = f(a),$$

jejíž platnost byla požadována pro každé $a \in \mathbb{R}$ a každou spojitou funkci $f(x)$. Z výše uvedeného je patrné, že se jedná o analogii ke Kronekerovu delta pro případy, kdy místo sumy chceme uvažovat integrál (tj. chceme „sčítat přes spojitý index“). Fyzikálně můžeme Diracovu delta funkci interpretovat například jako hustotu náboje bodové částice (žijící jen v jedné prostorové dimenzi), která má jednotkový elektrický náboj. Z vlastnosti integrálu a (1.1) však plyne, že $\delta(x)$ nemůže být chápána jako obyčejná funkce jedné reálné proměnné. Pro objekty typu Diracova delta funkce se proto vžilo označení zobecněné funkce.

Dlouhou dobu Diracova delta funkce postrádala matematicky rigorózní definici a byla brána jen jako užitečný formalismus. Snaha o nalezení korektní matematické definice zobecněných funkcí byla završena Laurentem Schwartzem v práci [2]. Zobecněné funkce definované Laurentem Schwartzem jsou nazývány distribuce. Jedná se o spojité lineární funkcionály na vhodném prostoru funkcí. Teorie distribucí je dnes nejrozšířenější teorií zobecněných funkcí a stala se běžným matematickým nástrojem ve fyzice a inženýrství. Za její vznik a rozvoj dostal v roce 1950 Laurent Schwartz Fieldsovu medaili. Z pohledu lidí, kteří se nezabývají primárně matematikou, se však teorie distribucí může zdát neintuitivní a obtížná. Pro její pochopení je totiž potřebná dobrá znalost pokročilejšího matematického aparátu, který výrazně přesahuje základní kurzy matematiky na elektrotechnických vysokých školách.

Se zcela odlišným přístupem k zobecněným funkcím přišel japonský matematik Mikio Sato [3, 4, 5, 6]. Jeho přístup je založen na teorii funkcí komplexní proměnné. Zobecněnou funkci na reálné ose si zde můžeme představovat jako rozdíl hraničních hodnot nad a pod reálnou osou funkce $F(z)$ holomorfní v $\mathcal{D} \setminus \mathbb{R}$, kde $\mathcal{D}$ je otevřená množina obsahující reálnou osu. Takovéto zobecněné funkce se nazývají hyperfunkce a zahrnují kromě distribucí také singulárnější objekty. Je totiž známo, že distribuce, jejíž nosič je roven jednoprvkové množině $\{0\}$, je lineární kombinací Diracovy delta funkce a její derivací. Taková distribuce odpovídá v teorii hyperfunkcí objektu popsanému funkcí $F(z)$ holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ s pólem v 0. To znamená, že hyperfunkce generovaná funkcí $F(z) = e^{\frac{1}{z}}$ nemůže být distribuce, neboť její nosič je $\{0\}$ a $F(z)$ má v nule podstatnou singularitu. Teorie hyperfunkcí našla své využití v teoretické fyzice (viz například [7]). Objevují se také snahy aplikovat hyperfunkce v numerických algoritmech pro výpočet integrálů [8, 9].

V této práci se zaměříme na hyperfunkce jedné reálné proměnné. Naší snahou bude prezentovat ucelený souhrn elementárních základů této teorie, který bude přístupný širokému okruhu čtenářů. Pro porozumění myšlenek v této práci by měly postačovat základní kurzy matematické analýzy (obsahující také úvod do funkcí jedné komplexní proměnné) probírané na elektrotechnických vysokých školách. Hlavním zdrojem pro tuto práci byla literatura [10, 11]. Hlubší matematický náhled do problematiky hyperfunkcí (nejen jedné reálné proměnné) lze nalézt například v monografii [12].

Tato bakalářská práce je strukturována následovně. Ve druhé kapitole je zaveden pojem hyperfunkce jedné reálné proměnné. Poté následuje jeho ilustrace řadou základních příkladů. Naše pozornost je zaměřena zejména na Diracovu delta funkci, jež nás bude provázet celou touto prací. Zkoumáme také reprezentaci obyčejných funkcí pomocí hyperfunkcí.

Třetí kapitola je věnována vybraným operacím na hyperfunkcích, kde se mimo jiné zabýváme také násobením hyperfunkcí funkcemi reálně analytickými. Dále se zmiňujeme o substituci v hyperfunkci. Důležitý případ afinní substituce podrobně ilustrujeme na příkladu s Diracovou delta funkcí a Heavisideovou hyperfunkcí.

Ve čtvrté kapitole se zaměřujeme na derivaci a integraci hyperfunkcí. Nejdříve probereme derivování hyperfunkcí. Ukážeme si, že známá pravidla o derivování obyčejných funkcí se přenáší i do světa hyperfunkcí. Výsledky o derivování poté využijeme při řešení rovnice $\phi(x)f(x) = h(x)$, kde $\phi(x)$ je pevně zadaná vhodná reálně analytická funkce a $h(x)$ je zadaná hyperfunkce. Poslední část čtvrté kapitoly je věnována integraci hyperfunkcí. Ukážeme si, že i v hyperfunkcích můžeme k výpočtu integrálu použít primitivní funkci. Kromě toho uvedeme také větu o substituci.

Pátá kapitola pojednává o Fourierově transformaci. Z důvodu komplikovanosti tohoto tématu a omezeného rozsahu bakalářské práce se zaměříme jen na Fourierovu transformaci hyperfunkcí s kompaktním nosičem. Odvodíme si základní pravidla pro počítání Fourierovy transformace, mezi které patří například pravidlo o obrazu derivace či pravidlo o škálování.

Kapitola 2

Úvod do hyperfunkcí

2.1 Zavedení pojmu hyperfunkce

Definice 2.1 Otevřenou množinu $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ nazveme *komplexní okolí* intervalu $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, jestliže $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{D}$.

Množinu všech komplexních okolí intervalu $\mathbb{R}$ značíme $\mathcal{N}$. Pro jakékoli $\mathcal{D} \in \mathcal{N}$ můžeme zavést dvě otevřené podmožiny

$$\mathcal{D}_+ := \mathcal{D} \cap \mathbb{C}_+,$$
$$\mathcal{D}_- := \mathcal{D} \cap \mathbb{C}_-,$$

kde

$$\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im} z > 0\},$$
$$\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im} z < 0\}.$$

Pro libovolnou otevřenou množinu bodů Ω z $\mathbb{C}$ značíme symbolem $\mathcal{O}(\Omega)$ množinu všech holomorfních funkcí v Ω. Množina $\mathcal{O}(\Omega)$ vybavená operacemi sčítáním funkcí a násobením funkce číslem, které jsou definovány bodově, tvoří lineární prostor.

Často se setkáváme se situací, kdy chceme skupinu vektorů považovat za vektor jediný. Jinými slovy, chceme ztotožnit vektory, které se v jistém smyslu od sebe příliš neliší. Tato idea vede k důležité konstrukci, která nám z lineárního prostoru umožní vytvořit nový lineární prostor nazývaný faktorový prostor.

Následující tvrzení tuto konstrukci popisuje (detailnější rozbor viz například [13]). V této práci jsou pro nás důležité jen komplexní lineární prostory, a proto budeme vždy pod pojmem lineární prostor rozumět komplexní lineární prostor.

Tvrzení 2.2 Ať V je lineární prostor a W je jeho lineární podprostor. Na V uvažujme binární relaci $\sim$ danou vztahem $x \sim y$, kdykoli $x - y \in W$. Potom platí:

(i) Relace $\sim$ je relace ekvivalence a třída ekvivalence obsahující prvek $x \in V$ je
$$[x] = x + W = \{x + y|\, y \in W\}.$$

(ii) Množina
$$V/W := \{[x]|x \in V\} = \{x + W|x \in V\}$$
všech tříd ekvivalence spolu s operacemi
$$\alpha[x] := [\alpha x],$$
$$[x] + [y] := [x + y],$$
kde $x, y \in V$ a $\alpha \in \mathbb{C}$, tvoří lineární prostor s nulovým vektorem $[0] = W$.

Důkaz:

(i) Ověřme, že $\sim$ je relace ekvivalence (tj. $\sim$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní binární relace).

Pro každé $x \in V$ je $x - x = 0 \in W$. To znamená, že $x \sim x$ pro každé $x \in V$. Tedy relace $\sim$ je reflexivní.

Předpokládejme, že $x \sim y$. Potom $x - y \in W$. Odtud
$$y - x = -(x - y) \in W,$$
a proto $y \sim x$. Relace $\sim$ je tudíž symetrická.

Nechť $x \sim y$ a $y \sim z$. Jelikož $x - y \in W$ a $y - z \in W$, je
$$x - z = (x - y) + (y - z) \in W.$$
Z toho plyne, že $x \sim z$, a tak relace $\sim$ je tranzitivní. Tím jsme završili důkaz, že $\sim$ je relace ekvivalence.

Zbývá ukázat, že $[x] = x + W$. Z definice relace $\sim$ plyne
$$\begin{aligned}[x] &= \{y \in V|y - x \in W\} = \{y \in V|y - x = z \text{ pro nějaké } z \in W\}\\ &= \{x + z \in V|z \in W\} = x + W.\end{aligned}$$

(ii) Nyní ukažme, že operace na V/W jsou definovány korektně (tj. nezávisí na volbě reprezentanta třídy ekvivalence). Za tímto účelem si nejdříve rozmyslíme platnost rovnosti $v + W = W$ pro každé $v \in W$. Předpokládejme, že $v \in W$. Je-li $u \in v + W$, pak existuje $w \in W$ tak, že $u = v + w$. Protože lineární podprostor je uzavřen na sčítání, je
$$u = v + w \in W.$$
Odtud $v + W \subseteq W$. Naopak, máme-li $u \in W$, pak
$$u = v + (u - v) \in v + W,$$

jelikož $u - v \in W$. Tím jsme dokázali také opačnou inkluzi $W \subseteq v + W$, a proto je $v + W = W$.

Ať $a \in [x]$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Pak

$$\alpha[a] = [\alpha a] = \alpha a + W = \alpha x + \alpha(a - x) + W = \alpha x + W = [\alpha x] = \alpha[x].$$

Ověřili jsme tak, že operace násobení skalárem nezávisí na reprezentantovi, a je proto dobře definovaná.

Mějme $a \in [x]$ a $b \in [y]$. Potom

$$\begin{aligned}[a] + [b] = [a + b] = a + b + W &= x + (a - x) + y + (b - y) + W \\ &= x + y + W = [x + y] = [x] + [y].\end{aligned}$$

Vidíme, že ani sčítání vektorů nezávisí na reprezentantovi, a jedná se tak o dobře definovanou operaci na třídách ekvivalence.

Ověření podmínek z definice lineárního prostoru přenecháváme jako lehké cvičení čtenáři. Jen zmíníme, že

$$[0] + [x] = [0 + x] = [x]$$

pro každé $x \in V$, a proto $[0] = W$ je nulový vektor prostoru V/W.

□

Lineární prostor V/W zavedený v předchozím tvrzení se nazývá *faktorový prostor* prostoru V podle W.

Máme-li $\mathcal{D} \in \mathcal{N}$ a $F(z) \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$, pak zúžení funkce $F(z)$ na množinu $\mathcal{D} \setminus \mathbb{R}$ je prvkem $\mathcal{O}(\mathcal{D} \setminus \mathbb{R})$. To znamená, že lineární prostor $\mathcal{O}(\mathcal{D})$ můžeme chápat jako lineární podprostor prostoru $\mathcal{O}(\mathcal{D} \setminus \mathbb{R})$.

Definice 2.3 Nechť $\mathcal{D} \in \mathcal{N}$. Prvky faktorového prostoru $\mathcal{O}(\mathcal{D} \setminus \mathbb{R})/\mathcal{O}(\mathcal{D})$ nazýváme *hyperfunkce* na $\mathbb{R}$. Funkce $F(z) \in \mathcal{O}(\mathcal{D} \setminus \mathbb{R})$ se nazývá *generující funkce* (nebo také *definující funkce*) hyperfunkce $f(x)$ na $\mathbb{R}$, jestliže $f(x) = [F(z)]$.

Uveďme zde několik poznámek k definici hyperfunkce. Na konkrétní volbě okolí $\mathcal{D} \in \mathcal{N}$ by definice neměla záviset. Tohoto faktu je možné dosáhnout uvážením induktivní limity. Čtenáře zajímajícího se o tento formální přístup odkazujeme například na monografii [12]. Pro naše účely bude postačující vědět, že pokud $\mathcal{D}_1 \in \mathcal{N}$ je podmnožinou množiny $\mathcal{D}_2 \in \mathcal{N}$, pak lineární zobrazení

$$\varphi : \mathcal{O}(\mathcal{D}_2 \setminus \mathbb{R})/\mathcal{O}(\mathcal{D}_2) \to \mathcal{O}(\mathcal{D}_1 \setminus \mathbb{R})/\mathcal{O}(\mathcal{D}_1)$$

dané předpisem $\varphi\left([F(z)]\right) = \left[F(z)|_{\mathcal{D}_1 \setminus \mathbb{R}}\right]$ je izomorfismus (viz [12, Theorem 1.1.3]).

V této práci zkoumáme pro jednoduchost jen hyperfunkce na reálné ose, ale definici lze přirozeně rozšířit a uvažovat tak hyperfunkce na obecné otevřené podmnožině reálné osy (případným zájemcům jest k dispozici podrobnější popis v literatuře [10, 12]).

Někdy je vhodné funkci $F(z) \in \mathcal{O}(\mathcal{D} \setminus \mathbb{R})$ rozdělit do dvou funkcí $F_+(z)$ a $F_-(z)$, kde $F_+(z)$ je zúžení funkce $F(z)$ na množinu $\mathcal{D}_+ = \mathcal{D} \cap \mathbb{C}_+$ a $F_-(z)$ je zúžení funkce $F(z)$ na množinu $\mathcal{D}_- = \mathcal{D} \cap \mathbb{C}_-$. V takovém případě budeme místo $f(x) = [F(z)]$ psát

$$f(x) = [F_+(z), F_-(z)].$$

Definice 2.4 Ať $f(x) = [F_+(z), F_-(z)]$ je hyperfunkce a $a \in \mathbb{R}$. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \{F_+(a + i\varepsilon) - F_-(a - i\varepsilon)\},$$

pak se nazývá *hodnota hyperfunkce* $f(x)$ *v bodě* a a značí se $\widetilde{f}(a)$.

Má-li hyperfunkce $f(x)$ hodnotu v každém bodě reálné osy, pak nám její hodnoty zadávají obyčejnou funkci $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Rádi bychom takové objekty ztotožňovali, ale obecně to udělat nelze. Může se totiž stát, že dvě různé hyperfunkce zadávají stejnou funkci skrze své hodnoty. Uvažme například hyperfunkce $f(x) = [0]$ a $g(x) = \left[\frac{1}{z^2}\right]$. Zřejmě $f(x) \neq g(x)$, neboť funkce $\frac{1}{z^2}$ má v nule pól násobnosti 2 a nelze tak rozšířit na holomorfní funkci v nějakém okolí $\mathcal{D} \in \mathcal{N}$. Avšak

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}(x) &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\frac{1}{(x + i\varepsilon)^2} - \frac{1}{(x - i\varepsilon)^2} \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{(x - i\varepsilon)^2 - (x + i\varepsilon)^2}{(x + i\varepsilon)^2 (x - i\varepsilon)^2} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{-4ix\varepsilon}{(x^2 + \varepsilon^2)^2} = 0
\end{aligned}$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Vidíme tedy, že $\widetilde{f}(x) = \widetilde{g}(x) = 0$, ačkoli $f(x) \neq g(x)$. Přesto v některých případech budeme chtít $f(x)$ ztotožnit s $\widetilde{f}(x)$. Tomu se ale budeme věnovat později při řešení otázky, zda svět hyperfunkcí obsahuje obyčejné funkce.

Ještě předtím, než se seznámíme s elementárními příklady hyperfunkcí, zadefinujeme si nosič hyperfunkce. V analogii s nosičem funkce očekáváme, že by se mělo jednat o doplněk (vzhledem k $\mathbb{R}$) největší otevřené množiny v $\mathbb{R}$, na které je hyperfunkce nulová. Hyperfunkce na obecných otevřených množinách jsme sice nedefinovali, ale intuitivně by nulovost na otevřené množině měla být vyjádřena možností holomorfně dodefinovat generující funkci ve všech bodech této otevřené množiny.

Definice 2.5 *Nosič* hyperfunkce $f(x) = [F(z)] \in \mathcal{O}(\mathcal{D} \setminus \mathbb{R})/\mathcal{O}(\mathcal{D})$ je množina $\mathbb{R} \setminus \Omega$, kde $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ je největší otevřená množina taková, že existuje funkce $G(z)$ holomorfní v $\mathcal{D} \setminus (\mathbb{R} \setminus \Omega)$ splňující $F(z) = G(z)$ na $\mathcal{D} \setminus \mathbb{R}$. Nosič hyperfunkce $f(x)$ značíme $\operatorname{supp} f(x)$.

Z definice nosiče je patrné následující tvrzení.

Tvrzení 2.6: Ať $f(x) = [F(z)]$ je hyperfunkce. Jestliže $x \notin \operatorname{supp} f(x)$, potom $\widetilde{f}(x) = 0$.

Důkaz: Jestliže $x \notin \operatorname{supp} f(x)$, pak $F(z)$ lze holomorfně rozšířit na otevřenou množinu obsahující nějaké okolí bodu x. Uvědomíme-li si, že holomorfnost implikuje spojitost, dostáváme

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(F(x + i\varepsilon) - F(x - i\varepsilon) \right) = F(x) - F(x) = 0.$$

$\square$

V závěru této části ještě upozorněme, že v předchozím tvrzení nelze implikaci otočit. Uvažme například hyperfunkci $f(x) = \left[\frac{1}{z^2}\right]$. Již jsme si ukázali, že pro tuto hyperfunkci je $\widetilde{f}(0) = 0$. Protože ale $\frac{1}{z^2}$ je holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a v 0 má pól násobnosti 2, je $\operatorname{supp} f(x) = \{0\}$.

2.2 Základní příklady hyperfunkcí

Příklad 2.7 Následující tři generující funkce, jejichž značení jsou

$$\mathbf{1}_+(z) := \begin{cases} 1, & z \in \mathbb{C}_+, \\ 0, & z \in \mathbb{C}_-, \end{cases}$$

$$\mathbf{1}_-(z) := \begin{cases} 0, & z \in \mathbb{C}_+, \\ -1, & z \in \mathbb{C}_-, \end{cases}$$

$$\mathbf{1}(z) := \begin{cases} 1/2, & z \in \mathbb{C}_+, \\ -1/2, & z \in \mathbb{C}_-, \end{cases}$$

definují jednu a tu samou hyperfunkci

$$f(x) = [\mathbf{1}_+(z)] = [\mathbf{1}_-(z)] = [\mathbf{1}(z)],$$

protože se tyto funkce liší jen o konstantu (což je celistvá funkce). Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \{\mathbf{1}(x + i\varepsilon) - \mathbf{1}(x - i\varepsilon)\} = 1.$$

Později si ukážeme, že v tomto případě je $\widetilde{f}(x)$ možné ztotožnit s hyperfunkcí $f(x)$.

Funkci $\mathbf{1}_+(z)$ není možné holomorfně rozšířit na funkci, která by byla holomorfní v nějakém bodě reálné osy (tj. byla holomorfní v nějakém okolí tohoto bodu), neboť v žádném bodě reálné osy nelze $\mathbf{1}_+(z)$ dodefinovat ani spojitě. Proto $\operatorname{supp} f(x) = \mathbb{R}$. $\triangle$

Pomocí výše definovaných funkcí $\mathbf{1}_+(z)$ a $\mathbf{1}_-(z)$ můžeme často zjednodušit zápis generující funkce $F(z)$ hyperfunkce $f(x) = [F(z)]$, jak si ukážeme v následujících příkladech.

Příklad 2.8 Hyperfunkce

$$f(x) = [z\mathbf{1}_+(z)] = [-z\mathbf{1}_-(z)] = [z\mathbf{1}(z)]$$

má pro každé reálné $x \in \mathbb{R}$ hodnotu $\widetilde{f}(x) = x$. Intuitivně tak očekáváme, že tato hyperfunkce bude odpovídat funkci $\widetilde{f}(x)$. Analogicky jako v minulém příkladu vidíme, že nosič hyperfunkce $f(x)$ je množina $\mathbb{R}$. $\triangle$

Příklad 2.9 Hyperfunkce

$$f(x) = [\sin(z), 0] = [\sin(z)\mathbf{1}_+(z)]$$

má pro každé x hodnotu $\sin(x)$. Očekáváme proto, že hyperfunkce $f(x)$ bude reprezentovat funkci $x \mapsto \sin(x)$. Obdobně lze postupovat i u funkce $\cos(x)$, jež (jak uvidíme později) odpovídá hyperfunkci

$$g(x) = [\cos(z), 0] = [\cos(z)\mathbf{1}_+(z)].$$

Opět snadno nahlédneme, že

$$\operatorname{supp} f(x) = \operatorname{supp} g(x) = \mathbb{R}.$$

$\triangle$

Příklad 2.10 Hyperfunkce

$$f(x) = \left[\frac{1}{2(z-i)}, -\frac{1}{2(z+i)}\right]$$

má pro každé reálné x hodnotu

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(x) &= \lim_{\epsilon \to 0+} \Big(\frac{1}{2(x+i\epsilon-i)} + \frac{1}{2(x-i\epsilon+i)}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x-i} + \frac{1}{x+i}\Big) = \frac{x}{x^2+1}. \end{aligned}$$

Není těžké ukázat, že i v tomto případě je $\operatorname{supp} f(x) = \mathbb{R}$. Později se dozvíme, že hyperfunkce $f(x)$ odpovídá funkci $\widetilde{f}(x)$. $\triangle$

Příklad 2.11 Po několika elementárních příkladech se dostáváme k jedné z nejdůležitějších hyperfunkcí, a to konkrétně k *Diracovu impulsu* v bodě $x = 0$. Místo Diracův impuls se také často používají názvy *Diracova delta funkce* či *Diracova hyperfunkce*. Tato hyperfunkce je definována předpisem

$$\delta(x) := \left[-\frac{1}{2\pi i z}\right].$$

Generující funkce $F(z) = -\frac{1}{2\pi i z}$ je (po holomorfním rozšíření) funkce holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ s pólem násobnosti 1 v bodě 0. Z tohoto důvodu je $\operatorname{supp} \delta(x) = \{0\}$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ nenulové máme

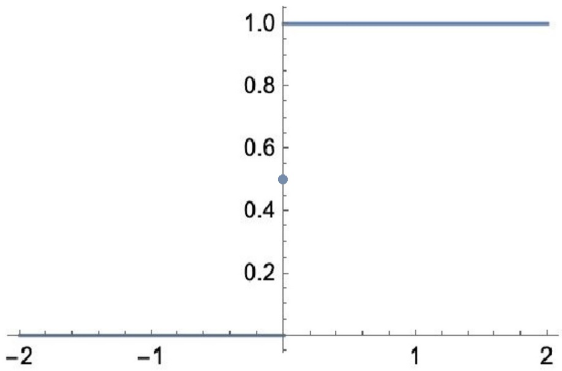
$$\widetilde{\delta}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} (F_+(x+i\varepsilon) - F_-(x-i\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)} = 0.$$

Pro $x = 0$ hodnota neexistuje, neboť

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} (F(i\varepsilon) - F(-i\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\pi\varepsilon} = +\infty.$$

Právě napočítané limity odpovídají naivní představě o Diracově impulsu, která říká, že se jedná o „funkci“, která je mimo počátek nulová, ale v nule má nekonečnou hodnotu. V korektním matematickém světě však Diracův impuls neodpovídá žádné obyčejné funkci reálné proměnné. Přesto se jedná o velmi důležitou hyperfunkci, s kterou se budeme v dalších částech této práce hojně setkávat. $\triangle$

Příklad 2.12 Další velice významnou hyperfunkcí je Heavisideova hyperfunkce, neboli jednotkový skok v nule. Jak už název napovída, jedná se o reprezentaci Heavisideovy funkce $Y(x)$. Heavisideova funkce má hodnotu 0 pro všechny prvky ze záporné části reálné osy a konstatní hodnotu 1 na kladné části reálné osy. Definice hodnoty Heavisideovy funkce v počátku není v literatuře ustálená. V naší práci budeme volit konvenci $Y(0) = \frac{1}{2}$, jak ostatně ukazuje i Obrázek 2.1.



Obrázek 2.1: Graf Heavisideovy funkce.

Definice *Heavisideovy hyperfunkce* $u(x)$ je

$$u(x) := \left[-\frac{1}{2\pi i} \ln(-z) \right],$$

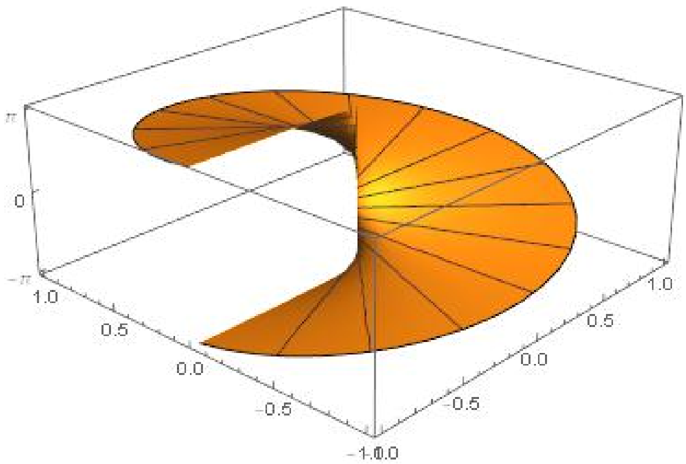
kde $\ln(z)$ je hlavní hodnota logaritmu. Připomeňme, že hlavní hodnota logaritmu je

$$\ln(z) = \ln|z| + i \arg(z), \ z \neq 0,$$

kde $\arg(z)$ je hlavní hodnota argumentu komplexního čísla z (tj. hodnota argumentu komplexního čísla z, která leží v intervalu $(-\pi, \pi]$). Graf imaginární části funkce $\ln(z)$ je na Obrázku 2.2.

Podívejme se nyní na hodnoty hyperfunkce $u(x)$. Z chování funkce $\arg(z)$ vidíme, že

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \arg(-x \pm i\varepsilon) = \begin{cases} \pm\pi, & x > 0, \\ \pm\frac{\pi}{2}, & x = 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$



Obrázek 2.2: Graf imaginární části funkce $\ln(z)$.

Tedy pro každé $x \neq 0$ můžeme s využitím spojitosti funkce $\ln|z|$ psát

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \{F_+(x+i\varepsilon) - F_-(x-i\varepsilon)\} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+} -\frac{1}{2\pi i}\{\ln|-x-i\varepsilon|) + i\arg(-x-i\varepsilon) \\
&- (\ln|-x+i\varepsilon| + i\arg(-x+i\varepsilon))\} \\
&= -\frac{1}{2\pi}\left(\lim_{\varepsilon\to 0+}\arg(-x-i\varepsilon) - \lim_{\varepsilon\to 0+}\arg(-x+i\varepsilon)\right) = \begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x<0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Zaměříme-li se na hodnotu v počátku, pak

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}(0) &= -\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0+}\{\ln\varepsilon + i\arg(-i\varepsilon) - \ln\varepsilon - i\arg(i\varepsilon)\} \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0+}\{i\arg(-i\varepsilon) - i\arg(i\varepsilon)\} \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\left(-i\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{i\pi}{2\pi i} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Hodnoty Heavisideovy hyperfunkce $u(x)$ tedy koincidují s hodnotami Heavisideovy funkce $Y(x)$. To intuitivně zdůvodňuje, proč jsme $u(x)$ nazvali Heavisideovou hyperfunkcí. Ještě než ukončíme tento příklad, podívejme se na nosič hyperfunkce $u(x)$. Generující funkci $F(z) = -\frac{1}{2\pi i}\ln(-z)$ lze holomorfně rozšířit do $\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$, tedy $\operatorname{supp} u(x) \subseteq [0,+\infty)$. Jelikož $\widetilde{u}(x) \neq 0$ pro $x \in [0,+\infty)$, plyne z Tvrzení 2.6, že $\operatorname{supp} u(x) = [0,+\infty)$. $\triangle$

2.3 Vnoření funkcí do hyperfunkcí

Nejprve se podívejme na možnost realizace reálně analytických funkcí pomocí hyperfunkcí. Budeme chtít každé reálně analytické funkci přiřadit rozumným způsobem nějakou hyperfunkci. Připomeňme si nejdříve definici reálně analytické funkce.

Definice 2.13 Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se nazývá *reálně analytická*, jestliže existuje její holomorfní rozšíření na nějaké komplexní okolí reálné osy (tj. jestliže existuje funkce $g(z)$ holomorfní v nějaké otevřené množině $\mathcal{D} \in \mathcal{N}$ tak, že $f(x)$ je zúžení funkce $g(z)$ na reálnou osu).

Z definice okamžitě vidíme, že mezi příklady reálně analytických funkcí patří funkce $\sin x$, $\cos x$, e^x, e^{ix}. Tyto funkce jdou holomorfně rozšířit dokonce na celou komplexní rovinu. Jinými slovy, jsou zúžením funkcí celistvých. Aby nedošlo k omylu, poznamenejme zde, že ne každá reálně analytická funkce je zúžením funkce celistvé. Stačí uvážit reálně analytickou funkci $\frac{1}{1+x^2}$, která je zúžením funkce $\frac{1}{1+z^2}$ holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ mající v bodech $\pm i$ póly násobnosti 1.

Z úvodní části této kapitoly plyne, že prostor všech hyperfunkcí na reálné ose tvoří lineární prostor. Z definice operací na faktorovém prostoru je jasné, že součet dvou hyperfunkcí $f(x) = [F(z)]$ a $g(x) = [G(z)]$ je hyperfunkce

$$f(x) + g(x) = [F(z) + G(z)].$$

Navíc násobení hyperfunkce $f(x) = [F(z)]$ číslem $k \in \mathbb{C}$ je hyperfunkce

$$kf(x) = [kF(z)].$$

V následující větě si výše uváděné zobrazení popíšeme. Uvidíme, že je kompatibilní s běžnými operacemi.

Věta 2.14 Zobrazení ι lineárního prostoru všech reálně analytických funkcí do lineárního prostoru všech hyperfunkcí na $\mathbb{R}$ dané předpisem

$$\iota : \phi(x) \mapsto f_\phi(x) := [\phi(z)\mathbf{1}_+(z)]$$

je prosté lineární zobrazení. Navíc pro každou reálně analytickou funkci $\phi(x)$ platí:

$$\widetilde{f_\phi}(x) = \phi(x)$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz: Nejdříve ukažme, že platí

$$\widetilde{f_\phi}(x) = \phi(x)$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Předpokládejme tedy, že $\phi(x)$ je reálně analytická funkce. Z definice hodnoty hyperfunkce plyne

$$\begin{aligned}\widetilde{f_\phi}(x) &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \phi(x + i\varepsilon)\mathbf{1}_+(x + i\varepsilon) - \phi(x - i\varepsilon)\mathbf{1}_+(x - i\varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \phi(x + i\varepsilon) = \phi(x),\end{aligned}$$

kde jsme v posledním kroku využili spojitost funkce $\phi(x)$.

Zbývá ukázat, že ι je prosté lineární zobrazení. Nejdříve se podívejme na linearitu. Nechť $\phi(x)$ a $\psi(x)$ jsou reálně analytické funkce a $c \in \mathbb{C}$. Potom

$$\begin{aligned} f_{\phi+c\psi}(x) &= [(\phi(z) + c\psi(z))\,\mathbf{1}_+(z)] = [\phi(z)\mathbf{1}_+(z)] + c\,[\psi(z)\mathbf{1}_+(z)] \\ &= f_\phi(x) + cf_\psi(x). \end{aligned}$$

Pro důkaz prostoty zobrazení ι předpokládejme, že $\phi(x)$ je reálně analytická funkce taková, že $f_\phi(x) = 0$. Potom z již dokázané první části plyne, že

$$\phi(x) = \widetilde{f}_\phi(x) = 0,$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$.

□

V následujícím tvrzení charakterizujeme mezi všemi hyperfunkcemi na $\mathbb{R}$ ty, které odpovídají reálně analytickým funkcím.

Tvrzení 2.15 Nechť $f(x) = [F_+(z), F_-(z)]$ je hyperfunkce. Potom $F_+(z)$ a $F_-(z)$ je možné holomorfně rozšířit do nějakého okolí $\mathcal{D} \in \mathcal{N}$ reálné osy právě tehdy, když existuje reálně analytická funkce $\phi(x)$ tak, že $f(x) = f_\phi(x)$, kde $f_\phi(x)$ je hyperfunkce definovaná ve Větě 2.14.

Důkaz: Předpokládejme, že $F_+(z)$ a $F_-(z)$ lze holomorfně rozšířit do $\mathcal{D} \in \mathcal{N}$. Označme tato rozšíření stejně jako původní funkce, tj. $F_+(z)$ a $F_-(z)$. Funkce

$$\phi(x) = F_+(x) - F_-(x),\ x \in \mathbb{R},$$

je tedy reálně analytická. Navíc

$$f(x) = [F_+(z), F_-(z)] = [F_+(z) - F_-(z), 0] = [\phi(z)\mathbf{1}_+(z)] = f_\phi(x).$$

Dokažme opačnou implikaci. Nechť $f(x) = f_\phi(x)$. Pak existuje $\mathcal{D} \in \mathcal{N}$ a $H(z) \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$ tak, že $\phi(z) \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$, $F_+(z) = \phi(z) + H(z), z \in \mathcal{D}_+$ a $F_-(z) = 0 + H(z), z \in \mathcal{D}_-$. Protože $0 \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$, lze $F_+(z)$ a $F_-(z)$ holomorfně rozšířit na celé okolí $\mathcal{D}$.

□

Všechny hyperfunkce uvedené v Příkladech 2.8 - 2.10 tedy odpovídají reálně analytickým funkcím.

Řada funkcí vyskytujících se v aplikacích však mezi funkce reálně analytické nepatří. Proto doufáme, že svůj protějšek v hyperfunkcích budou mít například funkce absolutně integrovatelné. V následující větě se pro jednoduchost omezíme na spojité funkce s kompaktním nosičem.

Věta 2.16 Nechť $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce s kompaktním nosičem $K \subseteq [a, b]$, kde $-\infty < a < b < +\infty$. Potom

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\phi(t)}{t - z} dt$$

je holomorfní v $\mathbb{C}\setminus[a,b]$ a hodnota hyperfunkce $f_\phi(x) = [F(z)]$ je $\widetilde{f}_\phi(x) = \phi(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz: Nejdříve ukažme, že $F(z)$ je funkce holomorfní na $\Omega = \mathbb{C} \setminus [a,b]$. Označme

$$h(t,z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\phi(t)}{t-z}.$$

Funkce $t \mapsto h(t,z)$ je spojitá v intervalu $[a,b]$ pro každé $z \in \Omega$. Kromě toho je evidentní, že pro každé $t \in [a,b]$ je $z \mapsto h(t,z)$ holomorfní funkce v Ω. Zvolme $z_0 \in \Omega$ a položme δ rovno polovině vzdálenosti bodu z_0 od intervalu $[a,b]$, tj.

$$\delta = \frac{1}{2}\inf_{x\in[a,b]} |x - z_0|.$$

Nechť

$$B(z_0;\delta) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| \le \delta\}.$$

Protože $h(t,z)$ je spojitá funkce v $[a,b] \times B(z_0;\delta)$, existuje $K > 0$ tak, že $|h(t,z)| \le K$ na $[a,b] \times B(z_0;\delta)$. Odtud plyne, že

$$\sup_{z\in\Omega\cap B(z_0;\delta)} \int_a^b |h(t,z)|\, dt \le K(b-a) < +\infty.$$

Podle Věty A.8 je proto $F(z)$ holomorfní v Ω.

Zbývá ukázat, že $F(x+i\varepsilon) - F(x-i\varepsilon)$ konverguje pro $\varepsilon \to 0+$ k $\phi(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Potom

$$\begin{aligned}
F(x+i\varepsilon) - F(x-i\varepsilon) &= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\phi(t)}{t-x-i\varepsilon} - \frac{\phi(t)}{t-x+i\varepsilon} dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(t)}{t-x-i\varepsilon} - \frac{\phi(t)}{t-x+i\varepsilon} dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon\phi(t)}{(t-x)^2+\varepsilon^2} dt = \frac{1}{\varepsilon\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(t)}{(\frac{t-x}{\varepsilon})^2+1} dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(x+\varepsilon u)}{1+u^2} du.
\end{aligned}$$

Protože $\phi(t)$ je spojitá funkce s kompaktním nosičem, je

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\phi(t)| = M < +\infty.$$

Odtud

$$\left|\frac{\phi(x+\varepsilon u)}{1+u^2}\right| \le \frac{M}{1+u^2}.$$

Funkce $\frac{M}{1+u^2}$ je absolutně integrovatelná na $\mathbb{R}$, a proto z Lebesgueovy věty a ze spojitosti funkce ϕ plyne, že

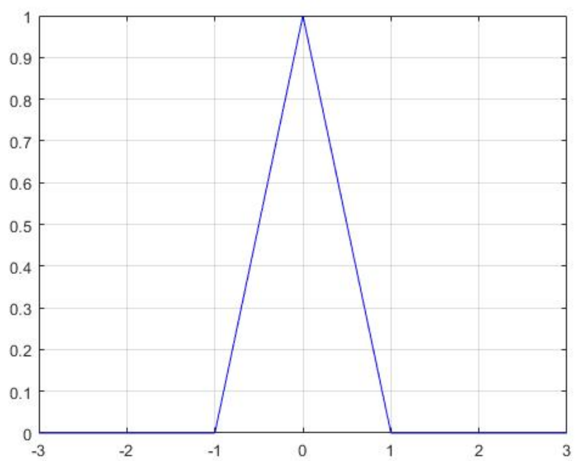
$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0+} F(x+i\varepsilon) - F(x-i\varepsilon) &= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(x+\varepsilon u)}{1+u^2} du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\phi(x+\varepsilon u)}{1+u^2} du = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{1+u^2} du \\
&= \frac{1}{\pi}\phi(x)\,[\operatorname{arctg} u]_{-\infty}^{+\infty} = \phi(x).
\end{aligned}$$

□

Hyperfunkce $f_\phi(x)$ z předchozí věty odpovídá spojité funkci $\phi(x)$ s kompaktním nosičem. Dostáváme tak (lineární) zobrazení σ lineárního prostoru všech spojitých funkcí $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ s kompaktním nosičem do lineárního prostoru všech hyperfunkcí na $\mathbb{R}$. Upozorněme zde, že průnik definičních oborů zobrazení ι z Věty 2.14 a právě zmíněného zobrazení σ je jednoprvková množina obsahující nulovou funkci, neboť reálně analytická funkce s kompaktním nosičem je nutně nulová funkce díky Větě A.7 o jednoznačnosti holomorfní funkce. Nabízí se tak otázka, zda lze zobrazení σ rozšířit na lineární zobrazení tak, aby se jednalo také o rozšíření zobrazení ι. Odpověď je kladná. Zobrazení σ je totiž možné rozšířit lineárně na množinu všech lokálně absolutně integrovatelných funkcí na $\mathbb{R}$ tak, že na reálně analytických funkcích má stejné hodnoty jako zobrazení ι. Konkrétní konstrukce však překračuje meze této práce, a proto čtenáře odkazujeme na monografii [12].

Příklad 2.17 Uvažujme funkci $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ danou předpisem

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1]. \end{cases}$$



Obrázek 2.3: Graf funkce $\phi(t)$ z Příkladu 2.17.

Jedná se evidentně o spojitou funkci s kompaktním nosičem. Hledejme hyperfunkci $f_\phi(x) = [F(z)]$ odpovídající funkci $\phi(x)$. Z Věty 2.16 je

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(t)}{t - z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{1 - |t|}{t - z} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{0} \frac{1 + t}{t - z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{0}^{1} \frac{1 - t}{t - z} dt. \end{aligned}$$

Zaměřme se nyní na první integrál, tedy

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} \frac{1+t}{t-z} dt &= \int_{-1}^{0} \frac{1+t-z+z}{t-z} dt = \int_{-1}^{0} 1 + \frac{1+z}{t-z} dt \\ &= 1 + (1+z) \int_{-1}^{0} \frac{1}{t-z} dt = 1 + (1+z) \Big[\ln(t-z) \Big]_{-1}^{0} \\ &= 1 + (1+z)(\ln(-z) - \ln(-1-z)).\end{aligned}$$

Obdobně pro druhý integrál můžeme psát

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} \frac{1-t}{t-z} dt &= \int_{0}^{1} \frac{1-(t-z)-z}{t-z} dt = \int_{0}^{1} -1 + \frac{1-z}{t-z} dt \\ &= -1 + (1-z) \int_{0}^{1} \frac{1}{t-z} dt = -1 + (1-z) \Big[\ln(t-z) \Big]_{0}^{1} \\ &= -1 + (1-z)(\ln(1-z) - \ln(-z)).\end{aligned}$$

Proto

$$f_\phi(x) = \left[\frac{1}{2\pi i} (2z \ln(-z) - (1+z) \ln(-1-z) + (1-z) \ln(1-z)) \right].$$

$\triangle$

Kapitola 3

Jednoduché operace na hyperfunkcích

3.1 Početní operace s hyperfunkcemi

Rádi bychom zobecnili definici násobení hyperfunkce číslem na násobení hyperfunkce libovolnou reálně analytickou funkcí.

Definice 3.1 Je-li $f(x) = [F(z)]$ hyperfunkce a $\phi(x)$ je reálně analytická funkce, pak *násobení* $\phi(x)$ s $f(x)$ je dáno vztahem

$$\phi(x)f(x) = f(x)\phi(x) := [\phi(z)F(z)],$$

kde $\phi(z)$ na pravé straně označuje holomorfní rozšíření reálně analytické funkce $\phi(x)$ na nějakou množinu $\mathcal{D} \in \mathcal{N}$.

Měli bychom se ještě přesvědčit, že definice je korektní. Pro tento účel předpokládejme, že $F(z), G(z) \in \mathcal{O}(\mathcal{D} \setminus \mathbb{R})$ jsou dvě generující funkce hyperfunkce $f(x)$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že reálně analytickou funkci lze rozšířit na funkci holomorfní v $\mathcal{D}$ (pokud by šla rozšířit jen na vlastní podmnožinu $\mathcal{D}' \in \mathcal{N}$ množiny $\mathcal{D}$, pak bychom místo funkcí $F(z)$ a $G(z)$ uvážili jejich restrikce na $\mathcal{D}' \setminus \mathbb{R}$). Protože $F(z)$ a $G(z)$ jsou dvě generující funkce hyperfunkce $f(x)$, existuje $\psi(z) \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$ tak, že $F(z) = G(z) + \psi(z)$. Odtud

$$\phi(z)F(z) = \phi(z)G(z) + \phi(z)\psi(z).$$

Součin holomorfních funkcí na $\mathcal{D}$ je opět funkce holomorfní na $\mathcal{D}$, a proto $\phi(z)\psi(z) \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$. To znamená, že $[\phi(z)F(z)] = [\phi(z)G(z)]$. Tím jsme dokázali, že definice nezávisí na volbě generující funkce, a je tudíž korektní.

Příklad 3.2 Pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$x^n\delta(x) = \left[z^n \cdot \left(-\frac{1}{2\pi i z}\right)\right] = \left[-\frac{z^{n-1}}{2\pi i}\right] = 0.$$

$\triangle$

Ba co více, ukazuje se, že výše uvedený příklad je pouze speciální případ velmi jednoduchého chování součinu reálně analytické funkce s Diracovým impulsem.

Tvrzení 3.3 Jestliže $\phi(x)$ je reálně analytická funkce, pak platí

$$\phi(x)\delta(x) = \phi(0)\delta(x).$$

Důkaz: Dle Definice 3.1 můžeme psát

$$\phi(x)\delta(x) = \left[-\frac{\phi(z)}{2\pi i z}\right],$$

kde $\phi(z)$ je holomorfní v nějaké množině $\mathcal{D} \in \mathcal{N}$. Je zřejmé, že

$$\frac{\phi(z) - \phi(0)}{z}$$

je funkce holomorfní v $\mathcal{D} \setminus \{0\}$. Navíc má v 0 odstranitelnou singularitu, neboť

$$\lim_{z \to 0} \frac{\phi(z) - \phi(0)}{z} = \phi'(0) \in \mathbb{C}.$$

Tedy

$$\psi(z) := \begin{cases} \frac{\phi(z)-\phi(0)}{z}, & z \in \mathcal{D} \setminus \{0\}, \\ \phi'(0), & z = 0 \end{cases}$$

je funkce holomorfní v $\mathcal{D}$. Proto

$$\begin{aligned}\phi(x)\delta(x) &= \left[-\frac{\phi(z)}{2\pi i z}\right] = \left[-\frac{\phi(z) - \phi(0) + \phi(0)}{2\pi i z}\right] = \left[-\frac{\phi(0)}{2\pi i z} - \frac{\phi(z) - \phi(0)}{2\pi i z}\right] \\ &= \left[-\frac{\phi(0)}{2\pi i z} - \frac{\psi(z)}{2\pi i}\right] = \left[-\frac{\phi(0)}{2\pi i z}\right] = \phi(0)\left[-\frac{1}{2\pi i z}\right] = \phi(0)\delta(x).\end{aligned}$$

□

Příklad 3.4 Nechť $\phi(x) = \sin(x)$ a hledejme, čemu se rovná součin $\phi(x)\delta(x)$. Využitím předchozího Tvrzení 3.3 a uvědoměním si funkční hodnoty funkce $\sin(x)$ v bodě 0, lze psát

$$\sin(x)\delta(x) = \sin(0)\delta(x) = 0.$$

Obdobně lze postupovat i v případě, kdy $\phi(x) = \cos(x)$. Poté můžeme součin počítat jako

$$\cos(x)\delta(x) = \cos(0)\delta(x) = \delta(x),$$

neboť platí, že $\cos(0) = 1$. △

Na závěr této sekce upozorněme, že součin dvou obecných hyperfunkcí $f(x) = [F(z)]$ a $g(x) = [G(z)]$ **nedefinujeme**. Zdálo by se přirozené definovat $f(x)g(x)$ jako hyperfunkci $[F(z)G(z)]$. Taková definice by ale nebyla korektní, jak si ukážeme na příkladu s Diracovým impulsem. Již dříve jsme si uvedli, že generující funkcí pro $\delta(x)$ je

$$F(z) = -\frac{1}{2\pi i z}.$$

Jednoduchým výpočtem dostáváme

$$[F(z)F(z)] = \left[-\frac{1}{2\pi i z}\left(-\frac{1}{2\pi i z}\right)\right] = \left[-\frac{1}{4\pi^2 z^2}\right].$$

Stejně dobrou generující funkcí pro Diracovu hyperfunkci $\delta(x)$ je také například funkce $G(z) = F(z) + 1$. Ale

$$[F(z)G(z)] = [F(z)F(z) + F(z)] = [F(z)F(z)] + [F(z)] \neq [F(z)F(z)]\,.$$

Tedy námi uvedený pokus o definici součinu dvou hyperfunkcí závisí na volbě generující funkce, a proto nevede ke korektní definici operace na faktorovém prostoru.

Na druhou stranu, ve světě hyperfunkcí platí, že mezi některými hyperfunkcemi je možné násobení definovat. Případným zájemcům o tuto problematiku je k dispozici hlubší náhled v [10, Kapitola 2].

3.2 Substituce v hyperfunkci

Mějme reálně analytickou funkci $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a hyperfunkci $f(x) = [F(z)]$. Naším cílem bude definovat hyperfunkci $f(\phi(x))$. Pro jednoduchost se omezíme jen na případy, kdy derivace funkce ϕ je buď všude kladná, nebo všude záporná. Pro obecnější diskuzi odkazujeme čtenáře na [12].

Protože $\phi(x)$ je funkce reálně analytická, má holomorfní rozšíření $\phi(z)$ do nějakého okolí reálné osy. Zdálo by se proto přirozené definovat $g(x) = f(\phi(x))$ jako hyperfunkci s generující funkcí $G(z) = F(\phi(z))$. Taková definice by ale nebyla v případě $\phi'(x) < 0$ dobrá. Proč? Chtěli bychom kompatibilitu se skládáním funkcí. Má-li být kandidát $g(x)$ na definici $f(\phi(x))$ tím pravým, pak by mělo pro hyperfunkci $f(x)$ odpovídající reálně analytické funkci platit

$$\widetilde{f}(\phi(x)) = \widetilde{g}(x).$$

Taková rovnost však obecně nenastává, což si nyní ukážeme. Předpokládejme, že $f(x)$ odpovídá reálně analytické funkci, tj. $F_+(z)$ a $F_-(z)$ je možné holomorfně rozšířit do nějakého okolí reálné osy (viz Tvrzení 2.15). Z Taylorova rozvoje máme

$$\phi(x + i\varepsilon) \approx \phi(x) + \phi'(x) i\varepsilon.$$

Znaménko derivace tedy rozhoduje o tom, zda se bod $x + i\varepsilon$ pro $\varepsilon > 0$ dostatečně malé zobrazí do horní nebo do dolní poloroviny. Obdobně je tomu i u bodu $x-i\varepsilon$. Předpokládejme, že $\phi'(x)<0$ na $\mathbb{R}$. Pak pro každé dostatečně malé $\varepsilon>0$ je

$$\begin{aligned} G_+(x+i\varepsilon) &= F_-(\phi(x+i\varepsilon)), \\ G_-(x-i\varepsilon) &= F_+(\phi(x-i\varepsilon)). \end{aligned}$$

Odtud díky spojitosti máme

$$\widetilde{g}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0+} G_+(x+i\varepsilon) - G_-(x+i\varepsilon) = F_-(\phi(x)) - F_+(\phi(x)).$$

Naproti tomu

$$\widetilde{f}(\phi(x)) = F_+(\phi(x)) - F_-(\phi(x)),$$

neboť

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0+} F_+(x+i\varepsilon) - F_-(x+i\varepsilon) = F_+(x) - F_-(x).$$

Hodnoty $\widetilde{f}(\phi(x))$ a $\widetilde{g}(x)$ se tak liší znaménkem. Z tohoto důvodu definujeme hyperfunkci $f(\phi(x))$ následovně.

Definice 3.5 Nechť $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je reálně analytická funkce, pro kterou je buď $\phi'(x)>0$ pro každé $x\in\mathbb{R}$, nebo $\phi'(x)<0$ pro každé $x\in\mathbb{R}$. Potom hyperfunkci $f(\phi(x))$ definujeme jako

$$f(\phi(x)) := \begin{cases} [F(\phi(z))], & \text{je-li } \phi'(x)>0 \text{ na } \mathbb{R}; \\ -[F(\phi(z))], & \text{je-li } \phi'(x)<0 \text{ na } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Příklad 3.6 Nechť $f(\phi(x))=\delta(e^x)$. Vidíme, že $\phi'(x)=e^x>0$ pro každé $x\in\mathbb{R}$. Z tohoto důvodu můžeme psát

$$\delta(e^x) = \left[-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{e^z}\right] = 0,$$

neboť generující funkce $-\frac{1}{2\pi i}e^{-z}$ je celistvá, a proto odpovídá nulové hyperfunkci. △

Zajímavý a důležitý je speciální případ afinní substituce. Podívejme se na něj proto podrobněji. Z Definice 3.5 vidíme, že

$$f(ax+b) = \operatorname{sgn}(a)\,[F(az+b)]\,, \tag{3.1}$$

kde a je reálné nenulové číslo a b je reálné číslo. V řeči komponent $F_+(z)$ a $F_-(z)$ generující funkce $F(z)$ můžeme psát

$$f(ax+b) = \begin{cases} [F_+(az+b), F_-(az+b)], & \text{pokud } a>0, \\ -[F_-(az+b), F_+(az+b)], & \text{pokud } a<0. \end{cases}$$

Příklad 3.7 Diracův impuls v bodě $x=0$ jsem si již zadefinovali jako

$$\delta(x) = \left[-\frac{1}{2\pi i z}\right].$$

Aplikujeme-li (3.1), lze pro $\delta(ax+b)$, kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $b \in \mathbb{R}$, psát

$$\begin{aligned}\delta(ax+b) &= \operatorname{sgn}(a)\left[-\frac{1}{2\pi i(az+b)}\right] \\ &= \operatorname{sgn}(a)\left[-\frac{1}{a}\frac{1}{2\pi i(z+\frac{b}{a})}\right] = \frac{\operatorname{sgn}(a)}{a}\left[-\frac{1}{2\pi i(z+\frac{b}{a})}\right].\end{aligned}$$

Po uvědomění si faktu, že pro $a \in \mathbb{R}$ platí $a = |a| \operatorname{sgn} a$, dostáváme

$$\delta(ax+b) = \frac{1}{|a|}\left[-\frac{1}{2\pi i(z+\frac{b}{a})}\right] = \frac{1}{|a|}\delta\left(x+\frac{b}{a}\right). \tag{3.2}$$

Snadno lze ověřit, že ze vztahu (3.2) vyplývá rovnost $\delta(x-b) = \delta(b-x)$, neboť

$$\begin{aligned}\delta(x-b) &= \frac{1}{|1|}\delta\left(x+\frac{-b}{1}\right) \\ &= \frac{1}{|-1|}\delta\left(x+\frac{b}{-1}\right) = \delta(b-x).\end{aligned}$$

Položíme-li $b = 0$ ve vztahu (3.2), dostaneme

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x).$$

Odtud je na první pohled patrná rovnost $\delta(-x) = \delta(x)$. △

Příklad 3.8 Nechť $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ a $u(x)$ je Heavisideova hyperfunkce, kterou jsme definovali v Příkladu 2.12. Pro $a > 0$ je

$$\begin{aligned}u(ax+b) &= \left[-\frac{1}{2\pi i}\ln(-az-b)\right] \\ &= \left[-\frac{1}{2\pi i}\ln\left(a\left(-z-\frac{b}{a}\right)\right)\right].\end{aligned}$$

Nyní bychom rádi napsali logaritmus součinu jako součet logaritmů. Musíme být ale opatrní, neboť jsme v komplexním oboru, kde taková identita obecně neplatí. Protože je však $a > 0$, obdržíme pro každé $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ rovnost

$$\ln(w) + \ln(a) = \ln|w| + \ln|a| + i\arg(w) = \ln|aw| + i\arg(aw) = \ln(aw).$$

Odtud

$$\begin{aligned}u(ax+b) &= \left[-\frac{1}{2\pi i}\ln\left(-z-\frac{b}{a}\right) - \frac{\ln a}{2\pi i}\right] \\ &= \left[-\frac{1}{2\pi i}\ln\left(-z-\frac{b}{a}\right)\right] + \left[-\frac{\ln a}{2\pi i}\right].\end{aligned}$$

Protože $-\frac{\ln a}{2\pi i}$ je konstanta, je $[-\frac{\ln a}{2\pi i}] = 0$. Dostáváme tak výsledný vztah

$$u(ax+b) = u\left(x+\frac{b}{a}\right).$$

Obdobně pro $a < 0$ je

$$\begin{aligned}
u(ax+b) &= \operatorname{sgn}(a)\Big[-\frac{1}{2\pi i}\ln(-az-b)\Big] \\
&= \left[\frac{1}{2\pi i}\ln\left(-a\Big(z+\frac{b}{a}\Big)\right)\right] \\
&= \left[\frac{1}{2\pi i}\ln\left(z+\frac{b}{a}\right)\right] + \left[\frac{\ln(-a)}{2\pi i}\right] \\
&= u\Big(-x-\frac{b}{a}\Big).
\end{aligned}$$

Oba případy ($a > 0$ a $a < 0$) lze sjednotit do jednoho vztahu, který má podobu

$$u(ax+b) = u\Big(\operatorname{sgn}(a)\Big(x+\frac{b}{a}\Big)\Big).$$

$\triangle$

Příklad 3.9 Nechť $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ a $\psi(x)$ je reálně analytická funkce. Pokusme se nalézt hyperfunkci $\psi(x)\delta(ax-b)$. Z Definice 3.1 a ze vztahu (3.2) máme

$$\begin{aligned}
\phi(x)\delta(ax-b) = \frac{\phi(x)}{|a|}\delta\left(x-\frac{b}{a}\right) &= -\frac{1}{2\pi i|a|}\left[\frac{\phi(z)}{z-\frac{b}{a}}\right] \\
&= -\frac{1}{2\pi i|a|}\left[\frac{\phi\left(\frac{b}{a}\right)+\phi\left(z\right)-\phi\left(\frac{b}{a}\right)}{z-\frac{b}{a}}\right].
\end{aligned}$$

Funkce

$$\frac{\phi\left(z\right)-\phi\left(\frac{b}{a}\right)}{z-\frac{b}{a}}$$

je evidentně holomorfní v otevřené množině $\mathcal{D} \setminus \left\{\frac{b}{a}\right\}$ pro nějaké $\mathcal{D} \in \mathcal{N}$. Protože

$$\lim_{z\to\frac{b}{a}} \frac{\phi(z)-\phi\left(\frac{b}{a}\right)}{z-\frac{b}{a}} = \phi'\left(\frac{b}{a}\right),$$

je funkce

$$\psi(z) = \begin{cases} \frac{\phi(z)-\phi\left(\frac{b}{a}\right)}{z-\frac{b}{a}}, & z \in \mathcal{D} \setminus \left\{\frac{b}{a}\right\}, \\ \phi'\left(\frac{b}{a}\right), & z = \frac{b}{a} \end{cases}$$

holomorfní na $\mathcal{D}$.

To znamená, že

$$
\begin{aligned}
\phi(x)\delta(ax-b) &= -\frac{1}{2\pi i|a|}\left[\frac{\phi\left(\frac{b}{a}\right)}{z-\frac{b}{a}}+\psi(z)\right] \\
&= -\frac{\phi(\frac{b}{a})}{2\pi i|a|}\left[\frac{1}{z-\frac{b}{a}}\right]-\frac{1}{2\pi i|a|}\left[\psi(z)\right] \\
&= \frac{\phi(\frac{b}{a})}{|a|}\left[-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-\frac{b}{a}}\right] = \frac{\phi(\frac{b}{a})}{|a|}\delta\left(x-\frac{b}{a}\right).
\end{aligned}
$$

Speciální podobou nalezeného vztahu je pak případ, kdy uvážíme $a=1$. Tedy

$$
\phi(x)\delta(x-b) = \phi(b)\delta(x-b).
$$

△

Příklad 3.10 V Příkladu 2.12 jsme si definovali Heavisideovu hyperfunkci

$$
u(x) = \left[-\frac{1}{2\pi i}\ln(-z)\right].
$$

Tato hyperfunkce má hodnotu 0 pro všechna x záporná a hodnotu 1 pro všechna x kladná. Není těžké ukázat, že hyperfunkce

$$
u(-x) = \left[\frac{1}{2\pi i}\ln z\right]
$$

má naopak hodnotu 0 pro všechna kladná x a pro všechna x záporná pak konstantní hodnotu rovnu jedné.

Nabízí se otázka, jakou hyperfunkci dostaneme sečtením předchozích dvou uvedených hyperfunkcí $u(-x)$ a $u(x)$. Než však odpovíme na tuto otázku, podívejme se na hodnoty funkce $\ln(-z)$.

Začněme bližším pohledem na hlavní hodnotu argumentu komplexního čísla z, tedy $\arg(z)$. Nechť $z\in\mathbb{C}_-$. V tomto případě je $z=|z|\left(\cos\phi+i\sin\phi\right)$, kde $\phi=\arg z\in(-\pi,0)$. Tedy

$$
\begin{aligned}
-z &= -|z|(\cos\phi+i\sin\phi) \\
&= |z|(\cos(\phi+\pi)+i\sin(\phi+\pi)).
\end{aligned}
$$

Protože $\phi+\pi\in(-\pi,\pi]$, je

$$
\arg(-z) = \phi+\pi = \arg z+\pi.
$$

Obdobně bychom postupovali i při zvolení opačné poloroviny, tedy v případě $z\in\mathbb{C}_+$, kde obdržíme rovnost $\arg(-z)=\arg z-\pi$. Proto uvážením definice funkce

$$
\ln(z) = \ln|z| + i\arg z
$$

máme

$$\ln(-z) = \begin{cases} \ln|z| + i\arg z - \pi i, & z \in \mathbb{C}_+, \\ \ln|z| + i\arg z + \pi i, & z \in \mathbb{C}_-. \end{cases}$$

Vidíme, že funkce $\ln(-z)$ se v horní a dolní polorovině liší pouze o znaménko před členem πi. Proto tedy můžeme sjednotit zápis na

$$\ln(-z) = \ln(z) - \pi i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z).$$

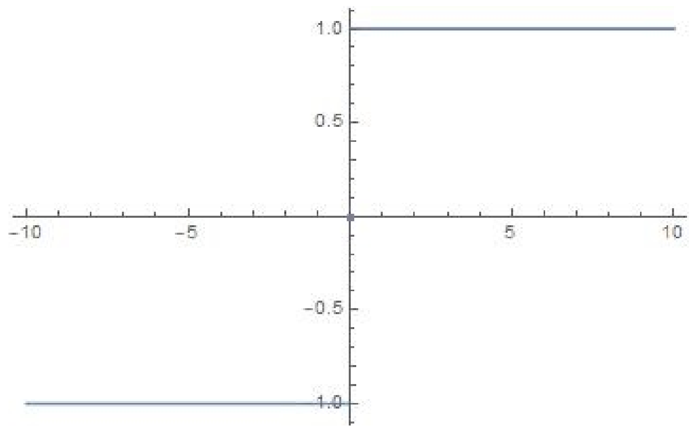
Nyní již můžeme přejít k samotnému součtu

$$\begin{aligned} u(-x) + u(x) &= \left[\frac{1}{2\pi i}(\ln(z) - \ln(-z)\right] \\ &= \left[\frac{1}{2\pi i}(\ln(z) - \ln(z) + \pi i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \mathrm{z}))\right] \\ &= \left[\frac{1}{2\pi i}(\pi i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \mathrm{z}))\right] = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right] = [1, 0]. \end{aligned}$$

Hyperfunkce $u(-x) + u(x)$ proto odpovídá konstantní funkci rovné jedné, což jsme mohli očekávat. Z tvaru generující funkce je patrné, že nosič hyperfunkce $u(-x) + u(x)$ je množina $\mathbb{R}$. △

Příklad 3.11 V neposlední řadě je třeba zmínit ještě tzv. *hyperfunkci signum*, kterou značíme $\operatorname{sgn}(x)$. Ta by měla odpovídat funkci signum, značené shodně $\operatorname{sgn}(x)$, jež má vlastnosti dané předpisem

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$



Obrázek 3.1: Graf funkce $\operatorname{sgn}(x)$.

Samotná hyperfunkce signum je pak definována jako

$$\operatorname{sgn}(x) := u(x) - u(-x) = \left[-\frac{1}{2\pi i}((\ln(-z) + \ln(z))\right].$$

△

Kapitola 4

Derivace a integrace hyperfunkcí

4.1 Derivace hyperfunkcí

Pojem derivace se objevuje v řadě odvětví. Ať už se bavíme o matematické analýze, o řešení fyzikálních problémů či například o matematických modelech v biologii a ekonomii. Derivaci využíváme při hledání lokálních extrémů funkce (maxima či minima), při analýze průběhu grafu funkce nebo při výpočtu rychlosti i zrychlení hmotného bodu.

Zkrátka derivace je natolik využívaná operace, že by bylo vhodné umět derivovat také hyperfunkce. Jak uvidíme záhy, holomorfnost horní a dolní komponenty generující funkce nám zajistí, že každá hyperfunkce bude mít derivaci libovolného řádu. To je vlastnost, kterou u obyčejných funkcí jedné reálné proměnné nemáme.

Definice 4.1 Nechť $f(x) = [F(z)]$ je libovolná hyperfunkce a n je celé nezáporné číslo. Pak definujeme *derivaci hyperfunkce* $f(x)$ *řádu* n (*n-tou derivaci*) jako

$$D^n f(x) = f^{(n)}(x) := [F^{(n)}(z)].$$

V případě derivací nízkých řádů, zpravidla pak u derivací 1. a 2. řádu, používáme také běžnou „čárkovou“ symboliku. Čili píšeme

$$Df(x) = f'(x) = [F'(z)],$$
$$D^2 f(x) = f''(x) = [F''(z)].$$

Je důležité poznamenat, že definice je evidentně korektní. Uvědomme si totiž, že dvě generující funkce $F(z)$ a $G(z)$ hyperfunkce $f(x)$ se liší o holomorfní funkci $\phi(z)$ na nějakém okolí $\mathcal{D} \in \mathcal{N}$ reálné osy. Protože $\phi'(z)$ je holomorfní na $\mathcal{D}$, jsou $F'(z)$ a $G'(z)$ generující funkce jedné a téže hyperfunkce. Tedy definice derivace nezávisí na reprezentantovi, a je proto dobře definovanou operací na faktorovém prostoru. Obdobně bychom zdůvodnili koreknost definice derivace obecného řádu.

Z definice okamžitě vidíme, že derivace je lineární zobrazení na prostoru hyperfunkcí.

Příklad 4.2 Hledejme nyní derivaci prvního řádu Heavisideovy hyperfunkce $u(x)$. Z definice derivace máme

$$u'(x) = \left[\frac{d}{dz}\left(-\frac{\ln(-z)}{2\pi i}\right)\right] = \left[-\frac{1}{2\pi i z}\right] = \delta(x).$$

Obdobně zjistíme i derivaci posunuté Heavisideovy hyperfunkce, přičemž pro každé $a \in \mathbb{R}$ dostáváme

$$\begin{aligned} u'(x-a) &= \left[\frac{d}{dz}\left(-\frac{\ln(-(z-a))}{2\pi i}\right)\right] \\ &= \left[-\frac{-1}{-2\pi i(z-a)}\right] = \left[-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-a}\right] = \delta(x-a). \end{aligned}$$

Druhá derivace hyperfunkce $u(x)$ pak je

$$u''(x) = \left[\frac{d^2}{dz^2}\left(-\frac{\ln(-z)}{2\pi i}\right)\right] = \left[\frac{d}{dz}\left(-\frac{1}{2\pi i z}\right)\right] = \delta'(x).$$

△

Obsah předchozího příkladu je velice zajímavý. Věnujme mu proto ještě pár slov. Z úvodního kurzu matematické analýzy víme, že Heavisideova funkce není diferencovatelná na $\mathbb{R}$ (nemá derivaci v 0). Avšak chápeme-li ji jako hyperfunkci, pak derivaci má, a to konkrétně Diracův impuls. Upozorněme zde ale na fakt, že Diracův impuls neodpovídá žádné běžné funkci. Tedy výsledek našeho příkladu není v rozporu s tím, co se děje ve světě běžných funkcí.

Někdy se může hodit znalost generující funkce pro n-tou derivaci Diracova impulsu. O jejím tvaru pojednává následující tvrzení.

Tvrzení 4.3 Pro každé celé nezáporné číslo n je

$$\delta^{(n)}(x-a) = \left[\frac{(-1)^{n+1}n!}{2\pi i(z-a)^{n+1}}\right]. \tag{4.1}$$

Důkaz: Tvrzení dokážeme matematickou indukcí. Protože

$$\delta^{(0)}(x-a) = \delta(x-a) = \left[-\frac{1}{2\pi i(z-a)}\right],$$

platí (4.1) pro $n = 0$.

Přejděme na indukční krok. Nechť rovnost (4.1) platí pro $n = l$, kde l je celé nezáporné číslo. Tedy předpokládáme, že

$$\delta^{(l)}(x-a) = \left[\frac{(-1)^{l+1}l!}{2\pi i(z-a)^{l+1}}\right].$$

Pak

$$\begin{aligned}\delta^{(l+1)}(x-a) = (\delta^{(l)}(x-a))' &= \left[\frac{(-1)^{l+1}l!}{2\pi i(z-a)^{l+1}}\right]' \\ &= \left[\frac{(-1)^{l+1}l!}{2\pi i(z-a)^{l+2}}(-(l+1))\right] = \left[\frac{(-1)^{l+2}(l+1)!}{2\pi i(z-a)^{l+2}}\right] \\ &= \left[\frac{(-1)^{(l+1)+1}(l+1)!}{2\pi i(z-a)^{l+1+1}}\right].\end{aligned}$$

Tím je dokázáno, že (4.1) platí i pro $n = l+1$, a proto je důkaz matematickou indukcí hotov.

□

Příklad 4.4 Uvažujme nyní derivaci prvního řádu Diracova impulsu a hledejme, čemu se rovná součin $x\delta'(x)$.

$$x\delta'(x) = \left[z\left(-\frac{1}{2\pi iz}\right)'\right] = \left[z\frac{1}{2\pi iz^2}\right] = \left[\frac{1}{2\pi iz}\right] = -\delta(x).$$

△

Tvrzení 4.5 Pro libovolnou hyperfunkci $f(x)$ a jakoukoli reálně analytickou funkci $\phi(x)$ platí

$$(\phi(x)f(x))' = \phi'(x)f(x) + \phi(x)f'(x).$$

Důkaz: Nechť $f(x) = [F(z)]$. Pak

$$(\phi(x)f(x))' = [(\phi(z)F(z))'] = [\phi'(z)F(z)] + [\phi(z)F'(z)].$$

Z definice násobení reálně analytické funkce vidíme, že první člen není nic jiného, než $\phi'(x)f(x)$. Obdobně druhý člen je hyperfunkce $\phi(x)f'(x)$. Tedy můžeme psát

$$(\phi(x)f(x))' = \phi'(x)f(x) + \phi(x)f'(x),$$

a tím jsme tvrzení dokázali.

□

Tvrzení 4.6 Nechť $a \in \mathbb{R}$. Pro libovolnou reálně analytickou funkci $\phi(x)$ a pro každé celé nezáporné číslo n platí

$$\phi(x)\delta^{(n)}(x-a) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\phi^{(n-k)}(a)\delta^{(k)}(x-a). \tag{4.2}$$

Důkaz: Důkaz lze provést matematickou indukcí na základě předchozího Tvrzení 4.5. Protože

$$\begin{aligned}\phi(x)\delta^{(0)}(x-a) &= \phi(x)\delta(x-a) = \phi(a)\delta(x-a) \\ &= (-1)^0\binom{0}{0}\phi^{(0)}(a)\delta^{(0)}(x-a),\end{aligned}$$

platí (4.2) pro $n = 0$.

Nyní se zaměříme na indukční krok. Ať pro každou reálně analytickou funkci $\psi(x)$ platí rovnost (4.2) pro $n = l$, kde l je celé nezáporné číslo. Předpokládejme tedy, že pro každou reálně analytickou funkci $\psi(x)$ je

$$\psi(x)\delta^{(l)}(x-a) = \sum_{k=0}^{l}(-1)^{l-k}\binom{l}{k}\psi^{(l-k)}(a)\delta^{(k)}(x-a).$$

Využitím Tvrzení 4.5 a indukčního předpokladu dostaneme

$$\begin{aligned}\phi(x)\delta^{(l+1)}(x-a) &= [\phi(x)\delta^{(l)}(x-a)]' - \phi'(x)\delta^{(l)}(x-a)\\ &= \left[\sum_{k=0}^{l}(-1)^{l-k}\binom{l}{k}\phi^{(l-k)}(a)\delta^{(k)}(x-a)\right]'\\ &- \sum_{k=0}^{l}(-1)^{l-k}\binom{l}{k}\phi^{(l+1-k)}(a)\delta^{(k)}(x-a)\\ &= \sum_{k=0}^{l}(-1)^{l-k}\binom{l}{k}\phi^{(l-k)}(a)\delta^{(k+1)}(x-a)\\ &- \sum_{k=0}^{l}(-1)^{l-k}\binom{l}{k}\phi^{(l+1-k)}(a)\delta^{(k)}(x-a).\end{aligned}$$

Nyní explicitně vypíšeme člen pro $k = l$ z první sumy a obdobně člen pro $k = 0$ ze sumy druhé. Pokračujeme-li ve výpočtu, dostáváme

$$\begin{aligned}\phi(x)\delta^{(l+1)}(x-a) &= (-1)^0\binom{l}{l}\phi^{(0)}(a)\delta^{(l+1)}(x-a)\\ &+ \sum_{k=0}^{l-1}(-1)^{l-k}\binom{l}{k}\phi^{(l-k)}(a)\delta^{(k+1)}(x-a)\\ &- (-1)^l\binom{l}{0}\phi^{(l+1)}(a)\delta^{(0)}(x-a)\\ &- \sum_{k=1}^{l}(-1)^{l-k}\binom{l}{k}\phi^{(l+1-k)}(a)\delta^{(k)}(x-a).\end{aligned}$$

Přehozením pořadí sčítanců a zvolením vhodné substituce $k = m-1$ u první sumy obdržíme

$$\begin{aligned}\phi(x)\delta^{(l+1)}(x-a) = \phi^{(0)}(a)\delta^{(l+1)}(x-a) &- (-1)^l\binom{l}{0}\phi^{(l+1)}(a)\delta^{(0)}(x-a)\\ &+ \sum_{m=1}^{l}(-1)^{l-(m-1)}\binom{l}{m-1}\phi^{(l-m+1)}(a)\delta^{(m-1+1)}(x-a)\\ &- \sum_{k=1}^{l}(-1)^{l-k}\binom{l}{k}\phi^{(l+1-k)}(a)\delta^{(k)}(x-a)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \phi^{(0)}(a)\delta^{(l+1)}(x-a) + (-1)^{l+1}\binom{l}{0}\phi^{(l+1)}(a)\delta^{(0)}(x-a) \\
&+ \sum_{k=1}^{l}(-1)^{l+1-k}\left[\binom{l}{k} + \binom{l}{k-1}\right]\phi^{(l+1-k)}(a)\delta^{(k)}(x-a).
\end{aligned}
$$

Jelikož

$$
\begin{aligned}
\binom{l}{k} + \binom{l}{k-1} &= \frac{l!}{k!(l-k)!} + \frac{l!}{(k-1)!(l-k+1)!} \\
&= \frac{l!(l-k+1) + l!k}{k!(l-k+1)!} = \frac{(l+1)!}{k!(l-k+1)!} = \binom{l+1}{k}
\end{aligned}
$$

a zároveň platí, že

$$
\phi^{(0)}(a)\delta^{(l+1)}(x-a) = (-1)^{(l+1)-(l+1)}\binom{l+1}{l+1}\phi^{(l+1-(l+1))}(a)\delta^{(l+1)}(x-a)
$$

a současně

$$
(-1)^{l+1}\binom{l}{0}\phi^{(l+1)}(a)\delta^{(0)}(x-a) = (-1)^{l+1-0}\binom{l+1}{0}\phi^{(l+1-0)}(a)\delta^{(0)}(x-a),
$$

je

$$
\phi(x)\delta^{(l+1)}(x-a) = \sum_{k=0}^{l+1}(-1)^{l+1-k}\binom{l+1}{k}\phi^{(l+1-k)}(a)\delta^{(k)}(x-a).
$$

$\square$

Vzorec z předchozího tvrzení se velmi často používá pro nízká n. Je proto účelné si vypsat prvních pár případů explicitně. Dosadíme-li za n postupně hodnoty $0, 1, 2$, dostaneme

$$
\begin{aligned}
\phi(x)\delta(x-a) &= \phi(a)\delta(x-a), \\
\phi(x)\delta'(x-a) &= \phi(a)\delta'(x-a) - \phi'(a)\delta(x-a), \\
\phi(x)\delta''(x-a) &= \phi(a)\delta''(x-a) - 2\phi'(a)\delta'(x-a) + \phi''(a)\delta(x-a).
\end{aligned}
$$

Povšimněme si, že pro $n = 0$ se nejedná o nic jiného, než o speciální podobu vztahu z Příkladu 3.9.

Příklad 4.7 Ať $\phi(x) = \cos x$. Poté

$$
\begin{aligned}
(u(x)\cos x)' &= (u(x))'\cos x + u(x)(\cos x)' \\
&= \delta(x)\cos x - u(x)\sin x = \delta(x) - u(x)\sin x.
\end{aligned}
$$

$\triangle$

Příklad 4.8 Nechť $\phi(x) = \sin(2x)$, $f(x) = u(x)$ a hledejme druhou derivaci součinu $\phi(x)f(x)$. Nejprve si zjistíme první derivaci, kterou následně opět zderivujeme. Čili obdobně jako v předchozím příkladu

$$\begin{aligned}(u(x)\sin(2x))' &= \delta(x)\sin(2x) + 2u(x)\cos(2x) = 2u(x)\cos(2x),\\ (u(x)\sin(2x))'' &= (2u(x)\cos(2x))' = 2\delta(x)\cos(2x) - 4u(x)\sin(2x)\\ &= 2\delta(x) - 4u(x)\sin(2x).\end{aligned}$$

△

Příklad 4.9 Ukažme, že platí rovnost

$$\operatorname{sgn}'(x) = 2\,\delta(x).$$

Abychom tuto rovnost ověřili, využijeme fakt, že

$$\operatorname{sgn}(x) = \left[-\frac{1}{2\pi i}((\ln(-z) + \ln(z))\right].$$

Z definice derivace hyperfunkce dostáváme

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}'(x) &= \left[-\frac{1}{2\pi i}\frac{d(\ln(-z) + \ln(z))}{dz}\right]\\ &= \left[-\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{-1}{-z} + \frac{1}{z}\right)\right]\\ &= 2\left[-\frac{1}{2\pi i z}\right] = 2\delta(x).\end{aligned}$$

△

Z úvodního kurzu matematické analýzy je dobře známo, že funkce má nulovou derivaci na reálné ose právě tehdy, když je konstantní. Dokažme analogické tvrzení i pro hyperfunkce.

Tvrzení 4.10 Nechť $f(x)$ je hyperfunkce. Potom $f'(x) = 0$ právě tehdy, když $f(x) = [c\,\mathbf{1}_+(z)]$ pro nějaké $c \in \mathbb{C}$.

Důkaz: Nejprve dokážeme první implikaci. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $f(x) \in \mathcal{O}(\mathcal{D} \setminus \mathbb{R})/\mathcal{O}(\mathcal{D})$ pro nějaké okolí $\mathcal{D} \in \mathcal{N}$ reálné osy, které je jednoduše souvislou množinou. Nechť $F(z)$ je generující funkce hyperfunkce $f(x)$. Protože

$$f'(x) = [F'(z)] = 0,$$

existuje $G(z) \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$ tak, že $F'(z) = G(z)$ pro všechna $z \in \mathcal{D} \setminus \mathbb{R}$. Z jednoduché souvislosti oblasti $\mathcal{D}$ vyplývá, že funkce $G(z)$ má v $\mathcal{D}$ primitivní funkci (viz [14, Věta 3.2]), kterou označíme $H(z)$. Protože $F_+(z)$ a $H(z)$ jsou primitivní funkce k funkci $G(z)$ na $\mathcal{D}_+$, existuje $c_1 \in \mathbb{C}$ tak, že

$$F_+(z) = H(z) + c_1,\ z \in \mathcal{D}_+.$$

Obdobně existuje $c_2 \in \mathbb{C}$ tak, že

$$F_-(z) = H(z) + c_2, \; z \in \mathcal{D}_-.$$

Avšak funkce $H(z) + c_2$ je holomorfní v $\mathcal{D}$. Tudíž

$$f(x) = [F(z)] = [F(z) - H(z) - c_2] = [c_1 - c_2, 0] = [c\,\mathbf{1}_+(z)],$$

kde $c = c_1 - c_2$.

Obrácenou implikaci dokážeme snadno. Jestliže $f(x) = [c\,\mathbf{1}_+(z)]$ pro nějaké $c \in \mathbb{C}$, pak z definice derivace hyperfunkce máme

$$f'(x) = [(c\,\mathbf{1}_+(z))'] = 0.$$

$\square$

4.2 Rovnice tvaru $\phi(x)f(x) = h(x)$

Uvažujme nyní situaci, kdy budeme hledat řešení rovnice $\phi(x)f(x) = h(x)$ pro neznámou hyperfunkci $f(x)$, kde $h(x) = [H(z)]$ je pevně zvolená hyperfunkce a $\phi(x)$ je libovolná pevně zadaná reálně analytická funkce. V této práci se zaměříme jen na dva tvary funkce $\phi(x)$, konkrétně

(i) $\phi(x)$ nemá žádný kořen;

(ii) $\phi(x)$ má právě jeden kořen v bodě $x = a \in \mathbb{R}$ řádu $n \in \mathbb{N}$.

V případě (i) je řešení prosté. Ať $h(x) = [H(z)]$. Z rovnice $\phi(x)f(x) = h(x)$ vidíme, že

$$H(z) + \psi(z) = \phi(z)F(z),$$

kde $\psi(z)$ je holomorfní funkce na dostatečně malém okolí reálné osy a $F(z)$ je generující funkce hledané hyperfunkce $f(x)$. Protože $\phi(z)$ nemá reálné kořeny, je $\frac{1}{\phi(z)}$ holomorfní (na dostatečně malém okolí reálné osy). Tedy

$$F(z) = \frac{H(z)}{\phi(z)} + \frac{\psi(z)}{\phi(z)},$$

a proto má rovnice jednoznačné řešení ve tvaru

$$f(x) = \left[\frac{H(z)}{\phi(z)}\right].$$

Příklad 4.11 Demonstrujme si tento fakt na konkrétním příkladu. Nechť $\phi(x) = e^x$ a $h(x) = \delta(x - b)$, kde $b \in \mathbb{R}$. Pak řešením rovnice

$$e^x f(x) = \delta(x - b)$$

je

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left[\frac{1}{e^z}\left(-\frac{1}{2\pi i(z-b)}\right)\right] \\
&= e^{-x}\,\delta(x-b) = e^{-b}\,\delta(x-b).
\end{aligned}
$$

△

Nyní předpokládejme, že platí (ii). To znamená, že

$$\phi(x) = (x-a)^m \psi(x),$$

kde $\psi(x)$ je reálně analytická funkce různá od nuly v každém bodě reálné osy. Hledáme tedy řešení rovnice

$$(x-a)^m \psi(x) f(x) = h(x).$$

Tvrzení 4.12 Nechť $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $\psi(x)$ je reálně analytická funkce nenulová ve všech bodech reálné osy a $h(x) = [H(z)]$ je hyperfunkce. Potom hyperfunkce $f(x)$ je řešením rovnice

$$(x-a)^m \psi(x) f(x) = h(x)$$

právě tehdy, když

$$f(x) = \left[\frac{H(z)}{\psi(z)(z-a)^m}\right] + \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}(x-a),$$

kde $c_0, \dots, c_{m-1} \in \mathbb{C}$.

Důkaz: Předpokládejme nejdříve, že $f(x) = [F(z)]$ je řešením zadané rovnice. Pak musí existovat funkce $\varphi(z)$ holomorfní na nějakém dostatečně malém okolí reálné osy tak, že

$$(z-a)^m \psi(z) F(z) = H(z) + \varphi(z).$$

Odtud

$$F(z) = \frac{H(z)}{(z-a)^m \psi(z)} + \frac{\varphi(z)}{\psi(z)(z-a)^m}.$$

Označme

$$G(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)(z-a)^m}.$$

Funkce $G(z)$ má v bodě a pól řádu m. Ať $\sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{(z-a)^k}$ je hlavní část Laurentova rozvoje funkce $G(z)$ na prstencovém okolí bodu a. Pak funkce

$$G(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{(z-a)^k}$$

má v bodě a odstranitelnou singularitu. Dodefinujeme-li tuto funkci limitou v bodě a, dostaneme funkci holomorfní na nějakém okolí reálné osy. Takto dodefinovanou funkci budeme značit symbolem $\theta(z)$. Vidíme tedy, že

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{H(z)}{(z-a)^m \psi(z)} + \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{(z-a)^k} + \theta(z) \\ &= \frac{H(z)}{(z-a)^m \psi(z)} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{b_{k+1}}{(z-a)^{k+1}} + \theta(z). \end{aligned}$$

To ale díky (4.1) znamená, že

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[\frac{H(z)}{(z-a)^m \psi(z)}\right] + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2\pi i b_{k+1}}{(-1)^{k+1} k!} \left[\frac{(-1)^{k+1} k!}{2\pi i (z-a)^{k+1}}\right] \\ &= \left[\frac{H(z)}{(z-a)^m \psi(z)}\right] + \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}(x-a), \end{aligned}$$

kde $c_k = \frac{2\pi i b_{k+1}}{(-1)^{k+1} k!}$.

Nyní předpokládejme, že

$$f(x) = \left[\frac{H(z)}{\psi(z)(z-a)^m}\right] + \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}(x-a),$$

kde $c_0, \ldots, c_{m-1} \in \mathbb{C}$. Využitím (4.1) dostaneme, že pro každé celé nezáporné číslo $k < m$ je

$$\begin{aligned} (x-a)^m \delta^{(k)}(x-a) &= \left[(z-a)^m \frac{(-1)^{k+1} k!}{2\pi i (z-a)^{k+1}}\right] \\ &= \left[\frac{(-1)^{k+1} k!}{2\pi i} (z-a)^{m-k-1}\right] = 0. \end{aligned}$$

Proto

$$(x-a)^m \psi(x) f(x) = h(x) + \sum_{k=0}^{m-1} c_k (x-a)^m \psi(x) \delta^{(k)}(x-a) = h(x). \qquad \square$$

Příklad 4.13 Mějme rovnici $x^m f(x) = \delta^{(n)}(x)$ a hledejme její řešení $f(x)$. Podle (4.1) a Tvrzení 4.12 je

$$f(x) = \left[\frac{(-1)^{n+1} n!}{2\pi i z^{n+m+1}}\right] + \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}(x),$$

kde $c_0, \ldots, c_{m-1} \in \mathbb{C}$. Konkrétně pro $m = 1, n = 0$ je

$$f(x) = -\delta'(x) + c_0 \delta(x).$$

$\triangle$

Omezení se na výše uvedené dva konkrétní případy funkce $\phi(x)$ zcela jistě nepokryje všechny možné tvary funkce $\phi(x)$. Pro případné zájemce jsou další případy detailně rozebrány v literatuře [10]. V této práci je ale uvádět nebudeme, neboť by to bylo na úkor ostatních témat.

4.3 Integrace hyperfunkcí

Stejně jako u derivace, tak i u integrace platí, že se jedná o velmi důležitý a široce využívaný matematický nástroj používaný v mnoha odvětvích. Z tohoto důvodu budeme chtít zavést integrál také v případě hyperfunkcí. Omezíme se pouze na integraci přes konečné uzavřené intervaly. Integrál hyperfunkce budeme definovat pomocí integrování generující funkce přes vhodné křivky v komplexní rovině. Taková definice se může zdát na první pohled umělá, a proto si ji zkusíme motivovat. Co by měla splňovat? Určitě by měl být integrál hyperfunkce, která reprezentuje obyčejnou funkci, roven běžnému integrálu této funkce. Tento přirozený požadavek se pokusíme využít k motivaci zavedení integrálu hyperfunkce.

Abychom motivaci neměli zatíženou pro náš účel zbytečnými technickými detaily, budeme v některých krocích postupovat bez nároku na podrobné zdůvodnění. V těchto případech zdůvodnění jen naznačíme.

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a $f(x) = [F_+(z), F_-(z)]$. Předpokládejme, že $f(x)$ odpovídá reálně analytické funkci. Jak jsme již ukázali v Tvrzení 2.15, tak náš předpoklad znamená, že funkce $F_+(z)$ a $F_-(z)$ lze holomorfně prodloužit na nějaké okolí $\mathcal{D} \in \mathcal{N}$ reálné osy. Toto okolí obsahuje obdélník

$$\{z = x + iy |\, x \in [a, b], y \in [-\delta, \delta]\}$$

pro nějaké $\delta > 0$ (což lze zdůvodnit kompaktností intervalu $[a, b]$). Dále budeme pod $F_+(z)$ a $F_-(z)$ rozumět výše specifikovaná holomorfní rozšíření na $\mathcal{D}$. Nyní uvažme reálně analytickou funkci

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0+} F_+(x + i\varepsilon) - F_-(x - i\varepsilon) = F_+(x) - F_-(x).$$

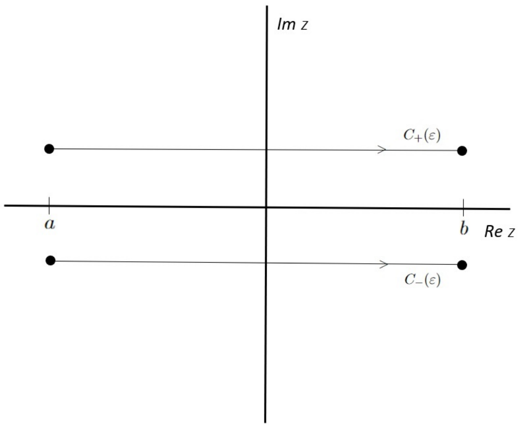
Z Věty 2.14 víme, že $\widetilde{f}(x)$ odpovídá hyperfunkci $f(x)$. Pokusíme se tedy integrál funkce $\widetilde{f}(x)$ vyjádřit pomocí křivkových integrálů z funkcí $F_+(z)$ a $F_-(z)$, a poté tento vztah využijeme jako definici integrálu hyperfunkce $f(x)$ přes interval $[a, b]$. S využitím Lebesgueovy věty o záměně limity a integrálu (viz například [15]) lze ukázat, že

$$\begin{aligned}\int_a^b \widetilde{f}(x)dx &= \int_a^b \lim_{\varepsilon\to 0+} (F_+(x + i\varepsilon) - F_-(x - i\varepsilon))dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \Big(\int_a^b F_+(x + i\varepsilon)dx - \int_a^b F_-(x - i\varepsilon)dx \Big).\end{aligned}$$

Odtud

$$\int_a^b \widetilde{f}(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \Big(\int_{C_+(\varepsilon)} F_+(z)dz - \int_{C_-(\varepsilon)} F_-(z)dz \Big),$$

kde $C_+(\varepsilon)$ je křivka s parametrizací $\varphi(x) = x + i\varepsilon$, $x \in [a, b]$, a křivka $C_-(\varepsilon)$ má parametrizaci $\varphi(x) = x + i\varepsilon$, $x \in [a, b]$. Křivky $C_\pm(\varepsilon)$ jsou znázorněny na Obrázku 4.1.



Obrázek 4.1: Grafické znázornění integračních křivek $C_+(\varepsilon)$ a $C_-(\varepsilon)$.

Označme $S(z_1, z_2)$ úsečku v komplexní rovině, jejíž počáteční bod je z_1 a koncový bod je z_2. Protože pro každé $\varepsilon > 0$ splňující $\varepsilon \leq \delta$ je

$$\left| \int_{S(a,a+i\varepsilon)} F_+(z)dz \right| \leq \varepsilon \max_{z \in S(a,a+i\varepsilon)} |F_+(z)| \leq \varepsilon \max_{z \in S(a,a+i\delta)} |F_+(z)|,$$

musí být

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{S(a,a+i\varepsilon)} F_+(z)dz = 0.$$

Obdobně ukážeme, že

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{S(b+i\varepsilon,b)} F_+(z)dz &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{S(a,a-i\varepsilon)} F_-(z)dz \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{S(b-i\varepsilon,b)} F_-(z)dz = 0. \end{aligned}$$

Nechť

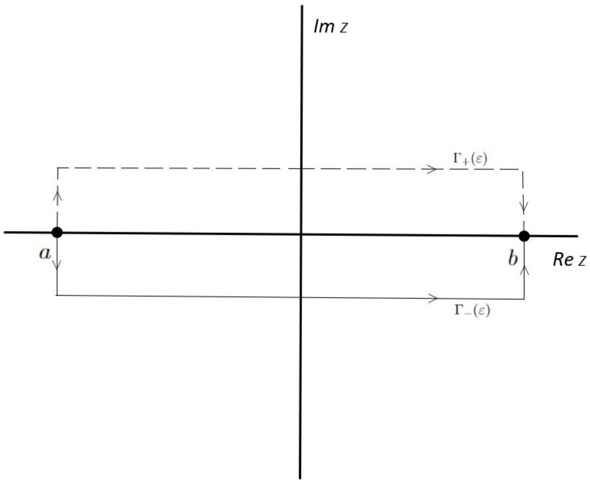
$$\begin{aligned} \Gamma_+(\varepsilon) &= S(a, a+i\varepsilon) + C_+(\varepsilon) + S(b+i\varepsilon, b), \\ \Gamma_-(\varepsilon) &= S(a, a-i\varepsilon) + C_-(\varepsilon) + S(b-i\varepsilon, b), \end{aligned}$$

kde symbolem + značíme spojení křivek. Z výše uvedeného vyplývá, že

$$\int_a^b \widetilde{f}(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\Gamma_+(\varepsilon)} F_+(z)dz - \int_{\Gamma_-(\varepsilon)} F_-(z)dz.$$

Předpokládejme, že γ_+ a γ_- jsou křivky s počátečním bodem a a koncovým bodem b, pro které platí

$$\begin{aligned} \gamma_+ \setminus \{a, b\} &\subseteq \mathcal{D}_+ = \mathcal{D} \cap \mathbb{C}_+, \\ \gamma_- \setminus \{a, b\} &\subseteq \mathcal{D}_- = \mathcal{D} \cap \mathbb{C}_-. \end{aligned}$$



Obrázek 4.2: Grafické znázornění integračních křivek $\Gamma_+(\varepsilon)$ a $\Gamma_-(\varepsilon)$.

Protože funkce $F_+(z)$ a $F_-(z)$ jsou holomorfní v $\mathcal{D}$, plyne z Cauchyho věty, že

$$\int_{\Gamma_+(\varepsilon)} F_+(z)dz = \int_{\gamma_+} F_+(z)dz,$$
$$\int_{\Gamma_-(\varepsilon)} F_-(z)dz = \int_{\gamma_-} F_-(z)dz,$$

pro každé $\varepsilon > 0$ splňující $\varepsilon < \delta$. To ale znamená, že

$$\int_a^b \widetilde{f}(x)dx = \int_{\gamma_+} F_+(z)dz - \int_{\gamma_-} F_-(z)dz.$$

Výraz na pravé straně je přesně hledaným kandidátem na definici integrálu hyperfunkce. Zdůrazněme, že tento výraz má rozumný smysl a nezávisí na konkrétní volbě křivek $\gamma_\pm$ nejen v případech, kdy $F_\pm(z)$ je možné holomorfně rozšířit na okolí reálné osy. Stačí, aby funkce $F_\pm(z)$ bylo možné holomorfně rozšířit na otevřené množiny obsahující body a a b. To nás vede přirozeně k následujícím definicím.

Definice 4.14 Řekneme, že hyperfunkce $f(x) = [F_+(z), F_-(z)]$ je *holomorfní* v bodě $a \in \mathbb{R}$, pokud existují holomorfní rozšíření funkcí $F_+(z)$ a $F_-(z)$ na otevřené množiny obsahující bod a.

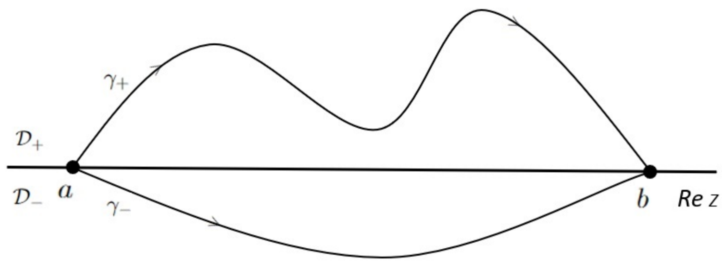
Zdůrazněme zde, že holomorfní rozšíření funkcí $F_+(z)$ a $F_-(z)$ z předchozí definice nemusí na žádném okolí bodu a koincidovat. To je vidět už na jednoduchém příkladu, kdy $f(x) = [1, 0]$. Komponenty $F_+(z) = 1$ a $F_-(z) = 0$ lze holomorfně rozšířit na celistvé funkce $z \mapsto 1$ a $z \mapsto 0$, které se v žádném bodě nerovnají.

V této sekci budeme značit stejně holomorfní funkci na nějaké otevřené množině a její holomorfní rozšíření. Tuto užitečnou konvenci využijeme hned v následující definici.

Definice 4.15 Nechť $f(x) = [F_+(z), F_-(z)] \in \mathcal{O}(\mathcal{D} \setminus \mathbb{R})/\mathcal{O}(\mathcal{D})$ je hyperfunkce holomorfní v krajních bodech intervalu $[a, b]$, kde $-\infty < a < b < +\infty$. Pak *integrál hyperfunkce* $f(x)$ přes interval $[a, b]$ je

$$\int_a^b f(x)\, dx := \int_{\gamma_+} F_+(z) dz - \int_{\gamma_-} F_-(z) dz,$$

kde křivka γ_+ má počáteční bod a, koncový bod b a $\gamma_+ \setminus \{a, b\} \subseteq \mathcal{D}_+$, zatímco křivka γ_- má počáteční bod a, koncový bod b a $\gamma_- \setminus \{a, b\} \subseteq \mathcal{D}_-$ (viz Obrázek 4.3).



Obrázek 4.3: Grafické znázornění integračních křivek γ_+ a γ_-.

Z hlediska korektnosti definice bychom měli ověřit dvě věci. Za prvé by definice neměla záviset na konkrétní volbě integračních křivek $\gamma_\pm$. To je však okamžitý důsledek Cauchyho věty. Druhou důležitou věcí je nezávislost definice na volbě generující funkce. Předpokládejme, že $F(z)$ a $G(z)$ jsou generující funkce hyperfunkce $f(x)$. Pak ale existuje holomorfní funkce $H(z)$ v okolí $\mathcal{D} \in \mathcal{N}$ reálné osy tak, že $F(z) = G(z) + H(z)$ pro všechna $z \in \mathcal{D} \setminus \mathbb{R}$. Označme symbolem Γ spojení křivky γ_+ s křivkou opačnou ke křivce γ_-. Protože $H(z)$ je holomorfní v $\mathcal{D}$, plyne z Cauchyho věty, že

$$\int_{\gamma_+} H_+(z) dz - \int_{\gamma_-} H_-(z) dz = \int_\Gamma H(z) dz = 0.$$

Odtud

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_+} F_+(z) dz - \int_{\gamma_-} F_-(z) dz &= \int_{\gamma_+} G_+(z) + H_+(z) dz - \int_{\gamma_-} G_-(z) + H_-(z) dz \\ &= \int_{\gamma_+} G_+(z) dz - \int_{\gamma_-} G_-(z) dz. \end{aligned}$$

Tím je nezávislost definice na volbě generující funkce dokázána.

Ještě se podívejme na jeden užitečný speciální případ. Mějme hyperfunkci

$$f(x) = [F(z)] = [F_+(z), F_-(z)],$$

kde je možné generující funkci $F(z)$ holomorfně rozšířit na otevřenou množinu obsahující body a, b. Podmínka na holomorfní rozšíření generující funkce $F(z)$

jinými slovy znamená, že $F_+(z) = F_-(z)$ na sjednocení nějakých okolí bodů a a b (zde využíváme naši konvenci, že holomorfní rozšíření značíme stejným symbolem jako původní funkci). V takovém případě máme

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\gamma_+} F_+(z)dz - \int_{\gamma_-} F_-(z)dz = -\int_\Gamma F(z)dz, \tag{4.3}$$

kde Γ je kladně orientovaná křivka vzniklá spojením křivky γ_- s křivkou opačnou ke křivce γ_+.

Příklad 4.16 Spočtěme nyní následujcí integrál

$$\int_b^c \phi(x)\delta(x-a)\,dx,$$

kde $\phi(x)$ představuje libovolně reálně analytickou funkci a a je různé od b a c. Již dříve jsme zjistili, že hyperfunkce $\phi(x)\delta(x-a)$ má generující funkci ve tvaru

$$F(z) = -\frac{\phi(z)}{2\pi i(z-a)}.$$

Díky (4.3) můžeme okamžitě psát

$$\int_b^c \phi(x)\delta(x-a)\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\phi(z)}{z-a}dz,$$

kde γ je kladně orientovaná kružnice se středem $\frac{b+c}{2}$ a poloměrem $\frac{c-b}{2}$. V případě, kdy $b < a < c$, plyne z Cauchyho integrálního vzorce, že

$$\int_b^c \phi(x)\delta(x-a)dx = \phi(a).$$

Pro případ, kdy $a < b$ či $a > c$, vyplývá z Cauchyho věty, že

$$\int_b^c \phi(x)\delta(x-a)dx = 0.$$

$\triangle$

Příklad 4.17 Mějme dánu reálně analytickou funkci $\phi(x)$, přirozené číslo n a reálná čísla a, b, c, kde a je různé od b a c. Vypočtěme integrál

$$\int_b^c \phi(x)\delta^{(n)}(x-a)\,dx.$$

Protože

$$F(z) = -\frac{(-1)^n\phi(z)n!}{2\pi i(z-a)^{n+1}}$$

je generující funkce hyperfunkce $\phi(x)\delta(x-a)$, můžeme psát

$$\int_b^c \phi(x)\delta^{(n)}(x-a)\,dx = \frac{(-1)^n n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\phi(z)}{(z-a)^{n+1}}dz,$$

kde γ, podobně jako v předchozím příkladu, je kružnice se středem $\frac{b+c}{2}$ a poloměrem $\frac{c-b}{2}$. Pokud $b < a < c$, dostaneme ze zobecněného Cauchyho vzorce

$$\int_b^c \phi(x)\delta^{(n)}(x-a)dx = (-1)^n\phi^{(n)}(a).$$

Pro $a < b$ nebo $c < a$ je díky Cauchyho větě

$$\int_b^c \phi(x)\delta^{(n)}(x-a)dx = 0.$$

△

Mějme hyperfunkci $f(x) = [F(z)]$ s kompaktním nosičem. Nechť $[a,b]$ je interval, pro který platí $\mathrm{supp} f(x) \subseteq (a,b)$. Předpokládejme dále, že reálná čísla c, d splňují $c < a$ a $d > b$. Podívejme se na vztah mezi integrály hyperfunkce $f(x)$ přes intervaly $[a,b]$ a $[c,d]$. Očekáváme, že vyjdou stejně, neboť druhý interval obsahuje oproti prvnímu navíc jen úseky, kde je (dle naší intuitivní interpretace nosiče) hyperfunkce nulová. Protože body a, b, c, d leží mimo nosič hyperfunkce $f(x) = [F(z)]$, můžeme funkci $F(z)$ holomorfně rozšířit na otevřenou množinu obsahující tyto body. Proto

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_\gamma F(z)dz,$$
$$\int_c^d f(x)dx = -\int_\Gamma F(z)dz,$$

kde křivky γ, Γ jsou kladně orientované Jordanovy křivky takové, že vnitřek křivky Γ obsahuje křivku γ. Díky Větě A.3 je integrál přes γ stejný jako integrál přes Γ. Odtud

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(x)dx.$$

Ukázali jsme, že integrál hyperfunkce $f(x)$ s kompaktním nosičem nezávisí na tom, přes jak velký interval obsahující ve svém vnitřku $\mathrm{supp} f(x)$ integrujeme. Proto má v tomto případě smysl definovat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \int_a^b f(x)dx.$$

Uvedená definice je užitečná, pokud chceme integrovat přes nějaký uzavřený interval obsahující kompaktní nosič hyperfunkce $f(x)$, ale nechceme tento interval konkrétně specifikovat.

Zvolením $\phi(x) = 1$ u výsledků z Příkladu 4.16 a Příkladu 4.17 dostáváme velice známé vztahy pro integraci Diracova impulsu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\,dx = 1,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x-a)\,dx = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Příklad 4.18 Uvažujme hyperfunkci

$$f(x) = \left[\frac{1}{2\pi i} z^n \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\right],$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a hledejme, čemu se rovná integrál

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx.$$

Z (4.3) máme

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = -\int_K \frac{1}{2\pi i} z^n \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} dz,$$

kde K je kladně orientovaná jednotková kružnice se středem v počátku. Poté dle Reziduovy věty platí

$$\int_K \frac{1}{2\pi i} z^n \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \operatorname{res}_0 \frac{1}{2\pi i} z^n \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = \operatorname{res}_0 z^n \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}.$$

Protože na prstencovém okolí 0 je

$$z^n \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! z^{k-n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{n-k}}{k!},$$

plyne z definice rezidua, že

$$\operatorname{res}_0 z^n \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Čili

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = -\frac{1}{(n+1)!}.$$

△

Tvrzení 4.19 Jestliže $f(x)$ a $g(x)$ jsou hyperfunkce holomorfní v krajních bodech intervalu $[a, b]$ a $c \in \mathbb{C}$, potom

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx,$$
$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Důkaz: Tvrzení je okamžitým důsledkem linearity křivkového integrálu v komplexní rovině. □

Příklad 4.20 Nechť

$$f(x) = \left[\frac{1}{2\pi i} \frac{\cos(\pi z)}{(z-2)^2(z+1)}\right]$$

a vypočítejme integrál

$$\int_{-3}^{3} f(x)dx.$$

Podobně jako v předchozím příkladě, i zde vyjdeme ze vztahu (4.3). Tedy

$$\int_{-3}^{3} f(x)dx = -\int_K \frac{1}{2\pi i}\frac{\cos(\pi z)}{(z-2)^2(z+1)},$$

kde K je například kružnice o rovnici $|z| = 3$. Opět bychom rádi použili k výpočtu Reziduovu větu. Oproti předchozímu příkladu je situace malinko komplikovanější, neboť generující funkce má dva póly, přičemž jeden z nich je dokonce dvojnásobný. Proto

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{3} f(x)dx &= -\int_K \frac{1}{2\pi i}\frac{\cos(\pi z)}{(z-2)^2(z+1)}dz \\ &= -2\pi i\sum_{j=1}^{2}\operatorname{res}_{z_j}\frac{1}{2\pi i}\frac{\cos(\pi z)}{(z-2)^2(z+1)} = -\sum_{j=1}^{2}\operatorname{res}_{z_j}\frac{\cos(\pi z)}{(z-2)^2(z+1)}.\end{aligned}$$

Pro jednonásobný pól v $z = -1$ platí

$$\operatorname{res}_{-1}\frac{\cos(\pi z)}{(z-2)^2(z+1)} = \lim_{z\to -1}\frac{\cos(\pi z)}{(z-2)^2} = -\frac{1}{9}.$$

Pro dvojnásobný pól v $z = 2$ je

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_2\frac{\cos(\pi z)}{(z-2)^2(z+1)} &= \lim_{z\to 2}\left[\frac{\cos(\pi z)}{(z+1)}\right]' \\ &= \lim_{z\to 2}\frac{-\pi\sin(\pi z)(z+1)-\cos(\pi z)}{(z+1)^2} = -\frac{1}{9}.\end{aligned}$$

Proto

$$\int_{-3}^{3} f(x)dx = \frac{2}{9}.$$

Může být užitečné najít tvar $f(x)$ v řeči Diracova impulsu. Z rozkladu na parciální zlomky dostáváme, že

$$\frac{\cos(\pi z)}{2\pi i(z-2)^2(z+1)} = \frac{\cos(\pi z)}{2\pi i}\left(\frac{1}{3}\frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{9}\frac{1}{z-2} + \frac{1}{9}\frac{1}{z+1}\right).$$

Proto

$$\begin{aligned}f(x) &= \cos(\pi x)\left(\frac{1}{3}\delta'(x-2) + \frac{1}{9}\delta(x-2) - \frac{1}{9}\delta(x+1)\right) \\ &= \frac{1}{3}\delta'(x-2) + \frac{1}{9}\delta(x-2) + \frac{1}{9}\delta(x+1).\end{aligned}$$

Z výsledků Příkladu 4.16 a Příkladu 4.17 vyplývá, že

$$\int_{-3}^{3} f(x)dx = 0 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}.$$

△

Příklad 4.21 Uvažujme opět hyperfunkci

$$f(x) = \left[\frac{1}{2\pi i}\frac{\cos(\pi z)}{(z-2)^2(z+1)}\right]$$

jako v předchozím příkladu a počítejme integrál

$$\int_0^3 f(x)dx.$$

Podle (4.3) je

$$\int_0^3 f(x)dx = -\int_K \frac{1}{2\pi i}\frac{\cos(\pi z)}{(z-2)^2(z+1)}dz,$$

kde K je například kružnice se středem 2 a poloměrem 1. Strategii výpočtu zvolíme stejnou jako v předchozím příkladu. Dle Reziduové věty nám do integrálu přispěje pouze reziduum v bodě $z = 2$. Výpočet rezidua v bodě $z = 2$ jsme již provedli v předchozím příkladě, a proto můžeme okamžitě psát

$$\int_0^3 f(x)dx = \frac{1}{9}.$$

△

Tvrzení 4.22 Nechť $f(x) = [F_+(z), F_-(z)]$ je hyperfunkce holomorfní v krajních bodech intervalu $[a, b]$. Poté platí

$$\int_a^b f'(x)\,dx = \widetilde{f}(b) - \widetilde{f}(a).$$

Důkaz: Z definice derivace hyperfunkce máme

$$f'(x) = \left[\frac{dF_+(z)}{dz}, \frac{dF_-(z)}{dz}\right].$$

Dosazením do definice integrálu a využitím Newtonovy-Leibnitzovy formule pro křivkový integrál v komplexní rovině dostáváme

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)\,dx &= \int_{\gamma_+}\frac{dF_+}{dz}dz - \int_{\gamma_-}\frac{dF_-}{dz}dz\\ &= F_+(b) - F_+(a) - (F_-(b) - F_-(a))\\ &= F_+(b) - F_-(b) - (F_+(a) - F_-(a))\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+}(F_+(b+i\varepsilon) - F_-(b-i\varepsilon))\\ &\quad - \left(\lim_{\varepsilon\to 0+}(F_+(a+i\varepsilon) - F_-(a-i\varepsilon))\right) = \widetilde{f}(b) - \widetilde{f}(a).\end{aligned}$$

□

Příklad 4.23 Ilustrujme si využití předchozího tvrzení na výpočtu integrálu

$$\int_a^b \delta(x)\,dx,$$

kde $-\infty < a < 0 < b < -\infty$.

Abychom mohli uplatnit předchozí tvrzení, musíme najít funkci, jejíž derivací dostaneme právě $\delta(x)$. V předešlých sekcích jsme si odvodili, že $u'(x) = \delta(x)$. Stejně tak již víme, že generující funkcí hyperfunkce Heavisideovy hyperfunkce $u(x)$ je

$$F(z) = -\frac{1}{2\pi i}\ln(-z).$$

Ověřme, že hyperfunkce $f(x)$ je holomorfní v bodech a a b. Hledaná holomorfní rozšíření komponent $F_{\pm}(z)$ budou dána vhodnými jednoznačnými větvemi logaritmu. Komponentu $F_{+}(z)$ můžeme holomorfně rozšířit na množinu $\mathbb{C} \setminus \{iy |\, y \leq 0\}$ předpisem

$$F_{+}(z) = \ln|z| + i\varphi(z),$$

kde $\varphi(z) \in \operatorname{Arg}(-z) \cap (-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Obdobně $F_{-}(z)$ lze holomorfně rozšířit na množinu $\mathbb{C} \setminus \{iy |\, y \geq 0\}$ předpisem

$$F_{-}(z) = \ln|z| + i\varphi(z),$$

kde $\varphi(z) \in \operatorname{Arg}(-z) \cap (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

Podle Tvrzení 4.22 poté platí

$$\int_a^b \delta(x)\,dx = \widetilde{u}(b) - \widetilde{u}(a) = 1.$$

△

Příklad 4.24 Mějme hyperfunkci

$$f(x) = \left[\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{z}}}{z^2}\right]$$

a spočítejme integrál

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx.$$

Uvědomíme-li si, že pro naši generující funkci platí

$$\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{z}}}{z^2} = (\mathrm{e}^{-\frac{1}{z}})',$$

pak $f(x) = g'(x)$, kde $g(x) = \left[e^{-\frac{1}{z}}\right]$. Funkce $e^{-\frac{1}{z}}$ je holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a v nule má podstatnou singularitu. Proto $\operatorname{supp} g(x) = \{0\}$.

Využitím Tvrzení 2.6 a Tvrzení 4.22 tak ihned obdržíme

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \widetilde{g}(1) - \widetilde{g}(-1) = 0.$$

△

Tvrzení 4.25 Předpokládejme, že $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce s kompaktním nosičem $K \subseteq [a, b]$, kde $-\infty < a < b < +\infty$, a $f_\phi(x)$ je jí odpovídající hyperfunkce z Věty 2.16. Potom

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\phi(x)dx.$$

Důkaz: Z Věty 2.16 víme, že $f_\phi(x) = [F(z)]$, kde

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\phi(x)}{x - z} dx$$

je holomorfní funkce na $\mathbb{C} \setminus [a, b]$. Ať C je kladně orientovaná Jordanova křivka, která ve svém vnitřku obsahuje interval $[a, b]$. Potom

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_\phi(x)dx &= \int_a^b f_\phi(x)dx = -\int_C F(z)dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \int_a^b \frac{\phi(x)}{x - z} dxdz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \int_C \frac{\phi(x)}{z - x} dzdx = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \phi(x) \int_C \frac{1}{z - x} dzdx \\ &= \int_a^b \phi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)dx, \end{aligned}$$

kde záměnu integrace můžeme odůvodnit na základě Fubiniho věty (viz například [15]). □

Tvrzení 4.26 Nechť $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je reálně analytická funkce. Dále nechť platí, že $-\infty < a < b < +\infty$ a $f(x)$ je hyperfunkce holomorfní v bodech $\phi(a)$ a $\phi(b)$.

(i) Jestliže $\phi'(x) < 0$ na $\mathbb{R}$, potom

$$\int_a^b f(\phi(y))\phi'(y)dy = -\int_{\phi(b)}^{\phi(a)} f(x)dx.$$

(ii) Jestliže $\phi'(x) > 0$ na $\mathbb{R}$, potom

$$\int_a^b f(\phi(y))\phi'(y)dy = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx.$$

Důkaz: Dokážeme jen část (i), neboť důkaz bodu (ii) je analogický. Nechť

$$f(x) = [F(z)] \in \mathcal{O}(\mathcal{D} \setminus \mathbb{R})/\mathcal{O}(\mathcal{D}),$$

kde $\mathcal{D} \in \mathcal{N}$. Protože $\phi'(x) < 0$ na $\mathbb{R}$, je

$$f(\phi(x)) = [-F(\phi(z))] \in \mathcal{O}(\phi^{-1}(\mathcal{D}) \setminus \mathbb{R})/\mathcal{O}(\phi^{-1}(\mathcal{D})),$$

kde $\phi(z)$ je holomorfní rozšíření reálně analytické funkce $\phi(x)$. Tedy

$$f(\phi(x))\phi'(x) = [-F_+(\phi(z))\phi'(z), -F_-(\phi(z))\phi'(z)].$$

Z předpokladu holomorfnosti hyperfunkce $f(x)$ v bodech $\phi(a)$ a $\phi(b)$ plyne, že hyperfunkce $f(\phi(x))$ je holomorfní v bodech a a b.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\mathcal{D}$ je dostatečně malé tak, aby $\phi^{-1}(\mathcal{D}_+) = \phi^{-1}(\mathcal{D})_-$ a $\phi^{-1}(\mathcal{D}_-) = \phi^{-1}(\mathcal{D})_+$. Nechť γ_+ a γ_- jsou křivky s počátečním bodem a a koncovým bodem b, pro které platí $\gamma_+ \setminus \{a,b\} \subseteq \phi^{-1}(\mathcal{D})_+$ a $\gamma_- \setminus \{a,b\} \subseteq \phi^{-1}(\mathcal{D})_-$. Označme $\varphi_+(t)$, $t \in [c_1, c_2]$, parametrizaci křivky γ_+ a $\varphi_-(t)$, $t \in [d_1, d_2]$, parametrizaci křivky γ_-. Potom $\psi_-(t) = \phi(\varphi_+(t))$, $t \in [c_1, c_2]$, je parametrizace křivky Γ_-, která má počáteční bod $\phi(a)$, koncový bod $\phi(b)$ a splňuje $\Gamma_- \setminus \{\phi(a), \phi(b)\} \subseteq \mathcal{D}_-$. Obdobně $\psi_+(t) = \phi(\varphi_-(t))$, $t \in [d_1, d_2]$, je parametrizace křivky Γ_+, která má počáteční bod $\phi(a)$, koncový bod $\phi(b)$ a splňuje $\Gamma_+ \setminus \{\phi(a), \phi(b)\} \subseteq \mathcal{D}_+$. Protože $\phi'(x) < 0$ na $\mathbb{R}$, je $\phi(x)$ klesající funkce na $\mathbb{R}$. Odtud $\phi(b) < \phi(a)$. Je-li $-\Gamma_+$ (resp. $-\Gamma_-$) křivka opačná ke křivce Γ_+ (resp. Γ_-), pak

$$
\begin{aligned}
-\int_{\phi(b)}^{\phi(a)} f(x)dx &= -\left(\int_{-\Gamma_+} F_+(z)dz - \int_{-\Gamma_-} F_-(z)dz\right) \\
&= \int_{\Gamma_+} F_+(z)dz - \int_{\Gamma_-} F_-(z)dz \\
&= -\int_{c_1}^{c_2} F_-(\psi_-(t))\psi_-'(t)dt + \int_{d_1}^{d_2} F_+(\psi_+(t))\psi_+'(t)dt \\
&= -\int_{c_1}^{c_2} F_-(\phi(\varphi_+(t)))\phi'(\varphi_+(t))\varphi_+'(t)dt \\
&\quad + \int_{d_1}^{d_2} F_+(\phi(\varphi_-(t)))\phi'(\varphi_-(t))\varphi_-'(t)dt \\
&= \int_{\gamma_+} -F_-(\phi(z))\phi'(z)dz - \int_{\gamma_-} -F_+(\phi(z))\phi'(z)dz \\
&= \int_a^b f(\phi(y))\phi'(y)dy.
\end{aligned}
$$

□

Na závěr ještě poznamenejme, že pokud pro reálná čísla c, d splňující $c > d$ definujeme (analogicky jako v případě funkcí)

$$\int_c^d f(x)dx := -\int_d^c f(x)dx,$$

pak můžeme obě části předchozího tvrzení o substituci v integrálu sjednotit a nezávisle na znaménku derivace funkce $\phi(x)$ psát

$$\int_a^b f(\phi(y))\phi'(y)dy = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx.$$

Kapitola 5

Fourierova transformace

V předchozích sekcích této práce jsem si popisovali důležitost a význam některých matematických operací a zkoumali jejich chování ve světě hyperfunkcí. Nejinak tomu bude ani v případě Fourierovy transformace, jedné ze stěžejních integrálních transformací. Protože je však rozsah této práce značně limitován, omezíme se jen na elementární základy Fourierovy transformace hyperfunkcí s kompaktním nosičem. Hlubší náhled do problematiky Fourierovy transformace hyperfunkcí (nejen těch s kompaktním nosičem) nalezne čtenář v [10, 11, 12].

Je dobře známo, že Fourierova transformace absolutně integrovatelné funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je funkce $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definovaná předpisem

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx.$$

Má-li funkce $f(x)$ navíc kompaktní nosič obsažený v intervalu $[a, b]$, pak můžeme psát

$$\hat{f}(\omega) = \int_{a}^{b} f(x)e^{-i\omega x}dx.$$

Protože umíme přes konečný interval $[a, b]$ integrovat také hyperfunkce, vede nás poslední rovnost přirozeně k definici Fourierovy transformace hyperfunkcí s kompaktním nosičem. Ještě než si tuto definici explicitně uvedeme, připomeňme zde jednu užitečnou věc, kterou jsme v této bakalářské práci zmínili v části o integraci hyperfunkcí. Pro hyperfunkci s kompaktním nosičem K jsme definovali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \int_{a}^{b} f(x)dx,$$

kde $[a, b]$ je nějaký interval obsahující ve svém vnitřku nosič K. Ukázali jsme si, že definice je korektní, neboť nezávisí na konkrétní volbě intervalu $[a, b]$. Výhodou zavedeného značení je, že nemusíme specifikovat, kde kompaktní nosič hyperfunkce leží, což nyní s výhodou využijeme. Nyní již přistupme ke slíbené definici Fourierovy transformace hyperfunkce s kompaktním nosičem.

Definice 5.1 Nechť $f(x)$ je hyperfunkce s kompaktním nosičem. Pak *Fourierova transformace* $f(x)$ je funkce $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ daná předpisem

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Místo $\hat{f}(\omega)$ také někdy píšeme $\mathcal{F}\{f(x)\}(\omega)$.

V definici Fourierovy transformace integrujeme hyperfunkci $f(x)e^{-i\omega x}$. Zdůrazněme zde, že tato hyperfunkce má také kompaktní nosič. Přenásobením hyperfunkce reálně analytickou funkcí totiž nemůžeme nosič zvětšit, což plyne okamžitě z příslušných definic.

Je přirozené se ptát, jakým typem funkce je $\hat{f}(\omega)$. Na tuto otázku nám dává odpověď následující verze slavné Paleyovy-Wienerovy věty (viz [12]), kterou uvádíme bez důkazu.

Věta 5.2 Jestliže $f(x)$ je hyperfunkce s kompaktním nosičem, pak funkce

$$z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-izx} dx$$

je celistvá (tj. holomorfní v $\mathbb{C}$).

Z právě uvedené věty plyne, že pro hyperfunkci $f(x)$ s kompaktním nosičem je $\hat{f}(\omega)$ reálně analytická funkce, která lze holomorfně rozšířit na $\mathbb{C}$. Připomeňme zde, že reálně analytické funkce umíme vnořit do prostoru hyperfunkcí. Tedy $\hat{f}(\omega)$ můžeme chápat také jako hyperfunkci. Nyní se již podívejme na základní tvrzení o Fourierově transformaci.

Tvrzení 5.3 Pro libovolné hyperfunkce $f(x)$ a $g(x)$ a pro libovolnou konstantu $c \in \mathbb{C}$ platí

$$\mathcal{F}\{cf(x)\}(\omega) = c\mathcal{F}\{f(x)\}(\omega),$$
$$\mathcal{F}\{f(x) + g(x)\}(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\}(\omega) + \mathcal{F}\{g(x)\}(\omega).$$

Důkaz: Jedná se o okamžitý důsledek linearity integrálu hyperfunkce (viz Tvrzení 4.19). □

Příklad 5.4 Hledejme Fourierovu transformaci hyperfunkce $f(x) = \delta(x-a)$, kde $a \in \mathbb{R}$. Z vlastností Diracova impulsu lze psát

$$\mathcal{F}\{\delta(x-a)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) e^{-i\omega a} dx$$
$$= e^{-i\omega a} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) dx = e^{-i\omega a}.$$

△

Příklad 5.5 Spočtěme Fourierovu transformaci hyperfunkcí

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\delta(x-a) + \delta(x+a)\right),$$
$$g(x) = \frac{1}{2i}\left(\delta(x-a) - \delta(x+a)\right),$$

kde $a \in \mathbb{R}$. Díky Tvrzení 5.3 a výsledku z Příkladu 5.4 je

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}\{\delta(x-a)\}(\omega) + \mathcal{F}\{\delta(x+a)\}(\omega)\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-i\omega a} + e^{i\omega a}\right) = \cos(\omega a),$$
$$\hat{g}(x) = \frac{1}{2i}\left(\mathcal{F}\{\delta(x-a)\}(\omega) - \mathcal{F}\{\delta(x+a)\}(\omega)\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}\right) = \sin(\omega a).$$

△

Tvrzení 5.6 Jestliže $f(x)$ je hyperfunkce s kompaktním nosičem a $c \in \mathbb{R}$, pak

(i) $\mathcal{F}\{f(x-c)\}(\omega) = e^{-i\omega c}\hat{f}(\omega)$;

(ii) $\mathcal{F}\{f(cx)\}(\omega) = \frac{1}{|c|}\hat{f}(\frac{\omega}{c})$, kdykoli $c \neq 0$;

(iii) $\mathcal{F}\{e^{icx}f(x)\}(\omega) = \hat{f}(\omega - c)$.

Důkaz:

(i) Z Tvrzení 4.26 dostáváme

$$\mathcal{F}\{f(x-c)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-c)e^{-i\omega x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega(u+c)}du$$
$$= e^{-i\omega c}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}du = e^{-i\omega c}\hat{f}(\omega).$$

(ii) Jestliže $c > 0$, pak z Tvrzení 4.26 máme

$$\mathcal{F}\{f(cx)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(cx)e^{-i\omega x}dx$$
$$= \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega\frac{x}{c}}dx = \frac{1}{c}\hat{f}\left(\frac{\omega}{c}\right).$$

Obdobně pro $c < 0$ dostaneme

$$\mathcal{F}\{f(cx)\} = -\frac{1}{c}\hat{f}\left(\frac{\omega}{c}\right).$$

(iii)

$$\mathcal{F}\{e^{icx}f(x)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{icx}e^{-i\omega x}dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\omega-c)x}dx = \hat{f}(\omega - c).$$

□

Příklad 5.7 Demonstrujme si předchozí tvrzení na příkladu hyperfunkce $f(x) = \delta(ax - b)$, kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $b \in \mathbb{R}$ Aplikací první a druhé části předchozího tvrzení lze ihned psát

$$\mathcal{F}\{\delta(ax-b)\}(\omega) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}\{\delta(x-b)\}\left(\frac{\omega}{a}\right) = \frac{1}{|a|}e^{-i\frac{\omega b}{a}}.$$

△

Důležité z hlediska aplikace je chování Fourierovy transformace vzhledem k derivaci. I v případě hyperfunkcí dostáváme známe vztahy, které jsou obsahem následujícího tvrzení.

Tvrzení 5.8 Jestliže $f(x)$ je hyperfunkce s kompaktním nosičem, pak

(i) $\mathcal{F}\{f'(x)\} = i\omega\hat{f}(\omega)$;

(ii) $\mathcal{F}\{xf(x)\} = i\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega)$.

Důkaz:

(i) Využitím Tvrzení 4.5 dostaneme

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f'(x)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(f(x)e^{-i\omega x}\right)' dx + i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(f(x)e^{-i\omega x}\right)' dx + i\omega\hat{f}(\omega).\end{aligned}$$

Nyní stačí dokázat nulovost integrálu z hyperfunkce $\left(f(x)e^{-i\omega x}\right)'$. Protože hyperfunkce $f(x)e^{-i\omega x}$ má kompaktní nosič, jsou její hodnoty vně intervalu obsahujícího tento nosič nulové, což plyne z Tvrzení 2.6. Podle Tvrzení 4.19 proto je

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(f(x)e^{-i\omega x}\right)' dx = 0.$$

(ii) Platí

$$\begin{aligned} i\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) = i\frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} if(x)\frac{\partial}{\partial\omega}e^{-i\omega x}dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-i\omega x}dx = \mathcal{F}\{xf(x)\}(\omega).\end{aligned}$$

Záměnu derivace a integrálu lze odůvodnit na základě standardní věty o derivaci integrálu podle parametru [15]. K tomu si stačí uvědomit, že integrál z hyperfunkce je definován jako křivkový integrál z funkce komplexní proměnné. Využijeme-li definici křivkového integrálu, dostáváme integrál z obyčejné funkce jedné reálné proměnné, na který můžeme aplikovat zmíněnou větu o záměně derivace a integrálu.

□

Kapitola 6

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo studium základní problematiky hyperfunkcí jedné reálné proměnné, poukázání na paralely se světem klasických funkcí a demonstrace zjištěných skutečností na jednoduchých příkladech. Zabývali jsme se základními operacemi na hyperfunkcích. Podrobně jsme rozebírali derivování a integrování. V neposlední řadě jsme se také věnovali Fourierově transformaci. V důkazech jsme se snažili postupovat s co možná nejmenšími požadavky na teorii. Doufáme, že tímto přístupem vznikl text o zobecněných funkcích, který je vhodný i pro studenty bez hlubších znalostí pokročilejších partií matematické analýzy.

Z důvodu rozsahu práce jsme museli vynechat celou řadu zajímavých témat, která by byla dobrým námětem pro další pokračování. Zcela jistě by šlo pokračovat ve studiu Fourierovy transformace hyperfunkcí. V tomto směru by bylo důležité zavést Fourierovu transformaci i pro hyperfunkce, které nemají kompaktní nosič a posléze formulovat velmi důležitou větu o inverzní Fourierově transformaci. Takovýto nástroj by již umožňoval prezentovat řadu zajímavých aplikací.

Další možností by bylo zkoumat jiné integrální transformace hyperfunkcí. Pro konkrétnost zde zmiňme alespoň Laplaceovu a Hilbertovu transformaci. V neposlední řadě by bylo užitečné studovat hyperfunkce více proměnných, které najdou uplatnění v teorii parciálních diferenciálních rovnic a také v teoretické fyzice. To by však vyžadovalo mohutnější matematický aparát.

Příloha A

Důležité věty z komplexní analýzy

Věta A.1 (Newton-Leibnitzova formule)

Nechť $F(z)$ je primitivní funkce k funkci $f(z)$ na oblasti G. Nechť C je křivka s počátečním bodem a a koncovým bodem $b$taková, že $C \subseteq G$. Pak

$$\int_C f(z)\,dz = F(b) - F(a).$$

Důkaz: viz [14].

Věta A.2 (Cauchyho věta)

Nechť f je holomorfní funkce v jednoduše souvislé oblasti G. Pak pro každou uzavřenou křivku $C \subseteq G$ platí

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

Důkaz: viz [14].

Věta A.3 (Princip deformace)

Nechť funkce $f(z)$ je holomorfní v otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ a C_1, C_2 jsou kladně orientované Jordanovy křivky ležící v Ω, pro které platí $C_1 \subseteq \operatorname{Int} C_2$ a $\operatorname{Int} C_2 \cap \operatorname{Ext} C_1 \subseteq \Omega$. Pak

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz.$$

Důkaz: Věta plyne okamžitě z [16, Příklad 2, str 197] a [16, Věta 7.4.2].

Věta A.4 (Cauchyho integrální vzorec)

Nechť f je holomorfní funkce v jednoduše souvislé oblasti G. Pro každou kladně orientovanou Jordanovu křivku C ležící v G a pro každý bod z_0 ležící uvnitř této uzavřené křivky platí

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Důkaz: viz [14].

Věta A.5 (Zobecněný Cauchyho vzorec)

Nechť f je holomorfní funkce v otevřené množině G. Pro každou kladně orientovanou Jordanovu křivku C ležící v G a pro každý bod z_0 ležící uvnitř této uzavřené křivky platí

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Důkaz: viz [14].

Věta A.6 (Reziduová věta)

Nechť f je holomorfní funkce v množině $G \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, kde G je oblast. Nechť C je kladně orientovaná Jordanova křivka ležící v $G \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, která má body $z_1, z_2, \dots, z_k$, $k \leq n$ ve svém vnitřku. Ať G obsahuje vnitřek křivky C. Poté

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{res}_{z_j} f(z).$$

Důkaz: viz [14].

Věta A.7 (Věta o jednoznačnosti)

Nechť $f(z)$ a $g(z)$ jsou holomorfní funkce v oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ a $(z_k)_{k=1}^{+\infty}$ je prostá posloupnost bodů z Ω konvergující k nějakému bodu z množiny Ω. Jestliže $f(z_k) = g(z_k)$ pro každé přirozené číslo k, potom $f(z) = g(z)$ na Ω.

Důkaz: viz [14, Důsledek 4.4].

Souhrn vybraných výsledků o funkcích komplexní proměnné zakončíme následující užitečnou větou, která je jednoduchým důsledkem teorému z [17].

Věta A.8

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená množina, $I \subseteq \mathbb{R}$ je (nedegenerovaný) interval a funkce $f : I \times \Omega \to \mathbb{C}$ má následující vlastnosti:

(i) pro každé $z \in \Omega$ je funkce $t \mapsto f(t, z)$ spojitá v I;

(ii) pro každé $t \in \mathbb{R}$ je funkce $z \mapsto f(t, z)$ holomorfní v Ω;

(iii) pro každé $z_0 \in \Omega$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\sup_{z \in \Omega \cap B(z_0;\delta)} \int_I |f(t, z)| dt < +\infty,$$

kde $B(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} | \, |z - z_0| \leq \delta\}$.

Potom funkce

$$g(z) = \int_I f(t, z) dt$$

je holomorfní v Ω a

$$g'(z) = \int_I \frac{\partial}{\partial z} f(t, z) dt.$$

Příloha B

Literatura

[1] P. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics.* Oxford University Press, Oxford, 1930.

[2] L. Schwartz. *Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques.* Ann. Univ. Grenoble, Sect. Math. Phys. **21**, 57 - 74, 1945.

[3] M. Sato. *On a generalization of a concept of functions.* Proc. Japan. Acad. **34**, 126 - 130, 1958.

[4] M. Sato. *On a generalization of a concept of functions II.* Proc. Japan. Acad. **34**, 604 - 608, 1958.

[5] M. Sato. *Theory of hyperfunctions I.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **8**, 139 - 193, 1959.

[6] M. Sato. *Theory of hyperfunctions II.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **8**, 387 - 437, 1960.

[7] E. Brüning. *Hyperfunction quantum field theory: Basic structural results.* J. Math. Phys. **30**, 2340 - 2359, 1989.

[8] H. Hirayama H. Ogata. *Numerical integration based on hyperfunction theory.* J.Comput. Appl. Math **327**, 243 - 259, 2018.

[9] H. Hirayama H. Ogata. *A numerical method of Fourier transform based on hyperfunction theory.* J.Comput. Appl. Math **378**, 112921, 2020.

[10] U. Graf. *Introduction to Hyperfunctions and Their Integral Transforms.* Birkhäuser, Basel, 2010.

[11] I. Imai. *Applied Hyperfunction Theory.* Springer-Science+Business Media, B.V., Dordrecht, 1991.

[12] A. Kaneko. *Introductions to Hyperfunctions.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.

[13] S. Roman. *Advanced Linear Algebra.* Springer, New York, 2008.

[14] J. Tišer J. Hamhalter. *Funkce komplexní proměnné.* CVUT Praha, 2017.

[15] I. Netuka. *Integrální počet.* MatfyzPress, Praha, 2016.

[16] I. Černý. *Analýza v komplexním oboru.* Academia, Praha, 1983.

[17] L. Mattner. *Complex differentiation under the integral, Nieuw Archief voor Wiskunde* **5/2**. 32-35, 2001.