České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky
Studijní program: Matematická fyzika

Polynomiální integrabilita a superintegrabilita s elektromagnetickým polem ve speciální relativitě

Polynomial integrability and superintegrability with electromagnetic field

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vypracovala: Bc. Tereza Lehečková
Vedoucí práce: doc. Ing. Libor Šnobl, Ph.D.
Rok: 2022

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA JADERNÁ A FYZIKÁLNĚ INŽENÝRSKÁ
PRAHA 1 - STARÉ MĚSTO, BŘEHOVÁ 7 - PSČ 115 19

Katedra: fyziky *Akademický rok:* 2021/2022

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: Bc. Tereza Lehečková

Studijní program: Matematická fyzika

Název práce: (česky) Polynomiální integrabilita a superintegrabilita s elektromagnetickým polem ve speciální relativitě

Název práce: (anglicky) Polynomial integrability and superintegrability with electoromagnetic field

Pokyny pro vypracování:

1) Shrnout dosavadní poznatky o speciálně relativistické (super)integrabilitě, zejména v přítomnosti magnetického pole, případně je doplnit dalším studiem separabilních systémů.

2) Prostudovat strukturu integrálů pohybu polynomiálních ve složkách čtyřhybnosti do druhého řádu a výsledky porovnat s odpovídajícími nerelativistickými systémy.

3) Úplně klasifikovat jednočásticové systémy ve dvou a třech prostorových rozměrech, u nichž integrabilita vyplývá z existence integrálů pohybu prvního řádu, provést částečnou či úplnou klasifikaci systémů integrabilních ve druhém řádu ve dvou prostorových rozměrech. Výsledky porovnat s nerelativistickým případem.

4) Nalézt superintegrabilní případy vybraných tříd nalezených integrabilních systémů.

Doporučená literatura:

[1] A. Marchesiello et al.: Three-dimensional superintegrable systems in a static electromagnetic field. J. Phys. A: Math. Theor. 48, 395206 (2015)

[2] O. Kubů et. al.: Superintegrability of separable systems with magnetic field: the cylindrical case. J. Phys. A: Math. Theor. 54, 425204 (2021)

[3] S. Benenti et al.: Variable separation for natural Hamiltonians with scalar and vector potentials on Riemannian manifolds. J. Math. Phys. 42, 2065 (2001)

[4] H. Latal and W. Schweiger, ed.: Methods of quantization, Springer, 2001

[5] J. Patera et al.: Subgroups of the Poincaré group and their invariants. J. Math. Phys. 17, 977 (1976)

[6] T. Heinzl and A. Ildernon: Superintegrable relativistic systems in spacetime-dependent background fields. J. Phys. A: Math. Theor. 50, 345204 (2017)

Jméno a pracoviště vedoucího diplomové práce:

doc. Ing. Libor Šnobl, PhD., Katedra fyziky,
Fakulta jaderná a fyzikálne inženýrská ČVUT v Praze

Jméno a pracoviště konzultanta:
Ing. Josef Schmidt, PhD., Katedra fyziky,
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze

Datum zadání diplomové práce: 20.10.2021

Termín odevzdání diplomové práce: 02.05.2022

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

....
garant studijního programu

....
vedoucí katedry

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
- 1 -

....
děkan

V Praze dne 20.10.2021

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracovala samostatně a použila jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd....) uvedené v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne ....

....

Tereza Lehečková

Poděkování

Děkuji doc. Ing. Liborovi Šnoblovi, Ph.D. za tříleté vedení a veškerou pomoc.

Tato práce byla podporována Interní grantovou agenturou ČVUT, grant č. SGS22/178/OHK4/3T/14.

Tereza Lehečková

Název práce:
Polynomiální integrabilita a superintegrabilita s elektromagnetickým polem ve speciální relativitě

Autor: Bc. Tereza Lehečková

Studijní program: Matematická fyzika
Druh práce: Diplomová práce

Vedoucí práce: doc. Ing. Libor Šnobl, Ph.D., Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze

Konzultant: Ing. Josef Schmidt, PhD., Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze

Abstrakt: Tato práce se zabývá speciálně relativistickou polynomiální (super)integrabilitou jednočásticových systémů s elektromagnetickým polem v hamiltonovské formulaci. Nejprve shrnuje různé možnosti hamiltonovského popisu, tj. Diracovy formy 3+1 rozštěpení prostoročasu vs. kovariantní popis, a dosavadní poznatky o problematice. Dále určuje obecný tvar integrálů pohybu (IP) 1. a 2. řádu v hybnostech a porovnává jej s nerelativistickou analogií. Na základě této struktury plně klasifikuje a explicitně určuje systémy integrabilní v prvním řádu ve 2 a 3 prostorových rozměrech. V případě 2 prostorových rozměrů též hledá případy s dodatečnými lineárními IP a tyto dále analyzuje (je konstruována nerelativistická limita, v případě maximálního možného počtu IP trajektorie). Klasifikuje a určuje též systémy, které mají v ortogonálních souřadnicích separabilní Hamilton-Jacobiho rovnici ve 2 prostorových rozměrech, tj. důležitou podmnožinu systémů integrabilních ve 2. řádu. U nich hledá speciální případy mající dodatečné lineární IP a tyto opět dále analyzuje.

Klíčová slova: (super)integrabilita, integrály pohybu, elektromagnetické pole, separabilita, Minkowského prostoročas

Title:
Polynomial integrability and superintegrability with electromagnetic field

Author: Bc. Tereza Lehečková

Abstract: This thesis deals with special relativistic polynomial (super)integrability of one-particle systems with electromagnetic field in Hamilton formulation. First, different possibilities of Hamiltonian description, i.e. Dirac forms of 3+1 splitting of spacetime vs. covariant description, are summarized and the existing knowledge of the problem is discussed. Then, the general form of the 1st and 2nd order integrals of motion (IoMs) in momenta is determined and compared with the non-relativistic analogy. Based on this structure, first-order integrable systems in 2 and 3 spatial dimensions are fully classified and explicitly expresed. In 2 spatial dimensions, cases with additional linear IoMs are also found and these are further analyzed (non-relativistic limit is construed, in the case of maximum possible number of IoMs trajectories are founded). Systems which have separable Hamilton-Jacobi equation in orthogonal coordinates in 2 spatial dimensions, i.e. an important subset of systems integrable in 2nd order, are also classified and expressed. For these, cases having additional linear IoMs are found and these are again analyzed further.

Key words: (super)integrability, integrals of motion, electromagnetic field, separability, Minkowski space

Obsah

Úvod

Zkoumání integrability, resp. superintegrability je v podstatě hledáním a studiem řešitelných systémů. Přirozeně se tak jedná o oblast značné důležitosti, která je studována dlouhodobě. Dlouho bylo známo několik klasických fyzikálních případů, např. Keplerova úloha, resp. pohyb ve sféricky symetrickém potenciálu obecně, či konstantní magnetické pole s vhodným elektrostatickým potenciálem. Těchto případů však nebylo mnoho. Situace se začala měnit přibližně v 60. letech, kdy započalo systematické studium (super)integrability. K největším pokrokům však došlo hlavně v posledních letech.

Z roku 2013 pochází přehledový článek [32], shrnující dosavadní poznatky. Zhruba ve stejném období pak začala současná vlna studia problematiky. Do té lze řadit také články [7, 6, 11, 17, 24, 26, 28, 29, 27], věnující se systematickému hledání polynomiální (super)integrability (tím je míněno, že integrály pohybu jsou polynomy v hybnostech) klasické a kvantové s elektromagnetickým polem. Jelikož je toto studium vždy spojeno s hledáním různých symetrií, hrají v něm zásadní roli též Lieovy grupy a algebry (samotné zachovávající veličiny tvoří Lieovu algebru). Obvyklé schema je takové, že se nalezne (či převezme, neboť řada z nich je známa z dřívějška) nějaká rodina integrabilních systémů a k té se hledají speciální superintegrabilní případy různými metodami, které zmíníme dále v textu.

V roce 2017 vyšel článek [13], v němž autoři studují speciálně relativistickou superintegrabilitu s elektromagnetickým polem. Činí tak v tzv. Diracových formách relativistické hamiltonovské dynamiky (zavedeny byly Diracem v [8]), tj. v konkrétním rozštěpení na prostor a čas, které je pak svým chováním podobné klasickému hamiltonovskému popisu. Článek představuje několik superintegrabilních systémů, kterým se dále věnuje detailněji. Klíčovou roli zde hrají poincaréovské symetrie. Nejedná se však o systematické studium nýbrž spíše o příklady. (Článek byl následován dalším [1], který se zabývá speciálně relativistickou superintegrabilitou se skalárním polem a je již více systematický.) Dalším příkladem studia relativistické integrability je článek [30] z roku 2020, tento ji studuje z pohledu separability Hamilton-Jacobiho rovnice na konkrétní skupině potenciálů, totiž Lienard-Wiechertových. Nepoužívá však Diracovy formy, ale kovariantní Hamiltonovský popis, který je někdy výhodnější.

Tento text se věnuje systematickému studiu speciálně relativistických integrabilních systémů (a částečně jejich superintegrabilních podpřípadů) s elektromagnetickým polem majících integrály pohybu prvního a druhého řádu v hybnostech ve dvou a třech prostorových rozměrech. V první kapitole proto připomeneme základní definice a tvrzení z oblastí speciální relativity, (super)integrability a separability Hamilton-Jacobiho rovnice (separabilní systémy jsou zároveň integrabilní), nastíníme metody a postupy, které dále použijeme. Zavedeme též notační úmluvy, které umožní elegantnější vyjádření v dalších kapitolách.

V druhé kapitole detailněji rozebereme specifika speciálně relativistického hamiltonovského popisu (jeho různých druhů a vztah mezi nimi). Stručně shrneme výsledky z článku [13] a dalších a také bakalářské práce a výzkumného úkolu (ročníková práce mezi bakalářskou a diplomovou prací) autorky [18, 19], na které tento text částečně navazuje a které se též věnovaly relativistické (super)integrabilitě. Ve třetí kapitole již přímo určíme strukturu integrálů pohybu prvního a druhého řádu, porovnáme s nerelativistickou situací a následně využijeme pro klasifikace v následujících kapitolách.

Ve čtvrté a páté kapitole představíme a použijeme konkrétní metody klasifikace. Konkrétně ve čtvrté klasifikujeme systémy ve dvou a třech prostorových dimenzích, jejichž integrabilita je dána integrály pohybu prvního řádu. Systémy explicitně vyjádříme, nalezneme jejich nerelativistické limity a též se u nich pokusíme najít některé speciální případy s dodatečnými integrály pohybu navíc. V páté kapitole pak provedeme (částečnou) klasifikaci systémů integrabilních v druhém řádu ve dvou prostorových rozměrech. Se systémy budeme pracovat analogicky čtvrté kapitole.

Kapitola 1

Základní notace a objekty

Tento text využívá pojmy a koncepty z několika různých oblastí. Tato kapitola slouží jako jejich základní přehled. Definic a tvrzení zde uvedených bude využíváno v dalších kapitolách. Nejprve několik notačních úmluv.

1/ indexy, speciální znaky: nebude-li řečeno jinak, značíme řeckými písmeny (typicky μ, ν, κ) složky veličin na Minkowského prostoročase, tj. $\mu = 0, 1, 2..., n$, kde n je počet prostorových dimenzí. Latinkou (typicky i, j, k) značíme prostorové složky veličin (tj. $i = 1, 2..., n$). V textu užíváme Einsteinovy sumační konvence, tj. přes opakovaný index se sčítá. Někdy budeme pro úspornost zápisu používat znak $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ a $\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial p_\mu}$ (s latinskými indexy stejně). Obecně se budeme snažit dodržovat konvenci, že malá písmena (typicky q, h) přísluší nerelativistickým veličinám a velká (typicky Q, H) relativistickým. Úmluva se nevztahuje na složky elektrického a magnetického pole, neboť o těch mluvíme výhradně v nerelativistickém případě - v relativistickém případě použijeme $F_{\mu\nu}$, v limitě budeme používat E_i, B_i (viz (1.2)).

2/ základní veličiny a nastavení: při práci na Minkowského prostoročase používáme metrický tenzor tvaru $(g_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ (v jednotkách, kde $c = 1$). Všude budeme pracovat s částicí o jednotkové hmotnosti a minus jednotkovým nábojem $m_0 = 1$, $q = -1$ (tj. modelově jde o elektron), tedy její klasický hamiltonián (relativistické verze představíme v Kapitole 2) v kartézských souřadnicích je tvaru

$$h = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t))^2 + \varphi(\boldsymbol{x}, t), \tag{1.1}$$

kde $\boldsymbol{A}$, φ jsou elektromagnetické potenciály. V relativistické verzi použijeme čtyřpotenciál, tj. (v obecných jednotkách) $(A_\mu) = (\varphi/c, -\boldsymbol{A})$, svázaný s tenzorem elektromagnetického pole $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Ten lze pomocí elektrického a magnetického pole přepsat jako

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ -E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Zavedeme též označení $p_\mu^A \equiv p_\mu - A_\mu$, jelikož často bude výhodnější pracovat s ní nežli s p_μ.

Pokračujeme s pojmy z oblasti integrability superintegrability. Ty budeme studovat v hamiltonovském popisu a abychom je mohli definovat, potřebujeme pracovat se zachovávajícími se veličinami, jinak též *integrály pohybu* (dále *IP*). IP je veličina, jejíž hodnota podél každé fázové trajektorie soustavy určené řešením Hamiltonových kanonických rovnic s libovolnou počáteční podmínkou je konstantní v čase. Časový vývoj veličiny f je dán

$$\frac{df}{dt} = \{h, f\} + \frac{\partial f}{\partial t} \; (= 0 \text{ pokud } f \text{ je IP}), \tag{1.3}$$

kde $\{g, f\} \equiv \partial_j g \partial^j f - \partial_j f \partial^j g$ je Poissonova závorka. Obecně budeme IP označovat jako q (resp. Q). Následují formální definice.

Definice: Hamiltonovský systém s n stupni volnosti nazveme *integrabilním* právě tehdy, když obsahuje n IP, které jsou v involuci a funkcionálně nezávislé.

Definice: Hamiltonovský systém s n stupni volnosti nazveme *superintegrabilním* právě tehdy, když je integrabilní a existuje-li dalších $k \in \{1, ..., n-1\}$ IP takových, že všech $(n+k)$ IP je funkcionálně nezávislých. Je-li $k = 1$, nazveme systém minimálně superintegrabilním a je-li $k = n - 1$, nazveme ho maximálně superintegrabilním.

Uvedené definice však potřebují několik doplňujících komentářů. První se týká pojmu funkcionální nezávislosti - ta musí být splněna alespoň na husté podmnožině fázového prostoru (i když se to ne vždy uvádí). Druhý komentář naráží na použití involuce přímo v definici integrability. Tato skutečnost souvisí s tím, že IP tvoří Lieovu algebru, přičemž Lieovou závorkou je Poissonova závorka. To má celou řadu důsledků, z těch nejjednodušších např. to, že Poissonova závorka dvou IP je opět IP. To může značně zjednodušit hledání dalších IP (máme-li např. představu o jejich typu). Víme např., že IP můžeme lineárně kombinovat a z toho, že tvoří Lieovu algebru plynou také jisté podmínky na Poissonovu závorku (částečně) neznámého IP a jiných, již známých či požadovaných.

Posledním, ale pro nás zásadním komentářem je, že uvedené definice se v naprosté většině používají pro časově nezávislé systémy i IP. Existují sice geometrické popisy časově závislé hamiltonovské mechaniky [36], nicméně obecně časová závislost dělá problematiku složitější a v systematickém studiu (super)integrabilních systémů se (alespoň v rámci aktuální vlny) prakticky neobjevuje. Klasifikaci klasických časově závislých systémů nemáme, někdy se ale objeví IP obsahující čas i u časově nezávislého systému. S takovým případem se pak nakládá individuálně.

Je nutno podotknout, že v případě integrability existuje přímé rozšíření [37] přičemž se ukazuje, že definici lze pak zavést stejně, jako jsme to provedli zde (rozdíl je skutečně pouze v uvažování závislosti na čase u Hamiltoniánu a IP). Základní vlastnost integrabilního systému, tj. principiální analytická řešitelnost (alespoň v kvadraturách) by tak měla být zachována.

Pokud je autorce známo, není zatím zcela jasné, jaké důsledky má jaký počet dalších IP pro chování a řešení systému a neexistuje přímé zobecnění pojmu superintegrability při uvažování časové závislosti. V časově nezávislém případě superintegrabilita znamená (částečnou) algebraickou řešitelnost. Každý nezávislý IP navíc vůči těm zaručujícím integrabilitu snižuje potřebný počet integrací - jeden IP navíc umožní jednu kanonickou veličinu vyjádřit z IP. Máme-li maximální superintegrabilitu, dokážeme nalézt trajektorii systému čistě algebraicky - z IP vyjádříme všechny hybnosti a dostaneme vztah v němž vystupují pouze konstanty (dané hodnotami IP, tedy vlastně volbou počátečních podmínek) a polohy/souřadnice.

Při uvažování časových závislostí je situace komplikovanější - zdá se, že časové IP „nejsou stejně dobré" jako ty časově nezávislé. Kdybychom např. uvažovali časově nezávislý systém a chtěli trajektorii, nebude stačit $n-1$ IP, pokud v některém vystupuje čas, potřebujeme jich n. Někdy lze se systémem dobře pracovat, zkombinují-li se dva časové IP v jeden nečasový [16]. V textu se budeme s časovými IP (alespoň tedy alespoň v určitém popisu) setkávat pravidelně, k tématu se proto ještě vrátíme.

Jelikož se v textu několikrát dotkneme otázky separability Hamilton-Jacobiho rovnice, uvedeme zde ve zkratce několik základních faktů a vztahů. Upozorňujeme však, že je tento text používá pouze jako nástroj, neaspiruje na vysvětlování problematiky v její úplnosti a s geometrickým pozadím. Než začneme, upozorňujeme, že do konce kapitoly neplatí úmluva o latinských a řeckých písmenech - zde principiálně nerozlišujeme, na jakém prostoru pracujeme, indexy $i, j...$ značí jakékoli souřadnice. *Bezčasová Hamilton-Jacobiho rovnice*, dále jen *HJR*, platící pro konzervativní systémy má tvar

$$H\left(x^j, \frac{\partial W}{\partial x^j}\right) = k(a_j), \tag{1.4}$$

kde H je Hamiltonián (v této fázi jakýkoli), x^j jsou souřadnice, k je konstanta, která je ovšem závislá na dalších konstantách a_j (tyto konstanty jsou ve skutečnosti právě IP separabilního systému). Konečně $W(x^j, a_j)$ je funkce, kterou hledáme, tzv. úplný integrál HJR, či Hamiltonova charakteristická funkce. V případě separabilní HJR lze W hledat v separovaném tvaru $W = W_1(x^1, a_1) + ... + W_n(x^n, a_n)$, kde n je počet stupňů volnosti. Pro nás bude důležité, že ze separability HJR plyne integrabilita (obecně druhého řádu) pro daný Hamiltonián/systém. Zde nám půjde o to, jak separabilní systém poznat a jak nalézt jeho IP. Shrňme základní poznatky, vycházející především z [3, 4].

Prvním je, že nutnou a postačující podmínkou separability (1.4) je Levi-Civitova podmínka (uvedena již v jeho článku na toto téma [21]). Ta platí pro jakýkoli Hamiltonián a má tvar (přes opakované indexy se nesčítá)

$$\partial^i H \partial^j H \partial_{ij} H + \partial_i H \partial_j H \partial^{ij} H - \partial^i H \partial_j H \partial_i^j H - \partial^j H \partial_i H \partial_j^i H = 0, \tag{1.5}$$

pro každou dvojici různých indexů/souřadnic i, j. Je však pravdou, že (1.5) je většinou velmi komplikovaná a její přímé použití je tak spíše vzácné. Zásadní osobou ve výzkumu separability HJR je Sergio Benenti, který se spolu s řadou spolupracovníků věnuje její algebraické a geometrické podstatě především u polynomiálních Hamiltoniánů.

Předpokládejme tedy tzv. geodetický Hamiltonián tvaru $H = \frac{1}{2}g^{ij}p_i p_j$, tj. bez jakýchkoli polí. Rozdělme souřadnice na souřadnice první a druhé třídy podle hodnoty

$$R = \frac{\partial_i H}{\partial^i H}. \tag{1.6}$$

Je-li R lineární v hybnostech, je souřadnice *první třídy* (ty značíme α, β...), není-li, je *druhé třídy* (ty značíme a, b...). Benenti odvozuje [4], že separabilita geodetického Hamiltoniánu je nutnou podmínkou pro separabilitu Hamiltoniánu s elektromagnetickým polem. V teorii separability existují třídy ekvivalence souřadnic (rozlišené podle tvaru a vlastností W). V každé třídě ekvivalence existují tzv. normální souřadnice. Nejobecnější tvar metrického tenzoru v nich lze nalézt v [4]. Navíc, pracujeme-li na riemannovské varietě s konstantní křivostí, jsou v každé třídě ekvivalence dokonce ortogonální souřadnice [15]. Převod v rámci jedné třídy lze též nalézt v [3] stejně jako IP příslušející separabilitě v daných souřadnicích.

V normálních ortogonálních souřadnicích lze též [4] odvodit obecný tvar elektromagnetického potenciálu, u kterého (když ho přidáme do geodetického Hamiltoniánu) separabilita přetrvává. Pokud je přítomno pouze elektromagnetické pole (a ne žádné další skalární, tj. Hamiltonián tvaru $H = \frac{1}{2}g^{ij}p_i^A p_j^A$) jsou podmínky velmi striktní:

$$A^a = 0, \quad A^\alpha = g^{aa}\phi_a^\alpha, \quad A_j A^j = g^{aa}\phi_a, \tag{1.7}$$

kde ϕ_a^α a ϕ_a jsou pouze funkcemi souřadnice a. Nejsou konkrétně určeny, v praxi tedy hledáme separabilní potenciál tak, že si rozepíšeme prostřední vztah s libovolnými funkcemi a snažíme se zjistit, jaké dodatečné vztahy (mezi sebou, k metrice...) musí splňovat, aby součin $A^\mu A_\mu$ odpovídal tvaru třetí podmínky. Jak jsme již řekli, takové potenciály hledáme v souřadnicích, o kterých víme, že geodetický Hamiltonián v nich separabilní je. Hledáme přitom zvlášť ve všech neekvivaletních metrikách.

Jak jsme již několikrát uvedli, ze separability plyne integrabilita systému. V případě polynomiálních Hamiltoniánů jsou výsledné IP prvního a/nebo druhého řádu (nikoli však pouze druhého). IP jsou svázány s Killingovými vektory a tenzory a teoreticky je lze nalézt algebraicky (ne vždy je to však nejjednodušší). Tvar IP odpovídající potenciálu (1.7) je

$$Q_\alpha = p_\alpha, \quad Q_b = \varphi^a_{(b)}(p_a^2 + \phi_a^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta + 2\phi_a^\alpha p_\alpha + 2\phi_a) \tag{1.8}$$

kde $\varphi^a_{(b)}$ jsou prvky b-tého řádku inverze tzv. Stäckelovy matice, kterou určuje metrika - ve Stäckelově matici jsou prvky funkce závisející pouze na souřadnici odpovídající řádkovému indexu a komponenty metriky mají tvořit jeden řádek její inverze. Všechny přítomné ϕ jsou funkcemi pouze souřadnice odpovídající jejich spodnímu indexu. Poslední dvě funkce v závorce jsou ty z podmínky (1.7), $\phi_a^{\alpha\beta}$ je podobně jako Stäckelova matice algebraicky určitelná. I v tomto případě odkážeme na literaturu [3, 4], neboť v my v textu nepoužijeme tento způsob určování IP. Bylo však vhodné pro kontext uvést jeho tvar.

Na závěr ještě poznámka: výsledky zde prezentované byly odvozeny na riemannovských varietách, uvedené nicméně platí i pro pseudoriemannovské [4]. Rozdíl u Minkowského prostoročasu, s nímž pracujeme my, existuje ve složitější problematice tříd ekvivalence metrik - může se stát, že jisté soubory souřadnic pokrývají každý pouze část prostoročasu a je pak otázka, zda je lze vyhlásit za ekvivalentní, pokud jinak podmínky na to splňují. K problematice se vrátíme v Kapitole 5, v podstatě ale platí, že se budeme držet literatury a v případě podobného stavu systémy více prozkoumáme, abychom zjistili, čím se v praxi liší. Taktéž Kalnins [15] rozebírá pouze riemannovské variety s konstantní křivostí. Je proto možné, že v případě Minkowského prostoročasu budou neekvivalentně separabilní i jiné souřadnice.

Kapitola 2

Specifika hamiltonovského popisu relativistické dynamiky

V principu existují dva základní typy hamiltonovského popisu relativistické (testovací) částice. Prvním je „4D“ hamiltonovský popis, druhým je popis v 3+1 rozštěpení prostoročasu. Začneme 4D popisem, jeho stručný popis lze najít např. v [5]. Zde má Hamiltonián tvar

$$H^{4D} = g^{\mu\nu} p_\mu^A p_\nu^A, \tag{2.1}$$

a je parametrizován vlastním časem částice (případně afinním parametrem, jež je jeho lineární transformací). Někdy se jako předfaktor používá 1/2. Jedná se vlastně o využití podmínky normalizace hybnosti

$$p_\mu p^\mu (= g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = p_0^2 - \boldsymbol{p}^2) = m_0^2 c^2, \tag{2.2}$$

kterou využijeme i dále. Časový vývoj veličiny Q je

$$\frac{dQ}{d\tau} = \{H^{4D}, Q\} = \partial_\mu H^{4D} \partial^\mu Q - \partial_\mu Q \partial^\mu H^{4D} \tag{2.3}$$

(nepředpokládáme, že by mohla být veličina závislá na vlastním čase částice). Výhody tohoto popisu spočívají v kovarianci a polynomialitě Hamiltoniánu - polynomiální Hamiltoniány dávají vzniknout jednodušším rovnicím (pohybovým, časového vývoje, separability HJR...) Také máme automaticky vždy jeden IP - Hamiltonián sám a IP s nimiž se setkáváme jsou vždy časově nezávislé. Nevýhodou je, že některé pojmy známé klasické hamiltonovské mechaniky mohou mít poněkud nepřímočarou analogii či interpretaci. Také lze tento popis použít pouze pro jednočásticové systémy (u více částic nemáme společnou parametrizaci). Další nevýhodou je, že i přes to, že jeden IP máme automaticky, vždy jich potřebujeme dohromady více, než u 3+1 popisu. Konečně, nerelativistickou limitu lze přímo provádět rovněž jen ve vhodném 3+1 popisu.

Než přejdeme ke druhému typu popisu, uděláme odbočku k Poincarého grupě, tj. grupě symetrií Minkowského prostoročasu, která pro nás bude klíčová a budeme se s ní setkávat v průběhu celého textu. Z invariance vůči ní plynou IP, konkrétně platí [13]

$$\mathcal{L}_\xi F_{\mu\nu} = 0 \; \Leftrightarrow \; Q = \xi^\mu p_\mu + \Lambda(x), \text{ kde } \; \mathcal{L}_\xi A_\nu = \partial_\nu \Lambda \text{ je IP,} \tag{2.4}$$

kde ξ^μ je poincaréovské vektorové pole. To má v pseudokartézských souřadnicích a obvyklé bázi tvar

$$\begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^0 + x^1\omega_{01} + x^2\omega_{02} + x^3\omega_{03} \\ a^1 + x^0\omega_{01} - x^2\omega_{12} - x^3\omega_{13} \\ a^2 + x^0\omega_{02} + x^1\omega_{12} - x^3\omega_{23} \\ a^3 + x^0\omega_{03} + x^1\omega_{13} + x^2\omega_{23} \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

kde $a^\mu, \omega_{\mu\nu}$ jsou libovolné konstanty. Potenciální IP v této bázi tak jsou (pro jednoduchost psáno bez $\Lambda(x)$):

$$Q_{a^\mu} = p_\mu, \quad Q_{\omega_{ij}} = x^i p_j - x^j p_i =\equiv L_k, \quad Q_{\omega_{0i}} = x^i p_0 + x^0 p_i \equiv K_i, \tag{2.6}$$

kde u druhého IP jsou (ijk) cyklické permutace (123). Jejich přítomnost značí v uvedeném pořadí invarianci vůči translaci v x^μ, invarianci vůči rotaci okolo osy x^k a invarianci vůči boostu ve směru x^i. Připomínáme, že explicitní tvar Lieovy derivace pro tenzor druhého řádu je $\mathcal{L}_\xi F_{\mu\nu} = \xi^\sigma \partial_\sigma F_{\mu\nu} + F_{\sigma\nu}\partial_\mu \xi^\sigma + F_{\mu\sigma}\partial_\nu \xi^\sigma$.

2.1 Diracovy formy

Druhým, klasickému popisu bližším popisem relativistické dynamiky jsou Diracovy formy. Přístup, a první tři formy, zavedl Dirac v [8]. Jedná se vlastně o 3+1 rozštěpení prostoročasu (foliace), dané vhodnou (a možnou) volbou času τ. Tím se podobají rozštěpení známého z obecné relativity [33]. Podmínky na to, co lze zvolit jako časovou souřadnici (a tedy i parametr Hamiltoniánu) jsou dány několika požadavky (lze je najít v [12, 2] stejně jako další informace o tomto 3+1 popisu), konkrétně každá světočára musí projít nadplochou konstantního času $\Sigma : \tau = 0$ právě jednou a podgrupa Poincarého grupy tvořící grupu stability nadplochy (tj. ty transformace Poincarého grupy, vůči kterým je Σ invariantní) musí být tranzitivní (tj. každé dva body Σ musí být možné spojit prvkem grupy stability). Požadavky znamenají nenulový tzv. Faddeev-Popovův operátor (FP) - název pochází z metod kvantování polních teorií.

Ve 4D Minkowského prostoročase splňuje zmíněné podmínky pouze 5 možností voleb τ, které představíme níže. Nejprve ale k dalšímu postupu. Výpočtem normály k nadploše konstantního času

$$N_\mu = \frac{\partial \tau}{\partial x^\mu} \tag{2.7}$$

a jejím součinem se čtyřhybností (tj. vlastně projekcí)

$$FP = N^\mu p_\mu = N_\mu p^\mu \sim H \tag{2.8}$$

se získá složka (či obecně kombinace složek) hybnosti, která bude představovat Hamiltonián. Tato se po převodu do souřadnic dané formy ($p_i = p_{j'} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}$) pak pomocí ostatních vyjádří z (2.2). Ještě poznamenejme, proč je ve vztahu (2.8) úměrnost a ne rovnost: před příslušnou hybností může vzejít nepodstatná konstanta, která se pak v Hamiltoniánu typicky neuvažuje. Především ale výsledek nemusí jednotkově odpovídat energii, což bychom od Hamiltoniánu chtěli. Proto součin (2.8) spočteme vždy v jednotkách $c = 1$ a v obecných jednotkách vyjádříme až výsledek v nových souřadnicích.

Zrekapitulujeme hlavní výhody a nevýhody 3+1 popisu. Výhodou je, že popis při rozdělení na prostor a čas je analogický tomu, který známe z klasické fyziky. Též je jím možné popsat více částic a potřebujeme méně IP. Nevýhodou je, že Hamiltoniány již nejsou polynomiální a počítá se tak s nimi obtížněji. Běžně se též vyskytují, jak uvidíme dále, IP (a systémy) obsahující čas.

Ještě upozorněme, že IP existující pro 4D Hamiltonián se do 3+1 forem převede jednoduše tak, že se za složku hybnosti p_τ (je-li v něm přítomna) dosadí formový Hamiltonián. Proč tomu tak je, uvidíme v sekci 2.3. Zde to uvádíme, abychom se mohli rovnou podívat na poincaréovské IP v Diracových formách.

Nyní již představíme 5 možných voleb τ ve 4D Minkowského prostoročase, příslušné Hamiltoniány a jejich vlastnosti. Formy mají ještě další charakteristiky, které nyní neuvádíme (byly např. v bakalářské práci [18]). Uvádíme informace, které budeme potřebovat a též opravu těch, které byly v bakalářské práci uvedeny chybně (konkrétně šlo o výpočet Hamiltoniánů tzv. hyperbolických forem).

Instantní forma

Tato forma pracuje přímo s galileovským časem (tj. stejným časem, jaký se používá v běžném nerelativistickém popisu (1.1)), tedy

$$\Sigma : x^0 = 0, \quad \tau = x^0/c = t. \tag{2.9}$$

Normála (2.7) v geometrických jednotkách a její součin s hybností jsou

$$N_\mu = (1, \boldsymbol{0}), \quad N^\mu p_\mu = p_0, \tag{2.10}$$

což tedy v geometrických jednotkách odpovídá p_τ. Najděme ji ale převodem souřadnic přímo, pak v nich vyjádřeme podmínku (2.2):

$$p_\tau = p_0 \frac{\partial x^0}{\partial t} = c p_0 \Rightarrow p_t^2/c^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = c^2, \tag{2.11}$$

to nám konečně umožňuje vyjádřit Hamiltonián (vyjádříme rovnou s elektromagnetickým polem):

$$H^I = c\sqrt{c^2 + (p_j^A)^2} + \varphi, \tag{2.12}$$

kde $\varphi = A_0 c$. Vidíme, že i rozměrově to sedí, protože $p_0 = \frac{E}{c}$, tedy Hamiltonián má rozměr energie a lze ho přímo spojit s nerelativistickou situací, konkrétně

$$\lim_{c\to\infty}(H^I - c^2) = h. \tag{2.13}$$

Pro ucelenost ještě explicitně vypišme rovnici časového vývoje veličiny Q:

$$\frac{dQ}{dt} = \{H^I, Q\} + \partial_t Q = \partial_j H^I \partial^j Q - \partial_j Q \partial^j H^I + \partial_t Q. \tag{2.14}$$

Na závěr pár komentářů k formě jako takové: její jasnou nevýhodou je, že se v ní kvůli odmocnině v Hamiltoniánu špatně počítá. Je ale v jistém smyslu nejpřirozenější - volba galileovského času je nejblíže naší „běžné zkušenosti“. S tím též souvisí skutečnost, že nerelativistickou limitu bude vždy nutné dělat z instantní formy (i pokud předchozí výpočty byly s výhodou prováděny v jiné formě), tedy tato forma pro nás bude klíčová. Poincaréovské IP, uvažujme je pro jednoduchost bez $\Lambda(x)$, mají v obecných jednotkách tvar (za p_0 dosazujeme H^I/c)

$$Q_{a^0} = H^I/c, \quad Q_{a^j} = p_j, \quad Q_{\omega_{ij}} = x^i p_j - x^j p_i, \quad Q_{\omega_{i0}} = x^i H^I/c + ctp_i. \tag{2.15}$$

Samozřejmě ale IP zůstane IP i po vynásobení libovolnou konstantou či odečtení konstanty. To také bude třeba udělat, budeme-li chtít přejít k limitě. Předpokládejme nyní, že v A_j, φ nevystupuje c (pokud by vystupovalo, museli bychom k systému přistoupit individuálně) a udělejme limitu. První IP vynásobíme c a od výsledku odečteme c^2. Naopak poslední IP c vydělíme (jinak bychom v limitě v obou případech dostali nekonečno). Odpovídající nerelativistické IP pak budou

$$q_{a^0} = h, \quad q_{a^j} = p_j, \quad q_{\omega_{ij}} = x^i p_j - x^j p_i, \quad q_{\omega_{i0}} = x^i + tp_i. \tag{2.16}$$

Frontální forma

Druhou hojně používanou formou je forma frontální:

$$\Sigma : x^0 + x^3 = 0, \quad \tau = \frac{x^0 + x^3}{c} = t + x^3/c \equiv x^p, \tag{2.17}$$

kde x^p je jedna z nových souřadnic. Jelikož mezi instantní a frontální formou budeme hojně převádět, napíšeme si rovnou i zpětnou transformaci pro souřadnice i hybnosti mezi pseudokartézskými souřadnicemi a souřadnicemi světelného kužele, které jsou pro frontální formu přirozené:

$$x^p = (x^0 + x^3)/c, \;\; x^m = (x^0 - x^3)/c, \;\; x^1 = x^1, \;\; x^2 = x^2,$$

$$x^0 = c(x^p + x^m)/2, \;\; x^3 = c(x^p - x^m)/2, \;\; x^1 = x^1, \;\; x^2 = x^2,$$

$$p_p = c(p_0 + p_3)/2, \;\; p_m = c(p_0 - p_3)/2, \;\; p_1 = p_1, \;\; p_2 = p_2,$$

$$p_0 = (p_p + p_m)/c, \;\; p_3 = (p_p - p_m)/c, \;\; p_1 = p_1, \;\; p_2 = p_2. \tag{2.18}$$

(Indexy p, m znamenají plus a minus, ve většině publikací se příslušné souřadnice značí x^+, x^-.) Někdy se též x^p a x^m zavádějí vydělené $\sqrt{2}$. Normála je $N_\mu = (1, 0, 0, 1)$, protože ale leží na nadploše, používá se místo ní druhý světlupodobný vektor $n^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}$, tj. použije se první vztah první rovnice (2.18):

$$n^\mu = (1/2, 0, 0, 1/2), \quad n^\mu p_\mu = \frac{p_0 + p_3}{2}. \tag{2.19}$$

Zbývá jen přepsat podmínku (2.2) do nových souřadnic:

$$c^2 = \frac{(p_p + p_m)^2}{c^2} - p_1^2 - p_2^2 - \frac{(p_p - p_m)^2}{c^2} = \frac{4 p_p p_m}{c^2} - p_1^2 - p_2^2 \tag{2.20}$$

a můžeme vyjádřit Hamiltonián:

$$H^F = c^2 \frac{c^2 + (p_\perp^A)^2}{4 p_m^A} + A_p, \tag{2.21}$$

kde $\perp = 1, 2$, tj. $x^\perp = (x^1, x^2)$. Toto značení je poměrně časté, my jej ale dále využijeme jen vzácně.

Ještě uveďme rovnici časového vývoje veličiny Q:

$$\frac{dQ}{dx^p} = \{H^F, Q\} + \partial_p Q = \partial_j H^F \partial^j Q - \partial_j Q \partial^j H^F + \partial_p Q, \tag{2.22}$$

kde $j = 1, 2, m$.

Dále se ještě podíváme na typickou bázi poincaréovského vektorového pole v souřadnicích světelného kužele:

$$\begin{pmatrix} \xi^p \\ \xi^m \\ \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^p + x^1 \omega_{1p} + x^2 \omega_{2p} + x^p \omega_{pm} \\ a^m + x^1 \omega_{1m} + x^2 \omega_{2m} - x^m \omega_{pm} \\ a^1 - x^2 \omega_{12} + x^p \omega_{1m}/2 + x^m \omega_{1p}/2 \\ a^2 + x^1 \omega_{12} + x^p \omega_{2m}/2 + x^m \omega_{2p}/2 \end{pmatrix}, \tag{2.23}$$

tedy po dosazení H^F za p_p jsou příslušné potenciální IP (opět píšeme bez $\Lambda(x)$):

$$Q_{a^0} = H^F, \quad Q_{a^j} = p_j, \quad Q_{\omega_{12}} = x^1 p_2 - x^2 p_1, \quad Q_{\omega_{pm}} = x^p H^F - x^m p_m,$$
$$Q_{\omega_{ip}} = x^i H^F + x^m p_i/2, \quad Q_{\omega_{im}} = x^i p_m + x^p p_i/2, \tag{2.24}$$

$i = 1, 2$. Na závěr je ještě dobré uvést, že jak frontální, tak instantní kalibrace (tj. volba času a práce s příslušnými souřadnicemi) se používá též ve strunové teorii [38].

Nadplochy konstantního času zbylých tří forem jsou hyperboloidy (tj. na rozdíl od předchozích dvou nejsou ploché). Používané jsou, pokud je nám známo, podstatně méně než předešlé dvě. Občas se objevuje forma bodová, kterou odvodil už Dirac [8], zbylé dvě vystupují např. v [20], avšak ve zcela jiném kontextu, než je ten náš. I když je z nich nejpoužívanější forma bodová, začneme „z opačného konce“, totiž nejjednodušší hyperbolickou formou. Do těchto forem nebudeme převádět poincaréovské vektorové pole. Důvodem je jednak, že tyto formy využijeme méně hojně (jen ve 2+1 rozštěpení některých separabilních systémů v Kap. 5), pole je poměrně komplikované a především to, že tyto formy nemají žádné „preferované souřadnice“, jako jsou instantní formy pseudokartézské a u frontální souřadnice světelného kužele. Zde zvolíme jistou parametrizaci, resp. adaptované souřadnice u všech forem podobné, možností je ale více. Poslední poznámka se týká parametru a, který se v nich vyskytuje. Tento může být zvolen i nulový [12], počet tzv. kinematických generátorů (tj. vlastně počet prvků grupy stability) se tím ale snižuje a τ musí být kladné. To pro nás nicméně problém nebude.

H2

Forma, kterou uvádíme jako první z hyperbolických nemá, pokud víme, zavedeného pojmenování, nazýváme ji proto H2. Obecně je dána kalibrací

$$\Sigma : x_0^2 - (x^1)^2 = 0, \quad \tau = \sqrt{t^2 - (x^1)^2/c^2 - a^2/c^2}. \tag{2.25}$$

Zde, jak jsme již uvedli, budeme brát $a = 0$. Parametrizaci volíme:

$$x^0 = \tau c \cosh(\omega), \quad x^1 = \tau c \sinh(\omega), \quad x^2 = x^2, \quad x^3 = x^3,$$
$$\tau = \sqrt{(x^0)^2/c^2 - (x^1)^2/c^2}, \quad \omega = \operatorname{arctanh}\frac{x^1}{x^0}, \quad x^2 = x^2, \quad x^3 = x^3. \tag{2.26}$$

Tedy převod hybností (uvádíme jen směr, který dále použijeme):

$$p_0 = \cosh(\omega)p_\tau/c - \sinh(\omega)p_\omega/c\tau \quad p_1 = -\sinh(\omega)p_\tau/c + \cosh(\omega)p_\omega/c\tau,$$
$$p_2 = p_2, \quad p_3 = p_3. \tag{2.27}$$

Normála a její součin s hybnostmi v obecných jednotkách je

$$N_\mu = (\cosh(\omega), -\sinh(\omega), 0, 0), \quad N^\mu p_\mu = \cosh(\omega)p_0 + \sinh(\omega)p_1. \tag{2.28}$$

To odpovídá p_τ. Převedeme podmínku (2.2) do nových souřadnic a vyjádříme Hamiltonián:

$$c^2 = (\cosh(\omega)p_\tau/c - \sinh(\omega)p_\omega/c\tau)^2 - (-\sinh(\omega)p_\tau/c + \cosh(\omega)p_\omega/c\tau)^2 - p_2^2 - p_3^2 =$$
$$= p_\tau^2/c^2 - p_\omega^2/(\tau c)^2 - p_2^2 - p_3^2, \tag{2.29}$$

$$H^{H2} = p_\tau = c\sqrt{c^2 + p_\omega^2/(\tau c)^2 + p_2^2 + p_3^2}. \tag{2.30}$$

U této formy si ještě předvedeme parametrizaci s nenulovým a: tato může být např. tvaru

$$x^0 = c(\tau + a)\cosh(\omega) + c\sqrt{2a\tau}\sinh(\omega), \quad x^1 = c(\tau + a)\sinh(\omega) + c\sqrt{2a\tau}\cosh(\omega),$$
$$x^2 = x^2, \quad x^3 = x^3 \tag{2.31}$$

a zcela analogicky pro ostatní hyperbolické formy. Jak již ale bylo zmíněno, nebudeme ji zde využívat.

H1

Druhá z hyperbolických forem opět, pokud víme, nemá zavedený název, zde ji proto budeme označovat jako formu H1. Je dána

$$\Sigma : x_0^2 - x_\perp^2 = 0, \quad \tau = \sqrt{t^2 - x_\perp^2/c^2 - a^2/c^2} \tag{2.32}$$

(připomínáme $\perp = 1, 2$). Pro $a = 0$ zvolíme parametrizaci

$$x^0 = \tau c \cosh \omega, \quad x^1 = \tau c \sinh \omega \cos \theta, \quad x^2 = \tau c \sinh \omega \sin \theta, \quad x^3 = x^3,$$

$$\tau = \sqrt{t^2 - x_\perp^2/c^2}, \quad \theta = \arctan \frac{x^2}{x^1}, \quad \omega = \operatorname{arcosh} \frac{x^0}{c\sqrt{t^2 - x_\perp^2/c^2}}. \tag{2.33}$$

Převod hybnosti

$$p_0 = \cosh(\omega) p_\tau / c - \sinh(\omega) p_\omega / c\tau,$$

$$p_1 = -\sinh \omega \cos \theta p_\tau / c + \cosh \omega \cos \theta p_\omega / c\tau - \sin \theta p_\theta / \tau c \sinh \omega,$$

$$p_2 = -\sinh \omega \sin \theta p_\tau / c + \cosh \omega \sin \theta p_\omega / c\tau + \cos \theta p_\theta / \tau c \sinh \omega, \quad p_3 = p_3. \tag{2.34}$$

Dále spočtěme normálu a její součin s hybností v geometrických jednotkách

$$N_\mu = (\cosh(\omega), -\sinh \omega \cos \theta, -\sinh \omega \sin \theta, 0),$$

$$N^\mu p_\mu = p_0 \cosh(\omega) + p_1 \sinh \omega \cos \theta + p_2 \sinh \omega \sin \theta, \tag{2.35}$$

což opět odpovídá p_τ Podmínka (2.2) a Hamiltonián je

$$c^2 = p_\tau^2/c^2 - p_\omega^2/(c\tau)^2 - p_\theta^2/(c\tau \sinh \omega)^2 - p_3^2, \tag{2.36}$$

$$H^{H1} = c\sqrt{c^2 + p_\omega^2/(c\tau)^2 + p_\theta^2/(c\tau \sinh \omega)^2 + p_3^2}. \tag{2.37}$$

Bodová forma

Poslední z hyperbolických forem, bodová, je dána

$$\Sigma : x_0^2 - \boldsymbol{x}^2 = 0, \quad \tau = \sqrt{t^2 - \boldsymbol{x}^2/c^2 - a^2/c^2}. \tag{2.38}$$

Parametrizaci pro $a = 0$ zvolíme v souladu s [12] jako

$$x^0 = \tau c \cosh \omega, \quad x^1 = \tau c \sinh \omega \sin \theta \cos \phi, \quad x^2 = \tau c \sinh \omega \sin \theta \sin \phi, \quad x^3 = \tau c \sinh \omega \cos \theta,$$

$$\tau = \sqrt{t^2 - \boldsymbol{x}^2/c^2}, \quad \phi = \arctan \frac{x^2}{x^1},$$

$$\omega = \operatorname{arccosh} \frac{x^0}{c\sqrt{t^2 - \boldsymbol{x}^2/c^2}}, \quad \theta = \arctan \sqrt{\frac{(x^1)^2 + (x^2)^2}{(x^3)^2}}. \tag{2.39}$$

Hybnosti se převedou jako

$$p_0 = \cosh(\omega)p_\tau/c - \sinh(\omega)p_\omega/c\tau, \quad p_1 = -\sinh\omega\sin\theta\cos\phi p_\tau/c + \cosh\omega\sin\theta\cos\phi p_\omega/c\tau +$$
$$+\cos\phi\cos\theta p_\theta/\tau c\sinh\omega - \sin\phi p_\phi/\tau c\sinh\omega\sin\theta, \quad p_2 = -\sinh\omega\sin\theta\sin\phi p_\tau/c +$$
$$+\cosh\omega\sin\theta\sin\phi p_\omega/c\tau + \sin\phi\cos\theta p_\theta/\tau c\sinh\omega + \cos\phi p_\phi/c\tau\sinh\omega\sin\theta,$$
$$p_3 = -\sinh\omega\cos\theta p_\tau/c + \cosh\omega\cos\theta p_\omega/c\tau - \sin\theta p_\theta/c\tau\sinh\omega. \tag{2.40}$$

Normála a její součin s hybností je

$$N_\mu = (\cosh(\omega), -\sinh\omega\sin\theta\cos\phi, -\sinh\omega\sin\theta\sin\phi, -\sinh\omega\cos\theta),$$
$$N^\mu p_\mu = \cosh(\omega)p_0 + \sinh\omega\sin\theta\cos\phi p_1 + \sinh\omega\sin\theta\sin\phi p_2 + \sinh\omega\cos\theta p_3, \tag{2.41}$$

což opět odpovídá p_τ. Konečně podmínka (2.2) a Hamiltonián je

$$c^2 = p_\tau^2/c^2 - p_\omega^2/(\tau c)^2 - p_\theta^2/(\tau c\sinh\omega)^2 - p_\phi^2/(\tau c\sinh\omega\sin\theta)^2, \tag{2.42}$$

$$H^B = c\sqrt{c^2 + p_\omega^2/(\tau c)^2 + p_\theta^2/(\tau c\sinh\omega)^2 + p_\phi^2/(\tau c\sinh\omega\sin\theta)^2}. \tag{2.43}$$

Celkem vidíme, že Hamiltoniány všech hyperbolických forem mají podobnou strukturu a jsou všechny časově závislé i pro volnou částici.

Než formy opustíme, ještě poznámku - při jejich zkoumání jsme uvažovali čtyřdimezionální Minkowského prostoročas. Obecně lze ale říci, že podgrupy Poincarého grupy a požadavky na nadplochy konstantního času vytvoří podobnou strukturu i v jiných dimenzích. Vždy budeme mít analog instantní a frontální formy a n hyperbolických forem, kde n je počet prostorových rozměrů. Zda ale nemohou ve vyšších dimenzích přibýt ještě další formy, jejíž analogie ve 4D není, by vyžadovala další zkoumání.

2.2 (Super)integrabilita

Na tomto místě provedeme krátký souhrn toho, co se přímo týká speciálně relativistické (super)integrability. Pokud je nám známo, superintegrabilita v Diracových formách byla poprvé studována v článku [13], který zkoumá elektromagnetický potenciál a následně v [1], který se věnuje skalárnímu potenciálu, pracuje tedy s tzv. *dynamickou hmotností*

$$m(x) = m_0 + V(x), \tag{2.44}$$

kde $V(x)$ je skalární pole. Hamiltonián v Diracových formách se pak vyjadřuje z dynamické obdoby (2.2), tj.

$$p^\mu p_\mu = m^2(x) \Rightarrow H^I = \sqrt{p_j^2 + m^2(x)}$$

(analogicky pro ostatní formy). Symetrie (a tedy i IP), které lze v tomto popisu hledat pocházejí z invariancí vůči konformní grupě (tj. k Poincarého grupě přibývá ještě dalších 5 parametrů). Jelikož ale skalární pole není v centru našeho zájmu, opustíme tuto problematiku a přejdeme k článku [13]. Nejprve poznámka k notaci: tento článek používá definici superintegrability tak, jak jsme ji vyslovili v Kapitole 1, ovšem nijak nerozlišuje časovou (ne)závislost systémů ani IP, tj. definice je shodná, důsledky, které se s ní pojí v časově závislém případě nikoli.

Článek [13] se po krátkém vyložení relativistické dynamiky v Diracových formách a informací o Poincaréově grupě (vztah (2.4), tvary IP) věnuje pěti systémům vyjádřeným ve frontální či instantní formě. Nejprve uvádí případ planárních vln, tj. $A_1(x^p), A_2(x^p), A_p = 0 = A_m$ majících 5 poincaréovských IP, řešení systému vyžaduje jednu integraci. Druhý případ je označovaný jako TM-mode model, ten je přehlednější zapsat pomocí polí jako $\boldsymbol{E} = \epsilon(x^p)(x^1, x^2, x^p)$, $\boldsymbol{B} = \epsilon(x^p)(x^2, -x^1, 0)$. Tento systém má 4 poincaréovské IP, dále se v článku ukazuje, že existuje ještě pátý IP, nalezený pomocí ansatz na jeho tvar $Q = f^1 p_1 + f^2 p_2 + f^3$, kde $f^j = f^j(x, p_m)$ (pro obecnou $\epsilon(x^p)$ vyjádřený v integrálním tvaru), pomocí těchto IP je pak v článku ukázána řešitelnost systému. Třetím příkladem je tzv. undulátor, vyjádřený v instantní formě jako $\boldsymbol{B} = B_0(\cos \omega x^3, \sin \omega x^3, 0)$ mající čtyři poincaréovské IP. Z chování Hamiltonových rovnic je pak ukázáno, že existuje ještě pátý IP, nepolynomiální v hybnostech.

Následuje kapitola článku, která se zabývá systémy majícími méně než 3 poincaréovské IP. První je nazvaný jako helikální boost, pole jsou tvaru $\boldsymbol{E} = F_0(x^2, x^1 - (x^p)^2\omega, 0)$, $\boldsymbol{B} = F_0(x^1 - (x^p)^2\omega, -x^2, 0)$. Tento systém má dva poincaréovské IP. Ansatz $Q = f^1 p_1 + f^2 p_2 + f^3$ ale ukazuje, že existují další. Druhým systémem jsou tzv. vírové paprsky tvaru $A_1 = B_0(x^1 \sin\phi - x^2 \cos\phi)$, $A_2 = B_0(-x^1 \cos\phi - x^2 \sin\phi)$, kde $\phi = \omega x^p$, které mají dva poicaréovské IP, dá se však ukázat přítomnost dalších tří IP.

Objevují se však též články, které studují (super)integrabilitu v kovariantním popisu. Příkladem je [30], kde se mezi Liénard-Wiechertovými potenciály ve 4D Minkowského prostoročasu hledají ty, které mají separabilní HJR (tedy jsou i integrabilní).

Sama autorka se pak problematice věnovala v bakalářské práci a výzkumném úkolu [18, 19]. V prvním případě šlo hlavně o relativistickou obdobu (náhodně vybraných) systémů, o nichž je známo, že jsou nerelativisticky superintegrabilní. V relativistických případech bylo typicky nalezeno stejně nebo méně IP než v klasickém, běžně se též objevovaly IP obsahující čas. Na několika místech, kde byl počet IP nižší, byla nalezena, či alespoň naznačena úprava čtyřpotenciálu, která by jej zvýšila. Dále bylo nalezeno několik příkladů (super)integrabilních systémů ve frontální formě, nešlo však o systematický průzkum a většina tak nebyla příliš složitá.

Ve druhém případě [19] šlo hlavně o časově nezávislé separabilní systémy ve 3+1. Ani zde však nešlo vyloženě o systematické hledání, systematické bylo základní rozdělení, kde se ukázalo, že separabilita v Diracových formách (vynecháváme-li časovou závislost) je ekvivalentní separabilitě ve 4D, rozdělily se základní typy čtyřpotenciálů podle (ne)přítomnosti

A_j a při jeho přítomnosti dle chování A_0. Byla nalezena řada příkladů separabilních systémů a jejich IP v různých ze 11 možných souřadných systémů (kde se separuje geodetický Hamiltonián, souřadnic se separabilními potenciály je ale méně). U instantní formy kartézských souřadnic a frontální formy souřadnic světelného kužele byly systematicky nalezeny všechny.

2.3 4D vs 3+1 popis

Již jsme uvedli, že je někdy výhodné (či dokonce nutné) pracovat v Diracových formách a někdy naopak v kovariantním popisu. Vztah IP ve 4D a 3+1 popisu jsme zatím jen naznačili. V této sekci prozkoumáme vztah těchto dvou popisů více, především z hlediska IP. Ukáže se, že rovnice pro zachování IP a involuci IP jsou shodné ve 4D popisu i ve formách (když za časovou složku hybnosti dosadíme příslušný Hamiltonián). S výhodou později využijeme přístup, kdy počítáme ve 4D a do 3+1 se převede až výsledek.

Začneme zachováním IP. Mějme 4D Hamiltonián (2.1) a obecný IP $Q(x,p)$, který dosadíme do rovnice časového vývoje ve 4D, tj. (2.3). Máme tedy

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial H^{4D}}{\partial x^0}\frac{\partial Q}{\partial p_0} + \frac{\partial H^{4D}}{\partial x^j}\frac{\partial Q}{\partial p_j} - \frac{\partial Q}{\partial x^0}\frac{\partial H^{4D}}{\partial p_0} - \frac{\partial Q}{\partial x^j}\frac{\partial H^{4D}}{\partial p_j} =$$

$$= 2\left[p_j^A\frac{\partial A_j}{\partial x^0} - p_0^A\frac{\partial A_0}{\partial x^0}\right]\frac{\partial Q}{\partial p_0} + 2\left[p_j^A\frac{\partial A_j}{\partial x^j} - p_0^A\frac{\partial A_0}{\partial x^j}\right]\frac{\partial Q}{\partial p_j} - 2p_0^A\frac{\partial Q}{\partial x^0} + 2p_j^A\frac{\partial Q}{\partial x^j} =$$

nyní dosaďme za p_0 z (2.2) a označme rovnou jako H^I. Vhodné by bylo spíše označení $\frac{\partial Q}{\partial p_0}|_{p_0=H^I}$, zde ale kvůli snazší manipulaci toto vyčíslení označíme jen $\frac{\partial Q}{\partial H^I}$. Dále označíme $H^I - A_0 \equiv \sqrt{1+(p_j^A)^2}$ jako $\sqrt{...}$, pokračujeme tedy

$$= 2\left(\left[p_j^A\frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \sqrt{...}\frac{\partial A_0}{\partial x^0}\right]\frac{\partial Q}{\partial H^I} + \left[p_j^A\frac{\partial A_j}{\partial x^j} - \sqrt{...}\frac{\partial A_0}{\partial x^j}\right]\frac{\partial Q}{\partial p_j} - \sqrt{...}\frac{\partial Q}{\partial x^0} + p_j^A\frac{\partial Q}{\partial x^j}\right) =$$

$$= 2\left[p_j^A\left(\frac{\partial A_j}{\partial x^0}\frac{\partial Q}{\partial H^I} + \frac{\partial A_j}{\partial x^j}\frac{\partial Q}{\partial p_j} + \frac{\partial Q}{\partial x^j}\right) - \sqrt{...}\left(\frac{\partial A_0}{\partial x^0}\frac{\partial Q}{\partial H^I} + \frac{\partial A_0}{\partial x^j}\frac{\partial Q}{\partial p_j} + \frac{\partial Q}{\partial x^0}\right)\right]. \tag{2.45}$$

Nyní porovnejme s (2.14), kde bereme Q jako funkci $Q(x^0, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, H^I)$ a označíme jako $\tilde{\partial}$ derivaci, která nezohledňuje závislost v H^I (tu zpracujeme separátně), tj. např. pro $Q = H^I(x,p)x^1 + p_1x^0$ bude $\frac{\tilde{\partial}Q}{\tilde{\partial}p_1} = x^0$. Pak máme

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial H^I}{\partial x^j}\frac{\partial Q}{\partial p_j} - \frac{\partial Q}{\partial x^j}\frac{\partial H^I}{\partial p_j} + \frac{\partial Q}{\partial x^0} = \frac{\partial H^I}{\partial x^j}\left(\frac{\tilde{\partial}Q}{\tilde{\partial}p_j} + \frac{\partial Q}{\partial H^I}\frac{\partial H^I}{\partial p_j}\right) - \left(\frac{\tilde{\partial}Q}{\tilde{\partial}x^j} + \frac{\partial Q}{\partial H^I}\frac{\partial H^I}{\partial x^j}\right)\frac{\partial H^I}{\partial p_j} +$$

$$+\frac{\tilde{\partial}Q}{\tilde{\partial}x^0} + \frac{\partial Q}{\partial H^I}\frac{\partial H^I}{\partial x^0} = \left(-\frac{p_j^A}{\sqrt{...}}\frac{\partial A_j}{\partial x^j} + \frac{\partial A_0}{\partial x^j}\right)\left(\frac{\tilde{\partial}Q}{\tilde{\partial}p_j} + \frac{\partial Q}{\partial H^I}\frac{p_j^A}{\sqrt{...}}\right) -$$

$$-\left(\frac{\tilde{\partial}Q}{\tilde{\partial}x^j}+\frac{\partial Q}{\partial H^I}\left[-\frac{p_j^A}{\sqrt{\dots}}\frac{\partial A_j}{\partial x^j}+\frac{\partial A_0}{\partial x^j}\right]\right)\frac{p_j^A}{\sqrt{\dots}}+\frac{\tilde{\partial}Q}{\tilde{\partial}x^0}+\frac{\partial Q}{\partial H^I}\left(-\frac{p_j^A}{\sqrt{\dots}}\frac{\partial A_j}{\partial x^0}+\frac{\partial A_0}{\partial x^0}\right)=$$

$$=-\frac{p_j^A}{\sqrt{\dots}}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x^j}\frac{\partial Q}{\partial p_j}+\frac{\tilde{\partial}Q}{\tilde{\partial}x^j}+\frac{\partial A_j}{\partial x^0}\frac{\partial Q}{\partial H^I}\right)+\frac{\partial A_0}{\partial x^j}\frac{\partial Q}{\partial p_j}+\frac{\tilde{\partial}Q}{\tilde{\partial}x^0}+\frac{\partial A_0}{\partial x^0}\frac{\partial Q}{\partial H^I}. \tag{2.46}$$

Pokud rovnici (2.46) vynásobíme $-2\sqrt{\dots}$, dostáváme přesně rovnici (2.45). IP se ze 4D do instantní formy tedy skutečně (při dosazení za p_0) přenášejí. Analogické procedury lze provést i s ostatními formami.

Nyní se podívejme na involuci. Obecně si Poissonovy závorky dvou veličin ve 4D a ve 3+1 po dosazení za časovou složku hybnosti neodpovídají. Ukazuje se ale, že pokud se pohybujeme na úrovni IP, involuce se zachovává. I v případě, že tyto IP v involuci nejsou, zůstane jejich Lieova/Poissonova závorka formálně shodná (při dosazení formového Hamiltoniánu za příslušnou složku hybnosti). Podívejme se, jak vypadá Poissonova závorka dvou veličin v Diracově formě a jak ji lze spojit s jejím kovariantním protějškem. Notace je shodná jako v předchozím odvozování:

$$\{Q_1,Q_2\}_{3+1}=\frac{\partial Q_1}{\partial x^j}\frac{\partial Q_2}{\partial p_j}-\frac{\partial Q_2}{\partial x^j}\frac{\partial Q_1}{\partial p_j}=$$

$$=\left(\frac{\tilde{\partial}Q_1}{\tilde{\partial}x^j}+\frac{\partial Q_1}{\partial H^I}\frac{\partial H^I}{\partial x^j}\right)\left(\frac{\tilde{\partial}Q_2}{\tilde{\partial}p_j}+\frac{\partial Q_2}{\partial H^I}\frac{\partial H^I}{\partial p_j}\right)-\left(\frac{\tilde{\partial}Q_2}{\tilde{\partial}x^j}+\frac{\partial Q_2}{\partial H^I}\frac{\partial H^I}{\partial x^j}\right)\left(\frac{\tilde{\partial}Q_1}{\tilde{\partial}p_j}+\frac{\partial Q_1}{\partial H^I}\frac{\partial H^I}{\partial p_j}\right)=$$

$$=\frac{\tilde{\partial}Q_1}{\tilde{\partial}x^j}\frac{\tilde{\partial}Q_2}{\tilde{\partial}p_j}-\frac{\tilde{\partial}Q_2}{\tilde{\partial}x^j}\frac{\tilde{\partial}Q_1}{\tilde{\partial}p_j}-\frac{\partial Q_2}{\partial H^I}\left(\frac{\partial H^I}{\partial x^j}\frac{\tilde{\partial}Q_1}{\tilde{\partial}p_j}-\frac{\tilde{\partial}Q_1}{\tilde{\partial}x^j}\frac{\partial H^I}{\partial p_j}\right)+\frac{\partial Q_1}{\partial H^I}\left(\frac{\partial H^I}{\partial x^j}\frac{\tilde{\partial}Q_2}{\tilde{\partial}p_j}-\frac{\tilde{\partial}Q_2}{\tilde{\partial}x^j}\frac{\partial H^I}{\partial p_j}\right)=$$

$$=\frac{\tilde{\partial}Q_1}{\tilde{\partial}x^j}\frac{\tilde{\partial}Q_2}{\tilde{\partial}p_j}-\frac{\tilde{\partial}Q_2}{\tilde{\partial}x^j}\frac{\tilde{\partial}Q_1}{\tilde{\partial}p_j}+\frac{\partial Q_2}{\partial H^I}\frac{\partial Q_1}{\partial x^0}-\frac{\partial Q_1}{\partial H^I}\frac{\partial Q_2}{\partial x^0}=$$

$$=\frac{\tilde{\partial}Q_1}{\tilde{\partial}x^j}\frac{\tilde{\partial}Q_2}{\tilde{\partial}p_j}-\frac{\tilde{\partial}Q_2}{\tilde{\partial}x^j}\frac{\tilde{\partial}Q_1}{\tilde{\partial}p_j}+\frac{\partial Q_2}{\partial H^I}\left(\frac{\tilde{\partial}Q_1}{\tilde{\partial}x^0}+\frac{\partial Q_1}{\partial H^I}\frac{\partial H^I}{\partial x^0}\right)-\frac{\partial Q_1}{\partial H^I}\left(\frac{\tilde{\partial}Q_2}{\tilde{\partial}x^0}+\frac{\partial Q_2}{\partial H^I}\frac{\partial H^I}{\partial x^0}\right)=$$

$$=\frac{\tilde{\partial}Q_1}{\tilde{\partial}x^j}\frac{\tilde{\partial}Q_2}{\tilde{\partial}p_j}-\frac{\tilde{\partial}Q_2}{\tilde{\partial}x^j}\frac{\tilde{\partial}Q_1}{\tilde{\partial}p_j}+\frac{\tilde{\partial}Q_1}{\tilde{\partial}x^0}\frac{\partial Q_2}{\partial H^I}-\frac{\tilde{\partial}Q_2}{\tilde{\partial}x^0}\frac{\partial Q_1}{\partial H^I}=$$

$$=\frac{\tilde{\partial}Q_1}{\tilde{\partial}x^j}\frac{\tilde{\partial}Q_2}{\tilde{\partial}p_j}-\frac{\tilde{\partial}Q_2}{\tilde{\partial}x^j}\frac{\tilde{\partial}Q_1}{\tilde{\partial}p_j}+\frac{\tilde{\partial}Q_1}{\tilde{\partial}x^0}\frac{\partial Q_2}{\partial p_0}-\frac{\tilde{\partial}Q_2}{\tilde{\partial}x^0}\frac{\partial Q_1}{\partial p_0}=\{Q_1,Q_2\}_4. \tag{2.47}$$

Při upravování se za druhým rovnítkem dva členy vzájemně odečetly. Za třetím jsme použili předpoklad, že Q_i jsou IP, tj. dosadili jsme z (2.14). Za předposledním rovnítkem jsme opět použili $p_0 = H^I$, byť jde o mírné zneužití notace, zde je význam stejný - výraz před tímto rovnítkem již nijak nezohledňuje případnou vnitřní strukturu H^I.

Typický příklad výše uvedených převodů jsou $Q_1 = p_0 x^1 + p_1 x^1$ a $Q_2 = p_2$ jsou zjevně ve 4D v involuci. Po přechodu do instantní formy přejdou na $Q_1 = H^I x^1 + p_1 x^0$ a $Q_2 = p_2$, ty už automaticky v involuci nejsou. Budou ale, pokud H^I nezávisí na x^2 a to je právě podmínka na to, že $Q_2 = p_2$ je IP. Zachování se též přenáší, u Q_2 je to jasné - když na x^2 nezávisí jeden z H^{4D}, H^I, pak ani druhý. S Q_1 se to má následovně: ve 4D je rovnice zachování (2.3) polynom prvního řádu, požadavek na nulovost koeficientů všech hybností nám dá rovnice, které musíme splnit. Nultý řád již nic nového nedodává. Ve 3+1 je rovnice zachování (2.14) výrazem, který lze rozdělit na část násobenou odmocninou $\sqrt{\ldots}$ a část bez ní. Část bez ní je polynom nultého řádu a požadavek nulovosti dá právě rovnici shodnou s rovnicí pocházející z požadavku nulovosti koeficientu p_0 ve 4D verzi. Část násobená odmocninou je polynom prvního řádu v prostorových hybnostech, koeficienty jsou shodné s těmi ve 4D verzi. Nultý řád už opět nepřináší nové nezávislé rovnice. Analogicky to bude u jiných IP.

Poznatky z této sekce nám říkají důležitou věc, totiž že integrabilita v obou popisech je ekvivalentní. V kapitole 4 a 5 to využijeme: budeme hledat pro Minkowského prostoročas o dvou prostorových rozměrech dva nezávislé IP v involuci. To zaručí integrabilitu ve 3D popisu, kde třetím potřebným IP bude 3D Hamiltonián, ale i ve 2+1 popisu, kdy takové dva IP na integrabilitu stačí.

Kapitola 3

Struktura IP prvního a druhého řádu

V této kapitole prozkoumáme obecnou strukturu IP prvního a druhého řádu v hybnostech - určíme rovnice podmiňující jejich zachování, porovnáme je s klasickými a vyvodíme z nich možnosti klasifikace integrabilních systémů, případně hledání jejich superintegrabilních podpřípadů v dalších kapitolách. Kvůli snazšímu vyjádření budeme pracovat na Minkowského prostoročase (tj. v kovariantním popisu), z minulé kapitoly víme, že rovnice jsou po potřebných úpravách shodné s těmi, které bychom dostali v Diracových formách. Počítat budeme v pseudokartézských souřadnicích. Použijeme vyjádření IP pomocí p^A_μ, to nám, jak uvidíme, umožní formulovat rovnice v termínech $F_{\mu\nu}$, což je výhodnější a přehlednější. Protože porovnáváme s klasickou situací, budeme počítat v $c \neq 1$. Tam, kde se rovnice liší dle rozměru prostoročasu, v němž počítáme, předpokládejme, že se jedná o 4D Minkowského, bude ale vidět, že tvar rovnic v jiném počtu prostorových dimenzích (zejména dvou, které budeme potřebovat dále) je zcela analogický. (V případě 3D Minkowského se jednoduše „vyškrtá" vše, co obsahuje třetí prostorový index.)

3.1 První řád

Předpokládejme tedy zcela obecný systém s Hamiltoniánem (2.1) a předpokládejme IP lineární v hybnostech

$$Q = p^A_\mu f^\mu(x) + f(x). \tag{3.1}$$

Jako IP musí Q splňovat (2.3), což je polynom druhého řádu v hybnostech, přičemž koeficient každé kombinace mocnin hybností musí být nulový. Rovnice, jež to zaručí, nyní vypíšeme (přičemž ignorujeme případné konstanty před rovnicemi). Upozorňujeme, že ve výpisech rovnic se přes opakované indexy nesčítá. Následující rovnice vznikají z požadavku na nulovost koeficientů druhých mocnin:

$$p^2_\mu : \partial_\mu f^\mu = 0, \quad p_j p_i : \partial_i f^j + \partial_j f^i = 0, \quad p_0 p_i : \partial_i f^0 - \partial_0 f^i = 0. \tag{3.2}$$

Tyto rovnice lze jednoduše vyřešit. Výsledkem je, že členy prvního řádu v hybnostech (3.1) jsou tvaru libovolné lineární kombinace prvků Poincarého algebry (2.4). Zahrneme-li rovnice (3.2) do (2.3), zbývají nám požadavky na nulovost koeficientů prvních mocnin hybnosti. Ty dávají rovnice

$$p_\mu : f^\nu F_{\nu\mu} + f^\kappa F_{\kappa\mu} + f^\lambda F_{\lambda\mu} + \partial_\mu f = 0. \tag{3.3}$$

Zahrneme-li do (2.3) i tyto rovnice, výsledný polynom je už nulový (tj. koeficienty nultých mocnin jsou již nulové automaticky). Ještě drobný komentář k rovnici (3.3): pokud $\mu = 0$, jedná se po vynásobení c o rovnici, v níž vystupují složky $\boldsymbol{E}$ a žádné c v ní nefiguruje ($\partial_0 = \frac{\partial t}{\partial x^0}\partial_t = \partial_t/c$). Pokud ale $\mu = i$, v jednom ze členů se objevuje $\boldsymbol{E}_i/c$. (Viz (1.2))

Nyní bychom rádi situaci porovnali s klasickou. O té víme např. z [24], že při ansatz $q = p_j^A f^j(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x})$ vychází lineární kombinace eukleidovských IP. Je ale otázkou, s čím vlastně porovnávat v naší situaci - víme, že při přechodu od Minkowského do instantní formy se dosazuje za p_0 Hamiltonián H^I. Ten pak v přechodu ke klasickému popisu přejde na klasický Hamiltonián h. Zahrňme tedy do ansatz i ten. Taktéž zahrneme časovou závislost (víme, že časové IP nezmizí). Ansatz (při tvaru Hamiltoniánu (1.1)) má tedy tvar

$$q = h^\varphi f^t(\boldsymbol{x}, t) + p_j^A f^j(\boldsymbol{x}, t) + f(\boldsymbol{x}, t), \tag{3.4}$$

kde $h^\varphi = h - \varphi$, přičemž q musí splňovat (1.3). Třetí mocniny dávají jednoduše rovnice

$$p_j^3 : \partial_j f^t = 0, \tag{3.5}$$

všechny ostatní kombinace třetích mocnin tyto rovnice jen opakují. Po jejich zohlednění se dostáváme k druhým mocninám:

$$p_i^2 : \partial_t f^t - 2\partial_i f^i = 0, \quad p_i p_j : \partial_j f^i + \partial_i f^j = 0. \tag{3.6}$$

Rovnice (3.5) a (3.6) mají řešení v podobně kombinace eukleidovských IP s předfaktorem ve formě libovolné funkce času, tj. $f^{li}(t)l_i$ a $f^{pi}(t)p_i$ a IP tvaru $2f^t(t)h + \partial_t f^t x^i p_i$. Když zahrneme i rovnice (3.6), v (1.3) zbývají první mocniny, příslušné rovnice jsou

$$p_i : cF_{i0} f^t + F_{ij} f^j + F_{ik} f^k + \partial_t f^i - \partial_i f = 0. \tag{3.7}$$

Po jejich zahrnutí stále zbývá nenulový koeficient nulté mocniny, konkrétně

$$f^i cF_{i0} + f^j cF_{j0} + f^k cF_{k0} + \partial_t f = 0. \tag{3.8}$$

(Rovnice jsme napsali v termínech $F_{\mu\nu}$, aby se lépe porovnávaly s relativistickými, upozorňujeme, že v těchto rovnicích nikde c nevystupuje, neboť $cF_{i0} = cE_i/c = E_i$.) Porovnejme nyní rovnice, které jsme dostali, s těmi relativistickými (3.3)-(3.2). Rozdíl mezi nejvyššími mocninami (resp. řešením (3.2) a (3.6) jsme již popsali, v prvním případě jde o poincaréovské IP, v druhém o eukleidovské). Dále je vidět, že rovnice (3.8) a rovnice (3.3) s $\mu = 0$ pro komponenty $\boldsymbol{E}$ jsou shodné. Pro $\mu = i$ budou ale shodné pouze pokud nebude uvažována časová závislost f^i a bude-li $cf^0 = f^t$. Z toho plyne, že prostorové hybnosti a momenty hybnosti se zachovávají v klasickém i relativistickém případě za stejných okolností.

Celkově jsou též výsledky konsistentní s dříve diskutovanými limitami poincaréovských IP (bez Λ), totiž že eukleidovské IP se shodují, limitou $H^I - c^2$ je h (ten dostáváme, pokud f^t je konstanta) a boostové IP přechází na $x^i + tp_i$.

3.2 Druhý řád

V této sekci budeme studovat integrabilitu ve druhém řádu. Podobně jako v předchozí kapitole začneme zcela obecně - rovnicemi pro zachování obecného IP druhého řádu. Předpokládejme tedy

$$Q = p_\mu^A p_\nu^A f^{\mu\nu}(x) + p_\mu^A f^\mu(x) + f(x), \tag{3.9}$$

dosadíme do (2.3) a vyjádříme v termínech $F_{\mu\nu}$. Už z tohoto je jasné, že je problém poměrně komplexní - pracujeme-li na 4D Minkowském, hledáme 15 funkcí a k tomu šest složek $F_{\mu\nu}$ (pro 3D Minkowského pak 10 funkcí a tři složky). Dostáváme polynom třetího řádu v hybnostech, veškeré koeficienty musí být nulové. Výsledné rovnice vypíšeme, začneme se třetími mocninami (případné multiplikativní předfaktory nezohledňujeme), přes opakované indexy se nesčítá:

$$p_\mu^3 : \partial_\mu f^{\mu\mu} = 0, \quad p_0^2 p_j : \partial_j f^{00} - \partial_0 f^{0j} = 0, \quad p_j^2 p_0 : \partial_j f^{0j} - \partial_0 f^{jj} = 0, \quad p_i^2 p_j : \partial_i f^{ij} + \partial_j f^{ii} = 0,$$

$$p_0 p_i p_j : \partial_j f^{0i} + \partial_i f^{0j} - \partial_0 f^{ij} = 0, \quad p_i p_j p_k : \partial_i f^{jk} + \partial_j f^{ik} + \partial_k f_{ij} = 0. \tag{3.10}$$

Těchto 20 rovnic pro 4D, resp. 10 pro 3D (tam nemáme poslední typ ve výčtu) lze již na této úrovni vyřešit. Zjišťujeme, že výsledkem jsou libovolné lineární kombinace součinů dvojic prvků Poincarého algebry, tj. pro 4D jde o 50 konstant, pro 3D je jich však pouze 20. Pokračujme rovnicemi plynoucími z požadavku na nulovost druhých mocnin hybnosti. Zahrneme-li rovnice (3.10) do rovnice zachování (3.9), dostáváme

$$p_\mu^2 : F_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + F_{\mu\kappa} f^{\mu\kappa} + F_{\mu\lambda} f^{\mu\lambda} + \partial_\mu f^\mu = 0,$$

$$p_0 p_j : F_{k0} f^{ik} + F_{j0} f^{ij} + F_{ik} f^{0k} + F_{ij} f^{0j} + 2(f^{00} + f^{ii}) + \partial_0 f^i - \partial_i f^0 = 0,$$

$$p_i p_j : F_{jk} f^{ik} + F_{j0} f^{0i} + F_{ik} f^{jk} + 2(f^{jj} - f^{ii}) F_{ij} + F_{i0} f^{0j} - \partial_j f^i - \partial_i f^j = 0, \tag{3.11}$$

tj. 10 rovnic pro 4D, resp. 6 pro 3D. Po jejich zahrnutí se můžeme podívat na rovnice pro první mocniny:

$$p_\mu : \partial_\mu f + f^\nu F_{\nu\mu} + f^\kappa F_{\kappa\mu} + f^\lambda F_{\lambda\mu} = 0. \tag{3.12}$$

Pokud zahrneme tyto 4 (resp. 3) rovnice, dostáváme nulu, tedy koeficienty u nultých mocnin jsou už nulové automaticky.

Nyní se opět podíváme na klasický případ, zde již pro zjednodušení vezmeme předpokládaný tvar IP pouze ve tvaru

$$q = p_i^A p_j^A f^{ij}(\boldsymbol{x}, t) + p_j^A f^j(\boldsymbol{x}, t) + f(\boldsymbol{x}, t), \tag{3.13}$$

činíme tak kvůli zjednodušení, ale také kvůli tomu, že druhá mocnina H^I dává pouze členy druhého a prvního řádu v hybnostech (o odmocninu, kterou rozvíjíme), což odpovídá první mocnině h. Tedy nepotřebujeme zahrnovat druhou mocninu h, aby se nám objevily limity hlavních relativistických IP, které chceme. V této notaci jsou rovnice nejvyšších (tj. třetích) mocnin

$$p_i^3 : \partial_i f^{ii} = 0, \quad p_i^2 p_j : \partial_i f^{ij} + \partial_j f^{ii} = 0, \quad p_i p_j p_k : \partial_k f^{ij} + \partial_j f^{ik} + \partial_i f^{jk} = 0. \tag{3.14}$$

Při jejich zohlednění se v druhých mocninách objeví rovnice

$$p_i^2 : f^{ij}F_{ij} + f^{ik}F_{ik} + \partial_t f^{ii} - \partial_i f^i = 0,$$

$$p_i p_j : f^{jk}F_{ik} + f^{ik}F_{jk} + 2(f^{jj} - f^{ii})F_{ij} + \partial_t f^{ij} - \partial_i f^j - \partial_j f^i = 0. \tag{3.15}$$

Při jejich zohlednění rovnice prvního řádu jsou

$$\partial_t f^i - \partial_i f + 2f^{ii}cF_{i0} + f^{ij}cF_{j0} + f^{ik}cF_{k0} + f_j F_{ij} + f_k F_{ik} = 0. \tag{3.16}$$

Po jejich zohlednění zbývá pouze nultá mocnina, která je tvaru

$$f_i cF_{i0} + f_j cF_{j0} + f_k cF_{k0} = 0. \tag{3.17}$$

Můžeme se opět podívat na řešení rovnic (3.14), tj. jak vypadají členy nejvyšších řádů. Nepřekvapivě se jedná o lineární kombinace násobků dvojic prvků Eukleidovy algebry (tj. hybností a momentů hybností), kde ale koeficienty kombinace nejsou konstanty, nýbrž funkce času. Těchto funkcí je v případě 3D prostoru 20, v případě 2D pouze 6.

Porovnejme ještě rovnice (3.10)-(3.12) s (3.14)-(3.17). Rozdíl mezi nejvyššími mocninami (a jejich řešením) jsme již okomentovali. Rovnice jsou poměrně značně odlišné, podobnosti se však najdou: např. rovnice (3.12) pro $\mu = 0$ je stejná jako (3.17), pokud f není závislá na čase. Podobné, i když složitější vztahy lze vypozorovat i u ostatních rovnic, zdá se však, že společné IP jsou značně „okleštěné“, obecně se tedy IP druhého řádu v relativistickém a nerelativistickém případě značně liší.

Kapitola 4

Integrabilita prvního řádu

V předcházející kapitole jsme zjistili, že všechny potenciální IP prvního řádu mají obecně tvar prvků Poincarého algebry sečtenými s funkcí souřadnic (určenou (2.4), jak víme z 2. kapitoly). To nám přímo nabízí způsob klasifikace systémů integrabilních v prvním řádu - jednoduše potřebujeme znát abelovské podalgebry 4D resp. 3D Poincarého algebry rozměru 3 resp. 2 (pro tři či dva prostorové rozměry). Následně budeme požadovat zachování a involuci příslušných IP. Tím nalezneme tvar systémů zachovávajících tyto veličiny. Tyto systémy budou vzájemně neekvivalentní a veškeré ostatní systémy by pak mělo být možno převést na jeden z nalezených v klasifikaci - IP systému převedeme podobnostní transformací na jednu z dvojic/trojic z klasifikace a příslušné grupové transformace pak budou těmi, který systém sám převede na jeden z tvarů systémů v klasifikaci.

Než se vyjádříme ke klasifikaci, upozorňujeme, že v klasickém případě je situace zcela analogická - místo Poincarého grupy/algebry se používá grupa/algebra Eukleidova. Její podagebry jsou známy a s integrabilitou prvního řádu ve třech rozměrech se pracuje např. v [24], kde se, podobně jako to zde uděláme my, hledají systémy zachovávající IP příslušné jednotlivým podalgebrám a hledají se speciální superintegrabilní případy.

4.1 Klasifikce abelovských podgrup Poincarého algebry

Pro klasifikace podgrup/podalgeber existuje „kuchařka" prezentovaná např. v [34]. V článku [35] lze nalézt přehledy podalgeber 4D Poincarého grupy, včetně trojrozměrných, které potřebujeme. Z těch stačí vybrat ty abelovské a máme hotovo. Jelikož však potřebujeme též 3D Poincarého grupu a jelikož je též vhodné detailněji popsat Poincarého grupu a upevnit notaci, naznačíme zde zjednodušenou verzi její klasifikace. Více konkrétně o Poincarého grupě lze nalézt např. v [10].

Začněme tím, co vlastně je Poincarého algebra. Ve 3D má ve standardní bázi generátory L, K_1, K_2, P_0, P_1, P_2, kde $L = x^1 p_2 - x^2 p_1$, $K_i = x^0 p_i + x^i p_0$ (P_j jsou standardní hybnosti, kvůli konsistenci je, pokud mluvíme o generátorech, budeme značit takto). Komutační relace mají tvar (uvádíme pouze ty nenulové):

$$[K_1, P_0] = P_1, \quad [K_2, P_0] = P_2, \quad [K_1, P_1] = P_0, \quad [K_2, P_2] = P_0, \quad [L, P_1] = P_2,$$
$$[L, P_2] = -P_1, \quad [L, K_1] = K_2, \quad [L, K_2] = -K_1, \quad [K_1, K_2] = -L, \tag{4.1}$$

pro úplnost uveďme, že někdy se prvky L, K_i souhrnně označují jako $M_{\mu\nu}$ a společně tvoří algebru $so(2,1)$, tj. algebru příslušnou Lorenzově grupě. Poincarého algebru lze rozložit jako $so(2,1) \oplus \mathbb{R}^3\{P_0, P_1, P_2\}$, přičemž existuje izomorfismus $so(2,1) \simeq sl(2,\mathbb{R})$. Zaměřme se nejprve na Lorentzovskou část součtu, přičemž výhodnější je nejprve pracovat s $sl(2,\mathbb{R})$ a až poté řešit, jak přesně vypadá izomorfismus.

Co tedy víme o $sl(2,\mathbb{R})$: její prvky jsou reálné, bezestopé matice 2x2. Generátory a komutační relace jsou

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$[h, e] = 2e, \ [h, f] = -2f, \ [e, f] = h, \tag{4.2}$$

přičemž e, f jsou nilpotentní a h je poloprostý. Nyní bychom chtěli určit neizomorfní prvky. Právě informace o (ne)nilpotentnosti prvků je pro nás klíčová, neboť tyto na sebe vzájemně jistě převést nejdou. (Slovo „převést“ používáme ve smyslu existence podobnostní transformace $\tilde{X} = e^Y X e^{-Y}$, kde Y je reálná lineární kombinace generátorů a X prvek, který transformujeme na $\tilde{X}$.) Ukazuje se, že každou matici z $sl(2,\mathbb{R})$ s nulovým determinantem lze převést na reálný násobek f. Každou matici s nenulovým determinantem a reálnými vlastními čísly lze převést na reálný násobek h (nebo imaginární násobek $e-f$) a konečně každou matici s nenulovým determinantem a imaginárními vlastními čísly lze převést na reálný násobek $e-f$ (nebo imaginární násobek h). Důvodem, proč jsou nakonec možnosti tři je to, že požadujeme převádění pouze na reálné matice (aby spadaly do algebry), jinak bychom si vystačili se dvěma možnostmi.

Dále potřebujeme vztah mezi prvky $sl(2,\mathbb{R})$ a $so(2,1)$, hledáme tedy v $so(2,1)$ prvky, které odpovídají nalezeným třem neizomorfním prvkům $sl(2,\mathbb{R})$, což určíme porovnáním komutačních relací obou algeber. Tyto nám říkají, že f odpovídá $L+K_2$, h odpovídá K_1 a konečně $e-f$ odpovídá L. Nyní se budeme chtít vrátit k celé Poincarého algebře a konečně nalézt komutativní podalgebry rozměru dva. Na základě předchozího výkladu předpokládáme, že základní možnosti budou

$$1/Q_1 = L + X_1, \ Q_2 = X_2, \quad 2/Q_1 = K_1 + X_1, \ Q_2 = X_2,$$
$$3/Q_1 = L + K_2 + X_1, \ Q_2 = X_2, \quad 4/Q_1 = X_1, \ Q_2 = X_2, \tag{4.3}$$

kde $X_i \in \mathbb{R}^3\{P_0, P_1, P_2\}$. Dalším úkolem, než se pustíme do podobnostních transformací je doplnit X_i tak, aby Q_1 a Q_2 komutovaly (hledáme abelovské podalgebry). Jak vidno, za X_1 lze dosadit cokoli, přípustná X_2 určí relace (4.1). Vznikají třídy

$$1/Q_1 = L + K_1 + X, Q_2 = P_0 - P_2, \quad 2/Q_1 = K_1 + X, Q_2 = P_2,$$

$$3/Q_1 = L + X, Q_2 = P_0, \quad 4/Q_1 = X_1, Q_2 = X_2, \tag{4.4}$$

kde jsme oproti předchozímu popisu prohodili význam x^1 a x^2 a to kvůli tomu, že ve výsledných podalgebrách se objevuje $P_0 \pm P_1$, tedy nyní $P_0 \pm P_2$, což je P_p resp. P_m v souřadnicích světelného kužele, které se nám na hledání a popis některých systémů budou hodit. V posledním kroku hledáme v jednotlivých třídách možnosti, které už nelze více zjednodušit či převést vzájemně na sebe. O tom, co je jednoduché rozhoduje více méně konvence, o nepřevoditelnosti pak nějaká charakteristika podalgeber (či příslušných podgrup), která se liší - např. normalizátor/centralizátor, Killingova forma apod., často lze též nepřevoditelnost odhadnou z nějakého fyzikálního argumentu (např. principiální rozdílnost světlu/času/prostorupodobných vektorů). Také lze ale použít článek [35] a argument, že pokud něco nelze převést ve 4D Poincaréze, nejde to jistě ani v její 3D obdobě. Na to, abychom mohli pracovat s celou algebrou potřebujeme novou věrnou reprezentaci maticemi. Jako vhodné se jeví reprezentovat lineární kombinaci $k_i K_i + lL + a_i P_i$ jako

$$\begin{pmatrix} 0 & k_1 & k_2 & a_0 \\ k_1 & 0 & -l & a_1 \\ k_2 & l & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Na konci procedury získáváme sedm dvojrozměrných abelovských podalgeber 3D Poincarého algebry, totiž

$$\{P_0, P_1\}, \quad \{P_1, P_2\}, \quad \{L, P_0\}, \quad \{K_2, P_1\},$$

$$\{P_0 - P_2, P_1\}, \quad \{K_1 - L, P_0 - P_2\}, \quad \{K_1 - L + P_0 + P_2, P_0 - P_2\}, \tag{4.6}$$

kde poslední tři podalgebry se značně zjednoduší v souřadnicích světelného kužele (2.18).

Ještě se vraťme ke 4D Poincaréze, kterou potřebujeme na klasifikaci 3+1 v prvním řádu integrabilních systémů. Zde je devět trojrozměrných abelovských podalgeber a to

$$\{P_1, P_2, P_0\}, \quad \{P_1, P_2, P_3\}, \quad \{L_3, P_0, P_3\}, \quad \{K_3, P_1, P_2\},$$

$$\{P_0 - P_3, P_1, P_2\}, \quad \{L_2 + K_1, P_0 - P_3, P_2\}, \quad \{L_2 + K_1 - \frac{1}{2}(P_0 + P_3), P_0 - P_3, P_2\},$$

$$\{L_2 + K_1, L_1 - K_2, P_0 - P_3\}, \quad \{L_2 + K_1, L_1 - K_2 + P_2, P_0 - P_3\}, \tag{4.7}$$

kde první tři jsou jednoduší v pseudokartézských souřadnicích, zbytek opět v souřadnicích světelného kužele.

Jak jsme již uvedli, podalgebrami Poincarého algebry jsou i podalgebry Eukleidovy algebry, konkrétně jde o první a třetí podalgebru ve výčtu (4.6) a první a třetí ve (4.7). Přesto, že tyto systémy budou patrně vypadat relativisticky stejně jako nerelativisticky, uvedeme je a budeme s nimi pracovat. Jak kvůli kompletnosti výčtu, tak kvůli speciálním případům, které již stejné být nemusí (a nebudou).

Na závěr sekce ještě poznámka - v celé sekci jsme explicitně neuvedli žádnou z podobnostních transformací. Důvodem je značná délka příslušných výrazů (v podobnostní transformaci $\tilde{X} = e^Y X e^{-Y}$ je Y nějaká lineární kombinace prvků algebry, právě koeficienty této kombinace jsou značně komplikované, závisí na tom, jak vypadá X) a též to, že je nikde dále nebudeme potřebovat jejich explicitní tvar. Na vyžádání jsou soubory s transformacemi k dispozici u autorky nebo vedoucího práce.

4.2 Třídy integrabilních systémů ve 2+1

Následuje výčet dvoudimenzionálních abelovských podalgeber Poincarého algebry, které reprezentují jednotlivé třídy integrabilních systémů. Počítat budeme ve 3D Minkowském (převedení do forem je přímočaré), v pseudokartézských souřadnicích či souřadnicích světelného kužele. Máme tedy vždy jeden IP - tj. Hamiltonián a k němu požadujeme další dva IP v involuci Q_j, $j = 1, 2$. Rovnice pro zachování IP prvního řádu jsme již sice obecně viděli v Kapitole 3, navíc některé se budou v různých třídách opakovat, kvůli přehlednosti a pohodlí čtenáře je však pro každou třídu vypíšeme zvlášť. Budeme je značit jako Zj, kde $j = 1, 2$. Budeme tedy požadovat zachování Q_j v involuci, které je podmíněno splněním rovnic Zj a požadavkem na jejich involuci. Budeme se vždy snažit nalézt kalibraci takovou, kde IP jsou co nejjednodušší, tj. kde v (2.4) $\Lambda_j(x) = 0$. To, jak se ukáže, bude možné ve všech případech.

Taktéž provedeme systematické hledání dalších IP prvního řádu, k čemuž využijeme vztah (2.4), rovnice znamenající nulovost dané složky Lieovy derivace budeme značit L$\mu\nu$. U konkrétních systémů též provedeme nerelativistickou limitu, tj. nalezneme nerelativistický analog systémů a jejich IP, případně se podíváme, zda nerelativistický systém nemá ještě další IP prvního řádu. Nalezneme-li systémy mající maximální možný počet IP, vyjádříme a vykreslíme též jejich trajektorii/řešení.

Ještě než přejdeme k procesu, dvě praktické poznámky. První je ověřování funkcionální (ne)závislosti případných dodatečných IP na ostatních. To je možné provést buď explicitně (hledáme, zda nejde nějaký IP přímo napsat jako funkci ostatních) či pomocí výpočtu hodnosti matice, kde v každém sloupci jsou derivace jednotlivých IP podle jedné veličiny. Oboje je v zápisu poměrně dlouhé a obvykle se to v článcích neuvádí. Ani my tyto výpočty neuvádíme, na vyžádání však budou poskytnuty.

Druhá poznámka se týká provádění nerelativistické limity systému ve smyslu $c \to \infty$. Abychom toto mohli provést, musíme c explicitně napsat všude, kde se objevuje, tedy dosazujeme $x^0 = ct$, instantní Hamiltonián tvaru (2.12) a konečně $F_{0i} = E_i/c$ a $F_{21} = B$ (tj. 3D analog (1.2)), případně též $A_0 = \varphi/c$.

4.2.1 Podalgebra $\{P_0, P_1\}$

Požadujeme tedy IP tvaru $Q_1 = p_1^A + m_1(x)$, $Q_2 = p_0^A + m_0(x)$. Podmínky na zachování jsou

$$\begin{aligned} &\mathrm{Z1}: \ \partial_0 m_1 - F_{01} = 0, \quad -\partial_1 m_1 = 0, \quad -\partial_2 m_1 + F_{21} = 0, \\ &\mathrm{Z2}: \ \partial_0 m_0 = 0, \quad -\partial_1 m_0 - F_{01} = 0, \quad -\partial_2 m_0 - F_{02} = 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Rovnice involuce je:

$$-\partial_1 m_0 + \partial_0 m_1 - F_{01} = 0. \tag{4.9}$$

Řešit tuto soustavu sedmi rovnic (jako sedmou bereme rovnici involuce) je jednoduché - z druhé rovnice víme $m_1(x^2, x^0)$, ze čtvrté pak $m_0(x^1, x^2)$. Dále dosadíme z první rovnice do rovnice sedmé, čímž zjistíme $m_0(x^2)$ a zároveň $F_{01} = 0$. Z šesté rovnice pak plyne $F_{02} = -m_0'(x^2)$. Z nulovosti F_{01} a první rovnice plyne $m_1(x^2)$ a ze třetí konečně $F_{21} = m_1'(x^2)$. Celkem tedy máme řešení

$$m_0 = m_0(x^2), \quad m_1 = m_1(x^2), \quad F_{01} = 0, \quad F_{21} = m_1'(x^2), \quad F_{02} = -m_0'(x^2). \tag{4.10}$$

Nyní bychom ještě chtěli najít kalibraci, která IP co nejvíce zjednoduší (ideálně však ne na úkor přílišné složitosti Hamiltoniánu). Takovou lze najít:

$$A_0 = m_0(x^2), \quad A_1 = m_1(x^2), \quad A_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q = \{p_1, p_0\}. \tag{4.11}$$

Vidíme, že nerelativistickou limitu netřeba provádět, vše dopadne stejně, jako klasicky (jak již víme z Kapitoly 3), tj. systém je shodný, IP jsou $q = \{p_1, h\}$.

Ještě bychom chtěli vědět, zda má tato třída systémů nějaké případy s dodatečnými IP prvního řádu. Požadavek nulovosti Lieovy derivace (2.4) dává rovnice

$$\begin{aligned} &\mathrm{L01}: \ m_1'\omega_{02} - m_0'\omega_{12} = 0, \quad \mathrm{L02}: \ (\omega_{02}x^0 + \omega_{12}x^1 + a^2)m_0'' + \omega_{01}m_1' = 0, \\ &\mathrm{L21}: \ (\omega_{02}x^0 + \omega_{12}x^1 + a^2)m_1'' + \omega_{01}m_0' = 0. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Zkusme je analyzovat. V druhé a třetí rovnici vystupují x^0 a x^1, koeficienty před nimi musí být nulové, protože vše ostatní je funkcí x^2. To se může stát buď pokud $m_0'' = m_1'' = 0$, nebo pokud $\omega_{02} = \omega_{12} = 0$. V prvním případě jsou složky tenzoru elektromagnetického pole konstanty a z druhé (či třetí) rovnice plyne $\omega_{10} = 0$. První rovnice pak implikuje jeden IP (spojení ω_{12} a ω_{02}), žádné podmínky nejsou na a^2, to tedy implikuje další IP. Ukazuje se však, že tyto IP navíc nejsou na ostatních nezávislé, nezávislý je pouze jeden, řekněme a^2. Tento případ níže uvedeme jako 2/

Nyní analyzujme druhou možnost, tj. $\omega_{02} = \omega_{12} = 0$, bez podmínek na m_i. Pak první rovnice je splněna triviálně, druhá a třetí dávají soustavu $a^2 m_0'' + \omega_{01} m_1' = 0$, $a^2 m_1'' + \omega_{01} m_0' = 0$, implikující jeden IP, jejímž řešením jsou exponenciály. Nalezený IP je nezávislý. Tento případ uvedeme níže jako 1/. Ještě poznamenejme, že v průniku uvažovaných možností se žádné nové systémy neobjevují. Celkem tedy dostáváme

$1/ F_{01} = 0, F_{21} = K_1 e^{-ax^2/b} + K_2 e^{ax^2/b}, F_{02} = -K_1 e^{-ax^2/b} + K_2 e^{ax^2/b} : Q_3 = (x^1 p_0 + x^0 p_1)a + p_2 b$

$$2/\ F_{01}=0,\ F_{21}=K_1,\ F_{02}=-K_0:\ Q_3=p_2-K_1x^1-K_0x^0. \tag{4.13}$$

Pokud v systému 1/ bude $a=0$, přechází tento na 2/, tj. konstantní pole. Jelikož je ale konstantní pole důležitým případem samo o sobě a bude se opakovaně objevovat i dále, uvádíme ho samostatně. U systému 2/ si povšimněme, že pokud $K_0=0$, pak nejen systém, ale i IP jsou čistě prostorové. To nám umožňuje vyjádřit 2+1 trajektorii (dosadíme do $Q_2=H^I$ z Q_1 a Q_3) jako

$$Q_2^2=1+(Q_1-K_1x^2)^2+(Q_3+K_1x^1)^2. \tag{4.14}$$

Trajektorie je vykreslena na Obrázku 1 v příloze.

Podívejme se ještě na limity systémů 1/ a 2/: ačkoli jsou oba systémy časově nezávislé, neobejdeme se bez úprav. Dosadíme-li $E_i=cF_{0i}$, je jasné, že jediný případ, kdy dosáhneme konečné limity bude, když budeme předpokládat pro libovolnou konstantu vystupující v F_{02}, že $K_i=k_i/c$ (kde $i=0,1$ resp. $i=1,2$). Dále dosazujeme $x^0=ct$ a $p_0=H^I/c$ a děláme limitu. Jejím výsledkem bude

$$1/\ E_1=0,\ B=0,\ E_2=-k_1e^{-ax^2/b}+k_2e^{ax^2/b}:\ q_3=p_1t+x^1$$

$$2/\ E_1=0,\ B=K_1,\ E_2=-k_0:\ q_3=p_2-K_1x^1-k_0t, \tag{4.15}$$

IP zůstávají nezávislé, druhý případ má dokonce další nezávislý IP prvního řádu navíc.

4.2.2 Podalgebra $\{P_1,P_2\}$

Požadujeme zachování $Q_1=p_1^A+m_1(x)$, $Q_2=p_2^A+m_2(x)$. Rovnice pro zachování jsou

$$\mathrm{Z1}:\ \partial_0m_1-F_{01}=0,\quad -\partial_1m_1=0,\quad -\partial_2m_1+F_{21}=0,$$

$$\mathrm{Z2}:\ \partial_0m_2-F_{02}=0,\quad -\partial_2m_2=0,\quad -\partial_1m_2-F_{21}=0. \tag{4.16}$$

Rovnice involuce je

$$\partial_2m_1-\partial_1m_2-F_{21}=0. \tag{4.17}$$

Rovnice řešíme zcela analogicky předchozímu typu. Řešením je

$$m_1=m_1(x^0),\quad m_2=m_2(x^0),\quad F_{21}=0,\quad F_{01}=m_1'(x^0),\quad F_{02}=m_2'(x^0) \tag{4.18}$$

a vhodnou kalibrací pak

$$A_0=0,\quad A_1=m_1(x^0),\quad A_2=m_2(x^0)\quad\Leftrightarrow\quad Q=\{p_1,p_2\}. \tag{4.19}$$

Limita technicky vzato obecně nemusí existovat (jedná se o závislost na $x^0=ct$), pokud ale uvažujme všechny zúčastněné funkce jako funkce t, pak systém v limitě zůstává shodný a IP taktéž.

Hledejme nyní případy s IP navíc. Rovnice nulovosti Lieovy derivace jsou

$$\text{L01}: \ (\omega_{01}x^1 + \omega_{02}x^2 + a^0)\partial_0 m_1' + \omega_{12} m_2' = 0,$$

$$\text{L02}: \ (\omega_{01}x^1 + \omega_{02}x^2 + a^0)\partial_0 m_2' - \omega_{12} m_1' = 0, \quad \text{L21}: \ \omega_{02} m_1' - \omega_{01} m_2' = 0, \tag{4.20}$$

jejích analýza bude podobná, jako u předcházející třídy: chceme vynulovat koeficienty u x^1 a x^2, tedy první možnost je $m_1'' = m_2'' = 0$. Pak z (např.) první rovnice $\omega_{12} = 0$, jeden IP přináší a^0, na které nejsou žádné podmínky, druhý IP je kombinací veličin příslušejícím ω_{02} a ω_{01} z poslední rovnice. Tyto dva IP však nejsou nezávislé na ostatních, to je pouze jeden. Tuto možnost uvádíme níže jako 2/.

Druhá možnost jak vynulovat koeficienty x^1 a x^2 je $\omega_{02} = \omega_{01} = 0$. Pak třetí rovnice je splněna triviálně a první a druhá dávají soustavu $a^0\partial_0 m_1' + \omega_{12} m_2' = 0$, $a^0\partial_0 m_2' - \omega_{12} m_1' = 0$, implikující jeden IP. Jejím řešení jsou goniometrické funkce, případ uvádíme jako 1/. V průniku zmíněných možností nic nového není, opět tedy máme dva případy s IP navíc:

$$1/ \ F_{21} = 0, \ F_{01} = K_1 \cos(ax^0/b) - K_2 \sin(ax^0/b), \ F_{02} = K_2 \cos(ax^0/b) + K_1 \sin(ax^0/b):$$

$$Q_3 = a(x^1 p_2 - p_1 x^2) + p_0 b$$

$$2/ \ F_{21} = 0, F_{01} = K_1, F_{02} = K_2: \ Q_3 = p_0 - K_1 x^1 - K_2 x^2. \tag{4.21}$$

I zde lze získat konstantní pole i případu 1/ volbou $a = 0$, případy jsme však z důvodů podobných analogické situaci v předchozí třídě oddělili.

Podívejme se na limity: aby byly konečné, u všech předfaktorových konstant opět potřebujeme $K_i = k_i/c$, $i = 1, 2$. U prvního systému též potřebujeme $a = A/c$. S těmito změnami pak systémy nerelativisticky vypadají zcela analogicky:

$$1/ \ B = 0, \ E_1 = k_1 \cos(At/b) - k_2 \sin(At/b), \ E_2 = k_2 \cos(At/b) + k_1 \sin(At/b):$$

$$q_3 = a(x^1 p_2 - p_1 x^2) + hb$$

$$2/ \ B = 0, \ E_1 = k_1, \ E_2 = k_2: \ q_3 = h - k_1 x^1 - k_2 x^2. \tag{4.22}$$

IP zůstávají nezávislé a první i druhý případ mají další IP prvního řádu navíc.

4.2.3 Podalgebra $\{L, P_0\}$

Požadujeme $Q_1 = p_0^A + m_0(x)$, $Q_2 = x^1 p_2^A - x^2 p_1^A + m_{12}(x)$. Rovnice zachování:

$$\text{Z1}: \ \partial_0 m_0 = 0, \quad -\partial_1 m_0 - F_{01} = 0, \quad -\partial_2 m_0 - F_{02} = 0,$$

$$\text{Z2}: \ \partial_1 m_{12} + x^1 F_{21} = 0, \quad \partial_2 m_{12} + x^2 F_{21} = 0, \quad \partial_0 m_{12} - F_{01} x^2 + F_{02} x^1 = 0. \tag{4.23}$$

Involuce:

$$x^1(\partial_2 m_0 + F_{02}) - x^2(\partial_1 m_0 + F_{01}) - \partial_0 m_{12} = 0. \tag{4.24}$$

Z první rovnice víme $m_0(x^1, x^2)$. Dosazením druhé a třetí do sedmé pak $m_{12}(x^1, x^2)$. Dále dosazením druhé a třetí do šesté získáváme vztah $x^2\partial_1 m_0 = x^1\partial_2 m_0$, který znamená $m_0((x^1)^2 + (x^2)^2)$. Vynásobením čtvrté rovnice x^2, páté x^1 a jejich porovnáním také $m_{12}((x^1)^2 + (x^2)^2)$. Složky $F_{\mu\nu}$ lze pak přímo vyjádřit z druhé, třetí a čtvrté (či páté) rovnice. Celkem

$$m_0 = m_0((x^1)^2 + (x^2)^2), \quad m_{12} = m_{12}((x^1)^2 + (x^2)^2), \quad F_{01} = -2x^1 m_0'((x^1)^2 + (x^2)^2),$$

$$F_{21} = -2m_{12}'((x^1)^2 + (x^2)^2), \quad F_{02} = -2x^2 m_0'((x^1)^2 + (x^2)^2). \tag{4.25}$$

Vhodná kalibrace je:

$$A_0 = m_0((x^1)^2 + (x^2)^2), \quad A_1 = -\frac{x^2 m_{12}((x^1)^2 + (x^2)^2)}{(x^1)^2 + (x^2)^2},$$

$$A_2 = \frac{x^1 m_{12}((x^1)^2 + (x^2)^2)}{(x^1)^2 + (x^2)^2} \quad \Leftrightarrow \quad Q = \{p_0, x^1 p_2 - x^2 p_1\}. \tag{4.26}$$

Limita je přímočará, neboť stejný systém existuje i klasicky - systém tedy zůstává shodný, $q = \{h, x^1 p_2 - x^2 p_1\}$.

Podívejme se, zda má třída nějaké případy s IP navíc. Rovnice jsou (2.4) jsou

$$\text{L01}: \ (\omega_{01}x^0 + a^1)(m_0' + x^1\partial_1 m_0') + (\omega_{02}x^0 + a^2)x^1\partial_2 m_0' + \omega_{02}m_{12}' = 0$$

$$\text{L02}: \ -(\omega_{01}x^0 + a^1)x^2\partial_1 m_0' - (\omega_{02}x^0 + a^2)(m_0' + x^2\partial_2 m_0') + \omega_{01}m_{12}' = 0$$

$$\text{L21}: \ -(\omega_{01}x^0 + a^1)\partial_1 m_{12}' - (\omega_{02}x^0 + a^2)\partial_2 m_{12}' + x^2\omega_{01}m_0' - x^1\omega_{02}m_0' = 0. \tag{4.27}$$

Na první pohled působí komplikovaně, všimneme-li si ale tvaru koeficientů u x^0 (kterých se chceme zbavit), dokážeme je zjednodušit. Koeficient u x^0 v poslední rovnici $-2m_{12}''(\omega_{01}x^1 + \omega_{02}x^2)$, tj. buď $m_{12}'' = 0$, nebo $\omega_{01} = \omega_{02} = 0$. Volme nejprve první možnost a podívejme se na koeficient u x^0 v první rovnici: $\omega_{01}(m_0' + x^1\partial_1 m_0') + \omega_{02}x^1\partial_2 m_0'$ a v druhé rovnici: $-\omega_{01}x^2\partial_1 m_0' - \omega_{02}(m_0' + x^2\partial_2 m_0')$, pokud chceme udržet ω_{01}, ω_{02} nenulové, musí být $m_0' = 0$. (Důvodem jsou opět koeficienty - víme, že obě m jsou funkce součtu druhých mocnin x^1 a x^2, je tedy jasné, že např koeficient před x^1x^2 se musí vynulovat.) První (či druhá rovnice) ale nakonec stejně nulovost ω_{02} a ω_{01} vynutí - jinak by implikovaly nulovost m_{12}', což už by znamenalo celkové nulové pole.

Vraťme se tedy na začátek a předpokládejme pouze $\omega_{01} = \omega_{02} = 0$. Z poslední rovnice znovu dostaneme $m_{12}'' = 0$ (nebo $a_1 = a_2 = 0$, pak už ale žádný IP nezbývá). První (či druhá) rovnice říká $m_0' = 0$ a dostáváme dva IP, související s a_1 a a_2. Pole, které jsme našli je ale $F_{01} = F_{02} = 0, F_{21} = -K$, což je speciální případ (4.13). Nebudeme ho tedy rozebírat dále.

4.2.4 Podalgebra $\{K_2, P_1\}$

Požadujeme $Q_1 = p_1^A + m_1(x)$ a $Q_1 = p_2^A x^0 + p_0^A x^2 + m_{02}(x)$. Rovnice jejich zachování jsou

$$\mathrm{Z1}: \ \partial_0 m_1 - F_{01} = 0, \quad -\partial_1 m_1 = 0, \quad -\partial_2 m_1 + F_{21} = 0,$$

$$\mathrm{Z2}: \ \partial_0 m_{02} - x^0 F_{02} = 0, \quad \partial_2 m_{02} + x^2 F_{02} = 0, \quad \partial_1 m_{02} + F_{21} x^0 + F_{01} x^2 = 0. \tag{4.28}$$

Rovnice involuce je:

$$x^0(\partial_2 m_1 - F_{21}) + x^2(\partial_0 m_1 - F_{01}) - \partial_1 m_{02} = 0. \tag{4.29}$$

Soustava se řeší zcela analogicky předchozímu typu (rozdíl je jen ve znaménku). Řešení je

$$m_1 = m_1((x^2)^2 - (x^0)^2), \quad m_{02} = m_{02}((x^2)^2 - (x^0)^2), \quad F_{01} = -2x^0 m_1'((x^2)^2 - (x^0)^2),$$

$$F_{21} = 2x^2 m_1'((x^2)^2 - (x^0)^2), \quad F_{02} = -2m_{02}'((x^2)^2 - (x^0)^2) \tag{4.30}$$

a vhodná kalibrace

$$A_1 = m_1((x^2)^2 - (x^0)^2), \quad A_2 = -\frac{x^0 m_{02}((x^2)^2 - (x^0)^2)}{(x^2)^2 - (x^0)^2},$$

$$A_0 = \frac{x^2 m_{02}((x^2)^2 - (x^0)^2)}{(x^2)^2 - (x^0)^2} \quad \Leftrightarrow \quad Q = \{p_1, p_2 x^0 + p_0 x^2\}. \tag{4.31}$$

Limitu u této a dalších tříd nebudeme obecně rozepisovat. Nemáme specifikovanou závislost na $(x^2)^2 - (x^0)^2 = (x^2)^2 - (ct)^2$, v $F_{\mu\nu}$ víme tedy jen, že výsledné funkci bude dominovat t, limita ale může být např. nulová, bude-li se výrazem dělit, či nekonečná, bude-li se jím násobit, ale také nedefinovaná (kdyby byl např. výraz v goniometrické funkci). Aby se dosáhlo konečné, definované limity, bude typicky třeba provést škálování konstant vyskytujících se uvnitř funkcí apod. Provádět limity budeme dále jen u speciálních systémů (typicky těch s IP navíc).

Případy s IP navíc: rovnice nulovosti Lieovy derivace jsou

$$\mathrm{L01}: \ -(\omega_{01}x^1 + a^0)(m_1' + x^0\partial_0 m_1') - (\omega_{12}x^1 + a^2)x^0\partial_2 m_1' - \omega_{12} m_{02}' = 0,$$

$$\mathrm{L02}: \ -(\omega_{01}x^1 + a^0)\partial_0 m_{02}' - (\omega_{12}x^1 + a^2)\partial_2 m_{02}' + x^0\omega_{12} m_1' - x^2\omega_{01} m_1' = 0,$$

$$\mathrm{L21}: \ (\omega_{01}x^1 + a^0)x^2\partial_0 m_1' + (\omega_{12}x^1 + a^2)(m_1' + x^2\partial_2 m_1') + \omega_{01} m_{02}' = 0 \tag{4.32}$$

a jejich analýza je velice podobná předchozímu typu, proto jen zrychleně: koeficienty u x^1 nás vždy nakonec donutí vynulovat ω_{01} a ω_{12}. Pokud od začátku předpokládáme $\omega_{01} = \omega_{12} = 0$, zjistíme, že jediné netriviální pole je $F_{21} = F_{01} = 0, F_{02} = -K$, mající IP navíc povstávající z a_0 a a_2. Jde ale opět jen o speciální případ (4.13), který jsme již studovali.

4.2.5 Podalgebra $\{P_0 - P_2, P_1\}$

Tuto i následující třídy je výhodnější zkoumat v souřadnicích světelného kužele (a v případě 2+1 popisu ve frontální formě). Požadujeme $Q_1 = p_1^A + m_1(x)$ a $Q_2 = p_m^A + m_m(x)$. Rovnice zachování mají tvar

$$\text{Z1: } \partial_1 m_1 = 0, \quad \partial_m m_1 + F_{1m} = 0, \quad \partial_p m_1 - F_{p1} = 0,$$

$$\text{Z2: } \partial_m m_m = 0, \quad \partial_1 m_m - F_{1m} = 0, \quad \partial_p m_m - F_{pm} = 0. \tag{4.33}$$

Rovnice involuce je

$$\partial_m m_1 - \partial_1 m_m + F_{1m} = 0. \tag{4.34}$$

Rovnice se řeší analogicky prvním dvěma třídám (rozdíl je jen v názvu souřadnic). Celkové řešení je tvaru

$$m_m = m_m(x^p), \quad m_1 = m_1(x^p), \quad F_{pm} = m'_m(x^p), \quad F_{1m} = 0, \quad F_{p1} = m'_1(x^p), \tag{4.35}$$

při vhodné kalibraci máme

$$A_p = 0, \quad A_m = m_m(x^p), \quad A_1 = m_1(x^p) \quad \Leftrightarrow \quad Q = \{p_1,\, p_m\}. \tag{4.36}$$

Podívejme se na případy s IP navíc. Z požadavku na nulovost Lieovy derivace plyne

$$\text{L1m: } m'_m\omega_{1p} = 0, \quad \text{Lp1: } (\omega_{pm}x^p + \omega_{1p}x^1 + a^p)\partial_p m'_1 + \omega_{pm}m'_1 + \omega_{1m}m'_m = 0,$$

$$\text{Lpm: } (\omega_{pm}x^p + \omega_{1p}x^1 + a^p)\partial_p m'_m + \omega_{1p}m'_1/2 = 0. \tag{4.37}$$

Tyto rovnice začneme analyzovat od první - tu jde splnit, pokud $m'_m = 0$, nebo $\omega_{1p} = 0$. V prvním případě by ale ze třetí rovnice (zůstaneme-li u ω_{1p} nenulové) musí být i $m'_1 = 0$, tedy šlo by o nulová pole. Uvažujme tedy $\omega_{1p} = 0$ a vraťme se ke třetí rovnici. Zde buďto $m''_m = 0$, nebo $\omega_{pm} = a^p = 0$. Uvažujme první možnost: zbývá nám druhá rovnice, kterou musíme vyřešit, přičemž o m'_m víme, že je konstanta. Tato rovnice má tvar $(\omega_{pm}x^p + a^p)\partial_p m'_1 + \omega_{pm}m'_1 + \omega_{1m}m'_m = 0$. Pokud nepředpokládáme žádnou z konstant nulovou, odpovídá řešení této rovnice (m_1) případu představenému jako 2/ níže, mající jeden IP navíc. Speciální případy budou z toho řešení vidět a budeme je diskutovat později. Jediný z nich, který se liší počtem IP je podpřípad $m'_m = 0$, tento má ještě další IP (pocházející čistě z ω_{1m}), diskutujeme ho jako 12/.

Druhá možnost byla $\omega_{pm} = a^p = 0$ (a stále též $\omega_{1p} = 0$), pak nám opět zbývá jen druhá rovnice, které se zjednodušila na tvar $\omega_{1m}m'_m = 0$. Vynulováním ω_{1m} by už žádné IP nezbyly, tedy chceme $m'_m = 0$. To tedy implikuje IP z ω_{1m}, na m_1 žádné podmínky nejsou. Bude vidět, že zmíněný 12/ je též speciálním případem tohoto případu. Celkem tedy existují dva případy s jedním dodatečným IP, které navíc mají společný podpřípad s ještě dalším IP navíc:

$$1/\ F_{pm} = F_{1m} = 0, \quad F_{p1} = m'_1(x^p)\ :\ Q_3 = 2p_m x^1 + p_1 x^p - \int m_1(x^p)dx^p$$

$$2/\ F_{1m}=0,\quad F_{pm}=K_1,\quad F_{p1}=\frac{-K_1fx^p+K_2}{bx^p+a}$$

$$b=0:\ Q_3=12a^2p_p+12afp_mx^1+6afp_1x^p+K_1f^2(x^p)^3-12K_1a^2x^m-3K_2f(x^p)^2-12K_2ax^1$$

$$b\neq 0:\ Q_3=2f(bx^p+a)(K_1af+K_2b)\ln(bx^p+a)+(4p_mx^m-4p_px^p)b^4+$$
$$+((-2p_1x^p-4p_mx^1)f+(4K_1x^m-4p_p)a+4K_2x^1)b^3-fx^p(K_1fx^p+2K_2)b^2$$
$$-2af(K_1fx^p+K_2)b-2a^2f^2K_1$$

$$12/\ F_{pm}=F_{1m}=0,\quad F_{p1}=-\frac{K}{bx^p+a}:\ Q_4=-p_p(bx^p+a)+p_mbx^m+Kx^1. \tag{4.38}$$

Několik komentářů: systém 2/ je pro jeho přehlednost zapsán pomocí konstant a, b, f. Tyto, v uvedeném pořadí, odpovídají a_p, ω_{pm}, ω_{1m}. Forma, v jaké je 2/ zapsáno obsahuje i všechny speciální případy, kdy je např. některá z konstant nulová kromě jediného, kdy $a=b=0$. Ve skutečnosti ale tento případ vede na 1/. Taktéž si můžeme všimnout, že 2/ obsahuje jako speciální případ též konstantní pole ($f=b=0$), (Q_3 se vlastně rozdělí na dva, jak je vidět z řešení druhé rovnice Lieovy derivace). Nicméně ukazuje se, že tyto dohromady nejsou nezávislé. Další speciální případ, kdy se IP oddělují je $K_1=0$, což je právě společný podpřípad 1/ a 2/ označený 12/. Zde jsou výsledné IP nezávislé. V něm je třeba brát Q_3 z případu 1/, neboť ten z případu 2/ vymizí.

Ještě se podíváme na limity těchto případů (resp. pouze 2/ a 12/, které známe explicitně). Začneme s jednodušším 12/. Zde $m_1=\frac{K}{b}\ln(bx^p+a)$ a po převodu $A_0=A_2=0$, $A_1=\frac{K}{b}\ln(b(x^0+x^2)+a)$. To znamená $F_{02}=0$, $F_{01}=\frac{K}{b(x^0+x^2)+a}$, $F_{21}=\frac{K}{b(x^0+x^2)+a}$. Nyní dosadíme $x^0=ct$ a $E_i=cF_{0i}$, v limitě máme

$$12/\ E_1=\frac{K}{bt},\quad E_2=0,\quad B=0. \tag{4.39}$$

Viditelně ale musíme změnit kalibraci, kdybychom chtěli pracovat přímo s třípotenciálem pracovat, neboť původní A_1 má nekonečnou limitu. Nerelativistické IP budou v této jiné kalibraci pak mírně odlišné, než limity relativistických napsaných v původní kalibraci. Podobně to bude i dále, ukažme si je zde jako příklad (dále IP již v tomto případě vypisovat nebudeme): např. s nerelativistickou kalibrací $A_0=A_2=0$, $A_1=K\ln(bt)/b$ je můžeme je určit jako

$$q_1=p_1,\ q_2=p_2,\ q_3=p_2t+x^2,\ q_4=p_1t+x^1+\frac{Kt(1-\ln(bt))}{b},$$

kde např. q_1, q_2 jsou v involuci.

Nyní se podíváme na limitu složitějšího 2/: máme $m_m=A_m=K_1x^p$, $A_1=m_1=(\ln(bx^p+a)K_1af-K_1fbx^p+\ln(bx^p+a)K_2b)/b^2$, resp. pro $b=0$ $A_1=-x^p(K_1fx^p-2K_2)/2a$. To po převedení dává $A_0=K_1(x^0+x^2)$, $A_2=-K_2(x^0+x^2)$, $A_1=(\ln(b(x^0+x^2)+a)K_1af-K_1fb(x^0+x^2)+\ln(b(x^0+x^2)+a)K_2b)/b^2$ resp. pro $b=0$ $A_1=-(x^0+x^2)(K_1f(x^0+x^2)-$

$2K_2)/2a$. Minimální zásah, který povede ke konečným limitám elektromagnetického pole je předpoklad $K_1 = k_1/c$. Potom v limitě

$$2/\ E_1 = -\frac{k_1 ft - K_2}{bt}, \quad E_2 = -2k_1, \quad B = 0$$

$$\text{resp. pro } b = 0: \quad E_1 = -\frac{k_1 ft - k_2}{a}, \quad E_2 = B = 0 \tag{4.40}$$

ukazuje se, že tento limitní systém má o jeden IP prvního řádu více. Patrně jde o důsledek ztráty závislosti na jedné proměnné (v kartézských souřadnicích závislost na $x^0 + x^2$ limitně přešla na závislost na t). S podobnou situací se setkáme i dále.

Jelikož má případ 12/ maximální počet IP, lze ve 3D nalézt trajektorii, případně ho přímo vyřešit ve 2+1 (tj. dosadit H^F za p_p a vyjádřit z IP $x^1(x^p)$ a $x^m(x^p)$). Druhá možnost dává

$$x^1(x^p) = \frac{Q_3 - Q_1 x^p - \frac{K}{b^2}(\ln(bx^p + a) - 1)((bx^p + a)}{2Q_2}$$

$$x^m(x^p) = \frac{Q_4 + H^F(bx^p + a) - Kx^1(x^p)}{bQ_2}, \tag{4.41}$$

kde v $x^m(x^p)$ se za $x^1(x^p)$ dosadí a $H^F = \frac{1+(p_1+\frac{K}{b}\ln(bx^p+a))^2}{4p_m} = \frac{1+(Q_1+\frac{K}{b}\ln(bx^p+a))^2}{4Q_2}$. 3D trajektorie je vykreslená na Obrázku 2 v příloze. Dojde se k ní tak, že vyjádříme složky p_μ ze třech IP, dosadíme výsledné vztahy do dvou zbývajících IP a hledáme průnik těchto dvou útvarů (tedy pokud bychom měli méně IP, nedokázali bychom trajektorii zcela určit, věděli bychom pouze, že je omezena na jistou část prostoru).

K tomuto a podobným systémům ještě krátký komentář: ve skutečnosti je možné v argumentu logaritmu a na příslušných místech v IP psát absolutní hodnotu. Neuvedli jsme ji zde, jelikož má systém v každém případě singularitu v $x^p = -a/b$, kterou neprojde. Trajektorie na jedné a druhé poloose jsou tak vždy striktně oddělené. Též poznamenejme, že logaritmu se nejde zcela zbavit ani jinou kalibrací (objeví se buď v třípotenciálu, nebo v IP).

4.2.6 Podalgebra $\{K_1 - L, P_0 - P_2\}$

Požadujeme $Q_1 = p^A_m + m_m(x)$ a $Q_2 = p^A_1 x^p + 2x^1 p^A_m + m_{1m}(x)$. Rovnice zachování:

$$\text{Z1: } \partial_m m_m = 0, \quad \partial_1 m_m - F_{1m} = 0, \quad \partial_p m_m - F_{pm} = 0,$$

$$\text{Z2: } \partial_m m_{1m} + x^p F_{1m} = 0, \quad \partial_p m_{1m} + x^p F_{1p} - 2x^1 F_{pm} = 0, \quad \partial_1 m_{1m} - 2x^1 F_{1m} = 0 \tag{4.42}$$

a involuce:

$$x^p \partial_1 m_m + 2x^1 \partial_m m_m - x^p F_{1m} - \partial_m m_{1m} = 0. \tag{4.43}$$

Řešení: z první rovnice $m_m(x^p, x^1)$. Dosazením z druhé a třetí do sedmé $F_{1m} = 0$ a zároveň $m_m(x^p)$. Ze třetí rovnice $F_{pm} = m_m'(x^p)$. Ze čtvrté a páté pak použitím zjištěného $m_{1m}(x^p)$. Konečně F_{p1} vyjádříme z páté rovnice. Rovnice tedy dávají řešení

$$m_m = m_m(x^p), \quad m_{1m} = m_{1m}(x^p),$$

$$F_{1m} = 0, \quad F_{pm} = m_m'(x^p), \quad F_{p1} = -\frac{2x^1 m_m'(x^p) - m_{1m}'(x^p)}{x^p}. \tag{4.44}$$

IP zjednoduší kalibrace

$$A_m = m_m(x^p), \quad A_1 = \frac{m_{1m}(x^p) - 2x^1 m_m(x^p)}{x^p},$$

$$A_p = \frac{x^1(x^1 m_m(x^p) - m_{1m}(x^p))}{(x^p)^2} \quad \Leftrightarrow \quad Q = \{p_m,\ p_1 x^p + 2x^1 p_m\}. \tag{4.45}$$

Ještě se podíváme na případy s IP navíc. Rovnice nulovosti složek Lieovy derivace mají tvar

$$\text{L1m:} \quad m_m'\omega_{1p} = 0, \quad \text{Lpm:} \quad (\omega_{pm}x^p + \omega_{1p}x^1 + a^p)\partial_p m_m' - \frac{\omega_{1p}(2x^1 m_m' - m_{1m}')}{2x^p} = 0$$

$$\text{L1p:} \quad (\omega_{pm}x^p + \omega_{1p}x^1 + a^p)\left(\frac{2x^1\partial_p m_m' - \partial_p m_{1m}'}{x^p} - \frac{2x^1 m_m' - m_{1m}'}{(x^p)^2}\right) +$$

$$+\frac{(2a^1 + x^m\omega_{1p})m_m' + (2m_m' x^1 - m_{1m}')\omega_{pm}}{x^p} = 0. \tag{4.46}$$

Prozkoumejme je: opět začneme první rovnicí a první možností, tj. $m_m' = 0$. Pak ale z druhé rovnice (chceme-li nenulovou ω_{1p}) též $m_{1m}' = 0$ a tedy máme nulová pole. Proto musíme v první rovnici zvolit druhou možnost, $\omega_{1p} = 0$. Potom druhá rovnice požaduje buď $m_m'' = 0$, nebo $\omega_{pm} = a_p = 0$. Volme nejprve první možnost. Zbývá nám třetí rovnice tvaru $(\omega_{pm}x^p + a^p)\left(\frac{-\partial_p m_{1m}'}{x^p} - \frac{2x^1 m_m' - m_{1m}'}{(x^p)^2}\right) + \frac{2a^1 m_m' + (2m_m' x^1 - m_{1m}')\omega_{pm}}{x^p} = 0$, kde m_m' známe. Rovnici je ještě třeba rozdělit na koeficienty x^1 a zbytek. Koeficient u x^1 je $a^p m_m'$, vynulováním m_m' bychom se dostali na speciální případ předchozí třídy, tedy volme $a_p = 0$. Zbytek rovnice pak dává $-\omega_{pm}m_1'' + 2a^1 m_m'/x^p$, přičemž už víme, že m_m' je konstanta. Řešení odpovídá níže uvedenému tenzoru elektromagnetického pole (zápis nefunguje, pokud $K = K_1 = 0$, to nám ale nevadí - v tomto případě, jediná možnost s IP navíc je $m_m' = 0$, což, jak jsme již uvedli netřeba řešit).

Druhá volba byla $\omega_{pm} = a_p = 0$ (a stále též $\omega_{1p} = 0$). Nevyřešená zbývá třetí rovnice, ve které už zbývá jen volit $a^1 m_m' = 0$, vynulováním a^1 už by nám žádné IP nezbyly, tedy $m_m' = 0$ a a^1 implikuje IP. To je ale opět jen speciální případ typu předchozí třídy, tedy dále ho nezkoumáme.

Třída má tedy jeden nový případ s IP navíc:

$$F_{1m} = 0, \quad F_{pm} = K, \quad F_{p1} = -\frac{2x^1 K - (K_2 \ln(x^p) + K_1)}{x^p}:$$

$$Q_3 = 4K(p_p x^p - p_m x^m) + 2p_1 K_2 + K_2^2 \ln^2(x^p) + 2K_2(K_1 - K_2)\ln(x^p), \tag{4.47}$$

který má podpřípad s dalším IP shodný se speciálním případem (4.38) v předchozí třídě. U uvedeného případu se podívejme na limitu. Po převedení máme $F_{01} = (\ln(x^0 + x^2)K_2 + K_1 - 2x^1 K)/(x^0 + x^2)$, $F_{02} = -2K$, $F_{21} = (\ln(x^0 + x^2)K_2 + K_1 - 2x^1 K)/(x^0 + x^2)$. Tedy minimální předpoklad zaručující nenulovost a konečnost bude $K = k/c$ a $K_2 = k_2/\ln(c)$. Potom

$$B = 0, \quad E_2 = -2k, \quad E_1 = \frac{K_1 + k_2}{t}. \tag{4.48}$$

Ukazuje se navíc, že nerelativistická limita má o 1 nezávislý IP více než relativistický případ.

4.2.7 Podalgebra $\{K_1 - L + P_0 + P_2, P_0 - P_2\}$

Požadujeme $Q_1 = p_m^A + m_m(x)$ a $Q_2 = x^p p_1^A + 2x^1 p_m^A + 2p_p^A + m_2(x)$. (Zde jsme mírně změnili značení funkcí $m(x)$, neboť do této chvíle byly všechny požadované IP jedny z těch uvedených v bázi (2.6) či (2.24), zde druhý IP nemá ustálený označení, příslušnou funkci tedy prostě značíme číslem IP ve výčtu požadovaných.) Rovnice zachování jsou

$$\text{Z1: } \partial_m m_m = 0, \quad \partial_1 m_m - F_{1m} = 0, \quad \partial_p m_m - F_{pm} = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{Z2: } & -\partial_m m_2 - x^p F_{1m} - 2F_{pm} = 0, \quad \partial_p m_2 - x^p F_{p1} - 2x^1 F_{pm} = 0, \\ & \partial_1 m_2 - 2x^1 F_{1m} + 2F_{p1} = 0. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Rovnice involuce pak je

$$x^p \partial_1 m_m + 2x^1 \partial_m m_m - x^p F_{1m} - \partial_m m_2 - 2\partial_p m_m + 2F_{pm} = 0. \tag{4.50}$$

Podívejme se na řešení: z první rovnice $m_m(x^1, x^p)$, dosazení druhé a třetí do sedmé také $m_m(x^1, x^p)$. Dosazením z druhé a třetí rovnice získáme vztah $-x^p \partial_1 m_m - 2\partial_p m_m = 0$, což znamená $m_m(x^1 - (x^p)^2/4)$. Vynásobení páté rovnice 2, šesté rovnice $-x^p$ a jejich porovnáním získáme stejný vztah pro m_2, tj. i $m_2(x^1 - (x^p)^2/4)$. Složky tenzoru elektromagnetického pole se pak vyjádří ze druhé, třetí a páté (nebo šesté) rovnice. Celkem

$$\begin{aligned} m_m = m_m(x^1 - (x^p)^2/4), \quad m_2 = m_2(x^1 - (x^p)^2/4), \quad F_{1m} = m_m'(x^1 - (x^p)^2/4), \\ F_{pm} = -x^p m_m'(x^1 - (x^p)^2/4)/2, \quad F_{p1} = x^1 m_m'(x^1 - (x^p)^2/4) - m_2'(x^1 - (x^p)^2/4)/2. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Výhodnou kalibrací je

$$A_p = ((x^p)^2/2 - x^1)m_m(x^1 - (x^p)^2/4) + m_2(x^1 - (x^p)^2/4)/2, \quad A_m = m_m(x^1 - (x^p)^2/4),$$

$$A_1 = -x^p m_m (x^1 - (x^p)^2/4) \quad \Leftrightarrow \quad Q = \{p_m,\ x^p p_1 + 2x^1 p_m + 2p_p\}. \tag{4.52}$$

Dále se podíváme na případy s dalšími IP. Rovnice Lieovy derivace jsou tvaru

$$\text{L1m:}\quad (\omega_{pm}x^p + \omega_{1p}x^1 + a^p)\partial_p m'_m + (a^1 + \omega_{1m}x^p/2 + \omega_{1p}x^m/2)\partial_1 m'_m - \omega_{pm}m'_m - x^p\omega_{1p}m'_m/2 = 0$$

$$\begin{gathered}\text{L1p:}\quad (\omega_{pm}x^p + \omega_{1p}x^1 + a^p)(-x^1\partial_p m'_m + \partial_p m'_2/2) + \omega_{1m}x^p m'_m/2 + \\ +(a^1 + \omega_{1m}x^p/2 + \omega_{1p}x^m/2)(-m'_m - x^1\partial_1 m'_m + \partial_1 m'_2/2) + \omega_{pm}(-x^1 m'_m + m'_2/2) = 0 \\ \text{Lpm:}\quad (\omega_{pm}x^p + \omega_{1p}x^1 + a^p)(-m'_m - x^p\partial_p m'_m) - (a^1 + \omega_{1m}x^p/2 + \omega_{1p}x^m/2)x^p\partial_1 m'_m + \\ +\omega_{1p}(x^1 m'_m - m'_2/2) + \omega_{1m}m'_m = 0.\end{gathered} \tag{4.53}$$

Projděme tyto rovnice. Dobrým výchozím bodem jsou koeficienty u x^m. U první rovnice dává požadavek na nulovost tohoto koeficientu na výběr mezi $m''_m = 0$ a $\omega_{1p} = 0$, přičemž třetí rovnice znamená stejnou volbu. Volme tedy nejprve první případ. Pak ale v první rovnici zbývá $-m'_m(\omega_{pm} - x^p\omega_{1p}/2)$ a chceme-li stále udržet nenulovou (alespoň) ω_{1p}, musí být $m'_m = 0$. Použijeme-li tento výsledek ve třetí rovnici, zjišťujeme, že pokud chceme ω_{1p} nenulovou, musí být i $m'_2 = 0$, tj. měli bychom nulová pole.

Vraťme se tedy na začátek a volme $\omega_{1p} = 0$. Nejprve si rovnice zjednodušme informací o existenci IP spojeného s kombinací ω_{1m} a a^p, odečtěme ho tak, že předpokládáme ω_{1m} nulovou a a^p se změní na nějaké $\tilde{a}^p$. Podívejme se, co pak zbývá z první rovnice: rozhodně se v ní vyskytuje samostatné $(x^p)^2$ (míněno mimo funkce) ale žádné x^1, to tedy znamená, že jeho koeficient, $\omega_{pm}m''_m$ musí být nulový. Volíme-li $\omega_{pm} = 0$, pak také $\tilde{a}^p$ musí být nula ze stejné rovnice (koeficient x^p). V rovnici pak zbývá jen $a^1 m''_2$, ale jelikož při vynulování a^1 nezbývá žádný potenciální IP, musíme volit $m''_2 = 0$. Ve třetí rovnici je ale koeficient a^1 daný m''_m, i ta tak musí být nulová. Konečně ve druhé rovnici nám s těmito výsledky zbývá pouze m'_m, i tu tedy musíme vynulovat. Tím jsou rovnice splněny, získali jsme ale jen speciální případ (4.35).

Ještě jsme ale neprozkoumali možnost $\omega_{1p} = m''_m = 0$: ve třetí rovnici pak zbývá $-(\omega_{1p}x^p + \tilde{a}^p)m'_m = 0$, volba nulové m'_m by nás opět dostala ke speciálnímu případu (4.35). Tedy volme $\omega_{pm} = \tilde{a}^p = 0$ a zajímá nás tedy opět jen koeficient a^1. První rovnice je nyní splněna automaticky. Ve druhé rovnici je koeficient a^1 tvaru $m''_2/2 - m'_m$ a požadavek na jeho nulovost již určuje i m'_2. Získali jsme systém s dodatečným nezávislým IP uvedený níže:

$$\begin{gathered} F_{1m} = K, \quad F_{pm} = -Kx^p/2, \quad F_{p1} = K(x^p)^2/4 : \\ Q_3 = p_1 + K(x^1 x^p - x^m - (x^p)^3/6). \end{gathered} \tag{4.54}$$

Ještě se podívejme na limitu: v té nakonec získáváme

$$E_1 = \frac{kt^2}{4},\ E_2 = B = 0, \tag{4.55}$$

kde $K = k/c^3$, což je minimální zásah, který lze udělat pro konečnost limity. Pro studium IP je opět třeba pozměnit kalibraci. I tento systém má v limitě o jeden nezávislý lineární IP více než v relativistickém případě.

4.3 Třídy integrabilních systémů ve 3+1

V této sekci klasifikujeme v prvním řádu superintegrabilní systémy ve 4D (resp. 3+1) Minkowském. Celý postup bude zcela analogický předchozí sekci, s výjimkou hledání případů s IP navíc. Řešení rovnic zachování a involuce u jednotlivých typů je taktéž prakticky stejné, jako v jejich 3D analogii. Nebudeme ho tedy více rozebírat. Jelikož rovnice involuce jsou nyní tři, vyhrazujeme pro ně označení Iij, značící rovnici involuce i-tého a j-tého požadovaného IP.

4.3.1 Podalgebra $\{P_1, P_2, P_0\}$

Požadujeme IP tvaru $Q_1 = p_1^A + m_1(x)$, $Q_2 = p_2^A + m_2(x)$, $Q_3 = p_0^A + m_0(x)$. Podmínky na zachování jsou

$$\mathrm{Z1}: \ \partial_0 m_1 - F_{01} = 0, \quad -\partial_1 m_1 = 0, \quad -\partial_2 m_1 + F_{21} = 0, \quad -\partial_3 m_1 - F_{13} = 0,$$

$$\mathrm{Z2}: \ \partial_0 m_2 - F_{02} = 0, \quad -\partial_1 m_2 - 2F_{21} = 0, \quad -\partial_2 m_2 = 0, \quad -\partial_3 m_2 + F_{32} = 0,$$

$$\mathrm{Z3}: \ \partial_0 m_0 = 0, \quad -\partial_1 m_0 - F_{01} = 0, \quad -\partial_2 m_0 - F_{02} = 0, \quad -\partial_3 m_3 - F_{03} = 0. \tag{4.56}$$

A podmínky na involuci

$$\mathrm{I12}: \ \partial_2 m_1 - \partial_1 m_2 - F_{21} = 0, \quad \mathrm{I13}: \ -\partial_1 m_0 + \partial_0 m_1 - F_{01} = 0,$$

$$\mathrm{I23}: \ -\partial_2 m_0 + \partial_0 m_2 - F_{02} = 0. \tag{4.57}$$

Tento soubor lze vyřešit jako

$$m_1 = m_1(x^3), \quad m_2 = m_2(x^3), \quad m_0 = m_0(x^3),$$

$$F_{01} = F_{02} = F_{21} = 0, \quad F_{03} = -m_0'(x^3), \quad F_{13} = -m_1'(x^3), \quad F_{32} = m_2'(x^3). \tag{4.58}$$

Nejefektivnější kalibrace pro zjednodušení IP (analogicky 3D systémům):

$$A_1 = m_1(x^3), \quad A_2 = m_2(x^3), \quad A_3 = 0, \quad A_0 = m_0(x^3) \quad \Leftrightarrow \quad Q = \{p_1, \, p_2, \, p_0\}. \tag{4.59}$$

Nerelativistická limita ponechává systém tak, jak je, IP přejdou na $q = \{p_1, p_2, h\}$.

4.3.2 Podalgebra $\{P_1, P_2, P_3\}$

Při požadování $Q_1 = p_1^A + m_1(x), Q_2 = p_2^A + m_2(x), Q_3 = p_3^A + m_3(x)$ jsou rovnice zachování:

$$\mathrm{Z1}: \ \partial_0 m_1 - F_{01} = 0, \quad -\partial_1 m_1 = 0, \quad -\partial_2 m_1 + F_{21} = 0, \quad -\partial_3 m_1 - F_{13} = 0,$$

$$\mathrm{Z2}: \ \partial_0 m_2 - F_{02} = 0, \quad -\partial_1 m_2 - 2F_{21} = 0, \quad -\partial_2 m_2 = 0, \quad -\partial_3 m_2 + F_{32} = 0,$$

$$\mathrm{Z3}: \ \partial_0 m_3 - F_{03} = 0, \quad -\partial_1 m_3 + 2F_{13} = 0, \quad -\partial_2 m_3 - F_{32} = 0, \quad -\partial_3 m_3 = 0 \tag{4.60}$$

a involuce:

$$\mathrm{I}12:\ \partial_2 m_1 - \partial_1 m_2 - F_{21} = 0, \quad \mathrm{I}13:\ \partial_3 m_1 - \partial_1 m_3 + F_{13} = 0,$$
$$\mathrm{I}23:\ \partial_3 m_2 - \partial_2 m_3 - F_{32} = 0. \tag{4.61}$$

Řešením je

$$m_1(x^0), \quad m_2(x^0), \quad m_3(x^0), \tag{4.62}$$
$$F_{21} = F_{13} = F_{32} = 0, \quad F_{01} = m_1'(x^0), \quad F_{02} = m_2'(x^0), \quad F_{03} = m_3'(x^0)$$

a vhodná kalibrace je

$$A_0 = 0, \quad A_1 = m_1(x^0), \quad A_2 = m_2(x^0), \quad A_3 = m_3(x^0) \quad \Leftrightarrow \quad Q = \{p_1,\ p_2,\ p_3\}. \tag{4.63}$$

V limitě, pokud uvažujeme přítomné funkce jako funkce t jsou systém i IP shodné.

4.3.3 Podalgebra $\{L_3, P_0, P_3\}$

Předpokládáme $Q_1 = p_0^A + m_0(x)$, $Q_2 = p_3^A + m_3(x)$, $Q_3 = x^1 p_2^A - x^2 p_1^A + m_{12}(x)$, rovnice zachování budou

$$\mathrm{Z}1:\ \partial_0 m_0 = 0, \quad -\partial_1 m_0 - F_{01} = 0, \quad -\partial_2 m_0 - F_{02} = 0, \quad -\partial_3 m_0 - F_{03} = 0,$$
$$\mathrm{Z}2:\ \partial_0 m_3 - F_{03} = 0, \quad -\partial_1 m_3 + 2F_{13} = 0, \quad -\partial_2 m_3 - F_{32} = 0, \quad -\partial_3 m_3 = 0,$$
$$\mathrm{Z}3:\ \partial_1 m_{12} + x^1 F_{21} = 0, \quad \partial_2 m_{12} + x^2 F_{21} = 0,$$
$$\partial_3 m_{12} - F_{13} x^2 - F_{32} x^1 = 0, \quad \partial_0 m_{12} - F_{01} x^2 + F_{02} x^1 = 0. \tag{4.64}$$

Involuční rovnice:

$$\mathrm{I}12:\ \partial_3 m_0 - \partial_0 m_3 + F_{03} = 0, \quad \mathrm{I}13:\ x^1(\partial_2 m_0 + F_{02}) - x^2(\partial_1 m_0 + F_{01}) - \partial_0 m_{12} = 0,$$
$$\mathrm{I}23:\ x^1(\partial_2 m_3 + F_{32}) + x^2(\partial_1 m_3 + F_{13}) - \partial_3 m_{12} = 0. \tag{4.65}$$

Řešením je

$$m_0 = m_0((x^1)^2 + (x^2)^2), \quad m_{12} = m_{12}((x^1)^2 + (x^2)^2), \quad m_3 = m_3((x^1)^2 + (x^2)^2),$$
$$F_{13} = 2m_3'((x^1)^2 + (x^2)^2)x^1, \quad F_{21} = -2m_{12}'((x^1)^2 + (x^2)^2), \quad F_{32} = -2m_3'((x^1)^2 + (x^2)^2)x^2,$$
$$F_{01} = -2m_0'((x^1)^2 + (x^2)^2)x^1, \quad F_{02} = -2m_0'((x^1)^2 + (x^2)^2)x^2, \quad F_{03} = 0. \tag{4.66}$$

Vhodná kalibrace je

$$A_3 = m_3((x^1)^2 + (x^2)^2), \quad A_0 = m_0((x^1)^2 + (x^2)^2), \quad A_1 = -\frac{x^2 m_{12}((x^1)^2 + (x^2)^2)}{(x^1)^2 + (x^2)^2},$$
$$A_2 = \frac{x^1 m_{12}((x^1)^2 + (x^2)^2)}{(x^1)^2 + (x^2)^2} \quad \Leftrightarrow \quad Q = \{p_0,\ p_3,\ x^1 p_2 - x^2 p_1\}. \tag{4.67}$$

Limita je přímá, systém zůstává shodný, IP přecházejí na $q = \{h,\ p_3,\ x^1 p_2 - x^2 p_1\}$.

4.3.4 Podalgebra $\{K_3, P_1, P_2\}$

Požadujeme $Q_1 = p_1^A + m_1(x)$, $Q_2 = p_2^A + m_2(x)$, $Q_3 = p_3^A x^0 + p_0^A x^3 + m_{30}(x)$. Ty se zachovávají za podmínek

$$\mathrm{Z1}: \ \partial_0 m_1 - F_{01} = 0, \quad -\partial_1 m_1 = 0, \quad -\partial_2 m_1 + F_{21} = 0, \quad -\partial_3 m_1 - F_{13} = 0,$$

$$\mathrm{Z2}: \ \partial_0 m_2 - F_{02} = 0, \quad -\partial_1 m_2 - 2F_{21} = 0, \quad -\partial_2 m_2 = 0, \quad -\partial_3 m_2 + F_{32} = 0,$$

$$\mathrm{Z3}: \ \partial_1 m_{30} - F_{13}x^0 + F_{01}x^3 = 0, \quad \partial_2 m_{30} + F_{32}x^0 + F_{02}x^3 = 0,$$

$$\partial_0 m_{30} - x^0 F_{03} = 0, \quad \partial_3 m_{30} + x^3 F_{03} = 0 \tag{4.68}$$

a jsou v involuci za podmínek

$$\mathrm{I12}: \ \partial_2 m_1 - \partial_1 m_2 - F_{21} = 0, \quad \mathrm{I13}: \ x^0(\partial_3 m_1 + F_{13}) + x^3(\partial_0 m_1 - F_{01}) - \partial_1 m_{30} = 0,$$

$$\mathrm{I23}: \ x^0(\partial_3 m_2 - F_{32}) + x^3(\partial_0 m_2 - F_{02}) - \partial_2 m_{30} = 0. \tag{4.69}$$

To lze vyřešit jako

$$m_1 = m_1((x^3)^2 - (x^0)^2), \quad m_2 = m_2((x^3)^2 - (x^0)^2), \quad m_{30} = m_{30}((x^3)^2 - (x^0)^2),$$

$$F_{01} = -2m_1'((x^3)^2 - (x^0)^2)x^0, \quad F_{02} = -2m_2'((x^3)^2 - (x^0)^2)x^0, \quad F_{03} = -2m_{30}'((x^3)^2 - (x^0)^2),$$

$$F_{21} = 0, \quad F_{13} = -2m_1'((x^3)^2 - (x^0)^2)x^3, \quad F_{32} = 2m_2'((x^3)^2 - (x^0)^2)x^3. \tag{4.70}$$

Vhodná kalibrace je

$$A_1 = m_1((x^3)^2 - (x^0)^2), \quad A_2 = m_2((x^3)^2 - (x^0)^2), \quad A_0 = \frac{x^3 m_{30}((x^3)^2 - (x^0)^2)}{(x^3)^2 - (x^0)^2},$$

$$A_3 = -\frac{x^0 m_{30}((x^3)^2 - (x^0)^2)}{(x^3)^2 - (x^0)^2} \quad \Leftrightarrow \quad Q = \{p_1, \ p_2, \ p_3 x^0 + p_0 x^3\}. \tag{4.71}$$

Limitu obecně, podobně jako 3D analogii rozepisovat nebudeme, provádíme ji jen u konkrétních systémů (s dodatečnými IP).

4.3.5 Podalgebra $\{P_0 - P_3, P_1, P_2\}$

Tuto a následující třídy je výhodnější počítat v souřadnicích světelného kužele (a při 3+1 dělení používat frontální formu). Požadujeme $Q_1 = p_1^A + m_1(x)$, $Q_2 = p_2^A + m_2(x)$ a $Q_3 = p_m^A + m_m(x)$. Rovnice pro zachování jsou

$$\mathrm{Z1}: \ \partial_m m_1 + F_{1m} = 0, \quad \partial_p m_1 - F_{p1} = 0, \quad \partial_1 m_1 = 0, \quad -\partial_2 m_1 + F_{21} = 0,$$

$$\mathrm{Z2}: \ \partial_m m_2 - F_{m2} = 0, \quad \partial_p m_2 - F_{p2} = 0, \quad -\partial_1 m_2 - F_{21} = 0, \quad \partial_2 m_2 = 0,$$

$$\mathrm{Z3}: \ \partial_m m_m = 0, \quad \partial_p m_m - F_{pm} = 0, \quad -\partial_1 m_m + F_{1m} = 0, \quad -\partial_2 m_m - F_{m2} = 0. \tag{4.72}$$

Rovnice involuce mají tvar

$$\mathrm{I}12: \ \partial_2 m_1 - \partial_1 m_2 - F_{21} = 0, \quad \mathrm{I}23: \ \partial_m m_1 - \partial_1 m_m + F_{1m} = 0,$$

$$\mathrm{I}23: \ \partial_m m_2 - \partial_2 m_m - F_{m2} = 0 \tag{4.73}$$

a celkové řešení je

$$m_1 = m_1(x^p), \quad m_2 = m_2(x^p), \quad m_m = m_m(x^p),$$

$$F_{1m} = F_{m2} = F_{21} = 0, \quad F_{p1} = m_1'(x^p), \quad F_{p2} = m_2'(x^p), \quad F_{pm} = m_m'(x^p). \tag{4.74}$$

S vhodnou kalibrací zjednodušíme IP:

$$A_p = 0, \quad A_m = m_m(x^p), \quad A_1 = m_1(x^p), \quad A_2 = m_2(x^p) \quad \Leftrightarrow \quad Q = \{p_1, p_2, p_m\}. \tag{4.75}$$

4.3.6 Podalgebra $\{L_2 + K_1, P_0 - P_3, P_2\}$

Požadujeme $Q_1 = p_m^A + m_m(x)$, $Q_2 = p_2^A + m_2(x)$ a $Q_3 = x^p p_1^A + 2x^1 p_m^A + m_{1m}(x)$. Rovnice zachování jsou

$$\mathrm{Z}1: \ \partial_m m_m = 0, \quad \partial_p m_m - F_{pm} = 0, \quad -\partial_1 m_m + F_{1m} = 0, \quad -\partial_2 m_m - F_{m2} = 0,$$

$$\mathrm{Z}2: \ \partial_m m_2 - F_{m2} = 0, \quad \partial_p m_2 - F_{p2} = 0, \quad -\partial_1 m_2 - F_{21} = 0, \quad \partial_2 m_2 = 0,$$

$$\mathrm{Z}3: \ \partial_m m_{1m} + x^p F_{1m} = 0, \quad \partial_p m_{1m} - 2x^1 F_{pm} - x^p F_{p1} = 0,$$

$$\partial_1 m_{1m} - 2x^1 F_{1m} = 0, \quad -\partial_2 m_{1m} + x^p F_{21} - 2x^1 F_{m2} = 0. \tag{4.76}$$

Rovnice involuce mají tvar

$$\mathrm{I}12: \ \partial_2 m_m - \partial_m m_2 + F_{m2} = 0, \quad \mathrm{I}13: \ x^p(\partial_1 m_m - F_{1m}) + 2x^1 \partial_m m_m - \partial_m m_{1m} = 0,$$

$$\mathrm{I}23: \ x^p(\partial_1 m_2 + F_{21}) + 2x^1(\partial_m m_2 - F_{m2}) - \partial_2 m_{1m} = 0, \tag{4.77}$$

což dává celkové řešení

$$m_m = m_m(x^p), \quad m_2 = m_2(x^p), \quad m_{1m} = m_{1m}(x^p), \quad F_{21} = F_{1m} = F_{m2} = 0,$$

$$F_{pm} = m_m'(x^p), \quad F_{p2} = m_2'(x^p), \quad F_{p1} = \frac{m_{1m}'(x^p) - 2x^1 m_m'(x^p)}{x^p}. \tag{4.78}$$

IP lze zjednodušit kalibrací

$$A_m = m_m(x^p), \quad A_2 = m_2(x^p), \quad A_1 = \frac{m_{1m}(x^p) - 2x^1 m_m(x^p)}{x^p},$$

$$A_p = \frac{x^1(x^1 m_m(x^p) - m_{1m}(x^p))}{(x^p)^2} \quad \Leftrightarrow \quad Q = \{p_m, \ p_2, \ x^p p_1 + 2x^1 p_m\}. \tag{4.79}$$

4.3.7 Podalgebra $\{L_2 + K_1 - \frac{1}{2}(P_0 + P_3), P_0 - P_3, P_2\}$

Požadujeme IP $Q_1 = p_m^A + m_m(x)$, $Q_2 = p_2^A + m_2(x)$, $Q_3 = x^p p_1^A + 2x^1 p_m^A - p_p^A + m_3(x)$. (Značení poslední funkce m_3 se odvíjí pouze od pozice požadovaného IP ve výčtu, neboť příslušný prvek algebry nemá ustálené označení.) Rovnice zachování:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{Z1}: \ \partial_m m_m = 0, \quad \partial_p m_m - F_{pm} = 0, \quad -\partial_1 m_m + F_{1m} = 0, \quad -\partial_2 m_m - F_{m2} = 0, \\
\mathrm{Z2}: \ \partial_m m_2 - F_{m2} = 0, \quad \partial_p m_2 - F_{p2} = 0, \quad -\partial_1 m_2 - F_{21} = 0, \quad \partial_2 m_2 = 0, \\
\mathrm{Z3}: \ \partial_m m_3 + x^p F_{1m} - F_{pm} = 0, \quad \partial_p m_3 - 2x^1 F_{pm} - x^p F_{p1} = 0, \\
-\partial_1 m_3 - 2x^1 F_{m1} + F_{p1} = 0, \quad -\partial_2 m_3 + x^p F_{21} - 2x^1 F_{m2} + F_{p2} = 0. \qquad (4.80)
\end{gathered}
$$

Rovnice involuce:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{I12}: \partial_2 m_m - \partial_m m_2 + F_{m2} = 0, \quad \mathrm{I13}: x^p(\partial_1 m_m - F_{1m}) + 2x^1 \partial_m m_m - \partial_m m_3 - \partial_p m_m + F_{pm} = 0, \\
\mathrm{I23}: \ x^p(\partial_1 m_2 + F_{21}) + 2x^1(\partial_m m_2 - F_{m2}) - \partial_2 m_3 - \partial_p m_2 + F_{p2} = 0. \qquad (4.81)
\end{gathered}
$$

Rovnice lze vyřešit jako

$$
\begin{gathered}
m_m = m_m\left(x^1 + (x^p)^2/2\right), \quad m_2 = m_2\left(x^1 + (x^p)^2/2\right), \quad m_3 = m_3\left(x^1 + (x^p)^2/2\right), \\
F_{21} = -m_2'(x^1 + (x^p)^2/2), \quad F_{1m} = m_m'(x^1 + (x^p)^2/2), \quad F_{m2} = 0, \quad F_{pm} = x^p m_m'(x^1 + (x^p)^2/2), \\
F_{p1} = -2x^1 m_m'(x^1 + (x^p)^2/2) + m_3'(x^1 + (x^p)^2/2), \quad F_{p2} = x^p m_2'(x^1 + (x^p)^2/2). \qquad (4.82)
\end{gathered}
$$

Výhodnou kalibrací je

$$
\begin{gathered}
A_p = 2(x^1 + (x^p)^2) m_m(x^1 + (x^p)^2/2) - m_3(x^1 + (x^p)^2/2), \quad A_1 = 2x^p m_m(x^1 + (x^p)^2/2), \\
A_m = m_m(x^1 + (x^p)^2/2), \quad A_2 = m_2(x^1 + (x^p)^2/2) \\
\Leftrightarrow \quad Q = \{p_m, \ p_1, \ x^p p_1 + 2x^1 p_m - p_p\}. \qquad (4.83)
\end{gathered}
$$

4.3.8 Podalgebra $\{L_2 + K_1, L_1 - K_2, P_0 - P_3\}$

Požadujeme $Q_1 = x^p p_1^A + 2x^1 p_m^A + m_{1m}(x)$, $Q_2 = x^p p_2^A + 2x^2 p_m^A + m_{2m}(x)$ a $Q_3 = p_m^A + m_m(x)$. Zachování:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{Z1}: \ \partial_m m_{1m} + x^p F_{1m} = 0, \quad \partial_p m_{1m} - 2x^1 F_{pm} - x^p F_{p1} = 0, \quad \partial_1 m_{1m} - 2x^1 F_{1m} = 0, \\
-\partial_2 m_{1m} + x^p F_{21} - 2x^1 F_{m2} = 0, \\
\mathrm{Z2}: \ \partial_m m_{2m} - x^p F_{m2} = 0 \quad \partial_p m_{2m} - 2x^2 F_{pm} - x^p F_{p2} = 0, \quad \partial_1 m_{2m} + x^p F_{21} - 2x^2 F_{1m} = 0, \\
\partial_2 m_{2m} + 2x^2 F_{m2} = 0, \\
\mathrm{Z3}: \ \partial_m m_m = 0, \quad \partial_p m_m - F_{pm} = 0, \quad -\partial_1 m_m + F_{1m} = 0, \quad -\partial_2 m_m - F_{m2} = 0. \qquad (4.84)
\end{gathered}
$$

Involuce:

$$\mathrm{I12}:\ 2x^1x^pF_{m2}+2x^2x^pF_{1m}-(x^p)^2F_{21}+x^p\partial_2m_{1m}+2x^2\partial_mm_{1m}-x^p\partial_1m_{2m}-2x^1\partial_mm_{2m}=0,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{I13}:&\ x^p(\partial_1m_m-F_{1m})+2x^1\partial_mm_m-\partial_mm_{1m}=0,\\ \mathrm{I23}:&\ x^p(\partial_2m_m+F_{m2})+2x^2\partial_mm_m-\partial_mm_{2m}=0.\end{aligned}\tag{4.85}$$

Řešením je

$$m_m=m_m(x^p),\quad m_{1m}=m_{1m}(x^p),\quad m_{2m}=m_{2m}(x^p),\quad F_{21}=F_{1m}=F_{m2}=0,$$

$$F_{pm}=m_m'(x^p),\quad F_{p1}=\frac{m_{1m}'(x^p)-2x^1m_m'(x^p)}{x^p},\quad F_{p2}=\frac{m_{2m}'(x^p)-2x^2m_m'(x^p)}{x^p}.\tag{4.86}$$

Vhodná kalibrace je

$$A_m=m_m(x^p),\quad A_1=\frac{m_{1m}(x^p)-2x^1m_m(x^p)}{x^p},\quad A_2=\frac{m_{2m}(x^p)-2x^2m_m(x^p)}{x^p},$$

$$\begin{aligned}A_p&=\frac{((x^1)^2+(x^2)^2)m_m(x^p)-(x^1+x^2)m_{1m}(x^p)}{(x^p)^2}\\ &\Leftrightarrow Q=\{x^pp_1+2x^1p_m,\ x^pp_2+2x^2p_m,\ p_m\}.\end{aligned}\tag{4.87}$$

4.3.9 Podalgebra $\{L_2+K_1, L_1-K_2+P_2, P_0-P_3\}$

V poslední třídě požadujeme IP tvaru $Q_1=p_m^A+m_m(x)$, $Q_2=x^pp_1^A+2x^1p_m^A+m_{1m}(x)$ a $Q_3=-(x^pp_2^A+2x^2p_m^A)+p_2^A+m_3(x)$. (Značení funkce m_3 opět pouze z pozice IP ve výčtu, příslušný prvek algebry nemá zavedené označení.) Rovnice zachování:

$$\mathrm{Z1}:\ \partial_mm_m=0,\quad \partial_pm_m-F_{pm}=0,\quad -\partial_1m_m+F_{1m}=0,\quad -\partial_2m_m-F_{m2}=0,$$

$$\mathrm{Z2}:\ \partial_mm_{1m}+x^pF_{1m}=0,\quad \partial_pm_{1m}-2x^1F_{pm}-x^pF_{p1}=0,\quad \partial_1m_{1m}-2x^1F_{1m}=0,$$
$$-\partial_2m_{1m}+x^pF_{21}-2x^1F_{m2}=0,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Z3}:&\ \partial_mm_3+(x^p-1)F_{m2}=0,\quad \partial_pm_3+(x^p-1)F_{p2}+2x^2F_{pm}=0,\\ &-\partial_1m_3+(x^p-1)F_{21}-2x^2F_{1m}=0,\quad -\partial_2m_3+2x^2F_{m2}=0.\end{aligned}\tag{4.88}$$

Involuce:

$$\begin{aligned}\mathrm{I12}:&\ x^p(\partial_1m_m-F_{1m})+2x^1\partial_mm_m-\partial_mm_{1m}=0,\\ \mathrm{I13}:&\ -(x^p-1)F_{m2}-2x^2\partial_mm_m-x^p\partial_2m_m+\partial_2m_m-\partial_mm_3=0,\\ \mathrm{I23}:&\ -2x^2(x^pF_{1m}+\partial_mm_{1m})-x^p\partial_1m_3-2x^1\partial_mm_3+\\ &+(x^p-1)(x^pF_{21}-2x^1F_{m2}-\partial_2m_{1m})=0.\end{aligned}\tag{4.89}$$

Řešením je

$$m_m=m_m(x^p),\quad m_{1m}=m_{1m}(x^p),\quad m_3=m_3(x^p),\quad F_{21}=F_{1m}=F_{m2}=0,$$

$$F_{pm} = m'_m(x^p), \quad F_{p1} = \frac{m'_{1m}(x^p) - 2x^1 m'_m(x^p)}{x^p}, \quad F_{p2} = \frac{m'_3(x^p) + 2x^2 m'_m(x^p)}{1 - x^p}. \tag{4.90}$$

Vhodná kalibrace:

$$A_m = m_m(x^p), \quad A_1 = \frac{m_{1m}(x^p) - 2x^1 m_m(x^p)}{x^p}, \quad A_2 = \frac{m_3(x^p) + 2x^2 m_m(x^p)}{1 - x^p},$$

$$\begin{aligned} A_p &= \frac{x^2(x^2 m_m(x^p) + m_3(x^p))}{(x^p - 1)^2} + \frac{x^1(x^1 m_m(x^p) - m_{1m}(x^p))}{(x^p)^2} \\ &\Leftrightarrow Q = \{p_m,\ x^p p_1 + 2x^1 p_m,\ -(x^p p_2 + 2x^2 p_m) + p_2\}. \end{aligned} \tag{4.91}$$

Tímto jsme dokončili klasifikaci tříd systémů integrabilních v prvním řádu ve 2 a 3 prostorových rozměrech. Ve 2 prostorových rozměrech též klasifikaci jejich případů s dodatečnými lineárními IP a analýzu těchto případů (tato by ve 3 prostorových rozměrech byla komplikovanější ale zcela analogická). Nyní budeme pokračovat systémy integrabilními ve druhém řádu.

Kapitola 5

Integrabilita druhého řádu

Zadání práce ukládá provést částečnou či úplnou klasifikaci systémů integrabilních ve druhém řádu ve dvou prostorových rozměrech. V Kapitole 3 jsme zjistili, že nejvyšší mocniny v hybnostech IP druhého řádu obecně odpovídají lineárním kombinacím součinů dvojic prvků Poincarého algebry. Říci něco pro klasifikaci směrodatného o nižších mocninách je již ale poměrně obtížné. Podívejme se proto nejprve krátce, jaké jsou klasické metody a výsledky v oblasti klasifikace integrabilních systémů druhého řádu.

Důležitými systémy integrabilními ve druhém řádu jsou jistě ty, které jsou integrabilní díky separabilitě Hamilton-Jacobiho rovnice. V Kapitole 1 jsme zmínili, že tyto mají některé IP prvního a některé druhého (někdy pouze prvního) řádu a že je (teoreticky) umíme nalézt algebraicky. Existuje několik článků, které pro tyto systémy hledají speciální superintegrabilní případy (např. [26, 28] pro systémy separabilní v kartézských souřadnicích).

Tyto systémy však nejsou jedinými integrabilními ve druhém řádu. To ukazuje např. článek [29], zde se hledají neekvivalentní komutativní dvojice kvadratických elementů 3D Eukleidovy algebry (tj. nejvyšší mocniny potenciálních IP druhého řádu). Ukazuje se, že je jich více, než dvojic odpovídajících IP separabilních systémů. Explicitně se tam též konstruuje příklad systému, který takovéto IP má. Článek se však obecně nezabývá tím, co se děje v nižších mocninách a konstrukcí systémů zachovávající příslušné IP. (To může být značně náročné - separabilní systémy jsou v příslušných souřadnicích obvykle poměrně jednoduché, u neseparabilních ale apriori nevíme, jaké souřadnice použít, ani nemáme žádný zjednodušený tvar, který bychom mohli předpokládat.)

Analogickým způsobem by bylo možné postupovat i zde, tj. hledali bychom neekvivalentní komutativní dvojice kvadratických elementů 3D Poincarého algebry, čímž bychom vytvořili klasifikaci nejvyšších mocnin hybnosti potenciálních IP zaručujících integrabilitu druhého řádu. Ze zmíněných důvodů by však patrně bylo v rámci práce nezvládnutelné nalézt všechny příslušné systémy a vypořádat se s klasifikací nižších mocnin. Rozhodli jsme se proto provést pouze částečnou klasifikaci systémů integrabilních ve druhém řádu, totiž právě klasifikaci ortogonálních separarabilních systémů, i když je pravděpodobné že, podobně jako v klasickém případě, takto nezískáme kompletní výčet integrabilních systémů ve druhém řádu.

5.1 Separabilní systémy ve 2+1

Pokusme se aplikovat metodu hledání separabilních systémů. Ty, jak víme z Kapitoly 1, jsou automaticky integrabilní a to buď v prvním řádu, nebo právě ve druhém, kdy jeden IP je prvního řádu a druhý druhého. V článku [14] nalezneme přehled neekvivalentních ortogonálních metrik na 3D Minkowského prostoročase. Je jich 58, lze je však rozdělit do 12 rodin a ukazuje se, že většinou stačí na zjištění separabilních potenciálů uvažovat celou rodinou najednou. V následujícím přehledu tedy budeme pracovat hlavně s nimi, až v případě nalezení separabilních potenciálů s konkrétními metrikami. Zapisovat je budeme v souladu s článkem pomocí souřadnic u, v, w, kde u odpovídá časové souřadnici. Ještě uveďme, že existují alternativní metody systematického studia separability na pseudoriemannovských varietách (např. [31]), nezdá se, že by přinesly nové možnosti pro naše studium. Zde se tedy budeme držet článku [14].

Naše metoda tedy bude následující: tam, kde je to efektivně možné shrneme celou rodinu do jednoho popisu (obsahující zatím blíže nespecifikované funkce), který splňují všechny metriky v ní, např. $ds^2 = du^2 - (f(v) + g(w))(dv^2 + dw^2)$. Neznamená to však, že je tato metrika plochá pro libovolná $f(v)$, $g(w)$, pouze pracujeme s obecným tvarem, dokud je to možné. V tomto obecném tvaru metriky nalezneme separabilní potenciály dle vzorce (1.7), případně L-C podmínky (1.5) a k nim IP povstávající se separability HJR.

Pokud separabilní potenciál s IP druhého řádu v dané rodině najdeme, uvedeme konkrétní tvary metrik a jejich převod do pseudokartézských souřadnic. Konečně, pro nalezené v druhém řádu integrabilní systémy se pokusíme najít speciální případy s dalším(i) IP navíc a to opět pomocí předpokladu, že tento IP navíc je prvního řádu. Pro tyto nalezené speciální případy uděláme nerelativistickou limitu a další charakteristiky, které budeme moci získat.

5.1.1 Rodina F1

První rodina obsahuje dvě metriky, které rozebereme postupně. První jsou běžné pseudokartézské souřadnice

$$(F11): \; ds^2 = du^2 - dv^2 - dw^2. \tag{5.1}$$

Probereme postupně možnosti rozdělení souřadnic na třídy dle (1.6) : **1/** $a = u$, $\alpha = v, w$, pak dle (1.7) máme

$$A^u = 0, \quad A^v(u), \quad A^w(u). \tag{5.2}$$

To znamená, že kvadrát potenciálu viditelně splňuje i požadavek (1.7), tj. $A_\mu A^\mu \stackrel{!}{=} M(u)$ (kde $M(u)$ je libovolné). IP v tomto případě jsou ale zjevně prvního řádu: $Q = \{p_v, \, p_w\}$, což pro nás nyní není důležité. Zcela analogicky dopadá situace $a = v$, $\alpha = u, w$ a $a = w$,

$\alpha = u, v$.

2/ Další možnost jsou dvě souřadnice druhé třídy: $a = u, v$, $\alpha = w$, pak (1.7) požaduje

$$A^u = A^v = 0, \quad A^w = -m(u) + n(v)$$

$$\wedge \quad A^w A_w = m^2(u) - 2m(u)n(v) + n^2(v) \stackrel{!}{=} -M(u) + N(v), \tag{5.3}$$

kde v posledním řádku na levé straně $\stackrel{!}{=}$ je $A^\mu A_\mu$ explicitně rozepsané tak, jak vychází z předpisů v prvním řádku a na pravé straně je to, co poslední vztah podmínky (1.7) požaduje o tvaru tohoto součinu. Funkce figurující v podmínce (1.7) jsou zde pro větší přehlednost přejmenovány. Stejně budeme podmínku (1.7) vyjadřovat i dále. Nyní ale, jak lze podmínku splnit: to je možné jen pokud $m(u) = 0$, $n(v)$ libovolná, nebo naopak. Tím jsme ale získali jen speciální případ první možnosti. Při permutaci souřadnic dostaneme opět analogickou situaci.

Druhá metrika rodiny má tvar

$$(F12): \; ds^2 = du^2 - u^2 dv^2 - dw^2, \tag{5.4}$$

kde je opět více možností. **1/** $a = u$, $\alpha = v, w$, pak

$$A^u = 0, \quad A^v(u), \quad A^w(u) \tag{5.5}$$

opět automaticky splňuje podmínku $A_\mu A^\mu \stackrel{!}{=} -M(u)$. IP jsou ale opět viditelně prvního řádu - $Q = \{p_v, \, p_w\}$.

2/ Pro $a = u, v$, $\alpha = w$ je

$$A^u = A^v = 0, \quad A^w = m(u) - n(v)/u^2$$

$$\wedge \quad A_w A^w = -(m^2(u) - 2m(u)n(v)/u^2 + n^2(v)/u^4) \stackrel{!}{=} M(u) - N(v)/u^2. \tag{5.6}$$

To lze splnit s $n(v) = 0$ a libovolnou $m(u)$. To je ale jen speciální případ předchozího. Pro $a = u, w, \alpha = v$ dostaneme opět jen speciální případ, totiž $A^v(u)$. Rodina tedy nemá separabilní systémy s IP druhého řádu. Všechny separabilní systémy této rodiny (integrabilní v prvním řádu) jsou tedy již obsaženy v Kapitole 4.

5.1.2 Rodina F2

Druhá rodina F2 má dvě metriky. První je tvaru

$$(F21): \; ds^2 = du^2 - dv^2 - v^2 dw^2. \tag{5.7}$$

Zde tedy může být **1/**: $a = v$, $\alpha = u, w$, tedy

$$A^v = 0, \quad A^u(v), \quad A^w(v) \tag{5.8}$$

automaticky splňují podmínku $A_\mu A^\mu \overset{!}{=} F(v)$. IP jsou však prvního řádu: $Q = \{p_u,\ p_w\}$.

Druhou možností jsou dvě souřadnice druhé třídy **2/**: $a = u, v,\ \alpha = w$. Pak

$$A^u = 0 = A^v, \quad A^w = m(u) - n(v) \wedge A^w A_w = -v^2(m(u) - n(v))^2 \overset{!}{=} M(u) - N(v), \tag{5.9}$$

což splňuje $m_u = 0$, $n(v)$ libovolná. To je ale jen speciální případ předchozího. Zcela analogicky funguje druhá volba $a = w, v,\ \alpha = v$.

Druhá metrika je tvaru

$$(F22):\ ds^2 = v^2 du^2 - dv^2 - dw^2, \tag{5.10}$$

zcela obdobným postupem jako pro první ale zjistíme, že jediný separabilní potenciál je

$$A^v = 0, \quad A^u(v), \quad A^w(v), \tag{5.11}$$

který má však IP prvního řádu $Q = \{p_u,\ p_w\}$. Ani tato rodina tak nemá separabilní systémy integrabilní ve druhém řádu. Všechny nalezené separabilní systémy jsou tedy i zde některými z Kapitoly 4 (resp. jsou na ně převoditelné příslušnými transformacemi).

5.1.3 Rodina F3

Tato rodina má dvě metriky, které lze zapsat ve tvaru

$$ds^2 = du^2 - (f(v) + g(w))(dv^2 + dw^2), \tag{5.12}$$

tedy $a = v, w,\ \alpha = u$ (možnost $a = u, v, w$ je jako vždy triviální). Požadujeme tedy

$$A^v = A^w = 0, \quad A^u = -\frac{m(v) + n(w)}{f(v) + g(w)} \quad \wedge \quad A^u A_u = \frac{(m(v) + n(w))^2}{(f(v) + g(w))^2} \overset{!}{=} -\frac{M(v) + N(w)}{f(v) + g(w)}$$

$$\Leftrightarrow (m(v) + n(w))^2 = -(f(v) + g(w))(M(v) + N(w)). \tag{5.13}$$

To lze ale splnit jen pokud všechny funkce v a všechny funkce w vystupující v tomto vztahu jsou si (až na případné konstanty) rovny. To ale z A^u dělá konstantu. Tato rodina tedy nemá relevantní separabilní potenciály.

Na tomto místě je vhodná poznámka: u předchozích rodin byly rovnice (1.7) poměrně přehledné, zde (a dále) už se za takové označit spíše nedají a je tedy vhodné ověřit, že řešení, která jsme našli, jsou skutečně jediná. K tomu pomůže L-C podmínka (1.5) : řekněme pro zjednodušení pro $A^v = A^w = 0$, $A^u(v, w)$ (jak vybízí první část podmínky (1.7)). Pak jediná netriviální L-C podmínka je pro dvojici vw. Po vydělení předfaktorem dostaneme polynom lineární v p_u, koeficient první mocniny je $(f(v) + g(w))\partial_{vw}A_u + \partial_w A_u f'(v) + \partial_v A_u g'(w)$, ten chceme nulový. Po zahrnutí tohoto faktu do rovnice zbývá z koeficientu nulté mocniny $-\partial_w A_u \partial_v A_u (f(v) + g(w))$, jelikož funkce f, g jsou vždy nekonstantní, lze druhou rovnici splnit pouze pokud $A_u(v)$ či $A_u(w)$, oboje však po dosazení do první požaduje tuto závislost konstantní.

Skutečnost, že jsme zde k potvrzení/nalezení výsledku mohli elegantně použít L-C podmínku je spíše výjimka plynoucí z malého počtu dimenzí a tvarů metrik. Jak jsme již uvedli, je podmínka většinou velmi těžkopádná a nemusíme být schopni ji vyřešit. Proto i dále vždy uvedeme obě cesty.

5.1.4 Rodina F4

Čtvrtá rodina má 11 metrik tvaru

$$ds^2 = (f(u) + g(v))(du^2 - dv^2) - dw^2, \tag{5.14}$$

tedy $a = u, v$, $\alpha = w$. Podmínky na separabilní potenciál jsou:

$$A^u = A^v = 0, \quad A^w = \frac{m(u) - n(v)}{f(u) + g(v)} \quad \wedge \quad A^w A_w = -\frac{(m(u) - n(v))^2}{(f(u) + g(v))^2} \stackrel{!}{=} \frac{M(u) - N(v)}{f(u) + g(v)}$$

$$-(m(u) - n(v))^2 = (f(u) + g(v))(M(u) - N(v)), \tag{5.15}$$

tedy zcela analogické předchozí rodině. Ani tato tedy nemá netriviální separabilní potenciál. Ověření z L-C podmínky (1.5) by vypadalo zcela analogicky předchozí rodině, jen se u vymění za w.

5.1.5 Rodina F5

Tato rodina obsahuje tři metriky tvaru

$$ds^2 = du^2 - u^2(dv^2 + f(v)dw^2), \tag{5.16}$$

tedy $a = u, v$, $\alpha = w$. Podmínky říkají

$$A^u = A^v = 0, \quad A^w = m(u) - \frac{n(v)}{u^2} \quad \wedge \quad A^w A_w = u^2 f(v) \left(m(u) - \frac{n(v)}{u^2}\right)^2 \stackrel{!}{=} M(u) - \frac{N(v)}{u^2}$$

$$\Leftrightarrow u^2 f(v) \left(m^2(u) - \frac{2m(u)n(v)}{u^2} + \frac{n^2(v)}{u^4}\right) = M(u) - \frac{N(v)}{u^2}, \tag{5.17}$$

což lze splnit s $m(u) = 0$ a $n(v)$ libovolnou. To tedy v důsledku říká, že pro libovolné $A_u = A_v = 0$, $A_w(v)$ máme separabilní potenciál a tedy integrabilní systém. L-C podmínka nám tento závěr potvrdí: po úpravě v podmínce pro vu je koeficient p_v tvaru $-f(v)\partial_{uv}A_w + f'(v)\partial_u A_w$ a u nulté mocniny $f(v)\partial_u A_w \partial_v A_w$. Zcela stejné rovnice dostaneme i pokud v metrice bude místo u^2 libovolná $g(u)$.

Zkusme najít IP pro obecný tvar metriky (5.16). Jistě první z nich bude $Q_1 = p_w$, druhý (očekáváme ho druhého řádu) musíme nalézt. Již ve výzkumném úkolu [19] se ukázalo jako výhodné (a úspěšné) hledat IP druhého řádu separabilních systémů ve tvaru $Q = (p^A_\mu)^2 f^\mu(x)$, tj. vyskytují se v něm pouze druhé mocniny p^A_μ, ne smíšené členy a nižší mocniny. Vezměme tedy tento tvar a podívejme se, co nám dá rovnice nulovosti časového vývoje (1.3). Koeficientů třetích mocnin hybnosti dávají rovnice:

$$p_u^3 : \partial_u f_u = 0,\ p_u^2 p_v :\ \partial_v f_u = 0,\ p_v^2 p_u :\ 2f_u - u^3 \partial_u f_v = 0,\ p_v^3 :\ \partial_v f_v = 0,\ p_v^2 p_w :\ \partial_w f_v = 0,$$

$$p_v p_w^2 :\ f_v \partial_v f + f^v \partial_v f_w = 0,\ p_w^3 :\ \partial_w f_w = 0,\ p_w^2 p_u :\ 2f_u - u^3 f \partial_u f_w = 0,$$

$$p_w p_u^2 :\ \partial_w f_u = 0. \tag{5.18}$$

Můžeme využít, že podle těchto rovnic je f_u konstanta, můžeme ji položit jednotkovou a odečíst od hledaného IP Hamiltonián. Výsledný IP se řídí stejnými rovnicemi, jen s f_u nulovou. Pokud toto zahrneme do rovnic, zjistíme, že i f_v je konstanta, vydělíme ji a opět to zahrneme do rovnic. Ty nám teď říkají, že $f_w(v)$ a jediná netriviální rovnice je šestá. Jejím řešením je $f_w = K + 1/f(v)$. Když tento tvar dosadíme a zjednodušíme (1.3), poté z něho zbývá pouze $4p^A_w p_v K \partial_v A_w = 0$, což nutně znamená $K = 0$. Celkem tak

$$A_u = A_v = 0,\ A_w(v) : \quad Q = \{p_w,\ p_v^2 + (p^A_w)^2/f(v)\}. \tag{5.19}$$

Nyní bude vhodné vypsat konkrétní metriky a zkusit v nich nalézt případy s IP navíc, a také systémy převést do 2+1 dělení. Ukazuje se, že celou rodinu je snadné vyjádřit v 2+1 rozštěpení - díky vyjádření časové souřadnice u se totiž jedná o jednu z hyperbolických Diracových forem (2+1 analog H1). Tj. 2+1 Hamiltonián

$$H = p_u = \sqrt{1 + \frac{(p^A_v)^2}{u^2} + \frac{(p^A_w)^2}{f(v)}} + A_u. \tag{5.20}$$

Zatím ale zůstaňme ve 3D a podívejme se na konkrétní tvary metrik a jejich převody do pseudokartézských souřadnic. První metrika rodiny je

$$(F51) :\ ds^2 = du^2 - u^2(dv^2 + e^{2v} dw^2),$$

$$x^0 + x^2 = u(e^v w^2 + e^{-v}), \quad x^0 - x^2 = ue^v, \quad x^1 = uwe^v, \quad u > 0, \quad v, w \in \mathbb{R},$$

$$\frac{x^1}{x^0 - x^2} = w, \quad \sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2} = u, \quad \ln\left(\frac{x^0 - x^2}{\sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2}}\right) = v. \tag{5.21}$$

Předpokládejme systém tvaru (5.19) a hledejme případy s IP navíc. Rovnice plynoucí z požadavku Lieovy derivace jsou

$$\text{Lvu: } f(v)e^{-v}(2c_3 w - c_4)/u^2 = 0, \quad \text{Lwu: } -(-c_3 e^{-v} + e^v(c_3 w^2 - c_4 w - c_5))f(v)/u^2 = 0,$$

$$\text{Lwv: } c_3(f'(v) - 3f(v))e^{-v} + (f'(v) - f(v))(-c_3 w^2 + c_4 w + c_5)e^v + u(c_1 w + c_2))/u = 0, \tag{5.22}$$

kde c_j jsou parametry v Poincaréovském vektorovém poli převedeném do souřadnic F51 (je jich pět, šestý odpovídá právě p_w, žádné požadavky na něj tedy nejsou). První rovnice implikuje nulovost c_3, c_4, druhá též c_5. Zahrneme-li toto do třetí rovnice, vyvstává jediný možný případ s IP navíc, vycházející z c_1 a c_2, platí-li $f'(v) - f(v) = 0$. Tj. celkem

$$A_u = A_v = 0,\ A_w = Ke^v :\ Q_3 = p_v - p_w w, \tag{5.23}$$

kde uvedený IP přísluší konstantě c_2, druhý, závislý IP příslušný c_1 je $\tilde{Q} = p_v w + p_w(e^{-2v} - w^2)/2 - Ke^{-v}$. Protože žádný z IP, ani elektromagnetické pole samotné v sobě neobsahuje časovou souřadnici u, je možné vyjádřit ve 2+1 dělení i trajektorii. Ta je tvaru

$$Q_2 = (Q_1 w + Q_3)^2 + (Q_1 - Ke^v)^2 e^{-2v} \tag{5.24}$$

a je pro dvě různé volby parametrů vykreslena na Obrázcích 3 a 4 v příloze.

Též se podívejme na nerelativistickou limitu tohoto systému: převedeme ho do pseudo-kartézských souřadnic jako

$$A_0 = -\frac{x^1}{x^0 - x^2}\frac{K}{\sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2}}, \quad A_1 = \frac{K}{\sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2}},$$
$$A_2 = \frac{x^1}{x^0 - x^2}\frac{K}{\sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2}}, \tag{5.25}$$

což znamená

$$F_{01} = \frac{Kx^2}{((x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2)^{3/2}}, \quad F_{02} = -\frac{Kx^1}{((x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2)^{3/2}},$$
$$F_{12} = \frac{Kx^0}{((x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2)^{3/2}}, \tag{5.26}$$

tj. po dosazení $x^0 = ct$ a $E_i/c = F_{0i}$ vidíme, že pokud c nevystupuje v K jsou limity B, E_i nulové. Pokud ale budeme předpokládat $K = kc^2$, dostaneme vše konečné a nenulové, konkrétně

$$E_1 = \frac{k\mathrm{sgn}(t)x^2}{t^3}, \quad E_2 = -\frac{k\mathrm{sgn}(t)x^1}{t^3}, \quad B = -\frac{k\mathrm{sgn}(t)}{t^2}. \tag{5.27}$$

(Ve vyjádření jsme ponechali $\mathrm{sgn}(t)$, aby bylo vidět spojení s původním systémem. Vzhledem k singularitě v $t = 0$ by ale byly trajektorie na dvou poloosách striktně odděleny, vždy bychom pracovali jen na jedné, zde můžeme používat vyjádření bez $\mathrm{sgn}(t)$, - lze zahrnout do definice konstanty). Upozorňujeme též, že jsme museli změnit kalibraci. Proto IP v nerelativistickém případě nebudou limitami zde uvedených, ale tyto je třeba převést do nové kalibrace (uvedená má nekonečné limity). Nová klasická kalibrace může být např. $\varphi = 0,\ A_1 = -\frac{kx^2}{2t^2},\ A_2 = \frac{kx^1}{2t^2}$.

Přejděme k druhé metrice rodiny:

$$(F52):\ ds^2 = du^2 - u^2(dv^2 + \sinh^2 v dw^2),$$

$$x^0 = u\cosh v, \quad x^1 = u\sinh v\cos w, \quad x^2 = u\sinh v\sin w, \quad u,v>0, \quad 0<w<2\pi,$$
$$u = \sqrt{(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2}, \quad w = \arctan\frac{x^2}{x^1},$$
$$v = \operatorname{arcosh}\frac{x^0}{\sqrt{(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2}}. \tag{5.28}$$

Hledáme-li pro systém (5.19) speciální případy s IP prvního řádu navíc, nacházíme opět jeden případ s jedním IP navíc, po převedení do společných souřadnic se ale ukazuje, že se jedná o systém shodný s (5.23), pouze s konstantou $-K$. Nebudeme proto více rozepisovat jeho hledání a tvar. (Obecně si systémy (5.19) jednotlivých metrik rodiny rovny nejsou, ale hledáním speciálních případů jsme se zjevně dostali do jejich průniku.)

Ještě se podívejme na poslední, třetí metriku:

$$(F53): \; ds^2 = du^2 - u^2(dv^2 + \cosh^2 v dw^2),$$
$$x^0 = u\cosh v\cosh w, \quad x^1 = u\cosh v\sinh w, \quad x^2 = u\sinh v, \quad u>0, \quad v,w\in\mathbb{R},$$
$$u = \sqrt{(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2}, \quad w = \operatorname{arctanh}\frac{x^1}{x^0},$$
$$v = \operatorname{arcsinh}\frac{x^2}{\sqrt{(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2}}. \tag{5.29}$$

I zde však hledání případů s IP navíc vede pouze k systému (5.23), nebudeme ho tedy rozepisovat.

5.1.6 Rodina F6

V šesté rodině jsou tři metriky tvaru

$$ds^2 = w^2(du^2 - f(u)dv^2) - dw^2, \tag{5.30}$$

tedy $a = w, u$, $\alpha = v$, tzn.

$$A^u = A^w = 0, \quad A^v = \frac{m(u)}{w^2} - n(w) \quad \wedge \quad A^v A_v = -w^2 f(u)\left(\frac{m(u)}{w^2} - n(w)\right)^2 \overset{!}{=} \frac{M(u)}{w^2} - N(w)$$

$$\Leftrightarrow -w^2 f(u)\left(\frac{m^2(u)}{w^4} - \frac{2m(u)n(w)}{w^2} + n^2(w)\right) = \frac{M(u)}{w^2} - N(w), \tag{5.31}$$

což lze splnit pro libovolnou $m(u)$ a $n(w) = 0$. V důsledku opět libovolné $A_v(u)$ je separabilní. Ověření z L-C podmínky vypadá analogicky předchozí rodině (při záměně rolí u a w).

Analogicky předchozímu postupu lze nalézt

$$A^u = A^w = 0, \; A^v(u): \quad Q = \{p_v, \; p_u^2 - (p_v^A)^2/f(u)\}. \tag{5.32}$$

Nyní se podíváme na případy mající IP prvního řádu navíc u konkrétních metrik. První metrika rodiny je tvaru

$$(F61): \ ds^2 = w^2(du^2 - e^{2u}dv^2) - dw^2,$$

$$x^0 + x^2 = w(e^u v^2 - e^{-u}), \quad x^0 - x^2 = we^u, \quad x^1 = vwe^u, \quad w > 0, \quad v, u \in \mathbb{R},$$

$$w = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^0)^2}, \quad u = \ln\left(\frac{x^0 - x^2}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^0)^2}}\right), \quad v = \frac{x^1}{x^0 - x^2}. \tag{5.33}$$

Rovnice Lieovy derivace jsou zcela analogické předchozí rodině (5.22), pouze tam, kde tam vystupuje w, zde vystupuje v, tam kde v (5.22) vystupuje v je zde u. Konečně tam, kde v (5.22) vystupuje u zde bude w. Nakonec proto výsledkem pátrání po případech s IP navíc je jeden systém, mající dva lineární IP navíc, z níž však jen jeden je nezávislý:

$$A_u = A_w = 0, \ A_v = Ke^u : \quad Q_3 = p_u - p_v v \tag{5.34}$$

(a druhý $\tilde{Q} = p_u v - p_v(v^2 + e^{-2u})/2 + Ke^{-u}$ závislý). Podívejme se na převod a limitu:

$$A_0 = -\frac{Kx^1}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^0)^2}(x^0 - x^2)}, \quad A_1 = \frac{K}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^0)^2}},$$

$$A_2 = \frac{Kx^1}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^0)^2}(x^0 - x^2)}, \tag{5.35}$$

tedy

$$F_{01} = -\frac{Kx^2}{((x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^0)^2)^{3/2}}, \quad F_{02} = \frac{Kx^1}{((x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^0)^2)^{3/2}},$$

$$F_{21} = \frac{Kx^0}{((x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^0)^2)^{3/2}}. \tag{5.36}$$

Zde opět, pokud předpokládáme, že v K nevystupuje c, jsou pole limitně nulová. Pokud bychom je chtěli nenulová, narážíme na rozdíl od páté rodiny na problém: pokud bychom předpokládali $K = kc^2$, dostali bychom sice konečné, nenulové limity, tyto by však byly komplexní. Konkrétně $E_1 = -Ik\mathrm{csgn}(It)x^2/t^3$, $E_2 = Ik\mathrm{csgn}(It)x^1/t^3$, $B = Ik\mathrm{csgn}(It)/t^2$. Je to způsobeno tím, že v odmocnině ve jmenovateli je v limitě záporné číslo. Přes problematickou interpretaci se můžeme ptát, zda pokud povolíme imaginární konstantu (vyrušivší I ve jmenovateli), nedostaneme klasický superintegrabilní systém. Odpověď je kladná, pokud připustíme $k = \tilde{k}I$, pak dostáváme v limitě právě systém (5.23), ke kterému jsme se již vyjádřili. Je to důsledek toho, že dvojice metrik F51 a F61, dále F52 a F62 a konečně F53 a F63 se nepovažují za ekvivalentní pouze proto, že každá z dvojice pokrývá jinou část prostoročasu.

Druhá metrika v rodině je

$$(F62): \ ds^2 = w^2(du^2 - \sinh^2 u dv^2) - dw^2,$$

$$x^0 = w\sinh u\cosh v, \quad x^1 = w\sinh u\sinh v, \quad x^2 = w\cosh u, \quad u, w > 0, \quad v \in \mathbb{R},$$
$$w = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^0)^2}, \quad v = \operatorname{arctanh}\frac{x^1}{x^0},$$
$$u = \operatorname{arccosh}\frac{x^2}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^0)^2}} \tag{5.37}$$
a systém (5.32) má opět jediný případ s IP prvního řádu navíc. Po převedení do společných souřadnic se ale ukazuje, že je shodný s (5.34), pouze s opačnou konstantou. Nebudeme se jím tedy dále zabývat.

Poslední metrikou rodiny je

$$(F63): \; ds^2 = w^2(du^2 - \cosh^2 u dv^2) - dw^2,$$
$$x^0 = w\sinh u, \quad x^1 = w\cosh u\cos v, \quad x^2 = w\cosh u\sin v, \quad w > 0, \quad 0 < v < 2\pi, \quad u \in \mathbb{R},$$
$$w = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^0)^2}, \quad v = \arctan\frac{x^2}{x^1},$$
$$u = \operatorname{arcsinh}\frac{x^0}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^0)^2}} \tag{5.38}$$
a hledáním systémů (5.32) s IP navíc opět narazíme na systém shodný s (5.34).

5.1.7 Rodina F7

Tato rodina obsahuje pouze jednu metriku, přesto ji prozatím zapíšeme obecně jako

$$ds^2 = w^2(f(v)du^2 - dv^2) - dw^2, \tag{5.39}$$

tj. $a = w, v$, $\alpha = u$, což znamená požadavek

$$A^v = A^w = 0, \quad A^u = -\frac{m(v)}{w^2} - n(w) \quad \wedge \quad A^u A_u = f(v)w^2\left(\frac{m(v)}{w^2} + n(w)\right)^2 \overset{!}{=} -\frac{M(v)}{w^2} - N(w)$$
$$\Leftrightarrow w^2 f(v)\left(\frac{m^2(v)}{w^4} - \frac{2m(v)n(w)}{w^2} + n^2(w)\right) = \frac{M(v)}{w^2} - N(w), \tag{5.40}$$

což, analogicky předchozím rodinám, splní $n(w) = 0$ a $m(v)$ libovolná, tj. $A_u(v)$. Ověření z L-C podmínky vypadá analogicky předchozím rodinám.

IP jsou pak
$$A^v = A^w = 0, \; A^u(v): \quad Q = \{p_u, \; p_v^2 - (p_u^A)^2/f(v)\}. \tag{5.41}$$
Když máme obecné předpisy, můžeme přejít k hledání případů s IP navíc. Nejprve ale uveďme explicitně metriku:

$$(F71): \; ds^2 = w^2(\sin^2 v du^2 - dv^2) - dw^2,$$

$$x^0 = w\sinh u \sin v, \quad x^1 = w\cosh u \sin v, \quad x^2 = w\cos v, \quad u>0, \quad 0<v<\pi, \quad w\in\mathbb{R},$$
$$w = \sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2-(x^0)^2}, \quad u = \operatorname{arccosh}\frac{x^0}{x^1},$$
$$v = \arccos\frac{x^2}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2-(x^0)^2}}. \tag{5.42}$$

Rovnice Lieovy derivace jsou

$$\begin{aligned}
&\text{Lvw:} \; -f(v)(e^{-u}c_2 - e^u c_3)/(\sin(v)w^2) = 0,\\
&\text{Lvu:} \; ((\sin(v)(\cos(v)c_2 + c_4 w)f'(v) + \cos^2(v)c_2 - \cos(v)c_4 w - 2c_2)f(v))e^{-u}+\\
&+(\cos(v)e^u\sin(v)c_3 + e^u\sin(v)wc_5 + \cos^2(v)c_1 - c_1)f'(v)+\\
&+(\cos^2(v)e^u c_3 - (e^u c_5 w - c_1\sin(v))\cos(v) - 2e^u c_3))/(\sin(v)w),\\
&\text{Luw:} \; -f(v)(-\cos(v)(e^{-u}c_2 + e^u c_3) + c^1\sin(v))/w^2 = 0.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Z prvních dvou rovnic $c_2 = c_3 = c_4 = 0$ a použijeme-li tuto skutečnost, poslední rovnici lze zjednodušit na $w(\sin(v)f'(v) - \cos(v)f(v))(c_5 e^u + c^4 e^{-u}) = 0$, což znamená, že systém má jeden případ s IP navíc:

$$A_v = A_w = 0, \;\; A_u = K\cos v: \quad Q_3 = \left(-p_u\coth v + p_v + \frac{2Ke^v}{e^{2v}-1}\right)e^u \tag{5.44}$$

a dalším závislým $\tilde{Q} = \left(p_u\coth v + p_v - \frac{2Ke^v}{e^{2v}-1}\right)e^{-u}$. Je zajímavé si všimnout, že všechny případy s IP navíc v rodinách F5, F6 a F7 měly tvar, v němž nenulová složka třípotenciálu odpovídá (až na konstantu) derivaci odmocniny funkce f vystupující v metrice. Podívejme se ještě na převod a limitu. Po převedení máme

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{Kx^2}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2-(x^0)^2}((x^0)^2-(x^1)^2)},\\
A_1 &= -\frac{Kx^0x^2}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2-(x^0)^2}((x^0)^2-(x^1)^2)x^1}, \quad A_2 = 0,
\end{aligned} \tag{5.45}$$

tudíž

$$F_{01} = -\frac{Kx^2\sqrt{(x^0)^2-(x^1)^2}}{x^1\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2-(x^0)^2}^3}, \quad F_{01} = \frac{K\sqrt{(x^0)^2-(x^1)^2}}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2-(x^0)^2}^3},$$
$$F_{21} = \frac{Kx^0\sqrt{(x^0)^2-(x^1)^2}}{x^1\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2-(x^0)^2}^3}. \tag{5.46}$$

Situace je velmi podobná, jako u předcházející rodiny - pro K v němž nevystupuje c jsou pole limitně nulová, pokud bychom je chtěli nenulová, mohli bychom toho dosáhnout při předpokladu $K = kc$, pak bychom ale pole měli v limitě komplexní. Jedná se tedy o stav, kdy, přesto, že relativistický systém má smysl, jeho limita nemá smysl/není fyzikální. To se nezdá být v principu zase tak zvláštní, nakonec, elektromagnetismus je prakticky teorie relativistická, není tedy patrně nutné, aby všechny nerelativistické obdoby měly smysl. U tohoto systému se navíc zdá, že povolíme-li formálně v limitě $k = \tilde{k}I$, abychom vyrušili imaginární jednotku, nezískáváme systém s odpovídajícím množstvím IP.

5.1.8 Rodina F8

Tato rodina má tři metriky tvaru

$$ds^2 = f(v)g(w)du^2 - (f(v) \pm g(w))(dv^2 + dw^2), \tag{5.47}$$

tedy $a = v, w$ $\alpha = u$. Podmínky na separabilní potenciál jsou

$$A^v = A^w = 0, \quad A^u = -\frac{m(v) + n(w)}{f(v) \pm g(w)}$$
$$\wedge \quad A^u A_u = f(v)g(w)\left(\frac{m(v) + n(w)}{f(v) \pm g(w)}\right)^2 \stackrel{!}{=} -\frac{M(v) + N(w)}{f(v) \pm g(w)}. \tag{5.48}$$

To mimo konstanty splnit nelze. Tato rodina tedy nemá netriviální separabilní potenciál. Ověření přes L-C (1.5): netriviální podmínka na vw po vydělení předfaktorem má koeficient u p_u: $-f(v)g(w)(f(v) + g(w))\partial_{vw}A_u + g'(w)f^2(v)\partial_v A_u + f'(v)g^2(w)\partial_w A_u$, po zahrnutí požadavku na jeho nulovost zbývá nultá mocnina tvaru $f(v)g(w)(f(v) + g(w))\partial_v A_u \partial_w A_u$, v obou možnostech pak ale z první rovnice plyne konstantní závislost.

5.1.9 Rodina F9

Zde se nachází 12 metrik tvaru

$$ds^2 = (f(u) \pm g(v))(du^2 - dv^2) - f(u)g(v)dw^2 \quad \text{resp.}$$
$$ds^2 = (g(v) \pm f(u))(du^2 - dv^2) - f(u)g(v)dw^2, \tag{5.49}$$

tedy $a = u, v$, $\alpha = w$ a

$$A^u = 0 = A^v, \quad A^w = \frac{m(u) - n(v)}{f(u) \pm g(v)}$$
$$\wedge \quad A^w A_w = -f(u)g(v)\frac{(m(u) - n(v))^2}{(f(u) \pm g(v))^2} \stackrel{!}{=} \frac{M(u) - N(v)}{f(u) \pm g(v)}, \tag{5.50}$$

což opět nemá netriviální řešení, rodina je tedy bez separabilních potenciálů. Ověření probíhá zcela analogicky předchozí rodině, pouze u a w si vymění místa, a změní se některá znaménka.

5.1.10 Rodiny F10, F11, F12

Rodina 10, resp. 11, resp. 12 obsahuje 4, resp. 4, resp. 10 metrik tvarů

$$(F10): \; ds^2 = du^2 - u^2(f(v) + g(w))(dv^2 + dw^2),$$
$$(F11): \; ds^2 = w^2(f(u) - f(v))(du^2 - dv^2) - dw^2,$$
$$(F12): \; ds^2 = f(u, v, w)du^2 - g(u, v, w)dv^2 - k(u, v, w)dw^2 \tag{5.51}$$

(přičemž v poslední uvedené mají funkce nějaký konkrétní vztah a tvar, to pro nás ale není důležité). To ale znamená, že ve všech případech $a = u, v, w$ a tedy tyto metriky nemají netriviální separabilní potenciál.

Závěr

V práci jsme se zaměřili na systematické zkoumání speciálně relativistických jednočásticových systémů s elektromagnetickým polem ve dvou a třech prostorových rozměrech, které jsou integrabilní díky IP prvního či druhého řádu ve složkách hybnosti (a případně mají další nezávislé IP prvního řádu navíc). K tomu jsme potřebovali definice a tvrzení z oblasti (super)integrability, speciální relativity a separability HJR uvedené v Kapitole 1 a hamiltonovské popisy relativistické dynamiky rozebrané v Kapitole 2. Tyto popisy jsou buď kovariantní (4D resp. 3D), nebo se odehrávají v 3+1 (resp. 2+1) rozštěpení Minkowského prostoročasu. Oboje má své výhody i nevýhody, popis volíme podle situace a účelu. Zjistili jsme však, že IP a jejich případná involuce se mezi popisy přenášejí. Dále jsme v této kapitole krátce uvedli historii (systematického) zkoumání relativistické (super)integrability.

V Kapitole 3 jsme zjistili, jak vypadají obecné IP prvního a druhého řádu v hybnosti (počítali jsme v kovariantním popisu), především v nejvyšších mocninách hybnosti. Konkrétně IP prvního řádu jsou právě poincaréovské IP, tj. lineární kombinace prvků Poincarého algebry - hybností, momentů hybností a boostových prvků. Tím se liší od IP prvního řádu v nerelativistickém případě, kde vystupují prvky Eukleidovy algebry (v časově nezávislém případě jejich lineární kombinace, při povolení časové závislosti jsou koeficienty kombinace funkce času). Nejvyšší mocniny hybností v obecném relativistickém IP druhého řádu pak odpovídají součinům dvojic Poincarého algebry. (V klasickém případě je situace opět analogická s Eukleidovou algebrou.) Provedené zkoumání nám poskytlo lepší vhled do převádění IP z relativistického systému do jeho nerelativistické obdoby (toto probíhá limitou, při převodu však z IP mohou zmizet některé členy, může se změnit řád, časová závislost i počet, může být třeba změnit kalibraci apod.).

Výsledky Kapitoly 3 přímo naznačují metody klasifikace systémů integrabilních v prvním a druhém řádu. V Kapitole 4 jsme klasifikovali systémy integrabilní v prvním řádu a dvou a třech prostorových rozměrech. Protože jsou IP prvního řádu poincaréovské, potřebovali jsme komutativní podalgebry 3D resp. 4D Poincarého algebry rozměru 2 resp. 3. Tyto jsme částečně nalezli, částečně převzali z [35]. U 3D Poincarézy bylo takových podalgeber 7, u 4D analogie 9. U každé takové třídy jsme tedy požadovali zachování množiny IP prvního řádu tvaru součtu daného prvku algebry a obecné funkce souřadnic. Zároveň jsme požadovali, aby tyto byly vzájemně v involuci. Z těchto rovnic jsme byly schopni určit obecné tvary elektromagnetického pole zachovávající dané IP. V případě dvou prostorových rozměrů jsme ještě hledali speciální případy nalezených systémů mající další nezávislé IP prvního řádu. Našli jsme řadu různých případů s IP navíc. Dva jejich speciální případy měly maximální počet IP, bylo tedy možné přímo z IP určit (a vykreslit) jejich trajektorie. U konkrétních systémů jsme též určili jejich nerelativistické limity a ukázalo se, že některým v nerelativistickém případě přibývá jeden nezávislý IP prvního řádu.

V Kapitole 5 jsme naznačili, jakým způsobem by se dělala obecná klasifikace systémů integrabilních ve druhém řádu (založeno na analogickém postupu pro nerelativistické systémy). Jelikož jsme ale chtěli systémy explicitně zkonstruovat, omezili jsme se pouze na separabilní systémy, které mají vlastnost integrability (nejvýše) druhého řádu automatickou. Využili jsme klasifikaci neekvivaletních ortogonálních metrik na 3D Minkowského prostoročase, v nichž se separuje Hamiltonián volné částice z [14] (protože to je nutnou podmínkou separability systémů s elektromagnetickým polem). Hledáním separabilních potenciálů jsme zjistili, že pouze tři z 12 uvedených rodin metrik mají separabilní potenciály integrabilní ve druhém řádu, celkem se jedná o 7 metrik (tedy i 7 systémů). K těmto jsme nalezli příslušné IP. Hledali jsme též jejich podpřípady mající další nezávislé IP prvního řádu, pro každou rodinu jsme nalezli jeden (nacházel se vždy v průniku potenciálů separabilních ve všech metrikách rodiny a měl specifický tvar). Tento jsme převedli do pseudokartézkých souřadnic a provedli limitu. Fyzikálně přijatelná se však zdála být jen v jednom případě. U jednoho ze systémů byl nalezen maximální počet IP, proto bylo možné z nich vyjádřit (a vykreslit) přímo jeho trajektorii.

Co se navázání na tuto práci týče, bylo by zajímavé více prostudovat, co je důvodem většího množství dodatečných IP v nerelativistickém případě u systémů nalezených v sekci 4.2. Může se jednat např. o limity dosud neobjevených relativistických IP druhého řádu, o rozpad jednoho relativistického IP na dva či změnu funkcionální závislosti v důsledku limity. (Víme, že někdy např. v limitě vymyzela závislost na nějaké souřadnicí, proto bylo vidět prakticky, jak nový IP vznikne, nicméně to nepopírá předchozí možnosti.) Taktéž by bylo vhodné tyto systémy zkusit vyřešit (toto jsme zde provedli jen pro systémy s maximálním počtem IP). Dalším přirozeným pokračováním je nalezení systémů s dodatečnými lineárními IP i pro systémy ve 3 prostorových rozměrech (tj. ze sekce 4.3).

Nalezení (všech) separabilních systémů mající 3 prostorové dimenze se jeví jako značně ambiciózní plán, nicméně dalo by se začít např. metrikami, v níž lze provést rozštěpení v instantní formě (pak by se zároveň jednalo o navázání na výzkumný úkol [19]), u těchto systémů by pak opět šlo hledat případy s dodatečnými (lineárními) IP. Alternativou by bylo se zaměřit na jeden systém souřadnic (např. kartézský, jehož separabilní systémy byly již nalezeny ve [19]), hledat systémy s dodatečnými IP a analyzovat je. Konečně, analýza komutujících kvadratických prvků univerzální obalové algebry Poincarého algebry (alespoň 3D verze), podobná klasifikaci v [29] pro Eukleidovu algebru, by nám umožnila začít kompletní klasifikaci integrability druhého řádu v relativistickém případě.

Literatura

[1] L. Ansell and A. Ilderton: Superintegrable relativistic systems in scalar background fields. J. Phys. A: Math. Theor. 51, 495203 (2018)

[2] B. L. G. Bakker: Forms of relativistic dynamics. In H. Latal and W. Schweiger, ed.: Methods of quantization, Springer, 2001

[3] S. Benenti: Separation of Variables in the Geodesic Hamilton-Jacobi Equation. In P. Donato et. al., ed. Symplectic Geometry and Mathematical Physics Boston, MA: Birkhäuser Boston, 1991

[4] S. Benenti, C. Chanu and G. Rastelli: Variable separation for natural Hamiltonians with scalar and vector potentials on Riemannian manifolds. J. Math. Phys. 42, 2065 (2001)

[5] E. Bertschinger: General relativity notes: Hamiltonian formulation of particle motion [online]. Available from http://web.mit.edu/edbert/GR.html on 1.5 (2022)

[6] S. Bertrand and L. Šnobl: On rotationally invariant integrable and superintegrable classical systems in magnetic fields with non-subgroup type integrals. J. Phys. A: Math. Theor. 52, 195201 (2019)

[7] S. Bertrand, O. Kubů and L. Šnobl: On superintegrability of 3D axially symmetric non-subgroup-type systems with magnetic fields. J. Phys. A: Math. Theor. 54, 015201 (2020)

[8] P. A. M. Dirac: Forms of relativisticd dynamics. Rev. Mod. Phys. 21, 392 (1949)

[9] P. A. M. Dirac: Generalized Hamiltonian Dynamics. Can. J. Math. 2, 129 (1950)

[10] J. Formánek: Úvod do relativistické kvantové mechaniky a kvantové teorie pole 1, Karolinum, 2004

[11] F. Fournier, L. Šnobl and P. Winternitz: Cylindrical type integrable classical systems in a magnetic field. J. Phys. A: Math. Theor. 53, 085203 (2019)

[12] T. Heinzl: Light-Cone Quantization: Foundations and Applications. In H. Latal and W. Schweiger, ed.: Methods of quantization, Springer, 2001

[13] T. Heinzl and A. Ilderton: Superintegrable relativistic systems in spacetime-dependent background fields. J. Phys. A: Math. Theor. 50, 345204 (2017)

[14] J. Horwood and R. G. McLenaghan: Orthogonal separation of variables for the Hamilton-Jacobi and wave equations in three dimensional Minkowski space. J. Math. Phys. 49, 023501 (2008)

[15] E. G. Kalnins: Separation of Variables for Riemannian Spaces of Constant Curvature, Longman Scientific & Technical, 1986

[16] O. Kubů and L. Šnobl: Superintegrability and time-dependent integrals. Arch. Math. 55, 309 (2019)

[17] O. Kubů, A. Marchesiello and L. Šnobl: Superintegrability of separable systems with magnetic field: the cylindrical case. J. Phys. A: Math. Theor. 54, 425204 (2021)

[18] T. Lehečková: Relativistické superintegrabilní systémy, bakalářské práce, České vysoké učení technické v Praze, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, 2020

[19] T. Lehečková: Relativistické systémy - superintegrabilita a separabilita, výzkumný úkol, České vysoké učení technické v Praze, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, 2021

[20] H. Leutwyler and J. Stern: Relativistic Dynamics on a Null Plane. Ann. of Phys. 112, 94-164 (1978)

[21] T. Levi-Civitta: Sulla integrazione della equazione di Hamilton-Jacobi per separazione di variabili. Math. Ann. 59, 383 (1904)

[22] A. A. Makarov et al.: A systematic search for nonrelativistic systems with dynamical symmetries. Part I: The integrals of motion. Il Nuovo Cimento 52, 1061 (1967)

[23] Maplesoft: Maple 2021 [software]. Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., Waterloo, Ontario (2021)

[24] A. Marchesiello, L. Šnobl and P. Winternitz: Three-dimensional superintegrable systems in a static electromagnetic field. J. Phys. A: Math. Theor. 48, 395206 (2015)

[25] A. Marchesiello, S. Post and L. Šnobl: Third-order superintegrable systems with potentials satisfying nonlinear equations. J. Math. Phys. 56, 102104 (2015)

[26] A. Marchesiello and L. Šnobl: Superintegrable 3D systems in a magnetic field corresponding to Cartesian separation of variables. J. Phys. A: Math. Theor. 50, 245202 (2017)

[27] A. Marchesiello and L. Šnobl: An infinite family of maximally superintegrable systems in a magnetic field with higher order integrals. SIGMA 14, 092 (2018)

[28] A. Marchesiello and L. Šnobl: Classical superintegrable systems in a magnetic field that separate in Cartesian coordinates. SIGMA 16, 015 (2020)

[29] A. Marchesiello and L. Šnobl: Pairs of commuting quadratic elements in the universal enveloping algebra of Euclidean algebra and integrals of motion. J. Phys. A: Math. Theor. 55, 145203 (2022)

[30] G. McLenaghan, G. Rastelli and C. Valero: Complete separability of the Hamilton-Jacobi equation for the charged particle orbits in Liénard-Wiechert field. J. Math. Phys. 61, 122903 (2020)

[31] R. McLeneghan and C. Valero: Classification of the orthogonal separable webs for the Hamilton-Jacobi and Klein-Gordon equations on 3-Dimensional Minkowski space. SIGMA 18, 019 (2022)

[32] W. Miller, Jr, S. Post and P. Winternitz: Classical and quantum superintegrability with applications. J. Phys. A: Math. Theor. 46, 423001 (2013)

[33] C. Misner, K. Thorne and J. A. Wheeler: Gravitation, Cambrige University Press, 2017

[34] J. Patera, P. Winternitz and H. Zassenhaus: Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincaré group. J. Math. Phys. 16, 1597 (1975)

[35] J. Patera, P. Winternitz and H. Zassenhaus: Subgroups of the Poincaré group and their invariants. J. Math. Phys. 17, 977 (1976)

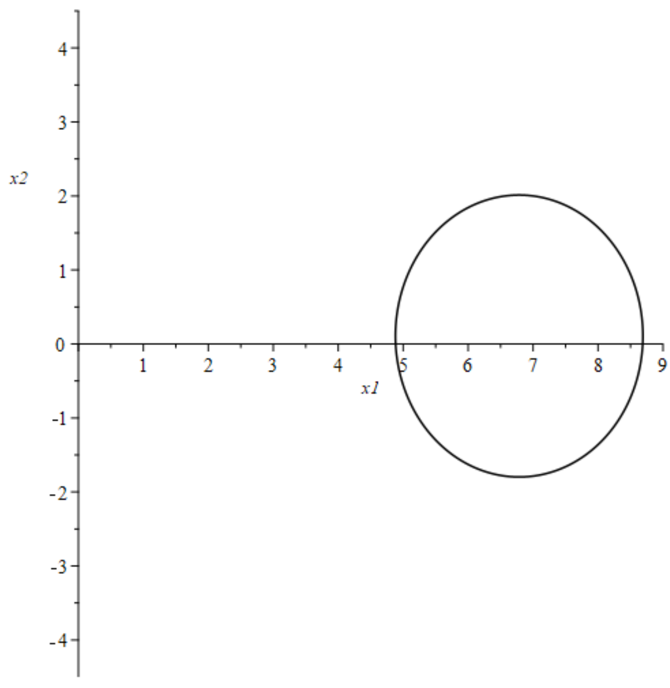
[36] G. Sardanashvily: Hamiltonian time-dependent mechanics. J. Math. Phys. 39, 2714 (1998)

[37] G. Sardanashvily: Time-dependent superintegrable Hamiltonian systems. Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 9, 1220016 (2012)

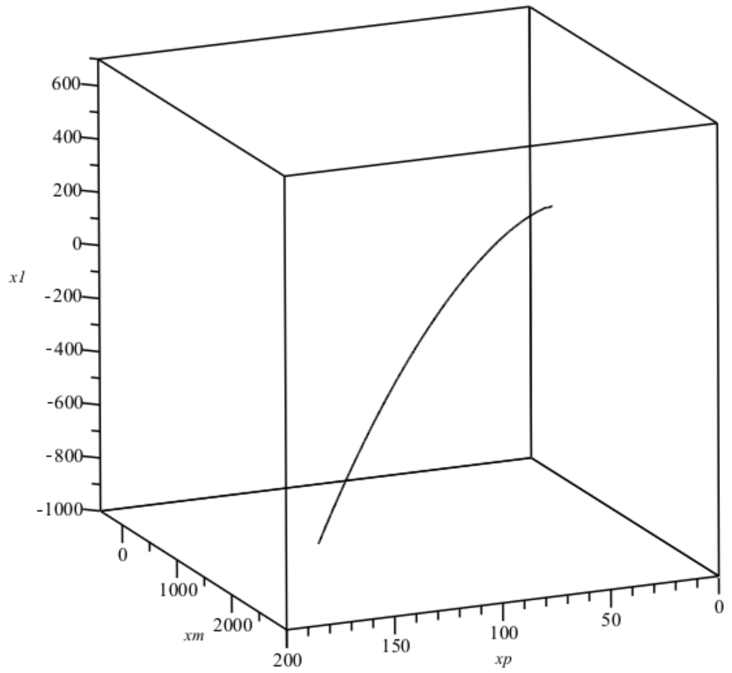
[38] B. Zweibach: A First Course in String Theory, Cambridge University Press, 2004

Příloha

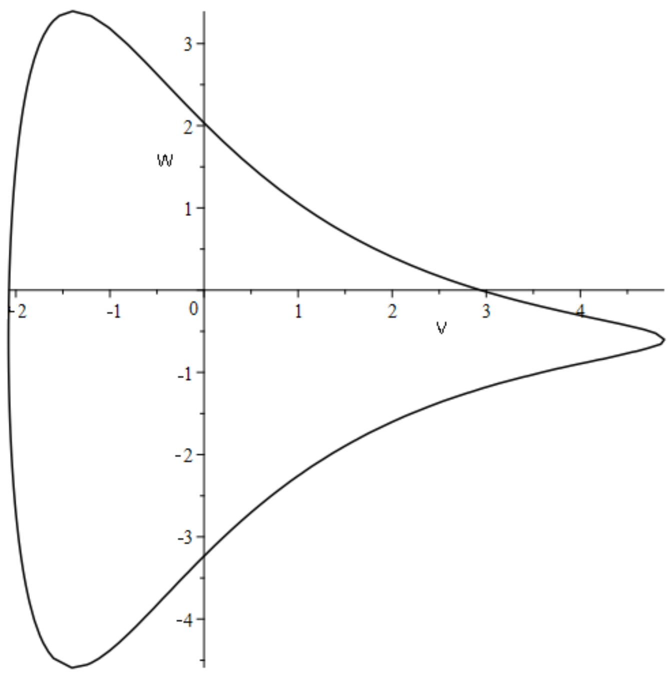
Zde uvádíme vykreslení trajektorií nalezených systémů s maximálním možným počtem IP nalezených v práci. Vše je vykresleno v jednotkách $1 = c = m_0 = -q$. Index 0 u souřadnic a hybností v popisech obrázků znamená volbu počátečních hodnot (tyto se dosadí do IP a tak určí jejich hodnotu pro dané počáteční podmínky). Omezené/uzavřené trajektorie jsou vykresleny celé (Obrázek 1 a 3), v případě neomezených/neuzavřených trajektorií je vykreslení ukončeno v místě, kde je již z tvaru křivky patrné, jak bude pokračovat dále (Obrázek 2 a 4).



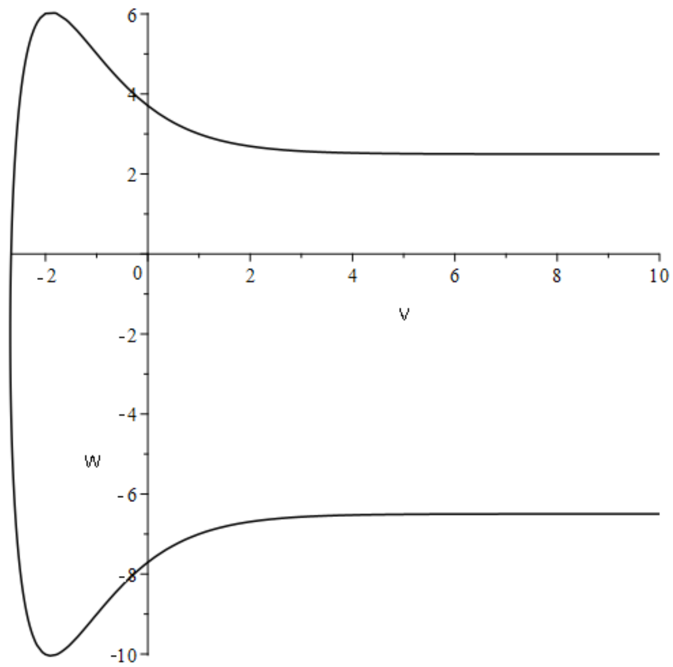
Obrázek 1: 2+1 trajektorie (4.14) systému 2/ (4.13) pro volbu $K_0 = 0$, $K_1 = 2.8$, $p_{10} = 0.3$, $p_{20} = 0.6$; $x_0^1 = 7$, $x_0^2 = 2$.



Obrázek 2: 3D trajektorie systému 12/ (4.38) pro volbu $K = 2, p_{10} = 0.1, p_{m0} = 0.4, p_{p0} = 0.7,\ x_0^p = 0.6446122767,\ x_0^1 = 0.4693764592,\ x_0^m = 2.493698916.$



Obrázek 3: 2+1 trajektorie (5.24) systému (5.23) pro volbu $K = 4,\ p_{v0} = 2.6344,\ p_{w0} = 1,\ v_0 = 0,\ w_0 = 2.0344.$



Obrázek 4: 2+1 trajektorie (5.24) systému (5.23) pro volbu $K = 2$, $p_{v0} = 1.5$, $p_{w0} = 0.3$, $v_0 = 1$, $w_0 = 3$.