

V Praze dne 19.5.2022

## **Posudek školitele na diplomovou práci „Polynomiální integrabilita a superintegrabilita s elektromagnetickým polem ve speciální relativitě“ studentky Bc. Terezy Lehečkové**

Tématem diplomové práce je studium a klasifikace integrabilních a superintegrabilních systémů v relativistické mechanice.

Vlastnosti relativistických integrabilních systémů jsou ve srovnání s integrabilitou nerelativistickou podstatně méně prozkoumané, a to navzdory jejich zjevné relevanci pro fyzikální aplikace. Hlavní příčiny jsou dvě:

1. Přímočaré zobecnění přechodu od Lagrangeova k Hamiltonovu formalismu do Minkowského prostoročasu vede na nulový Hamiltonián a proto Hamiltonův formalismus vyžaduje explicitní narušení invariance formalismu vzhledem k Lorentzovým transformacím volbou preferované časové souřadnice. Jinou možností je kovariantní popis, ve kterém všechny časoprostorové souřadnice částice jsou chápány jako závislé proměnné, parametrizované vlastním časem částice.
2. V závislosti na výběru časové souřadnice se mění i explicitní časová závislost integrálů pohybu a jejich tvar. I samotný Hamiltonián zkoumaného systému může být v závislosti na volbě času časově závislý či nezávislý, a polynomiální, racionální či analytickou funkcí souřadnic a hybností. To přináší obtíže při hledání vhodných předpokládaných tvarů možných integrálů pohybu i při interpretaci samotných pojmů integrabilita a superintegrabilita.

Studentka se musela s uvedenými problémy a jejich možnými řešeními detailně seznámit, což s úspěchem učinila.

Stručně k obsahu práce: Po úvodní kapitole zavádějící značení a obecné definice integrability, superintegrability a separability se autorka ve druhé kapitole zabývá popisem Hamiltonova formalismu ve speciální relativitě, tj. takzvanými Diracovými formami, a jejich vztahu ke kovariantnímu časoprostorovému popisu a převodu vztahů mezi integrály pohybu z jednoho popisu do druhého.

Ve třetí kapitole odvozuje podobu podmínek určujících integrály pohybu prvního a

druhého řádu v hybnostech v kovariantním popisu a porovnává je s odpovídajícími rovnicemi v nerelativistické mechanice (v níž musí, poněkud nezvykle, uvažovat i možnou explicitní časovou závislost studovaných integrálů pohybu). Hlavním závěrem je, že integrály 1. řádu mají pro relativistickou a nerelativistickou podobu daného systému přímou souvislost, ale v 2. řádu již jsou rovnice určující integrály pohybu značně odlišné a přímý vztah obecně nalézt nelze.

Ve čtvrté kapitole se věnuje hledání systémů, které jsou v kovariantním popisu integrabilní s integrály prvního řádu (kromě Hamiltoniánu). To vyžadovalo detailní seznámení s klasifikací abelovských podalgeber Poincarého algebry, tj. zejména s tím, které podalgebry jsou izomorfní a jak lze neizomorfní podalgebry identifikovat. Na základě této klasifikace jsou pak popsány všechny integrabilní systémy s integrály prvního řádu, jejich nerelativistické limity a superintegrabilní podpřípady (opět s uvažovanými dodatečnými integrály 1. řádu). Zajímavým výsledkem této kapitoly je skutečnost, že pro všechny nalezené integrabilní systémy lze vhodným výběrem kalibrace docílit toho, že integrály jsou přímo prvky Poincarého algebry.

V páté kapitole se studentka věnuje klasifikaci integrabilních systémů s kvadratickými integrály za dodatečného předpokladu, že odpovídající Hamilton-Jacobiho rovnice je separabilní. Východiskem je existující seznam neekvivalentních ortogonálních metrik na třírozměrném Minkowského prostoročasu. Pro jednotlivé metriky, resp. jejich rodiny, studentka analyzuje možnosti, za nichž je možné splnit Benentim zformulované podmínky na třípotenciál elektromagnetického pole. Pro nalezené separabilní systémy s elektromagnetickým polem pak konstruuje odpovídající integrály pohybu, které činí systémy integrabilní, následně hledá případné dodatečné integrály pohybu a nerelativistickou limitu.

V závěrečné kapitole autorka shrnuje dosažené výsledky a nastiňuje možnosti dalšího návazného výzkumu.

Studentka při své práci projevila značnou samostatnost a iniciativu, sama přicházela s myšlenkami, jakým způsobem by mohla nástin výzkumu navržený v zadání práce dále rozvinout. Velkou péči věnovala zkoumání, zda nalezené systémy mají fyzikální smysl a interpretaci uvažovaných ortogonálních metrik. Po stránce odborné mám k práci jen drobné připomínky, resp. dotazy:

1. V prvním odstavci na straně 14 v poslední větě by bylo vhodné zpřesnit formulaci – jedná se o jeden vztah mezi souřadnicemi a konstantami, tj. rovnicí nadplochy

- v konfiguračním prostoru, nebo je vztahů více a určují podvarietu nižší dimenze, např. křivku?
2. V rovnici (1.7) není jasné, zda se přes třikrát opakovaný index „a“ sčítá nebo ne.
  3. V nadpisu kapitoly 4.1 není správné hovořit o „abelovských podgrupách Poincarého algebry“ a následně v textu o „přehledu podalgeber 4D Poincarého grupy“, byť ve fyzikální literatuře autoři bohužel pojmy grupa a algebra často zaměňují.
  4. U rozkladu Poincarého algebry do  $so(2,1)$  a  $R^3$  na straně 34 bylo vhodné uvést, že se jedná o přímý součet pouze ve smyslu vektorových prostorů, nikoliv podalgeber.
  5. Před vztahem (4.3) na straně 34 by bylo vhodné vysvětlit, že uvedený tvar plyne z neexistence dvou nenulových lineárně nezávislých komutujících prvků v algebře  $so(2,1)$ .
  6. Jaké jsou hodnoty konstant  $a$ ,  $b$  pro trajektorii na Obrázku 2?
  7. Nerozumím větě „Limitu obecně, podobně jako 3D analogii rozepisovat nebudeme, provádíme ji jen u konkrétních systémů (s dodatečnými IP).“ Tyto konkrétní systémy ale v práci nenacházím, jen v závěru kapitoly je zmíněno, že by jejich konstrukce byla komplikovanější, ale zcela analogická.

Po stránce formální je škoda, že se studentka nedokázala plně vyvarovat překlepů (např. „poicaréovské“ na straně 25, „vymyzela“ na straně 68), gramatických chyb (např. věta „že je nikde nadále nebudeme potřebovat jejich explicitní tvar“ na straně 36, či chybějící slovo „prostoru“ ve výrazu „ve 3D Minkowském“ na stejné straně, též na straně 48) a chybějící interpunkce (např. po rovnici (1.8) na straně 15), ale jejich množství nepřesahuje únosnou míru a nejsou na překážku srozumitelnosti práce.

Celkově považuji práci za kvalitní, prezentující jak výsledky rozsáhlého studia literatury, tak značně početně i koncepčně náročného vlastního výzkumu, a plně odpovídající požadavkům na diplomové práce kladené i zadání práce. Výše uvedené nedostatky považuji za málo závažné a doporučuji hodnocení diplomové práce stupněm **A - výborně**.

V Praze dne 19.5.2022

doc. Ing. Libor Šnobl, Ph.D.